


## SPIS TREŚCI NUMERU 9 (496)

Twierdzenie o powracaniu  
i pewne zagadki  
nierównowagowej mechaniki  
statystycznej (II)  
*Krzysztof Turzyński,  
Henryk Żołądek* str. 1

 Profesor Shugar – twórca  
i kreator nie tylko  
biofizyki  
*Magdalena Fikus* str. 4

Odbicia w dwóch zwierciadłach  
*Grzegorz Derfel* str. 6

Informatyczny kącik olimpijski  
(85): Jeszcze dwa zadania  
do plecaka  
*Tomasz Idziaszek* str. 9

Niewymieniałość  
*Łukasz Rajkowski* str.10

Matematyka jest jedna:  
wielomiany mogą wszystko  
*Tomasz Kobos* str.13

Zagadki o wszystkim  
*Tymoteusz Turzyński* str.17

 Zadania str.17

Zabawy w kącie  
*Jarosław Górnicki* str.18


LXVI Olimpiada  
Matematyczna  
*Michał Krych* str.20

Aktualności str.21

Klub 44 str.22

Prosto z nieba:  
Kwazikryształy str.24

Niebo we wrześniu str.24

 Styczeń i cięciwa  
*Joanna Jaszńska* str.25

W następnym numerze polecamy



pianę

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.  
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2015 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–17<sup>00</sup>.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

**Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):** [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**

# Twierdzenie o powracaniu i pewne zagadki nierównowagowej mechaniki statystycznej (II)

Krzysztof TURZYŃSKI, Henryk ŻOŁĄDEK\*

W poprzednim odcinku sformulowaliśmy **twierdzenie Poincarégo o powracaniu**. Niech przekształcenie  $T: X \rightarrow X$  zachowuje probabilistyczną miarę  $\mu$ . Wtedy dla każdego zbioru  $A$  o mierze  $\mu(A) > 0$  prawie każdy punkt  $x_0 \in A$  powraca do  $A$ , tzn. dla pewnego  $n > 0$  zachodzi  $T^n(x_0) \in A$ .

Miara  $\mu$  na zbiorze  $X$  jest funkcją określoną dla jego podzbiorów i spełniającą własności

- a)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- b) dla  $A \subset B$  zachodzi  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ ,
- c) jeśli  $A_1, A_2, \dots$  są parami rozłączne, to  $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$ .

Miarę nazywamy **probabilistyczną**, jeśli  $\mu(X) = 1$ .

Przekształcenie  $T$  **zachowuje miarę**, jeśli  $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ .

Twierdzenie Poincarégo o powracaniu, omówione w pierwszej części artykułu, wywoływało (i najwidoczniej nadal wywołuje) dyskusje natury filozoficznej. Są one najczęściej związane z próbami jego zastosowania do układów złożonych z dużej liczby cząstek. Teraz spróbujemy omówić niektóre kontrowersje i zaproponować ich wyjaśnienia.

Do tej pory zajmowaliśmy się pojedynczym przekształceniem zachowującym miarę. W wielu zastosowaniach fizycznych mamy tymczasem do czynienia z ciągłą – a nie skokową – ewolucją pewnego układu opisywanego układem równań różniczkowych. Sprowadzimy wszakże takie zagadnienia do tych opisywanych poprzednio, biorąc pewien dowolny, acz ustalony krok czasowy ewolucji układu i przyjmując za  $T$  przekształcenie stanu układu w chwili początkowej do stanu układu w chwili zwiększonej o tenże krok czasowy.

Rozważmy gaz złożony z  $N$  klasycznych cząstek znajdujących się w pewnym obszarze  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  (zbiorniku ograniczonym ścianami). Na mocy II zasady dynamiki Newtona ewolucja takiego układu opisywana jest układem równań różniczkowych drugiego rzędu (we wzorze  $F = ma$  wielkość  $a$  jest przyspieszeniem, a więc drugą pochodną położenia względem czasu), do opisu stanu układu potrzebne są zatem położenia i prędkości tworzących go cząstek. Położenia są ograniczone do obszaru  $\Omega$ , prędkości nie są zaś ograniczone; możemy powiedzieć, że zbiór  $X$  możliwych stanów układu

$$X = \{(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N); \vec{x}_i \in \Omega \text{ oraz } \vec{v}_i \in \mathbb{R}^3 \text{ dla } i = 1, \dots, N\}$$

jest podzbiorem  $6N$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Zakładamy, że cząstki oddziałują siłami, dla których można określić energię potencjalną zależną tylko od odległości między cząstkami, oraz że przy zderzeniach ze ściankami kąt odbicia jest równy kątowi padania. Zachodzi wówczas

**Twierdzenie Liouville'a.** *6N-wymiarowa miara Lebesgue'a jest niezmiennicza dla przekształcenia  $T$  przy dowolnym kroku czasowym.*

Niestety, nawet jeśli cząstki są zamknięte w zbiorniku, ich prędkości mogą być dowolne, a więc miara Lebesgue'a (objętość) obszaru możliwych stanów rozważanego układu jest nieskończona. Oznacza to, że opisana powyżej miara nie jest probabilistyczna. Czy zatem twierdzenie Poincarégo o powrocie nie stosuje się do gazu w zbiorniku?

Aby rozwiązać tę wątpliwość, spojrzymy teraz na nasz układ okiem fizyka. Skoro możemy określić energię potencjalną oddziaływania cząstek, a zderzenia cząstek ze ściankami zbiornika są sprężyste, to zachowana jest całkowita energia  $E$  układu cząstek. Energia ta jest sumą energii kinetycznych  $T_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$  poszczególnych cząstek o masach  $m_i$  oraz całkowitej energii potencjalnej. Rozsądnie jest przyjąć, że ta ostatnia jest ograniczona od dołu, co wobec stałości  $E$  oznacza, że prędkości są wtedy jednak ograniczone. Gdybyśmy zatem potrafili nałożyć jakiś warunek ograniczający  $E$ , moglibyśmy unormować miarę Lebesgue'a w przestrzeni stanów układu i zrobić z niej miarę probabilistyczną. Fizycy stosują często dwa proste sposoby:

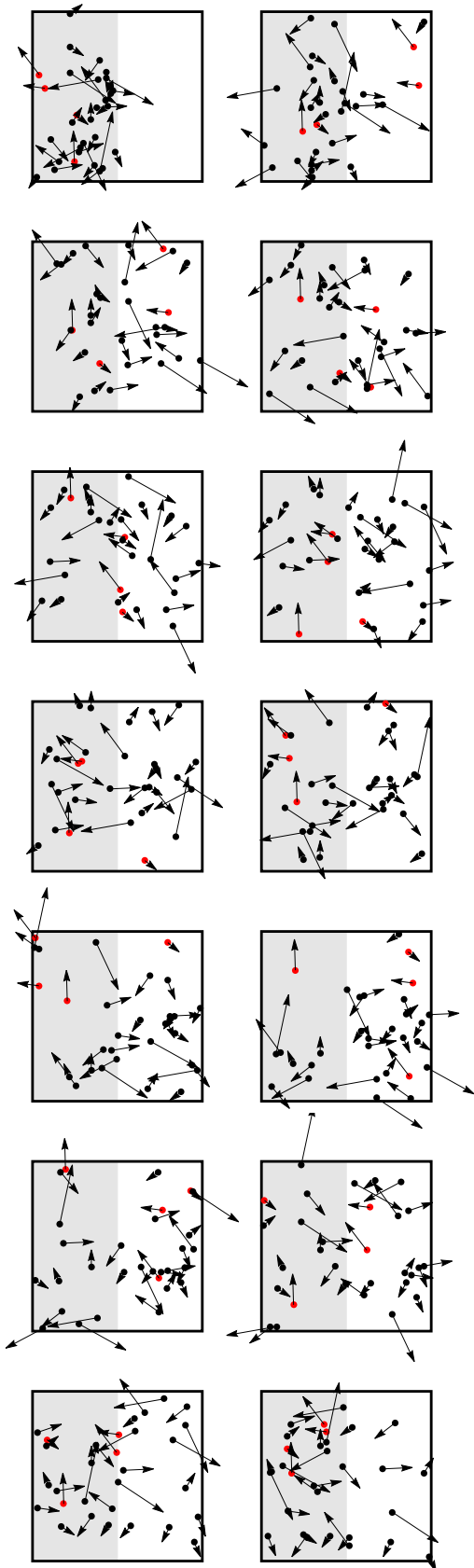
- 1) zakładają, że  $E \in [E_{\min}, E_{\max}]$ , i mówią o tzw. zespole mikrokanonicznym,
- 2) każdemu punktowi przestrzeni stanów przyporządkowują „wagę”  $e^{-\frac{E}{kT}}$ , gdzie  $T$  jest temperaturą,  $k$  zaś stałą Boltzmanna, i mówią o tzw. zespole kanonicznym; wagi punktów o dużych prędkościach, a więc i wysokich energiach są wówczas znikomo małe. Czytelnicy umiejący całkować zorientują się od razu, że ta procedura ma sens, pozostali – muszą uwierzyć na słowo.

