





SPIS TREŚCI NUMERU 12 (499)

Czy Einstein miał rację? <i>Michał Bejger</i>	str. 1
Eksplodujące smartfony i utracony czas absolutny <i>Jerzy Lewandowski, Krzysztof Turzyński</i>	str. 4
Problem dwóch ciał <i>Szymon Charzyński</i>	str. 6
Energia pola grawitacyjnego <i>Jerzy Kijowski</i>	str. 9
Od kwadratu <i>Waldemar Pompe</i>	str.12
Cykle Hamiltona na wielościanach foremnych	str.14
 Zadania	str.14
 Takie proste wahadło <i>Stanisław Bednarek</i>	str.15
Czegóż to dawniej uczono na wykładach algebry. Pierwiastki wielokrotne wielomianu <i>Maciej Bryński</i>	str.16
Bestiariusz informatyczny (1) <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.17
Informatyczny kącik olimpijski (88): Wykładzina <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.18
 Szalona Wieża Matematyków czy wirujący obwarzanek <i>Magdalena Fikus</i>	str.19
MiNI Matematyka <i>Barbara Roszkowska-Lech</i>	str.20
Aktualności	str.21
Wyniki XXXII Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków	str.22
XXXVII Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	str.22
Klub 44	str.23
Prosto z nieba: Pulsar w centrum Galaktyki	str.24
Niebo w grudniu	str.24
 O obrotach <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Świat, w którym mamy laptopy i bozon Higgsa, w którym wiemy, że hipoteza Poincarégo jest prawdziwa i istnieją egzoplanety, nie jest może lepszy, ale jest bardziej zrozumiały i wygodniejszy.

W nadchodzącym Kolejnym Roku, życząc Czytelnikom dalszego postępu, postanowiliśmy powspominać te wszystkie wspaniałości, których powstawanie przeżywalismy w *Delcie*.

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2016 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł



Doświadczenie Michelsona–Morleya (1887) miało stwierdzić obecność ośrodka, w którym rozchodzi się światło, tzn. zmierzyć różnicę w prędkości światła w interferometrze w zależności od ruchu układu doświadczalnego względem eteru.



Jak pamiętamy, szczególna teoria zrównuje w pewnym sensie rolę czasu i przestrzeni, które do tej pory były uważane za niezależne, a ruch ciał odbywał się w euklidesowej (w żargonie fizyków: płaskiej) przestrzeni.

Czy Einstein miał rację?

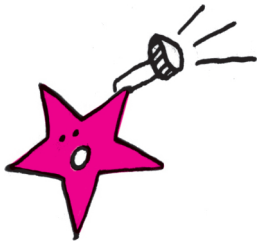
Michał BEJGER

Odpowiedź na tytułowe pytanie nurtuje do dziś nie tylko profesjonalnych fizyków, ale również amatorskich miłośników nauki, o czym świadczy znacznie większa niż w przypadku innych dziedzin liczba alternatywnych teorii i dyskusji na wykładach popularnych. Historia teorii względności zaczęła się w XIX wieku od problemu niezgodności równań Maxwella z klasyczną mechaniką Newtona. Prawa rządzące elektromagnetyzmem wydawały się zależne od prędkości i położenia badającego je obserwatora. Uważano wówczas także, że fale elektromagnetyczne, podobnie do fal mechanicznych, rozchodzą się w ośrodku (substancji, którą nazwano eterem). Próby wykrycia eteru konsekwentnie dawały jednak paradoksalny wynik: prędkość światła nie zależy od prędkości obserwatora względem hipotetycznego ośrodka.

Przyjęcie tego wyniku jako aksjomatu wraz z założeniem, że prawa fizyki we wszystkich układach poruszających się ze stałą prędkością powinny być identyczne (wymaganie zgodności z teorią Maxwella) były punktem wyjściowym teoretycznych rozważań Alberta Einsteina. Wymagało to jednak fundamentalnej zmiany sposobu porównywania pomiarów z różnych układów odniesienia. Bezpośrednią konsekwencją stałej prędkości światła jest *względność* zdarzeń – ich kolejność może zależeć od położenia i prędkości danego obserwatora. Fizycy musieli zrezygnować z wyobrażenia sobie świata fizycznego jako sceny z absolutnym, niezależnym od przestrzeni czasem, w której różne układy odniesienia zależą od siebie poprzez transformację Galileusza. Musieli za to zaakceptować obraz, w którym czas i przestrzeń są intymnie powiązane (*kolejność* zdarzeń zależy od położenia i prędkości obserwatora, a związek pomiędzy układami odniesienia definiuje transformacja Lorentza, która „miesza” czas i przestrzeń). Jak łatwo się domyślić, zupełnie nieintuicyjna względność świata na tak podstawowym poziomie została na początku XX wieku przyjęta z szokiem i niedowierzaniem.

Wkrótce po ogłoszeniu w 1905 roku szczególnej teorii względności pojawiło się naturalne pytanie o uwzględnienie jej reguł w przypadku wzajemnego oddziaływania masywnych ciał: ruchu z przyśpieszeniem wywołanym grawitacją. Odpowiedź na to pytanie zajęła Einsteinowi kolejne 10 lat. Do swojego odkrycia dochodził stopniowo, publikując w 1907 i 1911 roku prace przedstawiające opis ruchu z przyśpieszeniem ciał w szczególnej teorii względności, i definiując m.in. zasadę równoważności: równości masy *bezwładnej*, występującej w zasadach dynamiki Newtona, i masy *grawitacyjnej* występującej w prawie powszechnego ciężenia Newtona. W listopadzie 1915 roku Einstein przedstawił przed Pruską Akademią Nauk nowy opis grawitacji – zbiór równań nazywany obecnie jego nazwiskiem. W przeciwieństwie do klasycznej mechaniki Newtona, w której masywne ciała działają na siebie *siłą grawitacyjną*, proporcjonalną do iloczynu mas, odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości, opis Einsteina nie wymaga istnienia siły. Jak to możliwe? W tym nowym obrazie zjawiska przypisywane działaniu siły grawitacji, np. spadek swobodny w polu grawitacyjnym czy ruch orbitalny są przejawem ruchu inercjalnego w zakrzywionej *czasoprzestrzeni*.

W ogólnej teorii masywne ciała poruszają się po liniach „najprostszych”, zwanych geodezyjnymi, które niekoniecznie są liniami rzeczywiście prostymi znanymi z geometrii euklidesowej. Wypadkowy ruch „po prostej” wygląda jak wywołany siłą przyciągającą, ponieważ zakrzywienie czasoprzestrzeni jest proporcjonalne do znajdującej się w niej masy. Tę główną zasadę ogólnej teorii względności można, za J. A. Wheelerem, opisać następująco: geometria czasoprzestrzeni dyktuje masom, jak mają się poruszać, podczas gdy masy zakrzywiają geometrię. Otrzymujemy w ten sposób elegancki opis oddziaływania (z czasoprzestrzenią w roli przekaźnika), w którym problematyczne pojęcie działającej natychmiastowo na dowolną odległość siły grawitacyjnej jest po prostu niepotrzebne. Ograniczenie prędkości rozchodzenia się sygnałów skutkuje za to zależną od obserwatora kolejnością następowania zdarzeń. W reżimie dnia codziennego, w którym prędkości są znacznie mniejsze od prędkości światła, opis grawitacji Einsteina sprowadza się do mechaniki Newtona.



Dla porównania, precesja orbity Ziemi wynosi $3,8''$ /stulecie.

Więcej o problemie dwóch i więcej ciał w teoriach grawitacji Newtona i Einsteina pisze Szymon Charzyński na str. 6.

Dużo wcześniej, bo na początku XIX wieku J. G. von Soldner obliczył, jak duży będzie kąt, o który według teorii Newtona światło gwiazdy zmieni kierunek w pobliżu Słońca: $0,9''$. Efekt w ogólnej teorii względności jest dokładnie dwa razy większy.

Rozwiązanie równań Einsteina, które opisuje statyczną, nierotującą czarną dziurę znalazł K. Schwarzschild już w 1916 roku.

Fale grawitacyjne to zmienna w czasie krzywizna czasoprzestrzeni, propagująca się w niej z prędkością światła i unosząca energię oraz pęd układu.



Rozwiązanie zadania M 1479. Załóżmy, że graf ma n wierzchołków, $n \geq 2$. Zauważmy, że stopień każdego wierzchołka może wynosić $0, 1, \dots, n-1$. Gdyby stopnie wszystkich wierzchołków były różne, to w szczególności istniałby wierzchołek o stopniu $n-1$, połączony krawędzią z każdym z pozostałych wierzchołków. Wtedy jednak nie mógłby istnieć wierzchołek o stopniu 0 .

Nowa teoria okazała się bardziej skomplikowana matematycznie i, jak to zwykle bywa, była początkowo traktowana z podejrzliwością przez świat naukowy. Było tak do czasu pierwszych spektakularnych weryfikacji, które okazały się zgodne z przewidywaniami teorii. Sam Einstein zaproponował trzy klasyczne testy ogólnej teorii względności: wyjaśnienie ruchu peryhelium Merkurego, zakrzywienie toru światła gwiazd w polu grawitacyjnym Słońca oraz grawitacyjne przesunięcie koloru światła ku czerwieni.

Historia niezgodności precesji orbity Merkurego z obliczeniami mechaniki klasycznej sięga połowy XIX wieku. Na podstawie ówczesnych obserwacji wiadomo było, że punkt peryhelium obraca się względem sfery gwiazd stałych z prędkością 574 sekund łuku na stulecie. Efekt ten jest zdominowany przez klasyczny wpływ grawitacji innych planet ($531''$ /stulecie). Różnica – $43''$ /stulecie – spędzała sen z powiek astronomów XIX i początku XX wieku. Jednym z proponowanych wyjaśnień była np. niesferyczność Słońca (spłaszczenie, czyli niezerowy moment kwadrupolowy Słońca). Dopiero Einstein pokazał, że przewidziane przez teorię zakrzywienie przestrzeni wywołane masą Słońca sprawia, że tor Merkurego przypomina rozetę (orbita nie jest zamknięta), oraz doskonale odpowiada brakującej różnicy.

Kolejny sukces przyniósł pierwszy pomiar ugięcia toru światła odległych gwiazd przez masywny obiekt: Słońce. Przeprowadzone przez Arthura Eddingtona obserwacje pozycji gwiazd podczas całkowitego zaćmienia w 1919 roku potwierdziły przewidywania nowej teorii, a teoria Einsteina trafiła na pierwsze strony gazet. Pomiaru tego typu trapienie były początkowo znacznymi błędami systematycznymi; solidne wyniki zaczęto otrzymywać dopiero w latach 60., obserwując odległe obiekty w widmie radiowym przy użyciu radioteleskopów połączonych w sieć interferometryczną. Zakrzywienie toru światła przez masywne obiekty – soczewkowanie grawitacyjne – jest w dzisiejszych czasach standardowym narzędziem poszukiwania obiektów słabo świecących w różnych skalach, np. planet w układach podwójnych lub ciemnej materii w gromadach galaktyk.

Po paru dekadach, podczas których zajmowanie się relatywistyczną grawitacją było traktowane przez część fizyków (i prawie wszystkich astronomów) jak niegroźne dziwactwo, nastąpiły lata 60., które były tak obfite w sukcesy teorii względności, że nazwano je Złotą Erą Teorii Względności. Pojawiły się m.in. niezwykle ciekawe wyniki teoretyczne, takie jak rozwiązanie równań Einsteina opisujące obracającą się czarną dziurę (R. Kerr, 1963) oraz związane z tym pojęcie osobliwości. Dowiedziono także, że zmieniający się w czasie układ mas może emitować *fale grawitacyjne*.

W roku 1960 przeprowadzono także trzeci klasyczny test teorii. Eksperyment Pounda i Rebki był pomiarem przesunięcia ku czerwieni fotonów poruszających się w polu grawitacyjnym („uciekających” ze studni potencjału). Do zademonstrowania efektu wystarczył 22-metrowej wysokości budynek laboratorium Jeffersona w Uniwersytecie Harvarda. Eksperyment ten jest uważany za początek ery *precyzyjnych* testów ogólnej teorii względności.

Okolice Układu Słonecznego oraz obserwacje Kosmosu w wielkich skalach dostarczają wielu cennych informacji na temat zachowania się grawitacji w przybliżeniu *słabego pola*: małych prędkości i niewielkich krzywizn. Wspomniane wcześniej soczewkowanie grawitacyjne obserwuje się na całym niebie, jako zaburzenia pozycji gwiazd przez masę Słońca, podczas misji astrometrycznych (Hipparcos i Gaia), lub jako wielokrotne obrazy gromad galaktyk na zdjęciach teleskopu Hubble’a. By badać *silne pole* (duże krzywizny i prędkości), potrzebne są obiekty innego rodzaju: małe i masywne.

Ciekawym zbiegiem okoliczności w tym samym 1967 roku, w którym James Hartle zaproponował pierwsze numeryczne rozwiązanie równań Einsteina dla rotujących relatywistycznych gwiazd (perturbację sferycznego rozwiązania Tolmana, Oppenheimera i Volkoffa z 1939 roku), Jocelyn Bell odkryła pierwszy pulsar – zwartą, rotującą gwiazdę neutronową, „makroskopowe jądro atomowe” o masie Słońca, składające się z 10^{57} nukleonów, i dodatkowo obdarzone niezwykle silnym polem magnetycznym. Gwiazdy neutronowe są najbardziej ekstremalnymi, obok czarnych dziur, znanymi obecnie obiektami astrofizycznymi. Niektóre z nich są składnikami ciasnych, relatywistycznych układów podwójnych, w których dwa

Obecnie znamy 10 relatywistycznych układów podwójnych.

Masy składników układu PSR B1913+16 to, odpowiednio, $1,441 M_{\odot}$ oraz $1,387 M_{\odot}$; masy gwiazd w takich układach są najdokładniej mierzonymi masami obiektów astronomicznych.

Ogromna precesja peryastronu PSR J0737-3039, 17° /rok, oraz inne efekty, takie jak *efekt de Sittera* (zmiana kierunku momentu pędu obiektu poruszającego się w zakrzywionej przestrzeni) sprawiły, że jeden z pulsarów jest niewidoczny.



Wartości efektu de Sittera i Lense'a-Thirringa to odpowiednio $-6601 \pm 18,3$ mas/rok (milisekund łuku/rok) oraz $-37,2 \pm 7,2$ mas/rok. Przewidywania teorii to $-6606,1$ i $-39,2$ mas/rok.



masywne obiekty poruszają się bardzo szybko i bardzo blisko siebie. Pulsar, jako precyzyjnie tykający zegar okrążający inną masywną gwiazdę, jest niezwykle cennym (i na razie jedynym tego typu) laboratorium, w którym można testować teorię Einsteina poza przybliżeniem słabego pola. Historycznie pierwszy taki układ, PSR B1913+16, został odkryty w 1974 roku przez Hulse'a i Taylora. Składa się on z pulsara i niewidocznego towarzysza, przypuszczalnie także gwiazdy neutronowej. Okres orbitalny układu to 7 godzin i 45 minut, a pól wielka orbity wynosi nieco ponad 2,5 promienia Słońca! Pole grawitacyjne obu gwiazd jest tak silne, że przewidywane przez teoretyków poprawki do wyników newtonowskich (nazywane poprawkami postnewtonowskimi, a w przypadku elementów orbitalnych układu podwójnego postkeplerowskimi) są widoczne w danych praktycznie gołym okiem. Z powodu emisji przez układ fal grawitacyjnych ($7 \cdot 10^{24}$ W, czyli około 2% całkowitej mocy wyświecanej w falach elektromagnetycznych przez Słońce), okres orbitalny zmniejsza się o 76 μ s na rok, orbita maleje w tym czasie o około 3,5 m, a ruch peryastronu wynosi $4,2^{\circ}$ /rok! Gwiazdy spadną na siebie za około 300 mln lat.

PSR B1913+16 nie jest rekordzistą. Odkryty w 2003 roku PSR J0737-3039 o okresie orbitalnym zaledwie 2,4 h (układ przestanie istnieć za 85 mln lat, ponieważ odległość między gwiazdami zmniejsza się o 7 mm/dzień) jest podwójnie niezwykły – w momencie odkrycia oba składniki były obserwowane jako pulsary. Płazyczna orbity układu znajduje się prawie dokładnie wzdłuż linii widzenia, co pozwala na pomiar *efektu Shapiro*, czyli opóźnienia pulsu jednego pulsara w polu grawitacyjnym drugiego. W sumie obserwacje PSR J0737-3039 pozwalają na pięć niezależnych testów teorii: tempo kurczenia się orbity, ruch peryastronu, poczerwienienie grawitacyjne, dwa parametry efektu Shapiro oraz sprzężenie momentów pędu gwiazd i orbitalnego (sprzężenie spin-orbita). Jak dotąd, ogólna teoria względności zgadza się świetnie z obserwacjami, które są tak dokładne, że największym źródłem błędów są obecnie efekty nierelatywistyczne, np. słabo znany rozkład masy w naszej Galaktyce. Tak dobra zgodność pomiarów z teorią jest uważana za *pośredni*, ale mocny argument przemawiający za istnieniem fal grawitacyjnych, a w szczególności za tym, że prędkość rozchodzenia się fal jest równa prędkości światła.

Postęp w weryfikacji teorii grawitacji w ciągu ostatnich paru dekad jest mocno związany z badaniem gęstej materii. Niedawne znaleziska radioastronomów to dwie masywne ($\approx 2 M_{\odot}$) gwiazdy neutronowe w układach podwójnych z białymi karłami (PSR J1614-2230 i J0348+0432) oraz milisekundowy pulsar w hierarchicznym układzie *potrójnym* PSR J0337+1715, którego dalsze obserwacje pozwolą na przetestowanie silnej zasady równoważności, tzn. zbadania, czy skład obiektu ma wpływ na jego zachowanie się w polu grawitacyjnym: masywny pulsar i orbitujący blisko niego lekki biały karzeł znajdują się w polu przyciągania trzeciego obiektu, również białego karła.

Doświadczalnicy także mają pełne ręce roboty. Parę lat temu misję zakończyła sonda orbitalna Gravity Probe B, która zmierzyła efekt precesji de Sittera oraz drugi, o wiele subtelniejszy *efekt Lense'a-Thirringa*, polegający na zmianie kierunku momentu pędu żyroskopu „wleczonego” wraz z rotacją masywnego ciała (w tym przypadku Ziemi), wokół którego orbituje satelita. Oba wyniki są zgodne z ogólną teorią względności.

