



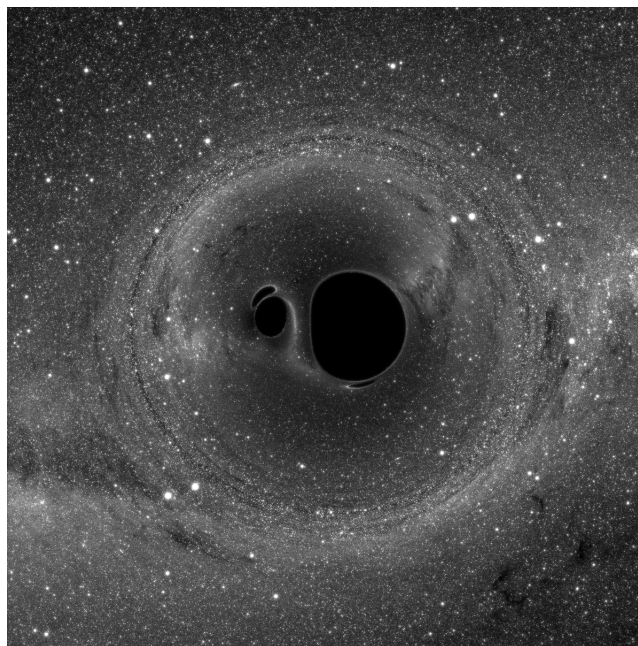


## SPIS TREŚCI NUMERU 11 (498)

|   |        |
|---|--------|
| O obrotach figur płaskich<br><i>Marek Kordos</i>  | str. 1 |
| Prawdopodobieństwo<br>a informacja<br><i>Piotr Migdal</i>   | str. 2 |
| 7. Międzynarodowy Turniej<br>Fizyków<br><i>Jan Stefan Białowicz</i>   | str. 4 |
| Gruba soczewka<br><i>Filip Czerwiński,<br/>Marlena Maćkowiak,<br/>Antoni Nuszkiewicz,<br/>Kacper Raciborski,<br/>Paweł Suchomski,<br/>Paweł Szczypkowski,<br/>Jan Białowicz,<br/>Piotr Podlaski</i> | str. 5 |
| Zliczamy skojarzenia (II).<br>O planarności i algorytmie FKT<br><i>Tomasz Idziaszek</i>   | str. 8 |
| RROważania O RReszce<br>i ORRle<br><i>Łukasz Rajkowski</i>  | str.10 |
|  Zadania   | str.11 |
|  Czerwony Kapturek<br><i>Kamila Łyczek</i>   | str.12 |
|  Warto debatować...<br>po oksfordzku<br><i>Magdalena Fikus</i>   | str.15 |
| Rzut butem, czyli twierdzenie<br>Chaslesa<br><i>Marek Kordos</i>  | str.16 |
| Czekanie na renesans  | str.19 |
| Informatyczny kącik olimpijski<br>(87): Zliczamy puste prostokąty<br><i>Tomasz Idziaszek</i>  | str.20 |
| Aktualności   | str.22 |
| Klub 44   | str.23 |
| Prosto z nieba:<br>Prawie błysk   | str.24 |
| Niebo w listopadzie   | str.24 |
|  Mały wybór? I dobrze!<br><i>Joanna Jaszewska</i>  | str.25 |

W następnym numerze polecamy 100 lat ogólnej teorii względności



Tak wyglądałaby Droga Mleczna widziana przez parę zlewających się czarnych dziur.

(źródło: <http://www.black-holes.org/lensing>)

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.  
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2015 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–17<sup>00</sup>.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

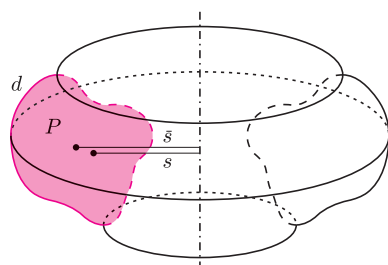
**Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):** [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**

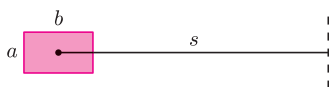
## O obrotach figur płaskich

W 1641 roku ukazały się *Centrobaryca* Paula Guldina, a w nich twierdzenie znane dziś jako **reguły Guldina**. Oto ono.



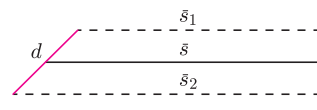
*Jeśli figurę płaską  $\mathcal{F}$  o polu  $P$  i obwodzie  $d$  będziemy obracali wokół osi niemającej punktów wspólnych z wnętrzem  $\mathcal{F}$  i leżącej w tej samej co ona płaszczyźnie, to powstała bryła będzie miała objętość  $2\pi sP$  i pole powierzchni  $2\pi \bar{s}d$ , gdzie  $s$  i  $\bar{s}$  to, odpowiednio, odległość środka ciężkości pola i środka ciężkości brzoju  $\mathcal{F}$  od osi.*

Guldin uzasadnił je, sprawdzając, że z objętością tak jest, gdy obracamy prostokąt o boku równoległym do osi obrotu, a z polem powierzchni – gdy obracamy odcinek.



Z obracania prostokąta otrzymamy walec o promieniu  $s + b/2$  z wyciętym walcem o promieniu  $s - b/2$ , czyli bryłę o objętości

$$\begin{aligned} \pi a(s + b/2)^2 - \pi a(s - b/2)^2 &= \\ &= \pi a(s + b/2 + s - b/2)(s + b/2 - s + b/2) = 2\pi sab. \end{aligned}$$



Z obracania odcinka otrzymamy stożek ścięty (lub walec) o polu powierzchni bocznej

$$\pi d(\bar{s}_1 + \bar{s}_2) = 2\pi d \frac{\bar{s}_1 + \bar{s}_2}{2} = 2\pi \bar{s}d.$$

A potem stwierdził, że pole powierzchni można z dowolną dokładnością przybliżyć prostokącikami, a obwód odcinceczkami i sprawdził, że środki ciężkości przy takim przybliżaniu zachowują się jak należy.

W niektórych książkach można znaleźć uogólnienie reguł Guldina, które przypisuje się żyjącemu 1300 lat wcześniej Pappusowi. W myśl tego uogólnienia można nie tylko mówić o obrotach, ale też o dowolnym ruchu. Wtedy we wzorach należy zastąpić  $2\pi s$  i  $2\pi \bar{s}$ , odpowiednio, przez drogę środka ciężkości powierzchni i drogę środka ciężkości brzoju  $\mathcal{F}$ .

Faktycznie, np. dla przesunięcia w kierunku prostopadłym do płaszczyzny figury  $\mathcal{F}$  tak jest. I jeszcze w bardzo wielu przypadkach. Ale twierdzenia matematyki muszą być spełnione we wszystkich dopuszczonych przez założenia sytuacjach. A tu tak nie jest.

Czytelnik Ambitny znajdzie przykłady przeczące tak śmiało uogólnieniu, a nawet wskaże, jak należałoby wzmocnić założenia, by uogólnienie uratować. Mniej ambitny znajdzie odpowiedź w numerze.

A my wróćmy do oryginalnych reguł Guldina, by obliczyć objętość i pole powierzchni torusa. Torus to bryła powstała w wyniku obracania koła wokół prostej leżącej w jego płaszczyźnie i niemającej z tym kołem punktów wspólnych. Środek ciężkości powierzchni koła jest też środkiem ciężkości ograniczającego je okręgu – to środek koła (gdyby było inaczej, obracając koło, otrzymalibyśmy wiele środków ciężkości). Zatem (patrz rysunek)  $s = \bar{s} = R$ , pole obracanego koła to  $\pi r^2$ , a długość ograniczającego je okręgu to  $2\pi r$ . Mamy więc

$$V_{\text{torusa}} = 2\pi R\pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2, \quad S_{\text{torusa}} = 2\pi R2\pi r = 4\pi^2 Rr.$$

A na zakończenie zagadka: przyjrzyjmy się półkolu – czy bliżej odcinającej je średnicy leży środek ciężkości powierzchni półkola, czy też ograniczającego je półokręgu? Zapytajmy o to kolegów, a sami obliczmy.

Z obracania półkola względem odcinającej go średnicy otrzymujemy kulę – jej objętość to  $\frac{4}{3}\pi r^3$ , a pole powierzchni to  $4\pi r^2$ . Z reguł Guldina mamy więc

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r^3 &= 2\pi s \frac{1}{2}\pi r^2, \quad \text{zatem} \quad s = \frac{4}{3\pi}r, \\ 4\pi r^2 &= 2\pi \bar{s}\pi r, \quad \text{zatem} \quad \bar{s} = \frac{2}{\pi}r. \end{aligned}$$

A więc środek ciężkości półkola leży bliżej średnicy niż środek półokręgu. Czy koledzy zgadli?

Marek KORDOS

# Prawdopodobieństwo a informacja

Piotr MIGDAŁ\*

\*ICFO–The Institute of Photonic Sciences, Castelldefels (Barcelona), obecnie freelancer z analizy danych <http://migdal.wikidot.com>

Filozof może się zadowolić tym, że „*wie, że nic nie wie*”. Fizyk zaś potrzebuje wiedzieć, *ile* nie wie.

Pojęcie *entropii* ma swoje źródło w termodynamice i jest związane z tym, jak bardzo nie znamy dokładnego mikrostanu układu. Tylko gdy wiemy o nim wszystko, możemy w pełni wykorzystać jego energię, przekształcając ją na inne formy. Gdy nie – część energii pozostaje niejako uwięziona.

Entropia jest równie cenna w teorii informacji – pozwala ściśle zmierzyć, jak dobrze możemy skompresować daną wiadomość oraz jak bardzo możemy niwelować szum przy jej przesyłaniu. Przydaje się ona również jako miara losowości i korelacji w różnych narzędziach statystycznych.

O ile entropia jest używana w języku potocznym jako chaos i nieuporządkowanie, to sama wielkość (a konkretniej, *entropia Shannona*) jest ściśle określona następującym wzorem:

$$(*) \quad H(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i \log\left(\frac{1}{p_i}\right),$$

gdzie  $p_1, \dots, p_n$  są prawdopodobieństwami możliwych wyników przeprowadzanego eksperymentu. Będziemy używać logarytmu o podstawie 2, co odpowiada mierzeniu entropii w *bitach*. Powyższy wzór ma wiele zastosowań i interpretacji.

Ale zanim do nich przejdziemy, spójrzmy na kilka prostych przykładów. Gdy mamy jedną możliwość, entropia wynosi  $1 \log(1) = 0$  – wszak nie ma tu miejsca na losowość. Gdy rzucamy uczciwą monetą, entropia to  $\frac{1}{2} \log(2) + \frac{1}{2} \log(2) = 1$ . Entropia jest największa, gdy dla ustalonej liczby zdarzeń wszystkie są równoprawdopodobne – wtedy wynosi ona  $\log(n)$ . Dla kostki do gry z 6 ścianami to  $\log(6) \approx 2,6$ .

Warto pamiętać, że entropia jest zawsze miarą niewiedzy. Stąd np. kostka, na której widzimy wyrzucone dwa oczka, ma entropię zero. Dowiadujemy się dokładnie tyle, o ile entropia zmalała, tu:

$$H\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) - H(0, 1, 0, 0, 0, 0) = \log(6) - \log(1) \approx 2,6.$$

Gdyby ktoś nam powiedział „wypadło jedno, dwa lub trzy oczka”, nasza wiedza końcowa byłaby niepełna i dowiedzielibyśmy się  $\log(6) - \log(3)$ , czyli 1 bit informacji.

Dlaczego potrzebujemy w tym wzorze logarytmu? Gdy mamy dwa niezależne zdarzenia, chcemy, by ich entropia była sumą entropii składników. Powiedzmy, że chcemy dowiedzieć się, jaki jest znak zodiaku naszego obiektu westchnień oraz czy nas kocha. Nie powinno grać roli, czy dowiemy się jednej informacji naraz czy po kawalku. Oznaczmy prawdopodobieństwa znaków zodiaku jako  $p_1, \dots, p_{12}$  oraz uczucie do nas jako  $q_1, q_2$ . Tym samym prawdopodobieństwa poszczególnych, niezależnych zdarzeń to iloczyny  $p_i q_j$ . Zatem jak jest z entropią?

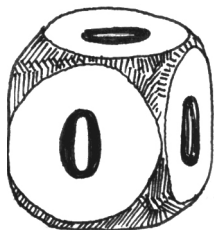
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^2 p_i q_j \log(1/(p_i q_j)) &= \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^2 p_i q_j (\log(1/p_i) + \log(1/q_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^2 p_i q_j \log(1/p_i) + \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^2 p_i q_j \log(1/q_j) \\ &= \sum_{i=1}^{12} p_i \log(1/p_i) + \sum_{j=1}^2 q_j \log(1/q_j), \end{aligned}$$

zatem entropia niezależnych zdarzeń dodaje się. W szczególności:  $n$  rzutów uczciwą monetą to  $n$  bitów entropii.

Na wzór na entropię Shannona można patrzeć również jak na średnią uzyskaną informację. Zobaczmy to na przykładzie gry w *dwadzieścia pytań*, w której jedna

Częściej zapisujemy  $H$  jako  $-\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$ , równoważnie, ale, moim zdaniem, mniej dydaktycznie.

Korzystanie z logarytmu o innej podstawie, np. logarytmu naturalnego powoduje przemnożenie wyniku przez stałą, a zatem odpowiada tylko zmianie jednostek:  $\ln(x) = \ln(2) \log_2(x)$ . Np. dla podstawy  $e$  jednostką jest *nit*.



Czytelnikowi, który zastanawia się, czy owe dane są niezależne, polecam zapoznać się z <http://bit.ly/dating-zodiac>.

Czytelnik Wnikliwy może sprawdzić, że  $-\log \sum_{i=1}^n p_i^2$  również ma opisaną obok własność addytywności. Ma ją także cała rodzina *entropii Rényiego*, będących uogólnieniem entropii Shannona, przy czym nie mają one interpretacji jako informacja.



### Rozwiązanie zadania M 1475.

Ponieważ  $\phi$  jest różnowartościowa, to dla każdego  $k \geq 1$  spełniona jest nierówność

$$\sum_{i=1}^k \phi(i) \geq 1 + 2 + \dots + k.$$

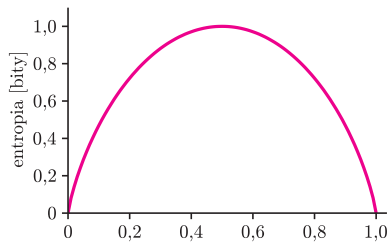
Oznacza to, że liczby

$$s_k = \sum_{i=1}^k (\phi(i) - i)$$

są nieujemne. Niech  $a_i = \phi(i) - i$  oraz  $b_i = 1/i^2$ . Stosując przekształcenie Abela, otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &= \\ &= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + \\ &\quad + (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) + \dots + \\ &\quad + (a_1 + \dots + a_{n-1})(b_{n-1} - b_n) + \\ &\quad + (a_1 + \dots + a_n)b_n = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} s_i(b_i - b_{i+1}) + s_n b_n. \end{aligned}$$

Prawa strona tej równości jest nieujemna, zatem lewa też. Stąd bezpośrednio wynika teza.



Entropia przy dwóch możliwościach,  $H(p, 1-p)$ , np. rzutu nieuczciwą monetą ( $p$  to prawdopodobieństwo orła) lub odpowiedzi na pytanie ( $p$  to prawdopodobieństwo „tak”). Maksimum, równe 1 bitowi, osiąga dla  $p = 1/2$ .

Pozwolę sobie zachęcić Czytelnika do doświadczalnego zmierzenia (na znajomych) entropii pytań oraz entropii pomyslnych obiektów.

### Odpowiedź na pytanie ze strony 1

Nie spełnia rzekomej reguły Pappusa np. koło obracane względem swojej średnicy – ponieważ środek ciężkości nie rusza się, kula musiałaby mieć zarówno objętość, jak i pole powierzchni równe zeru.

Wystarczającym założeniem, by reguła Pappusa była twierdzeniem, jest wymaganie, by podczas ruchu żaden z punktów nie był odwiedzony dwukrotnie.

osoba wymyśla jakąś rzecz, a druga ma za zadanie zgadnąć, o co chodzi, zadając po kolei pytania na „tak” lub „nie”. Można się zastanowić, czy warto zadawać pytania, które są z grubsza *pół na pół* (np. „Czy to jest żywe?”), czy też takie, w których jest niewielka szansa, że dużo się rozjaśni (np. „Czy to element biżuterii?”).

Powiedzmy, że na starcie jest  $m$  możliwych obiektów i każdy z nich jest równoprawdopodobny. Jeśli zadamy pytanie, dla  $t$  obiektów odpowiedzią jest „tak”, dla  $m - t$  pozostałych – „nie”. Wiąże się to bezpośrednio z prawdopodobieństwami odpowiedzi:

$$p_{\text{tak}} = \frac{t}{m}, \quad p_{\text{nie}} = \frac{m-t}{m}.$$

Zatem po uzyskaniu odpowiedzi zbiór możliwych obiektów zmniejsza się do  $p_{\text{tak}}m$  albo  $p_{\text{nie}}m$ . Po zadaniu dwóch pytań (dla uproszczenia przyjmując, że po zadaniu pierwszego drugie ma to samo prawdopodobieństwo udzielenia twierdzącej odpowiedzi) dostajemy 4 możliwości:  $p_{\text{tak}}p_{\text{tak}}m$ ,  $p_{\text{nie}}p_{\text{tak}}m$ ,  $p_{\text{tak}}p_{\text{nie}}m$  albo  $p_{\text{nie}}p_{\text{nie}}m$ . Wygramy w sytuacji, gdy po iluś pytaniach zredukujemy liczbę możliwości do tylko jednej. O ile może być w tym trochę szczęścia, to przy większej liczbie pytań (a mamy do dyspozycji ich aż 20), możemy śledzić, co się *średnio* stanie. Skoro przy dodawaniu kolejnych pytań prawdopodobieństwa się mnożą, to wielkością, którą chcemy uśredniać, jest wspomniany logarytm prawdopodobieństwa. Po jednym pytaniu dostajemy

$$H(p_{\text{tak}}, p_{\text{nie}}) = p_{\text{tak}} \log\left(\frac{1}{p_{\text{tak}}}\right) + p_{\text{nie}} \log\left(\frac{1}{p_{\text{nie}}}\right),$$

– to samo co (\*). Po zadaniu  $k$  pytań dowiadujemy się średnio  $kH$  bitów informacji. Wielkość ta to  $\sum_p p \log(1/p)$ , gdzie  $p$  jest prawdopodobieństwem uzyskania poszczególnego ciągu odpowiedzi. Jeśli jej wartość dojdzie do  $\log(m)$ , to średnio  $p = 1/m$ , a zatem liczba możliwych obiektów zostanie zredukowana do jednej, czyli: zgadliśmy! Gdy zadamy pytanie *pół na pół*, to niezależnie od odpowiedzi dowiadujemy się  $\log 2$  czyli 1 bit informacji. A co gdy, powiedzmy, zadamy pytanie, na które prawdopodobieństwo odpowiedzi „tak” jest równe tylko  $1/1000$ ? Jest niewielka szansa, że dowiemy się bardzo dużo ( $\log(1000) \approx 10$ ), ale najprawdopodobniej dowiemy się niezbyt wiele. A sumarycznie, będzie lepiej czy gorzej? Zobaczmy!

$$0,001 \log\left(\frac{1}{0,001}\right) + 0,999 \log\left(\frac{1}{0,999}\right) \approx 0,0100 + 0,0014 = 0,0114,$$

czyli bardzo niewiele! Zresztą, *pół na pół* średnio dostarcza najwięcej informacji – patrz wykres na marginesie.

Entropia jest też mocno związana z tym, jak dobrze potrafimy skompresować dane. *Podstawowe twierdzenie Shannona* mówi, że jeśli mamy ciąg  $n$  liter, każda niezależna od innych i z entropią  $H$ , to nie możemy ich skompresować do długości krótszej niż  $nH$ . Choć stoją za tym pewne szczegóły techniczne, główną ideę można oddać, zliczając ciągi. Liczba słów o długości  $n$  z alfabetu z  $d$  literami to  $d^n = 2^{n \log(d)}$ . Jeśli chcielibyśmy zakodować owe słowa za pomocą zer i jedynek tak, by każde słowo miało swój kod binarny, potrzebujemy  $m = n \log(d)$  bitów. A co, jeśli nie wszystkie litery są równie często używane?