Skoro jednak można dla rozważanego gazu zdefiniować miarę probabilistyczną zachowywaną podczas ewolucji czasowej, to do układu tego powinno się stosować twierdzenie Poincarégo o powrocie. Jak to pogodzić z faktem, że nie obserwuje się samorzutnego gromadzenia się gazu w jednej połowie zbiornika (oraz, w nieco bardziej złożonych układach, samorzutnego odsładzania się raz posłodzonej herbaty itp.)?

Wyjaśnienia powyższego „paradoksu” należy upatrywać w fakcie, że twierdzenie Poincarégo o powrocie ma charakter jakościowy, a nie ilościowy. Nic nie mówi się



\*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1. W lewej połowie zbiornika w chwili początkowej znajduje się 30 cząstek o prędkościach opisanych rozkładem Maxwella i losowych położeniach. Cząstka trafiająca na ściankę zbiornika pojawia się z tą samą prędkością przy ścianie przeciwnej. Po 43 krokach ewolucji układu cztery wyróżnione na początku kolorem cząstki znowu znajdują się w lewej połowie zbiornika (przy szacowanej liczbie  $2^4$  kroków do tego potrzebnych). Historię cząstek należy czytać wierszami.

w nim o czasie powrotu. Spróbujmy zastanowić się, jak oszacować ten czas. Przyjmijmy w tym celu, że spełnione są założenia twierdzenia Poincarégo i rozważmy pewien zbiór  $A$  o dodatniej mierze. Dla  $x \in A$  zdefiniujemy wielkość

$$k_A(x) = \min\{n \geq 1 : T^n(x) \in A\}$$

oraz przyjmijmy, że  $k_A(x) = \infty$ , gdy  $T^n(x) \notin A$  dla każdego  $n$ . Wielkość  $k_A(x)$  jest czasem pierwszego powrotu obrazu punktu  $x$  do zbioru  $A$ ; za jej pomocą tezę twierdzenia Poincarégo o powracaniu możemy sformułować następująco:  $k_A(x) < \infty$  dla prawie wszystkich punktów ze zbioru  $A$ . Zachodzi wówczas

**Lemat Kaca.** *Iloczyn średniej wartości wielkości  $k_A(x)$  na zbiorze  $A$  oraz miary zbioru  $A$  jest równy*

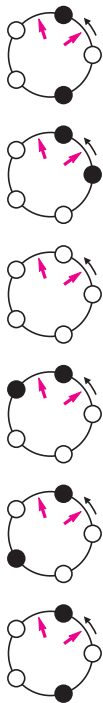
$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(A)\right);$$

*w szczególności, gdy przekształcenie  $T$  ma własność ergodyczności, iloczyn ów jest równy 1.*

Innymi słowy, im mniejsza miara zbioru  $A$ , tym większa średnia liczba kroków (a więc i średni czas) do pierwszego powrotu do zbioru  $A$ . O jakich liczbach kroków mówimy w przypadku układów takich jak rozważany zbiornik z gazem? Warunek znajdowania się cząstki w określonej połowie zbiornika zmniejsza dwukrotnie miarę zbioru możliwych położen tej cząstki. Jeśli cząstek jest  $N$ , skupienie się tych cząstek w określonej połowie zbiornika zmniejsza miarę zbioru możliwych położen tych cząstek o czynnik  $1/2^N$ . Dla  $N = 30$  otrzymujemy oszacowanie rzędu miliarda kroków; dla makroskopowych ilości gazu, tj. dla  $N$  rzędu liczby Avogadra  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ , oczekiwany czas powrotu do wyjściowej połowki naczynia jest superastronomiczny. I nawet fakt, że ewolucja czasowa gazu w zbiorniku nie jest ergodyczna (zachowana jest energia, a więc orbity odpowiadające stanom układu o różnych energiach ewoluują „niezależnie”), nie jest w stanie znacząco osłabić tego wniosku.

Jeżeli oddziaływania między cząstkami gazu w zbiorniku mają bardzo krótki zasięg, można uznać te cząstki za swobodne. Wówczas całkowita energia układu jest sumą energii kinetycznych poszczególnych cząstek,  $E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$ , i opisujący prawdopodobieństwo czynnik wykładniczy, występujący w definicji rozkładu kanonicznego, można przedstawić w postaci iloczynu takich czynników dla pojedynczych cząstek. Przy opisie rozrzedzonych gazów wygodnie jest przejść od prawdopodobieństwa do liczby cząstek – wprowadza się w tym celu funkcję rozkładu  $f(v, t)$ , taką że  $f(v, t) \Delta^3 x \Delta^3 v$  jest uśrednioną liczbą cząstek, jakie w chwili  $t$  znajdują się w otoczeniu położenia  $\vec{x}$  o objętości  $\Delta^3 x$ , a ich prędkości znajdują się w otoczeniu prędkości  $\vec{v}$  o objętości  $\Delta^3 v$ . Objętości  $\Delta^3 x$  oraz  $\Delta^3 v$  powinny być małe, ale nie *za* małe, gdyż chcielibyśmy, aby liczby  $f(v, t) \Delta^3 x \Delta^3 v$  były duże. Zmiana liczby cząstek o określonej prędkości w przybliżeniu równej  $\vec{v}$  może nastąpić na dwa sposoby. Cząstka o takiej prędkości może oddziaływać z inną, o prędkości  $\vec{v}'$ , a po oddziaływaniu cząstek ich prędkości będą różne od wyjściowych, będziemy zatem mieć do czynienia ze zmniejszeniem liczby odpowiednich cząstek. Z drugiej strony, w wyniku oddziaływania cząstek o zupełnie innych początkowych prędkościach  $\vec{u}_1$  i  $\vec{u}_2$  jedna z cząstek może uzyskać prędkość w przybliżeniu równą  $\vec{v}$ , a zatem liczba odpowiednich cząstek się zwiększy. Oznacza to, że aby obliczyć zmianę funkcji  $f$  w jednostce czasu, należy dla każdej odpowiedniej konfiguracji prędkości wyznaczyć wartość odpowiedniej różnicy iloczynów  $f(u_1, t)f(u_2, t) - f(v, t)f(v', t)$ , pomnożyć przez prawdopodobieństwo oddziaływania (fizycy nazywają je przekrojem czynnym) i w jakiś sposób dodać uzyskane wyniki. Odpowiednie

Mark (Marek) Kac urodził się w 1914 roku w Krzemieńcu, gdzie ukończył słynne liceum. Pracę doktorską napisał pod kierunkiem Hugona Steinhausa we Lwowie. Krótko przed wybuchem II wojny światowej wyemigrował do USA i przyjął obywatelstwo tego kraju. Zajmował się przede wszystkim teorią prawdopodobieństwa, ale wniósł też ważny wkład w wiele dziedzin fizyki teoretycznej. Zmarł w 1984 roku.



Rys. 2. Przykład pierścienia Kaca o 5 ciałach i dwóch znacznikach oraz kolejne kroki jego ewolucji.