Ostatnim poważnym testem, który czeka teorię Einsteina w najbliższej przyszłości, jest bezpośrednia detekcja fal grawitacyjnych. Właśnie rozpoczęła się kampania obserwacyjna dwóch laserowych detektorów interferometrycznych amerykańskiej grupy Advanced LIGO, do których wkrótce dołączy europejska Advanced Virgo. Poprawiona czułość i zasięg detektorów daje pierwszy raz w historii realną szansę na rejestrację fal emitowanych przez odległe kosmiczne katastrofy, takie jak zlewające się układy podwójne gwiazd neutronowych lub czarnych dziur, bądź wybuchy supernowych. Być może już wkrótce będziemy świadkami powstania nowej dziedziny obserwacyjnej – astronomii fal grawitacyjnych.

Ogólna teoria względności nie jest, oczywiście, jedyną teorią grawitacji – przez 100 lat od jej sformułowania powstało wiele alternatyw – jest jednak obecnie najprostszą zgodną z wszystkimi dostępnymi danymi eksperymentalnymi. Czy teoria Einsteina wyjdzie zwycięsko z nadchodzących testów? Obie możliwości są równie ciekawe.

Eksplodujące smartfony i utracony czas absolutny

Jerzy LEWANDOWSKI*, Krzysztof TURZYŃSKI

W dawnych powieściach przygodowych, pisanych przed czasami powszechnego zasięgu sieci komórkowych, zanim bohaterowie udali się na spotkanie przygód, musieli zsynchronizować zegarki. Łatwo to zrobić, jeśli wszyscy zainteresowani znajdują się choć przez chwilę w jednym miejscu. Jeżeli nie – sytuacja jest niemal beznadziejna.



Jak to? – zapyta ktoś. Chcąc zsynchronizować wszystkie miejsca na równiku, można przecież poruszać się wzdłuż niego ze stałą prędkością. Jeśli wyruszyło się, powiedzmy, w południe i podróżowało z prędkością 10 km/h, to po godzinie podróży dociera się w miejsce oddalone od punktu początkowego o 10 km. Wiadomo przy tym, że w punkcie początkowym jest wówczas godzina pierwsza po południu, nie ma zatem wątpliwości, jak nastawić zegar u celu podróży. Powtarzając opisane czynności odpowiednią liczbę razy, możemy zapewnić, że wszystkie zegary wzdłuż równika będą wskazywały tę samą godzinę.

Jeśli synchronizację taką wykonać odpowiednio dokładnie, po przebyciu całej długości równika i powrocie do punktu początkowego okaże się, że ostatni ustawiany zegar różni się od zegara będącego dla pozostałych punktem odniesienia o piątą część mikrosekundy. Niby nie jest to dużo, ale taki czas pozwala światłu na przebiegnięcie kilkudziesięciu metrów, prowadząc do niecelnych strzałów z działa laserowego lub niedokładnego określania położenia obiektów. Różnica ta wynika wprost z teorii względności i nie da się jej usunąć nawet największą precyzją i starannością synchronizacji zegarów.

Dlaczego tak jest? Pierwszą przyczyną jest to, że pojęcie zdarzeń jednoczesnych jest w istocie bardziej subtelne, niż podpowiada nam codzienne doświadczenie. Szczególną teorię względności można wyprowadzić (opierając się o wyniki doświadczeń) z postulatu stałości prędkości światła w próżni niezależnie od ruchu źródła światła oraz z zasady względności, czyli wymagania, by prawa fizyki miały tę samą postać we wszystkich układach odniesienia. Wyobraźmy sobie teraz następującą sytuację. Jeden obserwator generuje błysk światła, który porusza się po linii prostej, oczywiście z prędkością światła. Drugi obserwator porusza się względem pierwszego ze stałą prędkością w tę samą stronę co błysk; będąc obserwatorem inercyjnym powinien on widzieć błysk poruszający się z tą samą prędkością co pierwszy obserwator. Jest to możliwe tylko wówczas, gdy porzuci się założenie o absolutności czasu – gdyby bowiem płynął on dla obu obserwatorów tak samo, to obserwator goniący błysk widziałby go w ustalonej chwili bliżej siebie niż pierwszy obserwator, co nie byłoby zgodne z pierwszym postulatem. Oznacza to w szczególności, że relacja jednoczesności zdarzeń (lub następowania po sobie w ustalonym odstępie czasu) dla pierwszego obserwatora może różnić się od analogicznej relacji dla drugiego.



Druga przyczyna trudności w synchronizacji zegarów na ziemskim równiku to ruch obrotowy Ziemi. Relacja jednoczesności zdarzeń względem różnych obserwatorów nie jest przechodnia: jeśli jeden obserwator uznaje zdarzenia A i B za jednoczesne, a drugi uważa, że jednoczesne są zdarzenia B i C, to zdarzenia A i C nie muszą być jednoczesne dla żadnego z tych obserwatorów (i na ogół nie są). Tymczasem każdy z punktów równika porusza się ruchem jednostajnym po okręgu; prędkości różnych punktów mają tę samą wartość, ale różne kierunki i zwroty, a więc punkty te poruszają się względem siebie ruchem różnym od jednostajnego i prostoliniowego. Nic dziwnego, że jeśli w punktach tych umieścimy mierzących czas obserwatorów, to nie da się określić pary zdarzeń zachodzących jednocześnie dla nich wszystkich (wyłączając trywialny przykład zdarzeń zachodzących w tym samym miejscu) lub zachodzących w ustalonym odstępie czasu.

Prędkość dowolnego przedmiotu leżącego na równiku Ziemi nieustannie zmienia swój kierunek i zwrot. Tymczasem zgodnym z doświadczeniem postulatem leżącym u podstaw ogólnej teorii względności jest równoważność skutków sił bezwładności związanych ze zmianami prędkości oraz sił grawitacyjnych. Oznacza to, że siła

*Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania F 894.

Wprowadźmy układ współrzędnych o początku w jednym z wierzchołków podstawy akwarium, na przecięciu poziomej osi x równoległej do L oraz osi y skierowanej pionowo w górę. Środek ciężkości wody przez cały czas ruchu pozostaje w jednakowej odległości od pionowych ścian akwarium równoległych do płaszczyzny xy , a okres badanych drgań nie zależy od szerokości naczynia. Podczas drgań, gdy na bocznej ścianie o współrzędnej $x = L$ woda podnosi się na wysokość $y(L) = H + h$, to na ścianie $x = 0$ opada do $y(0) = H - h$. Środek ciężkości wody przesuwa się wówczas z położenia równowagi $(x_0, y_0) = (L/2, H/2)$ w położenie:

$$x = \frac{L}{2} + \frac{Lh}{6H}, \quad y = \frac{H}{2} + \frac{h^2}{6H}.$$

Dla małych drgań przyjmujemy, że $|h| \ll H$ oraz $|h| \ll L$. Wyprowadzając powyższe wyrażenia, skorzystaliśmy z faktu, że dla każdego h rozkład wody w naczyniu możemy otrzymać, dodając do rozkładu równowagowego wodę wypełniającą prostopadłościan o podstawie trójkąta prostokątnego z poziomą przyprostokątną $L/2$ i pionową h – po stronie $h > 0$ i odejmując taki sam prostopadłościan po stronie $h < 0$. Pamiętajmy też, że środek ciężkości jednorodnego trójkąta leży na przecięciu środkowych jego boków – dla trójkąta prostokątnego rzuty prostokątne środka ciężkości wypadają w $1/3$ odpowiednich przyprostokątnych, licząc od wierzchołka kąta prostego. Kwadrat prędkości ruchu środka masy wynosi więc:

$$v^2 = \left(\frac{L\dot{h}}{6H}\right)^2 + \left(\frac{h\dot{h}}{3H}\right)^2 \approx \left(\frac{L\dot{h}}{6H}\right)^2,$$

gdzie \dot{h} oznacza pochodną h względem czasu. Jako kolejne przybliżenie przyjmijmy, że cała masa M wody porusza się z tą samą prędkością v . Wówczas zmiany całkowitej energii mechanicznej E podczas ruchu możemy zapisać jako:

$$E = \frac{1}{2}M \left(\frac{L}{6H}\right)^2 (\dot{h})^2 + \frac{1}{2}Mg h^2.$$

Wyrażenie to „przypomina” nam wzór na energię drgań masy m zawieszonyj na sprężynie o stałej sprężystości k , jeśli przyjmijmy:

$$m = M \left(\frac{L}{6H}\right)^2, \quad k = \frac{Mg}{3H}.$$

Poszukiwany okres drgań wynosi więc:

$$T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{L^2}{12Hg}\right)} = \frac{\pi L}{\sqrt{(3Hg)}}.$$

W akwarium o $L = 1$ m i $H = 0,5$ m $T \approx 0,82$ s, natomiast, na przykład, dla Jeziora Genewskiego, dla którego można przyjąć $L = 73$ km i średnią głębokość $H = 154,4$ m, obliczone $T \approx 57$ minut (obserwowano fale o $h = 0,3$ m i $T = 73$ minuty).

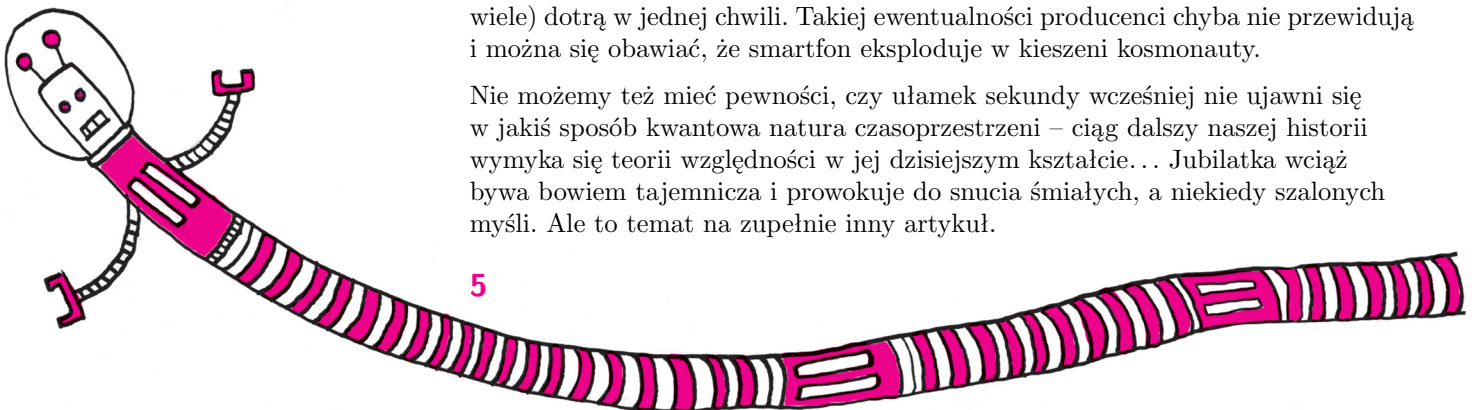
przyciągania grawitacyjnego powinna wpływać na tempo biegu czasu. Tak jest istotnie. Na orbicie geostacjonarnej, znajdującej się w odległości około 42 tysięcy kilometrów od środka Ziemi, czas płynie szybciej niż na powierzchni naszej planety: różnica wynosi około 50 mikrosekund na dobę, a spowolnienie biegu czasu przy powierzchni Ziemi bierze się właśnie z silniejszych efektów grawitacyjnych.

Jeszcze dziwniejsze własności oddziaływań grawitacyjnych powinno się obserwować dla obiektów, których masa skupiona jest w bardzo małej objętości – czarnych dziur. Jak bardzo małej? Chodzi o kulę o promieniu proporcjonalnym do masy obiektu; dla Ziemi promień taki wynosiłby nieco poniżej centymetra. Szczególną własnością czarnej dziury jest to, że w pewnej odległości od jej środka czas zwalnia tak bardzo, że... w pewnym sensie przestaje płynąć w ogóle. Odpowiadające temu zjawisku miejsce nazywamy horyzontem czarnej dziury.

Takie „zatrzymanie czasu” niewątpliwie oddziałuje na wyobraźnię, należy jednak bardziej precyzyjnie wyrazić, co ono oznacza. Wyobraźmy sobie misję kosmiczną mającą na celu zbadanie otoczenia czarnej dziury. Jeden z kosmonautów, tyleż bohaterski co niedouczony, postanawia zdobyć sławę pierwszym w historii ludzkości przekroczeniem horyzontu, wykrada więc statek patrolowy z macierzystej rakiety i zmierza wprost ku czarnej dziurze. (Skoro umiemy wyobrazić sobie postęp techniczny pozwalający na misje kosmiczne w skali naszej Galaktyki, możemy posunąć się ciut dalej i przyjąć, że naszego bohatera nie rozerwą potężne siły grawitacyjne w pobliżu czarnej dziury.) Z punktu widzenia pozostałych w rakiecie kolegów i koleżanek działanie naszego chwata może wydawać się nieoczywiste – zobaczą, że będzie zbliżał się coraz wolniej i wolniej w stronę horyzontu, a światła jego rakiety będą ciemniały i czerwieniały. Nigdy jednak – według pozostałych w rakiecie – nie przekroczy powierzchni horyzontu czarnej dziury. Nawet po powrocie na Ziemię, jeśli tylko będą oni dysponować dostatecznie potężnym radioteleskopem, zobaczą swojego kolegę nieruchomego, gasnącego gdzieś w pobliżu czarnej dziury. Tymczasem nasz bohater po upływie skończonego – według niego – czasu przekroczy horyzont czarnej dziury. I tu czeka go wiele niespodzianek. Po pierwsze, okaże się, że sfera horyzontu zawiera w swym wnętrzu nieskończoną w jednym kierunku przestrzeń. To nieskończony czas, jaki ma do dyspozycji widziana z zewnątrz czarna dziura, zamienia się wewnątrz niej w nieskończoną głębię. Po drugie, kosmonauta szybko zauważy, że jest rozciągany w tym właśnie kierunku, a w pozostałych dwóch ściskany. Dla uniknięcia tragicznego rozwoju akcji, założmy, że nasz kosmonauta od początku był nieożywionym, pozbawionym inteligencji i doskonale plastycznym urządzeniem. Wiadomo, że urządzenie to niezależnie od podejmowanych przez siebie działań będzie spadało ku środkowi czarnej dziury. W skończonym czasie nastąpi praktycznie nieskończone rozciągnięcie w jednym kierunku i nieskończone ściśnięcie w dwóch pozostałych. Taki przebieg wydarzeń przewidywany jest w nieobrcającej się czarnej dziurze.

Gdy czarna dziura się obraca, jej wnętrze może mieć bardzo złożoną konstrukcję i kosmonauta może uniknąć rozrywających i miażdżących go sił lub nawet przedostać się do innego świata. Jednak i w tym przypadku przekroczyć musi pewien nowego rodzaju horyzont, na którym występują nowe, niezwykle zjawiska. Aby je lepiej zrozumieć, założmy, że kosmonauta ma smartfon z niezasiloną kartą i może odbierać wiadomości przekazywane, tak jak i na Ziemi, za pomocą promieniowania elektromagnetycznego. Raz na kilka dni wysyłana jest na jego numer wiadomość i dzieje się tak w nieskończoność – przynajmniej z punktu widzenia świata, w którym pozostali koledzy i koleżanki kosmonauty. Podczas próby przedostania się z wnętrza czarnej dziury do drugiego świata do smartfonu kosmonauty wszystkie te wiadomości (a będzie ich praktycznie nieskończenie wiele) dotrą w jednej chwili. Takiej ewentualności producenci chyba nie przewidują i można się obawiać, że smartfon eksploduje w kieszeni kosmonauty.

Nie możemy też mieć pewności, czy ułamek sekundy wcześniej nie ujawni się w jakiś sposób kwantowa natura czasoprzestrzeni – ciąg dalszy naszej historii wymyka się teorii względności w jej dzisiejszym kształcie... Jubilatka wciąż bywa bowiem tajemnicza i prowokuje do snucia śmiałych, a niekiedy szalonych myśli. Ale to temat na zupełnie inny artykuł.



Problem dwóch ciał

Szymon CHARZYŃSKI

Jak wygląda ruch dwóch punktów materialnych podlegających prawom klasycznej dynamiki Newtona i przyciągających się zgodnie z newtonowskim prawem powszechnego ciężenia? Odpowiedź jest stosunkowo prosta i bardzo elegancka. Poruszają się po krzywych stożkowych, przy czym rodzaj krzywej zależy od całkowitej energii układu. Jeżeli energia jest na tyle mała, że ciała tworzą stan związany, czyli nie mogą się od siebie uwolnić, tylko muszą krążyć wokół siebie, to robią to po elipsach. Jeżeli energia układu jest wystarczająco duża, żeby mogły oddalić się od siebie dowolnie daleko, to najpierw zbliżają się do siebie, a potem uciekają na ogół po hiperbolach, chyba że energia będzie dokładnie na granicy pomiędzy stanem związanym a niezwiązanym, kiedy to będą poruszać się po parabolach.

Zajmijmy się stanem związanym. Ruch po elipsach jest okresowy, co oznacza, że co pewien ustalony okres ciała zajmują te same położenia w przestrzeni. Możemy wyobrazić sobie, że te dwa ciała to np. Ziemia i Słońce albo układ podwójny gwiazd. Jeżeli tylko ciała te mają symetrię sferyczną, to ich ruch jest dokładnie taki sam, jak ruch punktów materialnych o tych samych masach. Teoria Newtona mówi nam, że te dwa ciała będą krążyć po okresowych orbitach dowolnie długo.

A co teoria Newtona powie nam o tym, jak będzie wyglądał ruch trzech ciał? Opis ruchu trzech ciał nie jest już tak prosty i elegancki, jak dla dwóch. Ogólny problem opisu ruchu trzech ciał o porównywalnych masach w teorii Newtona nie ma ogólnego rozwiązania analitycznego. Rozwiązania numeryczne mają cechy chaotyczne, czyli trudno jest przewidzieć zachowanie takiego układu w dłuższej perspektywie czasowej, bo jest ono bardzo czułe na warunki początkowe. Możliwe są zderzenia i ucieczka jednego z ciał kosztem zbliżenia się do siebie dwóch pozostałych. Daleko więc takiemu układowi trzech ciał do elegancji i prostoty układu złożonego tylko z dwóch.