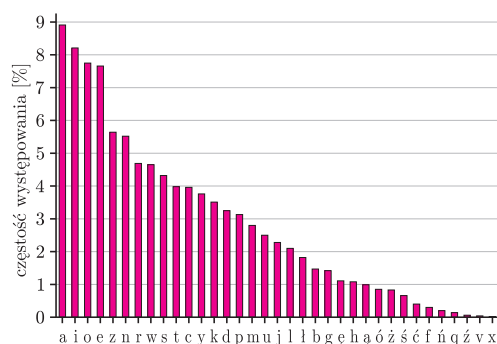
Gdy przesyłamy wiele liter, niektóre ciągi staną się skrajnie mało prawdopodobne. Dla ustalenia uwagi, zróbmy to na ciągu z zer i jedynek, z prawdopodobieństwami  $p$  i  $q$ , odpowiednio. Typowy ciąg o długości  $n$  będzie miał  $np$  zer i  $nq$  jedynek. Prawdopodobieństwo tego ciągu to  $p^{np}q^{nq}$ . O ile, rzecz jasna, często można otrzymać ciągi z mniejszą lub większą liczbą zer i jedynek, to czym dłuższy ciąg, tym udział zer i jedynek będzie się bardziej zbliżał do  $p$  i  $q$ , odpowiednio; innych ciągów jest skrajnie niewiele. Skoro typowe ciągi są mniej więcej równoprawdopodobne, a całkowite prawdopodobieństwo musi się sumować do jedności, to liczba tych typowych ciągów to około  $p^{-np}q^{-nq}$ . Czyli potrzebujemy

$$m = n \left( p \log\left(\frac{1}{p}\right) + q \log\left(\frac{1}{q}\right) \right)$$

bitów do ich opisu. Przy obliczaniu prawdopodobieństwa jesteśmy dość liberalni – wszak np. dla  $p = 0,8$  i  $q = 0,2$  zamiana nawet jednego znaku zmienia



Na zachętę (gzip, kody i poezja):  
<http://jvns.ca/blog/2015/02/22/how-gzip-uses-huffman-coding/>.  
 Dla zainteresowanych: J. Thomas,  
 T. Cover, *Elements of Information Theory*.



Čzęstość występowania liter w języku polskim,  
 na podstawie Korpusu IPI PAN.

prawdopodobieństwo o czynnik 4. Niemniej, jest to kompensowane przez niewielkie zmiany  $n$  (czasem potrzeba kilku mniej lub więcej bitów do zakodowania owego ciągu). Innymi słowy, liczba typowych ciągów zer i jedynek rośnie jak  $2^{nH}$ .

Zastosowania? Zobaczmy, jak dobrze można skompresować tekst!

W języku polskim używa się 35 liter (wliczając q, x i v z zapożyczonych słów). Jednak niektóre litery występują znacznie częściej niż inne, np. a stanowi 9% liter, podczas gdy ż – tylko 0,06%. Możemy obliczyć, że entropia liter to 4,56 bitów. Dla porównania, taką samą entropię jak litery w języku polskim miałyby hipotetyczny język z tylko  $2^{4,56} \approx 24$  równo występującymi literami. Ale jak to się ma do kompresji? Porównując entropię z  $\log(35)$ , możemy zobaczyć, że, gdy znamy częstość znaków, potrafimy skompresować tekst do 89% objętości. W praktyce kompresja tekstu jest znacznie lepsza – zarówno dlatego, że nieskompresowany znak zwykle zajmuje 8 bitów (tu możemy kompresować do 57%), jak i to, że znaki nie są losowe, tj. łączą się w sylaby, słowa, a te – w teksty, które często używają podobnych słów.

Jako autor wiem, że ten tekst był *skompresowany*, ale, mam nadzieję, przekazał jakąś *informację* o entropii.

## 7. Międzynarodowy Turniej Fizyków

W dniach 6–11 kwietnia 2015 roku Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego był gospodarzem prestiżowych zawodów 7. Międzynarodowego Turnieju Fizyków, w którym brały udział reprezentacje 11 krajów z całego świata. Turniej wygrała reprezentacja Ukrainy z Charkowskiego Uniwersytetu Narodowego im. Wasyla Karazina, drugie miejsce zajęli studenci Duńskiego Uniwersytetu Technicznego (DTU), a trzecie reprezentacja Francji z École Polytechnique.

Międzynarodowy Turniej Fizyków to zawody skierowane do studentów, mające na celu rozwój naukowy uczestników przez pracę w grupie, tworzenie prezentacji naukowych, ich wygłaszanie, merytoryczne krytykowanie oraz odpieranie krytyki.

W tym roku studenci z Chin, Danii, Francji, Iranu, Rosji, Singapuru, Szwecji, Szwajcarii, Ukrainy, Wielkiej Brytanii i Polski przez cały rok poprzedzający zawody rozwiązywali 17 niecodziennych problemów fizycznych, np. czy można woltomierzem określić, czy ziemniak jest już ugotowany, dlaczego wstążka, po której przeciągnię się ostrzem, zaczyna się skręcać albo jak zmienia się kolor kamieni, gdy spadnie na nie deszcz. Zawody mają formę specyficznej konferencji naukowej, a poszczególne drużyny odgrywają role referentów, oponentów i recenzentów. Wybrany spośród członków drużyny referent prezentuje zagadnienia wybrane przez drużynę oponentów. Następnie po wygłoszonej prezentacji rozpoczyna się dyskusja, w której oponenti wskazują mocne i słabe strony prezentacji, punktują

nieścisłości, dążąc do lepszego zrozumienia omawianego rozwiązania. Następnie recenzenci oceniają dyskusję, wskazują, które aspekty prezentacji zostały należycie przedyskutowane, które zostały niesłusznie pominięte, a które fragmenty wymagały większej uwagi. Po około godzinnej zaciętej dyskusji, w której nie brak kąśliwych uwag i ciętych ripost, jury zaczyna zadawać dociekliwe pytania wszystkim występującym na polu walki, a na koniec wystawia oceny. Po krótkiej przerwie drużyny zamieniają się rolami i zaczyna się kolejna rozgrywka. Zawody są niezwykle emocjonujące, o czym świadczy to, że wielu widzów, którzy przyszli tylko na moment, żeby zobaczyć, na czym polega Turniej, zostawało do końca zawodów.

Nieskromnie mówiąc, zagraniczni goście byli pod wrażeniem nowej siedziby Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz poziomu organizacji Turnieju. Poza zawodami uczestnicy, dzięki współpracy z Urzędem M. St. Warszawy, Tramwajami Warszawskimi, Fundacją Universitatis Varsoviensis i Kancelarią Prezydenta RP, mieli możliwość zwiedzania muzeów, Warszawy, poznawania miasta podczas pieszych spacerów oraz przejażdżek tramwajem, a także oglądania nocnej panoramy Warszawy z XXX piętra Pałacu Kultury. Międzynarodowy Komitet Organizacyjny uznał, iż wyznaczone zostały nowe standardy organizacyjne Turnieju: był to najlepiej zorganizowany Turniej w historii, co nie byłoby możliwe bez wsparcia ze strony społeczności Wydziału Fizyki oraz prorektora Uniwersytetu Warszawskiego, profesora Alojzego Nowaka.

Jan Stefan BIHAŁOWICZ

## Gruba soczewka

Filip CZERMIŃSKI, Marlena MAĆKOWIAK, Antoni NUSZKIEWICZ,  
Kacper RACIBORSKI, Paweł SUCHOMSKI, Paweł SZCZYPKOWSKI,  
Jan BIHAŁOWICZ, Piotr PODLASKI

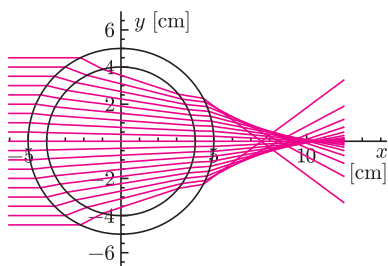
Złośliwy chochlik w numerze 10/2015  
przekreślił nazwisko pana  
Antoniego Nuszkiewicza. Przepraszamy.  
Redakcja



### Rozwiązanie zadania M 1476.

Zauważmy, że suma liczb napisanych na tablicy zmienia się w ciągu ruchu o  $2a + 2b - 2c$ , czyli o liczbę parzystą. Stąd parzystość sumy liczb napisanych na tablicy nie zmienia się, więc nie możemy uzyskać trójki 20, 21, 24.

Ten niezmiennik nie rozstrzyga odpowiedzi na drugie pytanie, ale nietrudno sprawdzić, że wartość  $a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ca)$  nie zmienia się przy zamianie  $c$  na  $2a + 2b - c$ . Ponieważ dla trójki 11, 12, 13 ta wartość wynosi  $-428$ , a dla trójki 20, 21, 23 wynosi ona  $-1356$ , to również tej trójki nie możemy uzyskać na tablicy.



Rys. 1. Symulacja pokazująca bieg promieni przez wypełnioną wodą szklaną butelkę.



Fot. 1

Butelka wypełniona cieczą może działać jak soczewka. Niektórzy sądzą, że taka butelka może być niebezpieczna, jeśli zostanie pozostawiona na stole w słoneczny dzień. Czy można użyć takiej „soczewki” do wywołania samozapłonu różnych substancji? W listopadzie 2012 roku w tygodniku *Newsweek Polska* pojawiła się interesująca wiadomość – w sklepie monopolowym w Burnsville w amerykańskim stanie Minnesota wybuchł pożar. Informacja ta nie dotarłaby z pewnością aż za ocean, gdyby nie fakt, że ogień został wzniecony przez wysokoprocentowy alkohol. Oczywiście pośrednio – tekturowa konstrukcja, na której ustawione były butelki z wódką, została podpalona przez promienie słoneczne wpadające prosto przez okna sklepu, a następnie skupione przez butelki wypełnione przezroczystym trunkiem. Cała sytuacja została udokumentowana przez kamery sklepowe. Owa informacja prasowa wywołała wśród polskich internautów, zaznajomionych z treścią artykułu, falę wątpliwości wyrażoną w komentarzach. *Czy to możliwe?* – pytali. A przecież łatwo to sprawdzić w warunkach domowych, trzeba tylko przypomnieć sobie to i owo ze szkolnych lekcji fizyki.

W naszym zagadnieniu butelka spełnia rolę grubej soczewki, która skupia w określonym obszarze oświetlającą ją promienie światła słonecznego. Owe promienie nie skupiają się w jednym punkcie (jak miałyby to miejsce w przypadku idealnej, cienkiej soczewki) m.in. z powodu aberracji sferycznej, czyli faktu, iż soczewka, której rozmiary liniowe są porównywalne z ogniskową, nie może być przybliżana przez paraboliczne powierzchnie załamujące (innymi słowy, nie można stosować przybliżonego przybliżenia do opisu biegu promieni). Znając prawo załamania na granicy ośrodków,

$$\frac{\sin \theta_{\text{zał}}}{\sin \theta_{\text{pad}}} = \frac{n_1}{n_2},$$

łącznie kąt padania  $\theta_{\text{pad}}$  i kąt załamania  $\theta_{\text{zał}}$  ze współczynnikami załamania ośrodków,  $n_1$  i  $n_2$ , nietrudno przygotować symulację biegu promieni światła przez wypełnioną wodą szklaną butelkę o danej grubości ścianek (rys. 1).

Dzięki skupieniu światła za pomocą grubej soczewki uzyskujemy duże natężenie oświetlenia w pewnym obszarze znajdującym się za butelką. Jeżeli umieścimy tam powierzchnię zdolną do absorbowania promieniowania, to padające na nią światło będzie się częściowo od niej odbijać, a pozostała jego część zostanie przez tę powierzchnię zaabsorbowana i przekształcona w energię cieplną.

W wyniku takiego ogrzewania po pewnym czasie powierzchnia może osiągnąć temperaturę samozapłonu.

Skoro wiemy już co nieco o teorii rozważanego zjawiska, możemy przystąpić do opisu naszych doświadczeń. Zbadaliśmy dzięki nim wpływ parametrów rozważanego układu fizycznego – rozmiaru, grubości ścian butelki oraz zawartości butelki – na możliwość ogrzania i podpalenia powierzchni przez skupiane za pomocą tego układu światło.

Aby sprawdzić, czy możliwe jest podpalenie powierzchni za pomocą mocnego światła słonecznego (odpowiadającego strumieniowi mocy około  $0,5 \text{ kW/m}^2$ ) oraz butelki wypełnionej cieczą, przeprowadziliśmy doświadczenie przedstawione na fotografii 1. Na papierze gazetowym zamalowaliśmy czarnym markerem prostokąt, co zwiększyło ilość energii pochłanianej przez papier, i skierowaliśmy na niego światło skupione przez karafkę z wodą. Już po chwili pojawił się dym, a po kilku sekundach gazeta zapłonęła.

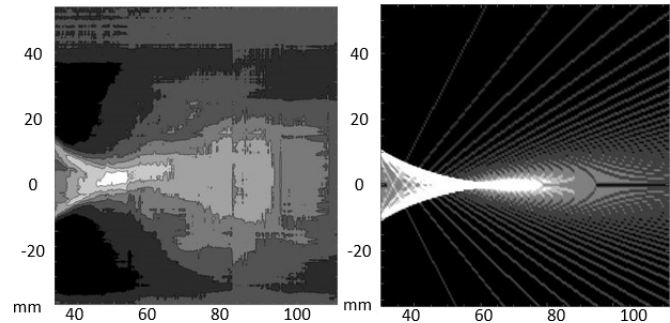
Pozostało zbadać, jakie parametry skupiającej światło butelki są kluczowe dla opisywanego zjawiska. Układ doświadczalny składał się z własnoręcznie przez nas

wykonanego zwierciadła parabolicznego i żarówki halogenowej. Wychodzące ze zwierciadła niemal równoległe promienie oświetlały butelkę, której obraz znajdował się na ekranie wykonanym z papieru milimetrowego. Skupianie załamanych przez butelkę promieni badaliśmy, wykonując zdjęcia nieoświetlanej strony ekranu, na którym widzieliśmy obraz naczynia. Ekran znajdujący się za butelką przesuwaliliśmy w zakresie kilkudziesięciu milimetrów z dokładnością rzędu 0,5 mm.



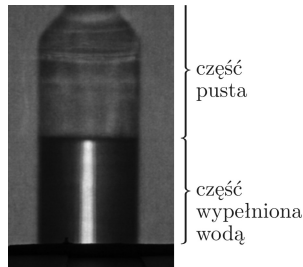
Fot. 2. Układ doświadczalny do badania wpływu własności butelki i wypełniającej ją cieczy na skupianie promieni świetlnych.

Wykonane zdjęcia złożyliśmy w film, a następnie stworzyliśmy jego „przekrój podłużny” na danej wysokości, przez wszystkie klatki filmu, widoczny na rysunku 2.

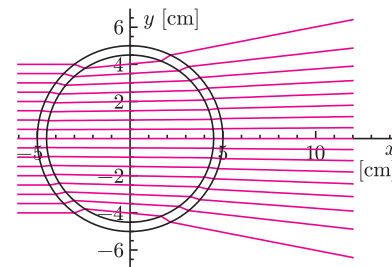


Rys. 2. Mapy natężenia światła za butelką. Porównanie wyników eksperymentu (lewy panel) i naszej symulacji (prawy panel).

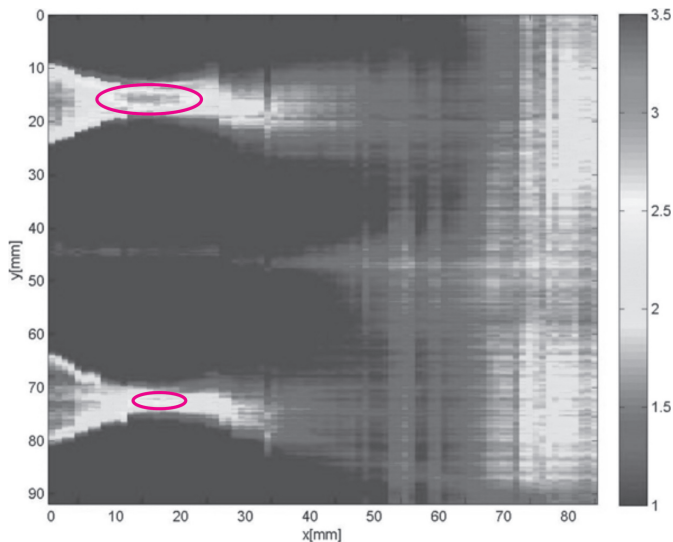
W symulacji uwzględniliśmy równania Fresnela i prawo Lamberta–Beera, pozwalające obliczyć spadek natężenia wiązki występujący przy przechodzeniu przez butelkę oraz ciecz. Uzyskana przez nas zgodność wyników doświadczenia i symulacji jest wprost zdumiewająca.



Fot. 3. Obraz na ekranie za butelką wypełnioną do połowy cieczą.



Rys. 3. Symulacja biegu promieni światła dla pustej butelki.



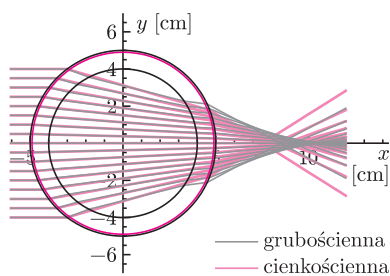
Rys. 4. Mapa natężenia oświetlenia za butelką cienko- i grubościenną. Kolorowymi elipsami zaznaczono obszary, w których względna jasność osiąga wartości większe niż 2,5.

Eksperyment wykonaliśmy z butelkami o różnych parametrach. Aby zobaczyć, jak różni się zachowanie światła przy przejściu przez butelkę pustą i wypełnioną cieczą, wykonaliśmy doświadczenie polegające na oświetleniu butelki wypełnionej wodą do połowy wysokości.

Nasza butelka skupiała światło jedynie na obszarze znajdującym się za jej częścią wypełnioną wodą. Co więcej, jej górna część rozpraszała padające na nią światło. Jest to zgodne z wykonaną przez nas symulacją, w której przyjęliśmy, że wartości współczynnika załamania dla obszarów wewnątrz i poza butelką są jednakowe.

Aby zbadać wpływ grubości ścianki butelki na opisywane przez nas zjawisko, wykorzystaliśmy dwie butelki o tym samym kształcie i rozmiarach – jedną plastikową, a drugą szklaną. Ponieważ współczynniki załamania dla szkła i bezbarwnego plastiku są praktycznie jednakowe, mogliśmy porównać owe „grube soczewki” i zaobserwowane różnice (lub ich brak) przypisać jedynie zmianie grubości ścianek.





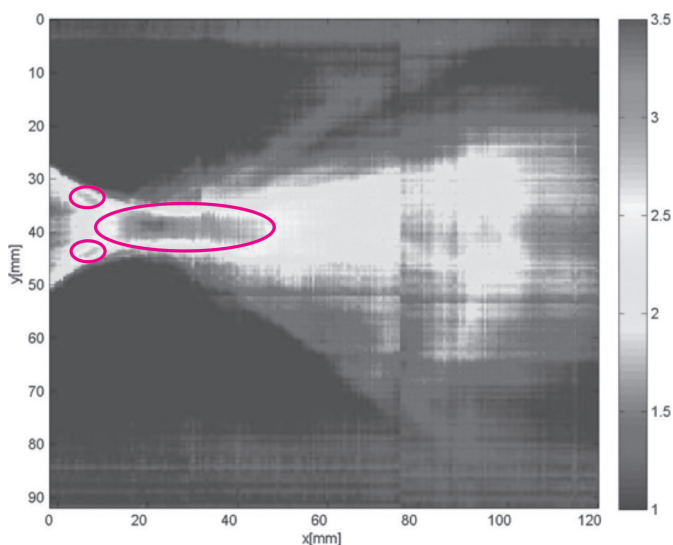
Rys. 5. Symulacja biegu promieni przez butelkę cienko- i grubościenną.

Podobnie jak poprzednio, wyznaczyliśmy przestrzenny rozkład natężenia promieniowania przedstawiony na rysunku 4. Odczytaliśmy z niego, że maksymalne natężenie jest większe w przypadku butelki cienkościennej. W wytłumaczeniu tego zjawiska pomocna okazała się nasza podstawowa symulacja i porównanie biegu promieni przechodzących przez butelkę cienko- i grubościenną przedstawione na rysunku 5.