O pierścieniu Kaca pisał w *Delcie* nr 3/2004 Krzysztof Rejmer.

równanie realizujące tę ideę nosi nazwę równania kinetycznego Boltzmanna. W całym naszkicowanym tu rozumowaniu ukryte jest istotne

założenie o **molekularnym chaosie**: uśredniona liczba par cząstek o położeniach w otoczeniu położenia  $\vec{x}$  (o objętości  $\Delta^3x$ ) i o prędkościach leżących w otoczeniach prędkości  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  (o objętościach  $\Delta^3v$ ) jest równa

$$f(v_1, t) \Delta^3x \Delta^3v f(v_2, t) \Delta^3x \Delta^3v.$$

Jeżeli zdefiniować za Boltzmannem funkcję  $H(t)$  jako sumę wyrażen  $f(v, t) \ln f(v, t)$  dla wszystkich możliwych konfiguracji prędkości, można udowodnić

**Twierdzenie H Boltzmanna.** *Funkcja  $H(t)$  jest nierosnąca.*

Ponieważ funkcja  $H(t)$  jest równa minus entropii układu, otrzymujemy uzasadnienie II zasady termodynamiki, orzekającej, że entropia nie maleje (a w przypadku przemian odwracalnych pozostaje stała). Co więcej, z twierdzenia H oraz z równania kinetycznego Boltzmanna wynika, że dla  $t \rightarrow \infty$  funkcja rozkładu powinna dążyć do równowagowego rozkładu Maxwella:

$$f_0(v) = \mathcal{N} e^{-a(v-v_0)^2},$$

gdzie  $\mathcal{N}$ ,  $a$  oraz  $v_0$  są pewnymi stałymi.

Wydaje się, że uzyskany wynik jest paradoksalny. Z jednej strony, wyróżnia on pewien kierunek czasu, z drugiej – oddziaływania wszystkich cząstek układu opisywane są II zasadą dynamiki Newtona, która nie zmienia swej postaci po odwróceniu kierunku upływu czasu (*paradoks Loschmidta*). Nie jest też jasne, jak – w myśl twierdzenia Poincarégo o powrocie – układ ma powrócić w pobliże stanu wyjściowego, skoro wartość funkcji  $H(t)$  nie rośnie podczas ewolucji (*paradoks Zermela*). Jak to wyjaśnić? Nie jest to bardzo trudne, choć porządne uzasadnienie tego argumentu odwołuje się do uniwersyteckiego kursu analizy. Omawiając funkcję rozkładu, podkreślaliśmy, że liczby  $f(v, t) \Delta^3x \Delta^3v$  powinny być duże. Tymczasem nie ma żadnej gwarancji, że rozważenie *najpierw* granicy dużej liczby cząstek, a *potem* granicy długich czasów da tę samą wartość, co uwzględnienie tych granic w odwrotnej kolejności.

Aby lepiej zrozumieć ten argument, przyjrzyjmy się prostemu modelowi mechaniki statystycznej, zwanemu **pierścieniem Kaca**. Na okręgu umieszczamy  $N$  ciał, a między nimi pewną liczbę znaczników. Każde z ciał może występować w dwóch stanach – czarnym i białym. W każdym kroku czasowym ciała przesuwają się na sąsiednie miejsca; jeżeli ciało przechodzi koło znacznika, to zmienia kolor. Przykład takiej ewolucji z  $N = 5$  i dwoma znacznikami przedstawiony jest na rysunku 2.

Po  $2N$  krokach czasowych każde z ciał układu przejdzie dwukrotnie koło każdego ze znaczników, dwukrotnie zmieniając przy tym swój kolor, a więc układ powróci do stanu wyjściowego. Spróbujmy teraz zanalizować pierścień Kaca *à la* Boltzmann. W tym celu założymy, że znaczników jest bardzo dużo – wówczas średni stosunek liczby ciał białych, stojących tuż przed znacznikiem, do liczby wszystkich ciał białych jest równa odpowiedniemu stosunkowi dla ciał czarnych oraz stosunkowi liczby znaczników do liczby wszystkich ciał układu. Oznaczmy ten stosunek przez  $\lambda$ . Zmiana liczby ciał białych  $B(n)$  w danym kroku ewolucji jest równa różnicy liczby  $c(n)$  ciał czarnych znajdujących się tuż przed znacznikiem i liczby  $b(n)$  ciał białych stojących tuż przed znacznikiem; zmiana liczby  $C(n)$  ciał czarnych dana jest liczbą przeciwną. Możemy wówczas oszacować, jak zmienia się różnica liczby ciał białych i czarnych:

$$B(n+1) - C(n+1) = B(n) - C(n) + 2c(n) - 2b(n) = (1 - 2\lambda)(B(n) - C(n)).$$

Oznacza to, że tak oszacowane liczby  $B(n) - C(n)$  tworzą ciąg geometryczny o module ilorazu mniejszym od 1. Po dostatecznie długim czasie powinniśmy zatem obserwować równe liczby ciał białych i czarnych. Wniosek ten stoi w jaskrawej sprzeczności ze stwierdzeniem w pierwszym zdaniu tego akapitu.

Nietrudno wykryć, gdzie kryje się różnica między podanymi dwoma sposobami analizy pierścienia Kaca. Rozumowanie *à la* Boltzmann wykorzystywało pojęcie wartości średniej, a więc „uśredniało” po różnych realizacjach naszego modelu. Odpowiada to wzięciu w pierwszej kolejności granicy  $N \rightarrow \infty$ , a następnie rozważaniu, jak układ ewoluuje w długiej perspektywie czasowej. Analiza bezpośrednia nie zakładała  $N \rightarrow \infty$ , co pozwoliło stwierdzić okresową ewolucję liczby  $B(n) - C(n)$ .

Rozmyślając o matematycznych modelach rzeczywistości, dobrze jest więc zastanawiać się także nad ich założeniami.

## Profesor Shugar – twórca i kreator nie tylko biofizyki



Przytrafiło mi się rzadkie zdarzenie: naukowy szef od „początku do końca” ten sam, który w dodatku w 2015 roku kończy 100 lat! Profesor David Shugar. Pierwszy biofizyk w Polsce. Pytany, czym jest biofizyka, zwykł był odpowiadać: *biofizyką jest to, czym zajmuje się biofizyk*. Jest to odpowiedź wykrętna, bo biofizyki są różne – opowiem, czym zajmował się i zajmuje David Shugar.

Z wykształcenia fizyk, z kanadyjskiego uniwersytetu McGill, w dodatku w życiorysie przytrafiła mu się wojna światowa i konieczność naukowego z nią zmierzenia. A potem – czasy ponurego maccarthyizmu po sąsiedztwie i pożegnanie z Kanadą. Wylądował w latach 1948–50 w Instytucie Pasteura w Paryżu i na krótko w Brukseli, gdzie powstała pierwsza publikacja z nowej dla niego i wielu ludzi na świecie dziedziny: biofizyki kwasów nukleinowych. Był rok 1952, a praca ta, jedna z najczęściej cytowanych, dotyczyła spektroskopowych badań form tautomerycznych składników kwasów nukleinowych, puryn i pirymidyn. Wiedza o ich formach tautomerycznych (w uproszczeniu: o pozycji zajmowanej w cząsteczce przez niektóre atomy wodoru) była nieodzowna twórcom modelu podwójnej helisy DNA.

A więc wybór tematyki: kwasy nukleinowe, cząsteczki dziedziczności; trudno wyobrazić sobie ważniejszą. Podejście metodyczne: badania prowadzone od najprostszych składników do coraz bardziej złożonych. Techniki: spektroskopia w miarę lat coraz bardziej wyrafinowana. To była biofizyka Davida Shugara.

Shugar wylądował, mając niecałe 40 lat, w dziwnym kraju, za żelazną, bardzo wówczas żelazną kurtyną, w Polsce. Może na tę decyzję wpłynął także fakt, że to z tego kraju, gdy miał 3 lata, wyemigrowali za chlebem jego rodzice. Dostał pracę i umożliwiono mu, w bardzo skromnych finansowo i aparaturowo warunkach, robić to, co jemu wydawało się ważne. Słowo „biofizyka” wówczas w Polsce znane nie było.

Powolutku rozbudowywał swój zespół. Wiedział, z kim chce pracować: fizycy, chemicy, biochemicy, mikrobiolodzy. Najchętniej młodzi, którym odpowiadała jego wizja badań. Podejmował wyzwania wynikające z nowych odkrywanych zjawisk. Promieniowania różnych typów powodują mutacje? Sprawdzić warto, jakie zmiany chemiczne powstają w składnikach kwasów nukleinowych pod wpływem ultrafioletu, promieni X (K.L. Wierzchowski, M. Fikus, E. Sztumf-Kulikowska, Z. Zarębska, D. Barszcz). Na ile są to zmiany odwracalne, na ile nie. A w komórkach działają na kwasy nukleinowe różne enzymy – czy można by je „na miejscu” lokalizować (H. Sierakowska)? Nawet z tych dwu pytań rosły „shugarowe” szkoły badań uwodnienia i dimeryzacji analogów składników kwasów nukleinowych i badań cytologicznych...

