




SPIS TREŚCI NUMERU 10 (497)

Zliczamy skojarzenia (I). O układaniu domina i permanencji <i>Tomasz Idziaszek</i>	str. 1
Trudne pytania <i>Przemysław Grzegorzewski</i>	str. 3
O pewnym uogólnieniu małego twierdzenia Fermata <i>Anna Leśniak</i>	str. 6
Skandal z pianą, czyli Afrodyta topologiczna <i>Krzysztof Rejmer</i>	str. 8
 Zadania	str.10
Wypełnianie przestrzeni <i>Marek Kordos</i>	str.11
Informatyczny kącik olimpijski (86): Sieć światłowodowa <i>Wojciech Nadara</i>	str.12
Prostokąty na trójkącie <i>Tomasz Przybyłowski</i>	str.14
Gdy trawa śpiewa <i>Filip Czerwiński, Marlena Maćkowiak, Antoni Naszkiewicz, Kacper Raciborski, Paweł Suchomski, Paweł Szczytkowski</i>	str.16
Siedmiokąta foremnego nie można skonstruować cyrklem i linijką <i>Marek Kordos</i>	str.18
 Edukacja, głupcze! <i>Magdalena Fikus</i>	str.20
XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (2015/16)	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Chemia życia w kosmosie	str.24
Niebo w październiku	str.24
 Prosta Simsona <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

W następnym numerze polecamy



rzut butem

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2015 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

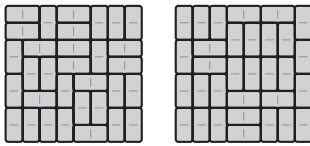
Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

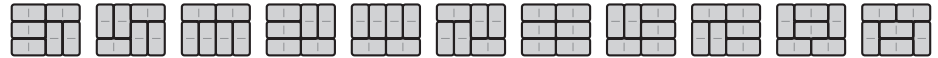
Zliczamy skojarzenia (I) O układaniu domina i permanencji

Tomasz IDZIASZEK



Rys. 1. Dwa spośród 12 988 816 przykryć szachownicy rozmiaru 8×8 za pomocą 32 kostek domina.

Zajmiemy się takim oto zadaniem: dana jest szachownica rozmiaru $n \times m$ i $N = nm/2$ kostek domina, z których każda może przykryć dwa sąsiednie pola szachownicy. Na ile sposobów możemy przykryć całą szachownicę? Przyjmujemy, że dwa sposoby są różne, jeśli istnieją dwa pola przykryte w pierwszym sposobie tą samą kostką, a w drugim sposobie różnymi kostkami (rys. 1). Przykładowo, szachownicę rozmiaru 3×4 można przykryć sześcioma kostkami na 11 sposobów (uzyskujemy $3 \cdot 3$ sposobów, jeśli przykrywamy niezależnie lewą i prawą połowę, oraz dodatkowe 2 sposoby, gdy istnieją kostki leżące na obu połówkach):



Aby rozwiązać to zadanie, naszą szachownicę przedstawimy jako graf. Każdemu polu szachownicy będzie odpowiadał jeden wierzchołek, a krawędź będzie łączyła dwa wierzchołki, jeśli odpowiadające im pola sąsiadują (mają wspólny bok). Wierzchołki, tak jak pola szachownicy, możemy pomalować na biało i czarno. Zauważmy, że każda krawędź będzie łączyła wierzchołki różnych kolorów, zatem uzyskany przez nas graf będzie *dwudzielny*. Oznaczmy jego białe wierzchołki przez u_1, \dots, u_N , a czarne przez v_1, \dots, v_N , co więcej, ponumerujemy te wierzchołki kolejno wierszami i założymy, że liczba kolumn m jest parzysta (co najmniej jedna z liczb n, m musi taka być).

Graf dwudzielny możemy też opisać za pomocą zerojedynkowej macierzy dwusąsiedztwa $A = (a_{i,j})$ rozmiaru $N \times N$, w której $a_{i,j} = 1$ wtedy, gdy istnieje krawędź łącząca biały wierzchołek u_i z czarnym wierzchołkiem v_j . Przykładowo, dla szachownicy 3×4 graf i jego macierz dwusąsiedztwa wyglądają następująco.

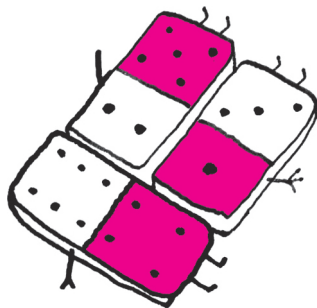
$$\begin{array}{cccc}
 \circ & \bullet & \circ & \bullet \\
 | & | & | & | \\
 \bullet & \circ & \bullet & \circ \\
 | & | & | & | \\
 \circ & \bullet & \circ & \bullet
 \end{array}
 \quad
 A = \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
 \end{pmatrix}$$

A czym w terminologii grafowej są pokrycia szachownicy kostkami domina? Otóż odpowiadają one *doskonałym skojarzeniom*, czyli takim zbiorom złożonym z N krawędzi grafu, że każdy wierzchołek jest incydentny z dokładnie jedną krawędzią z tego zbioru. Natomiast w macierzy dwusąsiedztwa odpowiadają one wybraniu N komórek z wartością 1, z których żadne dwie nie leżą w jednym wierszu ani w jednej kolumnie.

Aby wyznaczyć liczbę doskonałych skojarzeń, można rozważyć wszystkie przyporządkowania, które każdemu wierzchołkowi białemu przypisują pewien wierzchołek czarny połączony z nim krawędzią (przy czym każdy wierzchołek czarny musi być przypisany dokładnie jednemu wierzchołkowi białemu). Takie przyporządkowanie można zakodować za pomocą permutacji π zbioru $\{1, \dots, N\}$, która wierzchołkowi u_i przypisuje wierzchołek $v_{\pi(i)}$. Wierzchołki te są połączone krawędzią, jeśli $a_{i,\pi(i)} = 1$, zatem przyporządkowanie jest poprawne, gdy iloczyn $a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \dots a_{N,\pi(N)}$ jest równy jeden (rys. 2). Tak więc liczba doskonałych skojarzeń to po prostu permanent macierzy A :

$$\text{perm}(A) = \sum_{\pi} a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \dots a_{N,\pi(N)}.$$

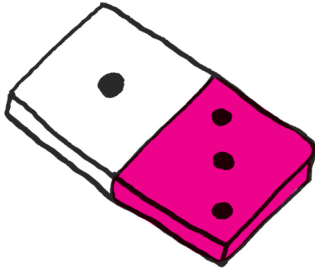
W krótkiej notatce *O wieżach, permanencji i parzystości* zamieszczonej w *Delcie* 10/2010 pisaliśmy już o tym, jak efektywnie obliczać *parzystość* permanentu macierzy całkowitoliczbowej przez porównanie go z wyznacznikiem tej samej macierzy. Wspomnieliśmy również, że problem obliczenia permanentu (a nie tylko jego parzystości) jest dużo trudniejszy i nie znamy dla niego szybszych algorytmów niż wykładnicze ze względu na N . W szczególności oznacza to, że nie znamy lepszych algorytmów wyznaczania liczby doskonałych



$$\begin{array}{cccc}
 \circ & \bullet & \circ & \bullet \\
 | & | & | & | \\
 \bullet & \circ & \bullet & \circ \\
 | & | & | & | \\
 \circ & \bullet & \circ & \bullet
 \end{array}
 \quad
 \pi_1 = \begin{pmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \circ & \bullet & \circ & \bullet \\
 | & | & | & | \\
 \bullet & \circ & \bullet & \circ \\
 | & | & | & | \\
 \circ & \bullet & \circ & \bullet
 \end{array}
 \quad
 \pi_2 = \begin{pmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 3 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6
 \end{pmatrix}$$

Rys. 2. Doskonałe skojarzenia (wyróżnione kolorem) w kracie 3×4 odpowiadające permutacjom π_1 i π_2 .



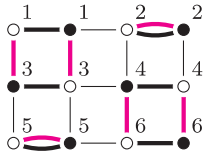
skojarzeń w dowolnych grafach dwudzielnych. Okazuje się jednak, że w przypadku specjalnego rodzaju grafu (kraty $n \times m$), z którym mamy tu do czynienia, możemy to zrobić w czasie wielomianowym. I znowu pomoże nam w tym fakt, że umiemy efektywnie obliczać wyznacznik macierzy.

Przypomnijmy, że wyznacznik również można zdefiniować w języku permutacji. Jest to analogiczna suma jak w przypadku permanentu, z tym że iloczyn odpowiadający permutacji π mnożymy teraz przez *znak* tej permutacji, który oznaczymy przez $\text{sgn}(\pi)$:

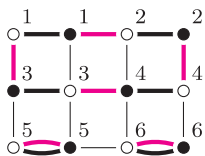
$$\det(A) = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{N,\pi(N)}.$$

Do zdefiniowania znaku permutacji przyda nam się pojęcie *cyklu* permutacji.

Cyklem długości s nazwiemy ciąg indeksów $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_s)$, dla którego zachodzi $\pi(i_1) = i_2, \pi(i_2) = i_3, \dots, \pi(i_s) = i_1$. Każdą permutację możemy przedstawić w postaci zbioru rozłącznych cykli. Permutacja π jest parzysta, a jej znak wynosi $\text{sgn}(\pi) = 1$, jeśli w jej rozkładzie na cykle występuje parzysta liczba cykli parzystej długości. W przeciwnym przypadku permutacja jest nieparzysta, a jej znak to $\text{sgn}(\pi) = -1$.



$$\pi_1 = (1 \ 3) (2) (4 \ 6) (5) \\ \text{sgn}(\pi_1) = 1$$



$$\pi_2 = (1 \ 3 \ 4 \ 2) (5) (6) \\ \text{sgn}(\pi_2) = -1$$

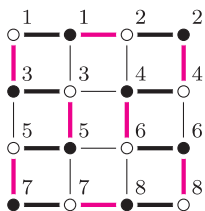
Rys. 3. Pokrycia cyklowe (wyróżnione pogrubionymi krawędziami) w kratce 3×4 odpowiadające permutacjom π_1 i π_2 , oraz reprezentacja cyklowa i znaki tych permutacji.

Jeśli w grafie wyróżnimy krawędzie doskonałego skojarzenia odpowiadającego permutacji π , a także wszystkie krawędzie łączące pary wierzchołków o różnych kolorach, lecz tych samych numerach (tzn. u_i z v_i), to każdy wierzchołek będzie incydentny z dokładnie dwiema krawędziami z wyróżnionego zbioru, zatem zbiór ten będzie *pokryciem cyklowym* grafu (czyli takim zbiorem rozłącznych cykli, że każdy wierzchołek należy do dokładnie jednego cyklu). Przy czym dopuszczamy, że niektóre krawędzie wyróżnimy dwukrotnie, co będzie odpowiadało *trywialnym* cyklom. Zapewne nie zdziwi nas, że każdy cykl długości s z permutacji π wyznacza pewien cykl długości $2s$ z pokrycia cyklowego (rys. 3).

Jesteśmy już gotowi na przedstawienie błyskotliwego pomysłu, który pozwoli nam użyć algorytmu obliczania wyznacznika do obliczenia permanentu macierzy A . Idea polega na takiej modyfikacji niezerowych elementów macierzy A , żeby dla każdej permutacji π , odpowiadającej doskonałemu skojarzeniu, iloczyn $\prod a_{i,\pi(i)}$ był równy 1, jeśli ta permutacja jest parzysta, oraz -1 , jeśli jest nieparzysta. Okazuje się, że aby to osiągnąć, wystarczy zastąpić jedynki występujące w komórkach macierzy A odpowiadających pionowym krawędziom kraty przez liczbę zespoloną $i = \sqrt{-1}$. Oznaczmy tak uzyskaną macierz przez A' ; dla kraty 3×4 wygląda ona następująco.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Przypatrzmy się, jaki wkład do iloczynu $\prod a_{i,\pi(i)}$ mają krawędzie z doskonałego skojarzenia odpowiadające ustalonemu cyklowi permutacji π . Jeśli oznaczymy licznosc każdego z trzech rodzajów krawędzi, które mogą pojawić się na odpowiadającym mu cyklu w grafie, odpowiednio przez e_H (poziome krawędzie ze skojarzenia), e_B (poziome krawędzie nie ze skojarzenia) oraz e_V (pionowe krawędzie, zawsze pochodzące ze skojarzenia), to ten wkład będzie równy $1^{e_H} \cdot i^{e_V}$. Przykładowy cykl wraz z licznosciami krawędzi przedstawiono na rysunku 4. Zauważmy, że jeśli cykl ten ma długość 1, to odpowiada mu jedna pozioma krawędź (zatem wkład jest równy 1). Dalej zakładamy zatem, że cykl ten jest nietrywialny.



$$\pi_3 = (1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 8 \ 6 \ 4 \ 2)$$

Rys. 4. Cykl w kratce 4×4 odpowiadający permutacji π_3 ma krawędzie: $e_H = 2, e_B = 8, e_V = 6$.

Aby obejść cykl w grafie i wrócić do punktu wyjścia, liczba pionowych krawędzi, którymi będziemy iść w dół, oraz liczba tych krawędzi, którymi będziemy iść w górę, muszą być równe. Zatem e_V jest liczbą parzystą. Symetryczny argument dowodzi, że liczba $e_H + e_B$ jest parzysta. Co więcej, z uwagi na rozmieszczenie krawędzi nie ze skojarzenia, każde przejście dwiema kolejnymi krawędziami powoduje albo zmianę numeru kolumny o 2 (gdy przechodzimy krawędziami e_B i e_H), albo zmianę parzystości tej kolumny, ale tylko w obrębie pary kolumn, tzn. $j = (j \bmod 2) + 1$ (gdy przechodzimy krawędziami e_B i e_V , więc kolejna

krawędź e_B znajduje się tuż pod lub tuż nad poprzednią). Z tego wynika, że obu rodzajów przejść musi być parzyste wiele, zatem liczby e_H i e_V są parzyste. W konsekwencji parzysta jest też liczba e_B , zatem w pokryciu cyklowym wszystkie nietrywialne cykle odpowiadają parzystym cyklom permutacji.

Przypatrzmy się kierunkom (lewo bądź prawo), w których poruszamy się poziomymi krawędziami, podczas obchodzenia cyklu w grafie. Każda zmiana kierunku odbywa się wtedy i tylko wtedy, gdy przechodzimy pionową krawędzią (znowu wynika to z faktu, że dwie kolejne krawędzie e_B na cyklu rozdzielone krawędzią e_V muszą znajdować się pod sobą). Wynika z tego, że wszystkimi poziomymi krawędziami leżącymi w wierszach o ustalonej parzystości będziemy przechodzić w tym samym kierunku. A ponieważ spośród wierszy kraty zawierających krawędzie z cyklu, pierwszy i ostatni musimy przejść w przeciwnych kierunkach (dlaczego?), więc muszą być one różnej parzystości. Jeśli podzielimy cykl na maksymalne kawałki niezawierające krawędzi z pierwszego i ostatniego wiersza, to dwa z tych kawałków (łącznie różne wiersze) będą zawierały nieparzystą liczbę krawędzi e_V . Jako ćwiczenie dla Czytelnika zostawiamy dowód faktu, że w pozostałych kawałkach (łączyjących ten sam wiersz) liczba krawędzi e_V będzie podzielna przez 4. Z tego wynika, że liczba $e_V/2$ jest nieparzysta.

Skoro zatem e_V jest parzystą liczbą niepodzielną przez 4, to każdemu nietrywialnemu cyklowi permutacji odpowiada wartość $1^{e_H} \cdot 1^{e_V} = (-1)^{e_V/2} = -1$. Ponieważ, jak pokazaliśmy wyżej, wszystkie nietrywialne cykle permutacji odpowiadającej doskonałemu skojarzeniu w kracie są długości parzystej, więc iloczyn $\prod a_{i, \pi(i)}$ będzie równy -1 dokładnie wtedy, gdy będzie ich nieparzyste wiele (w przeciwnym przypadku będzie równy 1). Tak więc będzie on równy znakowi permutacji π . To pokazuje, że $\text{perm}(A) = \det(A')$, zatem

$$\text{liczba doskonałych skojarzeń} = \det(A').$$

Warto wspomnieć, że jeśli w macierzy A' położymy $a_{i,j} = 0$ dla komórki, która odpowiada krawędzi łączącej wierzchołki u_i i v_j , to $\det(A')$ będzie liczbą tych doskonałych skojarzeń, które nie zawierają tej krawędzi. Odpowiadać to będzie takim układom kostek domina na szachownicy, w których żadna kostka nie przykrywa boku pomiędzy polami odpowiadającymi wierzchołkom u_i i v_j (rys. 5). Łatwo zatem zaadaptować przedstawiony algorytm do liczenia przykryć „dziurawej” szachownicy (usunięcie pola z szachownicy symulujemy poprzez otoczenie go „murkiem” czterech zabronionych krawędzi) lub takich, w których część kostek ma już ustalone położenie.



Rys. 5. Pokrycia szachownicy 3×4 z dwiema zabronionymi krawędziami (wyróżnione kolorem).

Trudne pytania

Przemysław GRZEGORZEWSKI*

Jednym z podstawowych zadań statystyki jest estymacja wskaźnika struktury, albo mówiąc inaczej, szacowanie odsetka osób (elementów, obiektów) charakteryzujących się pewną cechą, będącą przedmiotem prowadzonego badania. Przykładowo, może nas interesować, jaki procent dorosłych obywateli naszego kraju ma prawo jazdy, jaki odsetek dzieci i młodzieży w wieku szkolnym umie pływać itd. Zauważmy, że w obu wspomnianych przykładach mamy do czynienia z cechą o charakterze binarnym, tzn. dopuszczamy tylko dwie wykluczające się odpowiedzi: ktoś ma prawo jazdy albo go nie ma; umie pływać albo nie umie.