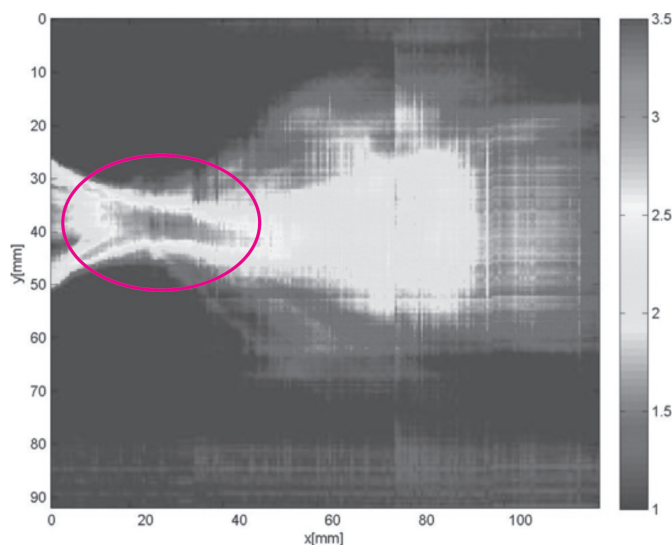
Promienie, które przeszły przez butelkę cienkościenną, przecinają się bliżej butelki niż te, które zostały skupione przez butelkę grubościenną, więc zdolność skupiająca tej pierwszej jest większa. Wniosek z tego taki, że aby skutecznie podpalić powierzchnię, należy używać butelek o jak najcieńszych ściankach.

Następnym parametrem butelek, którego wpływ na zjawisko udało nam się zmierzyć, była średnica butelki. W doświadczeniu wykorzystaliśmy dwie butelki o różnych średnicach, ale o tym samym kształcie oraz stosunku grubości ścianek do średnicy. Wyniki przedstawione są na rysunkach 6 i 7. Widzimy, że maksymalne natężenie oświetlenia w obu przypadkach jest jednakowe.

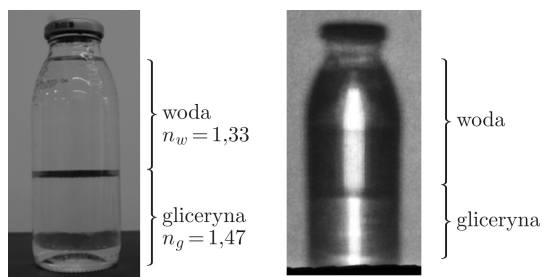
Kolejnym czynnikiem wpływającym na skupianie światła przez butelkę jest rodzaj wypełniającej ją cieczy. Aby zbadać tę zależność, utworzyliśmy warstwy dwóch przezroczystych, bezbarwnych cieczy o różnych współczynnikach załamania – wody oraz gliceryny.



Rys. 6. Mapa oświetlenia za butelką o mniejszej średnicy ( $R_1 = 54,85$  mm). Kolorowymi elipsami zaznaczono obszary, w których względna jasność osiąga wartości większe niż 2,5.



Rys. 7. Mapa oświetlenia za butelką o większej średnicy ( $R_2 = 60,80$  mm). Kolorowymi elipsami zaznaczono obszary, w których względna jasność osiąga wartości większe niż 2,5.



Fot. 4. Butelka z gliceryną i wodą oraz jej obraz na ekranie.

Na zdjęciu ekranu za butelką (fot. 4) widzimy, że gliceryna skupia światło efektywniej niż woda. Jest to spowodowane większym absolutnym współczynnikiem załamania światła.

Opisane tu doświadczenia stanowią tylko część naszych badań zjawiska skupiania światła przed butelką wypełnioną cieczą. W dalszych eksperymentach zbadaliśmy także wpływ barwy ścianek butelki na maksymalne natężenie skupianego światła oraz wykonaliśmy również doświadczenia z cieczami o różnych jasnościach i mętnościach. Zachęcamy Czytelników do wymyślenia jeszcze innych sposobów lepszego zrozumienia opisywanego zjawiska.

Jakie wnioski płyną z naszych doświadczeń? Przekonaliśmy się, że historia z Burnsville bynajmniej nie nosi znamion kaczki dziennikarskiej. Po drugie, stwierdziliśmy, że wbrew powszechnemu przekonaniu leżąca gdzieś w lesie czy na łące pusta butelka bez denka pożaru spowodować nie może (co, rzecz jasna, nie może być usprawiedliwieniem dla śmiecenia; trzeba też pamiętać, że niektóre butelki mają zakrzywione denka, które doskonale się sprawdzą w roli soczewek skupiających!). A po trzecie, i chyba najważniejsze: mieliśmy wiele radości z wykonywania eksperymentów.

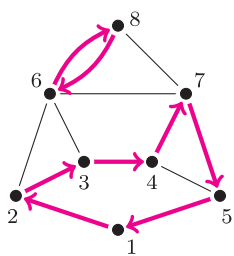


# Zliczamy skojarzenia (II). O planarności i algorytmie FKT

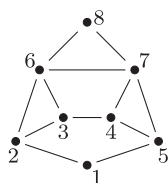
Tomasz IDZIASZEK

W pierwszej części tego artykułu pokazaliśmy, że dla szczególnej klasy grafów (kraty i ich podgrafy), istnieje działający w czasie wielomianowym algorytm, który wyznacza liczbę doskonałych skojarzeń dla dowolnego grafu z tej klasy. Ten wynik można uogólnić na szerszą klasę grafów – a konkretnie na grafy planarne, czyli takie, które można narysować na płaszczyźnie tak, by żadne z ich krawędzi się nie przecinały.

Mając dowolny nieskierowany graf planarny  $G$ , zawierający  $N$  wierzchołków  $v_1, \dots, v_N$ , rozważmy jego (symetryczną) macierz sąsiedztwa  $A = (a_{i,j})$  rozmiaru  $N \times N$ , w której  $a_{i,j} = 1$ , jeśli wierzchołki  $v_i$  oraz  $v_j$  są połączone krawędzią. Przykładowo, poniższy graf o ośmiu wierzchołkach, mający cztery doskonałe skojarzenia (dwa zawierające krawędź  $v_3v_4$  i dwa jej niezawierające), ma następującą macierz sąsiedztwa.



$$\pi_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 5)\ (6\ 8)$$

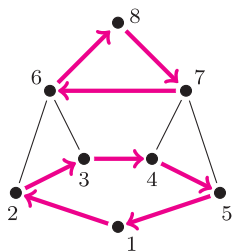


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podobnie jak w pierwszej części, naszym głównym narzędziem będzie obliczenie permanentu pewnej macierzy związanej z grafem, przy użyciu algorytmu liczenia wyznacznika jeszcze innej macierzy. Zarówno permanent, jak i wyznacznik, będą sumami iloczynów odpowiadających każdej permutacji wierzchołków grafu.

Na początek zastanówmy się zatem, jakiemu obiektowi w grafie  $G$  odpowiada permutacja wierzchołków  $\pi$ , dla której iloczyn  $\prod a_{i,\pi(i)}$  jest równy 1. Dla każdego czynnika  $a_{i,\pi(i)} = 1$  wyróżnimy w grafie skierowaną krawędź z wierzchołka  $v_i$  do wierzchołka  $v_{\pi(i)}$ . Ponieważ  $\pi$  jest permutacją, więc każdy z wierzchołków będzie miał wyróżnioną dokładnie jedną krawędź wychodzącą i dokładnie jedną wchodzącą. Zatem wyróżnione krawędzie będą tworzyły *skierowane pokrycie cyklowe* (rys. 1). Innymi słowy, permanent macierzy  $A$  będzie oznaczał ich liczbę:

$$\text{liczba skierowanych pokryć cyklowych} = \text{perm}(A).$$



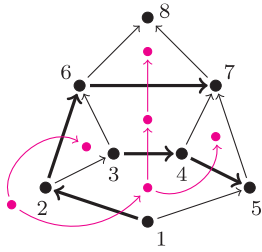
$$\pi_2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)\ (6\ 8\ 7)$$

Rys. 1. Skierowane pokrycia cyklowe (wyróżnione strzałkami) w grafie  $G$  odpowiadające permutacjom  $\pi_1$  i  $\pi_2$ .

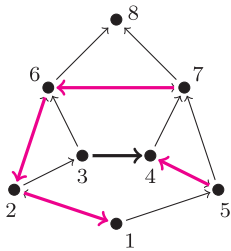
I w tym momencie to właśnie te pokrycia będą nas najbardziej interesowały (a dlaczego, to wyjaśni się pod koniec artykułu). W szczególności, pokażemy teraz ciekawą konstrukcję, która pozwoli nam policzyć te skierowane pokrycia cyklowe, które zawierają jedynie cykle długości parzystej.

Zamiast symetrycznej macierzy  $A$  do reprezentowania grafu  $G$  możemy równie dobrze użyć antysymetrycznej macierzy  $A'$ , w której  $a_{i,j} = \pm 1$ , jeśli wierzchołki  $v_i$  oraz  $v_j$  są połączone krawędzią, oraz  $a_{i,j} = -a_{j,i}$  (dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że  $a_{i,j} = 1$  dla  $i < j$ ). Innymi słowy, każdej krawędzi  $v_i v_j$  przypisujemy *etykiety* 1 lub  $-1$ , którą będziemy „odczytywać”, przechodząc tą krawędzią z  $v_i$  do  $v_j$  (a przechodząc ją w odwrotnym kierunku, odczytamy etykietę przeciwną). Obchodząc dowolny cykl w grafie  $G$ , będziemy mnożyć etykiety jego krawędzi, uzyskując wkład, jaki daje ten cykl do iloczynu  $\prod a_{i,\pi(i)}$ . Oczywiście, jeśli przejdziemy taki cykl w odwrotnym kierunku, to jego wkład przemnoży się przez  $(-1)^s$ , gdzie  $s$  jest długością cyklu, w szczególności zmieni znak dla cyklu nieparzystej długości. Dla skierowanego pokrycia cyklowego odpowiadającego permutacji  $\pi$ , przez wkład pokrycia rozumiemy iloczyn wkładów wszystkich cykli, czyli po prostu  $\prod a_{i,\pi(i)}$ .

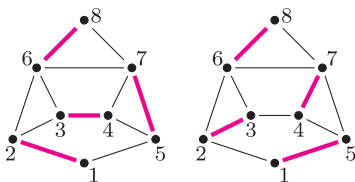
Pokażemy teraz, że można połączyć skierowane pokrycia cyklowe, które zawierają jakikolwiek cykl nieparzysty, w takie pary, że wkłady pokryć należących do każdej pary będą miały różne znaki. W tym celu ustawmy wszystkie skierowane cykle długości nieparzystej z grafu  $G$  w ciąg  $c_1, c_1^R, c_2, c_2^R, \dots$  (gdzie  $c^R$  oznacza ten sam cykl co  $c$ , tylko przeciwnie skierowany). Jeśli w pokryciu cyklowym  $c$  jest najmniejszym cyklem z ciągu, to sparujemy je z pokryciem cyklowym, w którym ten cykl zamienimy na  $c^R$ . Zauważmy, że parowanie jest poprawne oraz iloczyny  $\prod a_{i,\pi(i)}$  dla pokryć z każdej pary mają przeciwne znaki. Z tego wynika, że jeśli przesumujemy teraz te iloczyny dla wszystkich skierowanych pokryć cyklowych,



Rys. 2. Wierzchołki grafu dualnego grafu  $G$  oraz krawędzie jego drzewa rozpinającego  $T$  (wyróżnione kolorem) oraz krawędzie tnące grafu  $G$  (pogrubione).



Rys. 3. Aby każdy cykl ściany dostał parzystość 1, algorytm FKT zmienił skierowanie czterech spośród pięciu krawędzi tnących. Dzięki temu każdy cykl należący do skierowanego pokrycia parzystego ma parzystość 1. Ale nie każdy cykl parzysty ma tę własność, patrz np. cykl  $(1, 2, 3, 6, 7, 5)$ .



Rys. 4. Para skojarzeń, która odpowiada pierwszemu pokryciu cyklowemu z rysunku 1.

które zawierają jakikolwiek cykl nieparzysty, to suma ta wyniesie 0. Tak więc w przypadku macierzy antysymetrycznej  $A'$ , zarówno wartości  $\text{perm}(A')$ , jak i  $\det(A')$  nie zmieniają się, jeśli w sumowaniu opuścimy wszystkie permutacje zawierające jakikolwiek cykl nieparzysty.

Z cyklami parzystymi jest kłopot – choć wkład z odwróconego cyklu jest taki sam, jak dla oryginalnego, to istotnie zależy on od konkretnych etykiet. Dla skierowanego cyklu  $c$  oznaczymy przez  $p(c)$  parzystość liczby krawędzi, dla których odczytujemy etykietę  $-1$  (zatem wkład z tego cyklu jest równy 1, jeśli  $p(c)$  jest parzyste i  $-1$ , jeśli jest nieparzyste). Okazuje się, że w przypadku grafów planarnych jesteśmy w stanie w sposób wystarczający kontrolować liczbę  $p(c)$ .

Graf planarny  $G$  możemy narysować na płaszczyźnie tak, że żadne krawędzie nie będą się przecinały. Każda część płaszczyzny otoczona krawędziami to ściana grafu  $G$ . Z grafem tym możemy związać *graf dualny*, w którym mamy wierzchołki dla każdej ściany grafu  $G$ , oraz krawędzi, jeśli dwie ściany mają wspólną krawędź w  $G$ . W grafie dualnym wyróżnimy też dowolne ukorzenione drzewo rozpinające  $T$  (rys. 2), a w grafie  $G$  zbiór krawędzi, które przecinają  $T$  (nazwiemy je krawędziami *tnącymi*). Będziemy teraz zmieniać etykietowanie niektórych z krawędzi tnących. Zauważmy, że dowolna ściana grafu  $G$ , odpowiadająca pewnemu liściowi  $v$  drzewa  $T$ , ma dokładnie jedną krawędź tnącą. Zmieniając (albo nie) etykietowanie tej krawędzi, możemy wymusić dowolną parzystość wartości  $p(c)$  dla cyklu  $c$  otaczającego tę ścianę. Następnie usuwamy liść  $v$  z drzewa  $T$  i postępujemy rekurencyjnie, aż rozważymy wszystkie ściany. Powyższy algorytm (znany pod nazwą FKT od nazwisk jego twórców – Fisher, Kasteleyn i Temperley), pozwala nam wymusić dowolną parzystość  $p(c)$  krawędzi dla każdego cyklu  $c$  odpowiadającego ścianie grafu (rys. 3).

A jak to wpływa na parzystości pozostałych cykli? Łatwo wykazać, że jeśli mamy cykle  $c_1$  i  $c_2$  odpowiadające sąsiadującym ścianom grafu, to parzystość cyklu, który otacza obie te ściany, wynosi  $(p(c_1) + p(c_2) + k) \bmod 2$ , gdzie  $k$  jest liczbą krawędzi wspólnych dla obu tych ścian. Indukcyjnie można zatem wykazać, że cykl  $c$  otaczający ściany cykli  $c_1, c_2, \dots, c_s$  ma parzystość  $(p(c_1) + p(c_2) + \dots + p(c_s) + k) \bmod 2$ , gdzie  $k$  to liczba krawędzi leżących „wewnątrz” cyklu  $c$ . Wzór ten ma ciekawe konsekwencje, jeśli ustalimy parzystość każdej ze ścian na  $p(c_i) = 1$ . Wtedy parzystość cyklu  $c$  to  $(s + k) \bmod 2$ . Ale, używając wzoru Eulera, można wykazać, że liczba wierzchołków leżących „wewnątrz” cyklu  $c$  to  $k + 1 - s$ . W szczególności  $p(c) = 1$  wtedy, gdy liczba tych wierzchołków jest parzysta.

Cała ta karkołomna konstrukcja znajdzie zaraz swoje uzasadnienie. Zaczniemy od macierzy  $A'$ , a następnie wykonajmy algorytm FKT tak, by parzystość cyklu każdej ściany wyniosła 1. Zdefiniujmy już ostatnią macierz antysymetryczną  $A''$ . Dla  $i < j$  i wierzchołków  $v_i, v_j$  połączonych krawędzią kładziemy  $a_{i,j} = -1$ , jeśli etykietowanie krawędzi zostało zmienione przez algorytm FKT, oraz  $a_{i,j} = 1$ , jeśli nie zostało (oczywiście  $a_{j,i} = -a_{i,j}$ ). Rozważmy teraz dowolny cykl  $c$  należący do pewnego pokrycia cyklowego cyklami parzystymi. Wszystkie wierzchołki leżące wewnątrz tego cyklu muszą być również pokryte pełnymi cyklami, zatem ich liczba musi być parzysta, więc  $p(c) = 1$ . Innymi słowy, iloczyn etykiet krawędzi z tego cyklu wynosi  $-1$ , niezależnie od wyboru tego cyklu. Tak więc znowu (tak jak w pierwszej części artykułu) udało nam się sprawić, że iloczyn  $\prod a_{i,\pi(i)}$  wszystkich cykli jest równy znakowi permutacji, więc możemy użyć algorytmu liczenia wyznacznika. Zatem

$$\text{liczba skierowanych pokryć cyklowych cyklami parzystymi} = \det(A'').$$

Pora na ostatnią sztuczkę. Rozważmy parę doskonałych skojarzeń w grafie i zaznaczmy naraz ich krawędzie. Ponieważ każdy wierzchołek będzie miał zaznaczone dokładnie dwie krawędzie, więc taki rysunek odpowiadać będzie pewnemu pokryciu cyklowemu cyklami parzystymi. Co więcej, każdy cykl długości większej niż 2 możemy skierować – powiedzmy, że kierujemy go w prawo dokładnie wtedy, gdy najmniejsza leksykograficznie krawędź pochodzi z pierwszego skojarzenia (rys. 4). Nietrudno się przekonać, że w ten sposób dostaniemy bijekcję między zbiorem uporządkowanych par doskonałych skojarzeń a zbiorem skierowanych pokryć cyklowych cyklami parzystymi (aby uzyskać z pokrycia parę skojarzeń, należy brać co drugą krawędź z każdego cyklu). Porównując liczebności tych zbiorów, dostajemy ostateczny wzór na liczbę doskonałych skojarzeń w grafie planarnym:

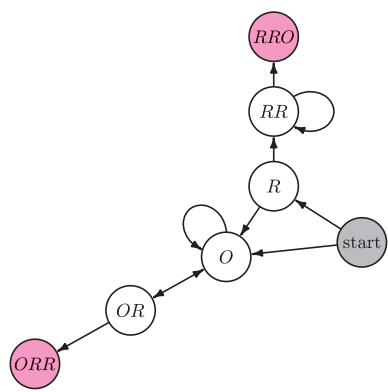
$$\text{liczba doskonałych skojarzeń} = \sqrt{\det(A'')}.$$

# RROzważania O RReszce i ORRle

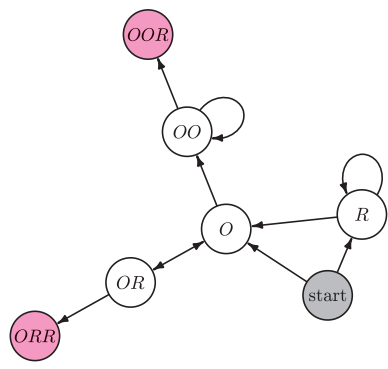
Łukasz RAJKOWSKI

Zwykła moneta często okazuje się doskonałym narzędziem do rozstrzygania konfliktów. Zapewne każdemu zdarzyło się usłyszeć magiczną formułkę „orzęł to, reszka tamto”, z reguły będąc przychylnym dokładnie jednemu ze zdarzeń „to” lub „tamto”. Takie rozwiązanie jest jednak mało widowiskowe – o ile wzajemne obrzucanie się inwektywami (w celu wytłumaczenia, w jak wielkim błędzie jest strona przeciwna, prezentując zdanie odmienne od naszego) szybko przyciąga publiczność, tak zakończenie sporu przy użyciu jednego rzutu monetą może pozostawić ją z odczuciem niedosytu. Przykładowym sposobem na uatrakcyjnienie oraz niewielkie przedłużenie całej procedury jest rzucanie monetą, dopóki wśród kolejnych wyników nie pojawi się jedna z konfiguracji *OO* lub *RR*, w zależności od której wyłaniany jest zwycięzca. Ich oczywista symetria sprawia, że przegrany może czuć się pokrzywdzony jedynie przez los, nie zaś przez oszustne praktyki adwersarza. Co jednak, jeśli osoba typująca *OO* (nazwijmy ją Jackiem) zmieniła zdanie na *OR*? Wówczas obstawiający *RR* (Placek, rzecz jasna) miałby prawo do słusznego protestu; zauważmy bowiem, że jeśli w pierwszym rzucie pojawi się

reszka, to szanse Jacka na zwycięstwo wynoszą 50%, jeśli natomiast orzeł, to wygra on z pewnością (w momencie, w którym pojawi się pierwsza reszka) i dlatego prawdopodobieństwo jego sukcesu należy oceniać na 75%. Podobna sytuacja ma miejsce, jeśli Jacek i Placek będą oczekiwać odpowiednio na konfiguracje *ORR* i *RRO* – wbrew pozorom, jakie stwarza równa liczba reszek w obu przypadkach, Jacek jest faworytem również takiej rozgrywki. Wytłumaczenie tego faktu jest analogiczne, jednak odrobinę bardziej skomplikowane, dlatego warto podeprzeć się rysunkiem 1, ilustrującym wszystkie istotne z punktu widzenia rozgrywki „końcówki” ciągu wyników (będziemy je nazywać *stanami*) oraz strzałki prezentujące możliwość bezpośredniego przejścia między stanami (każde z prawdopodobieństwem 50%). Tak jak poprzednio, ciąg rzutów rozpoczynający się od orła nie może skończyć się inaczej niż zwycięstwem Jacka; z kolei gdy zaczniemy od reszki, decydujący jest drugi rzut: reszka prowadzi będzie nieuchronnie do wygranej Placeka, natomiast orzeł do Jacka. Wnioskujemy stąd, że ponownie z prawdopodobieństwem 75% ten ostatni okaże się zwycięzcą.