Warto chyba dodać elementarz chemiczny. Kwasy nukleinowe to długie polimery składające się z monomerów, zwanych nukleotydami. Pojedynczy nukleotyd składa się z zasady nukleinowej, cukru (ryboza w RNA, deoksyryboza w DNA) i fosforanu. W naturalnych kwasach nukleinowych występują 4 rodzaje zasad: symbolicznie oznaczanych jako A, T, G, C (DNA) i U zamiast T w RNA.

Pojawili się w laboratorium chemicy. Ich zadaniem były syntezy składników kwasów nukleinowych, na których kupno nie było nas stać i – co ważniejsze – syntezy tzw. analogów, czyli cząsteczek podobnych do naturalnie występujących, komercyjnie niedostępnych, których badania rzucić mogły światło na zachowanie naturalnych kwasów w naturalnym i modyfikowanym środowisku. W tym mniej więcej czasie opublikowano metodę enzymatyczną syntezy długich polimerów składających się tylko z jednego składnika kwasów nukleinowych, z cukrem rybozą, a więc przypominające RNA (poli rA, poli rU, poli rC itd.). Polimery z deoksyrybozą (czyli analogi DNA) umiał robić wówczas na świecie tylko jeden uczonec w USA, Frederic Bollum i do niego wyjechała na 3 miesiące jedna z pracownic laboratorium Shugara, Basia Żmudzka. Przywiozła z Ameryki wszystkie ważne deoksy polinukleotydy. Z punktu widzenia nauki żaden długoterminowy wyjazd w tym czasie nie okazał się równie skuteczny i udany. A my zaczęliśmy polinukleotydy typu RNA produkować, w dużym wyborze, jakie

Piszę najczęściej o tych badaniach z powodów egoistycznych. Też, z dumą – brałam w nich udział. Przepraszam innych autorów wielu set innych publikacji.

Naukowiec mający taki współczynnik wielkości  $h$  opublikował  $h$  prac, z których każda była cytowana w innych pracach co najmniej  $h$  razy. Współczynnik ten odzwierciedla liczbę publikacji i liczbę cytowań danej pracy. Laureaci Nagród Nobla miewają współczynnik Hirsha powyżej 45.

tylko wydały się interesujące. Pole fantazji wielkie, bo używaliśmy, oczywiście, także różnie chemicznie modyfikowanych zasad nukleinowych w polimeryzowanych nukleotydach. Staliśmy się światową potęgą w tej dziedzinie. Od badań syntetyzowanego u nas polirT (jednoczesny analog DNA i RNA) rozpoczął swą wielką karierę w pracowni noblisty, Severo Ochoa, nasz kolega, Włodek Szer.

Chyba już jasne jest, że w żadnym felietonie, ani pojedynczym artykule tego wspaniałego życia w nauce, Davida Shugara, nie da się opisać. Na końcu długiej listy zainteresowań i dzieł Profesora znalazły się badania wielkiej grupy enzymów: kinaz białkowych i nukleinowych, enzymów, które uczestniczą w przenoszeniu grup fosforanowych (nieorganicznych) na wiele składników komórkowych. Na wiele biomolekuł, których prawidłowe działanie decyduje o zdrowiu, a jego naruszenie – o chorobach, w tym nowotworowych.

W 1963 roku przyszedł do laboratorium Shugara siwy pan i spędził tam wiele godzin, a my bardzo chcieliśmy dowiedzieć się, kto to i w jakiej sprawie. (Shugar nigdy nie zamykał drzwi do swojego pokoju, ale cichutko mówił). Okazało się, że ten pan to fizyk z Uniwersytetu Warszawskiego, profesor Jerzy Pniewski, dyrektor Instytutu Fizyki Doświadczalnej, który postanowił namówić kolegę fizyka na prowadzenie w UW pierwszej w Polsce Katedry Biofizyki (długo jeszcze była to jedyna katedra w Polsce, która wyrosła na wydziale fizyki, a nie biologii). Ta kolejna inicjatywa, zupełnie w naszym kraju nieznana, wymagała namysłu i Shugar nie od razu taką decyzję podjął. Katedra przyjęła pierwszych studentów w 1966 roku, są tacy absolwenci, którzy od tego czasu zrobili światowe kariery naukowe. Rośnie też pokolenie naukowych „wnuków” Shugara, liczba wypromowanych w Katedrze magistrów przekroczyła setkę (to była raczej elitarna grupa fizyków z wyobraźnią). Natomiast liczba Zakładów Biofizyki w Polsce rosła lawinowo i różną, zgodnie z pierwotną definicją, uprawia się w nich dziś biofizykę.

Czas na uogólnienia. David Shugar jest autorem lub współautorem ponad 600 publikacji o łącznym współczynniku cytowań  $>1500$ , jego współczynnik Hirsha wynosi 50. Publikował z ponad 50 naukowcami z kraju i zagranicy, pochodzącymi z 19 krajów. Chłubić się Jego promotorstwem w doktoratach może ponad 200 osób, wiele z nich dawno temu zostało profesorami. Jest doktorem hc Uniwersytetu w Gandawie (1969) i w Warszawie (1995), otrzymał wiele nagród polskich i zagranicznych. Jest członkiem PAN oraz Royal Society w Kanadzie. Jest Kawalerem Krzyża Komandorskiego Orderu Odrodzenia Polski.

Wspomnieć muszę o jeszcze jednym: w 1996 roku Profesor Shugar po powrocie w naukowej wizyty w Szkocji zaprosił do siebie uczniów i sympatyków i powiedział: widziałem w Edynburgu wspaniałą imprezę, cieszącą się od kilku lat niesłabnącym zainteresowaniem, która nazywa się festiwalem nauki. Może byśmy w Warszawie zrobili kilka spotkań tego typu: naukowców chcących rozmawiać z publicznością i takich, którzy chcieliby też pokazać jakieś zjawiska przyrodnicze w formie doświadczenia.

W 1997 roku odbył się w Warszawie pierwszy polski Festiwal Nauki. Po ponad dziesięciu latach było ich w Polsce w miastach akademickich kilkanaście, w szkołach (nawet podstawowych) – kilkadziesiąt. Zasięg i typy festiwali stale rosną. Pierwsi twórcy festiwali stali się także organizatorami Centrów Nauki w całej Polsce, w tym Centrum Nauki Kopernik.

David Shugar był żonaty z piękną Kanadyjką, Grace, która odeszła od Niego i od nas w 2013. Mieli córkę, Basię, tragicznie zmarłą w roku, w którym uzyskała maturę. Profesor pali fajkę, chodzi w muszce i tweedowych marynarkach, whisky pija tylko po 18. Interesował się nauką i długo, długo niczym więcej, ale lubił pytać o to, „co słyhać” w polityce. Lubi klasyczną muzykę. Przy ścianie Instytutu Biochemii i Biofizyki PAN (w którym pracuje od 1954 roku) rośnie piękny klon (Kanada!) posadzony w osiemdziesięciolecie Profesora.

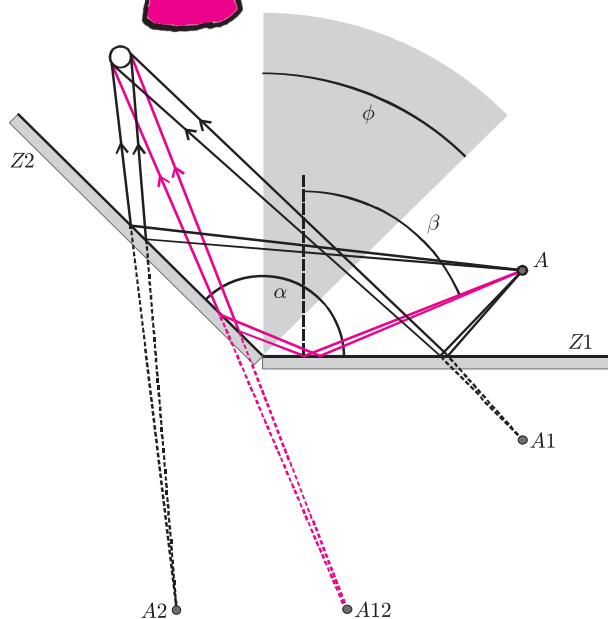
Myszę, że to wspaniały zyciorys Człowieka, którego pasją życia była i jest nauka, twórcy, wychowawcy, inspiratora, popularyzatora... Idą Jego śladami dziesiątki młodszych.