Rozwiązanie tak postawionego zadania jest stosunkowo proste: ankieterzy zadają pytania losowo wybranej grupie osób i zliczają odpowiedzi twierdzące. Jeżeli symbolem n oznaczymy liczbę wszystkich uzyskanych odpowiedzi, pośród których k brzmiało „tak”, wówczas interesujący nas odsetek osób obdarzonych badaną cechą szacujemy za pomocą ilorazu (ewentualnie mnożonego przez 100%):

$$(1) \quad \hat{p} = \frac{k}{n} (\cdot 100\%).$$

Litera p użyta we wzorze (1) oznacza prawdopodobieństwo tzw. sukcesu (czyli uzyskania odpowiedzi „tak” na zadane pytanie), natomiast dodanie „daszka” nad p

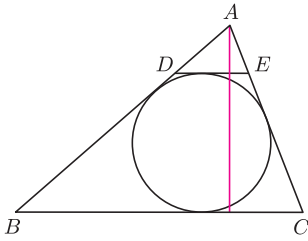
*Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska



Rozwiązanie zadania M 1471.

Przyjmijmy standardowe oznaczenia dla trójkąta ABC (bok naprzeciw wierzchołka A ma długość a ,

$p = \frac{a+b+c}{2}$ to połowa obwodu, r to promień okręgu wpisanego).



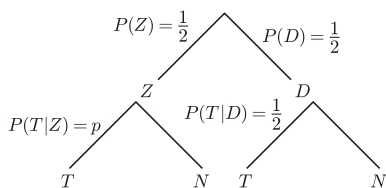
Z podobieństwa trójkątów ADE i ABC mamy

$$\frac{DE}{a} = \frac{c \sin B - 2r}{c \sin B} = 1 - \frac{ra}{\frac{1}{2}ac \sin B},$$

ale $\frac{1}{2}ac \sin B$ to pole trójkąta ABC , które wynosi pr , więc

$$DE = a \left(1 - \frac{r}{p}\right).$$

Nierówność $S_{DE} \leq AB + BC + CA$ jest wobec tego równoważna nierówności $4a(1 - r/p) \leq p$, która jest równoważna $0 \leq \frac{1}{p}(p - 2a)^2$.



jest tradycyjnie stosowanym oznaczeniem informującym, iż mamy do czynienia z oszacowaniem p (lub, mówiąc bardziej formalnie, z estymatorem wartości p).

Można wykazać, że ten – zdawałoby się banalny – estymator prawdopodobieństwa sukcesu ma bardzo dobre własności matematyczne: m.in. jest nieobciążony (tzn. wolny od błędu systematycznego), zgodny (tzn. dostarcza oszacowanie dowolnie bliskie prawdziwej wartości parametru, o ile tylko próbka jest dostatecznie liczna) i efektywny (ma możliwie małą wariancję, czyli jest dość precyzyjny). Tak więc, o ile tylko odpowiedzi respondentów są rzetelne, możemy oczekiwać, iż posługując się wzorem (1), uzyskamy rozsądne oszacowanie odsetka osób charakteryzujących się interesującą nas cechą – zwłaszcza jeśli badanie przeprowadzimy na odpowiednio dużej i jednorodnej grupie osób.

Założenie dotyczące rzetelności odpowiedzi bywa zasadniczo spełnione, o ile pytania dotyczą tematów w miarę neutralnych, jak choćby wspomniane wyżej (posiadanie prawa jazdy, umiejętność pływania itp.). Trudno bowiem byłoby wskazać przyczynę, dla której ankietowana osoba w obliczu tego typu pytań miałaby kłamać, zwłaszcza że respondentom zapewnia się anonimowość.

Można jednakże wskazać i takie badania, dotyczące zachowań bądź poglądów odnoszących się zwłaszcza do obyczajowości oraz przestrzegania prawa, gdy oczekiwanie szczyrych odpowiedzi od respondentów wydaje się mało prawdopodobne. Są to tzw. trudne pytania typu: Czy brał/dawał pan łapówkę? Czy zażywasz narkotyki? Czy dokonała pani aborcji? Czy zatrudnia pan pracowników „na czarno”? Można spodziewać się, że na takie pytania wielu respondentów w ogóle nie będzie chciało odpowiadać – nawet w obliczu wszelkiego typu gwarancji anonimowości – a jeśli już się zgodzą, to ich wypowiedzi będą niejednokrotnie „politycznie poprawne”, ale niekoniecznie prawdziwe. Tym samym, skoro mamy uzasadnione wątpliwości co do liczby uzyskanych odpowiedzi twierdzących (czyli k), użyteczność wzoru (1) staje pod znakiem zapytania. Czy to oznacza, że estymacja w obliczu trudnych pytań sprowadza się do przysłowiowego wróżenia z fusów? Na szczęście nie, bowiem statystycy wymyślili metodę, która z jednej strony doskonale zabezpiecza prywatność respondentów, a z drugiej umożliwia wyciąganie uzasadnionych wniosków. Jak to możliwe?

Wyobraźmy sobie następującą sytuację. Ankieter, zwracając się do respondenta z „trudnym” pytaniem, mówi: *Zdaję sobie sprawę, że wolałby pan nie odpowiadać wprost na to pytanie. Postąpmy zatem następująco: proszę rzucić monetą, ale nie pokazywać mi wyniku rzutu – jeśli wypadnie orzeł, proszę odpowiedzieć uczciwie tak/nie na zadane pytanie, natomiast jeśli wypadnie reszka, proszę odpowiedzieć tak/nie na pytanie, czy numer domu, w którym pan zamieszkuje, jest parzysty.* Zwróćmy uwagę, że w takim postępowaniu ankieter uzyskuje odpowiedź „tak” albo „nie”, nie wiedząc jednocześnie, na które z pytań odpowiada respondent.

Wydaje się, że ten sposób pozyskiwania odpowiedzi jest w pełni bezpieczny dla osoby ankietowanej, która przekazuje pewien komunikat, a zarazem w sposób jawny nie odnosi się do zadanego pytania. Czy jednak uzyskane tą drogą dane mogą być istotnie użyteczne dla badacza? Okazuje się, że tak.

Narysujmy schemat pytań i odpowiedzi w postaci drzewa o wierzchołkach: Z – odpowiedź na „trudne” pytanie, D – odpowiedź na pytanie o parzystość numeru domu, T – tak, N – nie (por. rysunek). Liczby umieszczone nad gałęziami drzewa oznaczają prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych wierzchołkach. W szczególności, $P(Z) = \frac{1}{2}$ oznacza prawdopodobieństwo, iż respondent odpowiedział na „trudne” pytanie, $P(D) = \frac{1}{2}$ jest prawdopodobieństwem tego, że wypowiedział się na temat parzystości numeru domu (oba te prawdopodobieństwa są równe $\frac{1}{2}$ z uwagi na założenie, iż mamy do czynienia z monetą symetryczną), $P(T|D) = \frac{1}{2}$ jest prawdopodobieństwem odpowiedzi twierdzącej na pytanie o parzystość numeru domu, natomiast $P(T|Z) = p$ oznacza poszukiwane przez nas prawdopodobieństwo odpowiedzi „tak” na interesujące nas pytanie. Jeśli przez $P(T)$ oznaczymy prawdopodobieństwo uzyskania odpowiedzi twierdzącej (bez względu na to, na jakie pytanie odpowiadał faktycznie respondent), to

z tzw. wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymamy:

$$(2) \quad P(T) = P(T|Z)P(Z) + P(T|D)P(D) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}.$$

Wartość prawdopodobieństwa $P(T)$ nie jest, oczywiście, znana, ale prowadząc badanie na n -elementowej próbie respondentów, spośród których k wypowiedziało się twierdząco, możemy oszacować je, korzystając ze znanego nam już wzoru (1). Tym samym wzór (2) możemy zapisać w postaci

$$(3) \quad \frac{k}{n} \approx \frac{1}{2}p + \frac{1}{4},$$

przy czym znak równości przybliżonej przypomina nam, że mamy tu do czynienia z pewnym oszacowaniem na podstawie eksperymentu.

Przekształcając wzór (3), otrzymujemy poszukiwany przez nas estymator odsetka odpowiedzi twierdzących uzyskanych na zadane „trudne” pytanie

$$(4) \quad \hat{p}_t = 2\frac{k}{n} - \frac{1}{2},$$

przy czym indeks t dodaliśmy dla odróżnienia estymatora „trudnych” pytań od powszechnie stosowanego estymatora (1). Estymator (4) ma również przyzwoite własności statystyczne, aczkolwiek – jak można się domyślać – nie aż tak dobre, jak estymator (1), niewymagający dodatkowych zabiegów maskujących odpowiedź. Warto przy tym pamiętać, że jakość estymatora może zależeć od sposobu maskowania. Przykładowo, jeżeli zamiast monety dalibyśmy respondentowi tradycyjną kostkę do gry wraz ze wskazówką, by odpowiadał na nasze pytanie, o ile w wyniku rzutu kostką otrzyma liczbę oczek nie większą niż 4, to – rozumując analogicznie jak poprzednio – otrzymalibyśmy

$$P(T) = \frac{4}{6}p + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}p + \frac{1}{6}.$$

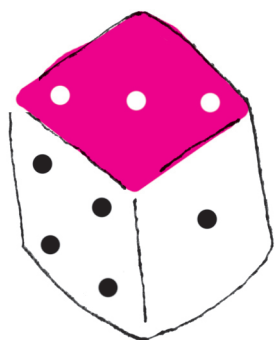
Po podstawieniu $P(T) \approx \frac{k}{n}$ oraz elementarnym przekształceniu otrzymalibyśmy następujący estymator:

$$\hat{p}_t = \frac{3k}{2n} - \frac{1}{4},$$

którego błąd średniokwadratowy jest mniejszy niż błąd estymatora (4). Idąc tym tropem, ktoś mógłby zaproponować mechanizm losowy, który by jeszcze bardziej zwiększał szansę na to, iż respondent odpowiadałby na interesujące nas pytanie, a nie odnosił się do nieistotnej kwestii parzystości numeru domu (np. dla wyników rzutu kostką od 1 do 5 – „trudne” pytanie, 6 – pytanie o parzystość). Jednakże, wbrew pozorom, taki estymator – choć mający lepsze własności matematyczne – w praktyce mógłby okazać się mniej użyteczny niż (4), bowiem respondent mógłby nabrać podejrzeń, że zbyt łatwo da się odkryć, na jakie pytanie odpowiada, co z kolei zniweczyłoby nasze wysiłki.

Czytelnik Uważny z pewnością zwróci uwagę na możliwość manipulowania jeszcze innym parametrem – tym, który związany jest z prawdopodobieństwem udzielenia odpowiedzi twierdzącej w pytaniu obojętnym z punktu widzenia prowadzonego badania. Przykładowo, zamiast pytać o parzystość numeru domu moglibyśmy pytać, czy respondent urodził się w okresie od września do grudnia włącznie itd. (zachęcamy zainteresowanych do prześledzenia wpływu tego parametru na własności estymatora odsetka dla „trudnych” pytań).

Badając teoretyczne własności omawianych estymatorów, nie powinniśmy tracić z pola widzenia ich „praktycznej mocy”, którą amerykański statystyk Churchill Eisenhart zdefiniował jako „iloczyn własności matematycznych i prawdopodobieństwa tego, że dana procedura będzie kiedykolwiek zastosowana w praktyce”. Doświadczenie pokazuje bowiem, że nazbyt wyrafinowane pomysły nie zawsze spotykają się z zainteresowaniem praktyków, dla których prostota rozwiązania bywa nieraz ważniejsza od niewielkiego zysku z tytułu potencjalnej poprawy jakości. A z tego typu sytuacjami spotykamy się często w naukach społecznych i badaniach, w których istotnym elementem jest tzw. czynnik ludzki. Gdy patrzymy z tej perspektywy, wydaje się, że do szacowania odsetka odpowiedzi twierdzących na „trudne” pytania preferowany będzie właśnie najprostszy estymator (4).



Rozwiązanie zadania M 1472.

Ponumerujemy dzieci liczbami $1, 2, \dots, n$, zaczynając od tego, które dostało pierwsze cukierek i przesuwając się zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Zauważmy, że k -ty cukierek trafia do dziecka

$$1 + \dots + k \pmod{n} = \frac{k(k+1)}{2} \pmod{n}.$$

Najpierw pokażemy, że liczby

$$\frac{k(k+1)}{2} \pmod{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \text{ są}$$

parami różne. Gdyby tak nie było, to dla pewnych $0 \leq k < l \leq n-1$ mielibyśmy

$$n \mid \frac{l(l+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(l-k)(l+k+1),$$

co jest równoważne $2n \mid (l-k)(l+k+1)$. Dokładnie jedna z liczb $l-k$, $l+k+1$ jest nieparzysta, więc $2n$, jako potęga dwójki, musi dzielić tę drugą. To jest niemożliwe, bo obie są dodatnie i mniejsze od $2n$. Zatem pierwsze $n-1$ cukierków trafia do dzieci $1, \dots, n-1$ (niekonnekcyjne w tej właśnie kolejności). Łatwo też zauważyć, że $2n$ -ty cukierek trafia do dziecka

$$\frac{2n(2n+1)}{2} \pmod{n} = n.$$

O pewnym uogólnieniu małego twierdzenia Fermata

Anna LEŚNIAK*

Udowodnione ponad trzysta lat temu małe twierdzenie Fermata głosi, że dla każdej liczby całkowitej a i liczby pierwszej p zachodzi podzielność $p \mid a^p - a$. Pragnę przedstawić jego uogólnienie, związane z iteracją funkcji zespolonej $f(z) = z^a$, gdzie $a \geq 2$ jest liczbą całkowitą.

Część wstępna

Niech f będzie funkcją określoną na pewnym niepustym zbiorze X , przyjmującą wartości w tym zbiorze. Przyjmijmy oznaczenie $f^0 = \text{id}$ (tzn. $f^0(x) = x$ dla każdego $x \in X$) oraz w sposób indukcyjny zdefiniujmy $f^n = f \circ f^{n-1}$ dla dodatnich liczb naturalnych n . Powiemy, że $n \geq 1$ jest *okresem* punktu x_0 , jeżeli $f^n(x_0) = x_0$, natomiast *okresem podstawowym* punktu x_0 nazwiemy najmniejszy spośród jego okresów (o ile takie istnieją). Zauważmy, że

(*) okres podstawowy punktu x_0 jest dzielnikiem każdego z jego okresów.

Rzeczywiście, niech m będzie okresem podstawowym, a n pewnym okresem x_0 . Niech $n = km + r$, gdzie $r \in \{0, \dots, m-1\}$ jest resztą z dzielenia n przez m . Przypuśćmy, że $r \neq 0$. Wtedy $x_0 = f^n(x_0) = f^{km+r}(x_0) = f^r(f^{km}(x_0)) = f^r(x_0)$, co jest sprzeczne z definicją liczby m .

Załóżmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n funkcja f ma skończenie wiele punktów o okresie n , a ich liczbę oznaczmy przez a_n . Ponadto niech b_m będzie liczbą punktów o okresie podstawowym m . Wówczas z (*) łatwo wynika

$$a_n = \sum_{m|n} b_m.$$

Rozważmy teraz x_0 o okresie podstawowym m . Wówczas $f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$ również mają okres podstawowy m . W przeciwnym razie, $f^l(f^k(x_0)) = f^k(x_0)$ dla pewnego $1 \leq k \leq m-1$ i $l < m$. Stąd $f^{k+l}(x_0) = f^k(x_0)$, więc

$$x_0 = f^m(x_0) = f^{m-k}(f^k(x_0)) = f^{m-k}(f^{k+l}(x_0)) = f^l(f^m(x_0)) = f^l(x_0),$$

co prowadzi do sprzeczności, ponieważ x_0 ma okres minimalny m i $l < m$.

Ponadto punkty $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$ są parami różne, gdyż gdyby $f^k(x_0) = f^l(x_0)$ dla pewnych $0 \leq k < l \leq m-1$, to

$$f^k(x_0) = f^l(x_0) = f^{k+(l-k)}(x_0) = f^{l-k}(f^k(x_0)),$$

czyli $f^k(x_0)$ miałby okres minimalny nie większy niż $l-k < m$, co (jak pokazaliśmy wcześniej) jest niemożliwe. Z poczynionych obserwacji wynika, że zbiór punktów o okresie podstawowym m jest sumą skończonej liczby rozłącznych, m -elementowych zbiorów postaci $\{x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\}$, a zatem $m \mid b_m$.

Zauważmy teraz, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to $a_p = b_p + b_1 = b_p + a_1$, zatem $b_p = a_p - a_1$. Analogicznie, jeśli q jest liczbą pierwszą różną od p , to wówczas $a_{pq} = b_{pq} + b_p + b_q + b_1$, a skoro $b_p = a_p - a_1$, $b_q = a_q - a_1$, więc

$$b_{pq} = a_{pq} - a_p - a_q + a_1.$$

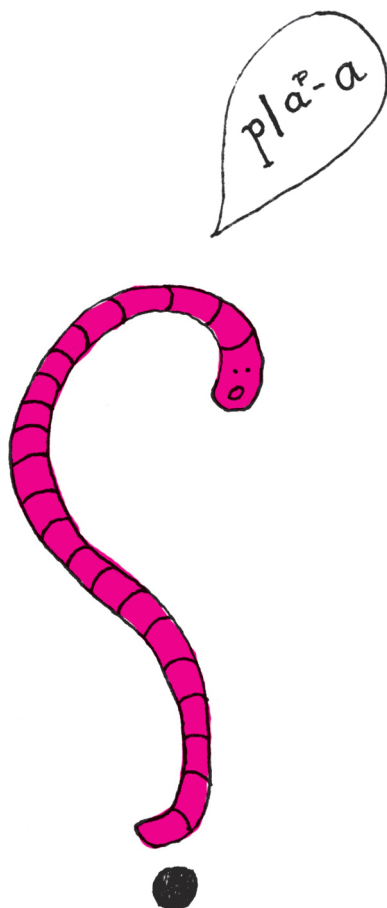
Okazuje się, że otrzymywane równości możemy uogólnić, korzystając z *formuły inwersyjnej Möbiusa*, wedle której jeśli $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ są ciągami liczb całkowitych oraz $x_n = \sum_{m|n} y_m$, to wówczas $y_n = \sum_{m|n} \mu(m) x_{\frac{n}{m}}$, gdzie

$$\mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{dla } m = 1; \\ (-1)^k, & \text{dla } m = p_1 \cdot \dots \cdot p_k, \text{ gdzie } p_i \text{ to różne liczby pierwsze;} \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Jej bezpośrednie zastosowanie prowadzi nas do równości $b_n = \sum_{m|n} \mu(m) a_{\frac{n}{m}}$, co w połączeniu z podzielnością $n \mid b_n$ pozwala stwierdzić, że dla dowolnej liczby naturalnej n

$$n \mid \sum_{m|n} \mu(m) a_{\frac{n}{m}}.$$

Jeśli f jest obrotem płaszczyzny względem ustalonego punktu O o kąt 45° , to każdy punkt P spełnia warunek $f^{80}(P) = P$, czy $f^{48}(P) = P$, ale dla $P \neq O$ okresem podstawowym jest 8.



*Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu

Część zasadnicza

Wróćmy do twierdzenia Fermata.

Dla ustalonego $a > 1$ rozważmy funkcję zespoloną $f(z) = z^a$. Złożenie n -krotne funkcji f jest równe

$$f^n(z) = z^{a^n}.$$

Zauważmy, że dla każdego n zbiór wszystkich punktów okresowych o okresie n jest skończony. Rzeczywiście, składa się on z zespolonych pierwiastków równania

$$z^{a^n} = z,$$

Jednym z jego pierwiastków jest $z = 0$, a jeżeli $z \neq 0$, to $z^{a^n - 1} = 1$, więc z jest pierwiastkiem zespolonym z jedynki stopnia $a^n - 1$, a tych jest dokładnie $a^n - 1$. Wynika stąd, że w tej sytuacji

$$a^n = a^n, \quad \text{czyli} \quad n \mid \sum_{m|n} \mu(m) a^{\frac{n}{m}}.$$

Dla liczby pierwszej $n = p$ otrzymujemy małe twierdzenie Fermata: $p \mid a^p - a$.

Czytelnik Uważny zauważy, że dla $a = 1$ nie możemy stosować naszego rozumowania (dlaczego?). Na szczęście zachodzi $\sum_{m|n} \mu(m) = 0$, dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$, zatem nasze twierdzenie pozostaje prawdziwe i w tym przypadku.

Spróbujmy pójść jeszcze krok dalej. Niech $(d_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem liczb całkowitych. Powiemy, że jest on *ciągami Dolda*, jeżeli dla każdej liczby naturalnej zachodzi podzielność

$$n \mid \sum_{m|n} \mu(m) d_{\frac{n}{m}}.$$

Z wcześniejszych rozważań wynika, że ciąg $(a^n)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Dolda dla dowolnej liczby całkowitej a .

Ciągi Dolda mają ciekawą charakterystykę. Niech $(c_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem liczb całkowitych. Powiemy, że ciąg $(d_n)_{n=1}^\infty$ jest generowany przez ciąg $(c_n)_{n=1}^\infty$, jeżeli dla $n \geq 1$ zachodzi

$$d_n = c_1 d_{n-1} + c_2 d_{n-2} + \dots + c_{n-1} d_1 + n c_n.$$

Okazuje się, że $(d_n)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Dolda wtedy i tylko wtedy, gdy jest generowany przez pewien ciąg $(c_n)_{n=1}^\infty$. Zostało to wykazane przez Bau-Sen Du, Sen-Shan Huang i Ming-Chia Li – ich dowód można znaleźć w artykule *Generalized Fermat, double Fermat and Newton sequences* opublikowanym w czasopiśmie *Journal of Number Theory* w 2003 roku.

Przy okazji

Na pomysł, by uogólnić małe twierdzenie Fermata, wpadł też Leonard Euler. Posłużył się w tym celu funkcją φ noszącą dziś jego nazwisko. Funkcja ta zlicza dla dowolnej liczby naturalnej n liczby z n względnie pierwsze i mniejsze od n (dodatkowo przyjmuje się, że $\varphi(1) = 1$). Nietrudno wykazać, że jeśli w rozkładzie n na liczby pierwsze występują liczby p_1, p_2, \dots, p_k w dowolnych dodatnich potęgach, to $\varphi(n)$ jest równe

$$n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Euler udowodnił, że

dla względnie pierwszych n i a zachodzi

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

czy, jak kto woli

$$n \mid a^{\varphi(n)} - 1.$$

Małe twierdzenie Fermata jest szczególnym przypadkiem tego twierdzenia, bo dla liczby pierwszej p jest

$\varphi(p) = p - 1$. Zatem mamy

$$p \mid a(a^{p-1} - 1) \quad [= a^p - a],$$

bo gdy p nie dzieli a , to dzieli $a^{p-1} - 1$.

Twierdzenie Eulera ma tak prosty dowód, że można by zmieścić go na marginesie. Oto on.

Oznaczmy przez $r_1, \dots, r_{\varphi(n)}$ wszystkie liczby względnie pierwsze z n i mniejsze od n . Gdy a jest względnie pierwsze z n , liczby $ar_1, \dots, ar_{\varphi(n)}$ też są względnie pierwsze z n i nie ma wśród nich dwóch przystających modulo n , bo

$$ar_i \equiv ar_j \pmod{n} \Rightarrow a(r_i - r_j) \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow r_i = r_j \Rightarrow i = j.$$

Zatem dla każdego k istnieje dokładnie jedno takie l , że $ar_k \equiv r_l \pmod{n}$. Wobec tego

$$a^{\varphi(n)} r_1 \dots r_{\varphi(n)} = ar_1 \dots ar_{\varphi(n)} \equiv r_1 \dots r_{\varphi(n)} \pmod{n},$$

a więc, dzieląc stronami przez $r_1 \dots r_{\varphi(n)}$, otrzymujemy

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

M. K.



Skandal z pianą, czyli Afrodyta topologiczna

Krzysztof REJMER

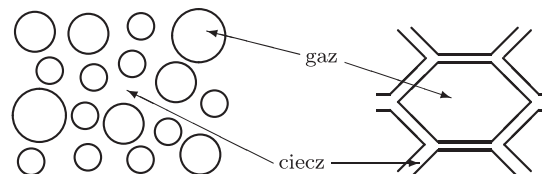
Robert Hooke (*Micrographia*, London, 1665) i Nehemiah Grew (*The Anatomy of Plants*, London, 1682) zauważyli niezwykle podobieństwo struktury komórkowej tkanek do piany. Jednak na tym wcale nie koniec. W XIX wieku niektórzy biolodzy, pod wpływem eksperymentów Plateau i Brewstera, zasugerowali, że w momencie ich powstawania komórki przyjmują kształty co prawda różne, ale zawsze zgodne z warunkiem powierzchni minimalnej. Te koncepcje mają swoje naturalne przedłużenie we współczesnych hipotezach, mówiących, że prekursorem żywej komórki była zdolna do replikowania się protokomórka o ściankach zbudowanych wyłącznie z kwasów tłuszczowych, niezawierających kanałów białkowych i pomp sodowo-potasowych (Jack William Szostak, laureat Nagrody Nobla w dziedzinie fizjologii i medycyny, rok 2009). Szkocki biolog, pionier biologii matematycznej, D'Arcy Wentworth Thompson (1860–1948) zajmował się wpływem praw fizyki na kształty żywych istot, a w szczególności interesował się promienicami. Mają one szkielet krzemionkowy otoczony protoplazmą, który determinuje kształt organizmu; w podobny sposób drucziana ramka z doświadczeń Plateau określa kształt rozpiętej na niej mydlanej struktury – powierzchni minimalnej. Związek życia i piany jest chyba oczywisty; jak wiemy, *Afrodyta wyłoniła się z morskiej piany*...

Thompson jest też autorem słynnej książki *On Growth and Form*, którą inny laureat Nagrody Nobla w dziedzinie medycyny, Peter Medawar, nazwał najdoskonalszym w całej historii nauki dziełem literatury, jakie kiedykolwiek zostało napisane po angielsku.



Piana, jaka jest, to chyba każdy widzi... Jednak z definicją jest dużo trudniej. Można spotkać się z określeniem, że piany są to struktury heterofazowe, w których ciecz lub ciało stałe stanowią fazę ciągłą, a gaz fazę rozproszoną. Użycie słowa faza jest tu, niestety, mocno mylące. Mydlana piana to powietrze uwieszone w komórkach, których ścianki zbudowane są z roztworu wody i mydła. A zatem gaz i ciecz nie są różnymi fazami termodynamicznymi tej samej substancji. Zupełnie inną rzeczą jest to, że mydło zmieszane z wodą, w zależności od stężenia i temperatury, może tworzyć różne fazy termodynamiczne. Mówiąc prostymi słowami: piana zbudowana jest z wielu makroskopowych komórek zawierających gaz, rozdzielonych cieńszymi lub grubszymi obszarami cieczy lub ciała stałego. Pianą jest również pumeks oraz bezowe ciastko. A chleb? O pianie mówimy zazwyczaj, gdy ułamek objętości zajmowanej przez gaz jest większy od ułamka objętości zajmowanego przez ciecz lub ciało stałe. Choć duża liczba mydlanych baniek tworzy pianę, to przecież pojedyncza bańka pianą jeszcze nie jest, dwie bańki również nie, podobnie jak dwie osoby nie czynią jeszcze tłumu. Żyjemy w świecie, raj dla demagogów, w którym większość pojęć jest nieostra. Casus piany przypomina słynną megaryjską aporię o łysym...

Interesować nas będą ciekłe piany. Istnieją dwa zasadniczo odmienne ich rodzaje: tak zwana piana sucha, czyli wielościenna, oraz piana mokra (przykładem piany na piwie), zbudowana z mniej więcej kulistych bąbelków gazu zawieszonych w cieczy.



Piana mokra (po lewej) i piana sucha (po prawej); ilustracja dwuwymiarowa

Plateau sformułował podstawowe prawa opisujące morfologię piany suchej:

- I. Trzy i tylko trzy powierzchnie tworzące pomiędzy sobą kąty 120° stykają się wzdłuż każdej krawędzi.
- II. Cztery i tylko cztery krawędzie łączą się w jednym wierzchołku (tak zwanym wierzchołku tetraedrycznym). Tworzą one zawsze kąty o wartości $\pi - \arccos(1/3) \approx 109^\circ 28' 16''$.

Te dwa stwierdzenia nie są, oczywiście, niezależne. Należy je uzupełnić trzecią, dodatkową regułą:

III. Jeżeli piana styka się ze zwilżaną powierzchnią, wtedy jej powierzchnie i krawędzie są prostopadłe do tej powierzchni.

W 1887 roku William Thomson (Lord Kelvin) opublikował pracę *On the Division of Space with Minimum Partition Area* (W. Thomson, Phil. Mag. 5, 503 (1887); W. Thomson, *Mathematical and Physical Papers*, Cambridge U.P. Cambridge 1911, t. 5, s. 297), w której próbował rozwiązać zagadnienie podziału przestrzeni na komórki o jednakowej objętości i zarazem o minimalnej powierzchni ścian. Zagadnienie to nosi nazwę **problemu Kelvina**. Kelvin, rozważając jednakowe komórki, rzecz bardzo uprościł. Mówimy o pianie monodispersyjnej i polidispersyjnej, w zależności od tego, czy wszystkie komórki mają jednakową objętość, czy też nie. Prawdziwa piana jest, oczywiście, polidispersyjna. Thomson jako rozwiązanie problemu Kelvina zaproponował komórkę (tetrakaidekaedr) o kształcie nazwanym potem czternastościanem Kelvina. Jest to ośmiościan, od którego sześciu wierzchołków odcięto ostrosłupy. W ten sposób powstało sześć nowych ścian o kształcie kwadratu, natomiast z ośmiu ścian pierwotnych pozostało osiem ścian o kształcie sześciokąta foremnego. A zatem jest to bryła o czternastu ścianach. Aby spełnić warunek powierzchni minimalnej i zarazem dobrze wypełnić przestrzeń, należy lekko zdeformować tę bryłę. Kwadraty muszą mieć zakrzywione boki, a sześciokąty muszą mieć zakrzywione powierzchnie (choć o zerowej średniej krzywiznie). Kelvin zbudował duży druczany model nazwany *materacową sprężyną Kelvina*, który przetrwał do dziś na uniwersytecie w Glasgow. Zajmujący się pianami irlandzki fizyk Denis Weaire ten sposób działania nazywa typowym dla Kelvina przyziemnym (down-to-earth) podejściem. Jest to doskonała ilustracja kelwinowskiej manieri sprowadzania wszystkiego do mechanicznego modelu. Zdarzyło się, że Kelvin zalecił studentom krystalografii, by zamówili u tokarza lub wytwórcy drewnianych paciorków do różańców tysiąc drewnianych kulek o średnicy pół cala każda.

Kelvin nie wspominał ani słowem o jakiegokolwiek próbie zaobserwowania swojej struktury w prawdziwej pianie. To właśnie D'Arcy Wentworth Thompson docenił jego idee, ale nader lekkomyślnie uznał, że praktyczna demonstracja racji Kelvina jest rzeczą trywialną. W 1940 roku amerykański botanik Edwin Matzke spróbował to udowodnić doświadczalnie, tworząc (jeśli to właściwe słowo) za pomocą strzykawki tysiące jednakowych, dużych bąbelków „idealnej” piany. Zażyste, musiał mieć anielską cierpliwość! Pomimo że nie znalazł ani jednej komórki Kelvina, nadal uważano (zapewne przez szacunek dla upartego Szkota), że Kelvin znalazł najstabilniejszą postać piany. Trzeba jednak dodać, że sens doświadczenia Matzkego był kwestionowany, ponieważ trwało cały dzień, a płynna piana – jak wiadomo – żyje krótko.

Piany to coś znacznie więcej niż tylko zajmująca, geometryczna trudność. Jest to punkt wyjścia do ataku na rzeczywisty problem: piany zawierają losową mieszankę bąbelków o bardzo różnych rozmiarach. Takie piany w obfitości występują w pubie, w kuchni i w zakładach chemicznych. Są one przedmiotem głębokiego zainteresowania technologów żywności: gdy pieką, warzą i usuwają pniące się ciecze. Jednak te pożyteczne piany są słabo rozumiane – po prostu brak jest teorii, która dobrze opisuje czubek pinty piwa czy pianę w kieliszku szampana – powiada Weaire.

Przez ponad sto lat hipoteza Kelvina (zgodnie z którą jego tetrakaidekaedr daje minimum energii powierzchniowej) pozostawała nieudowodniona. W 1993 roku Denis Weaire i jego student Robert Phelan znaleźli inną strukturę, która daje lepsze rozwiązanie problemu Kelvina. Nie była niczym nowym! Już w 1775 roku strukturę Weaire'a-Phelana zauważył francuski hutnik i archeolog (ciekawy zestaw!) Pierre Clément Grignon (1723–1784), opisując typowy kształt ziarna stali. Wykorzystuje ona dwa rodzaje komórek o jednakowej objętości. Jedna to nieregularny dodekaedr (dwunastościan) o pięciokątnych ścianach i tetrakaidekaedr (czternastościan) o dwóch sześciokątnych i dwunastu pięciokątnych ścianach, tak jak w przypadku struktury Kelvina – zakrzywionych (oczywiście o zerowej krzywiznie średniej). Komórka elementarna zawiera sześć czternastościanów i dwa dwunastościany. Jest to rozwiązanie nieco korzystniejsze od rozwiązania podanego przez Kelvina, brak jednak rozstrzygnięcia, czy jest ono optymalne.

Więcej o czternastościanie na str. 11.



Rozwiązanie zadania F 889.

Po zatrzymaniu ruchu orbitalnego Ziemia zaczęłaby spadać na Słońce ruchem prostoliniowym. Aby skorzystać z III prawa Keplera, potraktujemy ten ruch jak połowę obiegu po elipsie o zerowej krótszej osi i dłuższej osi równej połowie odległości Ziemia-Słońce.

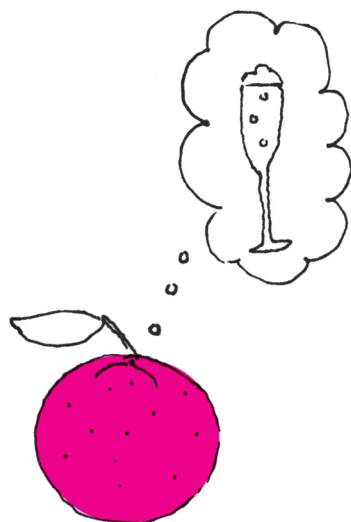
$$\frac{a^3}{T_0^2} = \frac{(a/2)^3}{(2T)^2},$$

gdzie a oznacza odległość Ziemia-Słońce, T_0 to jeden rok, a T jest poszukiwanym czasem spadania. Mamy więc:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{3/2} T_0 = 0,1768 T_0.$$

Prostoliniowe spadanie Ziemi na Słońce trwałoby nieco ponad 64 dni, 13 godzin i 37 minut, czyli mniej więcej tyle, ile trwają szkolne wakacje.

W przypadku piany mokrej problem stabilności sprowadza się do zagadnienia najgęstszego upakowania kul. Jest to takie samo upakowanie, jakiego używają sprzedawcy w sklepach z owocami, układając piramidę z pomarańczami. Rozwiązanie takie zasugerował w 1611 roku Kepler. Dowód podał (wspomagając się komputerem) Thomas Hales dopiero w 1998 roku. Jeszcze w latach osiemdziesiątych ubiegłego stulecia słynny matematyk amerykański John Milnor mawiał, że to skandal, iż zagadnienie z odpowiedzią tak bardzo oczywistą, podaną przez Keplera i przez Gaussa, nadal nie ma dowodu.



Ciekle piany są tworem metatrwałym. Stabilizują ją, na przykład, surfaktanty. Woda mineralna zawiera zwykle znacznie więcej gazu niż piwo, ale brak jej surfaktantów, z tego powodu nie tworzy piany. Na odwrót, piwna brzczyka też nie pieni się, bo wprawdzie zawiera ona surfaktanty, ale brak jej jeszcze dwutlenku węgla.

Istnieje kilka zjawisk o bardzo różnej naturze odpowiedzialnych za rozpad suchej piany. Grawitacja powoduje drenaż, czyli odpływ cieczy do dolnych części wielokomórkowej struktury. Ciśnienie osmotyczne powoduje przepływ substancji w ściance ku jej brzegom. Ciśnienie Laplace'a (czyli różnica ciśnień wynikająca z działania sił napięcia powierzchniowego) wywołuje dyfuzję gazu przez ściankę od małych do dużych pęcherzy. Ścianki mogą pękać w wyniku działania tak zwanego ciśnienia rozszczepiającego (*disjoining pressure*) we wnętrzu błonki. Istnieją także tak zwane procesy topologiczne prowadzące do zmiany liczby ścian. To wszystko powoduje zmiany struktury piany, które mogą być zjawiskiem lokalnym lub kolektywnym, a nawet przebiegającym lawinowo. Ale, niestety, nie zawsze wyłania się Afrodyta...