Rys. 1



Rys. 2

Co zatem może uczynić Placek, by szala zwycięstwa przechyliła się na jego stronę? Okazuje się, że w celu uzyskania przewagi powinien obstawić konfigurację *OO*. W konfrontacji z *ORR* otrzymujemy wówczas stany zilustrowane na rysunku 2. Analiza otrzymanego grafu pozwala szybko przekonać się o przewadze konfiguracji *OO*, gdyż aby gra się zakończyła, z pewnością musi przejść przez stan *O*, z którego – jeśli przejdzie do stanu *OO* – to z pewnością zakończy się sukcesem Placeka, natomiast przejście do *OR* niekoniecznie skutkować będzie triumfem Jacka. Aby jednak przedstawić prawdopodobieństwa sukcesu graczy, musimy przeprowadzić nieco bardziej skomplikowane obliczenia niż poprzednio. Oznaczmy przez  $p_s$  szansę na zwycięstwo Placeka, gdy rozpoczynamy ze stanu  $s$ . Wówczas oczywiście  $p_{OO} = 1$  oraz  $p_{ORR} = 0$ , ponadto, korzystając z rysunku 2 oraz zdrowego rozsądku (przyjmującego w tym przypadku uczoną nazwę *wzoru na prawdopodobieństwo całkowite*), możemy przedstawić następujące zależności:

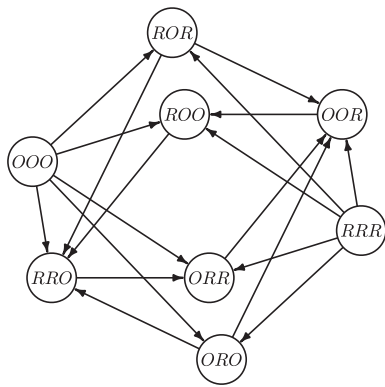
$$(1) p_{OO} = \frac{p_{OO} + p_{OO}}{2}, \quad (2) p_{OR} = \frac{p_{ORR} + p_O}{2}, \quad (3) p_O = \frac{p_{OO} + p_{OR}}{2},$$

$$(4) p_R = \frac{p_O + p_R}{2}, \quad (5) p_{start} = \frac{p_O + p_R}{2}$$

Z równania (1) dostajemy  $p_{OO} = p_{OO} = 1$ , skąd oraz z układu równań (2) i (3) mamy  $p_O = 1 - p_{OR} = \frac{2}{3}$ . Z (4) wnioskujemy  $p_O = p_R$ , dlatego z równania (5) mamy  $p_{start} = p_O = \frac{2}{3}$  – jest to zatem szukane prawdopodobieństwo wygranej Placeka na samym początku rozgrywki.

Dążący do odzyskania przewagi nad swoim konkurentem Jacek może teraz przeprowadzić następujące rozumowanie: „skoro, obstawiając *ORR*, miałem przewagę nad celującym w *RRO* Placekiem, to jeśli teraz Placek wytypował *OO*, z symetrii sytuacji wystarczy mi zmienić swój wybór na *ROO*!”. W odpowiedzi na takie posunięcie Placek może pomyśleć: „kiedy Jacek grał *ORR*, spuszczałem mu łomot, obstawiając *OO*, więc jeśli teraz wytypował *ROO*, utrzymam moją przewagę, czekając na *RRO*!”. W tym miejscu artykułu Czytelnik, który nie zagubił się jeszcze w gąszczu eRów i Oów, zwrócił być może uwagę na pewien niepokojący efekt całego rozumowania. Uzasadniliśmy bowiem, że grający *RRO* zapewne przegra z typującym *ORR*, który powinien przegrać z obstawiającym *OO*, który prawdopodobnie ustąpi pola grającemu *ROO*, a ten ostatni zapewne poniesie klęskę, grając z... pierwszym, czyli *RRO*! Oczywiście, sprzeczność jest





Rys. 3

jedynie pozorna, a podobnego typu paradoksów probabilistycznych nie brakuje – o jednym z nich (kościach Sichermana) można przeczytać w *Delcie* 1/2009. Czy możemy wskazać inne ciągi konfiguracji długości 3 o opisanej własności? Aby odpowiedzieć na to pytanie, użyjemy mało finezyjnego sposobu: dla każdych dwóch takich konfiguracji sprawdzimy bowiem, przy użyciu opisanej wcześniej metody, która z nich (o ile którakolwiek) miałaby większe szanse na wygraną w przypadku konfrontacji. Efekt takiej analizy przedstawiony jest na rysunku 3, na którym strzałka między dwiema konfiguracjami wskazuje na prawdopodobnego zwycięzcę, jej brak natomiast oznacza równe szanse w pojedynku. Zwróćmy uwagę, że konfiguracje *OOO* i *RRR* nie wygrywają z żadną inną, nie mogą być zatem częścią żadnego cyklu. Wynika stąd, że do cyklu nie mogą również należeć *ORO* i *ROR*, gdyż jedyne, z jakimi wygrywają, to wykluczone wcześniej *OOO* i *RRR*. Z pozostałych konfiguracji można ułożyć wyłącznie cykl opisany wcześniej i dlatego jest on jedyny możliwy do uzyskania. Warto ponadto zauważyć, że z każdego wierzchołka prezentowanego grafu wychodzi strzałka – oznacza to, że dla każdej konfiguracji przeciwnika możemy znaleźć taką, która prawdopodobnie da nam zwycięstwo. Niestety, on może odplacić się nam tym samym, i choć przez pewien czas moglibyśmy bawić się w złośliwe zmiany decyzji, patową sytuację zapewne najwygodniej będzie zakończyć przy użyciu starego i sprawdzonego pojedynczego rzutu monetą.



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

**M 1474.** Wykazać, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 jest zawarty w pewnym prostokącie o polu 2.  
Rozwiązanie na str. 14

**M 1475.** Niech  $\phi$  będzie funkcją różnowartościową odwzorowującą zbiór liczb całkowitych dodatnich w siebie. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^n \frac{\phi(k)}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

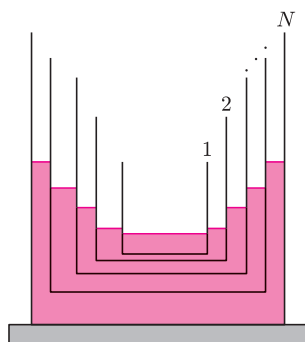
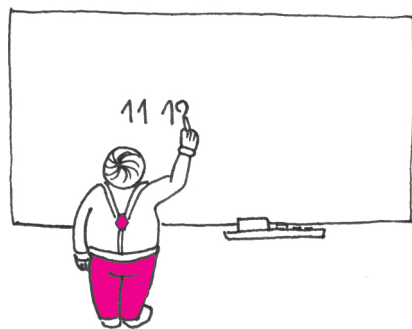
Rozwiązanie na str. 3

**M 1476.** Na tablicy napisano liczby 11, 12, 13. Ruch polega na wybraniu jednej z liczb napisanych na tablicy (oznaczamy ją przez  $c$ ) i zastąpieniu jej liczbą  $2a + 2b - c$ , gdzie  $a$  i  $b$  to dwie pozostałe liczby. Rozstrzygnąć, czy za pomocą takich ruchów możemy uzyskać na tablicy trójkę liczb 20, 21, 24? A trójkę 20, 21, 23?  
Rozwiązanie na str. 5

Przygotował Michał NAWROCKI

**F 891.** Na satelitę o masie  $m$  poruszającego się z prędkością  $v$  po orbicie kołowej w pobliżu powierzchni Ziemi działa stała siła hamująca  $F$ . Znając przyspieszenie ziemskie  $g$  znaleźć prędkość  $v_z$  zniżania się satelity, przyjmując, że zmiana jego orbity zachodzi dostatecznie wolno.  
Rozwiązanie na str. 12

**F 892.**  $N$  cylindrycznych naczyń o masach  $m, 2m, \dots, Nm$  i przekrojach poprzecznych  $S, 2S, \dots, NS$  umieszczono jedno w drugim jak na rysunku. Do naczyń nalano tyle wody, że każde z nich pływa w większym naczyniu nie dotykając jego dna i ścianek. Największe naczynie stoi na stole. Do jakiej wysokości, w stosunku do powierzchni stołu, jest napełnione największe naczynie? Całkowita masa wody wynosi  $M$ , a jej gęstość wynosi  $\rho$ . Ścianki naczyń uznać za zaniedbywalnie cienkie.  
Rozwiązanie na str. 21





# 5

# mała delta



Czy Kapturek przygotowuje wypieki dla siebie?



Ile bułeczek Kapturek spakowała do koszyka, skoro połowa wszystkich bułeczek i połowa połowy to taka sama wielkość?

Ile czasu zajęłoby przygotowanie dziewięciu Kapturkom sześciu milionów bułeczek, jeżeli półtorę Kapturka robi półtora miliona bułeczek w ciągu półtora dnia?



## Rozwiązanie zadania F 891.

Równanie ruchu satelity po orbicie kołowej jest dane wzorem

$$(1) \quad \frac{mv_R^2}{R} = \frac{GmM_Z}{R^2} = \frac{mgR_Z^2}{R^2},$$

gdzie  $v_R$  – prędkość satelity na orbicie kołowej o promieniu  $R$ ,  $M_Z$  – masa Ziemi,  $R_Z$  – jej promień. Załóżmy, że w ciągu krótkiego czasu  $\Delta t$  promień orbity zmniejszył się o  $\Delta R$  pod wpływem siły  $F$ . Z zasady zachowania energii mamy związek

$$(2) \quad \frac{mv_{R-\Delta R}^2}{2} - \frac{mv_R^2}{2} + \left( -\frac{mgR_Z^2}{R-\Delta R} - \left( -\frac{mgR_Z^2}{R} \right) \right) = -Fv\Delta t.$$

Równanie ruchu satelity po orbicie o promieniu  $R - \Delta R$  z prędkością  $v_{R-\Delta R}$  ma postać

$$(3) \quad \frac{mv_{R-\Delta R}^2}{R-\Delta R} = \frac{mgR_Z^2}{(R-\Delta R)^2}.$$

Znajdując prędkości  $v_R^2$  i  $v_{R-\Delta R}^2$  z zależności (1) i (3) i podstawiając je do zależności (2) otrzymujemy

$$\Delta R = \frac{2FvR(R-\Delta R)}{mgR_Z^2} \Delta t.$$

Korzystając z tego, że  $\Delta R \ll R$  oraz  $R \approx R_Z$  znajdujemy prędkość zniżania się satelity

$$v_z = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{2FvR(R-\Delta R)}{mgR_Z^2} \approx \frac{2Fv}{mg}.$$

## Czerwony Kapturek

Dym zaczął radośnie buchać ze starego, ceglanego komina. To znak, że Czerwony Kapturek, właścicielka najbardziej czerwonego kubraczka w stumilowym lesie, rozpoczęła już swoje wyśmienite wypieki. Świeżutkie bułeczki dostaną wszyscy ci i tylko ci mieszkańcy lasu, którzy sami nie robią dziś wypieków. Poza kulinarnymi umiejętnościami Czerwony Kapturek jest również znana z niesamowicie sprawnego roweru oraz umysłu, dzięki którym świadczone przez nią usługi kurierskie zyskały wielu stałych klientów. Tego słonecznego poranka dziewczynka ma do wykonania trzy dostawy, każda po tyle samo bułeczek. *Pierwsza to połowa wszystkich wypieków z koszyka. Druga to połowa tego, co zostanie. Potem przerwa pod bujną jabłonią, należy mi się jedna bułeczka – tu zamyśliła się nieco – Wszystko, co zostanie w koszyku, będzie dla krasnoludków – Kapturek zanotowała harmonogram w swoim kajecie.*

Spakowawszy kosz łakoci, ruszyła skocznym krokiem w kierunku plantacji topoli. Zatrzymała się, żeby złapać oddech w cieniu starego dębu, który tym razem stał dostojnie, nie dając po sobie poznać, że jest najstarszym drzewem w stumilowym lesie oraz że wczoraj go tu jeszcze nie było. Ruszając w dalszą drogę, potknęła się swoim skórzanym trzewikiem, którego nic nie może zatrzymać, o kamień, którego nic nie może poruszyć. *Skąd się tu wziął?* – pomyślała, a chyba nawet powiedziała, bo spod kamienia wychylił się krasnoludek zawsze mówiący prawdę i cichutko odpowiedział

*Ten kamień wziął się stamtąd, wskazał palcem, albo skądinąd.*

Kapturek uśmiechnęła się życzliwie, podziękowała za tę niekoniecznie pożyteczną, ale rzecz jasna prawdziwą odpowiedź na pytanie, którego nie chciała zadać i ruszyła dalej.

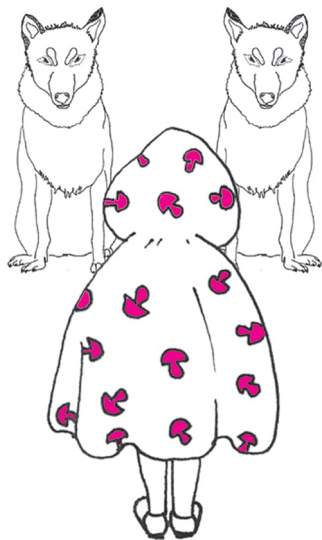
Po niespełna godzinnym spacerze, umiłonym świergotem ptaków, szumem drzew oraz dźwiękami cykad, dotarła do chałupki topologa (plantatora topoli) i zapukała stanowczo ciężką antabą. Po odgłosach 34 kroków i długiej minucie, podczas której Kapturek była niedyskretnie obserwowana przez judasza, otworzyły się wielkie drzwi. Właściciel plantacji przywitał Kapturka nieco szerszym niż zwykle uśmiechem. Wyglądał tak, jak każdego innego z 3123 poranków, kiedy to Kapturek raczyła go swoimi wypiekami, poza amarantową hiperbolą namalowaną na prawie całej jego twarzy. *Znowu leśne chochliki płatają figle. Dobrze, że zamontowałam w oknach moskitierę – pomyślała dziewczynka, nie dając z grzeczności po sobie poznać, że topolog wygląda dziś niecodziennie. Połowa zawartości już znalazła się w silnych dłoniach plantatora i drzwi miały się zamknąć, kiedy to znikąd pojawił się krasnoludek zawsze mówiący prawdę i nieco piskliwie wychichotał*

*Przynajmniej jedno z was wie, że jedna osoba ma namalowaną na twarzy funkcję różnowartościową.*

Czy znowu jakaś prawdziwa, ale niekoniecznie pożyteczna informacja? Kapturek dokładnie wiedziała, że przynajmniej jedno z nich ma na twarzy funkcję. W końcu widziała ją na twarzy topologa. Po chwili milczącego

Skąd Kapturek wiedziała, że ma pomalowaną twarz?

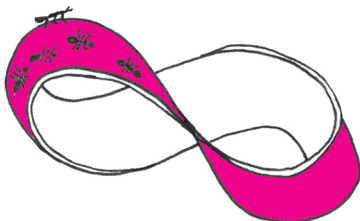
Zbiory o własnościach kwiecistej łąki nazywamy *gęstymi*. Przykłady można znaleźć w zbiorze liczb rzeczywistych. W dowolnie małym otoczeniu (przedziale) liczby wymiernej znajdują się również inne liczby wymierne. Inaczej: nie istnieje takie otoczenie liczby wymiernej (chabru), żeby nie było w nim żadnej innej liczby wymiernej (chabru), niewymiernej (maku) zresztą również.



Jeśli cierpisz na chroniczny nadmiar czasu, spróbuj wykonać ową trysekcję kąta.

Jeżeli zastanawiasz się, dlaczego Czerwony Kapturek musiała zadać pytanie odnośnie drogi, skoro jest to trasa prawie co dzień przez nią uczęszczana – wiedz, że tak jak leśne przemeblowanie nie jest niczym nadzwyczajnym, tak i zmiana leśnych ścieżek, które wyglądają na wydeptane od lat i zmiana lokalizacji urwisk jest tutaj codziennością.

Jakie pytanie zadała Kapturek wilkom, żeby dowiedzieć się, która trasa prowadzi na urwisko?



Matematyczna konstrukcja takiej „wycinanki” nosi nazwę *paradoksu Banacha–Tarskiego*.

przyglądania wyjęła śnieżnobiały ręczniczek ze swojego fartuszka i starła funkcję ze swojej buzi. W tym samym momencie topolog również otarł twarz. Zarumieniona Kapturek pożegnała się życzliwie i z lżejszym koszykiem, bez funkcji na twarzyczce ruszyła w dalszą drogę.

Wybrała ścieżkę nie najkrótszą, ale za to najbardziej urokliwą. Łąka, przez którą kroczyła, była tak gęsto usiana chabrami i makami, że gdy wybierała dowolnie małą „łączkę” dookoła chabru, zawsze znalazł się na tej łączce inny chaber oraz mak. Tak samo niezwykle były maki. Kapturek uwielbiała przyglądać się temu zjawisku.

Odgłosy żab przypomniały o obowiązkach, dziewczynka ruszyła więc, zastanawiając się nad wypiekiem ciasta drożdżowego, w którym jagody i czekolada byłyby upakowane tak, jak kwiaty na łące. Ścieżka rozwidlała się przy olbrzymim głazie, gdzie na wypieki czekały już zniecierpliwione wilki bliźniacy. Widać w lesie zarządzono przemeblowanie, wczoraj głazu jeszcze tutaj nie było.

*Dlaczego masz taki czerwony kapturek?* – zapytał pierwszy.

*Żebyś mnie lepiej widział* – odpowiedziała z uśmiechem Kapturek.

Pytanie to słyszała przynajmniej 104 razy dziennie, odkąd babcia postanowiła zainwestować w jej bezpieczeństwo i sprawiła pelerynkę z fluorescencyjnych muchomorów. Drugi o nic nie zapytał, tylko wskazał na napis wyryty dzisiejszego poranka na głazie. A napisane było:

*Dwa wilki strzegą rozwidlenia. Jeden zawsze mówi prawdę, drugi zawsze kłamie. Jedna z drózek prowadzi na urwisko, druga do domku babci. Możesz zadać tylko jedno pytanie jednemu wilkowi, na które odpowiedź będzie brzmieć TAK lub NIE, aby dowiedzieć się, która droga prowadzi dokąd.*

Kapturkowi żal zrobiło się wilków, które zarządca lasu co rusz wyznaczał do przedziwnych zadań. Na przykład przez ostatni miesiąc jeden z wilków konstruował kąty, a drugi miał sprawdzać, czy przy użyciu tylko cyrkla i linijki bez podziałki można podzielić je na trzy równe części. Wilki nie miały za szczęśliwych min, ani wtedy, ani teraz. Kapturek zostawiła porcję bułeczek, dorzuciła również tę zaplanowaną na jej drugie śniadanie. Dowiedziawszy się, która droga prowadzi na urwisko, ruszyła nią.