A jak to wygląda w ogólnej teorii względności (OTW)? W teorii Newtona najprostszym obiektem jest masa punktowa, czyli wyidealizowany obiekt, który inaczej niż gwiazda czy planeta nie ma objętości i struktury wewnętrznej. W pewnym sensie najprostszym odpowiadającym mu obiektem w teorii względności jest czarna dziura – obiekt mający tylko masę (i ewentualnie moment pędu lub ładunek elektryczny), przy czym cała jego masa jest skupiona w jednym punkcie, zwanym ze względu na swe zadziwiające własności, osobliwością. Problem jednego ciała, czyli pole grawitacyjne wokół jednej czarnej dziury, został rozwiązany bardzo szybko po sformułowaniu OTW, bo już w roku 1916 jego rozwiązanie zostało opublikowane przez Karla Schwarzschilda. Potem pojawiły się również rozwiązania opisujące naładowaną i wreszcie rotującą czarną dziurę. A co ze stanem związanym dwóch mas? Do tej pory nie znamy ogólnego analitycznego rozwiązania takiego problemu.

Wygląda na to, że w OTW nie potrafimy rozwiązać problemu dwóch ciał, tak jak potrafiliśmy to zrobić w teorii Newtona. Dlaczego tak jest? A może źle liczymy te ciała czy też obiekty fizyczne? Zanim wrócimy do tego pytania, zajmiemy się tym, co wiemy o układzie związanym dwóch mas w OTW. Wiemy, że gdy masy te są wystarczająco daleko od siebie, to ich ruch w niewielkim stopniu odbiega od ruchu po elipsach opisywanego przez teorię Newtona. Jest to szczególnie przypadek, którego opis daje się znaleźć za pomocą przybliżonych rachunków, gdzie oblicza się *poprawki* do orbit newtonowskich pochodzące od OTW, zakładając, że są małe. A na czym te poprawki, czy też małe odstępstwa od orbit newtonowskich, polegają? Okazuje się, że ruch nie jest już idealnie okresowy. Po pierwsze, kierunek wyznaczony przez prostą łączącą punkty, w których ciała są w maksymalnej odległości od siebie, powoli się obraca, a po drugie, ta maksymalna odległość po każdym okrążeniu staje się coraz mniejsza – ciała powoli na siebie spadają. W teorii Newtona rozmiar orbity jest ściśle związany

z całkowitą energią układu, która pozostaje stała – gdy jedno ciało zbliża się do drugiego, to rośnie ich energia kinetyczna kosztem energii potencjalnej, a kiedy się oddala, to rośnie energia potencjalna kosztem energii kinetycznej. Im mniejsza energia całkowita, tym ciaśniejsza orbita. Jeżeli więc orbity się zacieśniają, a ciała na siebie spadają, to wygląda na to, że tracona jest energia układu. A co z zasadą zachowania energii?

Ogólna teoria względności ma odpowiedź i na to pytanie. Przewiduje, że energia jest unoszona przez promieniowanie (fale) grawitacyjne. Promieniowanie to unosi nie tylko energię, ale także moment pędu. Dopiero po uwzględnieniu energii (momentu pędu, a także pędu – o czym później) pola grawitacyjnego całkowita energia (moment pędu, pęd) układu jest zachowana. Wygląda więc na to, że problem dwóch orbitujących mas w OTW przestaje być problemem dwóch ciał, ponieważ w opisie musimy uwzględniać trzeci pełnoprawny obiekt niosący energię, pęd i moment pędu, jakim jest pole grawitacyjne. Wygląda to bardziej jak problem trzech ciał i okazuje się, że poza sytuacją, kiedy wpływ OTW stanowi tylko małą poprawkę do ruchu newtonowskiego, nie daje się opisywać w sposób analityczny, podobnie jak problem trzech ciał w teorii Newtona.

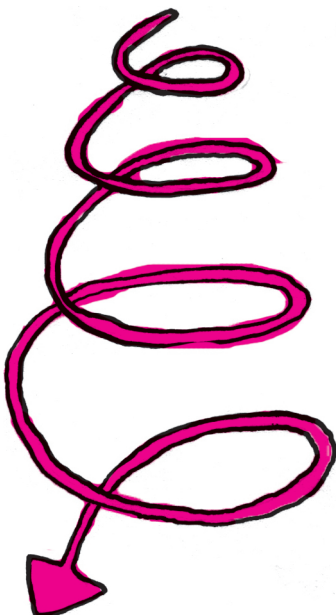
Więcej o problemach z określeniem energii w OTW piszemy w artykule *Energia pola grawitacyjnego* na stronie 9.

Mimo braku ogólnego rozwiązania analitycznego problem trzech ciał w teorii Newtona daje się stosunkowo łatwo symulować numerycznie na komputerze. Okazuje się natomiast, że problem dwóch mas znajdujących się na tyle blisko siebie, że efekty relatywistyczne stają się dominujące i nie można już uznawać ich za małe poprawki do ruchu newtonowskiego, jest problemem niezwykle trudnym do rozwiązania również za pomocą superkomputerów. Spodziewano się, że para czarnych dziur wreszcie na siebie spadnie i stworzy jedną czarną dziurę, jednak przebieg tego zjawiska, pomimo ogromnego wysiłku wielu badaczy, latami wymykał się próbom symulowania na komputerze.

OTW utożsamia grawitację z zakrzywieniem czasoprzestrzeni. Taka krzywa geometria jest opisywana za pomocą funkcji gładkich spełniających układ równań różniczkowych cząstkowych. Czasoprzestrzeń w otoczeniu czarnej dziury, gdzie pole grawitacyjne jest silne, jest bardzo mocno zakrzywiona. Numeryczne modelowanie ewolucji geometrii silnie zakrzywionej czasoprzestrzeni wokół pary czarnych dziur wymaga zastąpienia opisu za pomocą gładkich funkcji przez opis za pomocą wartości tych funkcji w węzłach skończonej dyskretnej sieci. Znalezienie właściwej metody dyskretyzacji równań OTW okazało się zadaniem bardzo trudnym.

Autorem pierwszej udanej symulacji zlania się czarnych dziur był Frans Pretorius. Niedługo po jego publikacji wyniki swoich symulacji opublikowały zespoły Manuela Campanelli i Johna Bakera.

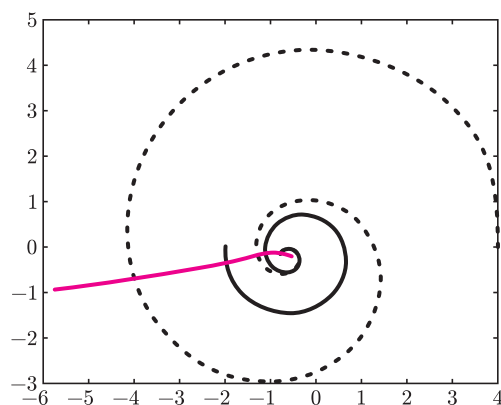
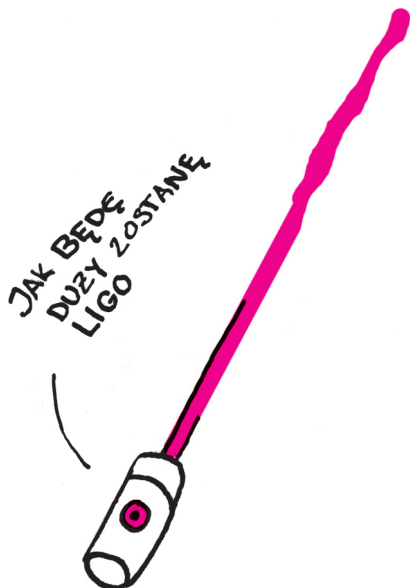
Przełom nastąpił dopiero w roku 2005. Wtedy właśnie pojawiły się pierwsze publikacje raportujące udane symulacje trzech faz: spiralnego spadku czarnych dziur na siebie, zlania się pary czarnych dziur w jedną i dochodzenia powstałej nowej czarnej dziury do stanu stacjonarnego. Trudności, które udało się wreszcie przezwyciężyć, były różnego rodzaju. Okazuje się, na przykład, że różne, ale matematycznie równoważne sformułowania ewolucji czasoprzestrzeni w OTW ujawniają bardzo zróżnicowane własności, gdy na ich podstawie próbuje się znaleźć rozwiązania numeryczne. Większość tych sformułowań jest numerycznie niestabilna. Kluczem do sukcesu stało się sformułowanie znane jako metoda BSSN (od nazwisk Baumgarte, Shapiro, Shibata, Nakamura), które obecnie wykorzystuje się do stabilnych numerycznych symulacji. Kolejnym problemem jest fakt, że czarne dziury obecne w symulacji są punktami osobliwymi, co objawia się między innymi tym, że wartości pewnych parametrów mogą być rozbieżne w pobliżu takich punktów. Z problemem tym poradzono sobie, znajdując odpowiednie współrzędne i wykluczając obszar otaczający osobliwość. Pomocny przy tym okazał się fakt, że osobliwości są ukryte pod horyzontem zdarzeń i informacja o tym, co się dzieje w ich otoczeniu, i tak nie wydostaje się na zewnątrz horyzontu. Jeszcze inną komplikacją jest konieczność symulowania dużej objętości przestrzeni wokół układu pary czarnych dziur po to, żeby uwzględnić efekty falowe, ponieważ promieniowanie grawitacyjne odgrywa istotną rolę, unosząc energię i pęd. Z drugiej strony obszary silnych pól w pobliżu czarnych dziur muszą być symulowane z dużą rozdzielczością, żeby zapewnić odpowiednią dokładność i stabilność numeryczną. Ponieważ zasoby



Problemy wymienione w tekście oraz wiele innych niewymienionych rozwiązano i obecnie symulacje zlewania się pary czarnych dziur stały się zadaniem rutynowo wykonywanym. Dzięki optymalizacji wypracowanych metod i wzrostowi wydajności komputerów przeprowadzanie takich symulacji nie jest już zarezerwowane dla superkomputerów, ale jest możliwe do wykonania na pojedynczej stacji roboczej, jakie stoją w domach lub biurach. Oprogramowanie służące do tego celu jest dostępne w sieci, np. pod adresem einsteintoolkit.org.

nawet najwydajniejszych superkomputerów są ograniczone, nie jest możliwe symulowanie całej dużej objętości z wysoką rozdzielczością, zastosowano więc rozwiązanie polegające na zagęszczaniu sieci, na której prowadzone są obliczenia w otoczeniu czarnych dziur – im bliżej czarnej dziury, tym siatka staje się gęstsza, przy czym zagęszczania te „śledzą” położenie czarnych dziur, czyli siatka, na której komputer prowadzi obliczenia, zmienia się dynamicznie w czasie symulacji.

Jeszcze przed pierwszymi udanymi symulacjami badacze spodziewali się, że dwie czarne dziury spadną na siebie po spiralnych orbitach, zleją się i powstanie jedna czarna dziura. Od symulacji oczekiwali dokładnych ilościowych przewidywań na temat tego, jaka będzie masa i moment pędu powstałej czarnej dziury, a jaka część energii i momentu pędu uleci w postaci promieniowania grawitacyjnego i jak dokładnie to promieniowanie będzie wyglądało. Symulacje dostarczyły odpowiedzi na te pytania dla różnych konfiguracji, różniących się stosunkiem mas czarnych dziur oraz wartościami i kierunkami momentu pędu składników układu podwójnego. Pewnym zaskoczeniem okazała się wartość pędu czarnej dziury powstałej w wyniku złania się pary czarnych dziur dla pewnych szczególnych konfiguracji. Zjawisko polegające na tym, że powstała w wyniku złania się niesymetrycznego układu podwójnego czarna dziura uzyskuje niezerowy pęd względem środka masy układu podwójnego przed zderzeniem, nazwano odrzutem grawitacyjnym. Zasada zachowania pędu pozostaje spełniona, ponieważ przeciwny pęd unosi promieniowanie grawitacyjne. Typowe wartości prędkości odrzutu są rzędu setek km/s, ale dla pewnych szczególnych konfiguracji (odpowiednio dobranego stosunku mas składników układu podwójnego i wektorów ich momentów pędu) może sięgać kilku tysięcy km/s, co stanowi wartość przewyższającą prędkość ucieczki nawet z dużych galaktyk. Tak silnego odrzutu się nie spodziewano. Problem znalezienia obserwacji astronomicznych związanych z tym odkryciem pozostaje otwarty.



Wynik przykładowej symulacji. Dwie czarne dziury, cięższa (spirala ciągła) i lżejsza (spirala przerywana), zlewają się, tworząc jedną czarną dziurę, która doznaje odrzutu i porusza się w lewo po kolorowej trajektorii z prędkością około 300 km/s.



Rozwiązanie zadania M 1478.

Jeśli $n\sqrt{7} - m > 1$, to teza jest spełniona. Ponieważ liczba $\sqrt{7}$ jest niewymierna, to $n\sqrt{7} - m \neq 1$. Pozostaje więc rozważyć przypadek, gdy $n\sqrt{7} - m < 1$. Z założenia wiemy, że

$$0 < (n\sqrt{7} - m)(n\sqrt{7} + m) = 7n^2 - m^2.$$

Liczba m^2 przy dzieleniu przez 7 daje resztę 0, 1, 2 lub 4, więc $7n^2 - m^2$ – resztę 0, 6, 5 lub 3. W takim razie $7n^2 - m^2 \geq 3$, a stąd

$$\begin{aligned} n\sqrt{7} - m &\geq \frac{3}{n\sqrt{7} + m} = \\ &= \frac{2m + (n\sqrt{7} - m)}{3} > \\ &> \frac{2m + 1}{2m + 1} \geq \frac{3}{3m} = \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Dzięki symulacjom numerycznym mamy więc wreszcie pełny obraz tego, jak w teorii zachowuje się układ dwóch czarnych dziur. Takie symulacje są niezwykle ważne z punktu widzenia rodzącej się właśnie nowej dziedziny astronomii – astronomii grawitacyjnej, ponieważ proces zlewania się czarnych dziur jest jednym z potencjalnych źródeł silnego promieniowania grawitacyjnego, które, być może, uda się zarejestrować za pomocą detektorów, które w ostatnich latach zostały do tego celu zbudowane. Jak na razie nie udało się bezpośrednio zarejestrować promieniowania grawitacyjnego, jednak symulacje dostarczają wzorców, które można będzie ewentualnie porównać z sygnałem zarejestrowanym przez detektor wtedy, kiedy do takiej detekcji dojdzie. Obecnie najczulszym detektorem jest Advanced LIGO, który ma zacząć pracę w tym roku, zastępując poprzedni detektor LIGO, od którego ma być dziesięciokrotnie czulszy. LIGO przez 8 lat nasłuchiwania (2002–2010) nie zarejestrował promieniowania grawitacyjnego. Być może teraz Advanced LIGO dostarczy tych przełomowych obserwacji, które byłyby kolejnym wielkim sukcesem przewidywań OTW sto lat po jej opublikowaniu. A może zaskoczy jakąś niespodzianką? Pozostaje czekać na wyniki jego pracy.

Energia pola grawitacyjnego

Jerzy KIJOWSKI*

Patrząc wstecz na rozwój podstawowych pojęć tworzących język, w którym współczesna fizyka opisuje otaczający nas świat, dostrzegamy ogromną rolę zasady zachowania energii. Z pewną przesadą można byłoby powiedzieć, że każdy krok naprzód w tym odkrywaniu podstawowych praw fizyki polegał na: 1) załamaniu się zasady zachowania, to znaczy na konstatacji, że gdzieś nam ta energia ucieka, a potem na 2) odkryciu całkiem nowego pola zjawisk i związanej z tym nowej formy energii. I zawsze okazywało się, że energia nie gubi się, a jedynie zamienia się w nową, nie znaną nam dotychczas formę. Doskonałym przykładem na poparcie tej tezy było powstanie termodynamiki w początkach XIX wieku. Wtedy okazało się właśnie, że energia mechaniczna (kinetyczna + potencjalna) nie musi już być absolutnie zachowywana, bowiem może przekształcać się w energię wewnętrzną („cieplną”) ciał uczestniczących w opisywanych procesach fizycznych. A maszyny ciepłe to przykład na transformację odwrotną: zamiany ciepła na pracę mechaniczną.

Prawie równolegle odbywała się druga wielka rewolucja w fizyce: od „mechanicznego” do „polowego” opisu oddziaływań. Jak pamiętamy ze szkoły, prawo powszechnego ciężenia sformułowane przez Newtona polegało na przypuszczeniu, że para dowolnych ciał przyciąga się z dobrze sprecyzowaną siłą, zależną od masy tych ciał i ich wzajemnej odległości. Myśląc np. o systemie planetarnym wokół Słońca, można było sobie wyobrażać, że między dowolnymi dwoma ciałami niebieskimi została rozpięta niewidzialna „sprężynka”, realizująca to przyciąganie. Analogiczne „sprężynki” trzeba było sobie wyobrażać, by zrozumieć przyciąganie lub odpychanie ładunków elektrycznych opisane prawem Coulomba. Podobnie próbowano opisać oddziaływanie magnetyczne, ale tutaj sprawa okazała się bardziej skomplikowana. Tymczasem badania prowadzone przez Michaela Faradaya uświadamiały fizykom, że w celu zrozumienia istoty elektryczności i magnetyzmu warto porzucić mechanistyczne wyobrażenia „sprężynek”. Zamiast tego Faraday wprowadził pojęcie „linii sił pola”. Bardzo wyraźnie widać je, gdy rzucimy garść opiłków żelaznych na tafełkę szklaną, pod którą leży magnes. Opiłki układają się właśnie wzdłuż linii sił pola, które można wręcz fotografować. I choć nie umiemy równie spektakularnie wizualizować pola elektrycznego, to każdy zapewne widział w jakimś podręczniku rysunek reprezentujący ładunek elektryczny i wychodzące z niego koncentrycznie linie sił pola. Jeśli rysunek uwzględniał również drugi ładunek o przeciwnym znaku, to właśnie w nim zbiegały się te linie.

Zresztą same „linie pola” nie wnoszą tu nic istotnego. Ważne jest „pole”, to znaczy jakaś własność samej przestrzeni otaczającej poruszające się ładunki (magnesy to też zamknięte obwody elektryczne, wytwarzające pole magnetyczne na mocy prawa Ampera!). Własność tę reprezentujemy za pomocą dwóch strzałek (wektorów): elektrycznego \vec{E} i magnetycznego \vec{B} . Gdy patrzymy nieuważnie na pusty z pozoru obszar przestrzeni, możemy przegapić ich istnienie. Jednak bardzo łatwo odkryć ich obecność, a nawet zmierzyć je dokładnie, gdy zaczniemy badać ruch malutkich (próbnymi) ładunków w tym obszarze.