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1471. Punkt D leży na boku AB , a punkt E na boku AC trójkąta ABC , przy czym prosta DE jest równoległa do BC i styczna do okręgu wpisanego w ABC . Udowodnić, że $8DE \leq AB + BC + CA$.

Rozwiązanie na str. 4

M 1472. Na przerwie n uczniów siedzi w kółku. Nauczyciel stojący w środku wybiera jednego z nich, wręcza mu cukierek, po czym podążając zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, opuszcza kolejnego ucznia i wręcza cukierek następnemu, opuszcza dwóch kolejnych uczniów, wręcza cukierek następnemu itd. Udowodnić, że jeśli n jest potęgą dwójki, to w końcu każdy uczeń dostanie cukierka.

Rozwiązanie na str. 5

M 1473. Aga i Bartek grają w następującą grę: Aga wymyśla wielomian o całkowitych, nieujemnych współczynnikach, po czym Bartek chce go odgadnąć, zadając pytania o $P(x)$ dla x całkowitych. Ile pytań wystarczy zadać, aby Bartek odgadł wielomian?

Rozwiązanie na str. 12

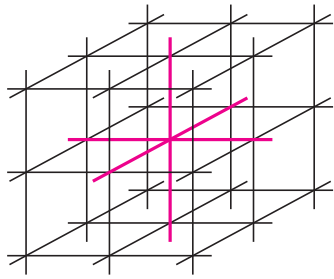
Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 889. Ile czasu trwałoby spadanie Ziemi na Słońce, gdyby nagle zatrzymany został jej ruch orbitalny?

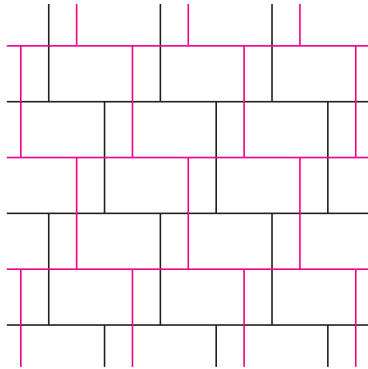
Rozwiązanie na str. 9

F 890. Oszacuj, ile wynosi praca potrzebna do napompowania opony roweru, jeśli pompowanie ma być procesem izotermicznym. Przyjmij, że zewnętrzna średnica opony wynosi $D = 70$ cm, szerokość opony to $d = 3$ cm, materiał opony jest nierozciągliwy, a końcowe ciśnienie w oponie to $p = 6 \cdot 10^5$ Pa (wartości typowe dla rowerów turystycznych). Ciśnienie zewnętrzne (atmosferyczne) jest równe $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Pa, a temperatura wynosi $T = 295$ K.

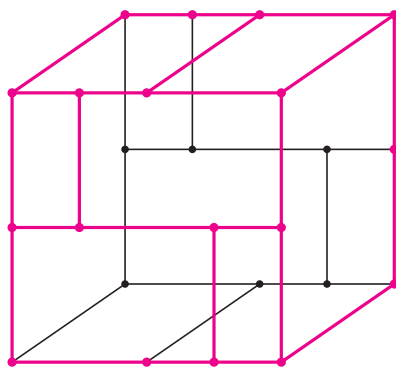
Rozwiązanie na str. 13



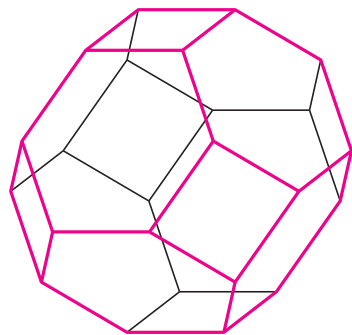
Normalne wypełnienie przestrzeni sześcianami



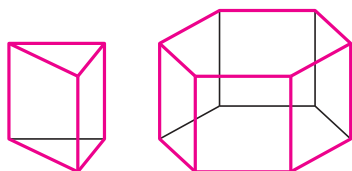
Minimalne wypełnienie sześcianami (widziane z kierunku jednej z krawędzi)



Sześcian jako czternastościan

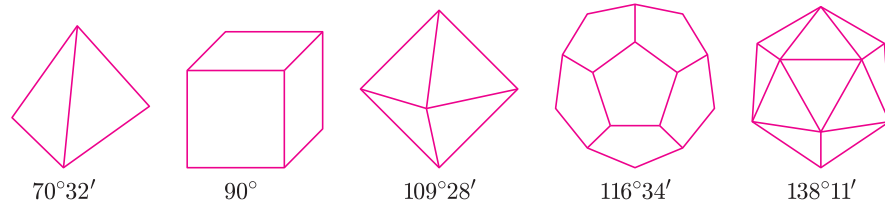


Czternastościan archimedesowy



Wypełniające przestrzeń graniastosłupy archimedesowe (ten z prawej znany jest w budownictwie drogowym jako **trylinka**)

Problem wypełnienia przestrzeni bez luk jednakowymi wielościanami okazuje się wcale nie tak prosty, jak na pierwszy rzut oka można oczekiwać. Spośród pięciu wielościanów platońskich tylko jeden nadaje się do tego. Oczywiście, jest to sześcian. O tym, że pozostałe nie mogą wypełnić przestrzeni, przekonać się łatwo: wystarczy zauważyć, że ich kąty dwuścienne nie składają się w żadnej liczbie na kąt pełny.



Wypełnienie przestrzeni sześcianami może być zrealizowane na wiele sposobów. Najbardziej oczywisty z nich to taki, gdy w każdym wierzchołku spotyka się 8 sześcianów. W tym wypełnieniu poszczególne wielościany stykają się całymi ścianami – wypełnienie o tej własności nazywa się **normalne**.

Można jednak sześciany tak ułożone poprzesuwać w ten sposób, by w żadnym punkcie nie stykało się ich więcej niż 4. Liczby tej nie można już zmniejszyć. Henri Lebesgue zauważył w 1911 roku (a potem udowodnił), że w każdym wypełnieniu przestrzeni (już niekoniecznie jednakowymi) wielościanami będą punkty, gdzie stykać się ich będzie co najmniej 4. Przyjęto to nawet za jedną z wersji definicji wymiaru: jeśli jakąś przestrzeń można wypełnić tak, że są punkty, w których styka się $(n + 1)$ wypełniających obiektów i nie ma punktów, w których styka się ich więcej, to ma ona wymiar co najwyżej n . Zatem to nowe wypełnienie sześcianami realizuje minimum takiego n dla naszej przestrzeni, która jest trójwymiarowa. Wypełnienie realizujące minimum n nazywa się, oczywiście, **minimalne**.

Mamy więc dla sześcianu wypełnienie normalne, mamy też wypełnienie minimalne, ale nie mamy wypełnienia, które miałyby równocześnie obie te własności. Powstaje pytanie, czy istnieje wielościan wypełniający przestrzeń i mający obie te własności.

Piękną drogą do znalezienia pozytywnej odpowiedzi na to pytanie wskazał Hugo Steinhaus. Radzi on mianowicie, aby zaobserwować ślady, jakie na każdym sześcianie wypełnienia minimalnego zostawią krawędzie sąsiednich sześcianów. Widzimy, że są to prostokąty, z których 8 ma jednak po sześć śladów wierzchołków sąsiednich sześcianów. Można by je więc traktować jak sześciokąty. Przy takim podejściu nasz sześcian ma więc 8 ścian sześciokątnych i 6 czworokątnych, czyli jest czternastościanem. I nasuwa się pytanie, czy takiej bryły nie można zdeformować tak (nie zmieniając liczby obu rodzajów ścian), by wszystkie one stały się foremne.

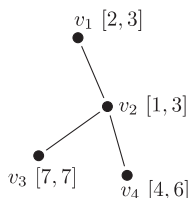
Okazuje się, że jest to wykonalne, a otrzymany wielościan to **czternastościan archimedesowy** (wielościany archimedesowe mają wszystkie ściany foremne i jednakowe naroża). Można go inaczej otrzymać, obcinając ośmiościanowi foremnemu naroża do $\frac{1}{3}$ długości krawędzi. Okazuje się więc, że istnieje wielościan archimedesowy realizujący wypełnienie równocześnie normalne i minimalne. Można udowodnić, że jest on – wśród wielościanów mających ściany foremne – jedyny.

Jakie jeszcze wielościany archimedesowe mogą wypełnić przestrzeń? Tylko graniastosłupy o podstawach trójkątnych lub sześciokątnych (także czworokątnych, ale to są już wymienione sześciany). Wystarczy wypełnić płaszczyznę ich podstawami, by otrzymać warstwy w sposób oczywisty wypełniające przestrzeń.

Marek KORDOS

Informatyczny kącik olimpijski (86): Sieć światłowodowa

Tym razem omówimy zadanie *Fiber-optic Network*, które pojawiło się na zeszłorocznych zawodach ACM-ICPC Asia Mudanjiang Regional Contest. W zadaniu tym mamy dane drzewo o n wierzchołkach, a dla każdego wierzchołka v zadane liczby naturalne $1 \leq L_v \leq R_v \leq M$ (ograniczenia to $n \leq 50$, $M \leq 50\,000$). *Dobrym przyporządkowaniem* będziemy nazywać przyporządkowanie każdemu wierzchołkowi v liczby całkowitej z odpowiadającego mu przedziału $[L_v, R_v]$ w taki sposób, aby liczby przyporządkowane wierzchołkom połączonym krawędzią były względnie pierwsze. Dla przejrzystości oznaczymy, że dla danego przyporządkowania f liczba przypisana wierzchołkowi v to $f(v)$. W zadaniu proszą nas, aby dla każdego wierzchołka obliczyć sumę liczb przyporządkowanych mu we wszystkich dobrych przyporządkowaniach. Wyniki należy podać modulo $10^9 + 7$, zatem wszystkie działania będziemy wykonywać modulo ta liczba.



Dla $f(v_2) = 1$ liczby w pozostałych trzech wierzchołkach możemy wybrać dowolnie, co daje 6 przyporządkowań $(2/3, 1, 7, 4/5/6)$. Dla $f(v_2) = 2$ mamy jedno przyporządkowanie $(3, 2, 7, 5)$, a dla $f(v_2) = 3$ dwa $(2, 3, 7, 4/5)$. Odpowiedzi dla kolejnych wierzchołków to 22, 14, 63 i 44.

Chwila myślenia i odrobina algorytmicznego rozsądku doprowadzają nas do wniosku, że w zadaniu nie ma na tyle „regularności” (cokolwiek by to znaczyło), aby dało się rozwiązać je inaczej niż poprzez wyznaczenie dla każdego wierzchołka v oraz każdej możliwej wartości k , dla ilu dobrych przyporządkowań zachodzi $f(v) = k$. To właśnie będzie naszym celem.

Jak można się spodziewać, zapewne sporo nam pomoże, jeżeli najpierw ukorzenimy nasze drzewo (w dowolnym wierzchołku). Rozwiązanie będzie bazowało na programowaniu dynamicznym. Oznaczmy przez T_v poddrzewo ukorzenione w wierzchołku v , a przez $dp[v][k]$ liczbę dobrych przyporządkowań, dla których zachodzi $f(v) = k$, gdy ograniczymy się jedynie do wierzchołków z poddrzewa T_v . Niewątpliwie dla v będących liśćmi zachodzi $dp[v][k] = 1$, gdy $L_v \leq k \leq R_v$, i $dp[v][k] = 0$ dla pozostałych wartości k . Załóżmy teraz, że chcemy wyznaczyć odpowiedź dla wierzchołka v , który ma s synów u_1, \dots, u_s i mamy już wyznaczone tablice $dp[u_1], \dots, dp[u_s]$. Liczba dobrych przyporządkowań dla poddrzewa T_v spełniających $f(v) = k$ to iloczyn liczb dobrych przyporządkowań dla poddrzew T_{u_i} , dla których $\text{nwd}(f(u_i), k) = 1$. Zatem jeśli wprowadzimy oznaczenie

$$P[u][k] := \sum_{\text{nwd}(k,j)=1} dp[u][j]$$

(zauważmy, że tak zapisana suma jest dobrze określona, gdyż tylko skończona liczba składników jest niezerowa), to dostaniemy wzór

$$(1) \quad dp[v][k] = P[u_1][k] \cdot \dots \cdot P[u_s][k].$$

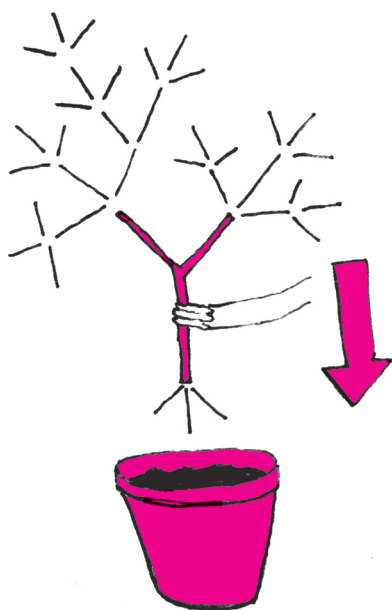
Moglibyśmy po prostu przeiterować po wszystkich możliwych wartościach k przyporządkowanych każdemu wierzchołkowi u_i , ale wtedy otrzymalibyśmy rozwiązanie co najmniej kwadratowe w zależności od M , co byłoby zdecydowanie zbyt wolne. Dlatego stajemy przed kluczowym problemem szybkiego wyznaczenia $P[u][k]$ dla ustalonego syna u . Skoro mowa o względnej pierwszości, to z pewnością warto poznać zbiór (różnych) dzielników pierwszych liczby k ; niech będą to liczby p_1, \dots, p_m . Liczby względnie pierwsze z k to wszystkie liczby poza tymi, które są podzielne przez którąkolwiek z liczb p_1, \dots, p_m . Dla $m = 1$ mamy $P[u][k] = \sum_j dp[u][j] - \sum_{p_1|j} dp[u][j]$, co umożliwia szybkie obliczenie żądanej wartości, o ile znalibyśmy wcześniej $\sum_{p_1|j} dp[u][j]$. Życie nie jest jednak takie proste i w ogólnym przypadku nie możemy po prostu odjąć $\sum_{p_i|j} dp[u][j]$ dla $i = 1, \dots, m$, gdyż wiele ze składników postaci $dp[u][j]$ odjęlibyśmy więcej niż raz (konkretnie tyle razy, ile j ma dzielników wśród liczb p_1, \dots, p_m).

Jeśli wprowadzimy oznaczenia $w(A) := \sum_{a \in A} dp[u][a]$ oraz A_l na zbiór liczb podzielnych przez liczbę l , to dostaniemy zależność

$$(2) \quad P[u][k] = \sum_j dp[u][j] - w(A_{p_1} \cup \dots \cup A_{p_m}).$$

Na ratunek w obliczeniu (2) przychodzi nam *zasada włączeń i wyłączeń*, a właściwie jej minimalne uogólnienie:

$$w(A_{p_1} \cup \dots \cup A_{p_m}) = \sum_{1 \leq l \leq m} \sum_{i_1 < \dots < i_l} (-1)^{l+1} w(A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_l}}).$$



Rozwiązanie zadania M 1473.
Odpowiedź. Wystarczą dwa pytania.

Niech wielomian, który wymyśliła Aga, to będzie $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$. Najpierw Bartek pyta o $P(1)$. Zauważmy, że wówczas $a_i \leq P(1)$ dla każdego i . Niech $b = P(1) + 1$. Pytając o $P(b)$ i zapisując tę liczbę w systemie o podstawie b , Bartek otrzyma liczbę

$$a_n b^n + \dots + a_0 = (a_n \dots a_0)_b$$

o cyfrach a_n, \dots, a_0 , czyli odgadnie P .

Pomimo przerażającego wyglądu wzór ten jest całkiem prosty, ale jeżeli ktoś nie spotkał się z nim wcześniej, warto się zatrzymać i pokontemplować go przez chwilę, np. przekonując się o jego poprawności dla $m = 2, 3$. (Oczywiście, w ogólnej wersji wzoru nie ma znaczenia, czym są konkretnie zbiory A_{p_i} i pozostaje on prawdziwy dla dowolnych zbiorów.)

Zatem kolejną rzeczą, którą musimy zbadać, są zbiory postaci $A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_l}}$. Wszystkie liczby p_{i_1}, \dots, p_{i_l} są pierwsze, więc jeżeli pewna liczba ma być podzielna przez wszystkie z nich, to musi być podzielna przez ich iloczyn (stwierdzenie odwrotne oczywiście też jest prawdziwe), co prowadzi nas do zależności $A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_l}} = A_{p_{i_1} \dots p_{i_l}}$. Dzięki niej wzór (2) możemy wyrazić następująco:

$$(3) \quad P[u][k] = \sum_j dp[u][j] + \sum_{1 \leq l \leq m} \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_l \\ p_{i_1} \dots p_{i_l} | j}} (-1)^l dp[u][j].$$

Widać, że wielokrotnie spotykamy się tutaj z podobnymi sumami składników $dp[u][j]$, zatem wprowadzając oznaczenie $S[u][i] := \sum_{i|j} dp[u][j]$, możemy przepisać wzór (3) w trochę miłszej postaci:

$$(4) \quad P[u][k] = S[u][1] + \sum_{1 \leq l \leq m} \sum_{i_1 < \dots < i_l} (-1)^l S[u][p_{i_1} \dots p_{i_l}].$$

Zauważmy, że jeżeli mamy tablicę $dp[u]$, to jesteśmy w stanie relatywnie szybko wyznaczyć tablicę $S[u]$. A konkretnie, aby obliczyć $S[u][i]$, potrzebujemy wysumować $\frac{M}{i}$ składników. Zatem wykonanie tego dla $i = 1, \dots, M$ będzie miało złożoność czasową $O(M(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{M})) = O(M \log M)$.