Po długiej i krętej wędrówce, w czasie której dziewczynka zdążyła wpaść w mokradła, pomóc mrówkom przejść na drugą stronę wstęgi Möbiusa, zdjąć niedźwiedzia z najwyższej w lesie brzozy, dotarła na sam koniec lasu. Podeszła ostrożnie na skraj urwiska, nad którym siedział krasnal mówiący za dużo i majstrował coś przy wczorajszej bułeczce.

*Hej Kapturku, dobrze, że już jesteś!*

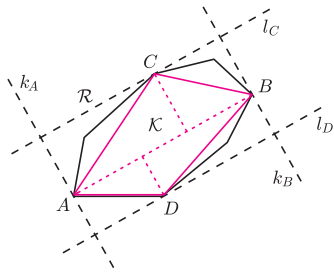
Kapturek spojrzała pytająco na wczorajszą bułeczkę.

*W „nagrodę” za swoje zachowanie – trochę mówiłem, wtedy kiedy nie powinienem – mogę dziś tymi matematycznymi nożyczkami „rozmnazać” Twoje bułeczki! Pamiętasz, jak krasnale Bananaś i Tatarski podczas ozdabiania świątecznego drzewka znaleźli sprytny sposób, jak pociąć, a następnie poskładać bombkę, żeby z jednej otrzymać dwie identyczne? Tak, z dokładnie tych samych fragmentów, bez dokładania czegokolwiek. Dlatego wygraliśmy w konkursie na najpiękniejszą choinkę! Teraz stosuję to do Twoich bułeczek. Dzięki temu będziesz mogła wypiekać tylko połowę tego, co dotychczas!*

*A nawet jedną czwartą, ósmą i jak będzie trzeba, to tylko jedną bułeczkę dziennie, a może i pół, albo okruszek. . .* – odparła Kapturek, nieco

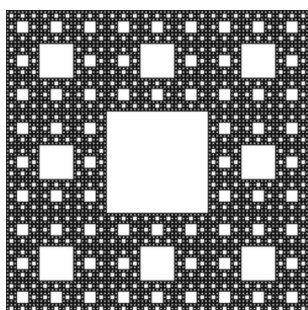


**Rozwiązanie zadania M 1474.**  
Niech  $\mathcal{K}$  będzie wielokątem z treści zadania.

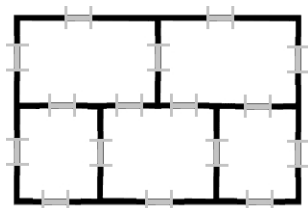


Spośród wszystkich wierzchołków  $\mathcal{K}$  wybierzmy te dwa, które są najdalej od siebie, i oznaczmy je przez  $A$  i  $B$ . Przez te wierzchołki przeprowadźmy proste  $k_A$  i  $k_B$ , prostopadłe do odcinka  $AB$ . Wówczas  $\mathcal{K}$  jest zawarty w pasie  $\mathcal{P}$  ograniczonym prostymi  $k_A$  i  $k_B$ . Po obu stronach prostej  $AB$  znajdziemy te wierzchołki  $\mathcal{K}$ , które są najdalej od tej prostej, i nazwijmy je  $C$  i  $D$  (być może któryś z nich jest wierzchołkiem  $A$  lub  $B$ ). Przez  $C$  i  $D$  poprowadźmy proste  $l_C$  i  $l_D$ , równoległe do  $AB$ . Wielokąt  $\mathcal{K}$  jest zawarty w pasie  $\mathcal{Q}$  ograniczonym tymi prostymi, jest zatem zawarty w prostokącie  $\mathcal{R}$ , będącym przecięciem pasów  $\mathcal{P}$  i  $\mathcal{Q}$ . Z konstrukcji wynika, że pole prostokąta  $\mathcal{R}$  jest dwa razy większe od pola  $S$  czworokąta  $ADBC$ , który jest zawarty w  $\mathcal{K}$ . Zatem  $|\mathcal{R}| = 2S \leq 2|\mathcal{K}| = 2$ .

Czy gdyby Kapturek zostawiła u krasnoludków wszystkie wypieki, to zgodnie z tym, co powiedział krasnoludek zawsze mówiący prawdę, dziewczynka faktycznie nie mogłaby rozmawiać z krasnoludkami?

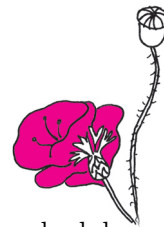


Kształt obrusa.



Plan chatki krasnoludków – znajdź taką ścieżkę, że z każdych drzwi użyjesz dokładnie raz. Podpowiedz, jak to zrobić, znajduje się w tekście. Dokładniej chodzi o sposób, w jaki Kapturek opuściła chatkę.

zdegustowana pomysłem rozmnażania jej wypieków. Spojrzała zamyślona w dal.



Koniec stumilowego lasu oznaczał również koniec wszechświata. Za urwiskiem znajdowało się nicanic, a w każdym razie niktanikt to zbadał. A raczej jeżeli ktośaktoś to zbadał, to nie podzielił się tym, co zbadał, z Kapturkiem, ani nikim, kto ten wynik rozgłosiłby na tyle, żeby dotarł on do Kapturka. Urwisko zastanawiało dziewczynkę już od dłuższego czasu. Okruszki, które spadały krasnalowi, który mówi za dużo, za koniec wszechświata trafiały więc niewiadomodokąd i działo się z nimi niewiadomocoidlaczego. Krasnoludek, widząc niezrozumiałą dla niego minę dziewczynki, przerwał swoje wycinanki i zaprosił Kapturka do domku. Krasnoludek zawsze mówiący prawdę czekał już na pieńku na przepyszne wypieki oraz swoją comiesięczną dawkę prawdy, *Deltę* – firma Kurierski Kapturek trudzi się również kolportażem czasopism popularnonaukowych. Widząc Kapturka, uraczył ją dawką szczerości:

*Żaden Czerwony Kapturek przebrany za wilka nie jest bez poczucia humoru.  
Żaden Czerwony Kapturek bez koszyczka nie będzie rozmawiał z krasnoludkiem.*

*Czerwone Kapturki z warkoczami zawsze przebijają się za wilki.  
Żaden Czerwony Kapturek z poczuciem humoru nie ma pustego koszyczka.  
Żaden Czerwony Kapturek nie ma koszyczka, jeśli nie ma warkoczy.*

Wszystko, co powiedział krasnoludek zawsze mówiący prawdę, było oczywiście prawdą najprawdziwszą. Kapturek zaczęła zastanawiać się, czy po zostawieniu wszystkich wypieków w chatce krasnoludków, gdy jej koszyk zostanie pusty, będzie mogła rozmawiać z krasnoludkami. Na wszelki wypadek postanowiła nie zostawiać wszystkich bułeczek, żeby móc powiedzieć „Do widzenia”.

Kapturek weszła do kuchni, gdzie krasnoludki kończyły przygotowywać wielki dębowy stół do porannego biesiadowania. Na białym żakardowym obrusie o splocie Kwadratu Sierpińskiego ustawione były różne przysmaki i kolorowe talerze, każdy o kształcie innego forekąta wielomnego. Liczba kątów talerza decydowała o randze krasnoludka. Na stole zdecydowanie brakowało pieczywa. Kapturek zwróciła się do krasnoludka siedzącego przy talerzu, którego kształt na oko nierozróżnialny był z kołem i wręczyła mu prawie wszystkie bułeczki ze swojego koszyka. Krasnale Bananasa i Tatarski, siedzący przy talerzach o kształtach konstruowanych przy użyciu cyrkla i linijki, wycinali w obrusie kolejne oczka. Mimo zachęcania krasnoludków, żeby zjadła z nimi, Kapturek grzecznie odmówiła, tego dnia miała bowiem jeszcze wiele innych zleceń. Skusiła się jednak na mały spacer po domku, którego zwiedzaniu nigdy oprzeć się nie mogła.

Domek krasnoludków był chatą o pięciu pomieszczeniach. Między każdymi dwoma mającymi wspólną ścianę znajdowały się drzwi. Drzwi wyjściowe z domku znajdowały się na każdej zewnętrznej ścianie pokoju. Domek miał również taką sprytną własność, że można było znaleźć spacerową trasę przechodzącą przez wszystkie drzwi dokładnie raz. Kapturek dobrze znała ten domek i przy każdej wizycie planowała remont swojej chatki, żeby móc przechadzać się w taki sposób. Po krótkim rekonesansie pożegnała się z krasnoludkami i trasą na skróty, prosto z kuchni, bez używania drzwi wyjściowych wróciła do swojej chałupki. Tak upłynął poranek menadżerowi jednoosobowej działalności gospodarczej Kurierski Kapturek.

*Małą Deltę przygotowała Kamila ŁYCZEK*

## Warto debatować... po oksfordzku

Nastała w Polsce era debat oksfordzkich, a ja od kilku lat jestem ich wielbiczką, ponieważ mam dosyć połajanek, kłótni bez elegancji i zawodów w „równoległym mówieniu”, w które tak obfitują stacje telewizyjne. Debata oksfordzka to spotkanie zwolenników i przeciwników dobrze i jednoznacznie sformułowanej tezy. Każdy „obóz” reprezentują trzej mówcy, naprzemienny czas wystąpień jest ściśle przestrzegany, po nich możliwe są wypowiedzi z grona publiczności, wreszcie krótkie podsumowania i ogólne głosowanie.

Debaty oksfordzkie wkroczyły do szkół, w tym roku odbyły się nawet III Szkolne Mistrzostwa Polski, (72 drużyny z 70 szkół z 15 województw), które wygrało V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Tylko w roku, który mija, 300 mówców w szkołach nauczyło się, jak wyrażać swoje poglądy treściwie i... kulturalnie. Należy mieć nadzieję, że takie spotkania z młodzieżą znajdą swoje odbicie za kilka lat w tonie i poziomie debat publicznych.

Otwarte debaty oksfordzkie organizują także (nieprzypadkowo przecież) polscy absolwenci brytyjskich uczelni i tylko w bieżącym roku ich tezy brzmiały: *Bez imigrantów Europę czeka porażka* (zwyciężyła w plebiscycie publiczności opozycja do tezy), *Eutanazja powinna zostać zalegalizowana* (zwyciężyli obrońcy tezy), *Nie wolno śmiać się z religii* (zwyciężyła opozycja) i *Polska szkoła dusi kreatywność młodych ludzi* (zwyciężyli obrońcy tezy). Jeszcze we wrześniu zaplanowano debatę *Przyjęcie uchodźców będzie historycznym błędem Polski* i debata ta nie odbyła się. To także ciekawy przyczynek do naszych oksfordzkich debat, ponieważ przyczyną odwołania był planowany udział Janusza Korwin-Mikkego. Dyrekcja gospodarza spotkania (Teatr Powszechny) nie zgodziła się na tego uczestnika, jako na człowieka, który w swoich wypowiedziach dalece przekroczył zwyczaj i słownictwo ludzi dobrze wychowanych. Z dyrekcją zgodziło się wielu internautów, jestem wśród nich.

W Centrum Nauki Kopernik świadcowałam debacie *Ziemia staje się coraz lepszym środowiskiem dla życia*. I w tej debacie, jak w licznych innych, okazywało się, że trudno jest precyzyjnie określić *o czym mówić będziemy?*, choć od tej precyzji zależy poziom debaty. Wypunktował to profesor Bogusław Pawłowski, antropolog z Wrocławia. Co to znaczy lepszym? Dla kogo lepszym? O jakim życiu mówimy? W końcu wyjaśniono wzajemnie, że dyskusja odbędzie się wokół pytań, na ile lepiej (zdrowiej, racjonalniej) żyć będzie człowiek.

Reprezentujący opozycję redaktor Wojciech Orliński mówił o kryzysie wodnym, zmianach klimatu, klęskach tradycyjnego rolnictwa, uchodźcach, i ostrzegał przed europocentryzmem.

Druga strona argumentowała: średnia długość życia ludzi na planecie rośnie, demokracja umożliwia łatwiejsze życie różnym grupom, zmniejsza wykluczanie. Poprawiają się osiągnięcia medycyny (choć droższą procedurą). Sieci społecznościowe „sieciują”, umożliwiając szybką komunikację globalną, przypomniano o lososiach w Tamizie.

Adam Wajrak (opozycja do tezy) cytował liczby o wymieraniu gatunków prowadzącym do degradacji biosfery. Przełowiliśmy i zakwasiliśmy oceany, wycinamy ostatnie pierwotne lasy...

Konflikt w Syrii – mówili z przekonaniem przedstawiciele opozycji – to pierwsza wojna o zasięgu światowym, wywołana zmianami klimatycznymi. A wiele lat temu to Ryszard Kapuściński przepowiadał przyszłe wojny Północ-Południe, wojny... o dostęp do pitnej wody.

Razem doszliśmy do wniosku, że dopiero zaczynamy rozumieć, jakie szkody sami Ziemi wyrządzamy. Od rozumienia do właściwych działań droga może być długa...

W głosowaniu zwyciężyła opozycja do tezy. Pesymiści.

Magdalena FIKUS



# Rzut butem, czyli twierdzenie Chaslesa

Marek KORDOS



Niedawno podczas rozmowy z kolegami – młodymi matematykami i fizykami – zorientowałem się, że dla nich informacja o tym, jak wyglądają wszystkie możliwe ruchy obiektu materialnego w trójwymiarowej przestrzeni, jest zaskakująca. Chodzi o następujący obrazowy opis.

*Zdjąłem z nogi but i cisnąłem nim byle jak, po czym on upadł byle gdzie i jakoś tam leży. Istnieje ruch po linii śrubowej, za pomocą którego można kulturalnie przenieść ten but z obecnego położenia na moją nogę.*

Wyrażając się żargonowo (czyli fachowo), można powyższą anegdotę wyrazić zdaniem

*każda niezminiająca orientacji izometria przestrzeni trójwymiarowej jest ruchem śrubowym, czyli złożeniem obrotu z przesunięciem równoległym do jego osi.*

Jest to fragment twierdzenia Michela Chaslesa (czyt. Szala), w którym sklasyfikował on wszelkie izometrie (czyli przekształcenia niezmińjące odległości) na płaszczyźnie i w przestrzeni.

Słowo „orientacja” użyte wyżej tłumaczy, dlaczego w anegdotce rzuciłem butem – żaden rzut nie zmieni buta prawego na lewy ani lewego na prawy.

Zamiast ubolewać nad nieświadomością młodego pokolenia, przyjrzyjmy się temu twierdzeniu.

Oto pełne brzmienie twierdzenia Chaslesa dla płaszczyzny.

*Każda izometria płaszczyzny jest przesunięciem, obrotem lub symetrią z poślizgiem* (czyli złożeniem symetrii osiowej z przesunięciem równoległym do jej osi). *Orientację zachowują pierwsze dwa z tych przekształceń.*

Dla przestrzeni wygląda ono tak.

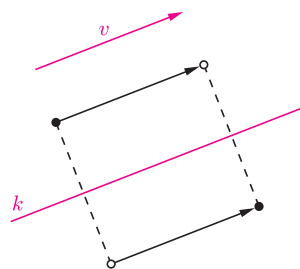
*Każda izometria przestrzeni to ruch śrubowy, symetria z poślizgiem* (czyli złożenie symetrii płaszczyznowej z przesunięciem o wektor równoległy do tej płaszczyzny) *lub symetria obrotowa* (czyli złożenie symetrii płaszczyznowej z obrotem względem prostej prostopadłej do tej płaszczyzny).

W obu tych twierdzeniach, obok przesunięć i obrotów, występują raczej egzotyczne dla ogółu nazwy – czemu Chasles zwrócił uwagę akurat na takie przekształcenia? Odpowiedź jest zaskakująco prosta: w każdym z nich kolejność wykonywania ich składowych przekształceń nie ma wpływu na wynik, czyli ich składanie jest przemienne. Obojętne jest, czy mając w przestrzeni obrót względem prostej i przesunięcie o wektor równoległy do tej prostej, najpierw wykonamy obrót, a potem przesunięcie, czy też najpierw przesunięcie, a potem obrót. Podobnie jest w pozostałych przypadkach. Jeszcze ciekawsze jest to, że składanie przesunięć, obrotów i symetrii przemienne jest tylko w wymienionych w twierdzeniach Chaslesa przypadkach. Łatwo objaśnić to na obrazkach – w przypadku symetrii z poślizgiem na płaszczyźnie demonstrują to rysunki 1 i 2.

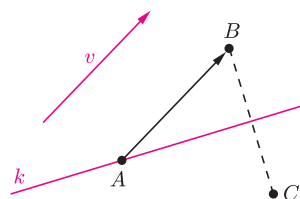
Droga do dowodu twierdzenia Chaslesa wiedzie przez wykazanie, że każdą izometrię można uzyskać przez złożenie symetrii osiowych w przypadku płaszczyzny czy płaszczyznowych w przypadku przestrzeni.

W tym celu przyjrzyjmy się punktom stałym izometrii. Gdy izometria ma punkt stały  $P$ , to zachowuje ona okręgi o środku w  $P$  w przypadku płaszczyzny i sfery o środku w  $P$  w przypadku przestrzeni. Gdy stały jest jeszcze inny punkt  $Q$ , to w obu przypadkach wszystkie punkty prostej  $PQ$  są stałe (rys. 3). Gdy na dodatek stały jest jeszcze pewien punkt  $R$  nieleżący na tej prostej, to stałe są wszystkie punkty płaszczyzny  $PQR$  (rys. 4).

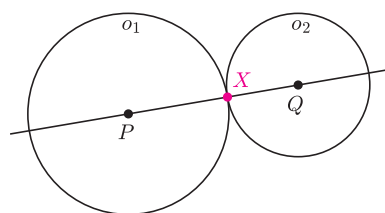
Gdy mamy do czynienia z przestrzenią, są jeszcze punkty poza tą płaszczyzną – Czytelnik Sprawny w mgnieniu oka przystosuje rozumowanie z rysunku 4



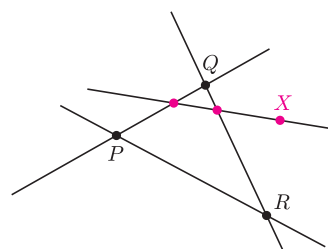
Rys. 1. Gdy  $v \parallel k$ , kolejność wykonywania przesunięcia i symetrii jest dowolna.



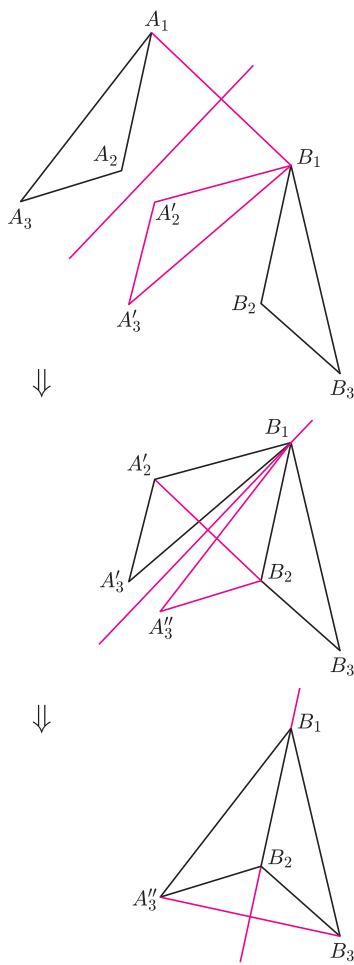
Rys. 2. Gdy  $v \nparallel k$ , obrazem punktu  $A$  w przesunięciu i symetrii będzie punkt  $C$ , a w symetrii i przesunięciu punkt  $B$ .



