

## SPIS TREŚCI NUMERU 2 (501)

Czy trzeba dowodzić rzeczy  
oczywistych?

Wiktor Bartol str. 1



O pożytkach z lodu  
w wiaderku  
Magdalena Fikus

str. 3

Wieże Hanoi

Joanna Jaszewska str. 4

Delta i fizyka cząstek  
elementarnych (II):

Nie każdy wie,  
jak działa Model Standardowy  
Piotr Chankowski

str. 6



Zadania

str. 9

Wiem, że coś wiesz  
Wojciech Czerwiński

str.10

Orzeł czy reszka?  
Edward Stachowski

str.11

Sferostożki więcej i bardziej  
Przemysław Kiciak,  
Kamila Łyczek

str.12

Informatyczny kącik olimpijski  
(90): Zapis wieżowy  
Tomasz Idziaszek

str.14

Odwracamy, obracamy...

str.15

Czegóż to dawniej uczono  
na wykładach algebry.  
Twierdzenie Sturm  
Maciej Bryński

str.16

Klub 44

str.18

Aktualności

str.23

Prosto z nieba:  
Ocean pod lodem

str.24

Niebo w lutym

str.24



Trójkątne dowody  
Joanna Jaszewska

str.25

W następnym numerze polecamy Gargamelle,



czyli kolejny odcinek historii cząstek elementarnych i *Delty*

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Tomasz Kazana, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nacz., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nacz., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2016 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–17<sup>00</sup>.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numer archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

**Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):** [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

**Można nas też znaleźć na** [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**



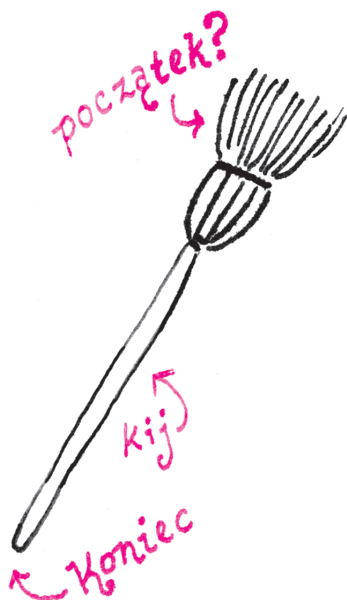
Warsaw Center  
of Mathematics  
and Computer Science

[wcmcs.edu.pl](http://wcmcs.edu.pl)

# Czy trzeba dowodzić rzeczy oczywistych?

Wiktor BARTOL

Każda nauka ścisła ma własne metody potwierdzania swoich tez. Dla większości z nich weryfikacja twierdzeń polega na konfrontacji z rzeczywistością. Matematyka jest jedyną z tych nauk, w której owa rzeczywistość nie jest ostateczną (ani jakkolwiek) metodą sprawdzania zdań aspirujących do wzbogacenia zasobu wiedzy matematycznej. Weryfikatorem twierdzeń jest dowód. Mowa tu o tzw. matematyce czystej lub teoretycznej; zauważmy jednak, że fizyczna rzeczywistość weryfikuje stosowalność instrumentów matematycznych, nie ich wartość matematyczną.



## Co to jest dowód?

Każdy, kto uprawia matematykę (na dowolnym poziomie), ma do czynienia z dowodami. Wszak już w nauczaniu początkowym „dowodziliśmy”, nie wiedząc o tym, że jeśli  $x + 3 = 5$ , to  $x = 2$  oraz, jeśli  $x = 2$ , to  $x + 3 = 5$ . Czymże zatem jest dowód? Powiedzmy, poprawnym rozumowaniem, w którym każde kolejne zdanie jest wnioskiem z poprzednich. Co jednak znaczy „poprawne rozumowanie”? Co znaczy „wniosek”? Wreszcie – co znaczy „zdanie”? I co zrobić z pierwszym w kolejności zdaniem, dla którego nie ma zdań „poprzednich”?

Zawodowy matematyk, niezajmujący się logiką lub podstawami matematyki, nie jest zainteresowany ścisłą odpowiedzią na powyższe pytania. O poprawności rozumowania i wyprowadzonych wniosków zaświadcza środowisko, czyli inni matematycy, którzy, czytając zapis takiego rozumowania, uznają je za wystarczające do stwierdzenia poprawności wyniku lub nie. Odwołują się przy tym do intuicyjnego rozumienia terminów, o których mowa w poprzednim akapicie. W szczególności znają odpowiedź na pytanie o pierwsze zdanie rozumowania (jedno lub kilka): ma to być zdanie wcześniej już uznane za twierdzenie lub aksjomat. Dowód jest zatem rozumowaniem, w którym wychodzimy od zdań już uznanych i, stosując poprawne wnioskowanie, dochodzimy do zdania, które chcemy – i możemy – dołączyć do teorii.

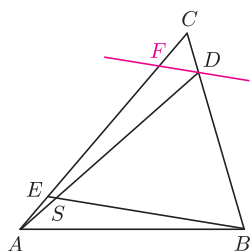
Dopóki jednak odwołujemy się do intuicji, musimy się pogodzić z faktem, że może ona działać różnie u różnych ludzi. Co robić, gdy występuje rozbieżność między intuicjami? I tu metoda jest mocno ugruntowana w praktyce: należy rozbić dowód na mniejsze, coraz mniejsze fragmenty tak długo, aż nikt z oceniających nie będzie miał wątpliwości, że każde zdanie rzeczywiście daje się wyprowadzić z poprzednich zgodnie z ogólnymi regułami. A niżej, jak siatka zabezpieczająca wyczyny cyrkowców na wysoko zawieszonych linach, jest formalne pojęcie dowodu w teorii formalnej: to ciąg formuł w (symbolicznym) języku tej teorii taki, że każda formuła jest albo aksjomatem, albo wynika z poprzednich na mocy jednej z przyjętych reguł wnioskowania. Przypomnijmy, że użyte tu pojęcia składników teorii formalnej muszą być jednoznacznie zdefiniowane (tu tylko w poglądowym skrócie): dla ustalonego alfabetu formuła jest wyrażeniem zbudowanym z symboli języka za pomocą ściśle określonych zasad, aksjomat jest wybraną formułą, reguła wnioskowania to zasada pozwalająca przejść od jednych wyrażeń (formuł) do innych, zwanych wnioskami z poprzednich. Działając w teorii formalnej, nie odwołujemy się do znaczeń symboli alfabetu, formuł itp. – przekształcamy je zgodnie z formalnymi regułami.

## Co to jest oczywistość?

„Oczywistość” jest – oczywiście – sprawą subiektywną, jednak bardzo często jesteśmy zgodni co do oczywistości wielu faktów matematycznych. Na ogół oznacza to, że albo dowód takiego faktu jest na tyle prosty, że od razu go widzimy oczyma rozumu, albo dowód twierdzenia widzieliśmy już tyle razy, że nie musimy się wciąż do niego odwoływać, by użyć danego twierdzenia. Bywają jednak sytuacje, kiedy tylko wydaje nam się, że sprawa jest oczywista. Podejrzewam, że jeśli nie każdy, to prawie każdy matematyk ma za sobą doświadczenie nadmiernej wiary w oczywistość jakiegoś stwierdzenia, które okazywało się fałszywe,



**Rozwiązanie zadania M 1483.**  
Niech  $F$  będzie takim punktem na odcinku  $CE$ , że proste  $DF$  i  $BE$  są równoległe.



Wówczas z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{EF}{FC} = \frac{BD}{DC} = 4,$$

a stąd

$$EF = \frac{4}{5} \cdot CE = 4 \cdot EA.$$

Ponownie korzystając z twierdzenia Talesa, mamy

$$\frac{DS}{SA} = \frac{FE}{EA} = 4.$$

a w najlepszym razie – daleko nieoczywiste. Żłudne oczywistości wynikają jednak także z nadinterpretacji pojęć. Trudno w tej kwestii wysnuwać ogólne konkluzje, popatrzmy zatem na przykład, którego dostarcza teoria mnogości.

Teoria mnogości bywa źródłem wielu pokus uznania rzeczy za oczywiste. Czyż nie jest oczywiste, że liczb rzeczywistych jest więcej niż naturalnych? Po co dowodzić, że zbiór ma więcej podzbiorów niż elementów? Co gorsza, czyż nie jest oczywiste, że liczb wymiernych jest więcej niż liczb naturalnych? Pokusa kryje się w słowie *więcej*.

Za przykład niech posłuży twierdzenie Cantora–Bernsteina, zasługujące na miano młota na biednych (matematycznie) studentów. Sformułujmy je w wersji łagodnej (gdzie  $|X|$  oznacza moc zbioru  $X$ ):

**Twierdzenie (wersja 1).** *Jeśli  $|A| \leq |B|$  oraz  $|B| \leq |A|$ , to  $|A| = |B|$ .*

Podejrzenie oczywistości bierze się, rzecz jasna, z błędnej interpretacji symbolu  $\leq$ , kojarzonego ze „zwykłą”, liczbową niewiększością, dla której podobne twierdzenie mamy niemal we krwi. Pokusa znika, gdy sformułujemy twierdzenie w sposób ujawniający znaczenie tego symbolu:

**Twierdzenie (wersja 2).** *Jeśli istnieje funkcja różnowartościowa ze zbioru  $A$  w zbiór  $B$  oraz istnieje funkcja różnowartościowa ze zbioru  $B$  w zbiór  $A$ , to istnieje bijekcja ze zbioru  $A$  w zbiór  $B$  (czyli połączenie elementów zbioru  $A$  i elementów zbioru  $B$  w rozłączne pary).*

Teraz twierdzenie wydaje się nieco mniej oczywiste – ale może jednak nie? W takim razie popatrzmy na dowód – w wersji rzadziej pokazywanej na wykładach z tzw. wstępu do matematyki.

### Dowód „oczywistego” twierdzenia Cantora–Bernsteina

Dowód twierdzenia Cantora–Bernsteina wyprowadzimy z dwóch twierdzeń pomocniczych, ciekawych samych w sobie (niżej  $P(X)$  oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru  $X$ ).

**Twierdzenie Tarskiego.** *Niech  $f : P(A) \rightarrow P(A)$  będzie funkcją taką, że jeśli  $B, C \in P(A)$  oraz  $B \subseteq C$ , to  $f(B) \subseteq f(C)$ . Wówczas istnieje punkt stały funkcji  $f$ , czyli istnieje  $X \in P(A)$  taki, że  $f(X) = X$ .*

*Szkic (a raczej zachęta do dowodu.* Niech  $\mathbf{B} = \{B \in P(A) : B \subseteq f(B)\}$ . Wówczas  $f(\bigcup \mathbf{B}) = \bigcup \mathbf{B}$ . ( $\bigcup \mathbf{B}$  oznacza sumę wszystkich zbiorów z rodziny  $\mathbf{B}$ ).

**Lemat Banacha.** *Niech  $f : A \rightarrow B$  oraz  $g : B \rightarrow A$ . Wówczas istnieją rozłączne zbiory  $A_0, A_1 \subseteq A$  oraz rozłączne zbiory  $B_0, B_1 \subseteq B$  takie, że  $A_0 \cup A_1 = A$ ,  $B_0 \cup B_1 = B$  oraz  $f(A_0) = B_0$  i  $g(B_1) = A_1$ .*

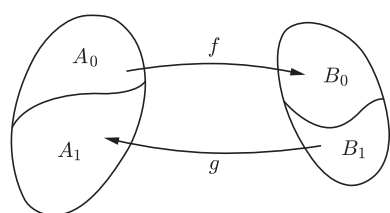
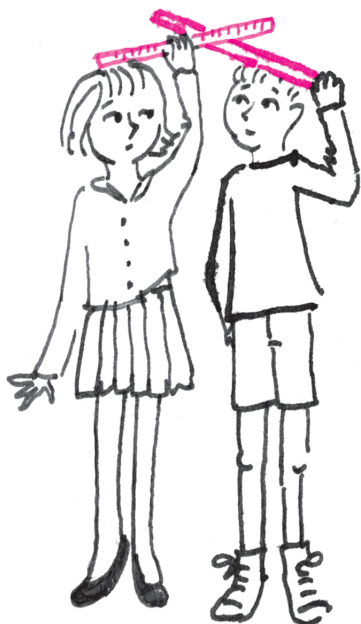
*Szkic (a raczej zachęta do dowodu.* Niech  $F(X) = A \setminus g(B \setminus f(X))$  dla  $X \in P(A)$ . Wówczas funkcja  $F$  spełnia założenia twierdzenia Tarskiego, istnieje zatem zbiór  $A_0$  taki, że  $A_0 = F(A_0)$ . Wystarczy teraz przyjąć  $A_1 = A \setminus A_0$ ,  $B_0 = f(A_0)$  oraz  $B_1 = B \setminus B_0$ .

**Dowód twierdzenia Cantora–Bernsteina.** Niech  $f : A \rightarrow B$  oraz  $g : B \rightarrow A$  będą funkcjami różnowartościowymi. Wówczas istnieją rozłączne zbiory  $A_0, A_1 \subseteq A$  oraz rozłączne zbiory  $B_0, B_1 \subseteq B$  (na mocy lematu Banacha) takie, że  $|A_0| = |B_0|$  oraz  $|A_1| = |B_1|$ . Stąd wynika równoliczność zbiorów  $A$  i  $B$ .

Oczywiste?

### Konkluzje

Pora wyciągnąć proste wnioski z powyższych rozważań. Po pierwsze: nie każda oczywistość jest oczywista. Po drugie: jeśli coś wydaje się oczywiste, bo „to widać”, to ostateczną instancją jest dowód, jedyny weryfikator matematycznych twierdzeń. Po trzecie: dowodząc zdania, które uważamy za kandydata na twierdzenie, upewniamy się, że ma ono prawo zostać twierdzeniem. I po czwarte: poszukiwanie, a raczej wymyślenie dowodu, jest jedną z większych przyjemności zawodowych matematyka.



## O pożytkach z lodu w wiaderku

W 1972 roku w Zakładzie Biochemii Uniwersytetu Stanforda wykonano pracę, która już na zawsze zmieniła obraz i przyszłość genetyki molekularnej. Pozornie skromna i bez praktycznego znaczenia – połączono dwie cząsteczki DNA: jedna pochodziła z bakteriofaga  $\lambda$  (czyli ze świata bakterii), druga z małpiego wirusa onkogenego SV40 (czyli ze świata ssaków). Planowano próby wprowadzenia tej hybrydy z jednej strony do bakterii, z drugiej do komórek małp i popatrzania, co się stanie.

Ale tego już nie zrobiono, ponieważ badacze zdali sobie sprawę, że wynik może stanowić zagrożenie, nawet globalne i postanowili najpierw ocenić takie niebezpieczeństwo. A także nazwali samą technikę inżynierią genetyczną.

Niedługo okazało się, że wycinać można fragmenty DNA powtarzalnie z danego preparatu z precyzyjną dokładnością. Okazało się także, że końce fragmentów mają budowę chemiczną umożliwiającą „sklejanie się” różnych fragmentów wyciętych tym samym enzymem. Enzymem – ponieważ procedurę nacinania wykonano enzymem (z grupy enzymów restrykcyjnych) wypreparowanym po sąsiedztwie, w Uniwersytecie w San Francisco. Zrobiło się ciekawie: jeżeli każdy DNA nacięty enzymem (nazwanym Eco RI) ma takie lepkie końce, to nie ma też i kresu możliwości łączenia w jedną cząsteczkę DNA otrzymanego z różnych źródeł. Z zazdrością myślę o tych ludziach z obu uniwersytetów – ile mogli mieć myśli szalonych a prawdopodobnych, w czasach gdy zdali sobie sprawę z implikacji swojego dziwnego doświadczenia. Ile nieprzespanych nocy, zarwanych weekendów! Sami napisali o perspektywie uzyskiwania leków białkowych za pośrednictwem bakterii, którym się doda ludzki gen. A drugi szalony pomysł to było wprowadzenie do dowolnych roślin układu genów pozwalających na przyswajanie azotu atmosferycznego, co załatwiłoby raz na zawsze konieczność wytwarzania nawozów azotowych (żegnajcie zakłady azotowe w Puławach). Insulinę do aptek wprowadzono w 1982 roku, azotowi w powietrzu dano spokój.

W kampusie harwardzkim, a może w Bethesdzie, pojawił się człowiek z wiaderkiem z drobno tłuczonym lodem, a w nim próbówki z preparatami Eco RI i jeszcze kilkoma podobnymi enzymami. Kupując enzymy, unikało się kilkunastu dni własnej preparatyki. Genetycy w kampusie kupowali, bo zdali sobie sprawę, że zaczęła się rewolucja molekularna i kto pierwszy, ten lepszy. Nagrodę Nobla z tej grupy uczonych otrzymał w roku 1980 Paul Berg ze Stanforda, rekomendując rozmowę z nim zarejestrowaną w książce Wiktora Osiatyńskiego *Zrozumieć Świat*. Człowiek z wiaderkiem założył jedną z największych obecnie firm produkujących odczynniki do manipulacji materiałem genetycznym.

W 1976 roku w Instytucie Biochemii i Biofizyki PAN postanowiliśmy zostać inżynierami genetycznymi. Wiaderka z lodem nikt po naszej ulicy nie nosił. Trzeba było zdobyć odpowiedni szczep *E. coli*, wytwarzający Eco RI. Z tego szczepu wypreparować preparat enzymatyczny tnący DNA. Uzyskać szczep bakterii z plazmidem, który mógł być użyty jako znacznik aktywności naszego preparatu Eco RI. Opanować nową dla nas technikę rozdziału DNA w tzw. żelach agarozowych. Zdobyć, tak, zdobyć, bo to były czasy przydziałów dla instytucji z centralnej puli tzw. dewiz, ograniczonych, z koniecznością zaplanowania zakupu na rok z góry. Nikogo to nie obchodziło, że rok wcześniej nikt nie wiedział o rewolucyjnym pomysle ze Stanford.

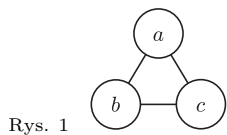
Polak potrafi, trzeba było „uruchomić” znajomości – w jednym zakładzie był kolega z różnymi szczepami bakteryjnymi, w innym ktoś miał agarozę i nie wiedział, do czego może mu się kiedyś przydać (bo zakupił na wszelki wypadek rok przedtem), w innym „chodziły” metody separacji białek z mieszaniny substancji. W sumie, jeżeli te wszystkie procedury się udały za pierwszym podejściem, przygotowanie do pierwszego doświadczenia musiało trwać około pół roku. W tym czasie pan w Harvardzie miał już firmę i kilkadziesiąt enzymów restrykcyjnych.

Chętnie opowiedziałabym Czytelnikom za miesiąc, co było dalej...  
 Przeczytacie?

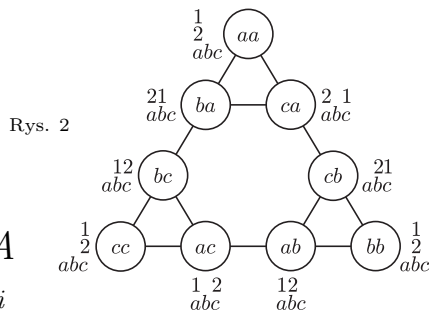
Magdalena FIKUS



Paul Berg. Nagrodę Nobla otrzymał za wprowadzenie enzymatycznych metod przecinania nici DNA w zaplanowanym rejonie oraz metod sklejania nici pochodzących z różnych organizmów.