A zatem co się stanie, gdy pierwotnie obojętna elektrycznie kulka zostanie naładowana? No cóż, nie odbędzie się to bez jakiegoś nakładu pracy. Aby zgromadzić na takiej kulce ładunek elektryczny, można ją pocierać (*vide* piękny wiersz Juliana Tuwima „... o bursztynie, gdy się go pociera...”), można też użyć maszyny elektrostatycznej, albo też doprowadzić ładunek z jakiejś zewnętrznej baterii. W każdym razie proces ten wymaga, by z jakiegoś rezerwuaru energii (np. chemicznej, zmagazynowanej w naszych mięśniach) przeznaczyć jej trochę na ten cel. I co się teraz z tą energią stało? Czy została stracona? Otóż nie! Odnajdujemy ją właśnie w postaci energii pola

*Centrum Fizyki Teoretycznej PAN

elektrycznego i magnetycznego. Prawo zachowania energii zostanie ocalone, jeśli tylko zaakceptujemy jej nową formę: energię pola!!!

Mija właśnie 150 lat od czasu, gdy Maxwell opublikował ostateczną wersję elektrodynamiki, w której zaproponował równania rządzące dynamiką pól: elektrycznego i magnetycznego. Ich niezwykle złożona postać została znacznie uproszczona przez genialnego samouka Olivera Heaviside'a. Następnym krokiem była szczególna teoria względności Einsteina. Wykazał on, że pole elektryczne \vec{E} i magnetyczne \vec{B} są jedynie subiektywnymi, zależnymi od obserwatora, emanacjami czegoś większego, mianowicie pewnej struktury geometrycznej niezależnej od obserwatora, obecnie nazywanej „polem elektromagnetycznym”. Można się pochwalić, że równania Maxwella, które w oryginalnej wersji zajmowały całe strony, możemy teraz zapisać za pomocą zaledwie 9 znaków. Ale nie ma to żadnego znaczenia dla problemu energii pola, której gęstość w próżni wyraża się (w odpowiednich jednostkach) w postaci: $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2)$. W trakcie ewolucji pola energia ta może się przemieszczać w przestrzeni (opisuje to tzw. *wektor Poyntinga*), a także wymieniać się z innymi jej formami, np. mechaniczną w silniku elektrycznym czy ciepłą w grzałce.

W roku 1915 Emma Noether wykazała, że prawa zachowania w teorii pola wiążą się z symetriami teorii (praca zawierająca ten wynik została jednak opublikowana dopiero w 1918 roku). I tak zasada zachowania energii jest wyrazem niezmienniczości elektrodynamiki względem przesunięć w czasie. Mówiąc językiem potocznym, oznacza to, że każde doświadczenie z polem elektromagnetycznym, powtórzone po pewnym czasie w tych samych warunkach, da ten sam wynik.

Polowy punkt widzenia zwyciężył również w teorii grawitacji. Jak już zauważyliśmy, analogia między prawem Coulomba a newtonowskim prawem powszechnego ciężenia jest uderzająca. Podobnie jak w początkach elektrodynamiki, opisywano to pole za pomocą „potencjału grawitacyjnego” – skalarnej funkcji, której skala zmienności reprezentowałaby „natężenie pola grawitacyjnego”. Ale, podobnie jak w elektrodynamice, taki opis wystarczał jedynie do opisu sytuacji statycznych, np. do opisu ruchu planet w statycznym polu grawitacyjnym wytworzonym przez Słońce. Natomiast zupełnie zawodził w sytuacji dynamicznej, np. gdy chcemy uwzględnić wpływ planet na ruch samego Słońca. W takiej sytuacji potencjał grawitacyjny opisany po newtonowsku byłby „przyklejony na sztywno” do Słońca. Oznaczałoby to, że informacja o tym, że Słońce nieco się przesunęło, dotarłaby do dowolnie odległej gwiazdy dowolnie szybko. Klóci się to z podstawowym założeniem teorii względności, tzw. postulatem przyczynowości, w myśl którego żadne oddziaływanie nie może rozchodzić się z prędkością większą niż prędkość światła.

Podobny paradoks zaistniałby w opisie zjawisk elektrycznych, gdybyśmy zatrzymali się na równaniu Coulomba. Jednak paradoks ten znika, gdy tylko opuścimy domenę elektrostatyki. Matematycznie elektrostatyka jest po prostu teorią równania Poissona nałożonego na jedną funkcję – potencjał skalarny. Musimy przejść do pełnej teorii Maxwella (najlepiej w wersji Einsteina!), w której do opisu konfiguracji pola nie wystarcza tylko jedna funkcja. Natomiast w teorii grawitacji kontemplacja tego i innych paradoksów doprowadziła Einsteina do sformułowania chyba najpiękniejszej i precyzyjnie sprawdzonej teorii fizycznej, jaką jest ogólna teoria względności. Stulecie jej sformułowania obchodzimy właśnie w bieżącym roku. W teorii tej „pole grawitacyjne” opisuje się strukturą geometryczną czasoprzestrzeni, która nie jest już dana *a priori* „od stworzenia Świata”, lecz stanowi dynamiczne pole, ewoluujące według tzw. równań Einsteina. W luźnej analogii do elektrodynamiki można powiedzieć, że „potencjały grawitacyjne” to po prostu struktura metryczna czasoprzestrzeni, zaś „siły grawitacyjne” to tzw. struktura powiązania (czy też z angielska *koneksji*). W niniejszym artykule nie będziemy rozważać tych subtelności matematycznych. Interesuje nas natomiast pojęcie energii pola

Dla Czytelników zainteresowanych tak ekonomicznym zapisem równań Maxwella przytaczamy go:

$$\begin{aligned} dF &= 0, \\ d * F &= J. \end{aligned}$$



Rozwiązanie zadania F 893.

Siła działająca na opływane ze stałą prędkością ciało jest proporcjonalna do kwadratu prędkości cieczy względem ciała. W naszym przypadku siła F działająca na łopatkę będzie miała postać:

$$F = A(v - u)^2,$$

przy czym stała A zależy od kształtu opływającego ciała, jego rozmiarów i od gęstości cieczy. „Pobierana” przez koło moc P będzie więc równa:

$$P = Au(v - u)^2.$$

Jak widzimy, moc ta jest równa zeru, gdy $u = 0$ lub $u = v$. Pochodna P względem u :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{du} &= A((v - u)^2 - 2u(v - u)) = \\ &= 3u^2 - 4vu + v^2 \end{aligned}$$

przyjmuje wartość 0 dla $u = v$ oraz dla $u = v/3$. Jak łatwo sprawdzić, maksymalna moc osiągnięta jest dla $u = v/3$ i wynosi:

$$P_{\max} = \frac{4v^3}{27} A.$$

grawitacyjnego. Czy i tu obowiązuje zasada zachowania? Czy np. przyciągające się, a zatem przyspieszające, ciała niebieskie, zwiększając swą energię kinetyczną, czerpią ją właśnie z rezerwuaru energii pola zmagazynowanej w jego początkowej konfiguracji? Czy istnieje prosty wzór na gęstość tej energii, analogiczny do wzoru $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2)$ dla elektromagnetyzmu?

Uczeni spierali się przez lata, jak opisać energię pola grawitacyjnego w sposób zgodny z procedurą przedstawioną przez Noether. Rodzi się jednak dużo poważniejsza wątpliwość: czy w ogóle jest możliwe, by całkowita energia \mathcal{E}_V pola grawitacyjnego zmagazynowana w obszarze przestrzennym V mogła mieć sensowne matematyczne własności. W szczególności, gdyby podzielić obszar V na dwie rozłączne części V_1 i V_2 , należałoby oczekiwać, że

$$\mathcal{E}_V = \mathcal{E}_{V_1} + \mathcal{E}_{V_2},$$

gdzie $\mathcal{E}_{V_1}, \mathcal{E}_{V_2}$ są energiami zgromadzonymi, odpowiednio, w obszarach V_1 i V_2 .

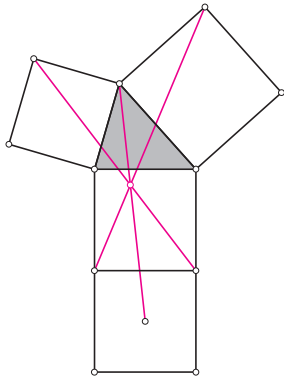
Taka własność energii pola grawitacyjnego klóci się jednak z samą istotą grawitacji! Przecież już od pierwszych prac Einsteina w 1905 roku wiemy, że energia „waży”, to znaczy ma masę! Słynny wzór $E = mc^2$ widział chyba każdy przedszkolak, choć jego popularyzatorzy popełniają zazwyczaj zasadniczy błąd, pisząc, że „masa może zmieniać się w energię”. To nie tak! Masa *jest* energią. Wybuch bomby atomowej to nie zamiana masy na energię, lecz zamiana masy (energii) w inną jej postać. Współczynnik liczbowy c^2 mówi jedynie o możliwości przeliczania różnych jednostek fizycznych, w których mierzymy *tę samą wielkość*. Na przykład w układzie SI, aby przeliczyć dżule ($J = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2}$) na „czyste” kilogramy, potrzebny jest przelicznik o mianie $\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$. Einstein odkrył, że tym uniwersalnym przelicznikiem jest właśnie kwadrat prędkości światła c^2 . Tak więc w teorii grawitacji musimy pogodzić się z faktem, że w obszarze V_1 zmagazynowana została *masa* \mathcal{E}_{V_1} , a w obszarze V_2 zmagazynowana została *masa* \mathcal{E}_{V_2} . Czytelnik o konserwatywnych poglądach, który nie lubi mierzyć masy w dżulach, może na swój użytek przeliczać to wszystko na kilogramy, dzieląc nasze wzory przez c^2 . (Tego rodzaju fobie można porównać do problemu turysty podróżującego samochodem między USA a Kanadą, który nie śmie zapisać wzoru na całkowitą drogę w postaci $S = S_{\text{USA}} + S_{\text{Kanada}}$, bo przecież S_{USA} mierzy się w milach, a S_{Kanada} już w kilometrach!) Ale grawitacja to prawo *powszechnego* ciężenia, w myśl którego *każde* dwie masy przyciągają się. Zatem całkowita energia (masa) pola zmagazynowana w V nie może być sumą energii (mas) zmagazynowanych w V_1 i V_2 , bowiem musi zostać pomniejszona o energię ich oddziaływania, jakim jest to przyciąganie. A zatem wiemy na pewno, że energia *nie może* być addytywna, czyli inaczej niż w teoriach pola opartych na twierdzeniu Noether, w grawitacji musi zachodzić nierówność:

$$\mathcal{E}_V \neq \mathcal{E}_{V_1} + \mathcal{E}_{V_2}.$$

Ten paradoks stanowi poważne wyzwanie dla fizyków i matematyków zajmujących się ogólną teorią względności. Nie możemy tutaj wgłębiać się bardziej w jego istotę, bo do tego potrzebny jest zaawansowany aparat matematyczny. Warto natomiast podkreślić, że inaczej niż chociażby w elektrodynamice, w teorii względności nie dysponujemy pojęciem gęstości energii pola, bo energia pola w danym obszarze nie jest sumą wkładów energii od jego części. Energia jest wielkością nielokalną. Okazuje się jednak, że nie ma wątpliwości co do tego, jak opisywać *całkowitą* energię (masę) izolowanego układu pól i mas, to znaczy takiego, że poza jakimś ograniczonym obszarem przestrzeni nie zawiera żadnych mas. Tę całkowitą energię opisuje wielkość geometryczna zwana „masą ADM” od nazwisk badaczy, którzy ją zaproponowali w słynnym artykule opublikowanym w 1962 roku: R. Arnowitt, S. Deser oraz C. W. Misner. Natomiast próby opisanie energii grawitacyjnej zawartej nie w *całej* przestrzeni, a jedynie w jej ograniczonym kawałku, polegają najczęściej na tzw. konstrukcjach quasilokalnych i wiążą się m.in. z nazwiskiem Rogera Penrose’a. Również w Warszawie prowadzone są badania takich struktur.

Od kwadratu

Waldemar POMPE



Rys. 1

Rozpatrzmy dowolny trójkąt oraz cztery kwadraty zbudowane w sposób przedstawiony na rysunku 1. Wówczas zaznaczone kolorem trzy odcinki, łączące odpowiednie wierzchołki kwadratów oraz środek najniższego kwadratu, przecinają się w jednym punkcie.

Tę ciekawą własność można znaleźć na stronie www.gogeometry.com/problem/ w dziale *Open Geometry Problems* (otwarte problemy geometryczne). Jest to zadanie nr 902 opublikowane 15 lipca 2013 r. W tym przypadku „otwarte” nie oznacza, że żaden dowód tej własności nie jest znany. Przy pewnej dozie zamięłowania do rachunków można zweryfikować słuszność tej zależności w układzie współrzędnych. Przez „otwarte” należy więc rozumieć to, że nie jest znany dowód geometryczny. Takie dowody często pozwalają lepiej zrozumieć fenomen danej własności, związku z innymi geometrycznymi konfiguracjami oraz otwierają drogę do ciekawych modyfikacji i uogólnień.

Tak jest i w tym przypadku. Geometryczny dowód prezentowanej własności przedstawię od razu w nieco ogólniejszej sytuacji.

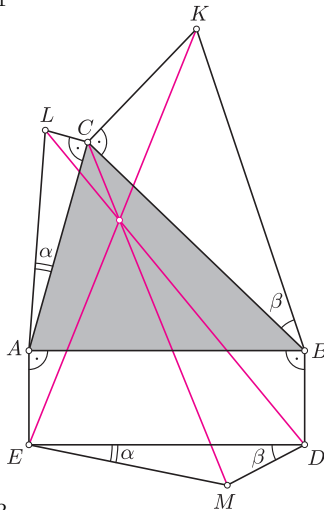
Twierdzenie 1. *Rozpatrzmy dowolny trójkąt ABC oraz prostokąt $ABDE$ leżący po zewnętrznej stronie tego trójkąta (rys. 2). Po zewnętrznej stronie prostokąta budujemy dowolny trójkąt DEM . Oznaczamy:*

$$\alpha = \sphericalangle DEM \quad \text{oraz} \quad \beta = \sphericalangle EDM.$$

Następnie, po zewnętrznej stronie trójkąta ABC budujemy takie trójkąty BCK i ACL , że $\sphericalangle BCK = \sphericalangle ACL = 90^\circ$,

$$\sphericalangle CAL = \alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CBK = \beta.$$

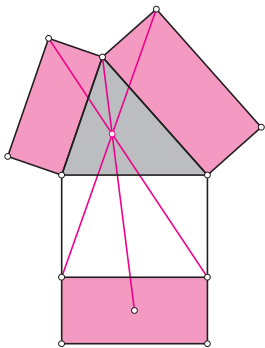
Wówczas proste EK , DL i CM przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 2

Własność z rysunku 1 jest szczególnym przypadkiem tego twierdzenia: wystarczy przyjąć, że $ABDE$ jest kwadratem oraz że $\alpha = \beta = 45^\circ$.

Z kolei przypadek $\alpha = \beta$ daje zaskakujące uogólnienie zależności z rysunku 1: trzy zacieniowane prostokąty na rysunku 3 są podobne, podczas gdy czwarty prostokąt jest dowolny – jego kształt w żaden sposób nie jest związany z pozostałymi prostokątami!



Rys. 3

Dowód twierdzenia 1. Oznaczmy przez S punkt przecięcia prostych DL i KE (rys. 4). Chcemy wykazać, że punkty C , S i M leżą na jednej prostej.

Niech P będzie rzutem prostokątnym punktu A na prostą LD . Wówczas punkt P leży na okręgu ω opisanym na prostokącie $ABDE$. Niech ponadto punkty G i H będą drugimi punktami przecięcia odpowiednio prostych EM i DM z okręgiem ω . Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że oba punkty G i H leżą na tym łuku DE okręgu ω , który nie zawiera punktów A i B . Rozumowanie w pozostałych przypadkach przebiega analogicznie.

Z równości $\sphericalangle APL = 90^\circ = \sphericalangle ACL$ wynika, że punkty A , L , C i P leżą na jednym okręgu. Wobec tego

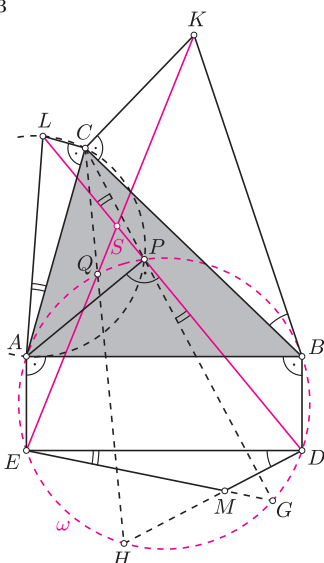
$$\sphericalangle CPL = \sphericalangle CAL = \alpha = \sphericalangle DEM = \sphericalangle GPD},$$

skąd wniosek, że punkty C , P i G leżą na jednej prostej.

Innymi słowy, wykazaliśmy, że proste CG i DL przecinają się w punkcie P leżącym na okręgu ω . Analogicznie wykazujemy, że proste CH i EK przecinają się w punkcie Q leżącym na okręgu ω .

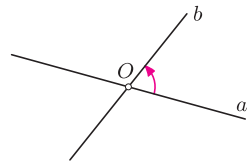
Jeśli punkt M leży na okręgu ω , to $G = H = M$ i w konsekwencji $P = Q = S$. Wobec tego, skoro punkty C , P i G są współliniowe, to także punkty C , S i M są współliniowe.