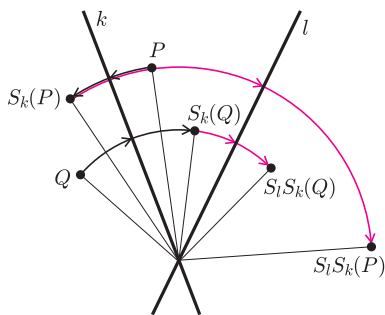
Rys. 3. Jeśli  $P$  jest punktem stałym, obraz  $X$  pozostaje na  $o_1$ . Gdy również  $Q$  jest punktem stałym, obraz  $X$  pozostaje na  $o_2$ , a zatem nie rusza się.



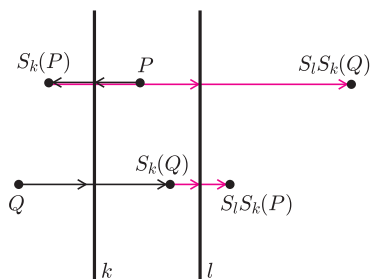
Rys. 4. Jeśli  $P, Q, R$  są punktami stałymi, stałe są wszystkie punkty prostych  $PQ, QR, RP$ . Zatem prosta przechodząca przez  $X$  i przecinająca dwie z tych prostych ma dwa punkty stałe, stąd stałe są wszystkie jej punkty, a więc i  $X$ .



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

do wykazania, że gdy istnieje wśród nich punkt stały, to stałe są wszystkie punkty przestrzeni. Zatem

*Jeśli izometria ma trzy niewspółliniowe punkty stałe na płaszczyźnie (cztery niewspółpłaszczyznowe punkty stałe w przestrzeni), to jest identyfikacją,*

nazywa się to **małym twierdzeniem o sztywności**. Ale jest i **duże**.

*Jeśli dwie izometrie pokrywają się na trzech niewspółliniowych punktach płaszczyzny (czterech niewspółpłaszczyznowych punktach przestrzeni), to są jednakowe.*

Istotnie, jeśli te izometrie to  $\varphi$  i  $\psi$ , to izometria  $\psi^{-1}\varphi$  jest w myśl małego twierdzenia o sztywności identyfikacją, mamy więc

$$\psi^{-1}\varphi = \text{id}, \text{ zatem } \psi\psi^{-1}\varphi = \psi, \text{ czyli } \varphi = \psi.$$

Kolejny krok to **twierdzenie o rozkładzie**.

*Każda izometria może być przedstawiona jako złożenie co najwyżej trzech symetrii osiowych w przypadku płaszczyzny (czterech symetrii płaszczyznowych w przypadku przestrzeni).*

Oto recepta na ich znalezienie. Zajmijmy się płaszczyzną. W myśl twierdzenia o sztywności wystarczy pokazać złożenie trzech symetrii, które nałoży dane dwa trójkąty przystające, nazwijmy je  $A_1A_2A_3$  i  $B_1B_2B_3$ . Przepis jest następujący.

*Jeśli  $A_1 \neq B_1$ , wykonaj symetrię trójkąta  $A_1A_2A_3$  względem symetralnej odcinka  $A_1B_1$ ; otrzymasz trójkąt  $B_1A'_2A'_3$ .*

*Jeśli teraz  $A'_2 \neq B_2$ , wykonaj symetrię trójkąta  $B_1A'_2A'_3$  względem symetralnej odcinka  $A'_2B_2$ ; otrzymasz trójkąt  $B_1B_2A''_3$ .*

*Jeśli jeszcze  $A''_3 \neq B_3$ , wykonaj symetrię trójkąta  $B_1B_2A''_3$  względem symetralnej odcinka  $A''_3B_3$ .*

(Czytelnik Zinformatyzowany oczywiście w mgnieniu oka zamieni ten przepis na króciutki pseudokod.)

Działanie tego przepisu w przypadku, gdy aż trzy razy trzeba zastosować symetrię, przedstawia rysunek 5. To, nad czym trzeba chwilę się zastanowić, to fakt, że kolejna symetria nie „rozkleja” już nałożonych punktów – gwarantuje to założone przystawanie trójkątów.

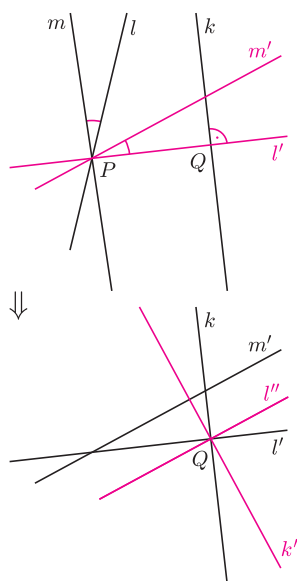
Każdy Czytelnik, który doczytał do tego miejsca, bez trudu poradzi sobie z podaniem analogicznego przepisu dla przestrzeni (przypominam, że symetralna odcinka w przestrzeni jest płaszczyzną).

Warto zwrócić uwagę na bezpośrednie wnioski z twierdzeń o sztywności, jakie w szczególnych przypadkach wzmacniają twierdzenie o rozkładzie. Jeśli np. izometria płaszczyzny ma punkt stały, to zawsze da się rozłożyć na co najwyżej dwie symetrie, a gdy ma dwa punkty stałe, to jest symetrią lub identyfikacją. Podobnie jest w przypadku izometrii przestrzeni – gdy wiemy, że są punkty stałe, liczba niezbędnych symetrii do jej uzyskania zmniejsza się.

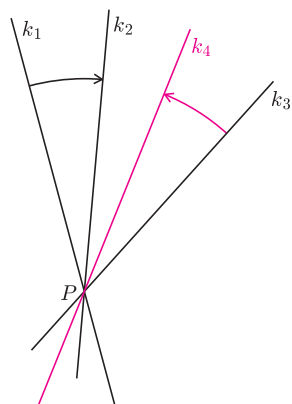
Przypomnijmy teraz sobie (bo przecież wszyscy to wiedzą lub wiedzieli), że złożenie dwóch symetrii względem przecinających się prostych na płaszczyźnie (płaszczyzn w przestrzeni) to obrót o kąt dwukrotnie większy niż między nimi (rys. 6). Podobnie, złożenie dwóch symetrii względem prostych równoległych na płaszczyźnie (płaszczyzn równoległych w przestrzeni) jest przesunięciem o wektor dwukrotnie większy niż między nimi (rys. 7).

Pozwala to na stwierdzenie, że złożenie symetrii względem trzech prostych na płaszczyźnie jest zawsze symetrią z poślizgiem. Rozpatrzmy przypadek szczególny: składamy symetrie względem prostych  $k, l, m$ , przy czym  $l$  i  $m$  mają punkt wspólny  $P$ , przez który prosta  $k$  nie przechodzi. Wtedy zastępujemy proste  $l$  i  $m$  tworzącymi ten sam kąt prostymi  $l'$  i  $m'$  przechodzącymi przez  $P$ , przy czym  $l'$  jest prostopadła do  $k$ . Jeśli chodzi o przekształcenie, to nic się nie zmieniło, bo  $S_{m'}S_{l'}$  jest tym samym obrotem co  $S_mS_l$ , a więc

$$S_mS_lS_k = S_{m'}S_{l'}S_k.$$



Rys. 8



Rys. 9

Oznaczmy punkt przecięcia prostokątnych prostych  $k$  i  $l'$  przez  $Q$ . Teraz zastąpimy te proste przez inne przechodzące przez  $Q$  proste prostokątne  $k'$  i  $l''$ , takie, że  $k'$  jest prostokątna do  $m'$ . I znów mamy (rys. 8)

$$S_m S_l S_k = S_{m'} S_{l'} S_k = S_{m'} S_{l''} S_{k'},$$

czyli nasze przekształcenie okazało się złożeniem symetrii względem  $k'$  i przesunięciem o podwojony wektor łączący prostokątne  $l''$  i  $m'$ , czyli symetrią z poślizgiem.

Czytelnik Nieuwny może teraz powtórzyć podobne operacje w innych możliwych przypadkach położenia trzech prostych na płaszczyźnie. No i oczywiście natknie się na sytuacje, w których jest to niemożliwe – mianowicie wtedy, gdy trzy osie symetrii mają wspólny kierunek albo też wspólny punkt. Na szczęście sytuację tę reguluje **twierdzenie o redukcji**.

*Na płaszczyźnie złożenie symetrii względem trzech prostych mających wspólny punkt (lub kierunek) można zastąpić jedną symetrią względem prostej również przechodzącej przez ten punkt (mającą ten kierunek).*

*W przestrzeni złożenie symetrii względem trzech płaszczyzn mających wspólną prostą (lub parami równoległych) można zastąpić jedną symetrią względem płaszczyzny również przechodzącej przez tę prostą (równoległą do nich).*

Weźmy bowiem pod uwagę trzy proste  $k_1, k_2, k_3$  na płaszczyźnie (płaszczyzny  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  w przestrzeni) mające wspólny punkt  $P$  (wspólną prostą  $p$ ). Jeśli kąt od  $k_1$  do  $k_2$  jest równy  $\alpha$ , to zastępując je prostą (płaszczyzną) jest taka prosta  $k_4$  (płaszczyzna  $\pi_4$ ) przechodząca przez  $P$  ( $p$ ), że kąt od  $k_3$  do  $k_4$  (od  $\pi_3$  do  $\pi_4$ ) jest równy  $-\alpha$  (rys. 9). Wówczas  $S_{k_4} S_{k_3} S_{k_2} S_{k_1}$  jest obrotem o kąt  $\alpha + (-\alpha) = 0$ , czyli jest identycznością. A więc mamy

$$S_{k_4} S_{k_3} S_{k_2} S_{k_1} = \text{id}, \quad \text{zatem} \quad S_{k_4} S_{k_4} S_{k_3} S_{k_2} S_{k_1} = S_{k_4}, \quad \text{czyli} \quad S_{k_3} S_{k_2} S_{k_1} = S_{k_4}$$

i tak samo będzie dla płaszczyzn.

Zupełnie analogicznie postępujemy w przypadku, gdy proste (płaszczyzny) są równoległe: gdy wektor łączący prostokątne  $k_1$  i  $k_2$  (czy  $\pi_1$  i  $\pi_2$ ) to  $v$ , jako  $k_4$  bierzemy taką prostą (płaszczyznę  $\pi_4$ ) równoległą do danych, którą z  $k_3$  (z  $\pi_3$ ) łączy wektor  $-v$ .

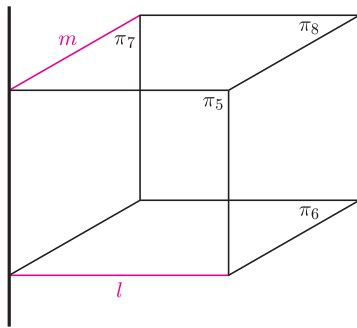
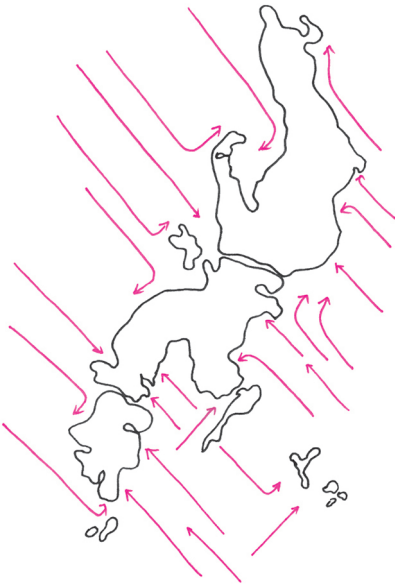
A więc w przypadku płaszczyzny ze złożenia trzech symetrii otrzymujemy zawsze symetrię z poślizgiem – być może zerowym.

Gdy chcemy stwierdzić jednak, jak wyglądają izometrie powstałe ze złożenia symetrii względem trzech płaszczyzn niespełniających założeń twierdzenia o redukcji, sytuacja nie jest już tak bezproblemowa.

Jak wiadomo (czy na pewno wiadomo?), dowolne trzy płaszczyzny mają wspólny punkt lub wspólną płaszczyznę prostokątną.

Ten drugi przypadek jest powtórzeniem sytuacji z płaszczyzny (tak, jak byśmy patrzyli prostokątnie do tej wspólnej prostokątnej). Tak więc symetrie z poślizgiem w przestrzeni mamy załatwione.

Pozostaje zbadać, co się dzieje, gdy składamy trzy symetrie względem płaszczyzn mających punkt wspólny  $O$  – nazwijmy wynik tego złożenia  $\chi$ . Dogodnym chwytem jest tu złożenie  $\chi$  z symetrią względem  $O$ , oznaczmy ją  $\omega$ . Symetria względem punktu w przestrzeni to złożenie trzech symetrii płaszczyznowych względem płaszczyzn prostokątnych (w układzie współrzędnych byłoby to  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ ). Otrzymujemy zatem złożenie sześciu symetrii płaszczyznowych, co wobec uwag po twierdzeniu o rozkładzie (jest punkt stały!) oznacza, iż jest to obrót względem jakiejś prostej przez  $O$  – oznaczmy ją  $t$ , a sam obrót przez  $\tau$  (istotnie, złożenie sześciu symetrii da się przedstawić jako złożenie czterech, a punkt stały zmniejsza to do trzech; z kolei fakt, że sześć symetrii płaszczyznowych nie zmienia orientacji, zmniejsza trzy do dwóch). Mamy więc  $\omega\chi = \tau$ , a więc  $\chi = \omega^{-1}\tau = \omega\tau$ , gdyż symetria względem punktu jest (jak wszystkie symetrie) inwolucją, czyli jest odwrotna sama do siebie.



Rys. 10

Trzy symetrie składające się na  $\omega$  możemy dobrać tak, by dwie z nich były symetrami względem dowolnych płaszczyzn prostopadłych przechodzących przez  $t$  – trzecia wobec tego będzie do  $t$  prostopadła. Korzystając z tych oznaczeń, mamy dwa obroty względem  $t$ : jeden z nich to  $\tau$ , a drugi to symetria o osi  $t$  – czyli w sumie jeden obrót o kąt sumaryczny – oraz symetrię względem płaszczyzny prostopadłej do  $t$ . Zatem  $\chi$  rzeczywiście jest symetrią obrotową.

I w ten sposób pozostało nam już tylko rozpatrzenie sytuacji, gdy izometria przestrzeni jest złożeniem czterech symetrii płaszczyznowych i nie ma punktów stałych.

W tym celu weźmy pod uwagę jakąś izometrię  $\varphi$  niezmienną orientacji i niech ona przeprowadza pewien punkt  $A$  na  $A' \neq A$ . Oznaczmy przez  $\pi_4$  symetralną  $AA'$ . Przekształcenie  $S_{\pi_4}\varphi$  zmienia orientację i ma punkt stały (mianowicie  $A$ ) – jest zatem symetrią obrotową. Mamy więc  $S_{\pi_4}\varphi = \rho S_{\pi_1}$ , gdzie  $\rho$  jest obrotem (oznaczmy jego oś przez  $k$ ), przy czym  $k \perp \pi_1$ . Przedstawmy  $\rho$  jako złożenie symetrii względem zawierających  $k$  płaszczyzn  $\pi_2$  i  $\pi_3$  – jest tu (jak zawsze przy obrotach) duża dowolność – niech więc  $\pi_3$  będzie prostopadła do  $\pi_4$  (oczywiście  $\pi_2 \perp \pi_1 \perp \pi_3$ ).

Mamy więc  $S_{\pi_4}\varphi = S_{\pi_3}S_{\pi_2}S_{\pi_1}$ , czyli  $\varphi = S_{\pi_4}S_{\pi_3}S_{\pi_2}S_{\pi_1} = (S_{\pi_4}S_{\pi_3})(S_{\pi_2}S_{\pi_1})$ ; są to – wobec  $\pi_1 \perp \pi_2$  i  $\pi_3 \perp \pi_4$  – dwie symetrie osiowe. Oznaczmy ich osie przez  $l$  i  $m$ . Zatem  $\varphi = S_m S_l$ . Proste  $k$  i  $l$  są skośne – gdyby były równoległe,  $\varphi$  byłoby przesunięciem, a więc złożeniem dwóch symetrii płaszczyznowych, gdyby zaś się przecinały, istniałby punkt stały.

Dowolne dwie proste skośne leżą w pewnych płaszczyznach równoległych – przedstawmy więc symetrie względem  $l$  i  $m$  w następujący sposób (patrz rys. 10):

$$S_l = S_{\pi_6}S_{\pi_5}, \quad S_m = S_{\pi_8}S_{\pi_7} \quad \text{i} \quad \pi_6 \parallel \pi_8.$$

Zauważmy, że wtedy również płaszczyzny  $\pi_6$  i  $\pi_7$  są prostopadłe, zatem

$$\varphi = S_{\pi_8}S_{\pi_7}S_{\pi_6}S_{\pi_5} = S_{\pi_8}S_{\pi_6}S_{\pi_7}S_{\pi_5} = (S_{\pi_8}S_{\pi_6})(S_{\pi_7}S_{\pi_5}) = \tau\vartheta,$$

gdzie  $\vartheta$  to obrót o osi  $\pi_5 \cap \pi_7$ , a  $\tau$  to przesunięcie wzdłuż tej osi.

Twierdzenie Chaslesa dla przestrzeni zostało tym samym udowodnione.

Warto wiedzieć, że Chasles udowodnił również twierdzenia klasyfikujące podobieństwa na płaszczyźnie i w przestrzeni. Ale może o tym innym razem...

## Czekanie na renesans

Współczesna fizyka teoretyczna przypomina trochę archipelag wysp poddany działaniu żywiołów, wynoszony w górę ruchami tektonicznymi, ale równocześnie niszczone bezlitosnym smaganiem fal. Części wewnętrzne wysp, niosące praktycznie całokształt kultury materialnej tego ładu, nie doznają przy tym żadnego uszczerbku, można wręcz rzec, że systematycznie się powiększają. Co innego z nabrzeżem, które stale się zmienia i to w dość nieprzewidywalny sposób. Tu wynurzy się przesmyk między dwiema wysepkami, gdzie indziej zaś podmyty klif malowniczo pograży się w odmętach. Przypadkowy turysta, mający natychmiastowy dostęp do wszelkiego rodzaju informacji i, paradoksalnie, przez to coraz bardziej nieprzygotowany do poznawania obcych krain, może łatwo przedłożyć wrażenia dostarczane przez surowe piękno przybrzeżnej kipieli nad żmudne przedzieranie się przez zawilgości ornamentyki miejscowych świątyń, zwłaszcza gdy do każdego rodzaju rozrywek może bez trudu wynająć kompetentnego przewodnika.

Fizycy zajmujący się popularyzacją stają nierzadko przed dylematem, czy lepiej edukować współobywateli, dostarczając im solidnej porcji ugruntowanej wiedzy, czy też zaciekawiać ich, ukazując burzliwe dyskusje toczące się na froncie badań, gdzie nauka znajduje się *in statu nascendi*, a ugruntowana wiedza wyloni się dopiero z piany idei śmiałych i szalonych. Właśnie tę drugą drogę obrał w swej najnowszej tłumaczonej na język polski książce Lee Smolina.

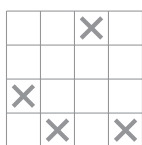
Autor rozpoczyna swe rozważania od stwierdzenia, że wszystkie wielkie teorie fizyczne – mechanika klasyczna, mechanika kwantowa czy ogólna teoria względności – opisują deterministyczną ewolucję układów fizycznych. Skoro zaś cała przyszłość określona jest przez teraźniejszość, a ta z kolei przez przeszłość, to czy istnieje we wszechświecie jakaś fizycznie istotna zmienność niebędąca tylko złudą wynikającą z ludzkiego sposobu doświadczania rzeczywistości? A w szczególnym przypadku wszechświata jako całości – czy wartości opisujących go parametrów są wynikiem jakiejś deterministycznej „decyzji”? Dalej zaś skrzy się szaleństwo i śmiałość pomysłów przywoływanych przez Smolina, niestety, bez oczywistego kryterium wyboru. Pomysłów, którym – w przeciwieństwie do innych, konkurencyjnych koncepcji – często nie udało się zainteresować wielu badaczy, czy wręcz otworzyć nowe pola badań. Stan ten niezbyt mnie dziwi, bowiem przy lekturze wcale obszernych fragmentów książki nie byłem się w stanie zgodzić z niczym, co miałem przed oczami, może poza kolejnością numeracji stron. Była to jednak niezgoda radosna i inspirująca, książka Smolina jest bowiem świetnie napisana, bogata w informacje, wciągająca i stymulująca – to bynajmniej nie książka popularno-naukowa, raczej pełen żaru osobisty manifest. Czytać? Warto. Wierzyć Smolinowi, że tak właśnie wygląda fizyka? Na własną odpowiedzialność.