Zastanówmy się teraz, jaką złożoność ma wyznaczanie $P[u][k]$ za pomocą wzoru (4). Zauważmy, że występują w nim jedynie składniki postaci $S[u][i]$, gdzie i jest pewnym dzielnikiem k . Ponadto nie wszystkie dzielniki uwzględniamy (tylko takie niepodzielne przez kwadraty liczb pierwszych), ale ta obserwacja nie jest nam potrzebna, aby uzyskać sensowne oszacowanie. Zatem, aby wyznaczyć wartości $P[u][k]$ dla $k = 1, \dots, M$, musimy wysumować co najwyżej tyle składników, ile jest łącznie dzielników liczb $1, \dots, M$, ale ich liczba jest również rzędu $O(M \log M)$. Aby szybko się dostać do tych składników, warto na samym początku programu dla każdej liczby od 1 do M spamiętać jej bezkwadratowe dzielniki.

Podsumowując, mając tablice $dp[u_i]$ dla wszystkich synów wierzchołka v , możemy w czasie $O(sM \log M)$ kolejno wyznaczyć tablice $S[u_i]$ i $P[u_i]$, co pozwoli nam skorzystać ze wzoru (1) do wyznaczenia $dp[v]$. Zatem w sumarycznym czasie $O(nM \log M)$ możemy tą metodą wyznaczyć odpowiedź dla korzenia drzewa. Uruchamiając powyższy algorytm dla każdej możliwości wyboru korzenia, możemy rozwiązać zadanie w czasie $O(n^2 M \log M)$. Jednak autorów zadania taka złożoność nie satysfakcjonuje i wymagane jest rozwiązanie $O(nM \log M)$.

Pomysł pozwalający obliczać nam kompletne informacje dla wszystkich wierzchołków drzewa (a nie tylko te uwzględniające wierzchołki z odpowiadających im poddrzew), polega na spychaniu informacji z korzenia w dół, przesyłając informacje z „naddrzewa”. Niech v będzie pewnym wierzchołkiem, a w jego ojcem w drzewie. Pamiętamy, że tablica dp jest iloczynem odpowiednich wartości tablic P dla sąsiadów w poddrzewie, dlatego jeżeli mamy kompletną tablicę $dp[w]$, to aby obliczyć wkład naddrzewa v o korzeniu w wierzchołku w , powinniśmy podzielić wartości z tablicy $dp[w]$ przez odpowiadające wartości z tablicy $P[v]$, przeliczyć jeszcze raz wartości tablic $S[w]$ i $P[w]$ na podstawie nowych wartości $dp[w]$ (tablice te teraz lekko zmieniają swoje znaczenie, gdyż zmieniamy zbiór sąsiadów, którzy są uwzględniani w ich liczeniu), co pozwala nam wyliczyć kompletną tablicę $dp[v]$ (tzn. taką, w której uwzględniony jest też ojciec). Aby wyznaczyć kompletne $dp[v]$ na podstawie informacji z ojca, potrzebujemy wykonać stałą liczbę przeliczeń tablic, z których każde odbywa się w czasie $O(M \log M)$, co daje algorytm o sumarycznej złożoności $O(nM \log M)$.

Wojciech NADARA

Przykładowo, jeżeli chcemy obliczyć liczby, które nie są względnie pierwsze z $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, to musimy dodać liczby podzielne przez 2, przez 3, przez 5, odjąć liczby podzielne przez $2 \cdot 3 = 6$, przez $2 \cdot 5 = 10$, przez $3 \cdot 5 = 15$ i dodać liczby podzielne przez $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Warto też zauważyć, że potęgi, w których dane liczby pierwsze dzielą k , nie mają żadnego znaczenia – liczby względnie pierwsze z $2 \cdot 3 \cdot 5$ to te same liczby, co liczby względnie pierwsze z $2^2 \cdot 3 \cdot 5$.



Rozwiązanie zadania F 890.
Początkowe ciśnienie w oponie jest równe p_0 , a więc musimy do niej włożyć dodatkowo

$$n = \frac{(p - p_0)V}{RT}$$

moli powietrza, gdzie V jest objętością opony

$$V = \frac{\pi^2(D - d/2)d^2}{2}$$

Te n moli powietrza w temperaturze T pod ciśnieniem p_0 zajmowały objętość

$$V_0 = \frac{nRT}{p_0}$$

Sprężając izotermicznie n moli gazu od objętości V_0 do V , wykonujemy pracę

$$W = nRT \ln \left(\frac{V_0}{V} \right).$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$W = (p - p_0)V \ln \left(\frac{p - p_0}{p_0} \right).$$

Po podstawieniu danych liczbowych mamy $W \approx 2450$ J, czyli mniej niż potrzeba do podgrzania 1 litra wody o 1 stopień.

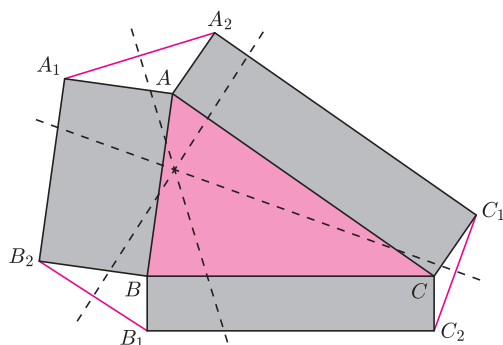
Prostokąty na trójkącie

Tomasz PRZYBYŁOWSKI uczeń liceum Zespołu Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu

Z twierdzeniem Pitagorasa wszyscy się znamy, budowanie kwadratów na bokach trójkąta prostokątnego nie jest niczym nadzwyczajnym. A co możemy powiedzieć ciekawego o prostokątach skonstruowanych na bokach dowolnego trójkąta?

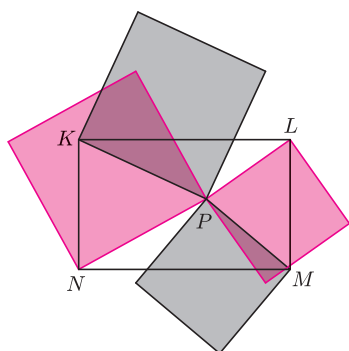
Okazuje się, że zachodzi następujący fakt:

Na bokach trójkąta ABC zbudowano na zewnątrz prostokąty ABB_2A_1 , BCC_2B_1 i CAA_2C_1 . Wówczas symetralne odcinków A_1A_2 , B_1B_2 i C_1C_2 przecinają się w jednym punkcie.



Czytelnikowi Odważnemu polecamy powalczyć choć chwilę z dowodem powyższego faktu, zaś Czytelnikowi Rozsądnemu radzimy zapoznać się z poniższym lematem (znanym też jako twierdzenie o brytyjskiej fladze) i wtedy spróbować zaatakować nasz fakt, już z większym powodzeniem.

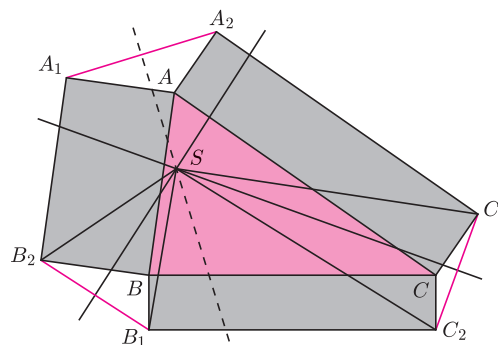
Dany jest prostokąt $KLMN$ i dowolny punkt P . Wówczas $PK^2 + PM^2 = PL^2 + PN^2$.



Warto odnotować, że jego teza to nic innego jak... budowanie kwadratów na odcinkach! Czytelnik Kreatywny dostrzeże z pewnością małą zbieżność tego faktu z prawdziwą nazwą lematu. Nietrudny dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Z lematem możemy spokojnie przystąpić do dowodu współpękowości:

Dowód. Oznaczmy przecięcie symetralnych B_1B_2 i C_1C_2 jako S . Wówczas $SB_1 = SB_2$ i $SC_1 = SC_2$. Ponadto, korzystając trzy razy z lematu dla punktu S i prostokątów ABB_2A_1 , BCC_2B_1 i CAA_2C_1 ,



otrzymujemy kolejno, iż:

$$\begin{aligned} SA^2 + SB_2^2 &= SB^2 + SA_1^2, \\ SB^2 + SC_2^2 &= SC^2 + SB_1^2, \\ SC^2 + SA_2^2 &= SA^2 + SC_1^2. \end{aligned}$$

Powyższe równania dodane stronami prowadzą do równości:

$$SA_2^2 + SB_2^2 + SC_2^2 = SA_1^2 + SB_1^2 + SC_1^2,$$

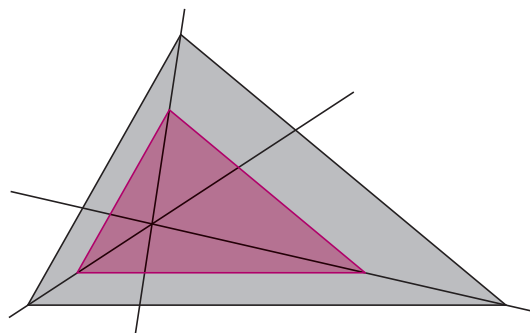
z której na mocy $SB_1 = SB_2$ i $SC_1 = SC_2$ otrzymujemy dalej:

$$\begin{aligned} SA_1^2 + SB_1^2 + SC_2^2 &= SA_1^2 + SB_1^2 + SC_1^2 \Leftrightarrow SC_2^2 = SC_1^2 \\ &\Leftrightarrow SC_1 = SC_2. \end{aligned}$$

Ostatnia równość dowodzi, że S leży na symetralnej odcinka C_1C_2 , co kończy dowód. \square

Zaprezentujemy jeszcze jeden dowód współpękowości symetralnych, obchodzący się bez najważniejszego narzędzia poprzedniego rozumowania, czyli twierdzenia o brytyjskiej fladze. Będziemy zmuszeni użyć innych ciężkich armat geometrii płaskiej, ale piękno poniższego rozumowania niewątpliwie rekompensuje to.

Zacznijmy od lematu z trójkątami podobnymi:



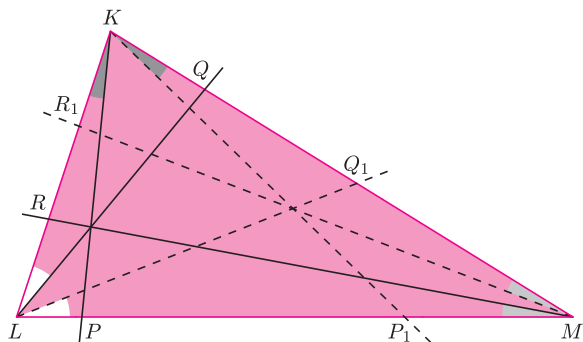
Dane są dwa nieprzystające trójkąty na płaszczyźnie tak, że ich odpowiadające boki są równoległe. Wówczas proste łączące wierzchołki tych trójkątów leżące naprzeciw równoległych boków są współpękowe.

Dowód można przeprowadzić, idąc kilkoma drogami: zwykłym podobieństwem, jednokładnością albo też bardziej wyrafinowanie, twierdzeniem Desarguesa. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

Będziemy potrzebowali jeszcze jednego lematu, znanego jako lemat o izogonalnym sprzężeniu.

W trójkącie KLM na bokach KL , LM i MK dane są odpowiednio punkty R , P i Q , tak że proste KP , LQ i MR przecinają się w jednym punkcie. Wówczas proste będące odbiciami prostych KP , LQ i MR odpowiednio względem dwusiecznych kątów LKP , MLK i KML również przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku poniżej.



Z założeń wynikają bezpośrednio równości kątów zaznaczone na nim. Korzystając z trygonometrycznego twierdzenia Cevy dla trójkąta KLM i prostych KP , LQ i MR , otrzymujemy, iż

$$(1) \frac{\sin(\sphericalangle MKP)}{\sin(\sphericalangle PKL)} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle KLQ)}{\sin(\sphericalangle QLM)} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle LMR)}{\sin(\sphericalangle RMK)} = 1,$$

co dzięki równości kątów z rysunku można przepisać jako:

$$(2) \frac{\sin(\sphericalangle LKP_1)}{\sin(\sphericalangle P_1KM)} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle MLQ_1)}{\sin(\sphericalangle Q_1LK)} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle KMR_1)}{\sin(\sphericalangle R_1ML)} = 1.$$

Stąd wynika, że odwrotność iloczynu po lewej stronie też wynosi 1. Korzystając znowu z trygonometrycznego twierdzenia Cevy, stwierdzamy, że proste KP_1 , LQ_1 i MR_1 są współpękowe, co kończy dowód lematu. \square

Przystępujemy do rozwiązania problemu.

Dowód. Niech punkty K , L , M będą wierzchołkami trójkąta utworzonego przez proste A_1B_2 , B_1C_2 , C_1A_2 . Ponadto niech X , Y , Z będą środkami odcinków odpowiednio AK , BL , CM . Niech jeszcze P będzie środkiem odcinka A_1A_2 , zaś Q niech będzie środkiem odcinka AA_2 .

Na czworokącie AA_1KA_2 można opisać okrąg, gdyż dwa jego przeciwległe kąty są proste. Stąd wynika również, że AK jest średnicą tego okręgu, zatem punkt X jako środek AK jest środkiem okręgu. Leży on na symetralnej każdej z cięciw wcześniej wspomnianego okręgu, zatem w szczególności przechodzi przez niego symetralna odcinka A_1A_2 . Analogicznie, symetralne odcinków B_1B_2 i C_1C_2 przechodzą odpowiednio przez punkty Y i Z .

Boki trójkąta XYZ są liniami środkowymi trapezów $ABLK$, $BCML$, $CMKA$, przeto boki trójkąta XYZ są równoległe do odpowiednich boków trójkąta ABC . Stąd, na mocy lematu o trójkątach podobnych, widzimy, że proste AX , BY , CZ przecinają się w jednym punkcie.

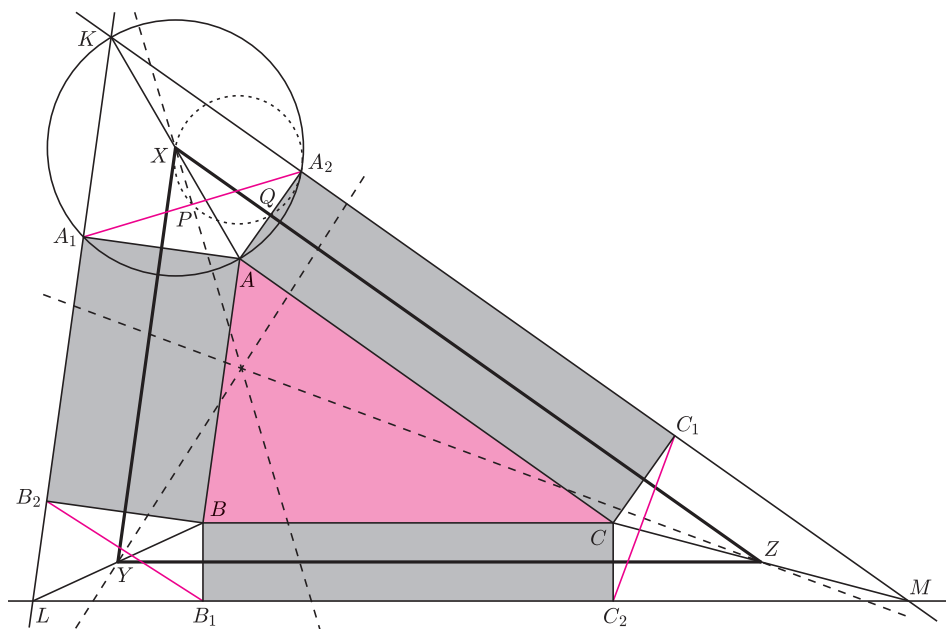
Zauważmy jeszcze, że na czworokącie $XPQA_2$ można opisać okrąg. Istotnie, kąty $XP A_2$ i $XQ A_2$ są proste.

Co więcej, prosta XP jest odbiciem prostej XA względem dwusiecznej kąta YXZ . W istocie:

$$\sphericalangle PXQ = \sphericalangle P A_2 Q = \sphericalangle A_1 A_2 A = \sphericalangle A_1 K A = \sphericalangle Y X A.$$

Analogicznie uzyskujemy tę zależność dla dwóch pozostałych symetralnych. Oczekiwana współpękowość wynika teraz bezpośrednio z lematu o izogonalnym sprzężeniu zastosowanego do trójkąta XYZ i prostych XA , YB i ZC , które, jak już pokazaliśmy, są współpękowe. \square

Pierwszy dowód ma jednak tę przewagę, że pokazuje również, jak udowodnić podobną nietrywialną współpękowość symetralnych. A o jakich symetralnych tu mowa, to praca dla Czytelnika Dociekliwego.



Autorzy stanowią drużynę biorącą udział w Turnieju Młodych Fizyków, a tekst artykułu to skrócone rozwiązanie jednego z turniejowych problemów. Kolejny artykuł oraz więcej informacji o Turniejach przedstawimy w następnym numerze.

Gdy trawa śpiewa

Filip CZERMIŃSKI, Marlena MAĆKOWIAK, Antoni NASZKIEWICZ, Kacper RACIBORSKI, Paweł SUCHOMSKI, Paweł SZCZYTKOWSKI

Zapewne każdy z Czytelników, będąc dzieckiem, uczył się grać na źdźble trawy, a zabawa ta niejednokrotnie urozmaicała spacerów na świeżym powietrzu. Dlaczego jednak źdźbło wydaje tak donośne dźwięki, gdy na nie dmuchnąć, oraz od czego zależą parametry tego dźwięku? Spróbujemy odpowiedzieć na to pytanie, wykonując kilka prostych doświadczeń.

Aby wydobyć dźwięk ze źdźbła trawy, paska papieru lub folii należy umieścić je między kciukami (fot. 1) tak, żeby „instrument” był napięty (rys. 1), a następnie, zbliżywszy do niego usta (ale nie dotykając), dmuchnąć w kierunku źdźbła.