Rys. 1

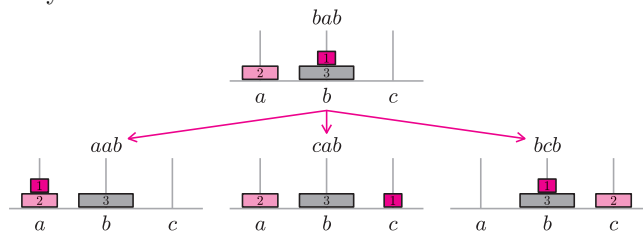


Rys. 2

## Wieże Hanoi

Joanna JASZUŃSKA

Znana łamigłówka *wieże Hanoi* ma następujące reguły. Na trzech słupkach (oznaczymy je literami  $a, b, c$ ) rozmieszczono  $n$  krążków o różnych rozmiarach (ponumerujemy je od najmniejszego:  $1, 2, \dots, n$ ) w taki sposób, by nigdy większy krążek nie leżał na mniejszym. W pojedynczym ruchu można przelożyć górny krążek z jednego słupka na górę innego, o ile jest on mniejszy od dotychczas leżących tam krążków. Oto przykładowe dozwolone ustawienie dla  $n = 3$  oraz ruchy możliwe do wykonania w tym momencie:

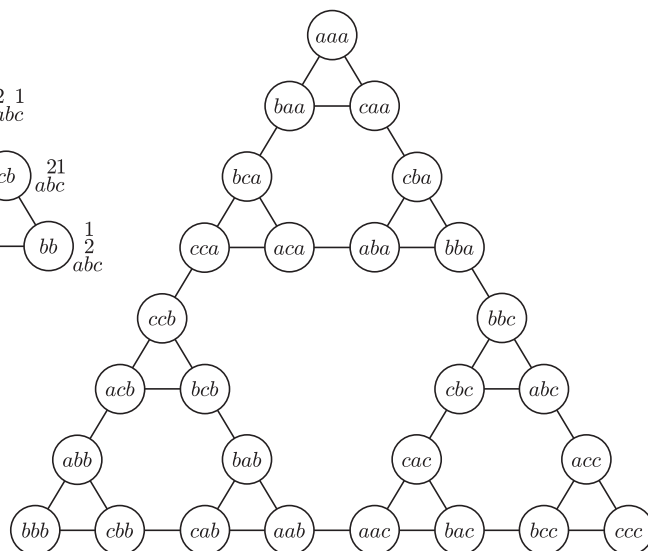


Każdy układ krążków na słupkach można opisać ciągiem o długości  $n$  złożonym z liter  $a, b, c$ , w którym kolejne znaki kodują położenie odpowiednich krążków. Zapis ten jest jednoznaczny, gdyż na każdym ze słupków krążki większe leżą pod mniejszymi.

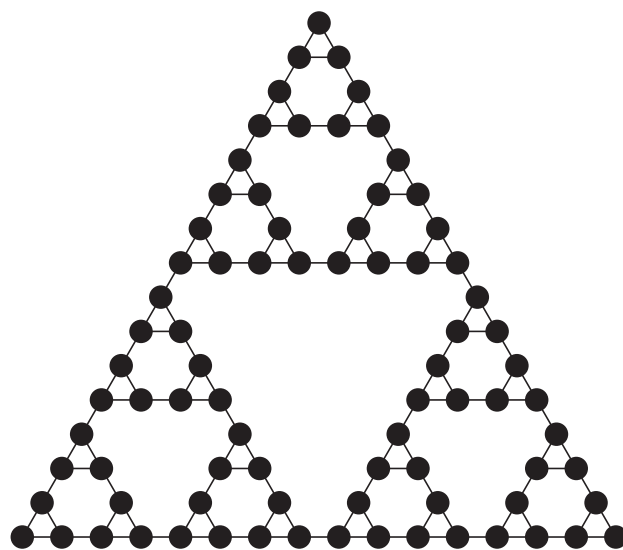
Klasycznym problemem związanym z wieżami Hanoi jest przelożenie wszystkich  $n$  krążków z jednego słupka na drugi w jak najmniejszej liczbie ruchów. Można zadać wiele innych pytań, na przykład o liczbę dozwolonych ustawień krążków, o liczbę wszystkich ruchów, o *największą* liczbę ruchów, w której można przelożyć  $n$  krążków z jednego słupka na drugi bez powtarzania żadnego ustawienia lub o to, czy przy najmniejszej liczbie ruchów pomiędzy dwoma ustawieniami największy krążek zawsze przekładany jest najwyżej raz.

Nietrudno dostrzec, że na ogół możliwe do wykonania są dokładnie trzy ruchy, jak na powyższym schemacie: najmniejszy krążek zawsze można przenieść na dowolny z dwóch pozostałych słupków, ponadto z jednego z tych słupków na drugi można przenieść najmniejszy spośród leżących na nich krążków, chyba że oba są puste (czyli wszystkie krążki są na jednym słupku). Wtedy ten ostatni ruch nie jest możliwy i w tych i tylko tych sytuacjach można zrobić jedynie dwa różne ruchy.

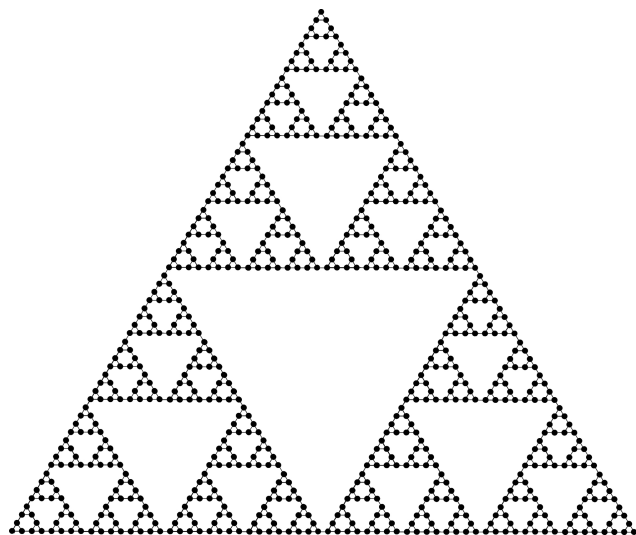
Zbudujmy *graf ruchów dla wież Hanoi*. Wierzchołkami grafu są wszystkie dozwolone ustawienia krążków, krawędziami zaś łączymy te wierzchołki, pomiędzy którymi można przejść w pojedynczym ruchu. Na mocy powyższej obserwacji w grafie tym są trzy wierzchołki (odpowiadające ustawieniom wszystkich krążków na jednym słupku), z których wychodzą po dwie krawędzie, a z każdego z pozostałych wierzchołków wychodzą dokładnie trzy krawędzie.



Rys. 3



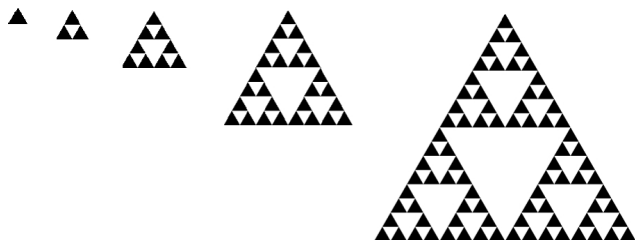
Rys. 4



Rys. 5

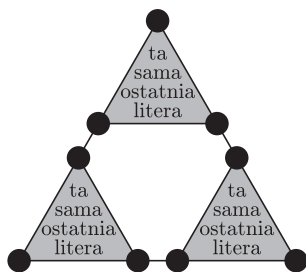
Rysunki 1–5 ilustrują grafy ruchów dla wież Hanoi kolejno dla  $n = 1$  (jeden krążek, przestawiany pomiędzy słupkami  $a, b, c$ ), dla  $n = 2$  (obok każdego wierzchołka przedstawiono ustawienie, które mu odpowiada) oraz dla  $n = 3, 4$  i  $6$ .

A oto kolejne kroki w konstrukcji trójkąta Sierpińskiego:



Rys. 6

To zaskakujące podobieństwo oczywiście nie jest przypadkowe, ale jak je wyjaśnić? Zauważmy, że każdy z grafów na rysunkach 1–3 składa się z trzech części, odpowiadających ostatniej literze ciągu, czyli położeniu największego krążka (rys. 7). Każda z takich części to graf ruchów dla  $n - 1$  pozostałych krążków, a trzy krawędzie pomiędzy tymi częściami odpowiadają przełożeniu największego krążka na inny słupek.



Rys. 7

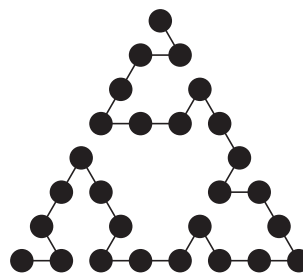
Rysunek 7 przedstawia więc metodę konstrukcji grafów dla kolejnych  $n$ . Ale to jest także metoda konstrukcji trójkąta Sierpińskiego z rysunku 6, co tłumaczy ich podobieństwo.

Analiza grafów ruchów dla wież Hanoi pozwala łatwo odpowiedzieć na pytania z początku artykułu. Pojedynczy ruch ilustrowany jest w grafie jako krawędź, więc ciąg ruchów to droga pomiędzy wierzchołkami. Stąd pytania o najmniejszą lub największą liczbę ruchów to pytania o najkrótszą lub najdłuższą drogę w grafie.

Rozwiązanie klasycznego problemu przestawienia wszystkich krążków z jednego słupka na drugi widać na grafie natychmiast: najkrótsza droga prowadzi wzdłuż odpowiedniego boku trójkąta. Ma ona długość  $2^n - 1$ , gdyż graf dla  $n = 1$  ma bok o długości  $2^1 - 1$  (rys. 1), a długość boku każdego kolejnego grafu to dwukrotność długości poprzedniego boku zwiększona o 1 (rys. 7).

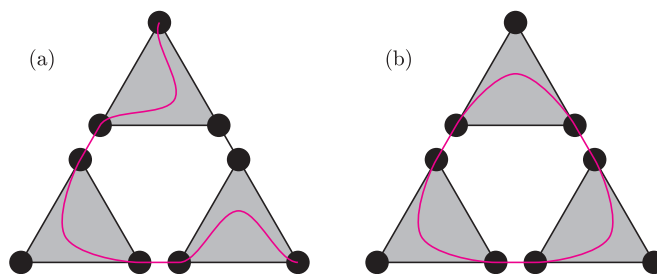
Z rysunku 7 (lub ze schematu z początku artykułu) wynika też natychmiast, że wierzchołków grafu (czyli dozwolonych ustawień krążków) jest  $3^n$ . A ile jest wszystkich krawędzi grafu? To też można odczytać z rysunku 7.

Rysunek 8 ilustruje odpowiedź na pytanie o najdłuższą drogę dla  $n = 3$ ,



Rys. 8

a na rysunku 9(a) widzimy, jak na tej podstawie wyznaczyć analogiczną drogę dla większego  $n$ . Można dostrzec, że jej długość to  $2/3$  liczby wszystkich krawędzi grafu i – zarazem – liczba wszystkich wierzchołków zmniejszona o 1 (co pozwala inaczej niż powyżej wyznaczyć liczbę krawędzi grafu). W podobny sposób (rys. 9(b)) uzyskujemy drogę zamkniętą, przechodzącą przez każdy wierzchołek grafu dokładnie raz (tzw. *cykl Hamiltona*).



Rys. 9. Kolorowe łuki symbolizują najdłuższe drogi wewnątrz danych trójkątów (jak na rys. 8).

Powróćmy do pytania o najkrótszą drogę, ale niekoniecznie pomiędzy dwoma ustawieniami wszystkich krążków na jednym słupku. Załóżmy, że wierzchołki początkowy i końcowy są w różnych trójkątach grafu z rysunku 7 (jeśli są w tym samym, możemy rozważać tylko ten trójkąt, czyli graf dla mniejszego  $n$ ). Sprawa wydaje się prosta: wystarczy dojść od wierzchołka początkowego do krawędzi łączącej rozważane dwa trójkąty, przejść tą krawędzią do drugiego trójkąta i – już wewnątrz niego – dojść do wierzchołka końcowego.

Rozumowanie to jest proste i... niepoprawne. Zgodnie z nim droga pomiędzy wierzchołkami  $aab$  i  $bba$  na rysunku 3 prowadzi najpierw do wierzchołka  $ccb$  (3 ruchy), następnie krawędzią  $ccb-cca$  (1 ruch) i wreszcie do  $bba$  (kolejne 3 ruchy), ma więc długość 7. Tymczasem droga  $aab-aac-cac-bcb-bbc-bba$  jest krótsza, a największy krążek przenoszony jest na niej dwukrotnie!

Co więcej, czasem istnieją dwie różne najkrótsze drogi, na przykład od  $cab$  do  $cba$ . Pozostawiam Czytelnikom nietrudne już teraz poprawienie rozumowania oraz zachęcam do własnych badań nad wieżami Hanoi.

Wykorzystaliśmy tu skojarzenie z trójkątem Sierpińskiego do badania wież Hanoi, opisane m.in. przez Iana Stewarta w książce *Another Fine Math You've Got Me Into...* (New York: W.H. Freeman and Company, 1992). Korzyści płyną także w drugą stronę – badanie wież Hanoi pomogło wyznaczyć średnią odległość między punktami trójkąta Sierpińskiego (*The average distance on the Sierpiński gasket*, A.M. Hinz i A. Schief, *Probab. Th. Rel. Fields* 87 (1990), str. 129–138).

# Delta i fizyka cząstek elementarnych (II): Nie każdy wie, jak działa Model Standardowy

Pisząc  $\Delta_{XY}^n$ , odwołujemy się do numeru  $n$  *Delta* z roku 19XY lub 20XY. Pełna lista przywoływanych artykułów jest na stronie [www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl).

Z izotropowością przestrzeni wiąże się symetria względem obrotów. Oznacza to np., że jeżeli identycznym piłkom nadamy takie same prędkości, ale skierowane w różnych kierunkach, to ruch jednej piłki można przekształcić na ruch drugiej, dokonując odpowiedniego obrotu. Wszystkie możliwe takie obroty tworzą grupę  $SO(3)$ ; jest ona generowana przez trzy podstawowe obroty wokół trzech prostopadłych osi. W związku z tym mówimy, że grupa obrotów ma trzy generatory. Pod działaniem obrotu wektor położenia piłki  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  przechodzi w wektor  $\mathbf{r}'$ , którego składowe ( $x'_1, x'_2, x'_3$ ) wyrażają się przez ( $x_1, x_2, x_3$ ) i parametry  $\theta^a$  (których jest trzy – tyle, ile generatorów grupy) określające obrót:  $x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}(\theta) x_j$ . Mówi się, że pod wpływem obrotu składowe wektora położenia mieszają się. Wyrazem izotropowości przestrzeni jest to, że  $\mathbf{r}(t)$  i  $\mathbf{r}'(t)$  spełniają to samo równanie II zasady dynamiki Newtona, które tym samym jest niezmiennicze względem przekształceń  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ .

Pole grawitacyjne Ziemi łamie jawnie symetrię  $SO(3)$ ; w przybliżeniu, w którym można je uważać za jednorodnie (reprezentowane przez wektor  $\mathbf{g}$ ), symetriami pozostają obroty wokół osi pionowej; grupa obrotów w trzech wymiarach jest jawnie naruszona do grupy  $SO(2)$  obrotów wokół osi równoległych do pola grawitacyjnego. Jeśli jednak rozpatrujemy rzuty piłki z dużą prędkością i trwające krótki czas  $\Delta t$ , (takie, że  $|\mathbf{g}| \ll |\mathbf{v}|/\Delta t$ ), to można uznać, że symetria obrotowa jest prawie dokładna – wpływ pola  $\mathbf{g}$  na ruch piłki jest mały.

Najprostszą teorią z cechowaniem jest elektrodynamika kwantowa. Grupą jej lokalnych symetrii jest  $U(1)_{EM}$ . Równania elektrodynamiki są niezmiennicze względem mnożenia pól fermionów przez czynnik  $e^{-iQ\theta}$ , gdzie  $Q$  jest ładunkiem cząstki będącej kwantem tego pola, a  $\theta$  może zależeć od punktu czasoprzestrzeni, jeśli odpowiedniemu przekształceniu ulega także pole fotonu. Ponieważ fotony nie oddziałują między sobą, siła oddziaływania przenoszonego przez nie słabnie wraz z oddalaniem się od siebie wymieniających fotony fermionów ( $\Delta_{91}^7$ ).

Każdemu kwarkowi przypisuje się liczbę barionową  $1/3$ , a każdemu antykwarkowi  $-1/3$ . Proton, neutron, cząstka  $\Lambda^0$  itd., mają liczbę barionową  $+1$ , a antyproton  $-1$ . Mezony mają liczbę barionową równą zero. Dotąd nie zaobserwowano w laboratorium reakcji, w której sumaryczna liczba barionowa cząstek końcowych byłaby inna niż cząstek początkowych.

Piotr CHANKOWSKI\*

W poprzednim odcinku omówiliśmy najważniejsze cechy Modelu Standardowego oddziaływań cząstek elementarnych. Tutaj, zgodnie z zapowiedzią, postaram się pokazać bogactwo struktury teoretycznej ukrytej za prostym fenomenologicznym opisem cząstek i ich oddziaływań.

Podstawowymi obiektami, którymi operuje kwantowa teoria oddziaływań cząstek są pola. Kluczową rolę w sformułowaniu Modelu Standardowego odgrywają jednak przede wszystkim symetrie ( $\Delta_{93}^7$ ). Są one różnego rodzaju. Na przykład równania tej teorii nie ulegają zmianie, jeśli trzy pola każdego z kwarków odpowiadające trzem kolorom potraktujemy jak (zespolone) składowe wektora i dokonamy jego „obrotu” w pewnej abstrakcyjnej przestrzeni koloru. Tworzona przez wszystkie takie obroty grupa  $SU(3)_c$  symetrii „kolorowej” (to właśnie oznacza indeks  $c$  – chodzi o niepomylenie różnych, choć w sensie matematycznym izomorficznych grup, które pełnią jednak zupełnie inne role) jest generowana przez 8 podstawowych „ruchów”, czyli ma ona 8 generatorów. W teorii pola istnieje jeszcze dodatkowa możliwość polegająca na tym, że wszystkie pola kwarkowe jednocześnie obracamy w przestrzeni koloru o „kąt”, który nie jest stały, lecz zmienia się od punktu do punktu czasoprzestrzeni. Okazuje się, że równania mogą nadal być niezmiennicze względem takich *lokalnych* obrotów, jeśli oprócz obracanych pól istnieją jeszcze inne pola, po jednym na każdy generator grupy, które obracają się jednocześnie z tamtymi w odpowiedni sposób. W przypadku grupy koloru tymi dodatkowymi polami są właśnie pola gluonów. Teoria, której równania wykazują symetrię względem takich lokalnych obrotów pól, nazywa się fachowo *teorią z cechowaniem*. Będąca częścią Modelu Standardowego teoria oddziaływań kwarków i gluonów, zwana chromodynamiką kwantową (QCD), która w zasadzie opisuje wszystkie zjawiska związane z oddziaływaniami silnymi (a więc i właściwości olbrzymiej liczby rezonansów barionowych i mezonowych oraz ich oddziaływania), jest zatem teorią z grupą cechowania  $SU(3)_c$ . Symetria cechowania jednoznacznie wyznacza strukturę elementarnych oddziaływań kwarków z gluonami i gluonów między sobą. Symetria ta realizuje się w świecie kwarków ściśle, co oznacza np. że kwarki różniące się tylko kolorem mają taką samą masę, a amplitudy rozpraszania kwarków o różnych kolorach można jedno z drugich otrzymać przez odpowiednie przekształcenie. Ponieważ symetria cechowania QCD jest ścisła, gluony muszą być cząstkami o masie równej zero.

Ważną cechą oddziaływania gluonów jest to, że oddziaływania te stają się tym silniejsze, im dalej od siebie znajdują się kwarki wymieniające między sobą gluony. W duchu zasady nieoznaczoności Heisenberga ( $\Delta_{99}^9, \Delta_{95}^{12}$ ) oznacza to, że kwarki oddziałują tym silniej, im mniejszy jest przekaz pędu i energii pomiędzy nimi. Skutkiem tego jest zjawisko uwięzienia kwarków ( $\Delta_{91}^9$ ) – nie są one nigdy obserwowane jako cząstki swobodne i zawsze tworzą układy związane, które nazywa się hadronami (cząstki oddziałujące silnie); względem grupy koloru są one tym, czym elektrycznie obojętne atomy względem grupy  $U(1)_{EM}$  elektromagnetyzmu. Układami takimi mogą być albo  $q\bar{q}$ , czyli mezony, albo  $qqq$  ( $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ ), czyli bariony (antybariony). Ostatnio okazało się ( $\Delta_{15}^9$ ), choć sygnały były już wcześniej ( $\Delta_{15}^3$ ), że możliwe są także układy  $qqq\bar{q}$ . Hadrony (bariony, antybariony i mezony) są więc wszystkie układami złożonymi (w tym sensie nie są one prawdziwie elementarne).

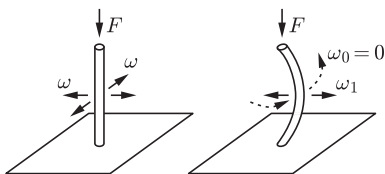
Jeśli pominąć masy kwarków i rozpatrywać QCD oddzielnie od reszty Modelu Standardowego, staje się ona teorią, której wszystkie przewidywania zależą od wartości jednego parametru bezwymiarowego, jakim jest stała sprzężenia  $g_s$ , wyznaczana doświadczalnie. Wartość tę można za pomocą teorii przetłumaczyć na pewną skalę energii (lub, zgodnie ze wzorem  $E = mc^2$ , masy)  $\Lambda_{QCD}$ , która ustanawia bezwzględną miarę energii dla oddziaływań silnych. Okazuje się, że  $\Lambda_{QCD} \approx 200$  MeV.