K. T.

Lee Smolin, *Czas odrodzony. Od kryzysu w fizyce do przyszłości wszechświata*, Prószyński Media, Warszawa 2015.



## Informatyczny kącik olimpijski (87): Zliczamy puste prostokąty



Rys. 1. Przykładowy kwadrat rozmiaru  $n = 4$  z czterema polami zabronionymi (zaznaczone krzyżykami). Największy pusty prostokąt ma rozmiar  $2 \times 3$ . Poniższa tabelka przedstawia licznosci pustych prostokątów dla wszystkich rozmiarów  $h \times w$ :

| $h \times w$ | Liczba | $h \times w$ | Liczba |
|--------------|--------|--------------|--------|
| $1 \times 1$ | 12     | $2 \times 1$ | 7      |
| $1 \times 2$ | 6      | $2 \times 2$ | 3      |
| $1 \times 3$ | 3      | $2 \times 3$ | 1      |
| $1 \times 4$ | 1      | $3 \times 1$ | 3      |

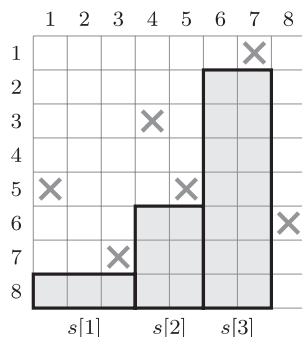
W tym miesiącu zajmiemy się dość klasycznym zadaniem. Dany jest kwadrat rozmiaru  $n \times n$  podzielony na  $n^2$  pól, przy czym niektóre pola są zabronione. Dowolny zawarty w tym kwadracie prostokąt, który nie zawiera żadnego pola zabronionego, nazwiemy *prostokątem pustym* (rys. 1). Należy znaleźć pusty prostokąt o jak największym polu.

To zadanie nie powinno być nowością ani dla miłośników zadań olimpijskich (pojawiło się m.in. na IX Olimpiadzie Informatycznej jako zadanie pt. *Działka*), ani dla stałych czytelników *Delty* (omawialiśmy jego rozwiązanie w artykule *Prostokąt arytmetyczny* w numerze 3/2012). Co więcej, różne modyfikacje tego zadania pojawiały się też (i nadal pojawiają) na innych konkursach. Przykładowe modyfikacje mogą polegać na tym, że jesteśmy proszeni o znalezienie pustego prostokąta o największym obwodzie, liczby pustych prostokątów czy też sumarycznego pola powierzchni wszystkich pustych prostokątów. I choć główna idea rozwiązania wszystkich tych wersji zadania jest taka sama, to różnią się one w szczegółach, które każdorazowo trzeba dopracować. Tutaj przedstawimy dość ogólną metodę, która pozwoli nam bardzo łatwo rozwiązywać podobne zadania. A mianowicie pokażemy, jak wyznaczyć w sumarycznym czasie  $O(n^2)$  liczbę pustych prostokątów rozmiaru  $h \times w$  dla wszystkich wartości  $1 \leq h, w \leq n$ .

Pole leżące na przecięciu  $i$ -tego wiersza i  $j$ -tej kolumny kwadratu będzie miało współrzędne  $(i, j)$ . Przede wszystkim dla każdego pola  $(i, j)$  będziemy chcieli znać liczbę niezabronionych pól leżących powyżej niego (włącznie z tym polem); oznaczymy tę wartość przez  $d[i, j]$ . Całą tablicę  $d$  łatwo obliczyć w czasie  $O(n^2)$ , gdyż  $d[i, j] = 0$ , jeśli pole  $(i, j)$  jest zabronione oraz  $d[i, j] = d[i - 1, j] + 1$  w przeciwnym przypadku. Dla uproszczenia zakładamy również, że wszystkie pola poza kwadratem są zabronione i  $d[i, 0] = d[i, n + 1] = 0$ .

Rozwiązanie podzielimy na  $n$  faz; w  $i$ -tej fazie będziemy rozpatrywać prostokąty, których dolny bok zawiera pola z  $i$ -tego wiersza. Ustalmy pewne pole  $(i, j)$  i rozważmy wszystkie puste prostokąty, których prawy dolny róg znajduje się na tym polu. Zbiór wszystkich pól, w których może znajdować się lewy górny róg takiego pustego prostokąta, jest *obszarem*, którego górny obris składa się z odcinków idących w prawo i do góry. Taki obszar będziemy reprezentowali jako sumę minimalnej liczby rozłącznych prostokątów o coraz większych wysokościach, których dolne boki dotykają  $i$ -tego wiersza (rys. 2). Rozmiary  $h \times w$  kolejnych prostokątów będziemy trzymać na stosie, co umożliwi nam łatwe uaktualnianie tej reprezentacji, jeśli będziemy przeglądać kolumny od lewej do prawej.

Stos będziemy trzymać w tablicy  $s$  (wysokości i szerokości  $i$ -tego prostokąta na stosie to odpowiednio  $s[i].h$  oraz  $s[i].w$ ), a liczbę jego elementów w zmiennej  $m$ . Poniższy pseudokod pokazuje, jak uaktualnić zawartość stosu dla pola  $(i, j - 1)$ , aby odpowiadała ona polu  $(i, j)$ . Dopóki wysokość  $s[m].h$  najwyższego prostokąta na stosie jest co najmniej tak duża jak  $d[i, j]$ , to usuwamy go ze stosu. Następnie wrzucamy na stos prostokąt rozmiaru  $d[i, j] \times w$ , gdzie  $w$  jest sumaryczną długością wszystkich usuniętych prostokątów plus 1.



Rys. 2. Zacieniono trzy prostokąty, które reprezentują obszar dla pola  $(8, 7)$ . Poniższa tabelka przedstawia zawartość stosu dla pól  $(8, j)$ , gdy  $0 \leq j \leq 9$ .

| $j$ | $d[8, j]$ | Stos (elementy $h \times w$ )        |
|-----|-----------|--------------------------------------|
| 0   | 0         | pusty                                |
| 1   | 3         | $3 \times 1$                         |
| 2   | 8         | $3 \times 1, 8 \times 1$             |
| 3   | 1         | $1 \times 3$                         |
| 4   | 5         | $1 \times 3, 5 \times 1$             |
| 5   | 3         | $1 \times 3, 3 \times 2$             |
| 6   | 8         | $1 \times 3, 3 \times 2, 8 \times 1$ |
| 7   | 7         | $1 \times 3, 3 \times 2, 7 \times 2$ |
| 8   | 2         | $1 \times 3, 2 \times 5$             |
| 9   | 0         | pusty                                |

```

w := 0;
while m > 0 and s[m].h ≥ d[i, j] do
    inc(w, s[m].w);
    dec(m);
inc(m);
s[m].w := w + 1;
s[m].h := d[i, j];
    
```

Zauważmy, że każdy prostokąt usuwany ze stosu jest kandydatem na największy pusty prostokąt. Co więcej, wystarczy, że rozpatrzemy tylko tych kandydatów. Ponieważ dla ustalonego  $i$  liczba operacji wykonanych na stosie jest  $O(n)$ , gdyż wrzucamy na niego  $n$  elementów, zatem cały algorytm działa w czasie  $O(n^2)$ .

Aby wyznaczyć liczbę pustych prostokątów wszystkich rozmiarów, postąpimy nieco sprytniej. Zachowamy następujący niezmiennik: jeśli znajdujemy się na polu  $(i, j)$ , to znaczy, że policzyliśmy już te puste prostokąty, których prawy

dolny róg jest na polu  $(i, j')$  dla  $j' < j$  i jednocześnie *nie* są one zawarte w obszarze dla pola  $(i, j)$ .

Zatem zwiększanie obszaru (poprzez wrzucanie nowych elementów na stos) nigdy nie będzie zmieniać liczności rozważonych pustych prostokątów, natomiast usuwanie elementów ze stosu może powodować konieczność aktualizacji.

Wszystkie pola usuniętego prostokąta  $s[m]$ , które znajdują się w odległości co najmniej  $h := \max(s[m-1].h, d[i, j])$  od wiersza  $i$  na pewno zostaną usunięte z obszaru (zakładamy przy tym, że  $s[0].h = 0$ ). Musimy zatem policzyć puste prostokąty zawarte w prostokącie  $s[m]$ , które przestaną być w tym obszarze zawarte, czyli ich lewy górny róg jest jednym z pól, które zostaną usunięte z obszaru. Te prostokąty mają wysokości od  $h + 1$  do  $s[m].h$  oraz szerokości od 1 do  $s[m].w$ , przy czym prostokątów o rozmiarze  $y \times x$  jest  $s[m].w + 1 - x$  (rys. 3).

Należy też uważnie rozważyć przypadek, gdy dla danego pola  $(i, j)$  usuwamy więcej niż jeden element ze stosu. Wtedy szerokość aktualnie usuwanego elementu należy zwiększyć o szerokości usuniętych poprzednio (wygodnie jest tu korzystać z wprowadzonej już zmiennej  $w$ ).

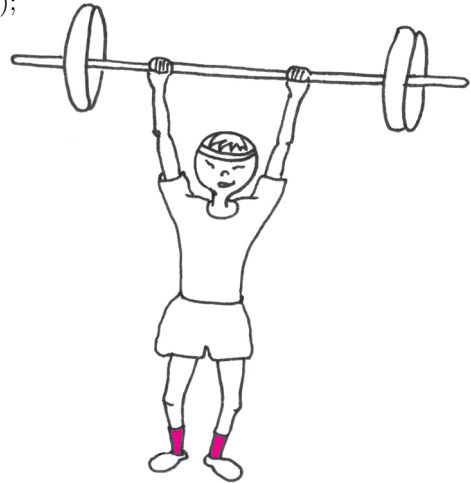
Jeśli zatem liczności pustych prostokątów będziemy zapisywać w tablicy  $c$  (gdzie  $c[y, x]$  oznacza liczbę pustych prostokątów rozmiaru  $y \times x$ ), to mamy do rozwiązania następujący problem: dla danych liczb  $h_1, h_2$  i  $w$  chcemy szybko wykonywać operację zwiększania komórek  $c[y, x]$  o wartość  $w + 1 - x$  dla  $h_1 \leq y \leq h_2$  oraz  $1 \leq x \leq w$ . Nie możemy, oczywiście, pozwolić sobie na zrobienie tego zupełnie naiwnie. Zakładając, że początkowo w tablicy  $c$  są same zera, zastosujemy następujący trik: do komórki  $c[h_1, w]$  wpisujemy 1, a do komórki  $c[h_2 + 1, w]$  wpisujemy  $-1$ . Następnie niezależnie w każdej kolumnie tablicy  $c$  obliczymy sumy prefiksowe. To spowoduje, że jedynki znajdą się w komórkach  $c[y, w]$  dla  $h_1 \leq y \leq h_2$  (a  $-1$  zniknie). Następnie w każdym wierszu obliczymy „trochę lepsze” sumy sufiksowe, które każdą jedynkę w komórce  $c[y, x]$  zamienią na ciąg liczb  $x, x - 1, \dots, 1$  w komórkach  $c[y, 1], c[y, 2], \dots, c[y, x]$ . Po takich manipulacjach tablica  $c$  ma wartości zgodne z pojedynczą operacją zwiększania.

Nietrudno się przekonać, że jeśli chcemy wykonać więcej niż jedną operację zwiększania, to możemy najpierw zwiększyć wszystkie komórki  $c[h_1, w]$  o jeden i zmniejszyć odpowiadające im komórki  $c[h_2 + 1, w]$  o jeden, a dopiero na sam koniec jeden raz obliczyć powyższe sumy. Łącznie zajmie to czas  $O(n^2)$ , a pseudokod algorytmu może wyglądać następująco:

```

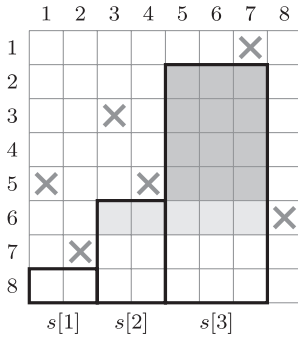
for i := 1 to n do
  for j := 0 to n + 1 do
    w := 0;
    while m > 0 and s[m].h ≥ d[i, j] do
      h := max(s[m - 1].h, d[i, j]);
      inc(w, s[m].w);
      inc(c[h + 1, w]);
      dec(c[s[m].h + 1, w]);
      dec(m);
    inc(m);
    s[m].w := w + 1;
    s[m].h := d[i, j];
  for i := 1 to n do
    for j := 1 to n do
      inc(c[i + 1, j], c[i, j]);
    c1 := c2 := 0;
    for j := n downto 1 do
      inc(c1, c[i, j]);
      inc(c2, c1);
      c[i, j] := c2;

```



Jako ćwiczenie dla Czytelnika proponujemy modyfikację tego algorytmu, aby dla każdego rozmiaru wyznaczał liczbę *maksymalnych* pustych prostokątów, czyli takich, które nie są zawarte w żadnym większym pustym prostokącie.

Tomasz IDZIASZEK



Rys. 3. Rozważając pole  $(8, 8)$ , usuwamy element  $s[3]$  ze stosu. Musimy wtedy policzyć  $4 \cdot 6$  prostokątów mających prawy dolny róg na polu  $(8, 7)$ , a lewy górny w ciemno zacienionym obszarze. Jest tam  $4 - x$  prostokątów rozmiaru  $y \times x$  dla  $4 \leq y \leq 7$  i  $1 \leq x \leq 3$ .

Następnie usuwamy element  $s[2]$  ze stosu, co powoduje zliczenie 15 prostokątów z jasno zacienionego obszaru ( $6 - x$  prostokątów rozmiaru  $3 \times x$  dla  $1 \leq x \leq 5$ ).



### Rozwiązanie zadania F 892.

Rozpatrzmy warunki równowagi  $k$ -tego naczynia. Z prawa Archimedesza wynika, że jeżeli wyjmie (w myśli) wszystkie naczynia pływające w  $k$ -tym naczyniu i dolejemy do niego tyle cieczy, aby zachować jej poziom wyjściowy, to siły działające na dno i ścianki naczynia ze strony cieczy w której ono pływa nie ulegną zmianie. Na  $k$ -te naczynie działa siła ciężkości  $km g$  ( $km$  – masa tego naczynia), ciężar nalanej do niego wody  $\rho k S h g$  ( $kS$  – pole powierzchni dna,  $h$  – wysokość poziomu wody w tym naczyniu) i siła wyporu  $\rho g V_z = \rho g k S h_z$ , gdzie  $V_z$  – objętość zanurzonej części naczynia,  $h_z$  – głębokość zanurzenia.

Z warunku równowagi dla tego naczynia mamy  $km = \rho k S \Delta h$ , gdzie  $\Delta h = h_z - h$  – różnica poziomów wody w rozpatrywanym naczyniu i w naczyniu w którym rozpatrywane naczynie pływa. Stąd  $\Delta h = m / (\rho S)$ . Wynika z tego, że różnica poziomów wody w dwóch dowolnych, sąsiednich naczyniach jest dla wszystkich naczyń taka sama. Przyjmijmy, że poziom wody w naczyniu stojącym na stole wynosi  $H$ . W następnym naczyniu wynosi on  $H - \Delta h$ , w kolejnym  $H - 2\Delta h$  itd. Całkowita objętość wody w naczyniach wynosi

$$\begin{aligned}
 & NSH - (N - 1)S\Delta h - \\
 & \quad - (N - 2)S\Delta h - \dots - S\Delta h = \\
 & = NSH - S\Delta h(1 + 2 + \dots + (N - 1)) = \\
 & = NSH - S\Delta h((N - 1)N/2) = \\
 & = NSH - (m(N - 1)N/(2\rho)),
 \end{aligned}$$

a stąd całkowita masa wody

$$M = NSH\rho - (m(N - 1)N/2)$$

i ostatecznie

$$H = M/(N\rho S) + m(N - 1)/(2\rho S).$$

## Przydatność poruszonych zdjęć

Obecnie prawie każdy ma aparat fotograficzny, np. w smartfonie. Poruszonymi zdjęciami mało kto się przejmuje, bo przecież można zrobić następne albo zrezygnować po sprawdzeniu, że nie da się uzyskać zadowalającego wyniku. Zapominamy (lub w ogóle nie mamy takich doświadczeń), jak to było (raptem dekadę, dwie temu), gdy zdjęć można było zrobić tylko 36 (bez zmiany kliszy), a wynik obejrzeć po wywołaniu (ciekawe, ilu naszych Czytelników nigdy z tego procesu nie korzystało lub nawet nie wie, co ten termin oznacza).

Również wtedy większość zdjęć była robiona przy dobrym oświetleniu, przy którym problem występował rzadko. Wielu z nas dobrze jednak pamięta TE świetne zdjęcia, które, niestety, wyszły poruszone.

Mogło się również zdarzyć, że zdjęcia były nieostre. Obecnie większość aparatów (poza co najmniej półprofesjonalnymi lub zabytkowymi) wykorzystuje autofokus, co niekoniecznie daje dobre efekty, bo ostrość może się nastawić nie na to, na co chcemy.

Oprócz układów automatycznie nastawianej ostrości w aparatach (niekoniecznie tych w smartfonach) montuje się układy stabilizujące obraz, które mają zapobiegać poruszeniu zdjęć. Czy i na ile to się udaje, to osobna sprawa. Można jednak zapytać, jak takie układy działają – umożliwiają one ruch soczewki lub matrycy, który kompensuje drganie ręki (efektywność tych rozwiązań jest silnie zależna od amplitudy takich drgań).

Z drugiej strony, między innymi w ramach „kreowania potrzeb konsumenta”, trwają prace nad możliwością wykonywania zdjęć trójwymiarowych. Sposobów, jak to można by było zrobić, wymyślono wiele, ale sukcesem komercyjnym mogłby być aparat, który bez jakiegokolwiek zmiany sprzętowej byłby w stanie takie zdjęcia robić. Dotychczasowe pomysły, polegające na wykorzystaniu tylko jednego obiektu, wiązały się z pewnymi modyfikacjami (np. maski w płaszczyźnie ogniskowej) obniżającymi jakość zwykłego zdjęcia.

W pracy [1] autorzy proponują (i testują) rozwiązanie, które mogłoby znaleźć zastosowanie w aparatach z autofokusem i mechanicznym stabilizatorem obrazu.

Dość prosto można zrozumieć o co chodzi bez analizy równań opisujących zjawisko. Widzimy trójwymiarowo, bo każde z naszych oczu rejestruje wzajemnie przesunięte obrazy, a mózg nauczył się je łączyć. Gdy zamkniemy jedno oko, to obraz traci głębię (należy wziąć pod uwagę, że mózg ma pamięć – należy ją świadomie wyzerować). Wystarczy jednak

zacząć ruszać głową, wykonując ruchy o amplitudzie rzędu rozstawu oczu, żeby wrażenie trójwymiarowości, przynajmniej częściowo, powróciło (zawdzięczamy to temu, że interpretacji takich sygnałów nasz mózg się też nauczył). Jeżeli świadomie obserwujemy, co widzimy jednym, poruszonym wraz z głową, okiem, to zauważamy, jak bliższy plan przesuwa się przeciwnie, a dalszy (pozornie) zgodnie z kierunkiem ruchu głowy (widzimy względny ruch planów).

W analogiczny sposób można odtworzyć trójwymiarową scenę, odwikłując kilka obrazów zarejestrowanych przy znanych przesunięciach w trzech kierunkach. Do takiego przesuwania można wykorzystać układ stabilizujący obraz i autofokus. Trzeba tylko przeprogramować elektroniczny mózg aparatu.

W ten sposób sprzętowe rozwiązanie problemu poruszonych zdjęć może, przy okazji (i opcjonalnie) dodać głębi naszym zdjęciom.

## Nadprzewodzący litografen

Jednowarstwowy grafen ma wiele niezwykle interesujących własności, ale do niedawna nie można było do nich zaliczyć nadprzewodnictwa. Jakiś czas temu zapostulowano, że dekoracja grafenu alkalicznymi atomami, w szczególności litu, może doprowadzić do zwiększenia sprzężenia między elektronami i fononami wystarczającego do pojawienia się efektu nadprzewodnictwa. Doświadczalne wykazanie tego jednak się długo nie udawało.