*Magdalena FIKUS*



Odbicie światła od zwierciadła płaskiego, przerabiane w szkole w ramach optyki geometrycznej, uważane jest za zagadnienie banalne. Bywa czasem uatrakcyjniane rozważaniem kwestii, dlaczego lustro zamienia stroną lewą z prawą, a nie zamienia góry z dołem. Natomiast znacznie ciekawsze – a architektom niezwykle przydatne w projektowaniu ciekawych wnętrz – okazuje się zbadanie zjawiska odbicia światła od pary zwierciadeł, których płaszczyzny tworzą dowolny kąt. Może wtedy dojść do wielokrotnych odbić, w wyniku których powstaje wiele obrazów. Okazuje się, że liczba powstałych obrazów zależy nie tylko od kąta między zwierciadłami, ale też od położenia przedmiotu.

Rozważmy więc dwa zwierciadła stykające się wzdłuż pewnej krawędzi, przed którymi znajduje się oglądany przedmiot, który dla wygody utożsamimy z pojedynczym punktem. Oznaczmy przez  $\alpha$  kąt, jaki tworzą odbijające płaszczyzny zwierciadeł. Możemy przyjąć, że zachodzi  $\alpha < 180^\circ$ , gdyż dla kątów większych od  $180^\circ$  odbicia wielokrotne nie mogą wystąpić, a dla  $\alpha = 180^\circ$  mamy po prostu do czynienia z jednym zwierciadłem. Z najprostszym przypadkiem mamy do czynienia dla  $\alpha > 120^\circ$ . Promienie wychodzące z przedmiotu ulegają wtedy najmniejszej ilości odbić. Jako przykład wybierzmy  $\alpha = 135^\circ$ . Rysunek 1 pokazuje, jak zwierciadło  $Z1$  wytwarza obraz  $A1$  przedmiotu  $A$ , a zwierciadło  $Z2$  – obraz  $A2$ ; powstają więc dwa obrazy. Promienie odbite trafiają do oka obserwatora (oznaczonego kółkiem) z dwóch kierunków.



Rys. 1. Schemat zjawiska wielokrotnego odbicia dla kąta między zwierciadłami równego  $\alpha = 135^\circ$ .

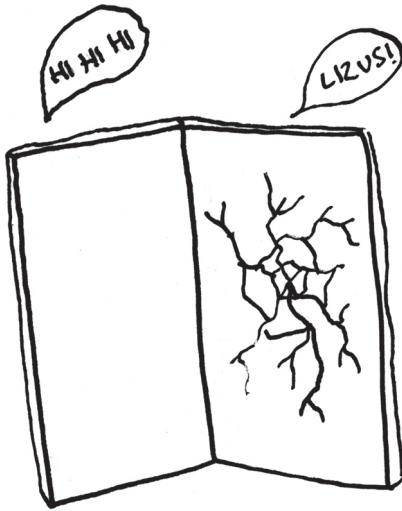


Fot. 1. Kąt między zwierciadłami jest równy  $\alpha = 135^\circ$ . Kredka leżąca w obszarze zacieniowanego klina ma dwa obrazy, kredka położona poza klinem – trzy.

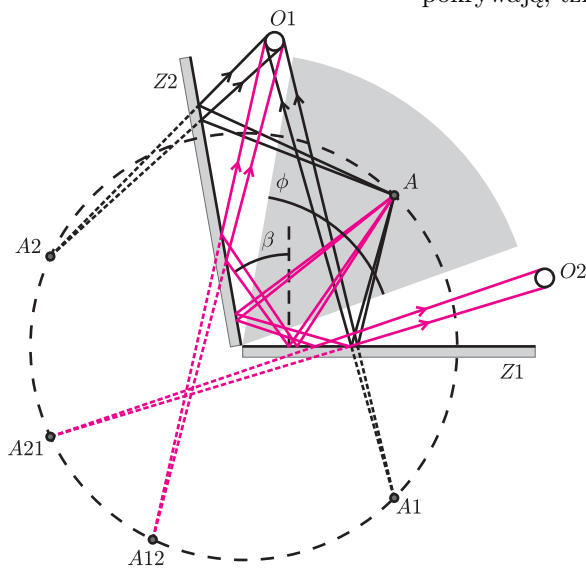
Możliwe jest powstanie trzeciego obrazu widocznego dla tego samego obserwatora, gdy promienie padające z punktu  $A$  odbijają się kolejno od zwierciadeł  $Z1$  i  $Z2$ . Punkt przecięcia przedłużeń promieni wychodzących z układu wyznacza położenie obrazu  $A12$ . Jest to możliwe, jeśli kąt odbicia od pierwszego zwierciadła  $\beta$  (a więc i kąt padania na nie) jest większy od  $\alpha - 90^\circ$  ( $45^\circ$  w naszym przykładzie), bo tylko wtedy promień odbity od  $Z1$  trafia na zwierciadło  $Z2$ . Wynika stąd, że trzy obrazy powstają, jeśli punkt przedmiotu należy do obszaru przylegającego do zwierciadła  $Z1$  i ograniczonego płaszczyzną tworzącą z nim kąt  $90^\circ - \beta = 180^\circ - \alpha$ , czyli  $45^\circ$ . Zauważmy, że podwójnemu odbiciu ulegają tylko promienie zmierzające ku zwierciadłu  $Z1$ , natomiast promienie wychodzące z tego obszaru w kierunku zwierciadła  $Z2$  odbijają się tylko raz. Oczywiście, istnieje drugi obszar o takich samych właściwościach przyległy do  $Z2$ . Promienie wychodzące z niego ulegają podwójnemu odbiciu, jeśli biegną ku zwierciadłu  $Z2$ . Widać więc, że promienie pochodzące z każdego

\*Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

z tych dwóch obszarów mogą wytworzyć trzy obrazy: dwa powstałe z pojedynczych odbić od każdego lustra i jeden powstały w wyniku dwukrotnego odbicia. Jeśli natomiast przedmiot znajduje się pomiędzy wyróżnionymi płaszczyznami, czyli należy do obszaru w kształcie klina określonego kątem  $\phi = \alpha - 2(180^\circ - \alpha) = 3\alpha - 360^\circ$  (tu:  $45^\circ$ ), to możliwe są tylko dwa pojedyncze odbicia. Z ostatniego wzoru wynika, że dla  $\alpha = 120^\circ$  kąt  $\phi = 0^\circ$ , a więc klin zastąpiony jest płaszczyzną dzielącą obszar między lustrami na połowy. Punkt przedmiotu dowolnie położony poza tą płaszczyzną ma trzy obrazy.



Jeśli kąt  $\alpha$  jest mniejszy od  $120^\circ$ , lecz nadal jest rozwarty, to również można wyróżnić takie obszary między lustrami, że promienie z nich wychodzące ulegają różnej ilości odbić. Rysunek 2 ilustruje to dla  $\alpha = 100^\circ$ . Podobnie jak poprzednio promień wychodzący z wybranego punktu odbija się dwa razy, jeśli pierwszy kąt odbicia spełnia warunek  $\beta > \alpha - 90^\circ$ , czyli  $\beta > 10^\circ$ . Płaszczyzna ograniczająca zbiór takich punktów przylegająca do zwierciadła  $Z1$  tworzy z tym zwierciadłem kąt  $90^\circ - \beta = 180^\circ - \alpha = 80^\circ$ . Punkty przedmiotu należące do tego obszaru mają więc trzy obrazy, tak jak w poprzednim przykładzie. Drugi obszar, utworzony przez punkty o tej samej własności, przylega do zwierciadła  $Z2$  i ma wielkość określoną takim samym kątem. Oba obszary pokrywają się częściowo. Część wspólna tworzy klin o rozwartości  $\phi = \alpha - 4(\alpha - 90^\circ) = 360^\circ - 3\alpha = 60^\circ$ . Każdy punkt tego klina ma cztery obrazy: dwa powstałe po pojedynczych odbiciach i dwa utworzone w wyniku podwójnych odbić w obu zwierciadłach. Rysunek 2 ilustruje także fakt, że nie wszystkie obrazy są widoczne z jednego miejsca: obserwator  $O1$  nie może zobaczyć obrazu  $A21$ . Klin powiększa się, gdy  $\alpha$  maleje, i przy  $\alpha = 90^\circ$  zajmuje cały obszar między zwierciadłami, tj.  $\phi = 90^\circ$ . Jednak przy tym szczególnym kącie oba obrazy uzyskane przez podwójne odbicia dokładnie się pokrywają, tzn.  $A12 = A21$ , więc każdy punkt przedmiotu ma tylko trzy obrazy.