\*Wydział Fizyki,  
Uniwersytet Warszawski



Kondensat pola (lub pól), które pod działaniem grupy symetrii przekształca się w jakiś nietrywialny sposób, narusza tę symetrię spontanicznie, gdyż wyróżnia w przestrzeni pól pewien kierunek. Analogia do pola grawitacyjnego  $\mathbf{g}$  naruszającego symetrię obrotów nie jest tu jednak właściwa: podczas gdy  $\mathbf{g}$  jest czynnikiem zewnętrznym, niezależnym od dynamiki ruchu, kondensat jest właśnie skutkiem dynamiki. Ponadto w przestrzeni pól istnieje całe kontinuum równoważnych kierunków (a więc równoważnych stanów próżni), które kondensat mógłby „wybrać”; symetria nie jest więc całkowicie zniesiona, lecz raczej „ukryta”, o czym świadczy występowanie w takim przypadku bezmasowych bozonów NG, czyli wzbudzeń pola o dowolnie małej energii.

Mechanicznym analogiem spontanicznego naruszenia symetrii jest stojący na twardym podłożu jednorodny elastyczny pręt, na który działa idealnie pionowa siła.



Jeśli pręt uderzymy prostopadle w połowie jego wysokości, jak na lewym rysunku, zacznie on drgać wokół położenia pionowego z pewną częstotliwością, która nie zależy od płaszczyzny drgań. Drganie jest tu analogiem cząstki, a częstotliwość drgań analogiem masy cząstki. Jeśli jednak pionowa siła jest bardzo duża, położeniem równowagi jest kształt pokazany na prawym rysunku. Wygięcie pręta może leżeć w dowolnej płaszczyźnie. Częstotliwości drgań wokół każdego z takich położen równowagi są dwie: jedna z nich, równa zero, odpowiada obrotowi wybruszenia wokół osi pionowej – obrót ten to właśnie analog bozonu NG.

Dokładnym analogiem roli, jaką w stosunku do grupy obrotów pełni (w przypadku krótkotrwałych ruchów z dużą prędkością początkową) ziemskie pole grawitacyjne  $\mathbf{g}$ , jest za to sytuacja, w której równania teorii kwantowej są prawie niezmiennicze względem jakichś przekształceń – wyrazy równań łamiące pełną ich niezmienniczość są w jakimś sensie małe. Oba sposoby naruszenia symetrii mogą czasem w kwantowej teorii pola współwystępować: przybliżona symetria równań może być zarazem naruszona spontanicznie.

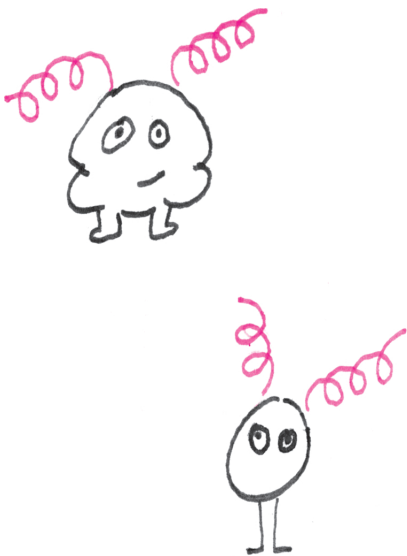
Przykład chromodynamiki kwantowej pozwala poznać jeszcze jeden sposób, w jaki symetria może realizować się w kwantowej teorii pola. Gdyby masy kwarków były ściśle zerowe, wszystkie kwarki (tego samego koloru) o tej samej skrętności byłyby zupełnie identyczne – nie byłoby sposobu, by odróżnić np. lewoskrętny czerwony kwark  $s$  od lewoskrętnego czerwonego  $u$ ,  $d$ ,  $c$ ,  $b$  lub  $t$ . Wprawdzie masy kwarków  $t$ ,  $b$  i  $c$  trudno uznać za zerowe, ale masy kwarków  $u$  i  $d$ , a nawet  $s$ , można uznać za pomijalne w porównaniu ze skalą  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . W tej granicy równania chromodynamiki są niezmiennicze względem globalnych (tj. takich samych w każdym punkcie czasoprzestrzeni) obrotów dokonywanych w przestrzeni rozpinanej przez trzy lewoskrętne pola lewoskrętnych kwarków (obroty pól odpowiadających różnym kolorom są takie same) i niezależnych globalnych obrotów w przestrzeni rozpinanej przez trzy prawoskrętne pola prawoskrętnych kwarków. Grupą symetrii równań chromodynamiki jest wtedy  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$ . Czynniki  $U(1)_V$  odpowiada niezmienniczości równań względem pomnożenia lewo- i prawoskrętnych pól wszystkich kwarków (także tych ciężkich) przez wspólny globalny czynnik fazowy  $e^{-i\alpha}$ . W czystej chromodynamice symetria ta jest ścisła. Konsekwencją jej jest zachowywanie liczby barionowej we wszystkich reakcjach uwarunkowanych oddziaływaniami silnymi (i elektromagnetycznymi). Nie jest ono jednak, ściśle rzecz biorąc, symetrią całego Modelu Standardowego, ale w warunkach laboratoryjnych procesy, w których liczba barionowa nie byłaby zachowana, są praktycznie niemożliwe; były one jednak częste w wysokich temperaturach, jakie panowały we wczesnym wszechświecie i musiały odegrać ważną rolę w powstaniu obserwowanej dziś przewagi materii nad antymaterią.

Przyjmuje się jednak, że nawet przy ściśle zerowych masach kwarków  $u$ ,  $d$  i  $s$  nie cała zapachowa symetria jest odzwierciedlona w świecie fizycznych hadronów i w ich oddziaływaniach silnych. Jej część musi być „popsuta” przez dynamiczne formowanie się, wskutek oddziaływań silnych, przenikającego całą przestrzeń stałego kondensatu pól reprezentujących związane pary lewoskrętnych kwarków i prawoskrętnych antykwarków, gdyż inaczej musiałyby istnieć dodatkowe multiplety hadronów, które w rzeczywistości nie istnieją. Kondensat ten jest właściwością kwantowego stanu o najniższej energii układu pól kwarkowo-gluonowych. O takiej sytuacji mówi się, że część symetrii równań jest *spontanicznie naruszona* przez stan próżni (zob.  $\Delta_{84}^8$ ,  $\Delta_{93}^7$ ).

W ramach relatywistycznej kwantowej teorii pola dowodzi się, że konsekwencją spontanicznego naruszenia niezmienniczości względem klasy przekształceń odpowiadających jakiemś generatorowi grupy symetrii jest istnienie jednej cząstki bezmasowej o spinie zero, tzw. bozonu Nambu–Goldstone’a (NG). Wskutek istnienia kondensatu liczba „dobrych” generatorów symetrii globalnej QCD zmniejsza się o dziewięć. Można by się więc spodziewać istnienia wśród hadronów dziewięciu bezmasowych i bezspinowych stanów związanych par kwark-antykwar, czyli mezonów, będących bozonami NG. Ponieważ w rzeczywistości masy kwarków nie są ściśle zerowe, mezony te również nie powinny być całkiem bezmasowe, ale wyraźnie lżejsze niż inne hadrony. I rzeczywiście: istnieje oktet mezonów: trzy piony  $\pi^0$ ,  $\pi^\pm$ , cztery kaony  $K^0$ ,  $\bar{K}^0$ ,  $K^\pm$  oraz mezon  $\eta$ , które są wyraźnie lżejsze niż pozostałe hadrony, ale brak dziewiątego lekkiego mezonu. Rozumowanie oparte na przybliżonej symetrii jest słuszne, ale symetria równań QCD odpowiadająca czynnikowi  $U(1)_A$  jest tylko pozorna: likwiduje ją bowiem występowanie specyficznie kwantowego efektu, czyli tzw. anomalii, i dlatego dziewiąty lekki mezon nie istnieje. Podobna anomalia powoduje, że w pełnym Modelu Standardowym, tj. po uwzględnieniu oddziaływań kwarków z bozonami  $W^\pm$  i  $Z^0$ , pozorna staje się symetria  $U(1)_V$  i liczba barionowa nie jest ściśle zachowaną wielkością (pozostaje jednak taką w zwykłych warunkach laboratoryjnych).

Ponieważ anomalia psuje symetrię  $U(1)_A$ , a kondensat narusza spontanicznie część pozostałej (przybliżonej) globalnej symetrii QCD, wszystkie hadrony grupują się w multiplety przybliżonej, ale nienaruszonej spontanicznie grupy  $SU(3)_V$  generowanej przez takie same obroty pól lewo- i prawoskrętnych





Spontaniczne naruszenie (przybliżonej) symetrii chiralnej  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  chromodynamiki do symetrii  $SU(2)_V$  izospinu ma bardzo ważne konsekwencje: powoduje ono, że nawet w granicy zerowych mas kwarków nie istniałyby, oprócz oktetu bozonów NG, bezmasowe (lub niemal bezmasowe) hadrony. Masy wszystkich hadronów zbudowanych z bezmasowych kwarków  $u, d$  z konieczności byłyby proporcjonalne do wspomnianej skali  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . Czasem formuluje się to mówiąc, że dzięki spontanicznemu naruszeniu tej symetrii kwarki efektywnie stają się masywne i ich wygenerowane w ten sposób masy, tzw. „masy konstytuenty”, są rzędu kilkuset MeV, czyli w przypadku kwarków  $u$  i  $d$  dużo większe niż te, które uzyskują one dzięki naruszeniu symetrii cechowania zunifikowanych oddziaływań elektromagnetycznych i słabych.

Masa większości otaczającej nas „widzialnej” (tj. oddziałującej elektromagnetycznie) materii, na którą składają się głównie masy jąder atomów, czyli protony i neutrony, nie ma swego źródła w spontanicznym naruszeniu symetrii  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ : jest ona wytworzona przez skomplikowaną wewnętrzną dynamikę oddziaływań silnych prowadzącą do spontanicznego naruszenia symetrii globalnej chiralnej  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ .

Rozpad mionu według Modelu Standardowego i według oddziaływań punktowego opisywanego teorią FFG, którą przybliży Czytelnikom w kolejnym odcinku:



$$\mathcal{A}_{\text{SM}} = \mathcal{A}_{\text{FFG}} + \mathcal{O}(|q^2|/M_W^2).$$

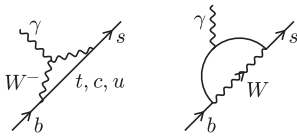
Amplitudy procesów rzadkich są zawsze reprezentowane przez diagramy Feynmana z zamkniętymi pętlami.

kwarków. Symetria ta jest psuta tylko przez różnice mas kwarków (byłaby ona ścisła, gdyby kwarki  $u, d$  i  $s$  miały dokładnie równe masy). Oczywiście, ponieważ masa kwarka  $s$  jest sporo większa niż kwarków  $u$  i  $d$ , znacznie lepiej widoczne jest grupowanie się hadronów w multiplety grupy izospinu  $SU(2)_V$  – wszystkie cząstki tych multipletów (np.  $p$  i  $n$ , czy  $\pi^+, \pi^0$  i  $\pi^-$ ) mają niemal równe masy. (Różnica mas  $\pi^\pm$  i  $\pi^0$  jest praktycznie w całości spowodowana efektami oddziaływań elektromagnetycznych, a nie bardzo małą różnicą mas kwarków  $u$  i  $d$ ; ta odgrywa jednak rolę w wyjaśnianiu różnic mas  $p$  i  $n$ ).

Pozostała część Modelu Standardowego opisująca oddziaływania elektromagnetyczne i słabe oraz ich współgranie z oddziaływaniami silnymi jest, podobnie jak QCD, również teorią z cechowaniem, ale grupą cechowania jest tu  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ . Tak jak trzy różne kolory tego samego kwarka mieszają się pod wpływem lokalnych obrotów z grupy  $SU(3)_c$  koloru, tak tu pod wpływem lokalnych obrotów z grupy  $SU(2)_W$  (zmieniających się od punktu do punktu w czasoprzestrzeni) mieszają się tworzące pary (tzw. dublety) dwa lewochiralne pola (np. dwa lewochiralne pola leptonów  $\nu_e$  i  $e^-$ ) lub kwarków (tego samego koloru) typu górnego i dolnego (np.  $u$  i  $d$ ). Podobnie pole Higgsa to cztery mieszające się ze sobą pod wpływem tych obrotów pola. Czynniki  $U(1)_Y$  odpowiada niezmienniczości względem pomnożenia pola każdego z fermionów i pola Higgsa przez pewien (zmieniający się w czasoprzestrzeni) czynnik fazowy. Aby równania teorii były niezmiennicze względem takich lokalnych przekształceń, z każdą z czterech takich transformacji stowarzyszone jest pole bozonu pośredniczącego (cechowania) o spinie  $1\hbar$ . Symetria cechowania jednoznacznie wyznacza ich elementarne oddziaływania z fermionami, z bozonem Higgsa i ich oddziaływania między sobą. Stałymi sprzężenia analogicznymi do stałej  $g_s$  oddziaływań silnych są tu  $g_W$  i  $g_Y$ . Gdyby symetria równań teorii względem tych przekształceń nie była naruszona przez stan próżni (tj. spontanicznie), nie można by było odróżnić np. lewoskrętnego neutrino elektronowego od lewoskrętnego elektronu, a cztery bozony cechowania grupy  $SU(2)_W \times U(1)_Y$  byłyby bezmasowe. Wspomniany już kondensat  $v$  jednej ze składowych pola Higgsa (symetria cechowania oznacza, że nie jest istotne której!) jest źródłem spontanicznego naruszenia symetrii  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ . Skalę energii wyznaczaną przez wartość kondensatu,  $v = 246 \text{ GeV}$ , nazywa się skalą naruszenia tej symetrii, albo skalą Fermiego (używana jest też nazwa „skala elektroślaba”). Naruszenie symetrii  $SU(2)_W \times U(1)_Y$  nie jest jednak całkowite: pozostają nienaruszone przekształcenia generowane przez sumę generatora grupy  $U(1)_Y$  oraz jednego z generatorów grupy  $SU(2)_W$ . Odpowiadający tym wciąż „dobrym” przekształceniom bezmasowy bozon o spinie  $1\hbar$  jest utożsamiony z fotonem.

W odróżnieniu od omawianego wyżej spontanicznego naruszenia symetrii globalnej  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  (lub mniej przybliżonej  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ ) QCD, analogicznemu naruszeniu symetrii lokalnej (cechowania) nie towarzyszy występowanie bezmasowych bozonów NG; działa w tym przypadku tzw. mechanizm Higgsa polegający na tym, że bozony pośredniczące odpowiadające „złamanym” generatorom grupy stają się masywne, a niedoszłe bozony NG stają się brakującymi masywnymi bozonami pośredniczącymi o skrętności równej zeru. Tak właśnie dzieje się z pozostałymi trzema bozonami pośredniczącymi grupy  $SU(2)_W \times U(1)_Y$  – stają się one bozonami  $W^\pm$  i  $Z^0$ . Ponieważ źródłem spontanicznego naruszenia symetrii cechowania  $SU(2)_W \times U(1)_Y$  jest kondensat pola Higgsa, mechanizmem generującym masy  $W^\pm$  i  $Z^0$  jest stałe oddziaływanie tych cząstek z tym kondensatem (pole fotonu z kondensatem nie oddziałuje), przy czym (w pierwszym przybliżeniu)  $M_W/M_Z = g_W/\sqrt{g_Y^2 + g_W^2} = \cos \theta_W$ . Związek ten jest jednym z ważnych przewidywań teorii. Jak już wspominałem, kwarki i leptony również stają się masywne wskutek podobnego oddziaływania.

Oddziaływania przenoszone przez bozony  $W^\pm$  (oraz  $Z^0$ ) mają bardzo krótki zasięg ( $\Delta_{80}^8$ ) z powodu bardzo dużej masy tych cząstek. W pierwszym przybliżeniu można je więc traktować jak punktowe z efektywną stałą sprzężenia  $G_F \approx g_W^2/M_W^2$  i to właśnie z powodu proporcjonalności  $G_F$  do odwrotności



Diagramy procesu  $b \rightarrow s \gamma$  (obserwowanego jako rzadki rozpad hadronu pięknego na foton i grupę hadronów o łącznej dziwności równej  $-1$ ). W ilościowym opisie takich procesów, uwarunkowanych oddziaływaniami kwarków i leptonów z bozonami  $W^\pm$  i  $Z^0$ , ważną rolę odgrywają też oddziaływania kwarków z gluonami – bez połączonej teorii oddziaływań elektromagnetycznych, słabych i silnych otrzymanie zgodności z danymi obliczonych na podstawie teorii charakterystyk takich procesów nie byłoby możliwe. Właśnie krótkozasięgowość oddziaływań słabych jest tym czynnikiem, który umożliwia dokładne obliczanie poprawek wnoszonych przez oddziaływania silne do amplitud procesów takich jak pokazany tutaj.

Cechą charakterystyczną „twardych” zderzeń protonów w zderzacach takich, jak Tevatron lub LHC, jest produkcja cząstek o dużym pędzie poprzecznym w stosunku do osi zderzenia. To właśnie takie zderzenia są najciekawsze, gdy chodzi o poszukiwanie „nowej fizyki”.

dużej masy są one tak „słabe”. Jak powinno być jasne z powyższych rozważań, nie są one jednak na fundamentalnym poziomie istotnie różne od oddziaływań elektromagnetycznych: u podstaw jednych i drugich leży symetria cechowania. W tym sensie są one *zunifikowane* (zob.  $\Delta_{76}^6$ ). Nie jest to jednak unifikacja pełna, ponieważ na grupę symetrii cechowania Modelu Standardowego, związaną z oddziaływaniami elektromagnetycznymi i słabymi, składają się dwa czynniki grupowe:  $SU(2)_W$  i  $U(1)_Y$ , są też dwie niezależne stałe sprzężenia  $g_W$  i  $g_Y$ . Ładunkiem elektrycznym jest kombinacja  $e = g_W g_Y / \sqrt{g_W^2 + g_Y^2}$ , a  $\sin^2 \theta_W = g_Y^2 / (g_W^2 + g_Y^2)$ .

Opisany tu model standardowy ( $\Delta_{03}^{12}$ ) jest teorią bardzo skomplikowaną i bogatą. Daje on jednolity jakościowy, a w wielu przypadkach także znakomity ilościowy opis całego mnóstwa reakcji zachodzących między cząstkami. Szczególnym jego sukcesem jest opis tzw. procesów rzadkich, do których zaliczają się także takie, w których nie jest zachowywana parzystość kombinowana CP ( $\Delta_{81}^3$ ). Także wchodząca w jego skład QCD, mimo iż pewnych interesujących wielkości nie udaje się przy jej użyciu obliczyć analitycznie (np. masy protonu czy przekroju czynnego rozpraszania elastycznego protonu na protonie), słabnięcie wzajemnych oddziaływań kwarków i gluonów na małych odległościach (tj. przy dużych przekazach pędu i energii) pozwala, w połączeniu z fenomenologiczną parametryzacją „zawartości” protonu za pomocą tzw. funkcji struktury, wykorzystać ją do ilościowego opisywania procesów „twardych”, czyli takich, które można traktować jak bezpośrednie zderzenia indywidualnych składników rozpraszanych na sobie dwu protonów. Dzięki temu QCD wraz z całym Modelem Standardowym stała się nieodzownym schematem teoretycznym używanym przy poszukiwaniu nowych cząstek i oddziaływań w akceleratorach takich jak LHC.



## Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

**M 1483.** Punkty  $D$  i  $E$  leżą odpowiednio na bokach  $BC$  i  $CA$  trójkąta  $ABC$ , przy czym  $\frac{CE}{EA} = 5$  oraz  $\frac{BD}{DC} = 4$ . Odcinki  $AD$  i  $BE$  przecinają się w punkcie  $S$ .

W jakim stosunku punkt  $S$  dzieli odcinek  $AD$ ?

Rozwiązanie na str. 1

**M 1484.** Znaleźć wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których wszystkie rozwiązania równania

$$mx^2 + (1 - 4m)x + 9m + 2 = 0$$

są liczbami naturalnymi.

Rozwiązanie na str. 14

**M 1485.** Obliczyć

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} \frac{1}{3^n},$$

gdzie  $k$  jest pewną liczbą naturalną.