Jeśli z kolei M nie leży na okręgu ω , to stosując twierdzenie Pascala dla sześciokąta $GPDHQE$, wnioskujemy, że punkty $GP \cap HQ = C$, $PD \cap QE = S$ oraz $DH \cap EG = M$ leżą na jednej prostej. To kończy dowód twierdzenia 1. \square

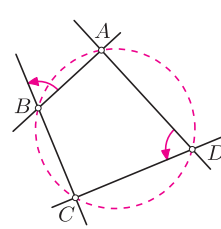


Rys. 4

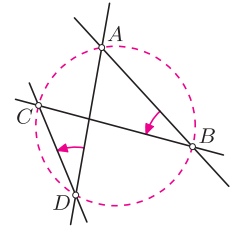
Przedstawione rozumowanie można bez większych kłopotów przenieść na znacznie ogólniejszą konfigurację. Do jej opisu potrzebne będzie nam pojęcie kąta skierowanego między prostymi.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Niech a i b będą dowolnymi prostymi przecinającymi się w punkcie O (rys. 5). *Kątem skierowanym między prostą a i prostą b nazywamy kąt, o jaki należy obrócić prostą a wokół punktu O (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara), aby otrzymać prostą b . Kąt ten oznaczamy symbolem $\sphericalangle(a, b)$.*

Zwróćmy uwagę na to, że wielkość $\sphericalangle(a, b)$ nie jest zdefiniowana jednoznacznie, a jedynie z dokładnością do 180° . Pisząc zatem „ $\sphericalangle(a, b) = \alpha$ ”, rozumiemy, że kąty stojące po obu stronach tej równości różnią się o pewną całkowitą wielokrotność kąta 180° .

Następujące twierdzenie dobrze ilustruje powód, dla którego wprowadza się pojęcie kąta skierowanego między prostymi (rys. 6): *Różne punkty A, B, C, D (nieleżące na jednej prostej) leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle(AB, BC) = \sphericalangle(AD, DC)$. Istotą tego sformułowania jest to, że punkty A, B, C, D mogą być ułożone dowolnie – nie muszą być kolejnymi wierzchołkami czworokąta wypukłego (rys. 7).*

Twierdzenie 2. *Rozpatrzmy dowolny trójkąt ABC oraz okrąg ω przechodzący przez punkty A i B (rys. 8). Niech D i E będą punktami leżącymi na okręgu ω , a M dowolnym punktem. Oznaczmy:*

$$\begin{aligned} \alpha &= \sphericalangle(DE, EA), & \beta &= \sphericalangle(ME, ED), \\ \gamma &= \sphericalangle(BD, DE), & \delta &= \sphericalangle(ED, DM). \end{aligned}$$

Punkty K i L są wyznaczone przez warunki:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sphericalangle(LC, CA), & \beta &= \sphericalangle(CA, AL), \\ \gamma &= \sphericalangle(BC, CK), & \delta &= \sphericalangle(KB, BC). \end{aligned}$$

Wówczas proste EK, DL i CM przecinają się w jednym punkcie (lub są równoległe).

Dowód twierdzenia 2 przebiega w pełni analogicznie do powyższego rozumowania, z drobną różnicą: punkt P należy zdefiniować jako drugi punkt przecięcia prostej LD z okręgiem opisanym na trójkącie ACL . Dalsza część rozumowania pozostaje bez zmian.

Na koniec przyjrzyjmy się pewnym szczególnym przypadkom twierdzenia 2.

Jeśli przyjmiemy $\alpha = \gamma$, to czworokąt $ABDE$ jest trapezem równoramiennym o podstawach AB i DE (rys. 9). Uzyskujemy wtedy zależność, która jest uogólnieniem powszechnie znanej konfiguracji (nazywanej czasami *twierdzeniem Jacobiego*), gdy $A = E$ i $B = D$.

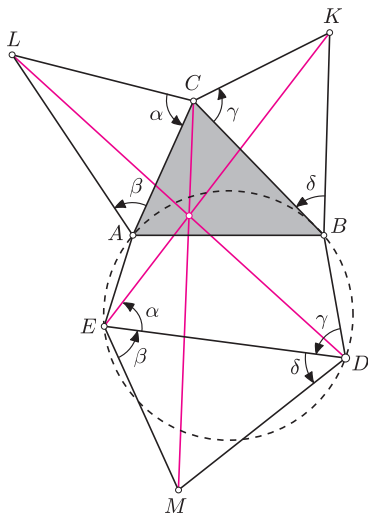
Ciekawy jest przypadek, gdy czworokąt $ABDE$ degeneruje się do trójkąta, tzn. gdy $A = E$. Wtedy prostą EA należy traktować jako styczną do okręgu opisanego na trójkącie ABD , jak to ma miejsce w zdegenerowanych przypadkach twierdzenia Pascala. Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą uzyskujemy wówczas

$$\alpha = \sphericalangle(DE, EA) = \sphericalangle(DB, BA),$$

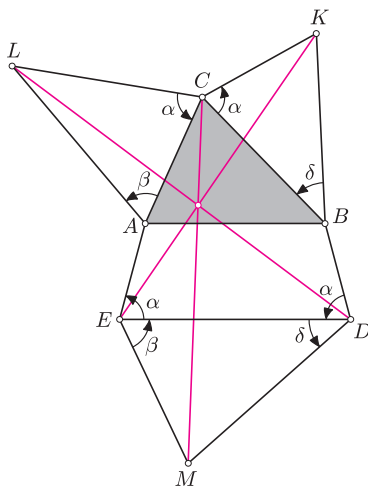
co z pozostałymi równościami twierdzenia 2 daje komplet założeń w tym przypadku (rys. 10).

Dowolność wyboru kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ oraz okręgu ω daje swobodę w konstruowaniu wielu ciekawych własności geometrycznych, podobnych do tej z rysunku 1.

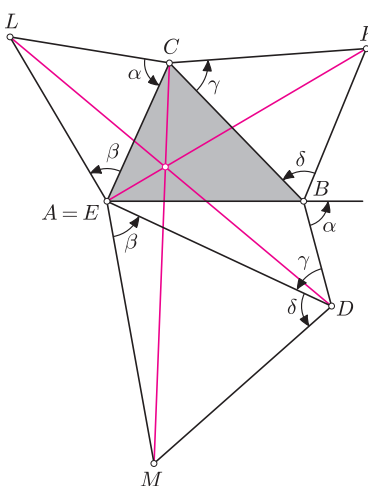
Na okładce znajduje się kilka takich przykładów. Każdy z nich jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 2.



Rys. 8



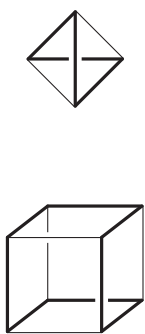
Rys. 9



Rys. 10

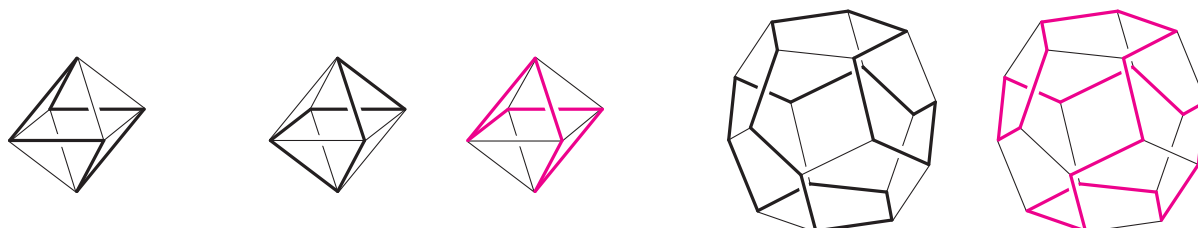
Cykle Hamiltona na wielościanach foremnych

Zadanie 44 w książce *100 zadań* Hugona Steinhausa dotyczy zamkniętych dróg po krawędziach wielościanu foremnego, które przechodzą dokładnie jeden raz przez każdy wierzchołek, czyli złożonych z krawędzi cykli Hamiltona. Chodzi o to, aby znaleźć wszystkie kształty takich cykli i policzyć, ile ich jest (z dokładnością do położenia) dla każdego wielościanu foremnego.



W oczywisty sposób stwierdzamy, że dla czworościanu i sześciątę otrzymujemy jeden kształt, trudniej zauważyć, że dla ośmiościanu jest ich trzy (w tym para lustrzana), a już całkiem trudno, że dla dwunastościanu jest tylko jedna lustrzana para. Te są tu narysowane. Polecamy natomiast Czytelnikom sprawdzenie, że dla dwudziestościanu jest 16 par lustrzanych i jeszcze jeden pojedynczy, a więc razem 33.

M.K.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1477. Dany jest ciąg dodatnich liczb całkowitych a_1, a_2, \dots, a_n . Ruch polega na wyborze dwóch takich indeksów $i < j$, że a_i nie dzieli a_j , i zastąpieniu liczb a_i, a_j przez odpowiednio ich największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność. Udowodnić, że nie jest możliwe wykonanie nieskończenie wielu ruchów.

Rozwiązanie na str. 16

M 1478. Wykazać, że jeśli liczby całkowite dodatnie m i n spełniają $0 < n\sqrt{7} - m$, to wówczas $n\sqrt{7} - m > \frac{1}{m}$.

Rozwiązanie na str. 8

M 1479. Wykazać, że w grafie prostym (tj. skończonym zbiorze wierzchołków, spośród których pewne są połączone nieskierowanymi pojedynczymi krawędziami, bez pętli) o co najmniej dwóch wierzchołkach istnieją dwa wierzchołki o tym samym stopniu.

Uwaga. Stopień wierzchołka to liczba krawędzi w nim zaczepionych.

Rozwiązanie na str. 2

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 893. Koło wodne napędza generator prądu małej elektrowni wodnej.

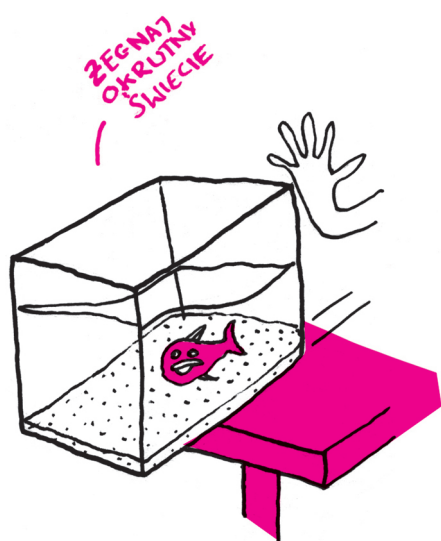
Umieszczone na obwodzie koła łopatki popychane są przez wodę przepływającą pod kołem z prędkością v . Przy jakiej prędkości u ruchu łopatek koła elektrownia osiąga maksymalną moc? Dla uproszczenia pominiemy efekty związane z zanurzeniem i wynurzeniem łopatek i zmiany ich ustawienia względem prędkości rzeki.

Rozwiązanie na str. 10

F 894. Prostopadłościenne naczynie (akwarium) wypełnione jest wodą do wysokości H . Pchnięcie naczynia w kierunku równoległym do jego ściany bocznej o długości L wywołuje kołysanie wody, której powierzchnia pozostaje niemal doskonale płaska. Ile, w przybliżeniu, wynosi okres takich drgań? Zakładamy, że podczas drgań zmiany położenia powierzchni wody są małe w porównaniu z H i L . Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

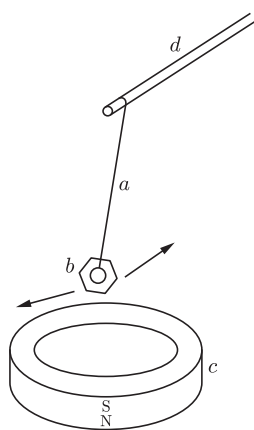
Wskazówka: Jak porusza się środek ciężkości wody?

Rozwiązanie na str. 5





Do doświadczeń potrzebne będą: stalowa nakrętka, kawałki mocnej nici, magnes pierścieniowy o średnicy kilku centymetrów (np. wymontowany ze starego głośnika), kilka małych magnesów walcowych, kawałek blachy stalowej, sprężyna, kulka, plastikowa płytką, kij od szczotki, nożyczki i klej epoksydowy lub cyjanoakrylowy.



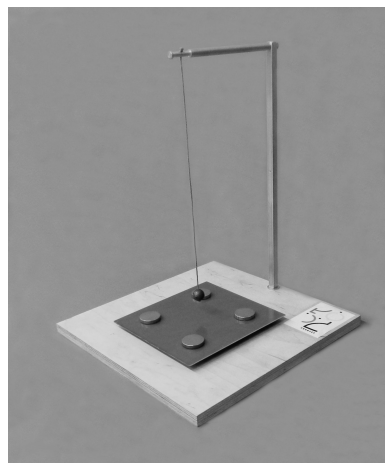
Budowa wahadła magnetycznego; *a* – nić, *b* – nakrętka, *c* – magnes, *d* – kij od szczotki.

Powszechnie wiadomo, co to jest wahadło matematyczne i jaki wykonuje ruch. Łatwo też odpowiedzieć na pytanie, jak zmieni się ruch tego wahadła, gdy zadziała na nie dodatkowa siła, np. w przyspieszającym wagonie. A co się stanie, gdy ta dodatkowa siła będzie siłą magnetyczną? Spróbujemy to sprawdzić, wykonując kilka prostych doświadczeń.

Kij od szczotki, przywiązany poziomo kawałkami nici wzdłuż oparcia krzesła, posłuży nam za statyw. Do końca innego kawałka nici przywiązujemy stalową nakrętkę średniej wielkości (M5-M10), a drugi koniec tej nici przywiązujemy do wystającej części kija od szczotki. W ten sposób sporządziliśmy model wahadła matematycznego. Jeżeli takie wahadło odchylimy od pionu i puścimy swobodnie, to będzie ono wykonywało drgania w ustalonej płaszczyźnie. Spróbujmy jednak umieścić pod nakrętką magnes pierścieniowy (rysunek). Między stalową nakrętką i magnesem będzie teraz działać dodatkowa siła przyciągania, zwrócona, podobnie jak ciężar nakrętki, ku dołowi. W wyniku tego siła kierująca zwrócona ku położeniu równowagi nakrętki i powodująca występowanie drgań jest większa. Można stąd wyciągnąć wniosek, że przyspieszenie wzrośnie, a okres wahań będzie krótszy. Odchylimy nakrętkę i sprawdzimy to doświadczalnie. Okazuje się, że puszczona swobodnie nakrętka niespodziewanie zmienia kierunek wahań i tor jej ruchu staje się bardzo skomplikowaną krzywą. W końcowym etapie ruchu kształt toru ustala się i dąży do pewnej linii granicznej. Jeżeli ponownie odchylimy nakrętkę dokładnie o ten sam kąt i puścimy swobodnie, to okaże się, że po wykonaniu kilku początkowych wahań tor będzie miał inny kształt, ale również będą występowały niespodziewane zmiany kierunku i w końcowym etapie uda się zauważyć pewną krzywą graniczną. Za pomocą telefonu, kamery lub aparatu fotograficznego możemy sfilmować ruchy nakrętki i dokładnie porównać kształty torów.

Zaobserwowany ruch jest przykładem drgań chaotycznych. Jest to chaos deterministyczny, a w ruchu możemy wyróżnić dające się przewidywać określone prawidłowości. Jedną z nich jest istnienie atraktora, czyli pewnej linii granicznej dla toru. Kształt toru bardzo silnie zależy od warunków początkowych i od niewielkich, przypadkowych zakłóceń, trudnych do kontrolowania, np. lekkiego powiewu powietrza. Z tego powodu, mimo puszczenia nakrętki z takiego samego położenia początkowego, prawie niemożliwe jest zaobserwowanie dokładnie dwóch takich samych torów. Z matematycznego punktu widzenia przyczyną obserwowanego chaosu deterministycznego w ruchu naszego wahadła jest to, że zależność działających na nakrętkę sił nie jest liniowo proporcjonalna do wychylenia nakrętki. W naszym doświadczeniu siła przyciągania magnetycznego między nakrętką i magnesem (traktowanymi jako dipole) zależy odwrotnie proporcjonalnie od trzeciej potęgi odległości między ich środkami.

Inny wariant wahadła magnetycznego przedstawiony jest na fotografii. Wyposażone jest w cztery niewielkie magnesy neodymowe przyklejone w narożnikach kwadratu. Także w tym przypadku można zauważyć pojawianie się atraktorów nad różnymi magnesami i przejść między nimi.



Wygląd jednego ze zbudowanych wahadeł z układem magnesów.

Drgania chaotyczne występują również w sytuacji, gdy na ciało pobudzone regularnie do drgań działa siła oporu, zależna w nieliniowy sposób od prędkości ruchu, np. od jej kwadratu. Spiralną sprężynę zaopatrzymy od góry w uchwyt, a od dołu obciążymy kulką. Trzymając taką sprężynę za jeden koniec, zanurzymy kulkę całkowicie w cieczy. Jeżeli będziemy wymuszali drgania przez regularne poruszanie uchwytem z różnymi częstotliwościami górze i w dół, to zauważymy interesujący efekt. Polega on na tym, że przy pewnych częstotliwościach drgania kulki będą regularne, a przy innych chaotyczne. W miarę zwiększania częstotliwości efekt ten może powtórzyć się kilkakrotnie.

Na zakończenie propozycja zastosowania, która pozwoli zdziwić naszych znajomych. Zbudujmy wahadło podobne to tego z rysunku, ale magnes pierścieniowy schowajmy pod nieprzezroczystą, plastikową zakrętką. Do górnej powierzchni zakrętki przyklejmy papierowy krążek z wypisanymi na nim w różnych miejscach słowami opisującymi pożądane dobra lub zdarzenia, takimi jak *pieniądze*, *powodzenie*, *podróże*, *sława* itd. Osobie zainteresowanej swoją przyszłością proponujemy, żeby odchyliła kulkę i puściła ją swobodnie. Skuteczność przepowiedni nie powinna być gorsza niż tych uzyskanych u wróżki.

Czegóż to dawniej uczono na wykładach algebry

Dawno, dawno temu, ale nie tylko przed wiekami i nie tylko za górami, za lasami, ale również na naszych uczelniach, jakieś pół wieku temu, wykładano wiele ciekawych faktów matematycznych, o których nie śni się obecnie nie tylko filozofom, ale również młodym matematykom. W kolejnych numerach przypomnimy kilka takich ciekawostek.

Pierwiastki wielokrotne wielomianu

Rozważamy wielomian w stopnia n o współczynnikach rzeczywistych. Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu w , jeśli wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x - x_0$. Pierwiastek x_0 jest k -krotny (k jest pewną liczbą naturalną), jeśli wielomian w jest podzielny przez $(x - x_0)^k$, ale nie dzieli się przez $(x - x_0)^{k+1}$. Na przykład dla wielomianu $w = x^3(x + 2)^2(x - 1)$ pierwiastek $x_1 = 0$ jest trzykrotny, $x_2 = -2$ jest dwukrotny, $x_3 = 1$ jest jednokrotny.