W pracy [2] autorzy twierdzą, że, po raz pierwszy zjawisko to zaobserwowali za pomocą ARPES (ang. *Angle-Resolved PhotoEmission Spectroscopy*), metody, która pozwala na wyznaczenie energii i pędu elektronów walencyjnych badanej próbki. Uzyskany obraz odpowiadał obrazowi oczekiwanemu dla nadprzewodnika. Wyznaczona temperatura Curie wyniosła około 5,9 K. Badanie przeprowadzono w wysokiej próżni  $10^{-11}$  tora, w której najpierw doprowadzano do implantacji atomów litu (ustawiających się centralnie w sześciokątach siatki atomów węgla), a następnie przeprowadzano badanie ARPES.

Zdaniem autorów, biorąc pod uwagę zainteresowanie, jakie budzi grafen, osiągnięcie to może mieć duże znaczenie międzydyscyplinarne.

Piotr ZALEWSKI

[1] P. Llull, Xin Yuan, L. Carin oraz D.J. Brady, *Image translation for single-shot focal tomography*, *Optica*, **2** (vol. 9) 2015 str. 822.

[2] B.M. Ludbrook et al., *Evidence for superconductivity in Li-decorated monolayer graphene*, *PNAS* doi:10.1073/pnas.1510435112.

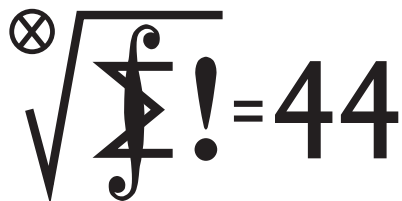
# Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2016

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



### Zadania z matematyki nr 709, 710

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
699 ( $WT = 1,88$ ) i 700 ( $WT = 2,75$ )  
z numeru 4/2015

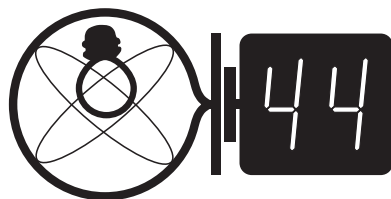
|                        |          |       |
|------------------------|----------|-------|
| Łukasz Garncarek       | Opole    | 46,36 |
| Marek Spychała         | Warszawa | 42,75 |
| Paweł Najman           | Kraków   | 38,80 |
| Grzegorz Karpowicz     | Wrocław  | 38,18 |
| Jędrzej Garnek         | Poznań   | 37,64 |
| Krzysztof Maziarz      | Kraków   | 35,37 |
| Franciszek S. Sikorski | Warszawa | 33,31 |
| Janusz Fiett           | Warszawa | 33,19 |

Pan Łukasz Garncarek – to już 44  
po raz drugi.

**709.** Na bokach  $AB$  i  $BC$  kwadratu  $ABCD$  leżą (odpowiednio) takie punkty  $E$  i  $F$ , zaś wewnątrz tego kwadratu znajduje się taki punkt  $G$ , że  $FG \perp BC$ ,  $EF \perp BG$ ,  $EG \perp AF$ ,  $BG \perp AG$ . Sporządzony odręcznie rysunek sugeruje, że trapez  $ABFG$  pokrywa około 40% powierzchni kwadratu  $ABCD$ . Czy jest to równość dokładna?

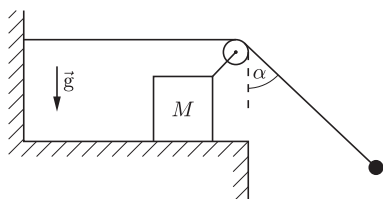
**710.** Ciąg  $(a_n)$  jest określony wzorem rekurencyjnym:  $a_{n+1} = a_n + \ln a_n$ ; wyraz początkowy  $a_0$  jest dowolną liczbą większą od 1. Udowodnić, że ciąg  $(a_n)$  jest asymptotycznie równy ciągowi  $(b_n)$  o wyrazach  $b_n = n \ln n$ ; to znaczy,  
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1.$$

Zadanie 710 zaproponował pan Tomasz Ordowski.



### Zadania z fizyki nr 606, 607

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



**606.** Kłoczek o masie  $M$ , do którego przymocowany jest nieważki, nieruchomy bloczek, może ślizgać się po poziomej powierzchni. Przez bloczek przerzucona jest nić, której jeden koniec jest poziomy i przymocowany do ściany, a na drugim końcu zawieszony jest ciężarek. W chwili początkowej ciężarek odchyłono od pionu o kąt  $\alpha$  i puszczono. Znaleźć masę ciężarka, jeśli kąt odchylenia nici od pionu nie zmienia się podczas ruchu klocka. Tarcie zaniedbujemy.

**607.** Cienki miedziany pierścień o promieniu  $r$  może obracać się wokół pionowej osi, pokrywającej się z jego średnicą. W środku pierścienia umieszczono małą igiełkę magnetyczną, która może swobodnie obracać się wokół tej samej osi. Gdy pierścień jest nieruchomy, igiełka ustawia się wzdłuż składowej poziomej pola magnetycznego Ziemi  $B$ . Pierścień wprowadzono w bardzo szybki ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . O jaki kąt odchyliła się igiełka od swego początkowego ustawienia? Opór pierścienia wynosi  $R$ .



## Prosto z nieba: Prawie błysk

Odkrycie potężnych kosmologicznych źródeł twardego promieniowania zawdzięczamy technice wojskowej – błyski  $\gamma$  zostały przypadkowo odkryte w latach 60. przez satelity szpiegowskie Vela, poszukujące dowodów na radzieckie próby jądrowe.



Naturalnie więc pojawiają się pytania: czym różnią się „zwykłe” supernowe od hipernowych? Czy istnieją obiekty pośrednie? Jakościowa różnica pomiędzy kolapsarem (hipernową) a supernową polega na działaniu (bądź nie) wciąż okrytego tajemnicą centralnego „silnika” błysku, który jest odpowiedzialny za produkcję dżetu. W szczególności dżet ten musi być dostatecznie efektywny, by przebić się przez zewnętrzne części otoczki spadające na jądro gwiazdy i z prędkością zbliżoną do prędkości światła wydostać na zewnątrz.

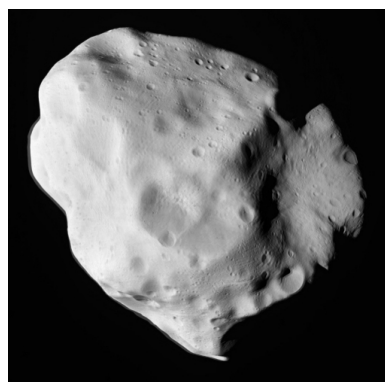
Niedawne obserwacje radiowe interferometru VLA (*Very Large Array*) dostarczają danych na temat „brakującego ognia” pomiędzy wspomnianymi wyżej klasami obiektów. Supernowa 2012ap ma szybko tracący pęd, umiarkowanie relatywistyczny wpływ oddziałujący

Pochodzenie błysków  $\gamma$  wciąż intryguje środowisko naukowe. W czasie prawie 50 lat od pierwszych obserwacji stworzono niezliczone, czasem niezwykle fantazyjne hipotezy tłumaczące emisję setek septylionów J (około  $1/1000 M_{\odot} c^2$ ) w postaci czystego promieniowania  $\gamma$ . Obecnie preferowanym wyjaśnieniem *długich błysków*, które mogą trwać nawet 1000 s, jest model kolapsara (hipernowej), czyli zapadnięcie się masywnej gwiazdy o niskiej zawartości lekkich pierwiastków. Podczas kolapsu w jądrze gwiazdy powstaje czarna dziura otoczona masywnym, szybko rotującym dyskiem akrecyjnym. Spadek materii dysku wywołuje powstawanie relatywistycznego dżetu unoszącego energię rotacji w postaci skupionej w wąskiej stożkowej wiązki promieniowania. Kolapsar jest w istocie bardzo specjalnym rodzajem *supernowej typu II*, znanej astronomom od tysiącleci (przykładem SN1054, po której została mgławica Krab i gwiazda neutronowa – pulsar).

z materią międzygwiazdową (wykryty przez VLA), ale nie zarejestrowano pochodzącego z jej kierunku błysku  $\gamma$ . Jest więc przykładem silnika błysku  $\gamma$  z jakiegoś powodu nieudanego i działającego „na pół gwizdka”. Gwiazdę, która wybuchła jako SN 2012ap, zidentyfikowano jako typ Ic, charakteryzujący się brakiem zewnętrznych warstw wodorowych. Gwiazdy tego typu uważa się za dobre kandydatki do wywołania błysku  $\gamma$ . Analiza zachowania się SN 2012ap jest niezwykle cenna, ponieważ obecnie znamy wiele rodzajów gwiazd wybuchających jako supernowe; różnią się znacznie parametrami (metalicznością i ogólnie składem, tempem rotacji, masą), zatem obserwacje obiektów pośrednich pozwalają na testowanie różnych hipotez dotyczących mechanizmu wybuchu.

Michał BEJGER

## Niebo w listopadzie



Planetoida (21) Lutetia; na podstawie zdjęć wykonanych przez sondę Rosetta 10 lipca 2010 roku (źródło: <http://rosetta.jpl.nasa.gov>).

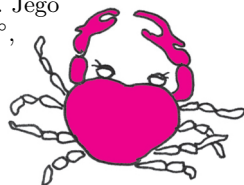
Tegoroczne długie listopadowe noce zdecydowanie warto wykorzystać na obserwacje planetoid. Obiekty te, o wdzięcznych nazwach pochodzących z mitologii greckiej i rzymskiej, najlepiej obserwować za pomocą lornetki lub małej lunetki z terenów słabo lub w ogóle nieoświetlonych. 7 XI będzie najlepszą datą na zapoznanie się z planetką (39) Laetitia, której jasność będzie wynosiła  $9,4^m$ . Planetoidę można będzie obserwować w gwiazdozbiornie Wieloryba, na wschodnim niebie (RA: 3 h 04', Dec:  $1^{\circ}01'$ ). Kolejnym obiektem wartym uwagi będzie (192) Nausikaa, najdogodniejsza do obserwacji 17 XI. Jej jasność będzie wynosiła wtedy  $9^m$  i można będzie ją zaobserwować na wschodnim niebie, pomiędzy gwiazdozbiornami Perseusza, Barana i Byka (RA: 3h 07', Dec:  $30^{\circ}33'$ ). Wśród planetek polecanych do obserwacji w listopadzie zdecydowanie warto poświęcić czas na (15) Eunomię, najjaśniejszy spośród proponowanych przez nas obiektów. Tę planetkę będzie można znaleźć na RA: 23h 56', Dec:  $16^{\circ}53'$  w gwiazdozbiornie Pegaza na południowo-wschodnim niebie, a jej jasność będzie 7 XI wynosiła  $8,4^m$  i będzie się sukcesywnie zmniejszała, np. 27 XI wyniesie  $8,8^m$ . Dodatkowo pamiętając, że 25 XI przypada pełnia Księżyca, warto decydować się na obserwacje w pierwszej połowie miesiąca. Dla tych, którzy pragną zobaczyć, jak można odtworzyć kształt planetoid na podstawie zarejestrowanych jasności, polecamy serwis stworzony przez poznańskich naukowców: <http://isam.astro.amu.edu.pl/first.php?lang=pl>.

Sympatycy meteorów mogą liczyć na wiele nieprzespanych nocy. W listopadzie najlepsze do obserwacji będą dwa roje. W trakcie nocy 6–30 XI, z maksimum przypadającym na 18 XI, będą widoczne znane i lubiane Leonidy, o współrzędnych radiantu RA:  $152^{\circ}$  (10,1h), Dec:  $+22^{\circ}$ . Rój ten znany był już w Egipcie (zaobserwowany w 899 roku n.e.); charakteryzuje się szybkimi meteorami o zielonkawych śladach i związany jest z kometą 55P/Tempel–Tuttle o okresie 33,25 lat. Na 33 powroty komety zarejestrowano 22 deszcze, z których najbardziej spektakularny z maksymalną aktywnością wynoszącą 140 tys. meteorów na godzinę miał miejsce na obszarze Północnej Arktyki w 1966 roku. Drugi ciekawy rój listopadowego nieba to  $\alpha$  Monocerotydy, widoczne 15–25 XI, z maksimum wypadającym 22 XI. Jego współrzędne znajdziemy na RA:  $117^{\circ}$  (7,8h), Dec:  $+1^{\circ}$ ,

jego aktywność wynosi 5 meteorów na godzinę. Warto jednak pamiętać, iż zdarzały się jego aktywności wynoszące 100 meteorów (w 1925 i 1935 roku).

Początek listopada to doskonały czas na obserwacje bliskiego spotkania Wenus z Marsem na jesiennym niebie. 3 XI nad ranem dostrzec będzie można drugą planetę od Słońca w odległości zaledwie 0,6 stopnia w kierunku południowym od Marsa. Oba obiekty widoczne będą między gwiazdozbiorem Panny, Lwa i Hydry, na wschodnim niebie. Ponieważ jasności Wenus i Marsa to odpowiednio  $-4,3^m$  i  $1,7^m$ , jest to gratka nawet dla tych, którzy w dużych i oświetlonych miastach będą tuż przed świtem biec do pracy.

Karolina BĄKOWSKA

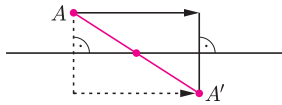


# Mały wybór? I dobrze! Joanna JASZUŃSKA

Izometrią nazywamy przekształcenie, które nie zmienia odległości między punktami. Obrazy trzech niewspółliniowych punktów jednoznacznie ją wyznaczają. Twierdzenie Chaslesa głosi, że każda izometria płaszczyzny jest przesunięciem, obrotem lub symetrią z poślizgiem.

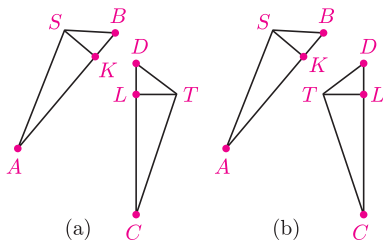
Z dowodami powyższych faktów można się zapoznać w tym numerze *Delta* na stronach 16–19.

Symetria z poślizgiem to złożenie (w dowolnej kolejności) symetrii osiowej z przesunięciem o wektor równoległy do osi (rys. 1). Przekształcenie to zmienia orientację (rys. 2). Z kolei przesunięcie i obrót nie zmieniają orientacji, a szczególnym przypadkiem każdego z nich jest identyczność.

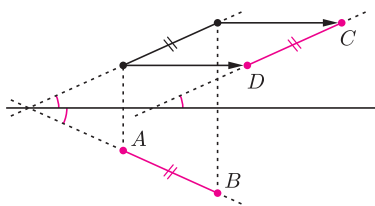


Rys. 1. Gdy wektor przesunięcia jest zerowy, uzyskujemy symetrię osiową.

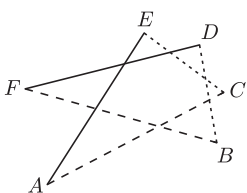
Przekształcenie figury  $A_1A_2 \dots A_n$  na  $B_1B_2 \dots B_n$  oznacza przekształcenie  $A_i$  na  $B_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ .



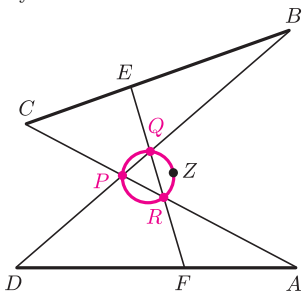
Rys. 2. Trójkąty  $ABS$  i  $CDT$  są (a) przeciwnie i (b) zgodnie zorientowane.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Zadanie 4 pochodzi z 46. Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Więcej o prostej Simsona w *deltoidzie* z numeru 9/2015.

**Uwaga (\*)** Przy symetrii z poślizgiem środek odcinka łączącego punkt i jego obraz leży na osi symetrii (rys. 1).

**Uwaga (\*\*)** Niech punkty  $K$  i  $L$  należą odpowiednio do odcinków  $AB$  i  $CD$ , przy czym  $AK = CL$  (rys. 2). Zbudujmy na odcinkach  $AB$  i  $CD$  przystające trójkąty  $ABS$  i  $CDT$  o spodkach wysokości odpowiednio  $K$  i  $L$ . Można zrobić to dwojako: tak, by trójkąty te były przeciwnie lub zgodnie zorientowane.

W każdym z przypadków istnieje dokładnie jedna izometria przeprowadzająca jeden na drugi. W pierwszym przypadku jest ona symetrią z poślizgiem.

W drugim jest to przesunięcie, jeśli  $AB \parallel CD$  lub obrót, jeśli  $AB \not\parallel CD$ .

**1.** W czworokącie  $ABCD$  punkty  $E$  i  $F$  są środkami boków  $BC$  i  $DA$ , ponadto  $AB = CD$ . Wykaż, że prosta  $EF$  tworzy z prostymi  $AB$  i  $CD$  równe kąty.

**2.** Przystające kwadraty  $ABCD$  i  $A'B'C'D'$  są przeciwnie zorientowane. Udowodnij, że środki odcinków  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  są współliniowe.

**3.** W sześciokącie wypukłym  $ABCDEF$  zachodzą równości  $BD = CE$ ,  $DF = EA$ ,  $FB = AC$ . Wykaż, że symetralne boków  $BC$ ,  $DE$ ,  $FA$  przecinają się w jednym punkcie.

**4.** Dany jest taki czworokąt wypukły  $ABCD$ , że  $AD = BC$  oraz boki  $AD$  i  $BC$  nie są równoległe. Zmienne punkty  $E$  i  $F$  należą odpowiednio do boków  $BC$  i  $AD$ , przy czym  $BE = DF$ . Proste  $AC$  i  $BD$  przecinają się w punkcie  $P$ , proste  $BD$  i  $EF$  w punkcie  $Q$ , a proste  $EF$  i  $AC$  – w punkcie  $R$ . Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach  $PQR$  mają wspólny punkt różny od  $P$ .

## Rozwiązania i wskazówki

**R1.** Na mocy (\*\*) istnieje symetria z poślizgiem, przeprowadzająca odcinek  $AB$  na  $DC$  (rys. 3). Na mocy (\*) jej osią jest prosta  $EF$ . Prosta  $AB$  i jej obraz (prosta równoległa do  $CD$ ) tworzą z osią symetrii równe kąty, co kończy dowód.  $\square$

**Wskazówka 2.** Warto najpierw uzasadnić, że istnieje symetria z poślizgiem przeprowadzająca  $ABCD$  na  $A'B'C'D'$ , a następnie wykorzystać uwagę (\*).

**R3.** Trójkąty  $BDF$  i  $CEA$  są przystające i tak samo zorientowane (rys. 4), istnieje więc izometria zachowująca orientację, która przeprowadza jeden z nich na drugi. Odcinki  $BD$  i  $CE$  przecinają się, jako przekątne czworokąta wypukłego  $BCDE$ . Stąd rozważana izometria jest obrotem; oznaczmy jego środek przez  $X$ .

Wówczas  $XB = XC$ , czyli punkt  $X$  leży na symetralnej odcinka  $BC$ . Analogicznie leży też na symetralnych  $DE$  i  $FA$ , co kończy dowód.  $\square$

**R4.** Na mocy (\*\*) istnieje obrót przeprowadzający trójkę  $AFD$  na  $CEB$ ; oznaczmy jego środek przez  $Z$  (rys. 5). Podobnie jak w rozwiązaniu zadania 3, punkt  $Z$  należy do symetralnych odcinków  $AC$  i  $BD$  (a więc nie zależy od wyboru punktów  $E$  i  $F$ ) oraz do symetralnej  $EF$ . Stąd rzutami punktu  $Z$  na odcinki  $AC$ ,  $BD$ ,  $EF$  są ich środki.

Ponownie na mocy (\*\*) istnieje symetria z poślizgiem, która przeprowadza trójkę  $AFD$  na  $CEB$ . Na mocy (\*), środki odcinków  $AC$ ,  $BD$  i  $EF$  są wówczas współliniowe. Wykazaliśmy, że są to rzuty punktu  $Z$ , więc korzystając z twierdzenia o prostej Simsona uzyskujemy wniosek, iż stały punkt  $Z$  leży na każdym z okręgów opisanych na zmiennych trójkątach  $PQR$ .  $\square$