Rozwiązanie na str. 16

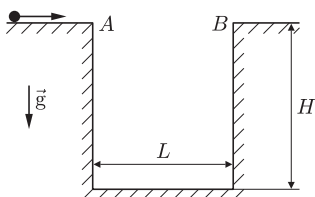
Przygotował Michał NAWROCKI

**F 897.** Na stalowy walec o promieniu  $R$  naciągnięto ciasny, gumowy pierścień. Siła rozciągająca pierścień wynosi  $T$ . Jaką siłę trzeba przyłożyć, aby przesunąć pierścień, bez obrotu, wzdłuż osi walca? Współczynnik tarcia między stalą i gumą wynosi  $\mu$ . Przyjąć, że siła przesuwająca jest rozłożona równomiernie wzdłuż pierścienia.

Rozwiązanie na str. 10

**F 898.** Z jaką prędkością mała, nieodkształcająca się kulka powinna zbliżyć się do krawędzi  $A$  prostokątnej studni o szerokości  $L$  i głębokości  $H$ , aby w wyniku odbicia od jej dna trafiła dokładnie w jej przeciwną krawędź  $B$  (rysunek)? Przyjąć, że ścianki i dno studni są doskonale gładkie, odbicia są doskonale sprężyste i można zaniedbać wszelkie straty energii.

Rozwiązanie na str. 17



O podobnych zagadnieniach pisaliśmy w *Delcie* 2/2006 w artykule *Kolorowe czapeczki – kontynuacja*.

## Wiem, że coś wiesz Wojciech CZERWIŃSKI

Najwytrwalsi Czytelnicy *Delty* mogą znać tę zagadkę. Pojawia się ona w wielu wariantach, my zajmiemy się wersją błotną.

W kałuży bawi się  $n$  dzieci. W pewnym momencie przychodzi tata-matematyk, i mówi: „Widzę, że co najmniej jedno z Was jest umazane błotem na twarzy”. Nie trzeba dodawać, że zarówno tata, jak przystało na matematyka, a także wszystkie dzieci są niesłychanie bystre. Nie popełniają błędów i umieją wydedukować wszystko, co się da. Po tej wypowiedzi tata pyta: „To z Was, które wie, czy jest umazane na twarzy, niech podniesie rękę do góry”. Dzieci, które wiedzą, istotnie podnoszą ręce. Tata jednak jest uparty i znowu zadaje to samo pytanie. Dzieci znowu podnoszą ręce i historia się powtarza do momentu, gdy wszystkie dzieci będą wiedziały, czy są brudne, czy nie. Pytanie brzmi: jak rozwine się sytuacja? W szczególności, czy może się zdarzyć, że dzieci, razem z tatą, będą siedziały w błocie przez całą wieczność, a przynajmniej do czasu, aż im się nie znudzi?

Zachęcamy bardzo wszystkich Czytelników do próby rozwiązania zagadki przed przeczytaniem dalszej części tekstu!

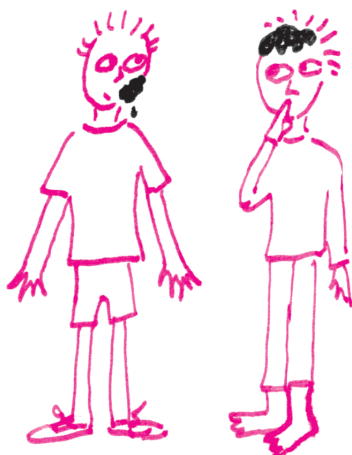
Zanim dojdziemy do rozwiązania, spróbujmy zastosować typową taktykę: rozważmy małe przypadki. Co się więc stanie, gdy dokładnie jedno dziecko – Adaś – będzie umazane błotem? Adaś zorientuje się natychmiast, że to o niego chodzi, bo wszyscy inni mają czyste twarze. Natomiast jego rodzeństwo, widząc umazanego Adasia, nie będzie wiedziało, czy oni są czysti, czy brudni. A więc na pierwsze pytanie taty rękę podniesie tylko Adaś. Po tym, gdy pozostałe dzieci zobaczą, że Adaś podniósł rękę, zorientują się, że tylko on jest umazany. W przeciwnym bowiem przypadku nie mogłyby się zorientować, że tak jest. Zatem na drugie pytanie taty już wszyscy podniosą ręce.

No dobrze, a co będzie, gdy brudni będą zarówno Adaś, jak i Basia, a pozostali będą czysti? Przy pierwszym pytaniu taty nikt nie podniesie ręki, bo każde z dzieci będzie widziało kogoś umazanego: Adaś i Basia siebie nawzajem, a pozostałe dzieci ich oboje. Potem zdarzy się jednak coś ciekawego. Basia pomyśli w następujący sposób: „Gdybym ja była czysta, to Adaś widziałby same czyste twarze i zorientował się, że w związku z tym musi być brudny. I wtedy podniósłby rękę przy pierwszym pytaniu. Nie zrobił tego jednak, więc moja twarz musi być umazana”. Basia w związku z tym podniesie rękę przy drugim pytaniu taty, oczywiście analogicznie pomyśli i zrobi Adaś. Pozostałe dzieci będą widziały dwójkę brudnego rodzeństwa, więc nie będą miały powodu, żeby po pierwszym głosowaniu pomyśleć tak jak Adaś i Basia. Nie będą też miały żadnych przesłanek (do chwili drugiego pytania), że one są czyste, więc przy drugim pytaniu nie podniosą rąk. Po nim jednak natychmiast zorientują się, że Adaś i Basia mogli przeprowadzić swoje rozumowanie i zrozumieć, że mają umazane twarze, tylko o ile jedynie oni byli brudni – czyli wszyscy pozostali są czysti. A więc przy trzecim pytaniu taty podniosą ręce wszystkie dzieci.

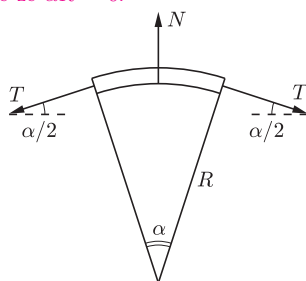
Być może Domyślni Czytelnicy zaczynają już powoli podejrzewać, jak będzie w przypadku ogólnym. Przyjrzyjmy się jednak sytuacji, gdy brudnych jest trójka dzieci: Adaś, Basia i Czarek. Czarek widzi, że (oprócz, być może, niego) brudni są tylko Adaś i Basia. Po drugim pytaniu taty widzi jednak, że nie podnieśli oni rąk, czyli nie są jedynymi z umazaną twarzą. Nie można już mieć dłużej wątpliwości: on też należy do tych ubrudzonych. A zatem Czarek, a także Adaś i Basia, podniosą ręce przy trzecim pytaniu taty. Pozostałe dzieci zorientują się dopiero potem, że ich twarze są czyste i zgłoszą to przy czwartym pytaniu.

Nietrudno zauważyć, że powyższe rozumowanie można prowadzić dalej. Przy dokładnie  $k$  brudnych dzieciach podniosą one ręce przy  $k$ -tym pytaniu, a te czyste przy pytaniu  $(k + 1)$ -szym. Ale czy to rozwiązuje sprawę? Wielu Czytelników zapewne zgodzi się, że tak konkretnie to ciężko się przyczepić do jakiegoś argumentu, ale nadal problem wydaje się skrywać jakieś tajemnice.

Można przykładowo mieć następującą wątpliwość. Przypuśćmy, że liczba ubrudzonych dzieci jest większa niż jeden, wtedy każdy wie, że ktoś jest



**Rozwiązanie zadania F 897.**  
Podzielmy pierścień na małe odcinki, takie że  $\alpha R \rightarrow 0$ .



Na każdy odcinek działają siły naciągu pierścienia  $T$  i reakcji walca  $N$ . Ich suma jest równa zero, bo pierścień nie obraca się. Stąd

$$N = 2T \sin \frac{\alpha}{2},$$

co dla małych  $\alpha$  daje  $N = \alpha T$ . Stąd możemy obliczyć siłę tarcia, działającą na taki odcinek, przy przesuwaniu pierścienia wzdłuż walca:

$$f_{TR} = \mu N = \mu \alpha T.$$

Sumując siły tarcia, działające na wszystkie małe odcinki pierścienia, na które podzieliłmy jego długość, otrzymujemy całkowitą siłę tarcia:

$$F_{TR} = \sum_i (f_{TR})_i = \mu T \sum_i (\alpha_i) = 2\pi \mu T.$$

umazany błotem, bo po prostu go widzi. Wydaje się więc, że tata – przychodząc i informując o tym – nie odkrywa Ameryki, mówi coś, o czym wie każdy, więc nie wnosi żadnej nowej informacji. Czy mógłby zatem ominąć początkowe stwierdzenie i zacząć od zadawania pytań, kto wie, czy jest brudny? Chwila zastanowienia prowadzi do konkluzji, że nie, samo zadawanie pytań o stan czystości do niczego nie doprowadzi. Dzieci, razem zresztą ze zbyt optymalizującym tatą, spędziłyby całe popołudnie na monotonnej grze w niepodnoszenie rąk. Cóż więc wniosło powiedzenie faktu, który znał każdy?

Okazuje się, że jednak coś istotnego wniosło. Wyjaśnijmy to najpierw dla dwójki brudnych dzieci. Owszem, każdy wiedział, że ktoś jest brudny. Nie każdy jednak wiedział, czy każdy wie, że ktoś jest brudny. Przykładowo Adaś nie wiedział, czy Basia wie, że ktoś jest brudny. No bo gdyby Adaś nie był brudny, to Basia nie widziałaby nikogo brudnego. A co dla trójki brudnych dzieci: Adasia, Basi i Czarka? Wówczas każdy wie, że każdy wie, że ktoś jest brudny. Ale nie każdy wie, czy każdy wie, czy każdy wie, że ktoś jest brudny! Przykładowo Adaś nie wie, czy Basia wie, czy Czarek wie, że jest ktoś brudny. Bo gdyby Adaś był czysty, to jedynie Basia i Czarek byliby brudni i wtedy Basia nie wiedziałaby, czy Czarek widzi kogokolwiek brudnego. Uogólniając te spostrzeżenia, widzimy więc, że to, co tata wniosł do sprawy to fakt, że każdy wie, że każdy wie, że każdy wie. . . i tak powtórzone dowolnie wiele razy, że ktoś jest brudny!

Nasze rozważania przydają się nie tylko do tego, żeby na imprezie u znajomych zablysnąć nieoczywistą zagadką. W roku 1997 Joseph Halpern i Yoram Moses otrzymali prestiżową Nagrodę Gödla za pracę nad wiedzą, a w szczególności wiedzą powszechną (ang. *common knowledge*) i zastosowaniem swojej teorii do dziedziny systemów rozproszonych. Możemy zamienić dzieci z zagadki na komputery, które razem wykonują pewne obliczenia i komunikują się przez sieć. Nie zawsze „wiedzą” one, co „wiedzą” inne komputery, mogą się dowiedzieć jedynie, jeśli dostaną jakiś komunikat. W analizie programów, które są wykonywane przez sieć komputerową (tzn. przeznaczonych do obliczeń rozproszonych), zasadniczą rolę odgrywa właśnie pojęcie wiedzy. Kluczowym spostrzeżeniem autorów artykułu była obserwacja, że nieformalne pojęcie wiedzy da się ująć w precyzyjne matematyczne ramy. W szczególności wiedza powszechna została doprecyzowana właśnie jako sytuacja, gdy dla dowolnego  $k$  zachodzi: „każdy wie” powtórzone  $k$  razy o pewnym interesującym nas fakcie. Wcześniej, oczywiście, trzeba było zdefiniować formalnie, co to znaczy, że komputer coś wie, ale w to nie będziemy się teraz wgłębiać.

Praca Halperna i Mosesa miała wielki wpływ na dziedzinę obliczeń rozproszonych. Zainspirowała także nowe badania w kryptografii i sztucznej inteligencji. Może czeka nas w przyszłości jeszcze więcej ważnych odkryć, których podstawą są fenomeny możliwe do dostrzeżenia bez żadnego zaawansowanego aparatu matematycznego. A kto wie, może nawet dokonane przez Czytelników *Delty*.

Nagroda Gödla przyznawana jest raz do roku za wybitne osiągnięcia w dziedzinie informatyki teoretycznej.

## Orzeł czy reszka?

Są trzy symetryczne monety. Pierwsza,  $M_1$ , ma orły po obu stronach, druga,  $M_2$ , ma reszki po obu stronach, a trzecia,  $M_3$ , jest normalna. Wybrano losowo jedną z tych monet, podrzucono ją i po upadku na blat stołu na wierzchu ukazał się orzeł. Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że po drugiej stronie tej monety też jest orzeł. Często spotykamy takie rozwiązanie:

- 1) Na pewno nie jest to moneta  $M_2$ , która ma reszki po obu stronach. *Prawda*.
- 2) Jest to więc moneta  $M_1$  albo  $M_3$ . *Prawda*.
- 3) Stąd wynika, że prawdopodobieństwo tego, że jest to moneta  $M_1$ , jest równe  $\frac{1}{2}$ . *Nieprawda*. Przypadki opisane w podpunkcie 2 nie są jednakowo prawdopodobne.

Aby się o tym przekonać, sformalizujmy nasz problem. Wprowadźmy oznaczenia dla zdarzeń:

$M_k$  – wylosujemy monetę o numerze  $k$ ,  
 $O$  – otrzymamy orła.

Z treści zadania wynika, że  $P(M_k) = \frac{1}{3}$  i  $P(O) = \frac{1}{2}$ . Mamy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe  $P(M_1 | O)$ :

$$P(M_1 | O) = \frac{P(M_1 \cap O)}{P(O)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Ten wynik nie powinien być zaskakujący. Oznaczmy orły na pierwszej monecie przez  $O_1$  oraz  $O_2$ , a orła na trzeciej monecie przez  $O_3$ . Prawdopodobieństwo otrzymania orła z numerem  $n$  jest równe  $P(O_n) = \frac{1}{6}$  dla  $n \in \{1, 2, 3\}$ . Otrzymaliśmy jedno z trzech jednakowo prawdopodobnych zdarzeń  $O_1, O_2, O_3$ . Dwa spośród nich wskazują na pierwszą monetę. Czytelnik Dociekliwy zauważy, że ten sam wynik otrzymamy w przypadku, gdy trzecia moneta jest symetryczna, a pozostałe dwie niekoniecznie.

Edward STACHOWSKI

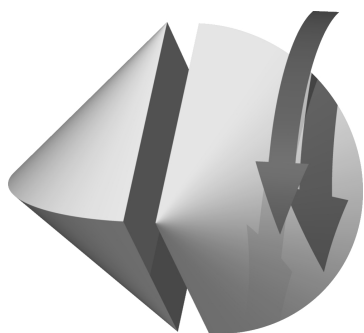


# mała delta

## Sferostożki więcej i bardziej

Taka sobie niewinnie wyglądająca bryłka. Ot, powstała z obrotu kwadratu dookoła jego przekątnej, przecięcia tego, co powstało, na dwie identyczne części (wzdłuż płaszczyzny kwadratu), przekręceniu połowy o  $90^\circ$  i doklejeniu do drugiej części (czekającej w tym czasie w bezruchu). Szczęśliwa całość – sferostożek (ang. *sphericon*).

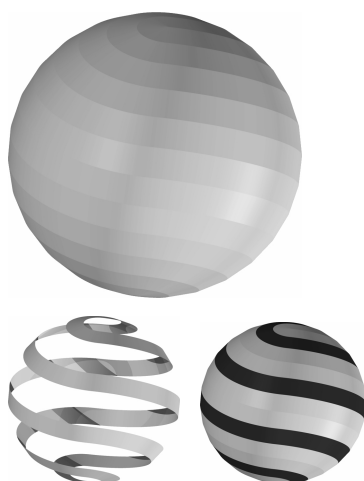
To tylko wierzchołek góry lodowej, jeden z przedstawicieli licznej rodziny, której członkowie powstają przez podmianę kwadratu (w pierwszym etapie produkcji) na inne figury foremne – przekątną zastępujemy osią symetrii przechodzącą przez wierzchołek. W ten sposób otrzymujemy nowe cudaczne dziwolągi (rodzinne zdjęcie poniżej), których przedstawicieli nazywamy *n*-sferostożkami 1, gdzie *n* jest liczbą kątów wejściowego wielokąta foremnego (o jedynce za moment).



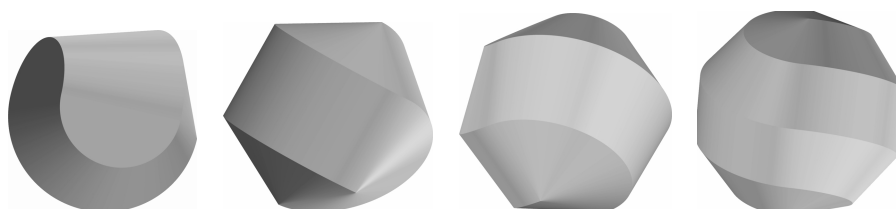
Gwoli precyzji ustalmy, że trzymając przed sobą zetknięte połówki przeciętej bryły obrotowej (prawą i lewą), obracamy prawą z nich ruchem do siebie.

4-sferostożek 1 to bryła powstała z obrotu kwadratu wokół jego przekątnej i przekręceniu połowy o  $90^\circ$ .  
6-sferostożek 1 to bryła powstała z obrotu sześciokąta foremnego wokół jego przekątnej i obrocie połowy o  $60^\circ$ .

Śladem nazywamy „odcisk” bryły toczącej się bez poślizgu po płaszczyźnie.



30-sferostożek 3 i wyróżniona jedna z jego ścian.



Powyższe bryły to kolejno (od lewej) 5-, 6-, 7-, 10-sferostożek 1. Po rozcięciu bryły obrotowej połówka jest przekręcana o kąt  $\frac{360^\circ}{n}$  – w ten sposób części zawsze do siebie pasują. Każdy z tych sferostożków toczy się po pochylonym blacie (czasem z niewielką pomocą ludzkich mięśni) w dość spektakularny sposób – jak na możliwe do uzyskania efekty toczącej się bryły. Spróbuj znaleźć, Drogi Czytelniku, właściciela poniższego śladu.



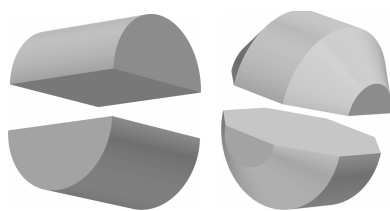
Opisane dotychczas twory to nie wszystko z tego gatunku. Z pewnością sam widzisz pole do tworzenia nowych stworzeń. Z przekrojeniu bryły obrotowej, powstałej przez obracanie wielokąta foremnego wokół osi symetrii, połowę możemy obracać o dowolną wielokrotność  $\frac{360^\circ}{n}$  – otrzymując w tenże sposób *n*-sferostożki *k*, gdzie *k* oznacza obrót połowy o kąt  $k\frac{360^\circ}{n}$ . Sferostożki mogą powstać z dowolnego wielokąta foremnego, można badać ich krawędzie, ściany i ślady. Na marginesie znajdziesz 30-sferostożek 3 z wyróżnioną ścianą, po której bryła może się toczyć bez końca.

Wiesz już sporo, ale to ciągle nie koniec... Wielokąt foremny obracać można wokół osi symetrii nieprzechodzącej przez wierzchołek figury (co jest możliwe dla parzystych *n*). Nie zmieniając dalszych etapów tworzenia, uzyskamy *n*-sferostożki *k* dualne.

Wiesz wystarczająco dużo, żeby zmierzyć się z poniższymi pytaniami.

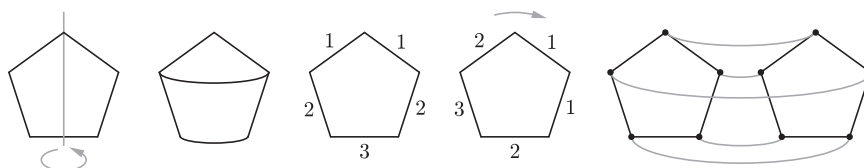
### ROZGRZEWKĄ

1. Ile ścian ma 4-sferostożek 1? Ile krawędzi ma 4-sferostożek dualny?
2. Ile ścian ma 3-sferostożek?
3. Jaka jest zależność między liczbą ścian i krawędzi sferostożka (dualnego bądź nie) od *n*, *k*?
4. Ślady jakich sferostożków (dualnych bądź nie) mają proste fragmenty (przykładem jest ślad powyżej)?
5. Jakie pary 8-sferostożków *k* będą zostawiały ślady, będące lustrzanymi odbiciami?