Złożone w wyżej opisany sposób palce naciągają trawę z pewną siłą. Dla cienkich pasków oraz źdźbeł naciąg jest jednorodny na całej szerokości paska. Nasze usta, dmuchając w instrument, wysyłają strumień powietrza w kierunku źdźbła. W tej sytuacji powietrze może opływać źdźbło na jeden z dwóch sposobów: przesuwając się w przepływie *laminarnym* lub *turbulentnym*. W przepływie laminarnym płyn (czyli w naszym przypadku powietrze) przepływa w równoległych warstwach, bez zakłóceń między warstwami. Nie powoduje to ruchu trawy, pozostaje ona w spoczynku i nie uzyskujemy żadnego dźwięku. W przepływie turbulentnym (inaczej: nieustalonym) prędkość płynu przepływającego przez dane miejsce zmienia swoją wartość i kierunek – tworzą się też wiry i inne nieregularności. W tym przypadku zachodzi również transfer energii. Prędkość przepływu, przy której ruch laminarny przechodzi w turbulentny, można dla określonego płynu i warunków przepływu oszacować. Wykorzystuje się w tym celu fakt, że liczba Reynoldsa dana wzorem

$$Re = \frac{v\rho\ell}{\eta},$$

gdzie v jest prędkością przepływu, ρ i η – odpowiednio gęstością i lepkością płynu, ℓ określa zaś charakterystyczny rozmiar opływającego ciała, jest dla przepływu laminarnego znacznie mniejsza od jedności. Dla powietrza opływającego źdźbło odpowiada to prędkości rzędu milimetrów na sekundę. Prędkości, z jakimi mamy do czynienia w przypadku gry na trawie, są niewątpliwie znacznie większe od tej prędkości granicznej, mamy zatem do czynienia z przepływem turbulentnym (rys. 3).

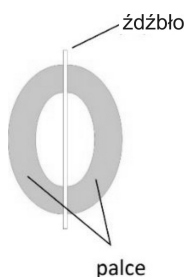
W wyniku turbulentnego przepływu powietrza pojawiają się zmienne w czasie różnice ciśnień po obu stronach źdźbła, co daje nam pewną niezerową, zmienną w czasie, siłę działającą na trawę i pobudzającą ją do drgań. Ponieważ położenia końców źdźbła są ustalone, a naciąg źdźbła możemy przyjąć za stały wzdłuż jego długości, możemy modelować je jako zamocowaną na końcach szeroką strunę. Struna taka może drgać z pewnymi określonymi częstotliwościami własnymi danymi wzorem

$$(*) \quad f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

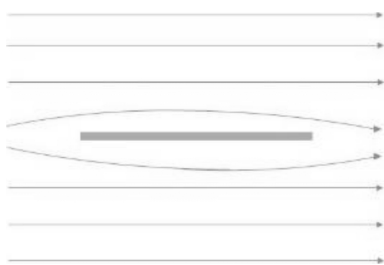
gdzie L jest długością struny, μ – gęstością liniową struny, F siłą naciągu, n jest zaś dowolną liczbą naturalną. Z wielu częstotliwości pobudzających strunę do drgań wzmacniane są – dzięki zjawisku rezonansu – tylko częstotliwości własne struny. Drgania o pozostałych częstotliwościach są wzmacniane bardzo słabo, dlatego słyszymy najgłośniejszy dźwięki odpowiadające drganiom własnym struny (rys. 4). Należy zauważyć, że dla uzyskania najgłośniejszego dźwięku należy dmuchać w miejsce strzałki (miejsce odpowiadające maksymalnej amplitudzie drgań) modu podstawowego (o najmniejszej częstotliwości), czyli w połowie długości struny.



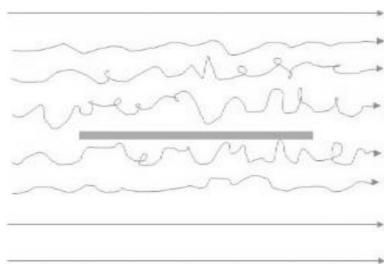
Fot. 1. Ustawienie dłoni do gry na trawie.



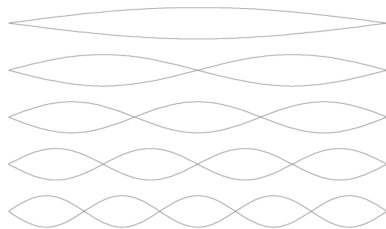
Rys. 1. Schematyczny rysunek źdźbła trawy i okalających je palców podczas gry na trawie.



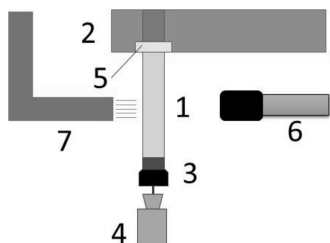
Rys. 2. Schemat przepływu laminarnego.



Rys. 3. Schemat przepływu turbulentnego.

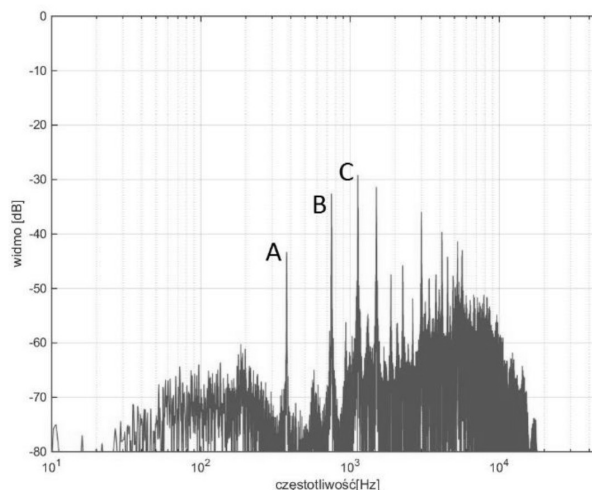


Rys. 4. Kształt drgającej struny dla pierwszej, drugiej, trzeciej, czwartej i piątej składowej harmonicznej.



Rys. 5. Schemat układu doświadczalnego; 1 – pasek folii mylarowej imitującej źdźbło trawy, 2 – stół, 3 – mocny zacisk, 4 – jeden z kilku odważników, 5 – taśma klejąca, 6 – mikrofon, 7 – podłączony do kompresora elastyczny przewód zakończony dyszą.

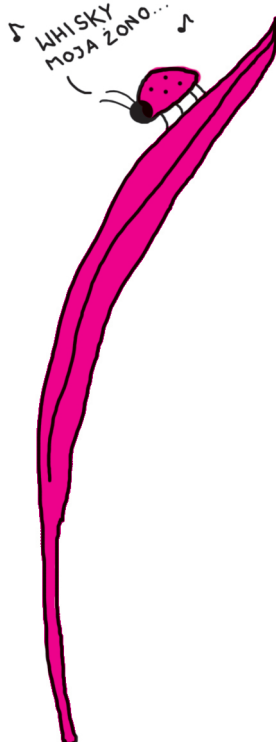
Rys. 6. Wykres widma dźwięku wydawanego przez badany pasek. Literami A, B i C zaznaczono częstotliwości odpowiadające pierwszej, drugiej i trzeciej składowej harmonicznej: $f_A = 375$ Hz, $f_B = 750$ Hz i $f_C = 1125$ Hz.



Przedstawiane dotąd rozważania podpowiadają, jakie parametry mogą mieć wpływ na dźwięk drgającego źdźbła trawy. Przeprowadziliśmy zatem serię doświadczeń, w których zbadaliśmy, jak dźwięk ten zależy od siły naciągu źdźbła, prędkości powietrza, którym dmuchamy na źdźbło, i długości źdźbła. Zbudowaliśmy układ doświadczalny odpowiadający badanemu instrumentowi; jest on przedstawiony na rysunku 5. Dźwięki wydawane przez opływany sprężonym powietrzem pasek folii mylarowej rejestrowaliśmy za pomocą mikrofonu podłączonego do komputera ze specjalnie przygotowanym przez nas programem. Przy zadanej wcześniej częstotliwości próbkowania karty dźwiękowej program rejestrował wybraną długość przebiegu czasowego sygnału rejestrowanego przez mikrofon. Następnie za pomocą szybkiej transformaty Fouriera obliczał widmo zarejestrowanego sygnału (czyli natężenie poszczególnych częstotliwości tworzących ten sygnał), dzięki czemu możliwa była identyfikacja częstotliwości własnych badanego paska. Zarówno przebieg czasowy zarejestrowanego sygnału, jak i widmo zapisywane było do pliku, który poddawaliśmy późniejszej analizie. Dodatkowo nasz program generował wykresy widm zarejestrowanych sygnałów i zapisywał je jako pliki graficzne, aby ocena i identyfikacja wyników była szybsza. Opisane wyżej czynności wykonywane były przez nasz program na bieżąco, w trakcie trwania pomiaru. Parametry rejestrowania dźwięku dobraliśmy tak, by osiągnąć jak największą dokładność. Uzyskane w ten sposób wyniki przedstawione są na rysunku 6. Błąd, którym charakteryzuje się każdy pomiar, w naszym przypadku wynosi około 1 Hz.

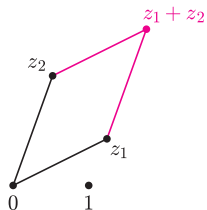
W dalszych, bardziej szczegółowych badaniach zmienialiśmy obciążenie i długość paska oraz ustawienie zaworu kompresora. Stwierdziliśmy w ten sposób, że częstotliwość modu podstawowego generowanego dźwięku jest rzeczywiście odwrotnie proporcjonalna do długości paska L oraz wprost proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z obciążenia paska m , zgodnie ze wzorem (*), w którym należy podstawić $F = mg$. Zauważyliśmy też, że dla bardzo małego strumienia powietrza z kompresora układ nie generował dźwięku, a dopiero gdy przepływ został dostatecznie zwiększony folia zaczynała drgać i rozlegał się charakterystyczny pisk. Te obserwacje są zgodne z zaproponowanym przez nas modelem zjawiska opisanym w pierwszej części artykułu.

Rzecz jasna, naszymi doświadczeniami dokonaliśmy zaledwie wstępnej charakteryzacji badanego zjawiska. Nietrudno wskazać kilka dalszych pytań, na które odpowiedzi można uzyskać, wykonując nieprzesadnie skomplikowane eksperymenty. Niewątpliwie ważny jest rodzaj, a w szczególności gęstość liniowa drgającego materiału – można w tym celu zbadać „instrumenty” wykonane z papieru, gumy i źdźbeł trawy. Można też rozszerzyć zakres naciągów badanego paska oraz przyjrzeć się sytuacji, w której naciąg ten nie jest równomierny (np. fragment papieru jest luźny). Warto też sprawdzić, jaki wpływ na natężenie dźwięku ma ułożenie pozostałych palców oraz miejsce, w które kierujemy główny strumień powietrza. Życzymy Czytelnikom owocnych własnych badań oraz wiele zabawy przy ich wykonywaniu!

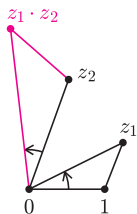


Siedmiokąta foremnego nie można skonstruować cyrklem i linijką,

Liczby zespolone to punkty płaszczyzny, na której obrano dwa punkty, mianując je zerem i jedyką;

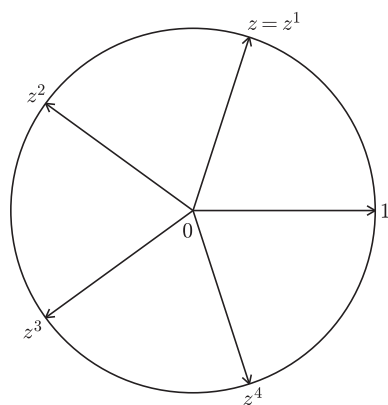


dodaje się te liczby tak, jak wektory zaczepione w 0,

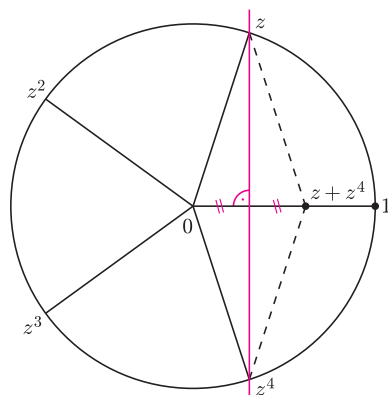


a mnoży, budując trójkąt $0z_2(z_1 \cdot z_2)$ podobny i mający tę samą orientację, co trójkąt $01z_1$; inaczej: trzeba odcinek $0z_2$ przedłużyć $|z_1|$ razy ($|z|$ to odległość z od 0) i obrócić o kąt $10z_1$.

Na prostej 01 te rachunki działają tak, jak na (zwykłej) osi liczbowej, czyli punkty tej prostej można traktować jak liczby rzeczywiste.

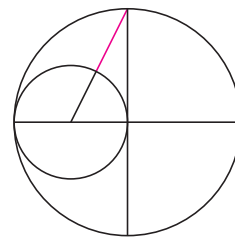


Rys. 1



Rys. 2

a pięciokąt foremny można. Obok pokazana jest konstrukcja dziesięciokąta foremnego – kolorowy odcinek ma długość boku dziesięciokąta foremnego wpisanego w większy okrąg, a więc biorąc co drugi z wierzchołków takiego dziesięciokąta, otrzymamy pięciokąt foremny. Konstrukcja jest – jak widać – bardzo prosta. Ma tylko tę wadę, że nie wskazuje, jak konstruować inne wielokąty foremne.



Konstrukcja dziesięciokąta foremnego

Dziewiętnastoletni Carl Gauss (w 1796 roku) skonstruował pięciokąt w zupełnie inny sposób. Sposób ten ma z kolei tę wadę, że używa (prawda, że bardzo oszczędnie, ale jednak) liczb zespolonych. Natomiast ma tę zaletę, że stosując go, można skonstruować wszystkie n -kąty foremne, dla których taka konstrukcja może istnieć i dla których n jest liczbą pierwszą. W konsekwencji, posługując się tą konstrukcją, można skonstruować wszystkie wielokąty foremne, dla których konstrukcja cyrklem i linijką jest możliwa. Już Euklides udowodnił bowiem, że jeśli umiemy skonstruować p_i -kąta foremne dla (różnych) liczb pierwszych p_i , $i = 1, 2, \dots, m$, to umiemy skonstruować n -kąta foremny dla

$$n = 2^l \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m,$$

gdzie l jest dowolną liczbą naturalną.

Konstrukcje Gaussa stosują się do tzw. liczb pierwszych Fermata, czyli liczb pierwszych postaci $2^{2^k} + 1$. Czterdzieści lat po konstrukcji Gaussa Pierre Wantzel wykazał, że dla innych liczb pierwszych konstrukcja nie jest możliwa. Nie znaczy to, że wiemy w tej sprawie już wszystko, bo znamy tylko pięć liczb pierwszych Fermata: 3, 5, 17, 257, 65537, i nie wiemy, czy istnieją jeszcze inne.

Użycie liczb zespolonych w konstrukcji Gaussa jest oszczędne: pojawiają się jedynie *pierwiastki z jedności*. Pierwiastek n -tego stopnia z jedności to taka liczba z (w tym przypadku zespolona), która podniesiona do n -tej potęgi daje 1. Oznacza to (jak łatwo zauważyć, posługując się definicją mnożenia liczb zespolonych), że z obrócone o $(n - 1)$ -krotność kąta $10z$ wokół 0 staje się jedyką.

Zapewne nie od razu zobaczymy, że wszystkie pięć punktów na okręgu na rysunku 1 to pierwiastki piątego stopnia z jedności. Zauważmy jednak, że nie przez pomyłkę ponumerowane zostały „u góry” – faktycznie są to potęgi z .

Natomiast od razu widzimy, że są to wierzchołki pięciokąta foremnego. Korzyść z tego spostrzeżenia jest taka, że suma wektorów $0z^i$ jest równa zeru – układ jest zrównoważony, żaden z wektorów nie ma przewagi. Zatem

$$(*) \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

A teraz sztuczka (a jakże, Gaussa): ponieważ $1 = z \cdot z^4 = z^2 \cdot z^3$, więc równanie $(*)$ możemy zapisać jako

$$0 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\right) + 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1.$$

Jeśli więc oznaczymy $x := z + 1/z = z + z^4$, to otrzymamy równanie

$$x^2 + x - 1 = 0; \quad \text{zatem} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Odcinek o długości $(\sqrt{5} - 1)/2$ łatwo skonstruować cyrklem i linijką, a rysunek 2 pokazuje, jak zastosować to do znalezienia położenia z (i z^4) na okręgu jednostkowym, czyli jak skonstruować pięciokąt foremny. Ten sposób rozumowania daje się użyć w przypadku, gdy 5 zastąpimy dowolną z liczb pierwszych Fermata (oczywiście, im taka liczba będzie większa, tym rozumowanie dłuższe).

Dlaczego jednak nie da się go użyć np. do konstrukcji siedmiokąta foremnego? Spróbujmy.

Równanie $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, gdzie z to pierwiastek siódmego stopnia z jedności, daje się zastąpić przez

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Ponieważ $\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + 3z + 3\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} = \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 3\left(z + \frac{1}{z}\right)$

i $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 2$, więc

$$\left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0,$$

czyli po podstawieniu $x := z + \frac{1}{z}$ mamy

$$(**) \quad x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Równanie to, jak każde równanie stopnia nieparzystego, ma pierwiastek rzeczywisty, ale nie jest jasne, czy warto go szukać, bo interesują nas tylko takie wartości, które można uzyskać z 1 przez stosowanie dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia oraz wyciągania pierwiastków kwadratowych, bo tylko takie działania dają się zrealizować za pomocą cyrkla i linijki.

I faktycznie nie warto – wspomniany już Wanzel udowodnił, że:

jeśli długość odcinka da się opisać równaniem stopnia trzeciego o współczynnikach wymiernych, to odcinek taki da się skonstruować z odcinka o długości 1 wtedy i tylko wtedy, gdy równanie to ma pierwiastek wymierny.

Uzyskane równanie ma nawet trzy pierwiastki, bo dla $x = -2, -1, 0, 1, 2$ przyjmuje odpowiednio wartości $-1, 1, -1, -1, 7$, czyli zmienia znak między -2 i -1 , między -1 i 0 oraz między 1 i 2 .

Nie oznacza to, że zadania konstrukcyjne opisywane przez równania stopnia trzeciego mogą nam dać jedynie odcinki o długościach wymiernych. Poszukiwanym przez nas rozwiązaniem może być niewymierny pierwiastek równania, ale równanie to musi mieć również pierwiastek wymierny (który może wcale nie pojawić się podczas konstrukcji), by konstrukcja była możliwa.