Rys. 2. Schemat zjawiska wielokrotnego odbicia dla kąta między zwierciadłami równego  $\alpha = 100^\circ$ .



Fot. 2. Kąt między zwierciadłami jest równy  $\alpha = 100^\circ$ . Widać po trzy obrazy każdej z kredek. Kredka położona w obszarze zacienionego klina może mieć jeszcze jeden obraz, ale jest on niewidoczny z wybranego miejsca obserwacji.

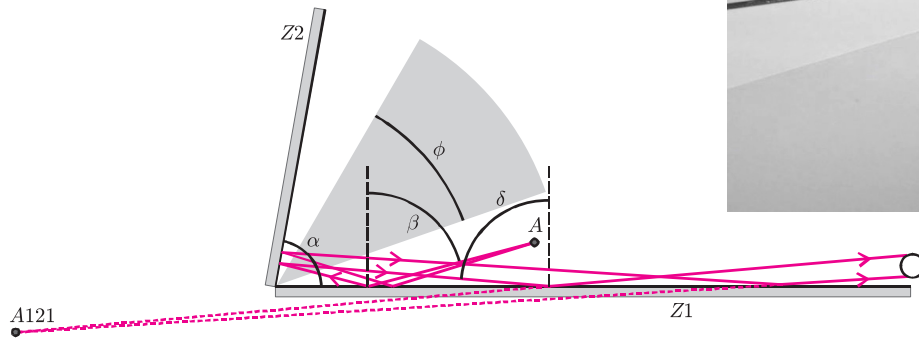
Gdy kąt między lustrami jest mniejszy od  $90^\circ$ , to podwójne odbicie od każdego zwierciadła zachodzi dla każdego punktu położonego między zwierciadłami. Powstają więc zawsze co najmniej cztery obrazy. Ponadto pojawia się możliwość trzykrotnego odbicia zilustrowana dalej na rysunku 3 dla  $\alpha = 80^\circ$ . Trzecie odbicie, wytwarzające obraz  $A121$ , jest możliwe, jeśli promień z punktu przedmiotu pada np. na zwierciadło  $Z1$  pod kątem  $\beta$ , odbija się, dociera do  $Z2$  i po drugim odbiciu skierowany jest ku zwierciadłu  $Z1$ , tj. pada na nie pod kątem  $\delta$  mniejszym od  $90^\circ$ . Wspomagając się rysunkiem 3, można wykazać, że kąty  $\delta$  i  $\beta$  są powiązane relacją  $\delta = 2\alpha - \beta$ . W granicznym przypadku  $\delta = 90^\circ$  relacja ta określa kąt  $\beta$  (w naszym przykładzie równy  $70^\circ$ ), który wyznacza szerokość kątową  $90^\circ - \beta = 20^\circ$  obszaru przyległego do zwierciadła  $Z1$ , złożonego z punktów wysyłających promienie odbijające się trzykrotnie. Drugi taki obszar przylega do zwierciadła  $Z2$ . Między tymi obszarami utworzony jest klin



o rozwartości  $\phi = 5\alpha - 360^\circ = 40^\circ$ . Punkty mieszczące się w klinie mają po cztery obrazy, a te na zewnątrz klina – po pięć. Klin zmniejsza się, gdy  $\alpha$  maleje i redukuje się do płaszczyzny dwusiecznej dla  $\alpha = 72^\circ$ .

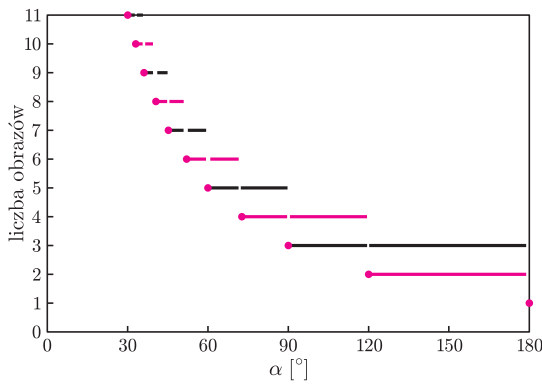


Fot. 3. Kąt między zwierciadłami jest równy  $\alpha = 80^\circ$ . Kredka położona w obszarze zacieniowanego klina ma cztery obrazy, a kredka położona poza klinem o jeden więcej dzięki trzykrotnemu odbiciu przedstawionemu na rysunku 3.

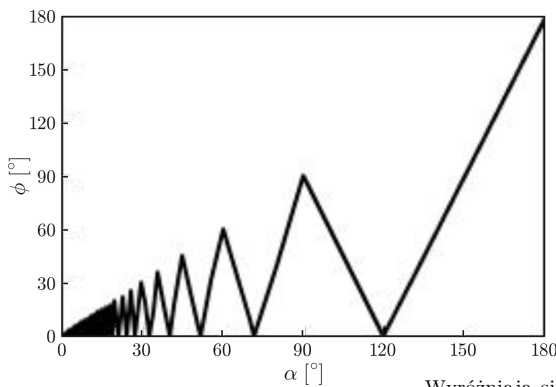


Rys. 3. Schemat zjawiska wielokrotnego odbicia dla kąta między zwierciadłami równego  $\alpha = 80^\circ$ .

Analogiczne rozważania kontynuowane dla coraz mniejszych kątów  $\alpha$  dają podobne wyniki, pokazując podział przestrzeni między lustrami na obszary, którym odpowiadają różne liczby obrazów. Ogólnie liczba obrazów rośnie, gdy  $\alpha$  maleje, i zmierza do nieskończoności, gdy zwierciadła stają się równoległe. Wszystkie one, jak również obserwowany przedmiot, leżą na okręgu o środku położonym na wspólnej krawędzi zwierciadeł.



Rys. 4. Liczba obrazów która powstaje przy danym kącie  $\alpha$ . Kolorowe linie i punkty dotyczą przedmiotów położonych w obrębie klina, a czarne linie – poza klinem.



Rys. 5. Rozwartość klina  $\phi$  w zależności od kąta między lustrami.

$\alpha$	$k$	$n$	$m$	$\phi$	
135°		2	3	45°	$3\alpha - 360^\circ$
120°	3	2	3	0°	
100°		4	3	60°	$360^\circ - 3\alpha$
90°	4	3	–	90°	
80°		4	5	40°	$5\alpha - 360^\circ$
72°	5	4	5	0°	
70°		6	5	10°	$360^\circ - 5\alpha$
60°	6	5	–	60°	
56°		6	7	32°	$7\alpha - 360^\circ$
51 $\frac{3}{7}$ °	7	6	7	0°	
50°		8	7	10°	$360^\circ - 7\alpha$
45°	8	7	–	45°	
42°		8	9	18°	$9\alpha - 360^\circ$
40°	9	8	9	0°	
38°		10	9	18°	$360^\circ - 9\alpha$
36°	10	9	–	36°	
34°		10	11	14°	$11\alpha - 360^\circ$
32 $\frac{8}{11}$ °	11	10	11	0°	
31°		12	11	19°	$360^\circ - 11\alpha$
30°	12	11	–	30°	

Wyróżniają się kąty, których pewne wielokrotności stanowią kąt pełny, tj.  $\alpha_k = 360^\circ/k$ , gdzie  $k > 1$  jest liczbą naturalną. Liczba  $n$  obrazów powstających dla tych kątów dana jest wzorem  $n = (360^\circ - \alpha_k)/\alpha_k = k - 1$ . Wzór ten jest słuszny tylko dla punktów mieszczących się w obszarach w kształcie klina lub na płaszczyźnie dwusiecznej, do której kurczy się on dla pewnych kątów  $\alpha$ . Tabela zawiera także wartości  $n$  dla przykładowych kątów wybranych z przedziałów zawartych między wartościami  $\alpha_k$ . Liczba  $m$  oznacza liczbę obrazów punktów znajdujących się poza klinem.