4-sferostożek 1 dualny i 8-sferostożek 2 dualny

Zanim przejdziesz do ostatecznego wyzwania, zapoznaj się z techniką analizowania pewnych własności sferostożków. Dla przykładu rozważmy 5-sferostożek 1. Bryła obrotowa powstała z obrotu pięciokąta ma trzy ściany. Wyteż na moment wyobraźnię i ponumeruj odpowiednio krawędzie pięciokąta. Krawędzie oznaczone tymi samymi numerami i leżą na tej samej ścianie. Druga połowa jest obrócona o kąt  $72^\circ$  – numeracja pięciokąta została zmieniona. Po połączeniu części (lewej z niezmienną numeracją i prawej obróconej) odpowiednie wierzchołki i krawędzie sferostożka zostaną sklejone. W obrębie jednej połowy dwie krawędzie z tym samym numerem są połączone ścianą, natomiast odpowiednie sklejenie wierzchołków z różnych połówek zostało przedstawione na rysunku za pomocą dodatkowych linii.



Teraz, nawet bez modelu sferostożka w dłoniach, można opisać zachowanie toczącej się bryły. Zaczniemy od krawędzi z numerem 3 na prawej połowie. Krawędź ta jest połączona z krawędzią 2 lewej połowy. Druga krawędź 2 lewej połowy jest połączona z krawędzią 1 prawej połowy. Druga krawędź 1 prawej połowy jest połączona z krawędzią 1 lewej połowy. Druga krawędź 1 lewej połowy jest połączona z krawędzią 2 prawej połowy. Druga krawędź 2 prawej połowy jest połączona z krawędzią 3 lewej połowy i na tym koniec. Krawędź 3 z lewej połowy nie jest połączona z żadną inną krawędzią na tej połowie, sferostożek przestaje się toczyć po pochylonym blacie. Ten nieco mglisty opis można zapisać prościej

$$3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3.$$

Wytłuszczoną kolorową czcionką zaznaczone są krawędzie wielokąta dla prawej połowy. Oznacza to, że sferostożek ma jedną ścianę (właśnie się po niej przetoczył), jednak nie może toczyć się bez końca (ile w takim razie ma krawędzi?).

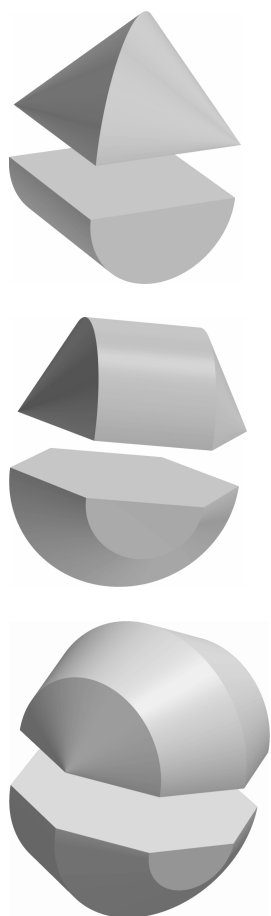
#### Czas na WYZWANIE

6. Gdy sferostożek ma tylko jedną ścianę, można pokusić się o pewne malowanki i pociągnąć linię wzdłuż środka jego ściany. Kiedy linia ta będzie pętlą?
7. Czy możliwe jest zatoczenie pętli przy rysowaniu kreski wzdłuż środka ściany sferostożka, gdy nie jest to jedyna jego ściana (jest to możliwe, na przykład, na ścianie bocznej walca)?
8. Czy ślad sferostożka może być pętlą? To znaczy, czy tocząc się bez poślizgu i bez cofania (w intuicyjnym tego słowa znaczeniu) sferostożek może znaleźć się w miejscu i pozycji, w których zaczął toczenie?
9. Czy ślad sferostożka może przecinać sam siebie?
10. Jakie sferostożki mają ślad środkowosymetryczny?

Po wykonaniu powyższych ćwiczeń (albo chociaż ich części) jesteś gotowy do dalszych badań. Cóż, dlaczegoż by nie skrzyżować sferostożków dualnych i niedualnych? Jeżeli oba powstały z obrotu tej samej figury foremnej, to po przekrojeniu brył na połowy części będą do siebie pasować. Takie twory nazwiemy *n-sferostożkami k półdualnymi*. W tym przypadku również można pokusić się o znalezienie zależności między wyjściową figurą foremną a liczbą krawędzi, wierzchołków czy ścian, można analizować, kiedy takie bryły mogą toczyć się bez końca. Wszelkie opisy dotyczące własności tych brył będą dla świata nowe, więc tym bardziej zachęcamy do badań (sami chętnie co nieco się dowiemy)!

A czy to koniec? Ależ nie... Niektóre figury nieforemne również będą miały tę własność, że tworząc z nich bryłę obrotową, można przekroić ją na dwie pasujące do siebie części. Ale to kolejna historia...

*Małą Deltę przygotowali Przemysław KICIAK i Kamila ŁYCZEK*



Czytając nazwę *n-sferostożki półdualne*, doświadczasz wiekopomnej chwili. Z prawdopodobieństwem bliskim jedności czytasz bowiem pierwszą wzmiankę o tego typu bryłach, która pojawiła się we wszechświecie. A w każdym razie mimo wielu starań nic na ten temat w ziemskiej literaturze autorom znaleźć się nie udało. Jeżeli jednak natrafisz na jakiś ślad, czym prędzej poinformuj o tym Redakcję!

## Informatyczny kącik olimpijski (90): Zapis wieżowy

Tym razem omówimy rozwiązanie zadania *Zapis wieżowy* z Akademickich Mistrzostw Polski w Programowaniu Zespołowym z 2006 roku. Dla ciągu  $n$  liczb naturalnych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  oraz liczby naturalnej  $m$  należy wyznaczyć resztę z dzielenia przez  $m$  wieży potęgowej, w której liczby z ciągu są kolejnymi wykładnikami. Innymi słowy, mamy znaleźć wartość wyrażenia

$$a_1^{a_2^{\dots^{a_n}}} \pmod{m}.$$

Przykładowo,  $3^{2^3} \pmod{7} = 2$ , gdyż  $3^{2^3} = 3^8 = 6561 = 937 \cdot 7 + 2$ . Oczywiście, bezpośrednie obliczanie potęg nie wchodzi w grę, gdyż ich wartości rosną coraz szybciej z każdym dodatkowym wykładnikiem i już liczba  $4^{3^{2^3}}$  ma 3951 cyfr. Dla uproszczenia zapisu wieżę potęgową będziemy oznaczali przez  $a_{1 \uparrow n}$ .

W rozwiązaniu zadania pomoże nam twierdzenie Eulera, które mówi, że dla względnie pierwszych liczb naturalnych  $a$  i  $m$  spełniona jest kongruencja

$$(*) \quad a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m},$$

gdzie  $\varphi(m)$  oznacza liczbę liczb względnie pierwszych z  $m$  i nie większych niż ta liczba. Jeśli zatem liczby  $a_1$  i  $m$  byłyby względnie pierwsze, to moglibyśmy:

- (1) wyznaczyć  $\varphi(m)$ ,
- (2) rekurencyjnie obliczyć rozwiązanie mniejszego problemu dla ciągu  $a_2, \dots, a_n$  i modułu  $\varphi(m)$ , czyli  $A_2 = a_{2 \uparrow n} \pmod{\varphi(m)}$ ,
- (3) korzystając z twierdzenia Eulera, wyznaczyć rozwiązanie

$$a_{1 \uparrow n} = a_1^{a_{2 \uparrow n}} = a_1^{\gamma \cdot \varphi(m) + a_{2 \uparrow n} \pmod{\varphi(m)}} = a_1^{\gamma \cdot \varphi(m) + A_2} \equiv a_1^{A_2} \pmod{m}.$$

Przypomnijmy, że jeśli znamy rozkład modułu na czynniki pierwsze  $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_\ell^{\alpha_\ell}$ , to do obliczenia  $\varphi(m)$  możemy wykorzystać następujący wzór:

$$(**) \quad \varphi(m) = m \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1} \dots \frac{p_\ell - 1}{p_\ell}.$$

Rozkład ten możemy znaleźć w czasie  $O(\sqrt{m})$ , przeglądając wszystkie potencjalne dzielniki liczby  $m$  nie większe niż  $\sqrt{m}$ . Zatem w takim też czasie wykonamy krok 1 algorytmu. Z kolei potęgowanie  $a_1^{A_2} \pmod{m}$  z kroku 3 możemy wykonać w czasie  $O(\log m)$ , stosując metodę wielokrotnego podnoszenia do kwadratu. W sumie wykonamy  $n$  wywołań rekurencyjnych, w  $i$ -tym wywołaniu obliczając  $A_i = a_{i \uparrow n} \pmod{m_i}$ , gdzie  $m_1 = m$  oraz  $m_i = \varphi(m_{i-1})$  dla  $i \geq 2$ , co da algorytm o złożoności czasowej  $O(n\sqrt{m})$ .

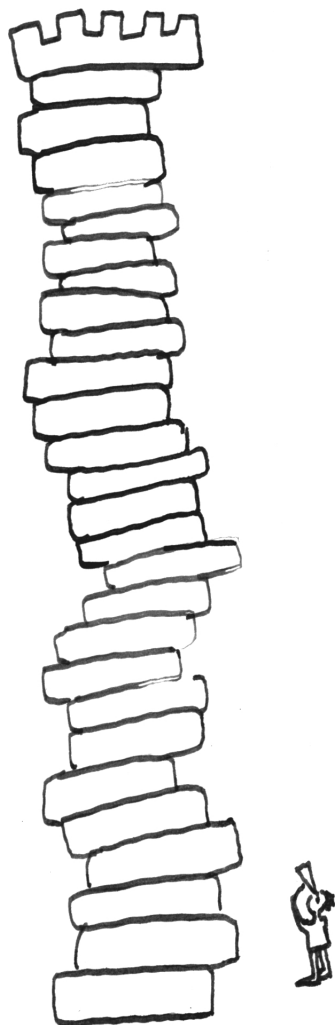
Zauważmy jednak, że ze wzoru (\*\*) widać, iż  $\varphi(x)$  dla nieparzystego  $x$  jest liczbą parzystą, natomiast dla parzystego  $x$  mamy  $\varphi(x) \leq \frac{x}{2}$ . Wynika z tego, że ciąg kolejnych modułów  $m_1, m_2, m_3, \dots, 1$  ma co najwyżej  $2 \log_2 m$  wyrazów, zatem wystarczy, że wykonamy  $\min(n, 2 \log_2 m)$  wywołań rekurencyjnych. A po drugie, pracę wykonaną we wszystkich wywołaniach kroku 1 można sumarycznie oszacować przez  $O(\sqrt{m})$ . Zatem lepszym oszacowaniem czasu działania naszego algorytmu jest  $O(\sqrt{m} + \min(n, \log m) \log m)$ , czyli po prostu  $O(\sqrt{m})$ .

Niestety, abyśmy mieli pewność, że algorytm działa poprawnie, nie tylko liczby  $a_1$  i  $m$  muszą być względnie pierwsze, ale również liczby  $a_i$  i  $m_i$  dla wszystkich  $i \geq 2$ . Na szczęście twierdzenie Eulera można uogólnić, aby działało również bez założenia o względnej pierwszości. Nowa wersja brzmi następująco: dla dowolnych liczb naturalnych  $a$ ,  $m$  i  $k$  spełniona jest kongruencja

$$(***) \quad a^{s+k \cdot \varphi(m)} \equiv a^s \pmod{m},$$

gdzie  $s$  jest pewną liczbą zależną od  $m$ , jednak nie większą niż  $\log_2 m$ .

Zanim udowodnimy to twierdzenie, zobaczmy, jak dzięki niemu naprawić nasz algorytm. Zmodyfikujemy go tak, aby nie tylko obliczał wartości  $A_i$ , ale również dodatkowy bit  $e_i$  równy 1 wtedy, gdy  $a_{i \uparrow n} \geq m_i$ . Znowu pokażemy, jak wykonać krok (2) algorytmu: założymy zatem, że  $m \geq 2$  i obliczyliśmy już  $A_2$  oraz  $e_2$ .



**Rozwiązanie zadania M 1484.**  
Dla  $m = 0$  otrzymujemy  $x = -2$ , co nie spełnia warunków zadania.

W przeciwnym przypadku otrzymujemy równanie kwadratowe, niech  $x_1$  i  $x_2$  będą jego rozwiązaniami. Korzystając ze wzorów Viète'a, otrzymujemy

$$\begin{aligned} (x_1 + 2)(x_2 + 2) &= \\ &= x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = \\ &= \frac{9m + 2}{m} + \frac{-2 + 8m}{m} + 4 = 21. \end{aligned}$$

Ponieważ  $x_1 + 2, x_2 + 2$  są liczbami naturalnymi większymi od 1 o iloczynie 21, to są one równe 3 i 7, a stąd rozwiązaniami naszego równania są liczby 1 i 5. Z zależności

$$9m + 2 = 1 \cdot 5 \cdot m \text{ mamy } m = -\frac{1}{2}$$

i łatwo sprawdzić, że ta wartość parametru faktycznie spełnia warunki zadania.

Wyznaczmy  $A_1$ . Jeśli  $e_2 = 0$ , to  $a_{2\uparrow n} < \varphi(m)$ , więc  $A_2 = a_{2\uparrow n}$  i wystarczy przyjąć  $A_1 = a_1^{A_2} \pmod m$ . Z kolei jeśli  $e_2 = 1$ , to  $a_{2\uparrow n} \geq A_2 + \varphi(m) \geq \log_2 m \geq s$ , czyli

$$a_{1\uparrow n} = a_1^{a_{2\uparrow n}} = a_1^{(\gamma-1)\varphi(m)+A_2+\varphi(m)} \stackrel{(***)}{\equiv} a_1^{A_2+\varphi(m)} \pmod m.$$

Zatem w obu przypadkach mamy  $A_1 = a_1^{A_2+e_2\varphi(m)} \pmod m$ . Z kolei wyznaczyć  $e_1$  można następująco: jeśli  $a_1 < 2$ , to  $e_1 = 0$ , a w przeciwnym przypadku możemy wykonać potęgowanie  $a_1^{A_2+e_2\varphi(m)}$ , w każdej iteracji domnażając jedno  $a_1$  i sprawdzając, czy wynik osiągnął już  $m$  (wykonamy co najwyżej  $\log_2 m$  takich iteracji). Ostatecznie złożoność czasowa całego algorytmu nie zmienia się.

Pozostaje udowodnić dane wzorem (\*\*\*) uogólnienie twierdzenia Eulera. Zdefiniujmy ciąg  $d_i$  następująco:

$$d_0 = \text{nwd}(a, m), \quad d_i = \text{nwd}\left(a, \frac{m}{d_0 \cdots d_{i-1}}\right) \quad \text{dla } i \geq 1,$$

oraz niech  $s$  będzie najmniejszą liczbą, taką że  $d_s = 1$ . Oznaczmy też  $D = d_0 \cdots d_{s-1}$ .

Liczba  $m/D$  jest liczbą powstałą po usunięciu z  $m$  wszystkich czynników pierwszych występujących w  $a$ , zatem liczby  $a$  i  $m/D$  są względnie pierwsze. Z twierdzenia Eulera wynika zatem, że

$$a^{k \cdot \varphi(m/D)} \equiv 1 \pmod{m/D}.$$

Ponadto każda z liczb  $a/d_i$  jest całkowita, więc liczba  $a^s/D$  również. Mnożąc powyższe równanie przez  $a^s/D$ , dostajemy

$$a^{s+k \cdot \varphi(m/D)} / D \equiv a^s / D \pmod{m/D}.$$

Korzystając z faktu, że kongruencja  $x \equiv y \pmod w$  jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest  $xD \equiv yD \pmod wD$ , możemy przemnożyć przez  $D$  obie strony i moduł powyższego równania:

$$a^{s+k \cdot \varphi(m/D)} \equiv a^s \pmod m.$$

Liczby  $D$  i  $m/D$  są względnie pierwsze, zatem z multiplikatywności funkcji  $\varphi$  dostajemy  $\varphi(m) = \varphi(m/D)\varphi(D)$ . Ponadto wykładniki w rozkładach na czynniki pierwsze liczb  $m/(d_0 \cdots d_{i-1})$  zmniejszają się, więc  $s \leq \log_2 m$ . Zatem ostatecznie dostajemy tezę twierdzenia:

$$a^{s+k \cdot \varphi(m)} \equiv a^s \pmod m.$$

Tomasz IDZIASZEK



## Odwracamy, obracamy...

Dana jest  $n$ -elementowa tablica  $a[1..n]$ , którą chcemy odwrócić, czyli spowodować, że jej elementy będą zapisane w kolejności  $a[n], a[n-1], \dots, a[1]$ . Najłatwiej to zrobić *w miejscu* (czyli używając jedynie stałej liczby komórek pamięci dla zmiennych pomocniczych), korzystając z instrukcji  $\text{swap}(a[i], a[j])$  zamieniającej miejscami wartości dwóch elementów:

```
for i := 1 to ⌊n/2⌋ do
  swap(a[i], a[n+1-i]);
```

Nietrudno się przekonać, że powyższy kod wywołuje instrukcję zamiany jedynie  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  razy, co w przypadku odwrócenia tablicy jest wynikiem optymalnym.

A teraz trudniejsze zadanie: chcemy tę samą tablicę obrócić o  $k$  komórek w lewo, czyli ustawić jej elementy w kolejności  $a[k+1], a[k+2], \dots, a[n], a[1], \dots, a[k]$ . I tym razem spróbujmy to zrobić, używając jedynie instrukcji zamiany.

Można w tym celu trzykrotnie wywołać omówioną przed chwilą procedurę odwracania tablicy:

```
rev(a[1..k]); rev(a[k+1..n]); rev(a[1..n]);
```

Ten kod wykona  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  instrukcji zamiany, co w zależności od parzystości liczb  $n$  i  $k$  da nam  $n$  lub  $n-1$  instrukcji. Pytanie: czy da się mniej?

Poniższy kod obraca tablicę, dzieląc ją na  $\text{nwd}(n, k)$  cykli o długości  $n/\text{nwd}(n, k)$  i wykonując obrót każdego z nich niezależnie, do czego potrzebuje  $n/\text{nwd}(n, k) - 1$  instrukcji zamiany:

```
for i := 1 to nwd(n, k) do
  for j := 1 to n/nwd(n, k) - 1 do
    swap(a[i+n(j-1)·k], a[i+n·j·k]);
```

Operacja  $i+n·j$  oznacza tu  $(i+j-1) \pmod{n+1}$ . Zatem w tym rozwiązaniu użyjemy w sumie  $n - \text{nwd}(n, k)$  instrukcji zamiany. A czy ten wynik da się poprawić?

T.I.



## Czegóż to dawniej uczono na wykładach algebry

### Twierdzenie Sturma

W czasach przedkomputerowych zlokalizowanie pierwiastków wielomianu było cenną umiejętnością. Dziś robią to za nas usłużne komputery.

Rozważamy wielomian  $w$  o współczynnikach rzeczywistych stopnia  $n$ . Wiadomo, że wielomian taki ma  $n$  pierwiastków zespolonych; niektóre z nich (czasami wszystkie) są, być może, rzeczywiste. Twierdzenie Sturma pozwala obliczyć liczbę pierwiastków rzeczywistych wielomianu  $w$  należących do wybranego przedziału  $\langle a, b \rangle$ . Oczywiście, odpowiedź na to pytanie możemy uzyskać, stosując metodę badania funkcji wielomianowej  $w$ , znaną z analizy matematycznej. Metoda Sturma jest czysto algebraiczna, nie stosuje metod analizy matematycznej.

Sprecyzujmy założenia. Wielomian  $w$  o współczynnikach rzeczywistych nie ma pierwiastków wielokrotnych (gdyby miał, to możemy je usunąć opisaną w *Delcie* 12/2015 metodą) oraz dla ustalonych liczb  $a, b$  ( $a < b$ ) wartości  $w(a)$  i  $w(b)$  są różne od zera.