Myśl Wanzela możemy sobie przybliżyć, rozpatrując na początek sytuację, gdy długość rozpatrywanego odcinka jest liczbą postaci $l = p + q\sqrt{2}$, a równanie, które ją opisuje, to $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, gdzie liczby p, q, a, b, c są wymierne (symbolicznie: należą do \mathbb{Q}). Podstawiając l do równania, otrzymujemy

$$p^3 + 3p^2q\sqrt{2} + 6pq^2 + q^3\sqrt{2} + a(p^2 + 2pq\sqrt{2} + 2q^2) + b(p + q\sqrt{2}) + c = 0,$$

z czego wynika, że $3p^2q + q^3 + 2apq + bq = 0$, bo są to współczynniki przy $\sqrt{2}$, a pozostałe liczby, łącznie z zerem, są wymierne. Ale skoro tak, to mamy również

$$p^3 - 3p^2q\sqrt{2} + 6pq^2 - q^3\sqrt{2} + a(p^2 - 2pq\sqrt{2} + 2q^2) + b(p - q\sqrt{2}) + c = 0,$$

co oznacza, że również $p - q\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem rozpatrywanego równania.

Teraz przypomnijmy sobie wzory Viète'a: $-a$ jest sumą wszystkich pierwiastków równania. Oznaczając pozostały pierwiastek równania przez r (bo dwa już mamy), otrzymujemy $-a = p + q\sqrt{2} + p - q\sqrt{2} + r$, a więc $r = -a - 2p$, zatem jest liczbą wymierną.

Uogólnienie I. Pierwiastek nie musi być z dwóch – może być z dowolnej liczby wymiernej m , o ile tylko \sqrt{m} nie jest liczbą wymierną. Dowód przebiegnie bez zmian.

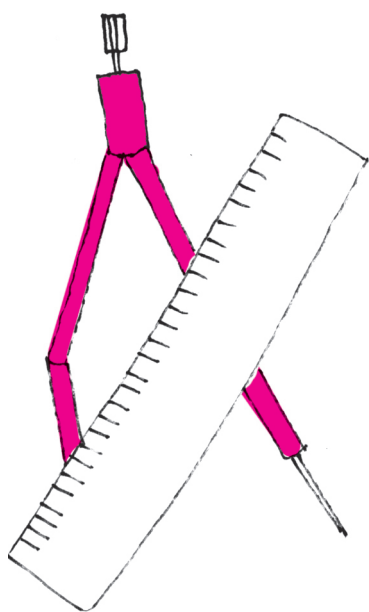
Uogólnienie II. Na ogół trzeba więcej razy wyciągać pierwiastek kwadratowy – robimy to po kolei (używając kolejno w konstrukcji cyrka). Jeśli więc stwierdzimy, że dla liczb $p + q\sqrt{m}$, $p, q \in \mathbb{Q}$ musi istnieć pierwiastek wymierny, nazwijmy te liczby \mathbb{Q}_1 i rozważmy nasze równanie, przypuszczając, że ma pierwiastek wśród liczb postaci $p + q\sqrt{m_1}$, gdzie m_1 jest, a $\sqrt{m_1}$ nie jest liczbą z \mathbb{Q}_1 . Wynik będzie taki sam jak poprzednio: otrzymamy najpierw, że istnieje pierwiastek w \mathbb{Q}_1 , a (na mocy poprzedniego), że istnieje pierwiastek w \mathbb{Q} .

Operację tę będziemy powtarzali tyle razy, ile razy będziemy potrzebowali (rysując jakiś okrąg) wyciągać pierwiastki z dotychczas uzyskanych liczb.

Skoro tak, to **siedmiokąta foremnego cyrklem i linijką skonstruować się nie da**, bo równanie $(**)$ pierwiastka wymiernego nie ma (mógłby on być równy tylko 1 lub -1 – prawda?).

A co dalej? Polecam samodzielnie obmyślić dalszą drogę do twierdzenia Wanzela o niekonstruowalności innych wielokątów foremnych, poza tymi, które można skonstruować metodą Gaussa.

Marek KORDOS



Edukacja, głupcze!

Dawno temu jeden z kandydatów na prezydenta USA powiesił w swoim biurze wyborczym podobne hasło. A to w powyższym tytule pojawia się, na szczęście, coraz częściej w naszych rozmowach ostatnich lat w Polsce. Koncepcja nauczania, rozpowszechniona obecnie na całym świecie, powstała... ponad 3 wieki temu w dziele J.A. Komeńskiego *Wielka Dydaktyka, przedstawiająca uniwersalną sztukę nauczania wszystkich wszystkiego...* (Amsterdam, 1657). Komeński, czeski filozof, w latach 1628–1656 mieszkał w Lesznie, gdzie pracował, będąc także profesorem leszczyńskiego gimnazjum! Dziwnym zbiegiem okoliczności w rejonie Leszna, w wiosce z obszaru popegeerowskiego, Łysiny, powstał udany i zrealizowany projekt edukacyjny, o którym każdy nauczyciel i rodzic, i dziecko powinni przeczytać w książce *Podróż dzieci z Łysin*.

Maria Mach, dyrektor Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci, streściła swoje (i Funduszu) opinie o współczesnej edukacji szkolnej w Polsce w świetnym wystąpieniu *Zdolni mimo wszystko* (Warszawa, 15 VI 2015). Od czasów Komeńskiego, mówiła, rodzaj edukacji wzmocniony został przez reformy pruskie. Szkoła powinna nauczyć wszystkich, w tym samym wieku, tego samego. Szkoła stała się podobna do więzienia i koszar. Uczyla (i wychowywała) ludzi gotowych do podjęcia każdej pracy w sposób zorganizowany i zunifikowany. Nawet forma klasy lekcyjnej – siedząc w ławce, widzisz tylko nauczyciela i plecy tych, co przed tobą – taki sposób wychowania i edukacji dyktują. Dziecko przychodzące do szkoły niesie ze sobą cały wachlarz pytań i zdziwień, ale bardzo szybko dowiaduje się, że od zadawania pytań, mających charakter odpytywania, jest nauczyciel, w dodatku tylko nauczyciel wie, jaka jest prawidłowa odpowiedź. W ten sposób dziecko traci umiejętność dziwienia się, wynikającą z ciekawości. Traci też możliwość uczestnictwa osobistego w odkrywaniu świata.

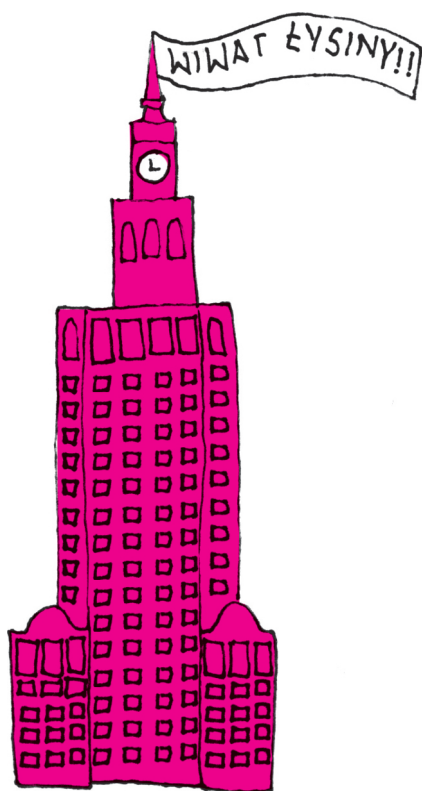
Historia podróży dzieci z Łysin wydaje się rewelacyjna i niezwykle odkrywczą. Na kółku przyrodniczym (IV–VI klasy) Pani nauczycielka (Regina Kostkiewicz) zapytała, czy chciałyby wyjechać na wycieczkę, i czy wolą w góry, czy do Warszawy, do Centrum Nauki Kopernik. WSZYSTKIE DZIECI (niektóre były w górach, ŻADNE – w CNK i dużym mieście) wybrały Warszawę. Wtedy same dzieci wykonały obliczenia, ile to by kosztowało. Wyszło, że po 400 złotych od dziecka. Pani poprosiła, żeby porozmawiali z rodzicami. Rodzice powiedzieli, że ich na to nie stać. Wtedy jedno z dzieci (nie Pani) zaproponowało, by pomyśleć, czy nie mogliby sami zarobić?

Warto rzeczywiście tę książkę przeczytać, ponieważ pokazuje ona, jak wiele nauczyły się dzieci, organizując swoją wycieczkę, poznając najpierw w internecie miasto i Centrum, do którego chciały jechać, wybierając, co by tam chciały zobaczyć, licząc koszty (np. okazało się, że oplaca się polecieć z Poznania samolotem!), kontaktując się z warszawską szkołą, w której na matach i w śpiworach nocowały w sali gimnastycznej, przygotowując samodzielnie posiłki... Zarobiły na festynach szkolnych, piekąc pizzę i babeczki, sprzątały ogrody, myły samochody. Rodzice dodali przetwory w słoikach... Do całej akcji włączyli się pracownicy Wydziału Fizyki UW i tegoż Wydziału studenci. Studenci przyjechali także do szkoły w Łysinach i przeprowadzili kilkudniowe zajęcia z fizyki, barwne i ciekawe doświadczenia. Dzieci nie chciały ze szkoły wychodzić.

Oczywiście, nie mam tu możliwości, aby streścić tę wspaniałą książkę, napisaną przez Panią Reginę razem z warszawskim profesorem Wydziału Fizyki, Stanisławem Głazkiem, ponieważ każda jej strona jest odkryciem i wzruszeniem. Są tam także wypowiedzi dzieci i rodziców. Jest wniosek, że taki sposób uczenia wielu „przedmiotów” naraz – wtedy, kiedy potrzebne są do rozwiązania potrzeb i marzeń samych uczniów – jest wszędzie dostępny. Trzeba tylko „zagospodarować” dwie cechy, o których w Kawiarni Naukowej mówiła Maria Mach: ciekawość dziecka i bezinteresowna dobra wola dorosłych.

O edukacji naszych dzieci i młodzieży należy bez przerwy myśleć i mówić. Od tego, jaka będzie, zależy nasza przyszłość, także przyszłość nauki, o której zazwyczaj piszę w tych tekstach.

Magdalena FIKUS



XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (2015/16)

Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia – część korespondencyjna

(1 września – 12 października 2015 r.)



1. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele trójek (x, y, z) dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie

$$x(y - z) + y(z - x) = 6.$$

2. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P , że

$$AP = AB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CPD = 90^\circ.$$

Wykaż, że $DP = 2 \cdot CP$.

3. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , dla których liczba

$$\frac{n^4 + 4}{17}$$

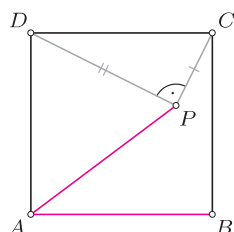
jest pierwsza.

4. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Na trójkącie tym opisano okrąg o . Punkt X jest środkiem tego łuku BC okręgu o , który nie zawiera punktu A , a punkt Y jest środkiem tego łuku CA okręgu o , który nie zawiera punktu B . Udowodnij, że prosta XY jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

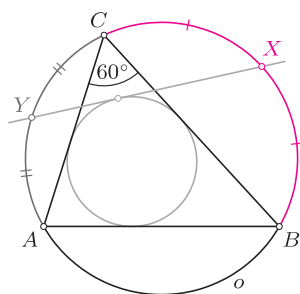
5. W wierzchołkach n -kąta foremnego rozmieszczono liczby $1, 2, \dots, n$ w taki sposób, że suma liczb znajdujących się w każdym trzech kolejnych wierzchołkach n -kąta jest parzysta. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n \geq 3$, dla których takie rozmieszczenie jest możliwe.

6. Różne liczby pierwsze nieparzyste p i q mają tę własność, że liczba $p^2 + p$ jest podzielna przez $q^2 + q$. Udowodnij, że liczba $\frac{1}{2}(p - q)$ jest złożona.

7. Czy istnieje taki ostrosłup $ABCD S$, którego podstawą jest prostokąt $ABCD$ i którego każde dwie krawędzie boczne są różnych długości, a ponadto spełniona jest równość $AS + CS = BS + DS$? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie 2



Zadanie 4

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMG lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMG właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

12 października 2015 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMG, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMG i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omg.edu.pl.

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej. Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku.

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

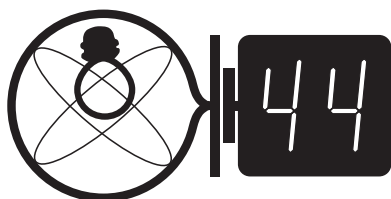


Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

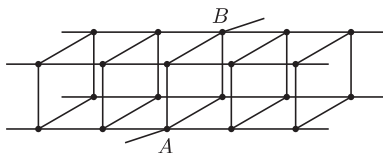


Skrót regulaminu

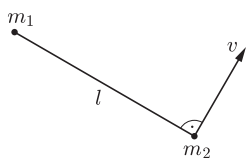
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



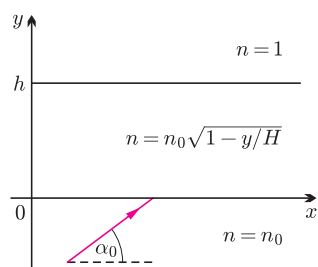
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2015



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

601. Podczas ruchu światła w ośrodku niejednorodnym zmienia się kąt α , jaki tworzy styczna do toru z osią x . Zgodnie z prawem załamania zachodzi związek $n \cos \alpha = n_0 \cos \alpha_0$. Rozważmy ruch punktu materialnego, którego prędkość wzdłuż granicy ośrodków jest stała: $v(y) \cos \alpha = v_0 \cos \alpha_0$, gdzie v_0 jest prędkością na granicy ośrodków, stąd $v(y) = \frac{v_0 n}{n_0}$, $v^2(y) = v_0^2 - \frac{v_0^2 y}{H}$. Widzimy, że przy zadanym współczynniku załamania punkt materialny porusza się jak pod działaniem stałej siły skierowanej pionowo w dół. Z zasady zachowania energii mamy bowiem: $\frac{mv^2(y)}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - may$, gdzie a jest stałym przyspieszeniem

Zadania z fizyki nr 604, 605

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

604. Znaleźć opór zastępczy między punktami A i B w obwodzie przedstawionym na rysunku 1. Opór każdej krawędzi między węzłami wynosi r . Sieć jest nieskończona w obie strony.

605. Dwa małe ciała o masach m_1 i m_2 związane są nicią o długości l i poruszają się bez tarcia po powierzchni poziomej. W pewnej chwili okazało się, że ciało o masie m_1 jest nieruchome, a prędkość ciała o masie m_2 ma wartość v i jest prostopadła do nici (rys. 2). Jakie jest w tym momencie naprężenie nici?

Rozwiązania zadań z numeru 6/2015

Przypominamy treść zadań:

600. Naczynie o objętości $2V = 20l$ rozdzielone jest na dwie równe części nieruchomą przegrodą. Do jednej części naczynia wprowadzono argon o masie $m_A = 20g$, do drugiej wodór o masie $m_H = 2g$. Przez przegrodę może przenikać tylko wodór. Jakie ciśnienia ustaliły się w obu częściach naczynia po ustaleniu się stanu równowagi? Temperatura w części naczynia zawierającej argon wynosi $T_1 = 300K$, w drugiej części $T_2 = 600K$. Masy molowe argonu i wodoru są odpowiednio równe $\mu_A = 40g/mol$, $\mu_H = 2g/mol$.

601. Między dwoma ośrodkami o współczynnikach załamania $n_0 > 1$ i $n_1 = 1$ znajduje się warstwa ośrodka, w którym współczynnik załamania zmienia się zgodnie ze wzorem $n = n_0 \sqrt{1 - y/H}$, gdzie $H = \text{const}$ (patrz rys. 1). Grubość warstwy wynosi $h = H(1 - 1/n_0^2)$. Z ośrodka o współczynniku załamania n_0 wpada do niejednorodnej warstwy promień światła. Dla jakich wartości kąta α_0 promień wróci do optycznie gęstszego ośrodka? Dla jakiej wartości tego kąta odległość między punktami wejścia i wyjścia promienia będzie największa?

600. Stan równowagi nastąpi, gdy zrównają się strumienie wodoru dyfundującego między częściami naczynia. Strumień dyfuzji jest proporcjonalny do średniej liczby zderzeń cząsteczek wodoru z przegrodą, która z kolei jest proporcjonalna do liczby cząsteczek w jednostce objętości oraz średniej prędkości $\langle v \rangle$ ruchu cieplnego cząsteczek. W danej temperaturze zachodzi związek $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$. Oznaczmy przez k liczbę moli wodoru, które przeniknęły przez przegrodę. Warunek równowagi ma postać:

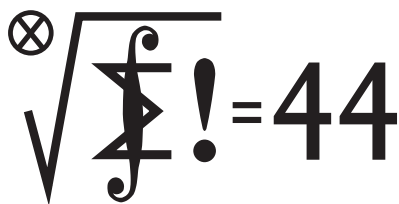
$$k\sqrt{T_1} = (1 - k)\sqrt{T_2}, \text{ stąd } k = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} = 0,6. \text{ Ciśnienie w części zawierającej}$$

$$\text{mieszaninę argonu i wodoru wynosi } p_1 = \left(k \text{ mol} + \frac{m_A}{\mu_A} \right) \frac{RT_1}{V} = 2,7 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$\text{w drugiej części } p_2 = (1 - k) \text{ mol} \frac{RT_2}{V} = 2,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

cząstki i wynosi $a = \frac{v_0^2}{2H}$. Korzystając ze wzorów dla rzutu ukośnego w polu stałej siły, otrzymujemy dla $\alpha_0 = \pi/4$ maksymalną odległość między punktami wejścia i wyjścia promienia z ośrodka niejednorodnego $l_{\max} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{a}$. Promień nie może przy tym przejść do górnego ośrodka jednorodnego, musi więc być spełniony warunek $h \geq \frac{H}{2}$, czyli $n_0 \geq \sqrt{2}$. W przeciwnym przypadku odległość między punktami wejścia i wyjścia promienia odpowiada takiemu kątowi α_0 , dla którego promień jest styczny do górnej granicy rozdziału ośrodków: $n_0 \cos \alpha_0 = n(h) \cos 0$, stąd $\cos \alpha_0 = \sqrt{1 - \frac{h}{H}}$.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2015

Zadania z matematyki nr 707, 708

Redaguje Marcin E. KUCZMA

707. Niech $W(x, y, z) = 1 + 9x(x - y)(x - z)$. Znaleźć wszystkie trójki liczb zespolonych a, b, c , dla których spełnione jest równanie $W(a, b, c) = W(b, c, a) = W(c, a, b) = 0$.