Do badania krotności pierwiastków wielomianu wygodnie jest posłużyć się pochodną tego wielomianu. Na wykładzie algebry nie odwoływano się do definicji pochodnej znanej z analizy matematycznej, a określano pochodną jednomianu $a_k x^k$ w sposób formalny, jako $k \cdot a_k x^{k-1}$, pochodną jednomianu stopnia zero a_0 jako 0, a pochodną wielomianu będącego sumą jednomianów jako sumę pochodnych tych jednomianów. Na przykład

$$(3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 5x - 7)' = 12x^3 - 6x^2 + 8x + 5.$$

Można udowodnić, że pochodna określona w sposób formalny dla wielomianu ma wiele własności przysługujących pochodnej funkcji znanych z analizy matematycznej, w szczególności pochodna iloczynu wielomianów w i v spełnia związek $(w \cdot v)' = w' \cdot v + w \cdot v'$.

Twierdzenie. *Jeśli liczba jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu w , to jest pierwiastkiem $(k - 1)$ -krotnym pochodnej w' .*

Dowód. Ponieważ x_0 jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu w , więc

$w = (x - x_0)^k \cdot v$, przy czym $v(x_0) \neq 0$. Wobec tego

$$w' = k(x - x_0)^{k-1} \cdot v + (x - x_0)^k \cdot v' = (x - x_0)^{k-1} [k \cdot v + (x - x_0) \cdot v'].$$

Liczba x_0 nie jest pierwiastkiem wielomianu występującego w nawiasie kwadratowym, gdyż jest pierwiastkiem drugiego składnika, ale nie jest pierwiastkiem składnika pierwszego. Wynika stąd, że jest ona pierwiastkiem $(k - 1)$ -krotnym pochodnej w' .

Wniosek 1. *Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy jest wspólnym pierwiastkiem tego wielomianu i jego pochodnej, a zatem jest pierwiastkiem największego wspólnego dzielnika $\text{NWD}(w, w')$.*

Wniosek 2. *Dzieląc wielomian w przez $\text{NWD}(w, w')$, otrzymamy wielomian mający te same pierwiastki, co wielomian w , ale wszystkie jednokrotne.*

Istotnie, jeśli x_0 jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu w , to jest pierwiastkiem $(k - 1)$ -krotnym pochodnej w' , jest więc też pierwiastkiem $(k - 1)$ -krotnym wielomianu $\text{NWD}(w, w')$. Dzielenie w przez $\text{NWD}(w, w')$ możemy nazywać usuwaniem pierwiastków wielokrotnych.

Przykład. Usuniemy pierwiastki wielokrotne wielomianu

$$w = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4.$$

Obliczamy pochodną $w' = 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12$. Aby obliczyć $\text{NWD}(w, w')$, zastosujemy algorytm Euklidesa, zastępując wielomian w' proporcjonalnym do niego wielomianem $w^* = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2$. Najpierw dzielimy w przez w^* z resztą i dostajemy

$$x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = x \cdot (x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2) - 2(x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2),$$

a następnie dzielimy w^* przez $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$, otrzymując iloraz $x - 1$ i resztę 0. Wobec tego $\text{NWD}(w, w') = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$. Po podzieleniu wielomianu w przez otrzymany wielomian stopnia 4 otrzymamy $x^2 - x - 2$, czyli $(x + 1)(x - 2)$. Zatem liczby -1 i 2 są pierwiastkami wielomianu w . Można łatwo sprawdzić, że -1 jest pierwiastkiem czterokrotnym, a 2 – pierwiastkiem dwukrotnym.

Maciej BRYŃSKI



Rozwiązanie zadania M 1477.

Ponieważ $\text{NWD}(a, b) \cdot \text{NWW}(a, b) = ab$, to iloczyn P wszystkich wyrazów ciągu nie zmienia się po wykonaniu ruchu.

W szczególności każdy z wyrazów ciągu jest ograniczony z góry przez P i ograniczony z dołu przez 1. Ponadto w każdym ruchu, modyfikującym pewne wyrazy o indeksach $i < j$, liczba a_j jest zamieniana na większą ($\text{NWW}(a_i, a_j)$), liczba a_i zaś – na mniejszą ($\text{NWD}(a_i, a_j)$). Żaden wyraz ciągu nie może być nieskończenie wiele razy zmniejszany (jako ograniczony z dołu przez 1) ani zwiększany (jako ograniczony z góry przez P). W takim razie każdy wyraz zostanie zmieniony skończenie wiele razy, czyli nie możemy wykonać nieskończenie wielu ruchów.

Bestiariusz informatyczny (1)

Postęp w dziedzinie komputerów dokonuje się niezwykle szybko. Trzydzieści lat temu komputer był w polskich domach nowością, a dziś nie wyobrażamy sobie bez niego życia. Rozwój technologii i oprogramowania powoduje konieczność wymyślania przez producentów coraz to nowych nazw, w których gąszczu użytkownikom komputerów łatwo się zagubić. Często zdarza się też, że pewną nazwę znamy jedynie jako akronim, ale nie bardzo wiemy, co się kryje w jego rozwinięciu. W tej kolumnie spróbujemy przybliżyć Czytelnikom choć część informatycznej terminologii. W pierwszym odcinku powiemy dość ogólnie o tym, co siedzi w naszym komputerze.

Sercem każdego komputera jest procesor, czyli centralna jednostka wykonująca obliczenia **CPU** (*Central Processing Unit*). Komputer wyposażony jest również w pamięć **RAM** (*Random-Access Memory*), umożliwiającą swobodny dostęp do wszystkich komórek. Jest to inaczej niż w przypadku dysków twardych, w których dostęp do zapisanych na magnetycznym dysku danych wymaga przesunięcia w odpowiednie miejsce głowicy dysku. Choć i to się zmienia, bo coraz bardziej są popularne dyski **SSD** (*Solid-State Drive*), oparte na pamięci flash. Zwykle komputer ma też oddzielny układ do wyświetlania grafiki **GPU** (*Graphics Processing Unit*) zlokalizowany na karcie graficznej.

Współcześnie dodatkowe urządzenia podłączone są do komputera za pomocą kabli do uniwersalnych portów **USB** (*Universal Serial Bus*), a młodszy użytkownicy nie pamiętają już komputerów, w których urządzenia miały różne wtyczki, więc np. mysz była podpinana pod port szeregowy RS-232 lub PS/2, a drukarka pod port równoległy. Większość z tych urządzeń to urządzenia wejścia-wyjścia **I/O** (*Input/Output*), służące do komunikacji komputera z jego użytkownikiem.

Najpopularniejszym urządzeniem wyjściowym jest monitor. Początkowo komputery miały monitory kineskopowe, których synonimem stała się nazwa kineskopu, czyli **CRT** (*Cathode-Ray Tube*). Zostały one wyparte przez wyświetlacze ciekłokrystaliczne **LCD** (*Liquid Crystal Display*). Każdy punkt obrazu na monitorze uzyskuje się z połączenia trzech kolorów – czerwonego, zielonego i niebieskiego **RGB** (*Red, Green, Blue*). Dla porównania, w drukarkach używa się komplementarnej przestrzeni barw **CMYK** (*Cyan, Magenta, Yellow, black*).

Komputer nie byłby użyteczny bez oprogramowania. Instalując je, musimy zapoznać się z warunkami jego użytkowania, czyli licencją. W przypadku oprogramowania własnościowego będzie to jeden z rodzajów **EULA** (*End-User License Agreement*), a w przypadku wolnego oprogramowania np. licencja **GPL** (*General Public License*). Oczywiście podstawowym oprogramowaniem jest zarządzający komputerem system operacyjny **OS** (*Operating System*), często wyposażony w graficzny interfejs użytkownika **GUI** (*Graphical User Interface*), który do interakcji wykorzystuje okienka, ikony, menu i wskaźnik myszy, czyli paradygmat **WIMP** (*Windows, Icons, Menus, Pointer*).

Porównujemy też osiągi naszego komputera. Jego moc obliczeniową możemy mierzyć w jednostce **FLOPS** (*FLoating point Operations Per Second*). Z kolei prędkość wyświetlania obrazu – w klatkach na sekundę **FPS** (*Frame Per Second*).

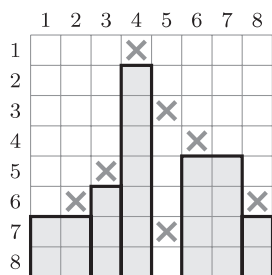
Z powodu mnogości technologii, z których każda chce zostać ochrzczona łatwo zapadającym w pamięć trzyliterowym akronimem **TLA** (*Three-Letter Acronym*), nierzadko konkretny akronim ma więcej niż jedno rozwinięcie. Przykładowo, FPS może równie dobrze oznaczać gatunek gry komputerowej, w której doświadczamy walki z bronią z perspektywy pierwszej osoby (*First-Person Shooter*).

Na koniec wspomnijmy, że nazwa jednego z pierwszych komputerów na świecie jest również akronimem. Tym komputerem był zbudowany na potrzeby wojska **ENIAC** (*Electronic Numerical Integrator And Computer*), czyli elektroniczna maszyna do numerycznego całkowania i obliczania. Akronimem jest też nazwa jednego z najstarszych koncernów informatycznych **IBM** (*International Business Machines*), którego otwarty standard komputera osobistego **PC** (*Personal Computer*) zdominował na przełomie wieków światowy rynek komputerów.

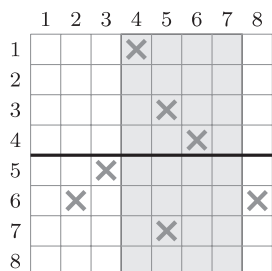
Tomasz IDZIASZEK



Informatyczny kącik olimpijski (88): Wykładzina



Rys. 1. Prawie pusty prostokąt dla pola (8, 5) zawiera zabronione pole (7, 5) ale nie zawiera zabronionego pola (3, 5), więc ma wysokość od $h_1 = 2$ do $h_2 = 5$. Kandydaci znajdowani przez algorytm mają rozmiary: 5×2 , 4×4 , 3×5 oraz 2×8 .



Rys. 2. Wysokości prostokątów dla $K = 2$ i przedziału kolumn $i = 4$, $j = 7$ są następujące:

k	0	1	2
$r_1[k, i, j]$	0	1	3
$r_2[k, i, j]$	2	4	4

Zadanie to ma również ciekawe rozwiązanie randomizowane, w którym algorytm szukania największego pustego prostokąta wykorzystujemy bardziej bezpośrednio.

Wykonujemy f iteracji; w każdej z nich każde zabronione pole zamieniamy, niezależnie z prawdopodobieństwem p , na pole niezabronione. Następnie szukamy największego pustego prostokąta. Zauważmy, że ustalony maksymalny prawie pusty prostokąt, zawiera jedno zabronione pole oraz opiera się na trzech zabronionych polach (nie na czterech, bo ustalamy również dolny bok tego prostokąta). Zatem jeśli zamienimy pole w środku oraz nie zamienimy pól na bokach (co wydarzy się z prawdopodobieństwem $p(1-p)^3$), to ten prawie pusty prostokąt zostanie znaleziony przez algorytm szukania największego pustego prostokąta. Prawdopodobieństwo znalezienia jest największe dla $p = \frac{1}{4}$ i wynosi około $\frac{1}{10}$. Zatem po $f = 40$ iteracjach prawdopodobieństwo znalezienia ustalonego (a zatem też tego o największym polu) prawie pustego prostokąta wynosi $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^f \approx 0,98$.

Zauważmy, że nasz algorytm może znajdować również prostokąty, które zawierają więcej niż jedno zabronione pole. Łatwo sobie z tym poradzimy, sprawdzając ile zabronionych pól zawiera każdy znaleziony kandydat (jak to zrobić w czasie stałym zostawimy jako nietrudne zadanie dla Czytelników, wymagające wykorzystania tzw. dwuwymiarowych sum prefiksowych). Ostateczna

W zeszłym miesiącu zajmowaliśmy się uogólnieniem następującego zadania: dla danego kwadratu rozmiaru $n \times n$ podzielonego na n^2 pól, z których niektóre były zabronione, należało znaleźć prostokąt o największym polu, który nie zawierał żadnego zabronionego pola. W tym numerze rozważymy jeszcze inną wariację tego zadania, a mianowicie będziemy szukać największych prostokątów, które zawierają co najwyżej K zabronionych pól (nazwiemy je prostokątami *prawie pustymi*).

Na początek rozważymy przypadek $K = 1$, który był treścią zadania *Wykładzina* z finału Potyczek Algorytmicznych 2014. Zakładamy, że Czytelnicy są zaznajomieni z algorytmem szukania największego pustego prostokąta opisanym w poprzednim numerze (a pomocna może być również znajomość technik opisanych w kąciku z numeru 12/2013). Przypomnijmy, że w tamtym algorytmie ustalaliśmy wiersz i zawierający dolny bok szukanego pustego prostokąta i rozważaliśmy kolejne kolumny j , trzymając na stosie zbiór elementów opisujących obszar, w którym może znajdować się lewy górny róg pustego prostokąta o prawym dolnym rogu w polu (i, j) .

Ustalmy teraz, że szukamy prawie pustego prostokąta o dolnym boku w wierszu i i zawierającego jedno zabronione pole w kolumnie j . Zatem prostokąt taki będzie miał wysokość między $h_1 = d[i, j] + 1$ a $h_2 = h_1 + d[i - h_1, j]$, gdzie $d[i, j]$ to liczba niezabronionych pól leżących na i powyżej pola (i, j) do pierwszego zabronionego pola (rys. 1). Załóżmy też, że obliczyliśmy stos dla obszaru obejmującego kolumny $1, 2, \dots, j - 1$ oraz symetryczny stos dla kolumn $n, n - 1, \dots, j + 1$, a także usunęliśmy z tych stosów elementy wyższe niż h_2 (zostawiając co najwyżej po jednym elemencie wyższym niż h_2). Wszystkich kandydatów na prawie pusty prostokąt możemy znaleźć podczas usuwania z tych stosów elementów o wysokościach pomiędzy h_2 a h_1 .

Aby uzyskać optymalną złożoność, wykonujemy jedynie dwa przebiegi oryginalnego algorytmu (jeden od lewej do prawej, a drugi od prawej do lewej), spamiętując dla każdej kolumny j listę prostokątów usuwanych ze stosu podczas przetwarzania tej kolumny. Następnie kandydatów na prawie puste prostokąty dla kolumny j uzyskujemy, przeglądając te listy. Dla ustalonego wiersza i praca algorytmu jest ograniczona przez $O(n)$ (tylko tyle elementów będzie na stosie), zatem cały algorytm działa w czasie $O(n^2)$.

złożoność czasowa to $O(fn^2)$. Dla pełności dodajmy, że rozwiązanie randomizowane łatwo uogólnić na przypadek $K > 1$, ale nie będzie to zbyt praktyczne, gdyż f rośnie wtedy wykładniczo względem K .

Aby rozwiązać ogólny przypadek $K \geq 1$, użyjemy metody „dziel i zwyciężaj”. Podzielimy kwadrat poziomą prostą na dwie równe części, w których rekurencyjnie znajdziemy największe prawie puste prostokąty w całości zawarte w tych częściach. Pozostaną do rozważenia prawie puste prostokąty przecinające prostą (rys. 2). Dla każdego $k \leq K$ oraz dla każdej pary kolumn $1 \leq i \leq j \leq n$ znajdziemy wysokość $r_1[k, i, j]$ maksymalnego prostokąta znajdującego się w górnej części, ograniczonego prostą oraz kolumnami i, j i zawierającego k zabronionych pól – nie jest trudno zrobić to w czasie $O(kn^2)$. Następnie zróbmy to samo dla dolnej części, dostając wartości $r_2[k, i, j]$. Maksymalny prawie pusty prostokąt przecinający prostą ma rozmiar $\max_{i,j} (j + 1 - i) \cdot (\max_{k_1+k_2 \leq K} r_1[k_1, i, j] + r_2[k_2, i, j])$.

Jeśli oznaczymy przez $T(n)$ czas działania algorytmu dla kwadratu o boku n , to dostajemy następującą rekurencję: $T(n) = 4T(n/2) + 3O(kn^2)$ (najpierw dzielimy kwadrat na dwie prostokątne części, a potem każdą z nich pionową prostą na dwa kwadraty o bokach $n/2$). Rozwiązanie tej rekurencji (a zatem złożoność czasowa całego algorytmu) to $T(n) = O(kn^2 \log n)$.

Tomasz IDZIASZEK

Szalona Wieża Matematyków czy wirujący obwarzanek

Władze mazowieckiego miasta Ciechanów znalazły w 1970 roku architekta, któremu zleciły zaprojektowanie i nadzór budowlany wieży wyrównującej nazwanej w uproszczeniu wieżą ciśnień. Miała zaopatrywać w wodę pobliski rejon przemysłowy, postawiono ją w najwyższym punkcie miasta (143 m n.p.m.). Architekt nazywa się Jerzy Michał Bogusławski i żeby się nie nudzić, wymyślił budowlę ekonomiczną co do zużycia materiałów i matematycznie piękną (prosimy Czytelników o rozszyfrowanie obu matematycznych form stanowiących wieżę w Ciechanowie). W Ciechanowie jest jeszcze Zamek Książąt Mazowieckich, renesansowy ratusz i średniowieczny kościół, ale to szalona wieża wzbudzała na targach turystycznych w Berlinie największe zainteresowanie.

Zbiornik pomieścić mógł 1500 m³ wody, ale nigdy nie został do końca wypełniony, zmieniły się potrzeby technologiczne i wieża, własność miejskich Zakładów Wodociągów i Kanalizacji, została zostawiona samej sobie i rdzy!

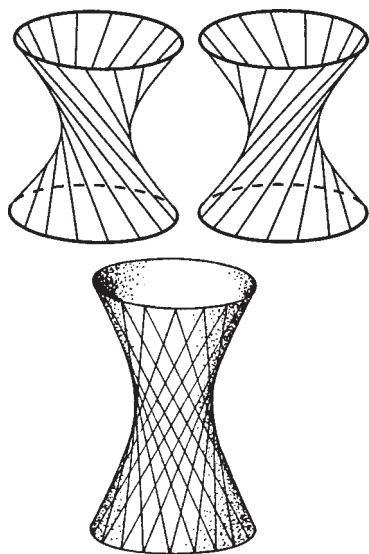
Pamięta o niej jej twórca i oto niedawno zaproponował miastu wersję romantyczną. Zresztą zaczęło się od rankingu portalu *The World Geography*, który umieścił wieżę w Ciechanowie na 5. miejscu najbardziej niezwykłych wież na świecie. Dowiedzieli się o tym także radni ciechanowscy, dowiedzieli mieszkańcy Ciechanowa.