Ciągiem Sturma dla wielomianu  $w$  nazywamy ciąg wielomianów  $w_0, w_1, w_2, \dots, w_s$  określony przez algorytm Euklidesa dla wielomianu  $w$  i jego pochodnej  $w'$ , zmodyfikowany w ten sposób, że rozważamy kolejne reszty z dzielenia zaopatrzone w znak minus:

$$\begin{aligned} w_0 &:= w, \\ w_1 &:= w', \\ w_2 &: w_0 = q_1 w_1 - w_2, \\ w_3 &: w_1 = q_2 w_2 - w_3, \\ &\dots\dots\dots \\ w_s &: w_{s-2} = q_{s-1} w_{s-1} - w_s \end{aligned}$$

dotąd aż wielomian  $w_s$  nie będzie miał pierwiastków w przedziale  $\langle a, b \rangle$ . Ten warunek na pewno możemy spełnić, gdyż zmodyfikowany algorytm Euklidesa, który tu stosujemy, prowadzi do największego wspólnego dzielnika wielomianu  $w$  i jego pochodnej, a gdyby ten miał pierwiastek, to byłby to wspólny pierwiastek  $w$  i  $w'$ , czyli pierwiastek wielokrotny wielomianu  $w$ , wbrew założeniu, że nie ma pierwiastków wielokrotnych.

Dla  $x$  należącego do  $\langle a, b \rangle$  przez  $z(x)$  oznaczamy liczbę zmian znaku w ciągu  $w_0(x), w_1(x), w_2(x), \dots, w_s(x)$ , tj. liczbę takich sytuacji, gdy kolejne wyrazy są liczbami przeciwnych znaków, a jeśli któryś wyraz jest zerowy, to pomijamy go i porównujemy znaki pozostałych wyrazów sąsiednich.

**Twierdzenie Sturma.** Liczba pierwiastków rzeczywistych wielomianu  $w$  spełniającego sformułowane wyżej założenia w przedziale  $\langle a, b \rangle$  jest równa  $z(a) - z(b)$ .

**Dowód.** Dwa kolejne wielomiany ciągu Sturma nie mogą mieć wspólnego miejsca zerowego w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , gdyby bowiem  $w_k(x_0) = w_{k+1}(x_0) = 0$ , to wobec równości

$$w_k = q_{k+1} w_{k+1} - w_{k+2}$$

mielibyśmy  $w_{k+2}(x_0) = 0$  i kolejne wielomiany ciągu Sturma aż do  $w_s$  zerowałyby się w punkcie  $x_0$ , co nie jest możliwe.

Wszystkie wielomiany ciągu Sturma mają skończoną liczbę miejsc zerowych, możemy więc dany przedział  $\langle a, b \rangle$  podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów, w których każdy z wielomianów ma stały znak. Funkcja  $z$  jest stała w każdym z tych podprzedziałów i może zmieniać swą wartość tylko przy przejściu przez punkt, w którym zeruje się jeden z wielomianów ciągu Sturma.

Jeśli  $x_0$  jest miejscem zerowym wielomianu  $w_k$  dla  $0 < k < s$ , to ponieważ

$$w_{k-1} = q_k \cdot w_k - w_{k+1},$$

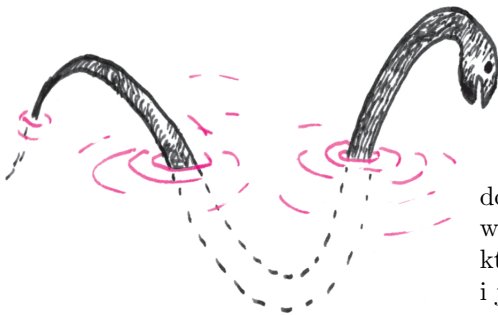
więc liczby  $w_{k-1}(x_0), w_{k+1}(x_0)$  mają przeciwne znaki. W pobliżu punktu  $x_0$  na lewo i na prawo możliwe są następujące układy znaków liczb

$w_{k-1}(x), w_k(x), w_{k+1}(x)$ :

---+, -+++, +--, +++-

a w samym punkcie  $x_0$ :

-0+, +0-



#### Rozwiązanie zadania M 1485.

Rozważmy następujące doświadczenie losowe: rzucamy niesymetryczną monetą tak długo, aż wyrzucimy orła po raz  $(k+1)$ -szy. W pojedynczym rzucie prawdopodobieństwo wyrzucenia orła jest równe  $\frac{2}{3}$ . Z prawdopodobieństwem 1 takie doświadczenie zakończy się po skończonej liczbie rzutów. Z drugiej strony prawdopodobieństwo zakończenia doświadczenia po dokładnie  $n+1$  rzutach wynosi

$$\binom{n}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{2^{k+1}}{3^{n+1}}.$$

W takim razie

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} \frac{1}{3^n} &= \frac{3}{2^{k+1}} \cdot \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} \frac{2^{k+1}}{3^{n+1}} = \\ &= \frac{3}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

W każdym przypadku mamy tylko jedną zmianę znaku. Jeśli więc  $x_0$  nie jest miejscem zerowym wielomianu  $w$ , to przy przejściu przez  $x_0$  funkcja  $z$  nie zmienia swej wartości. Jeśli natomiast  $x_0$  jest miejscem zerowym wielomianu  $w$ , to

$$\begin{aligned} w(x) &= (x - x_0) \cdot v(x), & v(x_0) &\neq 0, \\ w'(x) &= w_1(x) = v(x) + (x - x_0) \cdot v'(x). \end{aligned}$$

Ponieważ  $v(x_0) \neq 0$ , więc w pewnym otoczeniu  $x_0$  funkcja  $v$  ma stały znak. Gdy  $x < x_0$ , funkcja  $w$  ma przeciwny znak niż  $v$ , gdy zaś  $x > x_0$ , funkcje  $w$  i  $v$  mają ten sam znak. Zatem funkcja  $z$  przy przejściu przez  $x_0$  zmniejsza swą wartość o 1. Liczba pierwiastków rzeczywistych wielomianu  $w$  leżących w przedziale  $\langle a, b \rangle$  jest istotnie równa  $z(a) - z(b)$ .

**Przykład 1.** Wyznamy liczbę pierwiastków rzeczywistych wielomianu  $w(x) = x^3 - 3x - 1$  i wskażemy takie przedziały o końcach w liczbach całkowitych, z których każdy zawiera tylko jeden z tych pierwiastków.

Zamiast pochodnej  $w'(x) = 3x^2 - 3$  możemy przyjąć  $w_1(x) = x^2 - 1$ , gdyż przy wyznaczaniu liczby zmian znaku ważne są tylko znaki wartości wielomianów ciągu Sturma. Obliczamy  $x^3 - 3x - 1 = x \cdot (x^2 - 1) - 2x - 1$ , więc przyjmujemy  $w_2(x) = 2x + 1$ , a ponieważ  $x^2 - 1 = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})(2x + 1) - \frac{3}{4}$ , więc  $w_3(x) = \frac{3}{4}$ . Budujemy tabelkę, w której pierwszym wierszu wypisujemy wybrane liczby całkowite – będą one końcami przedziałów, w których spodziewamy się pierwiastków wielomianu  $w$ , a w pierwszej kolumnie wypisujemy wielomiany ciągu Sturma. Pod każdą liczbą z pierwszego wiersza wypisujemy znaki kolejnych wielomianów, a niżej liczbę zmian znaku.

	-2	-1	0	2
$x^3 - 3x - 1$	-	+	-	+
$x^2 - 1$	+	0	-	+
$2x + 1$	-	-	+	+
$\frac{3}{4}$	+	+	+	+
Liczba zmian	3	2	1	0

Z tabeli odczytujemy, że po jednym pierwiastku wielomianu  $w$  zawiera każdy z przedziałów  $(-2, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 2)$ . Są to oczywiście wszystkie pierwiastki, gdyż wielomian stopnia trzeciego nie ma więcej niż trzy pierwiastki.

**Przykład 2.** Rozważmy teraz wielomian  $w(x) = x^3 + 3x - 5$ . Jako  $w_1(x)$  możemy przyjąć  $x^2 + 1$ . Ponieważ  $x^3 + 3x - 5 = x \cdot (x^2 + 1) + 2x - 5$ , więc przyjmujemy  $w_2(x) = -2x + 5$ . Następnie obliczamy  $x^2 + 1 = (-\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}) \cdot (-2x + 5) + \frac{29}{4}$ ; zatem  $w_3(x) = -\frac{29}{4}$ . Budujemy tabelkę podobną, jak w poprzednim przykładzie, ale zaczniemy od wyznaczenia znaków granic wielomianów ciągu Sturma w  $-\infty$  i  $+\infty$ .

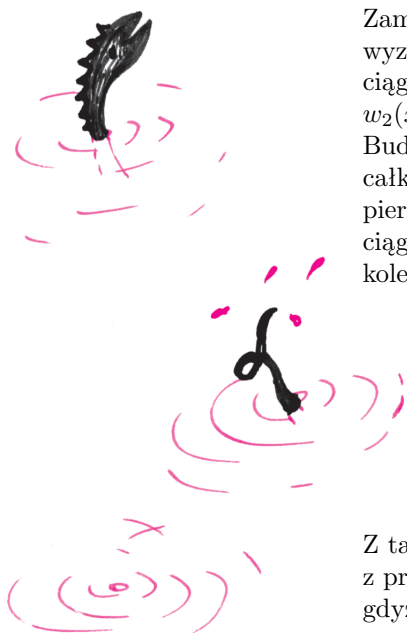
	$-\infty$		$+\infty$
$x^3 + 3x - 5$	-		+
$x^2 + 1$	+		+
$-2x + 5$	+		-
$-\frac{29}{4}$	-		-
	2		1

Wynika stąd, że wielomian  $w$  ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty. Obliczmy liczbę zmian znaku na końcach przedziału  $\langle 1, 2 \rangle$ .

	1	2	$+\infty$
$x^3 + 3x - 5$	-	+	+
$x^2 + 1$	+	+	+
$-2x + 5$	+	+	-
$-\frac{29}{4}$	-	-	-
	2	1	1

Jedyny pierwiastek wielomianu  $w$  należy do przedziału  $\langle 1, 2 \rangle$ .

Maciej BRYŃSKI



**Rozwiązanie zadania F 898.**

Kulka może trafić do krawędzi  $B$  po jednym lub większej liczbie odbić od dna i towarzyszących im ewentualnie odbiciach od ścianek studni. Jeżeli nastąpiło  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) odbić od dna, to kulka znajdzie się na wysokości  $H$  od dna studni po czasie

$$t_n = 2n \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

W tym momencie kulka powinna się znaleźć przy prawej ścianie studni. Oznacza to, że droga, przebyta przez nią w kierunku poziomym  $S_k = (2k + 1)L$ , gdzie  $2k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) jest liczbą uderzeń kulki o pionowe ścianki studni. Stąd otrzymujemy, że prędkość kulki w punkcie  $A$  powinna być równa:

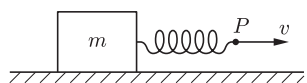
$$v = \frac{S_k}{t_n} = \frac{2k + 1}{2n} L \sqrt{\frac{g}{2H}}.$$

### Skrót regulaminu

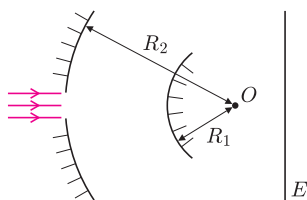
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



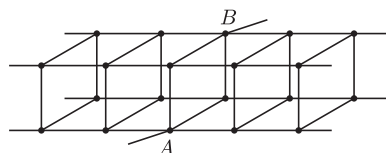
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2016



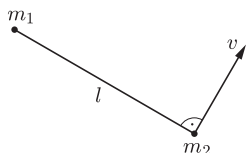
Rys. 1



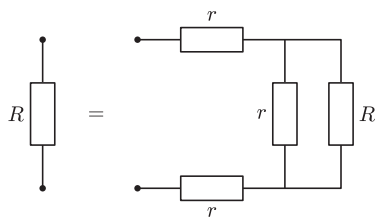
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

### Zadania z fizyki nr 612, 613

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**612.** Na poziomej powierzchni spoczywa klocek o masie  $m$ , do którego doczepiono nieważką sprężynę o współczynniku sprężystości  $k$ . W pewnej chwili wolny koniec sprężyny zaczęto ciągnąć tak, że poruszał się on ze stałą poziomą prędkością  $v$ . Jaką drogę przebędzie klocek do momentu, w którym osiągnie on prędkość  $v$ ? Współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego między klockiem a podłożem wynoszą odpowiednio  $\mu_s$  i  $\mu_k$ , przy czym  $\mu_s > \mu_k$ .

**613.** Za pomocą układu koncentrycznych zwierciadeł otrzymano na ekranie ostry obraz Słońca. Promienie krzywizny zwierciadeł wynoszą  $R_1 = 12$  cm i  $R_2 = 30$  cm. Jaka jest ogniskowa cienkiej soczewki, za pomocą której można otrzymać obraz Słońca o takiej samej wielkości?

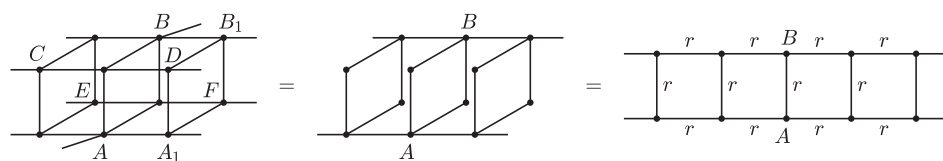
### Rozwiązania zadań z numeru 10/2015

Przypominamy treść zadań:

**604.** Znaleźć opór zastępczy między punktami  $A$  i  $B$  w obwodzie przedstawionym na rysunku 3. Opór każdej krawędzi między węzłami wynosi  $r$ . Sieć jest nieskończona w obie strony.

**605.** Dwa małe ciała o masach  $m_1$  i  $m_2$  związane są nicią o długości  $l$  i poruszają się bez tarcia po powierzchni poziomej. W pewnej chwili okazało się, że ciało o masie  $m_1$  jest nieruchome, a prędkość ciała o masie  $m_2$  ma wartość  $v$  i jest prostopadła do nici (rys. 4). Jakie jest w tym momencie napięcie nici?

**604.** Układ jest symetryczny względem płaszczyzny zawierającej krawędzie  $AA_1$  i  $BB_1$ :



Potencjały węzłów na prostych  $CD$  i  $EF$  są jednakowe i równe

$$V = \frac{V_A + V_B}{2},$$

gdzie  $V_A$  i  $V_B$  są potencjałami punktów  $A$  i  $B$ . Zatem krawędzie między tymi węzłami można usunąć. Równoważny obwód składa się z dwóch nieskończonych obwodów połączonych równoległe i równoległego do nich opornika  $r_{AB} = r$ .

Opór  $R$  każdego z nieskończonych obwodów nie zmienia się, gdy dodamy do niego jeden z powtarzających się elementów (rys. 5). Wynika stąd równanie:

$$R = 2r + \frac{rR}{R+r}.$$

Szukany opór zastępczy  $R_z$  całego obwodu otrzymujemy z równania:

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{r} + \frac{2}{R}.$$

Wynosi on

$$R_z = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

**605.** W płaszczyźnie poziomej nie działają na ciała żadne siły zewnętrzne, zatem środek masy układu wyznacza pewien inercjalny układ odniesienia. Wektory położenia ciał w układzie środka masy  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  spełniają związki:  $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$  oraz  $l = r_1 + r_2$ . Stąd

$$r_2 = \frac{lm_1}{m_1 + m_2}.$$

Analogiczny związek spełnia w CMS wektor prędkości ciała drugiego:

$$v_2 = \frac{m_1v}{m_1 + m_2},$$

gdzie  $v$  jest prędkością względną ciał. Szukane naprężenie nici dane jest wzorem:

$$N = \frac{m_2v_2^2}{r_2} = \frac{\mu v^2}{l},$$

gdzie

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

jest masą zredukowaną układu.

\* \* \*

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej  
**Klubu 44 F**  
po 601 zadaniach

Tomasz Rudny	37,68
Tomasz Wietecha	10 – 29,64
Marian Łupieżowiec	1 – 28,11
Jacek Konieczny	27,92
Michał Koźlik	3 – 26,32
Ryszard Woźniak	22,51
Krzysztof Magiera	3 – 14,40
Karol Łukanowski	11,97
Jacek Piotrowski	2 – 10,49
Andrzej Nowogrodzki	3 – 3,08
Jan Zambrzycki	7,34
Jacek Grela	3,02
Paweł Kubit	1,09
Piotr Maślankowski	0,64
Jędrzej Biedrzycki	0,46

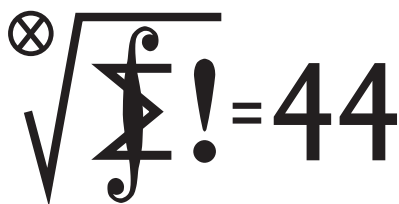
Liczba przed pauzą oznacza krotność zdobycia 44 punktów.



Podczas analizy współczynników trudności oraz liczby nadsyłanych w ubiegłym roku rozwiązań poszczególnych zadań nasuwa się refleksja, że najlepiej wypadają zadania z mechaniki. Uczestnicy Klubu często nadsyłają ogólniejsze niż oczekiwane rozwiązania problemów. Tak było, między innymi, w przypadku zadania 596 o zbliżających się statkach. Tomasz Wietecha podał pełne rozwiązanie problemu „krzywej pogoni”, część rozwiązań korzystała z gotowych, dostępnych w literaturze wzorów. I zostało to, oczywiście, uznane za poprawne, chociaż moją intencją było zachęcenie do poszukiwań jak najprostszych rozwiązań, które nie wymagają zaawansowanego aparatu matematycznego. Zdarzały się jednak zadania, gdzie liczba nadsyłanych rozwiązań była bardzo mała, lub były one niepoprawne. Do takich należały zadanie 598 na temat obwodu prądu zmiennego, zadanie 600 z termodynamiki (tu, być może, w treści nie zostało wyraźnie podkreślone, że utrzymywane są różne temperatury w dwóch częściach naczynia), czy zadanie 601 z optyki, gdzie nie nadeszły żadne rozwiązania – być może z powodu wakacji? Mam nadzieję, że zamieszczone w kolejnych numerach rozwiązania wyjaśniły zaistniałe problemy. Komentarza wymagają chyba zadanie 585 z optyki oraz 595 z termodynamiki. Pierwsza część zadania z optyki dotycząca przechodzenia promieni przez połączone części soczewki z wyciętym środkiem nie sprawiła na ogół trudności. Nadsyłający rozwiązania zauważyli, że po przejściu przez soczewkę nakładają się dwie symetryczne wiązki równoległe, tworzące kąt  $\alpha \neq 0$  z osią optyczną. Gorzej było ze znalezieniem odległości między prążkami interferencyjnymi na ekranie. Niektórzy autorzy rozwiązań uznali, że skoro soczewka jest cienka, można zaniedbać różnicę fazy związanej z przechodzeniem przez różne części soczewki i skupili się na różnicy dróg geometrycznych poza soczewką. Tymczasem promienie wychodzące w zgodnej fazie z punktu  $P$  przed soczewką spotykają się również w zgodnej fazie w nieskończenie odległym punkcie poza soczewką. W zadaniu 595 przemiana gazu była adiabatyczna, ale nieodwracalna, nie można więc było korzystać z prawa dla przemiany adiabatycznej odwracalnej  $pV^\kappa = \text{const}$ . Dobrze ilustruje to przykład adiabatycznego rozprężania gazu do próżni, po usunięciu przegrody rozdzielającej dwie części naczynia. Energia wewnętrzna tego gazu nie zmienia się, bo nie ma wymiany ciepła i gaz rozprężając się nie wykonuje pracy. Jeżeli jest to gaz doskonały i można zaniedbać oddziaływanie między cząsteczkami, nie zmienia się jego temperatura. Punkty początkowy i końcowy takiej przemiany leżą na tej samej izoterme, chociaż przemiana jest adiabatyczna.

Zadanie 585 było, niestety, ostatnim, którego rozwiązanie nadesłał **Pan Andrzej Idzik**. Zmagając się ze śmiertelną chorobą, ostatnie swoje rozwiązania w imponujący sposób wykonywał w pamięci. Był wielokrotnym weteranem ligi zadaniowej *Delty*. Bardzo brakuje jego życzliwych komentarzy i na ogół wzorowych rozwiązań. Pozostaje w ciepłej pamięci redaktorów Klubu.

## Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2016

Lista uczestników ligi zadaniowej

### Klub 44 M

po zakończeniu sezonu  
(roku szkolnego) 2014/15

Paweł Najman	–	6–42,85
Marek Spychała	–	1–42,75
Grzegorz Karpowicz	–	1–38,86
Jędrzej Garnek	–	2–37,64
Krzysztof Maziarz	–	35,37
Jerzy Cisło	–	11–35,00
Janusz Fiett	–	1–34,33
Franciszek S. Sikorski	–	1–33,77
Paweł Kubit	–	5–32,53
Stanisław Bednarek	–	1–31,37
Witold Bednarek	–	6–30,49
Michał Koźlik	–	29,50
Jerzy Witkowski	–	5–27,02
Zbigniew Skalik	–	2–24,82
Adam Dzedzej	–	2–24,55
Piotr Kumor	–	12–24,43
Paweł Duch	–	1–24,10
Roksana Słowik	–	1–23,01
Paweł Burdzy	–	19,87
Tomasz Wietecha	–	10–18,56
Krzysztof Kamiński	–	2–17,66
Marcin Kasperski	–	3–17,53
Janusz Wojtał	–	16,17
Marcin Małogrosz	–	1–16,06

Legenda (przykładowo): stan konta 6–30,49 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 30,49 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 14 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2013, 2014 lub 2015.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Galecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (12), P. Gadziński (7), K. Jedziński, J. Olszewski (16), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (10), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarowski, M. Adamaszek, P. Kubit (5), J. Cisło (11), W. Bednarek (6), D. Kurpiel, P. Najman (6), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

## Zadania z matematyki nr 715, 716

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**715.** Dane są dwie różne liczby całkowite dodatnie  $A, B$ . Wykazać, że zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych może być przedstawiony jako suma rozłącznych zbiorów trójelementowych, przy czym w każdym z tych zbiorów liczba środkowa (co do wielkości) różni się od jednej z dwóch pozostałych liczb o  $A$ , zaś od drugiej o  $B$ .

**716.** Dowieść, że jeżeli  $a, b, c$  są długościami boków trójkąta, to

$$\sqrt{a^2b + ab^2 - abc} + \sqrt{b^2c + bc^2 - abc} + \sqrt{c^2a + ca^2 - abc} > \frac{1}{2}(a + b + c)\sqrt{a + b + c}.$$

Czy współczynnik  $1/2$  (po prawej stronie) może być zastąpiony przez liczbę większą?

Zadanie 716 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

## Rozwiązania zadań z numeru 10/2015

Przypominamy treść zadań:

**707.** Niech  $W(x, y, z) = 1 + 9x(x - y)(x - z)$ . Znaleźć wszystkie trójki liczb zespolonych  $a, b, c$ , dla których spełnione jest równanie  $W(a, b, c) = W(b, c, a) = W(c, a, b) = 0$ .

**708.** Dane są dodatnie liczby całkowite nieparzyste  $k, m$ . Niech  $d = \text{nwd}(k + 1, m - 1)$ ,  $e = \text{nwd}(k - 1, m + 1)$ ,  $f = \text{nww}(d, e)$ . Dowieść, że liczba  $k^m + m^k$  dzieli się przez  $f$ .

**707.** Niech  $a, b, c$  będzie jedną z szukanych trójek. Jasne, że to są trzy różne liczby. Tak więc

$$0 = \frac{W(a, b, c) - W(b, c, a)}{9(a - b)} = a^2 + b^2 - (a + b)c.$$

Równoważnie:

$$(a + b + c)c = a^2 + b^2 + c^2.$$

Cykliczne przesunięcie symboli daje taką samą równość, z wyłączonym poza nawias czynnikiem  $a$  lub  $b$ . Skoro liczby  $a, b, c$  są różne, wynika stąd, że

$$a + b + c = 0 \quad \text{oraz} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Są to więc pierwiastki wielomianu  $z^3 - Az^2 + Bz - C$  o współczynnikach  $A = a + b + c = 0$ ,  $C = abc$ ,

$$B = ab + bc + ca = \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = 0$$

– czyli wielomianu  $z^3 - C$ . To znaczy, że  $a^3 = b^3 = c^3 = C = abc$ .

Równanie  $W(a, b, c) = 0$  daje teraz ciąg równości

$$(1) \quad -\frac{1}{9} = a(a - b)(a - c) = a(a^2 - (-a)a + bc) = 2a^3 + abc = 3a^3,$$

i tak samo dla  $b$  i  $c$ . Tak więc liczby  $a, b, c$  to trzy różne pierwiastki trzeciego stopnia z liczby  $-1/27$ ; czyli np.

$$(2) \quad a = -\frac{1}{3}, \quad b = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right), \quad c = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right),$$

z dokładnością do permutacji.

Na odwrót, dla każdej z sześciu trójek, uzyskanych przez permutacje trójki (2), można odwrócić ciąg równości (1), i tym samym sprawdzić, że spełnione jest równanie  $W(a, b, c) = 0$  (oraz jego cykliczne odpowiedniki).

**708.** Liczba  $m^k - 1$  dzieli się przez  $m - 1$ , więc i przez  $d$ . Wobec nieparzystości  $m$ , liczba  $k^m + 1$  dzieli się przez  $k + 1$ , więc i przez  $d$ . Zatem suma tych dwóch liczb, czyli  $m^k + k^m$  dzieli się przez  $d$ . Z symetrii warunków zadania wynika, że  $m^k + k^m$  dzieli się także przez  $e$ . W takim razie dzieli się przez liczbę  $f = \text{nww}(d, e)$ .

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, A. Dzedzej, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, M. Miodek, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, Z. Skalik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, S. Bednarek, T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Duch, J. Fiett, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Józwik, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Lupieżowicz, W. Maciak, M. Małogrosz, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Piękała, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, R. Słowik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychala, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobisz, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Zadanie 688 [Ostrosłup prawidłowy  $SABC$ ;  $|AB| = |BC| = |CA| = 1$ ; punkty  $X \in SA, Y \in SB, Z \in SC$ ;  $P_{SXY}^2 + P_{SYZ}^2 + P_{SZZ}^2 = P_{XYZ}^2$ ;  $V_{SABC} = ?$ ] ( $WT = 2,08$ ;  $LPR = 14$ ). Trzej uczestnicy: **J. Cisko**, **P. Duch**, **J. Olszewski** sięgnęli po najbardziej funkcjonalny oręż, rachunek wektorowy. Można się spierać, czy jest to coś istotnie odmiennego od trygonometrii (użytej w firmówce i w pracach innych uczestników) – ale zapisuje się krótko: oznaczając  $\vec{SX} = \mathbf{u}, \vec{SY} = \mathbf{v}, \vec{SZ} = \mathbf{w}$ , mamy  $4P_{SXY}^2 = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^2$  (i analogicznie dla ścian  $SYZ, SZX$ ; podnoszenie wektora do kwadratu w sensie iloczynu skalarnego), i dalej

$$4P_{XYZ}^2 = ((\mathbf{v} - \mathbf{u}) \times (\mathbf{w} - \mathbf{u}))^2 = \left( \sum_{\text{cycl}} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \right)^2 = 4 \sum_{\text{cycl}} P_{SXY}^2 + 2W,$$

gdzie  $W = \sum_{\text{cycl}} (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ . W myśl warunku zadania, zachodzi równość  $W = 0$ . Wystarczy teraz zastosować znaną tożsamość  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$ , by po krótkim przekształceniu sprowadzić wyrażenie  $W$  do postaci  $W = \sum_{\text{cycl}} \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cdot (t^2 - t)$ , gdzie  $t$  jest kosinusem kąta ścian przy wierzchołku  $S$  ostrosłupa;  $t < 1$ . Skoro  $W = 0$ , wnioskujemy, że  $t = 0$ , czyli krawędzie  $SA, SB, SC$  są parami prostopadłe. Stąd już szybko wynik  $V_{SABC} = \frac{1}{24}\sqrt{2}$ .

Zadanie 690 [ $a_n \in \mathbb{N}; a_0 = 1, a_1 > 1$ ,  $a_{n+1} = 1 + (a_1 \dots a_n)/a_{\lfloor n/2 \rfloor}$ ;  $b_n = 1/(a_{n+1}a_{\lfloor n/2 \rfloor}) \Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + \dots \in \mathbb{Q}$ ] ( $WT = 2,45$ ;  $LPR = 9$ ). Nietrudne – zrobione przez ośmiu uczestników; wszyscy po prostu obliczyli sumę tego szeregu, równą  $1/a_1$  (to liczba wymierna, skoro  $a_1 \in \mathbb{N}$ ). **Stanisław Bednarek** udowodnił, że – nieco ogólniej – jeśli ciągi liczb rzeczywistych dodatnich  $(a_n), (\lambda_n)$  są związane zależnością rekurencyjną  $a_{n+1} = 1 + (a_1 \dots a_n)/\lambda_n$ ,

Odszedł **Andrzej Idzik**. To był szok dla wszystkich – tą tragiczną wiadomością rozpoczął się rok 2015. Czytelnicy *Delty* wielokrotnie spotykali jego nazwisko; korespondował z czasopismem nie tylko jako uczestnik ligi zadaniowej. Choć z ligą przede wszystkim. W fizycznej był jedną z czołowych postaci: rozpoczął udział w 1996 roku, jedenastokrotnie zdobył 44p.; dwunastej rundy nie zdołał już ukończyć. Ostatnie prace to były rozwiązania zadań z numeru 12/2014 (!). W lidze matematycznej: start w roku 1999, dwie pełne rundy, ostatnie zadania z numeru 6/2014. Wiele wdzięku miały jego prace; trochę żartobliwej ironii pod adresem własnych nieporadności – jak zwykle je nazywać...

Kartę żalobną musimy kontynuować. **Kazimierz Serbin** nie żyje już od roku 2007, choć wiadomość o tym dotarła do nas niedawno. Był wieloletnim nauczycielem matematyki (w tym licznych olimpijczyków) oraz dyrektorem liceum w Sanoku. W lidze matematycznej został Weteranem (trzy pełne rundy); w roku 1995 przysłał swoje ostatnie prace ligowe.

\* \* \*

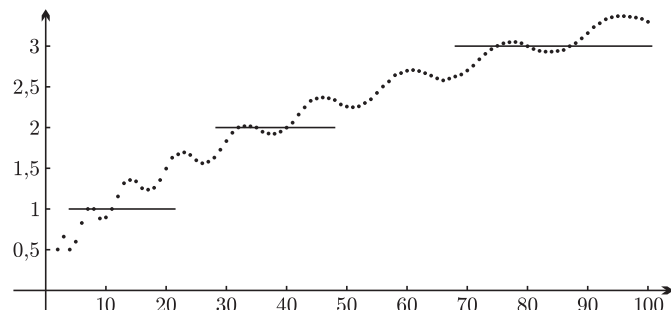
Teraz doroczne omówienie wybranych zadań. Za niektórymi kryje się kawałek ciekawej matematyki. ( $WT$  to współczynnik trudności,  $LPR$  to liczba poprawnych rozwiązań.)

Zadanie 683 [Przystające okręgi  $k_1, k_2$ , punkty przecięcia:  $A, B$ ;  $X \in k_1, Y \in k_2$ ;  $A, B$  oraz środek  $AB$  nie leżą na prostej  $XY$ ; równoległobok  $XYZ \Rightarrow$  okręgi  $(AXZ), (AYZ)$  przystają do  $k_1, k_2$ ] ( $WT = 2,48$ ;  $LPR = 7$ ). To ostatnie rozwiązanie z ligi matematycznej, jakie (z pięknym kolorowym rysunkiem) przysłał **Andrzej Idzik**...

Inne dobre rozwiązania (**S. Bednarek, J. Cisko, P. Duch, J. Olszewski, J. Garnek, J. Fiett**) też nie różniły się wiele od firmowego – dostrzeżenie paru równoległoboków, analiza kątów. W niektórych pracach rozumowanie było bezbłędne w konfiguracji narysowanej przez autora pracy, a w innych wymagało niewielkich modyfikacji (np. zamiast równości dwóch kątów – dopełnianie do kąta półpełnego). W jeszcze jednej pracy całkiem odmienne rozumowanie, działające w wybranej konfiguracji, i niestety załamujące się przy innej.

przy czym  $\lambda_n(a_{n+1} - 1) \rightarrow \infty$ , wówczas szereg  $\sum b_n$  o wyrazach  $b_n = 1/(\lambda_n a_{n+1})$  ma sumę równą  $1/a_1$ .

Zadanie 694 [Dla  $n \in \mathbb{N}$ :  $a(n) = \min\{|n - k^2|: k \in \mathbb{N}\}$ ;  $S(n) = a(1) + \dots + a(n)$ ;  $f(n) = S(n)/n \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}: m = f(n)$  dla dokładnie trzech  $n$ ] ( $WT = 2,95$ ;  $LPR = 4(7?)$ ). **Ł. Garncarek, P. Kumor, J. Olszewski** (oraz, z luką, **W. Tobisz**) przysłali rozwiązania nie różniące się istotnie od firmowego. Autor zadania, **Przemysław Grabowski**, proponował nieco inny sposób postępowania: eksperymentując, łatwo znaleźć (dla ustalonego  $m$ ) trzy rozwiązania równania  $f(n) = m$ , mianowicie  $n = 9m^2 - 1, n = 9m^2 \pm 2m$ . To, że nie ma innych, można uzasadnić, wyznaczając przedziały monotoniczności i lokalne ekstrema funkcji  $f(n)$ ; szkic wykresu poniżej.



Jest to niezbyt trudne, ale kłopotliwe (**J. Cisko, J. Fiett** – luki uzupełnialne). Metodę pośrednią wybrał **T. Wietecha** – rozwiązaniem pełne, choć rozbite na liczne przypadki; za to praca zawiera, jako załącznik, tabelę wartości  $f(n)$  (z dokładnością  $10^{-3}$ ), ręcznie wypisaną, dla  $n \leq 106$ . Skwapliwie skorzystaliśmy z tej pomocy, sporządzając wykres :)

Ciekawostka: ciągu  $S(n)$  nie udało się znaleźć w OEIS (*The Online Encyclopedia of Integer Sequences*). A ciąg  $f(n) = S(n)/n$  ładny, jak widać z obrazka.

Zadanie 696 [Wyznaczyć  $\max\{n : \exists n \text{ punktów na płaszczyźnie, których każde trzy rozpinają trójkąt równoramienny}\}$ ] ( $WT = 2,86; LPR = 5$ ). Ciekawa geometria kombinatoryczna. Rozwiązanie prawie identyczne z firmowym przedstawił **Janusz Fiett**. Bardziej uciążliwie, ale zasadniczo poprawnie (liczne przypadki): **Janusz Olszewski, Tomasz Wietecha**. Natomiast dwaj uczestnicy zwrócili uwagę, że zagadnienie jest znane – **Jerzy Cisło** wskazał rozwiązanie: P. Erdős, L. M. Kelly (*Problem E735, The American Mathematical Monthly*, vol. 54, no. 4, pp. 227–229, 1947); ten sam odsyłacz dał **Piotr Kumor**, od którego ponadto dowiedzieliśmy się o analogicznym zagadnieniu w przestrzeniach wyższych wymiarów, rozwiązaniem w pracach: H. Kido *Classification of isosceles eight-point sets in 3-dimensional Euclidean space (European J. of Combinatorics*, vol. 27, no. 3, pp. 329–341, 2006) oraz H. Kido *On Isosceles Sets in the 4-Dimensional Euclidean Space (Hindawi Publishing Corporation, Intl. J. of Combinatorics)*; <http://www.hindawi.com/journals/ijcom/2010/803210/>

W  $R^2$  (nasze zadanie) szukane maksimum wynosi 6 i jest realizowane przez wierzchołki pięciokąta foremnego i jego środek. Z prac Kido wynika, że w  $R^3$  maksimum wynosi 8, w  $R^4$  zaś 11; realizacja w  $R^3$ : bieguny i środek sfery oraz wierzchołki pięciokąta foremnego na równiku (trzeba dopuścić „trójkąt” zdegenerowany do trójki współliniowej).

Zadanie 700 [Czy  $\forall g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} (z g(1) = 1) \exists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} : (f(n) \geq g(n)) \& (m \perp n \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n))$ ?] ( $WT = 2,75; LPR = 5$ ). Konstrukcja funkcji  $f$  identyczna, jak w rozwiązaniu firmowym: **S. Bednarek, J. Cisło, J. Fiett, Ł. Garncarek, P. Kumor**.

Zadanie 702 [ $F_n(t) = t^n + (t+1)^n \Rightarrow$  istnieje nieskończenie wiele  $n \in \mathbb{N}$ , dla których równanie  $F_{2n}(x) = F_n(y)$  nie ma rozwiązań całkowitych  $x, y \geq 1$ ] ( $WT = 3,44; LPR = 2$ ). To się zaczęło przed ćwierćwieczem. **Marcin Mazur**, wówczas doktorant w Instytucie Matematyki UW, postawił hipotezę, że dla  $n \geq 2$  równanie  $F_{2n}(x) = F_n(y)$  nie ma rozwiązań  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ , w których  $|x| > 1$  lub  $|y| > 1$ . Potrafił wykazać, że jeśli (dla ustalonego  $n$ ) takie rozwiązania istnieją, to jest ich tylko skończenie wiele – i taką tezę zaproponował dla naszej ligi. Zadanie ukazało się z numerem 194 (*Delta* 8/1989; rozwiązanie autora: *Delta* 5/1992). Nawet tak okrojona treść okazała się za trudna dla ówczesnych uczestników. Jako jedyne w historii ligi otrzymało  $WT = 4,00$ . Roczne omówienie tego zadania zaczynało się słowami: *Ten rekord jest już nie do pobicia...*

Eksplorację problemu podjął niedawno **Piotr Kumor**, uzyskując wynik, który zaproponował jako obecne zadanie 702. I on, i redaktor ligi, byli przekonani, że przypomnienie zadania 194 (przy podaniu treści zadania 702) stworzy jedyną szansę, by ktokolwiek je rozwiązał. Dwaj uczestnicy sprostali wyzwaniu. Oba wykazali, że równanie nie ma rozwiązań, gdy  $n > 2$  jest liczbą pierwszą. Rozwiązanie firmowe też wskazuje tę samą serię; metoda z rozwiązania zadania 194 jest przydatna (fragment tamtego rozwiązania został skopiowany w „firmówce” 702).

**Janusz Olszewski** odnalazł ów numer archiwalny i powołał się na szacowanie, użyte w tamtym rozwiązaniu. **Jerzy Cisło**

nie odnalazł owego numeru i *zrobił zadanie od zera* (tą samą metodą) – przy okazji zauważając, że teżę zadania 194 także uzyskał. W latach 1986–2000 pan Jerzy w lidze nie brał udziału; widać, że gdyby brał, zadanie 194 miałooby  $WT < 4$  (!)

**Piotr Kumor** kontynuuje badanie tego równania. Znalazł inne nieskończone serie wykładników  $n$ , dla których brak rozwiązań. Uzyskał dalsze interesujące wyniki, ukazujące dwoistą (analityczno-algebraiczną / teorio-liczbową) naturę problemu: jeśli  $n \geq 2$  oraz  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  jest rozwiązaniem, to różnica  $r = y - (x^2 + x)$  spełnia nierówność

$$\sqrt{n+1} - 2 < r \leq (n-2)/2,$$

przy czym dla ustalonej wartości  $r$  może istnieć co najwyżej jedno rozwiązanie; jeśli ponadto  $n \geq 3$  jest liczbą nieparzystą, to różnica  $r$  dzieli się przez iloczyn wszystkich liczb pierwszych  $p$  takich, że  $p-1$  jest dzielnikiem  $n-1$ ; te wyniki dają znaczące oszacowanie liczby (ewentualnych) rozwiązań. Dalsze wyniki: jeśli iloczyn, wzmiankowany w ostatnim zdaniu, przekracza  $(n-3)/4$ , to równanie ma nie więcej niż jedno rozwiązanie; a gdy przekracza  $(n-3)/2$ , rozwiązań nie ma.

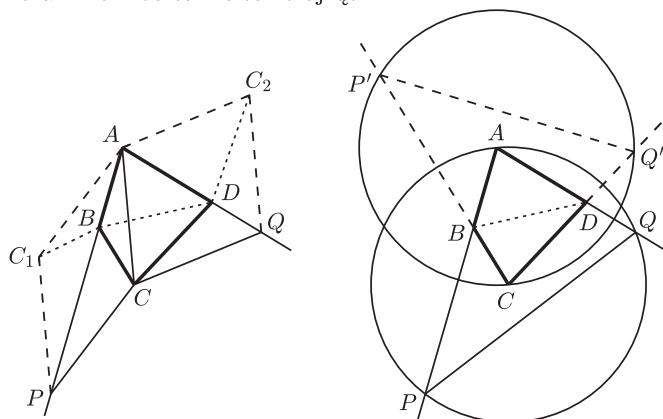
No, ale czy dla jakiegokolwiek  $n \geq 2$  rozwiązania z  $x, y \geq 2$  w ogóle istnieją? Problem nadal otwarty...