## Informatyczny kącik olimpijski (85): Jeszcze dwa zadania do plecaka

Zakładamy, że początkowo tablica  $d[0..M]$  jest zainicjowana wartościami  $-\infty$ . Po  $i$ -tej fazie algorytmu nieujemna wartość  $d[j]$  oznacza największą wartość podzbioru przedmiotów o sumarycznym rozmiarze  $j$ , wybranego spośród przedmiotów ze zbioru  $\{1, \dots, i\}$ :

```
d[0] := 0;
for i := 1 to n do
  for j := M downto m[i] do
    if d[j - m[i]] ≠ -∞ then
      w_* := d[j - m[i]] + w[i];
      d[j] := max(d[j], w_*);
```

Naturalne jest tu zastosowanie programowania dynamicznego. Jeśli oznaczymy przez  $dp[i, j]$  minimalny czas złożenia  $j$  mebli, gdy rozważamy jedynie rodzaje od 1 do  $i$ , to odpowiedzią będzie  $dp[n, M]$ , a rekurencją do niej prowadzącą wzór:

$$dp[i, j] = \min_{0 \leq k \leq \min(c_i, j)} (dp[i-1, j-k] + T_{i,k}),$$

gdzie  $T_{i,k} = kt_i - \binom{k}{2}d_i$  jest czasem montażu  $k$  mebli rodzaju  $i$ . To rozwiązanie działa w czasie  $O(nM^2)$ .

Intuicyjnie rzecz biorąc, jeśli już zaczęliśmy składać meble danego rodzaju, to opłaca się nam wykorzystać zdobyte doświadczenie do maksimum. A formalnie: istnieje optymalne rozwiązanie, w którym mamy co najwyżej jeden rodzaj mebla  $i$ , którego złożymy więcej niż 0, ale mniej niż  $c_i$  sztuk. Istotnie, założymy, że mamy co najmniej dwa takie *nietrywialne* rodzaje  $i_1$  i  $i_2$ , których składamy odpowiednio  $\ell_1$  i  $\ell_2$  sztuk. Jeśli ostatni mebel rodzaju  $i_1$  składamy nie dłużej niż ostatni mebel rodzaju  $i_2$ , to składając dodatkowe  $\ell = \min(c_{i_1} - \ell_1, \ell_2)$  sztuk rodzaju  $i_1$  zamiast  $\ell$  sztuk rodzaju  $i_2$ , nie pogorszymy czasu, a zmniejszymy liczbę nietrywialnych rodzajów mebli.

Rozważmy zatem wszystkie możliwości wyboru nietrywialnego mebla  $i$ . Dla ustalonego  $i$  pogrupujmy pozostałe rodzaje mebli  $j$  w paczki o rozmiarach  $m[j] = c_j$  i czasach montażu  $w[j] = T_{j,c_j}$  i rozwiążmy dla nich problem plecakowy, w którym pytamy się o najmniejszą wartość przedmiotów całkowicie wypełniających plecak o udźwigu  $M$ . Dzięki temu w czasie  $O(nM)$  dostaniemy tablicę  $d[0..M]$ , w której  $d[j]$  oznaczać będzie minimalny czas potrzebny na złożenie dokładnie  $j$  mebli, jeśli pochodzą one z pewnej liczby w całości złożonych paczek. Zatem, dokładając do tego  $\ell$  sztuk mebla  $i$  (dla wszystkich wartości  $0 < \ell < c_i$ ), zmontujemy  $M$  mebli w czasie  $T_{i,\ell} + d[M - \ell]$ . Złożoność czasowa tego rozwiązania to  $O(n^2M)$ .

Zauważmy, że główny koszt algorytmu to rozwiązanie problemu plecakowego dla każdego podzbioru  $n - 1$  przedmiotów. Używając techniki, o której pisaliśmy w zeszłym miesiącu, możemy zmniejszyć złożoność czasową do  $O(nM \log n)$ .

W kąciku kontynuujemy przygodę z zadaniami, do których rozwiązania przydaje się znajomość problemu plecakowego. Tym razem w nieco trudniejszej jego wersji, w której każdy przedmiot ma swój rozmiar  $m[i]$  oraz wartość  $w[i]$ . Standardowe pytanie, które możemy wtedy zadać, to np. jaka jest największa sumaryczna wartość przedmiotów, które możemy zapakować do plecaka, nie przekraczając jego udźwigu  $M$  (patrz pseudokod na marginesie).

Na pierwszy ogień pójdzie zadanie *Meble* z Obozu Naukowo-Treningowego im. A. Kreczmara z roku 2013. Chcemy urządzić mieszkanie i w tym celu zakupiliśmy  $n$  rodzajów mebli do samodzielnego montażu. Mamy  $c_i$  sztuk mebla rodzaju  $i$ ; złożenie pierwszej sztuki tego rodzaju zajmie nam  $t_i$  minut, a wraz z postępem prac będziemy nabierać wprawy i złożenie każdej kolejnej sztuki zajmie nam o  $d_i$  minut krócej niż poprzedniej (zakładamy, że  $t_i > (c_i - 1)d_i$ ). Chcemy wiedzieć, ile minimalnie czasu potrzebujemy, aby złożyć dowolnych  $M$  mebli.

Drugie zadanie pochodzi z Wiosennego Turnieju w Programowaniu Zespołowym organizowanego przez Politechnikę Poznańską (a konkretnie z 8. edycji z roku 2004) i ma tytuł (kto by się spodziewał) *Pakowanie plecaka*. W zadaniu mamy plecak o udźwigu  $M$  i  $n$  przedmiotów, z których każdy ma swój rozmiar  $m[i]$  oraz użyteczność  $w[i]$  (przy czym niektóre przedmioty mogą być wyjątkowo nieprzydatne i mieć ujemną użyteczność). Chcemy znaleźć maksymalne upakowanie plecaka (tzn. takie, do którego nie będzie można dołożyć żadnego przedmiotu) o największej sumie użyteczności zabranych przedmiotów (zatem, być może, będziemy zmuszeni zabrać jakiś nieprzydatny przedmiot tylko po to, by dociążyć plecak).

Zauważmy, że jeśli będziemy chcieli zostawić w plecaku puste miejsce o wielkości  $\ell$ , to wszystkie przedmioty o rozmiarach nie większych niż  $\ell$  będą musiały znaleźć się w plecaku (inaczej moglibyśmy dołożyć do plecaka co najmniej jeden z nich). Posortujmy zatem przedmioty względem ich rozmiarów i podzielmy na grupę  $j$  przedmiotów „dużych” i  $n - j$  przedmiotów „małych”, co po ewentualnym przenumowaniu przedmiotów da nam

$$w[1] \geq w[2] \geq \dots \geq w[j] > \ell \geq w[j+1] \geq \dots \geq w[n].$$

Do plecaka na pewno weźmiemy wszystkie „małe” przedmioty o łącznym rozmiarze  $m_* = \sum_{i>j} m[i]$  i użyteczności  $w_* = \sum_{i>j} w[i]$ . Pozostałe przedmioty muszą zająć w plecaku miejsce o wielkości dokładnie  $M - m_* - \ell$ , ale poza tym możemy je wybrać dowolnie. Zatem wystarczy, że rozwiążemy dla nich problem plecakowy maksymalizujący wartość zabranych przedmiotów – odpowiedzią będzie  $d[M - m_* - \ell] + w_*$ .

Jeśli przeiterujemy po wartościach  $\ell$  w kolejności malejącej, to każdy przedmiot dokładnie raz zmieni swój status z „małego” na „duży”. Możemy więc na bieżąco rozwiązywać problem plecakowy i uaktualniać wartości  $m_*$  i  $w_*$ . Wtedy koszt każdej takiej zmiany wyniesie  $O(M)$ , a cały algorytm będzie miał złożoność czasową  $O(n \log n + nM)$ .

Tomasz IDZIASZEK

# Niewymienialność

Łukasz RAJKOWSKI

Blackjack jest kasynowym odpowiednikiem polskiej gry karcianej oczko. Jako gra kasynowa daje, oczywiście, nieznaczną przewagę krupierowi.



W przypadku zmiennych losowych o dowolnym rozkładzie wymienialność definiuje się jako niezależność rozkładu wektora  $(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)})$  od wyboru permutacji  $\sigma$ .

Dla formalnego uzasadnienia wystarczy np. sprawdzić, korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, że

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) &= \frac{4}{25} \neq \\ &\neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1) \end{aligned}$$



**Rozwiązanie zadania M 1469.**  
Z nierówności Schwarz'a otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2.$$

Stąd i z warunku z zadania

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = 2 \sum_{i=1}^n a_i$$

otrzymujemy tezę.