Pan Bogusławski wymyślił, że można by wieżę doprowadzić do stanu używalności i oprócz tarasu widokowego zorganizować w niej, lub obok, Interaktywne Centrum Matematyki. Dla Pana Bogusławskiego jest to zmaterializowana forma matematyki. A bez matematyki współczesnego świata pomyśleć nie można i warto by do tego przekonywać coraz to młodszych obywateli kraju. „Muzeów” matematyki jest na świecie tylko około 20. Te, które istnieją, są bardzo popularne i pozostają w pamięci wizytujących na zawsze! Matematykę można wizualizować formami przestrzennymi (sama pamiętam wspaniałą ekspozycję wielościanów na Warszawskim Festiwalu Nauki), można zadawać ciekawe pytania-zagadki, można namówić dzieci i młodzież do samodzielnego tworzenia interaktywnych eksponatów. Pracownik CNK, Pan Lech Nowicki, wymyślił i NIE OPATENTOWAŁ programu tworzenia podniecających grafik w oparciu o matematyczne nierówności!

Centrum Matematyki byłoby także interesujące dla wizytujących Warszawę uczestników zjazdów i konferencji – odległość 100 km i dobry dojazd w kierunku Warszawa–Gdańsk – sprzyjałyby takiej myśli. Zamek Książąt Mazowieckich oferuje ciekawy program edukacyjny. Niedaleko jest również Muzeum Romantyzmu w Opinogórze. Ciechanów liczy sobie około 40 tys. mieszkańców, są tu szkoły wszystkich poziomów edukacji, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa i wiele szkół na otaczającym miasto Mazowszu.

O istnieniu tej zadziwiającej wieży dowiedziałam się z audycji w radiu RDC. Pojechałam do Ciechanowa, żeby tę wieżę zobaczyć, zaproszona przez Wiceprezydent miasta, Panią Joannę Potocką Rak. Wieża robi wrażenie, krzaki wokół wyrosły na drzewa, podejść blisko nie można (wodociągi), stan nie jest wspaniały, ale też i nie beznadziejny. Natomiast wizyta w Urzędzie Miejskim – ujmująca. Pani Prezydent pełna energii i chętna do podjęcia dyskusji i prac (to ważne). Pan Bogusławski, choć nie młody, także razem z synem, również architektem – rewitalizacją wieży jest zainteresowany. Pani Prezydent pokazuje broszurę z rysunkami – wizualizacją przyszłego projektu. Zbudowałyby taras widokowy na górze, kawiarnię w otoczeniu i wianuszek nowoczesnych pawilonów wystawowych też „w parterze”. Mówi o sobie: *ja się nie poddaję sugestiom, że czegoś zrobić nie można*. Rozmawiamy z zapałem o formie – wieży, muzeum, o ewentualnych kontaktach z Centrum Nauki Kopernik, Wydziałem Matematyki UW.

Magdalena FIKUS



O tej wieży i podobnych konstrukcjach pisaliśmy w *Delcie* 11/2012.

Redakcja

Wieżę można, oczywiście, obejrzeć w Internecie, a krótki film muzyczny nagrany z wieżą w roli głównej w 2008 i znajduje się na youtube.



Więcej szczegółów na stronie
<http://akademia.mini.pw.edu.pl>.



Rok szkolny 2015/2016 na MiNI
Akademii Matematyki rozpocznie się
10 października 2015 roku.

Zapraszamy na stronę konkursu
<http://konkurs.mini.pw.edu.pl>, gdzie
znajduje się regulamin oraz informacje
o poprzednich edycjach.

Kolejna edycja Konkursu rozpocznie się
w listopadzie 2015 roku.

Dla dodatnich liczb rzeczywistych x, y
zachodzi

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

MiNI Matematyka

Jednym z celów statutowych Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej jest wspieranie i rozwijanie zainteresowań młodzieży szkolnej w zakresie matematyki. Realizując ten cel, członkowie Stowarzyszenia aktywnie uczestniczą w różnych działaniach popularyzujących matematykę.

W roku 2010 na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej powstał pomysł zorganizowania zajęć z matematyki dla uczniów szkół warszawskich. Matematycy, którzy podjęli się tego zadania, prowadzili już wcześniej zajęcia oraz indywidualny tutoring w programie „Mazowieckie talenty”, skierowanym do uczniów szkół województwa mazowieckiego. Także szkoły warszawskie zgłaszały zapotrzebowanie na zajęcia popularyzujące matematykę. Projektem prowadzenia zajęć z matematyki dla uczniów zainteresowało się Biuro Edukacji Miasta Stołecznego Warszawy i tak, w dniu 13 marca 2010 roku zainaugurowała swoją działalność MiNI Akademia Matematyki.

Zajęcia z matematyki w ramach MiNI Akademii adresowane są do uczniów szkół ponadgimnazjalnych, nauczycieli i pasjonatów matematyki. Celem tych zajęć jest popularyzacja matematyki, pokazanie jej piękna oraz zachęcenie do studiowania na kierunkach ścisłych i technicznych. Zajęcia odbywają się w niektóre soboty, a każde spotkanie składa się z dwóch części: wykładu, w którym uczestniczy od 80 do 250 uczniów, oraz warsztatów w mniejszych grupach, podczas których uczniowie samodzielnie rozwiązują problemy dotyczące tematyki wykładu. Projekt jest współfinansowany przez Urząd Miasta Stołecznego Warszawy, a zajęcia przygotowują i prowadzą pracownicy, doktoranci oraz studenci Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych. Do tej pory odbyło się prawie 50 wykładów z różnych działów matematyki.

W dniu 15 maja 2015 roku w trakcie Pikniku Naukowego zorganizowanego z okazji 100-lecia odnowienia tradycji Politechniki Warszawskiej odbyła się uroczystość zakończenia roku szkolnego 2014/2015 na MiNI Akademii Matematyki. Wykładu prof. Krzysztofa Chełmińskiego „W geometrii odpowiedni rysunek to połowa sukcesu” wysłuchało ponad 250 uczniów szkół gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych. Po wykładzie Dziekan Wydziału MiNI, prof. Irmiona Herbut, najbardziej aktywnym i wytrwałym uczestnikom zajęć wręczyła dyplomy oraz nagrody książkowe. Dyplomami i honorowymi tytułami wyróżniono też szkoły, których uczniowie byli najaktywniejszymi uczestnikami zajęć MiNI Akademii.

MiNI Akademia Matematyki nie jest jedyną propozycją Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych PW adresowaną do młodzieży szkolnej. Znacznie szerszy, bo ogólnopolski zasięg ma Powszechny Internetowy Konkurs z matematyki. Specyfika tego konkursu polega na tym, że poszczególne etapy uczestnicy pokonują w domu, przy komputerze rozwiązując co najmniej 60 zadań o różnym stopniu trudności. Dopiero runda finałowa odbywa się w kontrolowanych warunkach. W kwietniu 2015 roku odbyły się szesnaste już zawody finałowe.

Poniżej prezentujemy zadanie, które okazało się najtrudniejszym zadaniem ostatniego finału. Poprawnie rozwiązało je zaledwie kilku uczestników.

Zadanie. Niech x, y, z będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Udowodnić, że

$$\frac{x^3}{(x+y)^2} + \frac{y^3}{(y+z)^2} + \frac{z^3}{(z+x)^2} \geq \frac{x+y+z}{4}.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\frac{x^3}{(x+y)^2} = x - \frac{2x^2y + xy^2}{(x+y)^2} = x - \frac{2x+y}{2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}} \geq \frac{x}{2} - \frac{y}{4},$$

przy czym nierówność wynika ze znanej nierówności (na marginesie). Analogicznie

$$\frac{y^3}{(y+z)^2} \geq \frac{y}{2} - \frac{z}{4} \quad \text{oraz} \quad \frac{z^3}{(z+x)^2} \geq \frac{z}{2} - \frac{x}{4}.$$

Dodając teraz trzy otrzymane nierówności stronami, kończymy dowód.

Na koniec zadanie pochodzące z ligi zadaniowej MiNI Akademii Matematyki.

Zadanie. Udowodnić, że nie istnieje 11 liczb pierwszych mniejszych od 20 000, które tworzą ciąg arytmetyczny.

Barbara ROSZKOWSKA-LECH

Nobel za oscylacje neutrin

Takaaki Kajita i Arthur B. McDonald podzielili się tegoroczną Nagrodą Nobla z fizyki przyznaną im „za odkrycie oscylacji neutrin, wskazujących na niezerową masę tych cząstek”.

Nagrodzone prace zostały opublikowane w lecie 1998 roku (zespół Super-Kamiokande [1], udokumentowanie oscylacji tzw. neutrin atmosferycznych; *Delta* 9/1998 i 2/1999) oraz na wiosnę roku 2002 (zespół SNO [2], rozstrzygający dowód istnienia oscylacji tzw. neutrin słonecznych; *Delta* 7/2002). W tym samym 2002 roku przyznano pół Nagrody Nobla z fizyki właśnie fizyce neutrin; *Delta* 1/2003, co sugerowało, że praca [2] nie była bez wpływu na decyzję Komitetu Noblowskiego, choć akurat zespół SNO był jednym z „wielkich pominiętych”. Oficjalnie ta połówka nagrody została przyznana jedynie za „pionierski wkład w astrofizykę, w szczególności za odkrycie neutrin pochodzących z kosmosu”. W rezultacie samo brzmienie tego werdyktu można było uznać za „wzięte z kosmosu”. Chociażby dlatego, że nie nagrodzono wtedy Johna N. Bahcalla, który był głównym autorem rozwijanego przez lata modelu Słońca, nieustannie wskazującego na deficyt neutrin słonecznych, a tym samym wniósł coś istotnego nie tylko do fizyki neutrin, ale również do astrofizyki.

Neutrino są najslabiej oddziałującą formą znanej materii. Od ponad pół wieku zbierane są doświadczenia dowody ich oscylacji, które zachodzą dzięki temu, że stany własne oddziaływania (czyli rodzaje: elektronowy, mionowy oraz taonowy) mogą być (i są) różne od stanów masowych (numerowanych 1, 2 i 3). Powstając, neutrino ma określony rodzaj, ale jest mieszkanką stanów masowych, z których każdy ma inną prędkość fazową, więc neutrino zmieniają swój skład rodzajowy w trakcie lotu.

Jako pierwsza przekonująco udokumentowana została oscylacja tzw. neutrin atmosferycznych, powstających w wyniku oddziaływania promieniowania kosmicznego z atmosferą Ziemi. Produkowanych powinno być dwa razy tyle neutrin mionowych co elektronowych (w rozpadach kaskadowych produkowane są najpierw miony wraz z neutrinem mionowym, a następnie mion rozpada się na elektron, neutrino mionowe i elektronowe), a rejestrowano ich mniej więcej tyle samo.

Decydującego dowodu dostarczyło Super-Kamiokande [1], umieszczony kilometr pod ziemią cylinder wypełniony 50 tysiącami metrów sześciennych bardzo czystej wody i obłożony kilkunastoma tysiącami gigantycznych fotopowielaczy, które rejestrują promieniowanie Czerenkowa pochodzące od naładowanych cząstek poruszających się z prędkością większą od prędkości światła w wodzie. Super-Kamiokande potrafi odróżnić miony od elektronów, a więc przypadki oddziaływań neutrin mionowych od indukowanych przez neutrino elektronowe, szacować energię neutrin oraz w przybliżeniu określać kierunek, z którego nadleciały. Dzięki temu można było pokazać, że cały niedobór przypada na te atmosferyczne neutrino mionowe, które przylatują

od spodu, a produkowane są po drugiej stronie Ziemi. W porównaniu do tych nadlatujących z góry mają wystarczająco dużo czasu, żeby w wyniku oscylacji zamienić się (w znacznej mierze) w neutrino taonowe, które nie może oddziaływać z materią detektora, produkując obserwowalny taon, bo jego masa jest zbyt duża.

Drugą część tegorocznej nagrody przyznano za rozwiązanie zagadki tzw. neutrin słonecznych. Ostatecznego dowodu na rzecz oscylacji dostarczył eksperyment SNO (Sudbury Neutrino Observatory), który działał (1999–2006) dwa kilometry pod ziemią w zarządzanej przez firmę INCO kopalni Creighton niedaleko Sudbury w Ontario (obecnie jest to ośrodek SNOLAB). Detektor wykorzystywał okrągły zbiornik o średnicy 12 metrów napełniony ultraczystą ciężką wodą D₂O. Zbiornik ten był obłożony prawie tysiącem fotopowielaczy, a całość zamurzona w ultraczystej zwykłej wodzie H₂O. Fotopowielacze rejestrowały promieniowanie Czerenkowa tak jak w Super-Kamiokande. Wykorzystanie wypożyczonej przez Kanadę ciężkiej wody pozwalało jednak na rejestrację reakcji $\nu_x + d \rightarrow p + n + \nu_x$, inicjowanej przez neutrino słoneczne pochodzące z przejścia ${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \nu_e$, która równie skutecznie wykrywa wszystkie trzy rodzaje neutrin, w odróżnieniu od wcześniejszych eksperymentów wrażliwych (przy tak małych energiach neutrin) prawie wyłącznie na neutrino elektronowe. Dlatego SNO mogło zmierzyć [2] całkowity strumień neutrin pochodzących z rozpadu boru, a nie tylko strumień docierający w postaci neutrin elektronowych. Okazało się, że brakujące od lat neutrino elektronowe odnalazły się (w zmienionej postaci) wśród pozostałych typów neutrin.

Nagrodzony Artur McDonald kierował SNO od 1990 roku, natomiast Takaaki Kajita był odpowiedzialny za analizę opublikowaną jako [1]. Wśród 121 jej autorów jest jedna (i tylko jedna) osoba z europejską afiliacją – Danuta Kielczewska z Uniwersytetu Warszawskiego. Jej zaangażowanie w eksperymenty neutrinowe z czasem zaowocowało powstaniem prężnie działającej grupy kilkudziesięciu polskich fizyków pracujących w kilku naszych ośrodkach naukowych i uczestniczących w większości współczesnych eksperymentów neutrinowych.

W samej publikacji [1] nie ma wzmianki o roli pełnionej przez laureata tegorocznej nagrody. Komitet Noblowski przytacza jego referat z 1998 roku, w którym wyniki tej analizy zostały przedstawione po raz pierwszy. Ten precedens może się nam (eksperymentatorom fizyki cząstek) przydać. Już nikt nie będzie mógł twierdzić, że publikacja w materiałach konferencyjnych (praktycznie jedyny dla nas sposób na prezentację wyników doświadczeń bez litanii współautorów) nie ma żadnego znaczenia.

Piotr ZALEWSKI

[1] Y. Fukuda *et al.*, *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1562.

[2] Q.R. Ahmad *et al.*, *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 011301.

Wyniki XXXII Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Szczyrk, 4–7 VI 2015

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych przez Jury (wraz z bibliografią) lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim, publicznym zreferowaniu tego opracowania.

Jury w składzie: prof. dr hab. Maciej Sablik – przewodniczący Jury, dr Marian Podhorodyński – zastępca przewodniczącego Jury, dr Tomasz Bielaczyc, dr Anna Bień, dr Paweł Błaszczyk, dr Adrian Brückner, dr Damian Brückner, dr Anna Brzeska, dr hab. Włodzimierz Fechner, dr Paweł Gładki, dr Maria Kania-Błaszczyk, mgr Renata Kawa, dr hab. Janusz Morawiec, dr Jolanta Sobera, dr Anna Szczerba-Zubek, **postanowiło przyznać następujące wyróżnienia**

I miejsce: Dawid Janulek z I LO w Pszczynie za pracę *Teoria grafów*, opiekun: mgr Joanna Szczurek;

II miejsce: Malwina Kubas z VIII LO w Katowicach za pracę *Krzywe stożkowe i ich własności*, opiekunowie: dr Łukasz Dawidowski, mgr Michał Rał;

III miejsce: Jakub Czystczonik z I LO w Prudniku za pracę *Magiczna kostka Rubika*, opiekun: mgr Tomasz Wójtowicz;

IV miejsce: Paweł Pomorski z IV LO w Łodzi za pracę *Własności funkcji Γ Eulera dla dziedziny dodatnich liczb rzeczywistych i niektóre jej zastosowania*, opiekun: mgr Agnieszka Banaśkiewicz.

W głosowaniu publiczności na najlepszą prezentację **nauczyciele nagrodzili Katarzynę Kubik** z I LO w Bygdoszczy za pracę *Komponowanie matematyką*, opiekun: mgr Mariusz Adamczak oraz

Aleksandrę Nowak za pracę *YDCJWC+CÓDIGOS czyli szyfry i kody zagadek CYKADY 3301*, opiekun: mgr Renata Suchanek; a **uczniowie Dawida Janulka i Aleksandrę Nowak**.

Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach we współpracy z Uniwersytetem Śląskim; www.spinor.edu.pl.

Protokół posiedzenia Jury XXXVII Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie: Antoni Leon Dawidowicz – Przewodniczący Jury, Wiktor Bartol, Andrzej Dąbrowski, Marek Kordos, Zdzisław Pogoda, Tadeusz Rzeżuchowski, na posiedzeniu 10 września 2015 roku w Warszawie, po wysłuchaniu prezentacji prac dopuszczonych do finału, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść prac i sposób ich przedstawienia, postanowiło, co następuje:

• **złote medale** i nagrody w wysokości 1200 zł otrzymują *ex aequo* **Tomasz Przybyłowski** z Zespołu Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Gimnazjum i Liceum Akademickie w Toruniu za pracę *O budowaniu na trójkącie* oraz **Michał Zawalski** z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie za pracę *Uogólnione twierdzenie Grünbauma*;

• **srebrne medale** i nagrody w wysokości 900 zł otrzymują *ex aequo* **Filip Rękawek** z Gimnazjum im. C.K. Norwida w Garwolinie za pracę *O równobocznym trójkącie kappa i jego własnościach* oraz **Krzysztof Zamarski** z V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie za pracę *Ciągi komplementarne*;

• **brązowe medale** i nagrody w wysokości 400 zł otrzymują *ex aequo* **Jadwiga Czyżewska** z Gimnazjum nr 13 im. Stanisława Staszica w Warszawie za pracę *Kolorowanie płaszczyzny, prostych, okręgów* oraz **Wojciech Niewiara, Michał Stach** z VII LO im. Zofii Nałkowskiej w Krakowie i **Piotr Sikorski, Tobiasz Szemberg** z Gimnazjum im. Jana Matejki w Zabierzowie za pracę *Kolorowanie płaszczyzny*.