708. Dane są dodatnie liczby całkowite nieparzyste k, m . Niech $d = \text{nwd}(k + 1, m - 1)$, $e = \text{nwd}(k - 1, m + 1)$, $f = \text{nww}(d, e)$. Dowieść, że liczba $k^m + m^k$ dzieli się przez f .

Zadanie 708 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2015

Przypominamy treść zadań:

703. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A oraz C są równe, przy tym ostre. Punkty P, Q , leżące odpowiednio na półprostych $AB^{\rightarrow}, AD^{\rightarrow}$, są wyznaczone przez warunki $|CP| = |CQ| = |CA|$. Wykazać, że długość odcinka PQ nie przekracza obwodu trójkąta ABD .

704. Wyznaczyć największą liczbę A oraz najmniejszą liczbę B , takie że dla każdej czwórki liczb rzeczywistych a, b, c, d spełniona jest nierówność

$$A \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leq ab + 2bc + cd \leq B \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

703. Z warunków zadania wynika, że punkt C leży wewnątrz trójkąta APQ (jest to bowiem środek okręgu opisanego na tym trójkącie, leżący w obrębie kąta ostrego PAQ). Oznaczmy kąty tego trójkąta: $|\sphericalangle PAQ| = \alpha$, $|\sphericalangle APQ| = \beta$, $|\sphericalangle AQP| = \gamma$; ponadto niech $|\sphericalangle ACB| = \varphi$, $|\sphericalangle ACD| = \psi$; z założenia $\alpha = \varphi + \psi$.

Na bokach CP i CQ czworokąta (wklęsłego) $APCQ$ budujemy, po zewnętrznej jego stronie, trójkąty CPX i CQY , przystające odpowiednio do trójkątów CAB i CAD :

$$\begin{aligned} |PX| &= |AB|, & |CX| &= |CB|, & |\sphericalangle PCX| &= \varphi, \\ |QY| &= |AD|, & |CY| &= |CD|, & |\sphericalangle QCY| &= \psi \end{aligned}$$

(rysunek przedstawia sytuację, gdy punkt B leży między A i P , zaś D między A i Q ; ale przy innym uporządkowaniu punktów, na jednej lub drugiej z tych prostych, rozumowanie nie wymaga żadnych zmian).

Skoro

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ACX| &= |\sphericalangle ACP| + |\sphericalangle PCX| = 2\gamma + \varphi, \\ |\sphericalangle ACY| &= |\sphericalangle ACQ| + |\sphericalangle QCY| = 2\beta + \psi, \end{aligned}$$

zatem

$$|\sphericalangle XCY| = 360^\circ - 2\beta - 2\gamma - (\varphi + \psi) = 2\alpha - (\varphi + \psi) = \alpha.$$

Z uzyskanych równości wynika, że trójkąt CXY jest przystający do trójkąta CBD , wobec czego $|XY| = |BD|$, i otrzymujemy tezę zadania:

$$|AB| + |BD| + |DA| = |PX| + |XY| + |YQ| \geq |PQ|.$$

704. Przyjmijmy oznaczenia: $q = \sqrt{a^2 + d^2}$, $r = \sqrt{b^2 + c^2}$,

$$S = ab + 2bc + cd, \quad U = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = q^2 + r^2.$$

Ponieważ $|2bc| \leq r^2$ oraz $|ab + cd| \leq qr$ (nier. Cauchy'ego-Schwarza), zatem

$$|S| \leq r^2 + qr = r(q + r).$$

Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $S \neq 0$ (więc $r(q + r) > 0$). Wówczas

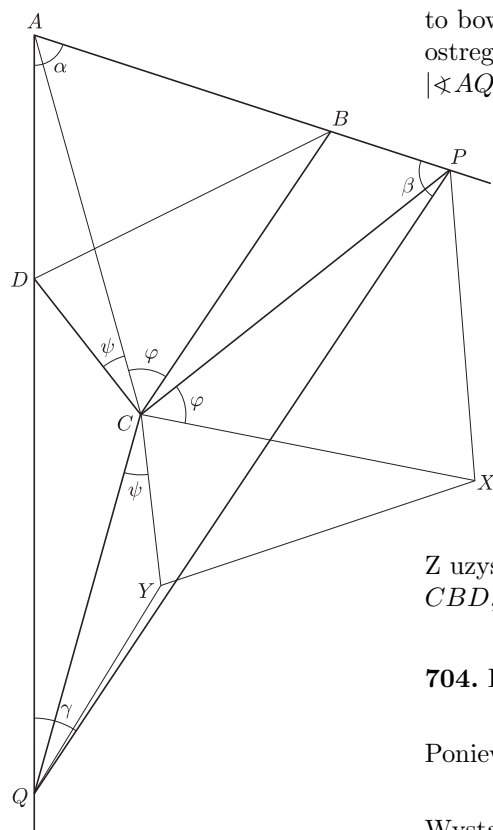
$$\begin{aligned} \frac{U}{|S|} &\geq \frac{q^2 + r^2}{r(q + r)} = \frac{q - r}{r} + \frac{2r}{q + r} = -2 + \frac{q + r}{r} + \frac{2r}{q + r} = \\ &= -2 + \left(\frac{q + r}{\sqrt{2}r} + \frac{\sqrt{2}r}{q + r} \right) \sqrt{2} \geq -2 + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\frac{|S|}{U} \leq \frac{1}{2(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

To znaczy, że postulowana nierówność podwójna $AU \leq S \leq BU$ zachodzi ze stałymi $A = -(\sqrt{2} + 1)/2$, $B = (\sqrt{2} + 1)/2$ (dla $S = 0$ oczywiście też).

Biorąc teraz np. $b = c = 1$, $a = d = \sqrt{2} - 1$, uzyskujemy równość $S = BU$ (z podaną stałą B); zaś zmieniając znak w a i c , dostajemy równość $S = AU$ (z podaną stałą A). Znalezione stałe są więc optymalne.



Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
697 (WT = 1,72) i 698 (WT = 2,03)
z numeru 3/2015

Marek Spychała	Warszawa	42,75
Łukasz Garczarek	Opole	41,73
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	37,05
Paweł Najman	Kraków	36,92
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Jędrzej Garnek	Poznań	34,89

Prosto z nieba: Chemia życia w kosmosie

Skąd wzięło się na Ziemi życie? Jedną z hipotez jest *panspermia*, według której życie rozprzestrzenia się we Wszechświecie przenoszone pomiędzy planetami i układami słonecznymi przez meteoryty i komety. Nieco mniej radykalną (a przez to bardziej realistyczną?) wersją panspermii jest *panspermia molekularna*. (Nieożywione) związki organiczne, elementarne „cegiełki”, z których korzystają wszelkie mechanizmy życiowe, tworzą się w przestrzeni kosmicznej i są przenoszone przez komety i meteoryty na powierzchnie planet. Tam, w odpowiednich warunkach molekuly materii nieożywionej wchodzi w reakcje z innymi związkami, tworzą najprostsze samoreplikujące się mechanizmy molekularne, co w konsekwencji prowadzi do powstania „materii ożywionej”, czyli życia (wypada jednak zaznaczyć, że ten ostatni krok – przejście od najmniejszych molekularnych maszyn do mini-organizmów – jest najbardziej tajemniczy i najmniej obecnie zbadany).

Od wczesnych lat siedemdziesiątych XX wieku jest jasne, że materia w przestrzeni kosmicznej składa się w znacznej części z materii organicznej – liczne dowody znajduje się w liniach widmowych mgławic i we wnętrzach meteorytów. Astronomowie obserwują w ten sposób różne wielopierścieniowe węglowodory aromatyczne, a także inne związki aromatyczne, takie jak niezwykle istotna dla chemii życia *pirymidyna* ($C_2H_4N_2$). Pochodnymi pirymidyny są *cytozyna*, *tymina* i *uracyl*, czyli podstawowe elementy,

z których składają się DNA i RNA. Niedawno w laboratorium NASA w Ames pokazano, że w warunkach przestrzeni kosmicznej (niskich temperatur i silnego promieniowania ultrafioletowego) związki te można bez problemu otrzymać z pirymidyny (jest to kolejne z serii doświadczeń w duchu słynnego eksperymentu Millera–Ureya z roku 1952).

Wracając do obserwacji astronomicznych: po raz pierwszy astronomowie są w stanie stwierdzić obecność skomplikowanych związków organicznych w dysku protoplanetarnym otaczającym młodą gwiazdę. Obserwacje zespołu ALMA (*Atacama Large Millimeter/submillimeter Array*) dotyczą odpowiednika pasa Kuipera wokół gwiazdy MWC 480, której masa wynosi około $2M_{\odot}$, a wiek szacuje się na jedynie milion lat. W dysku MWC 480 znajduje się znacząca ilość *acetonitrylu* (CH_3CN), najprostszego nitrylu – cząstki organicznej zawierającej grupę funkcyjną CN – a także *cyjanowodoru* (HCN), prostszej cząstki nieorganicznej. Aktywna grupa CN jest niezwykle istotna dla tworzenia się aminokwasów, czyli elementów budulcowych białek. Acetonitrylu jest wokół MWC 480 tak wiele, że mógłby wypełnić ziemskie oceany. Jeśli w przyszłości wokół gwiazdy powstaną planety, jest wielce prawdopodobne, że przyniesione z zewnętrznych części dysku przez komety cząstki organiczne w rodzaju CH_3CN i ich pochodnych przyczynią się do powstania na nich życia.

Michał BEJGER

Niebo w październiku

Pogodne październikowe niebo powinno usatysfakcjonować łowców spadających gwiazd, gdyż dostępne będą aż cztery roje meteorów. Podczas nocy 6–10 X będzie można obserwować rój Drakonidów, którego maksimum przypadnie na 9 X. Rój ten, związany z kometa 21P/Giacobini-Zinner, był znany około 15 lat przed odkryciem komety. Wyjątkową aktywność Drakonidów, wynoszącą ponad 1000 meteorów na godzinę, zarejestrowano w 1933 roku. Radiant roju to rektascencja (RA): 262° , deklinacja (Dec): $+54^{\circ}$. Następny rój zasługujący na uwagę to Południowe Taurydy, ich aktywność przypada 10–18 X, a maksimum 11 X. Radiant tego roju jest określony przez współrzędne RA: 32° , Dec: $+9^{\circ}$, a jego maksymalna aktywność to 5 meteorów na godzinę. Południowe Taurydy są związane z kometa 2P/Encke. Co ciekawe, ten rój znany jest już od średniowiecza (Chiny, XI wiek) i charakteryzuje się żółto-pomarańczowymi, powolnymi meteorami. W trakcie trzeciego tygodnia października będzie można zaobserwować ϵ Geminidy. Maksimum tego z kolei roju wystąpi 18 X, ich radiant położony jest na RA: 102° , Dec: $+27^{\circ}$, a aktywność to około 3 meteorów na godzinę. ϵ Geminidy związane są z kometa C/Ikeya. Czwartym rojem wartym obserwacji są znane i lubiane Orionidy związane z kometa 1P/Halley, które są dostępne od 2 X do 7 XI z maksimum aktywności w trakcie nocy 21 X. Ten duży strumień białych meteorów z wyraźnymi śladami przejawia aktywność wynoszącą około

25 meteorów na godzinę, jego współrzędne radiantu to RA: 95° i Dec: $+16^{\circ}$.

Amatorom astrofotografii oraz obserwatorom potrafiącym wytrwać do samego świtu polecamy bliskie złączenia między trzema planetami Układu Słonecznego. Najdogodniejsze warunki do obserwacji będą nad ranem 18 X, kiedy Mars znajdzie się w pobliżu Jowisza, około $0,4^{\circ}$. Następnie ponownie w drugiej połowie nocy 26 X zaobserwować będzie można bliskie złączenie Wenus i Jowisza w odległości 1° ; obie planety będą dostępne do obserwacji na porannym niebie. Dodatkowo już dwa dni później, tj. 28 X, obserwować będzie można bliskie złączenie Wenus, Marsa i Jowisza. Jasności planet wynoszą odpowiednio dla Wenus $-4,4^m$, Jowisza $-1,8^m$ oraz dla Marsa $1,7^m$, wszystkie obserwacje można więc przeprowadzić gołym okiem nawet z najbardziej rzęsiście oświetlonych miast. Planety będzie można znaleźć dokładnie pomiędzy gwiazdozbiorami Lwa, Panny i Hydry.

Po wrześniowej opozycji nadal dogodnym obiektem do obserwacji będzie planeta karłowata (4)Westa, której jasność jednak będzie sukcesywnie spadać, wynosząc odpowiednio $6,3^m$ (8 X), $6,5^m$ (18 X) oraz $6,8^m$ (28 X). Planetka będzie widoczna na tle gwiazdozbioru Wieloryba. Na koniec proszę pamiętać o zmianie czasu z letniego na zimowy w nocy z 24 na 25 października.

Karolina BĄKOWSKA

Twierdzenie o prostej Simsona brzmi następująco:

(*) Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy jego rzuty prostopadłe na proste AB, BC, CA leżą na jednej prostej (nazywamy ją prostą Simsona).

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1. Twierdzenie udowodnimy tylko w przedstawionej tam sytuacji, pozostałe przypadki uzasadnia się podobnie.

Punkty P, D, B, F leżą na jednym okręgu w tej właśnie kolejności, więc $\sphericalangle PBD = \sphericalangle PFD$. Analogicznie $\sphericalangle PAE = \sphericalangle PFE$. Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC$, czyli gdy $\sphericalangle PFD = \sphericalangle PFE$, co z kolei równoważne jest współliniowości punktów D, E, F . \square

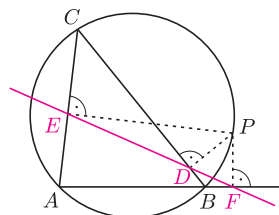
1. Proste k, l, m przecinają się w jednym punkcie O , a punkt P nie należy do żadnej z nich. Punkty A, B, C są rzutami prostokątnymi punktu P na proste k, l, m . Udowodnij, że rzuty prostokątne P na proste AB, BC, CA są współliniowe.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D i E są spodkami wysokości AD i BE . Dwa boki prostokąta $DUEW$ są zawarte w prostych AD i BC . Prosta UW przecina bok AB w punkcie P . Wykaż, że proste EP i AB są prostopadłe.

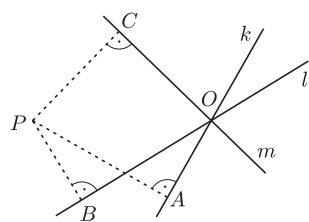
3. Trzy okręgi mają wspólny punkt, a pozostałe trzy punkty ich przecięć są współliniowe. Wykaż, że środki okręgów oraz ich wspólny punkt leżą na jednym okręgu.

4. Punkt E należy do boku BC kwadratu $ABCD$. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów E i B na proste BD i DE . Udowodnij, że punkty A, P, Q leżą na jednej prostej.

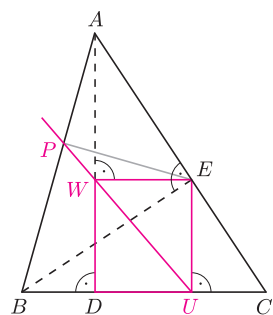
5. Cztery proste przecinające się w sześciu punktach tworzą cztery trójkąty. Udowodnij, że okręgi opisane na tych trójkątach mają punkt wspólny.



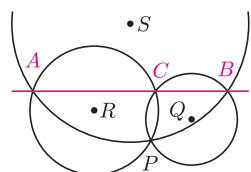
Rys. 1. Prosta Simsona



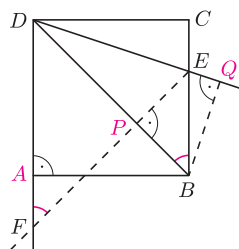
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4. QRS jest trójkątem, bowiem gdyby $QR \parallel RS$, to także $PC \parallel PA$, co jest niemożliwe.



Rys. 5

Zadanie 5 pochodzi z XII Olimpiady Matematycznej.

Rozwiązania

R1. Każdy z punktów A, B, C leży na okręgu o średnicy PO (rys. 2), zatem punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC i teza wynika z twierdzenia (*). \square

R2. Punkt E należy do okręgu opisanego na trójkącie ABD , bowiem $\sphericalangle AEB = 90^\circ = \sphericalangle ADB$ (rys. 3). Stąd na mocy twierdzenia (*) rzut punktu E na prostą AB należy do prostej UW , a więc jest nim punkt P . \square

R3. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 4. Punkty Q i R leżą na symetralnej odcinka PC , więc rzutem punktu P na prostą QR jest środek PC . Podobnie dla PA i PB , więc rzuty P na proste zawierające boki trójkąta QRS leżą na jednej prostej (równoległej do AB , dwukrotnie bliżej punktu P) i teza wynika z twierdzenia (*). \square

R4. Niech F będzie punktem przecięcia prostych AD i EP (rys. 5). Wówczas $\sphericalangle DFE = 45^\circ$, gdyż pozostałe dwa kąty trójkąta DFP mają 90° i 45° . Ponieważ również $\sphericalangle DBE = 45^\circ$, punkty B, E, D, F leżą na jednym okręgu. Teza wynika z twierdzenia (*) dla trójkąta DEF . \square

R5. Niech X będzie punktem przecięcia dwóch z danych prostych. Pozostałe dwie proste nie są równoległe, stąd dwa trójkąty o wierzchołku X nie są jednokładne, więc opisane na nich okręgi nie są styczne w X i mają drugi punkt wspólny Y .

Na mocy dwukrotnie zastosowanego twierdzenia (*), rzuty punktu Y na wszystkie dane proste są współliniowe. Znów na mocy twierdzenia (*), punkt Y należy wówczas także do pozostałych dwóch z danych okręgów. \square

Zadania domowe

6. Niech $ABCDE$ będzie wypukłym pięciokątem wpisanym w półkole o średnicy AB . Punkty P, Q, R, S to rzuty punktu D odpowiednio na proste AC, BC, AE, BE . Udowodnij, że proste AB, PQ i RS przecinają się w jednym punkcie.

7. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg i $\sphericalangle ABC = 90^\circ$. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu B odpowiednio na proste AC i AD . Wykaż, że prosta PQ przechodzi przez środek odcinka BD .