Zadanie 703 [Czworokąt wypukły  $ABCD$ ,  $\sphericalangle A = \sphericalangle C < 90^\circ$ ;  $P \in AB^{\rightarrow}$ ,  $Q \in AD^{\rightarrow}$ ,  $|CP| = |CQ| = |CA| \Rightarrow |PQ| \leq \text{obwód}(\triangle ABD)$ ] ( $WT = 3,00; LPR = 4$ ).

**Ł. Garncarek, P. Kumor, J. Olszewski** – firmowo. **Stanisław Bednarek** – inaczej, i bardzo efektywnie: budujemy romby  $ACPC_1$ ,  $ACQC_2$  (więc  $|BC_1| = |BC|$ ,  $|DC_2| = |DC|$ ); powstał równoległobok  $C_1PQC_2$ , a zatem

$$|PQ| = |C_1C_2| \leq |C_1B| + |BD| + |DC_2| = \text{obwód}(\triangle CBD).$$

Teza? Nie – bo to nie ten trójkąt.



No to zamieniamy rolami punkty  $A$  i  $C$ . Na półprostych  $CB^{\rightarrow}$ ,  $CD^{\rightarrow}$  znajdujemy punkty  $P'$ ,  $Q'$  tak, by okrąg  $(CP'Q')$  miał środek  $A$  (podobnie jak okrąg  $(APQ)$  miał środek  $C$ ). Z konkluzji poprzedniej części wnosimy, że  $|P'Q'| \leq \text{obwód}(\triangle ABD)$ . Ale  $|P'Q'| = |PQ|$ , bo to cięciwy przystających okręgów  $(APQ)$ ,  $(CP'Q')$ , podpierające równą kątą wpisane  $PAQ$ ,  $P'CQ'$ . Teraz to już naprawdę teza – i to wzmocniona:  $|PQ|$  nie przekracza obwodów *obu* tych trójkątów  $(ABD)$  i  $(CBD)$ .

Autor tej ciekawej pracy zwrócił ponadto uwagę, że w treści zadania  $AB^{\rightarrow}$ ,  $AD^{\rightarrow}$  należy rozumieć jako półproste *otwarte*, tj. bez punktu  $A$  (gdyby dopuścić możliwość  $P = A$  lub  $Q = A$ , punkt  $C$  przestaje być środkiem okręgu  $(APQ)$  i teza się załamuje – o przykłady nietrudno).

## Kwantowa nieodwracalność

Nieodwracalność procesów makroskopowych jest ewidentna. Z jajek łatwo zrobić jajecznicę, a odwrotnego procesu jakoś nie udało się dotąd zaobserwować. Z drugiej strony nieodwracalność jest jednym z najbardziej zastanawiających fenomenów fizycznych, bo mikroskopowe prawa fizyki, tak klasycznej, jak kwantowej nie wyróżniają strzałki czasu.

Zgodnie z drugim prawem termodynamiki kierunek upływu czasu jest wyznaczony przez wzrost średniej entropii. Otwartym pytaniem pozostaje, kiedy i jak mikroskopowa odwracalność przechodzi w makroskopową nieuchronność.

Jedną z dróg prowadzących do odpowiedzi jest badanie (nie)odwracalności procesów zachodzących w układach coraz bardziej „kwantowych”. A pierwszy prawdziwie kwantowy pomiar został właśnie przeprowadzony [1].

Badanym układem kwantowym był qubit (połówkowego) spinu jądra atomu węgla  $^{13}\text{C}$  ciekłego chloroformu ( $\text{CHCl}_3$ ). Próbka była umieszczona w bardzo silnym jednorodnym polu magnetycznym i jednocześnie wewnątrz cewki umożliwiającej sterowanie i pomiar metodą NMR (jądrowego rezonansu magnetycznego).

Stan początkowy był przygotowywany poprzez odpowiednią sekwencję pulsów radiowych ustalających temperaturę na  $T = (75 \pm 3) \text{ nK}$  (co odpowiada częstości  $k_B T/h = (1,56 \pm 0,07) \text{ kHz}$ ). Następnie układ wytrącano z równowagi poprzez impuls o zmieniającej się liniowo amplitudzie i fazie o całkowitym czasie trwania  $\tau$  od 100 do 700 mikrosekund, czyli dużo krótszym niż charakterystyczne czasy relaksacji badanego układu (nie mniejsze niż 1/3 sekundy). Po osiągnięciu równowagi, ale już ze zmienionym ustawieniem kierunku średniej magnetyzacji, był ponownie wytrącany za pomocą odwróconego w czasie impulsu.

Średnią zmianę entropii określano na dwa sposoby.

Po pierwsze, trajektoria średniej magnetyzacji była mierzona (21 pomiarów pokrywało czas trwania pojedynczego impulsu) za pomocą tzw. tomografii stanu kwantowego, co pozwoliło na określenie przebiegu względnej entropii Kullbacka–Leiblera między odpowiadającymi sobie chwilami procesu i jego odwróconej w czasie wersji.

Po drugie, mierzona była średnia zmiana entropii poprzez pomiar interferometryczny możliwy dzięki wykorzystaniu pomocniczego qubitu spinu jądra wodoru tej samej cząsteczki chloroformu. Detale tego pomiaru zostały szczegółowo opisane w obszernym dodatku do publikacji [1]. Dzięki temu, że częstość precesji Larmora jest cztery razy większa dla jądra wodoru niż dla jądra węgla, możliwe jest niezależne obracanie obu spinów pozwalające na dobieranie czasu, w którym przez oddziaływanie spin-spin informacja jest przekazywana z badanego qubitu do qubitu pomocniczego, a następnie odczytywana.

Wyznaczona w ten sposób średnia wartość entropii dla danego czasu trwania impulsu  $\tau$  zgadza się z odpowiadającymi mu pomiarami przebiegu względnej entropii Kullbacka–Leiblera. Zgodnie z oczekiwaniem największy poziom wzrostu entropii jest widoczny dla najkrótszego czasu trwania takiego (wytrącającego ze stanu równowagi) impulsu. Dla  $\tau$  powyżej  $300 \mu\text{s}$  obserwowany jest zanik zależności – wzrost średniej entropii ustala się (w granicy niepewności pomiarowej) na poziomie około pięciokrotnie mniejszym niż dla najkrótszego z badanych czasów.

W podsumowaniu pracy [1] autorzy interpretują zgodność pomiaru dodatniej średniej entropii produkowanej w trakcie całego cyklu z pomiarem odległości między stanami obserwowanymi w trakcie trwania wymuszonego procesu oraz jego odwróconej w czasie wersji, jako pojawianie się strzałki czasu w procesie zrealizowanym w ramach nierównowagowej termodynamiki kwantowej.

W dyskusji fizycznych podstaw obserwacji nieodwracalności w zamkniętym układzie kwantowym autorzy wskazują na niezbędność uwzględnienia w opisie nie tylko odwracalnych równań ruchu (równania Schrödingera), ale również postaci konkretnego stanu początkowego.

To właśnie wybór stanu początkowego prowadzi do nieodwracalności, która jest tym wyraźniejsza, im bardziej nierównowagowy jest wymuszany proces. Zerowy średni wzrost entropii mógłby być obserwowany tylko w przypadku przejścia idealnie równowagowego.

W wywiadach autorzy jednak przyznają, że choć wykazali „wylanianie się strzałki czasu na poziomie kwantowym”, to nie oznacza to uchwycenia, na poziomie doświadczalnym, tego, co ją wywołuje.

Piotr ZALEWSKI

[1] B. Batalhão, A.M. Souza, S. Sarthour, I.S. Oliveira, M. Paternostro, E. Lutz, oraz R.M. Serra; *Irreversibility and the arrow of time in a quenched quantum system*; PRL **115**, 190601 (2015).



## Prosto z nieba: Ocean pod lodem

Cassini znowu nadaje! Oto garść nowych wiadomości z okolic Saturna, gdzie sonda Cassini wykonuje od ponad 10 lat niezwykle ciekawe obserwacje planety i jej księżyców (początek misji w 1997 roku, jednak prawdziwe badania zaczęły się po siedmioletniej podróży w 2004 roku). Wspólna misja NASA, ESA i włoskiej agencji kosmicznej ASI dostarczyła m.in. bardzo dokładnych zdjęć pierścieni Saturna, w których na naszych oczach formuje się nowy księżyc, dynamicznie zmieniających się jezior i okolic biegunowych Tytana, oraz mnóstwa detali skalistych i lodowych powierzchni księżyców, np. dziwnego równikowego zgrubienia (grzbietu górskiego) na Japecie.

Ostatnie wiadomości dotyczą geologicznie aktywnego, lodowego księżycyca Enceladusa. Od pewnego czasu podejrzewano, że pod powierzchnią znajduje się ocean ciekłej wody, ponieważ w okolicy południowego bieguna księżycyca znajdują się aktywne obszary, które można porównać do lodowych gejzerów („dżetów”). Pióropusze kryształków lodu wyrzucane są na odległość 2000 km od powierzchni. Mechanizm napędzający „dżety” jest znany dopiero od niedawna. Analiza danych ruchu Enceladusa zebranych w ciągu ostatnich 10 lat nie pozostawia wątpliwości, że powierzchnia księżycyca oscyluje wokół środka masy. Można się tego spodziewać w przypadku, gdy lodowa skorupa nie jest połączona z jądrem księżycyca, lecz pływa po powierzchni oceanu. Ciekły ocean znajduje się, według szacunków, około 30 km pod powierzchnią.

## Niebo w lutym

Luty jest miesiącem, w którym prowadzenie obserwacji nie należy do prostych zadań. Wtedy często mamy najostrzejszą zimą, więc noce bywają bardzo mroźne. Dodatkowo występuje stosunkowo niewiele ciekawych zjawisk na niebie, a obiekty, które można obserwować, są albo niewielkiej jasności, albo dostępne dopiero tuż przed świtem. Dzisiejszy artykuł dedykujemy zatem tym z miłośników nocnego nieba, którym nie są straszne ani mrozy, ani obserwacje do samego rana.

7 II Merkury znajdzie się w maksymalnej elongacji zachodniej (elongacja jest odległością kątową pomiędzy Słońcem a daną planetą). Merkury jako planeta wewnętrzna Układu Słonecznego nigdy nie znajduje się dalej od Słońca niż  $29^\circ$ . Osiąga wtedy największą możliwą jasność, czyli jest dobrym celem do obserwacji. Pod koniec pierwszego tygodnia lutego jasność Merkurego wyniesie  $0^m$ , a będzie on widoczny na południowo-wschodnim niebie. Warto pamiętać o odpowiednim, ciepłym ubraniu oraz termosie z gorącą i mocną kawą, gdyż Merkurego w trakcie jego maksymalnej elongacji będzie można podziwiać dosłownie na chwilę przed świtem.

Długie lutowe noce zdecydowanie warto wykorzystać do obserwacji planetoid i planetek karłowatych. Obiekty te ze względu na niewielkie jasności dostępne będą dla posiadaczy lornetek lub małych teleskopów i w związku z tym stanowią dobry „poligon doświadczalny” do nauki obserwacji za pomocą małych instrumentów optycznych. (1) Ceres, pierwsza odkryta planetoida z Pasa Głównego Planetoid, czyli z obszaru znajdującego się pomiędzy Marsem i Jowiszem, niestety, obecnie nie będzie dostępna

Ruch skorupy względem jądra księżycyca działa podobnie do pompy, zapewniając działanie biegunowych gejzerów.

Cassini wykonał także pod koniec października ubiegłego roku przelot bardzo blisko Enceladusa. Satelita przeleciał w odległości jedynie 50 km nad powierzchnią księżycyca w taki sposób, by znaleźć się jak najbliżej lodowych chmur wydobywających się spod zamrożonej skorupy. Poprzednie bliskie przeloty wykonano w 2008 roku w odległości jedynie 25 km w okolicy równikowej oraz w 2012 roku, gdy Cassini zbliżył się do południowego bieguna Enceladusa, przelatując w odległości 74 km. Niedawny przelot umożliwił dokładniejsze niż poprzednie pomiary magnetosfery i plazmy okołoksiężycowej, a także zbadanie właściwości cząstek tworzących pióropusze, m.in. dokładne skatalogowanie molekuł organicznych znajdujących się w oceanie. By tego dokonać, Cassini został wyposażony w specjalny spektrometr masowy do badania niskoenergetycznych jonów i cząstek neutralnych. Gaz i cząstki wyrzucane spod powierzchni Enceladusa są, według planetologów, źródłem materiału tworzącego rozległy, lecz bardzo rzadki pierścień E. Czas życia pierścienia szacuje się na od 10 tys. do 1 mln lat, zatem ciągłe dostawy mikroskopijnego lodowego pyłu zapewniane przez Enceladusa, który znajduje się wewnątrz pierścienia, gwarantują jego istnienie. Dzięki ciągłym obserwacjom Cassiniego poznajemy zatem coraz lepiej nie tylko same księżyce, ale i cały układ Saturna.

*Michał BEJGER*

do obserwacji z terenu Polski. Natomiast trzy kolejne planetoidy już zdecydowanie tak. (2) Pallas, druga odkryta planetoida z Pasa Głównego, o jasności około  $10,5^m$ , znajdować się będzie na tle gwiazdozbioru Orła na wschodnim niebie. To dla najwytrwalszych obserwatorów, gdyż widoczna będzie tuż przed świtem. Trzecią odkrytą planetoidą Pasa Głównego jest (3) Juno, dostępna w drugiej połowie nocy, jej jasność będzie wynosić około  $10,9^m$  i znaleźć ją będzie można między gwiazdozbiorami Wagi i Panny, na wschodnim niebie. Dla tych, którzy nie lubią marznąć podczas długich zimowych nocy, dobrym obiektem będzie (4) Vesta. Dostępna do obserwacji będzie w pierwszej połowie nocy, widoczna pomiędzy gwiazdozbiorami Wieloryba i Ryb, na zachodnim niebie, a jej jasność będzie wynosić około  $8,3^m$ . Obiekt ten znajdować się będzie w bliskim sąsiedztwie Urana, na którego także warto zwrócić uwagę, prowadząc obserwacje tego fragmentu nieba. Każdy, kto darzy sentymentem zdegradowanego do planety karłowatej Plutona, powinien spojrzeć tuż przed świtem na gwiazdozbiór Strzelca. Plutona będzie można obserwować w towarzystwie Wenus i Merkurego, jednak do obserwacji zdecydowanie przyda się mały teleskop, gdyż jego jasność wynosić będzie zaledwie  $14,2^m$ .

Luty nie sprzyja, niestety, miłośnikom spadających gwiazd. Do obserwacji z terenu Polski nadają się wtedy tylko dwa średnio aktywne roje: Lutowe Leonidy oraz Delta Leonidy. Oba roje mają swój radiant w gwiazdozbiórze Lwa, jednak ich aktywność na poziomie raptem 2–5 meteorów na godzinę powoduje, że mogą stanowić cel obserwacji jedynie dla najwytrwalszych pasjonatów meteorów.

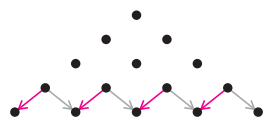
*Karolina BĄKOWSKA*



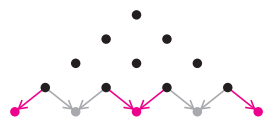
Każda jedynek prócz  $\binom{0}{0}$  też spełnia warunek (\*): jest sumą jedynki nad nią i umownego zera na zewnątrz trójkąta.

$$\begin{array}{cccccccc}
 \binom{0}{0} & = & 1 & & & & & \\
 \binom{1}{0} & = & 1 & \quad \binom{1}{1} & = & 1 & & \\
 \binom{2}{0} & = & 1 & \quad \binom{2}{1} & = & 2 & \quad \binom{2}{2} & = & 1 \\
 \binom{3}{0} & = & 1 & \quad \binom{3}{1} & = & 3 & \quad \binom{3}{2} & = & 3 & \quad \binom{3}{3} & = & 1 \\
 \binom{4}{0} & = & 1 & \quad \binom{4}{1} & = & 4 & \quad \binom{4}{2} & = & 6 & \quad \binom{4}{3} & = & 4 & \quad \binom{4}{4} & = & 1 \\
 \binom{5}{0} & = & 1 & \quad \binom{5}{1} & = & 5 & \quad \binom{5}{2} & = & 10 & \quad \binom{5}{3} & = & 10 & \quad \binom{5}{4} & = & 5 & \quad \binom{5}{5} & = & 1 \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

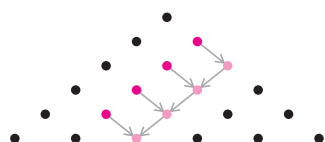
Rys. 1. Na dalszych rysunkach liczby oznaczamy kropkami.



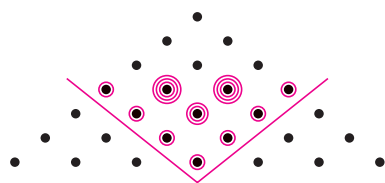
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

## Trójkątne dowody

Joanna JASZUŃSKA

Symbol Newtona  $\binom{n}{k}$  dla liczb całkowitych  $n, k \geq 0$  oznacza liczbę sposobów wybrania zbioru  $k$  elementów spośród  $n$ . W szczególności  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .

Ze zbioru  $(n+1)$ -elementowego z jednym elementem wyróżnionym  $k+1$  elementów można wybrać, biorąc wyróżniony element i  $k$  z pozostałych  $n$ , albo wybierając wszystkie  $k+1$  spośród  $n$  niewyróżnionych. Stąd  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ .

Z symboli Newtona można zbudować *trójkąt Pascala* (rys. 1), w którym w  $n$ -tym wierszu (numerując od 0) stoją kolejno wartości  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ . Na mocy powyższych wzorów liczby wzdłuż ramion trójkąta są równe 1, a wewnątrz *każda liczba jest sumą dwóch liczb stojących nad nią* (\*).

Korzystając z trójkąta Pascala i własności (\*) można udowodnić wiele tożsamości.

1.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  oraz  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$  dla  $n > 0$ .
2.  $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ .
3.  $T_n \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{2}$  oraz  $\sum_{k=1}^n T_k = \binom{n+2}{3}$ .
4.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ .

### Rozwiązania

**R1.** Dla  $n=0$  suma  $\binom{n}{k}$  równa jest  $\binom{0}{0} = 1 = 2^0$ . W kolejnych wierszach, na mocy (\*), suma liczb jest dwukrotnością sumy poprzedniego wiersza (rys. 2), uzyskujemy więc kolejne potęgi dwójki.

Suma  $\binom{n}{k}$  dla  $k$  parzystych równa jest sumie  $\binom{n}{k}$  dla  $k$  nieparzystych (i równa sumie wyrazów poprzedniego wiersza, rys. 3). Stąd różnica tych dwóch sum daje zero.  $\square$

**R2.** Sumujemy wyrazy jak na rysunku 4, od góry, korzystając z (\*).  $\square$

**R3.** Z rysunku 4 i z poprzedniego zadania  $T_n = \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$  oraz

$$\sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \binom{k+1}{2} = \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}. \square$$

**R4.** Element  $\binom{2n}{n}$  jest środkowym wyrazem wiersza numer  $2n$ . Na mocy (\*) jest on sumą dwóch wyrazów nad nim, a więc też sumą trzech wyrazów o dwa wiersze wyżej, przy czym środkowy z nich liczymy dwukrotnie. Stąd jest także sumą czterech środkowych wyrazów jeszcze wyższego wiersza, liczonych z krotnościami odpowiednio 1, 3, 3, 1, itd. Na rysunku 5 zilustrowano uzyskane w ten sposób dwa „przenikające się” trójkąty Pascala — wyjściowy oraz drugi „do góry nogami”, oznaczający krotności, z jakimi liczyć należy wyrazy z coraz wyższych wierszy.

Trójkąty te mają wspólny  $n$ -ty wiersz i stąd  $\binom{2n}{n}$  jest sumą wyrazów tego wiersza, liczonych z krotnościami odpowiadającymi im samym, co kończy dowód.  $\square$

### Zadania domowe

5. Wykaż, że  $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} (n-k+1) = \binom{n+2}{m+2}$ .

6. Niech  $0 \leq a, b \in \mathbb{N}$ . Wyznacz sumę tych  $\binom{n}{k}$ , dla których  $n-k \leq a$  oraz  $k \leq b$ .

Wskazówka 5 i 6. Zinterpretuj szukane sumy na trójkącie Pascala i skorzystaj z zadania 2.

7. Niech  $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}$ . Wykaż, że  $S_{n+1} = 3 \cdot 2^{3n} - S_n$ .

Wskazówka 7. Przyda się zadanie 1 oraz rozumowanie jak w rozwiązaniu zadania 4.