Opiekunowie prac: Jacek Dymel, Aneta Gałkowska, Wojciech Guzicki, Piotr Nayar, Henryk Pawłowski i Tomasz Szemberg otrzymują dyplomy honorowe.

Finałiści i opiekunowie prac otrzymują również nagrody książkowe ufundowane przez Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Wydawnictwo Aksjomat, Wydawnictwo Demart, Wydawnictwo Szkolne Omega oraz Fundację mBanku. (—) podpisy członków Jury

Prace nadsyłane na Konkurs powinny być samodzielnie przygotowanym przez ucznia opracowaniem, zawierającym nowe wyniki lub nowe twórcze ujęcie tematu. Szczegółowy regulamin Konkursu znajduje się na stronie deltami.edu.pl. Termin nadsyłania prac w kolejnej edycji Konkursu to **1 kwietnia 2016 roku**.

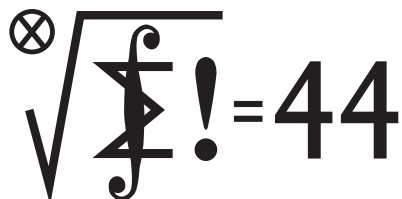
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 29 II 2016

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Zadania z matematyki nr 711, 712

Redaguje Marcin E. KUCZMA

711. Czy istnieje nieskończony ciąg x_1, x_2, x_3, \dots o wyrazach całkowitych dodatnich, w którym każda dodatnia liczba całkowita występuje jednokrotnie, przy czym dla każdego n suma $x_1 + \dots + x_n$ jest podzielna przez n ?

712. Liczby rzeczywiste a, b spełniają równania:

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0, \quad b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0.$$

Obliczyć wartość sumy $a + b$.

Zadanie 712 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
701 ($WT = 1,14$) i 702 ($WT = 3,44$)
z numeru 5/2015

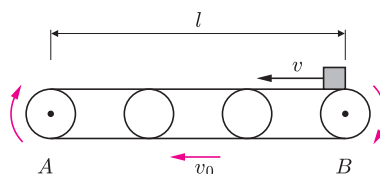
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	38,86
Paweł Najman	Kraków	38,80
Jędrzej Garnek	Poznań	37,64
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Janusz Fiett	Warszawa	34,33
Jerzy Cisło	Wrocław	33,95
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	33,77



Zadania z fizyki nr 608, 609

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

608. Taśma transportera o długości l porusza się z prędkością v_0 . Z jaką prędkością v względem Ziemi należy popchnąć mały klocek z końca transportera przeciwnie do ruchu taśmy, aby ilość ciepła wydzielona w wyniku tarcia klocka o taśmę była największa? Jaka jest wartość tego ciepła, jeżeli współczynnik tarcia wynosi μ i spełniony jest warunek $v_0^2 < 2\mu l g$.



609. W szklance znajdują się dwie niemieszające się ciecze: czterochlorek węgla CCl_4 i woda. Pod ciśnieniem normalnym CCl_4 wrze w temperaturze $76,7^\circ\text{C}$. W wyniku równomiernego ogrzewania szklanki w kąpeli wodnej, w temperaturze $65,5^\circ$ rozpoczyna się wrzenie na granicy rozdziału cieczy. Jaki jest stosunek mas czterochlorku węgla i wody, które wykipią w określonym czasie przy takim „granicznym” wrzeniu? Ciśnienie pary nasyconej wody w temperaturze $65,5^\circ$ wynosi $p_1 = 25,6$ kPa.



Prosto z nieba: Pulsar w centrum Galaktyki

Pulsar jest stabilnie wirującą gwiazdą neutronową otoczoną magnetosferą, w której generowane jest promieniowanie radiowe, rejestrowane w ziemskich obserwatoriach w postaci pulsów. Niezwykła regularność pulsowania czyni z tego typu obiektów cenny przyrząd badawczy. W szczególności zaburzenia cykliczności pulsowania obiektu w układzie podwójnym zdradzają wiele szczegółów na temat układu: masy pulsara i towarzysza, zmiany elementów orbitalnych itd. Jednym z marzeń astrofizyków zainteresowanych testowaniem teorii grawitacji jest obserwacja pulsara w ciasnym układzie podwójnym z czarną dziurą. Gdyby taki układ został odkryty, można by z łatwością i bardzo dokładnie wyznaczyć masę i moment pędu czarnej dziury. Niestety, w obecnie znanych relatywistycznych układach podwójnych z gwiazdami neutronowymi nie ma czarnej dziury – poszukiwania trwają.

Istnieje jednak inny, równie ciekawy przedstawiciel rodziny gwiazd neutronowych znajdujący się blisko czarnej dziury: jest to magnetar i powtarzalne źródło miękkich promieni γ , SGR 1745-2900, znajdujące się w odległości kątowej $2,4''$ (około $0,1$ pc) od galaktycznej czarnej dziury Sgr A*. Pole magnetyczne SGR 1745-2900 jest niezwykle duże nawet jak na gwiazdy neutronowe: $2 \cdot 10^{14}$ G

($2 \cdot 10^{10}$ T), i najprawdopodobniej to ono odpowiada za obserwowane energetyczne rozbłyski γ . Magnetary kręcą się dość wolno (okresy obrotu w przedziale 2–12 s), stopniowo spowalniając obrót przez promieniowanie dipolowe i oddziaływanie pola magnetycznego z otoczeniem. W 2013 roku SGR 1745-2900 zaskoczył obserwatorów *skokowym spowolnieniem* obrotu – podobne zjawiska zwane *glitchami* obserwuje się u młodych pulsarów, jednak w ich przypadku mamy do czynienia ze *skokowym przyspieszeniem* obrotu. Co powoduje nagle zmiany tempa rotacji? Nie do końca to wiadomo: teoretycy spekulują, między innymi, o trzęsieniach gwiazdy, prowadzącymi do przebudowy jej zewnętrznej skorupy i rekonfiguracji pola magnetycznego.

SGR 1745-2900 jest pierwszą gwiazdą neutronową obserwowaną tak blisko centrum Galaktyki (pierwszy rozbłysk został odkryty przez przypadek przez satelitę Swift w 2013 roku, gdy uwaga naukowców skierowana była na pobliski „obłok” G2, przelatujący obok Sgr A*), istnieje więc nadzieja, że centralne części Galaktyki zawierają również zwyczajne pulsary radiowe, które znajdują się jeszcze bliżej czarnej dziury i są dostatecznie jasne, by przydać się do pomiaru jej tempa wirowania, i do innych testów teorii Einsteina.

Michał BEJGER

Niebo w grudniu

Już od czasów starożytnych wierzą, że komety zwiastują nieszczęścia i klęski, np. próbowano wykazać związek pomiędzy śmiercią Juliusza Cezara a pojawieniem się w tamtym okresie komety na niebie. Dziś takie zależności zdecydowanie traktujemy z przymrużeniem oka, zatem śmiało możemy polecić jako atrakcję grudniowego nieba kometa C/2013 US10 Catalina, odkrytą 31 sierpnia 2013 roku w ramach przeglądu nieba Catalina Sky Survey. Dodatkowo symbolem C przed nazwą astronomowie oznaczają komety nieokresowe. Obiekt w momencie odkrycia miał jasność 19^m , a odkrycia dokonano teleskopem o średnicy 70 centymetrów. Kometa Catalina przejdzie najbliżej Ziemi 17 stycznia 2016 roku i jej największa jasność powinna wtedy osiągnąć około $9,5^m$. W związku z tym zdecydowanie jest to cel obserwacyjny dla posiadaczy lornetek. Niemniej jednak prawdziwa jasność Cataliny jest bardzo trudna do oszacowania, gdyż będzie to jej pierwsze zbliżenie do Ziemi po podróży z odległego Obłoku Oorta. Kometę będzie można dostrzec nad południowo-wschodnim horyzontem, na tle gwiazdozbioru Panny.

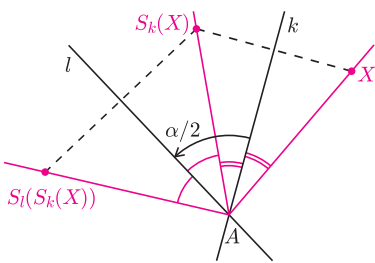
22 XII rozpoczyna się kalendarzowa zima, okres ten jest zatem najlepszym czasem do długich nocnych kampanii obserwacyjnych. Dla osób, które chcą wykonać obserwacje z użyciem lornetek (małych lunetek, teleskopów), polecamy planetoidy. Ponieważ nów Księżyca przypada na 11 XII, więc początek miesiąca będzie stanowić

szpryjący czas do wykonania obserwacji planetoidy (16) Psyche, której maksymalna jasność będzie wynosić około $9,4^m$ (w nocy 7 XII). Psyche leży w Pasie Głównym Planetoid, czyli w obszarze pomiędzy orbitami Marsa i Jowisza. Planetka, której imię pochodzi od jednej z nimf greckich, stanowi jeden z większych (średnica ≈ 230 km) obiektów Pasa Głównego, a jej duża gęstość i metaliczne jądro powodują, że astronomowie żartobliwie określają ją „wielkim magnesem lodówkowym”. Właśnie ten nietypowy metaliczny skład, odkryty za pomocą obserwacji radarowych spowodował, że NASA rozważyła misję kosmiczną na powierzchnię Psyche. Planetoida będzie widoczna na tle gwiazdozbioru Byka na wschodnim niebie (współrzędne RA: 5 h 07' Dec: $18^\circ 09'$).

Już 7 XII będziemy mieli okazję do podziwiania na porannym niebie duetu Księżyca z Wenus. Planeta znajdzie się w odległości zaledwie $0,7^\circ$ od Księżyca (czyli w odległości mniej więcej równej rozmiarowi Księżyca) w kierunku południowym, a jej jasność wyniesie $-4,2^m$. Tę przepiękną parę będzie można zaobserwować na południowym horyzoncie na tle gwiazdozbioru Panny.

Na koniec rzecz niezbędna dla czekających na „pierwszą gwiazdkę”. 24 grudnia ten przywilej należeć będzie do Kapelli (α Aurigæ) wschodzącej tuż przed godziną 16:00, w gwiazdozbiorze Woźnicy nad wschodnim horyzontem.

Karolina BĄKOWSKA

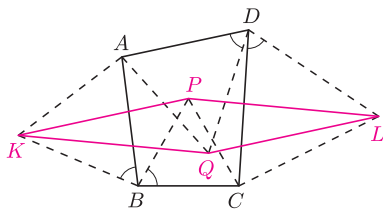


Rys. 1. $R_A^\alpha = S_l \circ S_k$, gdzie \circ oznacza złożenie (najpierw stosujemy przekształcenie z prawej strony), a S_x to symetria względem prostej x .

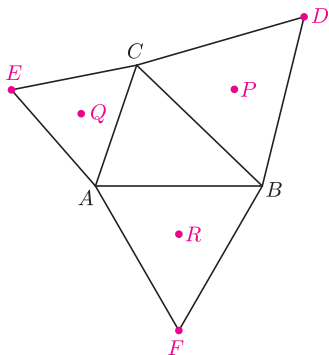
Składanie przekształceń jest **łączne**: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Kąty mierzymy antyżegarowo. We wszystkich rozwiązaniach przyjmujemy taką orientację figur, jaką przedstawiono na rysunkach.

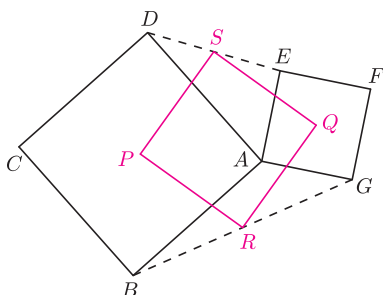
Więcej o składaniu symetrii osiowych przeczytać można w *Delcie* 11/2015.



Rys. 3. $KQLP$ jest równoległobokiem (być może zdegenerowanym).



Rys. 4



Rys. 5

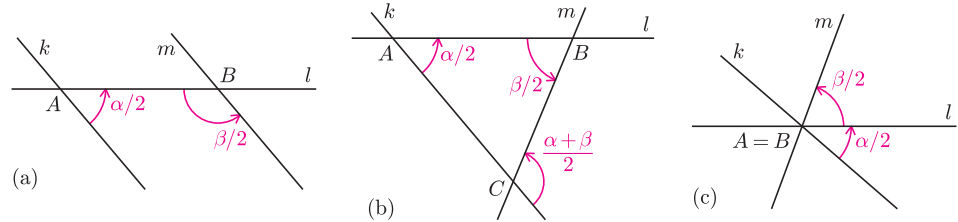
O obrotach

Joanna JASZUŃSKA

Na płaszczyźnie obrót wokół punktu A o kąt $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ (ozn. R_A^α) jest złożeniem dwóch symetrii osiowych (rys. 1). Utożsamiamy obroty o $\alpha + 360^\circ$ i o α .

Fakt (*). Dane są kąty $0^\circ \leq \alpha, \beta < 360^\circ$. Złożenie $R_B^\beta \circ R_A^\alpha$ jest:

- przesunięciem (być może o wektor zerowy), jeśli $\alpha + \beta = 0^\circ$ lub $\alpha + \beta = 360^\circ$,
- obrotom o kąt $\alpha + \beta$ w przeciwnym przypadku.



Rys. 2. Jeśli $k \parallel m$, to $S_m \circ S_k$ jest przesunięciem, a jeśli $k = m$ – identycznością (ozn. Id).

Dowód. W każdym przypadku wybieramy osie symetrii k, l, m jak przedstawiono na rysunku 2 i uzyskujemy $R_B^\beta \circ R_A^\alpha = S_m \circ S_l \circ S_l \circ S_k = S_m \circ S_k$, co w zależności od wzajemnego położenia prostych k i m daje odpowiednie przekształcenia. \square

1. Na bokach czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne ABK, CDL, BCP i DAQ , pierwsze dwa z nich na zewnątrz czworokąta, pozostałe dwa – do wewnątrz. Wykaż, że $KQ = PL$ oraz $KQ \parallel PL$.

2. Na bokach trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, trójkąty równoboczne ABF, BCD, CAE . Skonstruuj trójkąt ABC , mając dane tylko punkty D, E, F .

Fakt ().** Kąty $0^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 360^\circ$ dają w sumie 360° . Jeśli różne punkty A, B, C spełniają warunek $R_C^\gamma \circ R_B^\beta \circ R_A^\alpha = \text{Id}$, to tworzą trójkąt o kątach odpowiednio $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$.

Dowód można odczytać z rysunku 2(b). \square

3. Udowodnij twierdzenie Napoleona: Na bokach trójkąta zbudowano, na zewnątrz, trójkąty równoboczne. Wówczas ich środki tworzą trójkąt równoboczny.

4. Dany jest punkt P_0 i trójkąt ABC . Niech $P_1 = R_A^{120^\circ}(P_0), P_2 = R_B^{120^\circ}(P_1), P_3 = R_C^{120^\circ}(P_2), P_4 = R_A^{120^\circ}(P_3)$ itd. Udowodnij, że jeżeli $P_{300} = P_0$, to trójkąt ABC jest równoboczny.

5. Kwadraty $ABCD$ i $AEFG$ o środkach odpowiednio P i Q są tak samo zorientowane i mają rozłączne wnętrza. Punkty R i S są środkami odpowiednio odcinków BG i DE . Wykaż, że czworokąt $PRQS$ jest kwadratem.

Rozwiązania

R1. Niech $f = R_D^{60^\circ} \circ R_B^{300^\circ}$ (rys. 3). Na mocy (*) jest to przesunięcie, ponadto $f(K) = R_D^{60^\circ}(R_B^{300^\circ}(K)) = R_D^{60^\circ}(A) = Q$ i analogicznie $f(P) = L$. Oznacza to, że $\vec{KQ} = \vec{PL}$ (jest to wektor przesunięcia f), co kończy dowód. \square

R2. Niech $f = R_F^{60^\circ} \circ R_D^{60^\circ} \circ R_E^{60^\circ}$ (rys. 4). Na mocy (*) jest to obrót o 180° . Skoro $f(A) = R_F^{60^\circ}(R_D^{60^\circ}(R_E^{60^\circ}(A))) = R_F^{60^\circ}(R_D^{60^\circ}(C)) = R_F^{60^\circ}(B) = A$, to A jest punktem stałym (środkiem) tego obrotu, czyli $f = R_A^{180^\circ}$.

Rozważmy dowolny punkt X i wyznaczmy $f(X)$. Wówczas otrzymujemy kolejno: A jako środek odcinka o końcach X i $f(X)$, $C = R_E^{60^\circ}(A)$, $B = R_D^{60^\circ}(C)$. \square

R3. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 4 i niech $f = R_P^{120^\circ} \circ R_Q^{120^\circ} \circ R_R^{120^\circ}$. Na mocy (*) jest to przesunięcie. Ponieważ $f(B) = B$, to wektor przesunięcia jest zerowy, czyli $f = \text{Id}$. Zatem na mocy (**) trójkąt PQR jest równoboczny. \square

R4. Niech $f = R_C^{120^\circ} \circ R_B^{120^\circ} \circ R_A^{120^\circ}$. Na mocy (*) jest to przesunięcie. Z treści zadania wynika, że $f^{100}(P_0) = P_{300} = P_0$, stąd wektor przesunięcia jest zerowy, czyli $f = \text{Id}$. Wobec tego na mocy (**) trójkąt ABC ma kąty równe 60° . \square

R5. Niech $f = R_R^{180^\circ} \circ R_Q^{90^\circ} \circ R_P^{90^\circ}$ (rys. 5). Na mocy (*) jest to przesunięcie; $f(B) = B$, więc $f = \text{Id}$. Na mocy (**) trójkąt PQR jest prostokątny i $PR = QR$. Tak samo dowodzimy, że trójkąt PQS jest drugą połową kwadratu $PRQS$. \square