Wyobraź sobie, Czytelniku, że na skutek wieloletnich ćwiczeń i poznania kilku szulerskich sztuczek udało Ci się zwiększyć swoje szanse na wygraną w grze blackjack do  $\frac{4}{5}$ . Kuszony wizją bajecznego bogactwa w końcu zdecydowałeś się odwiedzić kasyno, by tam spożytkować swoje niesamowite umiejętności. Z miną zawodowego pokerzysty przysiadłeś się do odpowiedniego stolika i zacząłeś grać. Oznaczmy przez  $X_1, X_2, \dots$  wyniki kolejnych gier, tzn.  $X_k$  wynosi 1, jeśli w  $k$ -tej grze odniosłeś sukces oraz 0 w przeciwnym przypadku. W naszych rozważaniach przyjmijmy, że zmienne  $X_1, X_2, \dots$  są *niezależne*, co w tym prostym przypadku oznacza dokładnie tyle, że dla dowolnego zero-jedynkowego ciągu  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  zachodzi

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_n = x_n),$$
 co, uwzględnivszy Twoje nadludzkie zdolności gry w blackjacka, pozwala nam stwierdzić, że

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \left(\frac{4}{5}\right)^{s_n} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-s_n},$$

gdzie  $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ . Zauważmy, że zgodnie z powyższą równością prawdopodobieństwo uzyskania dowolnego skończonego ciągu wyników w kolejnych grach nie zależy od kolejności, w jakiej te wyniki zostaną ustawione – innymi słowy, dla dowolnej permutacji  $\sigma$  zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  zachodzi

$$\mathbb{P}(X_1 = x_{\sigma(1)}, X_2 = x_{\sigma(2)}, \dots, X_n = x_{\sigma(n)}) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n).$$

Własność tę nazywamy *wymienialnością* (ang. *exchangeability*) ciągu zmiennych  $X_1, X_2, \dots$ . Ciąg wyników niezależnych powtórzeń dowolnego doświadczenia stanowi zatem ciąg wymienialny, jak się jednak zaraz okaże, nie jest to jedyna sytuacja, w jakiej możemy tę cechę zaobserwować.

Załóżmy bowiem, że krupier – zaniepokojony Twoimi nadspodziewanie dobrymi rezultatami w blackjacku – zaproponował następujące urozmaicenie rozrywki. Tym razem masz rozpocząć grę od wyboru jednej z dwóch pozornie identycznych talii, przy czym jedna z nich jest zupełnie uczciwa, a druga – przeznaczona dla gości specjalnych – niezupełnie, co objawia się zmniejszeniem Twoich szans na wygraną do  $\frac{1}{5}$ . Abstrahując od absurdalności opisanego sytuacji, przypuśćmy, że zdecydowałeś się przystać na ofertę krupiera. Zauważmy, że tym razem opisanego w poprzednim akapicie zmienne  $X_1, X_2, \dots$  są zależne – intuicyjnie można się w tym miejscu powołać na fakt, że przegrana w pierwszej grze wpłynie na Twoją ocenę szans wygranej w drugiej grze (każde Ci bowiem przypuszczać, że wybrałeś nieuczciwą talię), a takie wnioskowanie nie może mieć miejsca przy zmiennych niezależnych. Mamy jednak w tej sytuacji do czynienia z *warunkową niezależnością* – jeśli bowiem mielibyśmy pracującego w kasynie przyjaciela, który zdradziłby nam, czy wybraliśmy uczciwą talię, to żadna informacja o dotychczasowym przebiegu naszych zmaganiach nie wpłynęłaby na ocenę szans na sukces w przyszłych rozgrywkach. Istotnie, jeśli przyjaciel opisał talię jako uczciwą, to nawet gdybyśmy doświadczyli 10 przegranych pod rząd, nasze szanse na powodzenie w 11 rozgrywce wciąż ocenialibyśmy na  $\frac{4}{5}$  (o ile jeszcze nie zaczęliśmy się zastanawiać, czy aby na pewno nasz przyjaciel jest naszym przyjacielem). Jeśli więc przez  $\Theta$  oznaczymy naszą szansę na sukces przy grze wybranymi kartami ( $\Theta = \frac{4}{5}$  dla uczciwej talii, w przeciwnym przypadku  $\Theta = \frac{1}{5}$ ), to dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  oraz permutacji  $\sigma$  zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  możemy zapisać

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = x_{\sigma(1)}, \dots, X_n = x_{\sigma(n)}) &= \\ &= \mathbb{P}(X_1 = x_{\sigma(1)}, \dots, X_n = x_{\sigma(n)} \mid \Theta = \frac{1}{5}) \cdot \mathbb{P}(\Theta = \frac{1}{5}) + \\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 = x_{\sigma(1)}, \dots, X_n = x_{\sigma(n)} \mid \Theta = \frac{4}{5}) \cdot \mathbb{P}(\Theta = \frac{4}{5}) = \\ &= \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid \Theta = \frac{1}{5}) \cdot \mathbb{P}(\Theta = \frac{1}{5}) + \\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid \Theta = \frac{4}{5}) \cdot \mathbb{P}(\Theta = \frac{4}{5}) = \\ &= \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \end{aligned}$$



Rezultat ten jest znany wśród probabilistów i statystyków pod nazwą twierdzenia de Finettiego.

Oznacza to, że podobnie jak w poprzednim przypadku kolejne wyniki tworzą ciąg wymierny. Analogiczne rozumowanie moglibyśmy przeprowadzić, gdyby zmienna, pod warunkiem której kolejne gry są niezależne z tym samym prawdopodobieństwem sukcesu, była dużo bardziej skomplikowana (na przykład gdybyśmy na początku w jednostajny sposób losowo wybierali z odcinka  $[0, 1]$  prawdopodobieństwo wygranej w kolejnych grach). Rozważania te prowadzą do naturalnego pytania: czy możemy skonstruować nieskończony ciąg doświadczeń losowych o wymiernych rezultatach (w sensie sukcesu lub porażki) w inny sposób niż poprzez niezależne kopie tego samego eksperymentu z losowo wybranym na początku prawdopodobieństwem sukcesu?

Zanim odpowiemy na to pytanie, zastanówmy się, w jaki sposób możemy w trakcie rozgrywki z krupierem przekonać się, którą z talii wybraliśmy – innymi słowy, jaką wartość zmienną  $\Theta$  wylosowaliśmy. Odpowiedź jest mocno intuicyjna – spodziewamy się, że wraz ze wzrostem liczby gier coraz lepszym przybliżeniem prawdopodobieństwa wygranej będzie udział naszych zwycięstw we wszystkich dotychczasowych grach. Przekładając tę intuicję na wprowadzone oznaczenia, możemy zapisać

$$(1) \quad \Theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Powyższa zależność okaże się wskazówką do uzasadnienia, że jeśli nieskończony ciąg doświadczeń  $(X_n)_{n=1}^\infty$  jest wymierny, to istnieje zmienna – wyżej określona  $\Theta$  – pod warunkiem której zmienne  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne i mają ten sam rozkład.

Wyobraź sobie teraz, Czytelniku, że krupier zaproponował Ci nową grę i z jego wieloletniego doświadczenia wynika, że rezultaty kolejnych rozgrywek tworzą ciąg wymierny. Przypuśćmy, że chwilę po rozpoczęciu zabawy przysiadła się do Ciebie wysoki, elegancko ubrany dżentelmen o prawym oku czarnym, a lewym zielonym. Nachyla się do Twojego ucha i szepcze z cudzoziemskim akcentem „Annuszka kupiła już olej słonecznikowy, a po setnej grze będziesz miał dwadzieścia wygranych”, po czym ulatnia się tak nagle, jak się pojawił. Coś w jego wyglądzie każe Ci zawierzyć usłyszaną przepowiednię, dlatego czym prędzej sięgasz po coś do pisania i obliczasz, w jaki sposób uzyskana informacja wpływa na Twoją ocenę opłacalności gry w kolejnych rundach. Przyjmując oznaczenie  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  na liczbę sukcesów po  $n$ -tej rozgrywce oraz dając wiarę zapewnieniom krupiera o wymierności ciągu wyników, stwierdzamy, że

$$(2) \quad \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \frac{\mathbb{P}(S_n = s_n)}{\binom{n}{s_n}} \quad (\text{gdzie } s_n = \sum_{i=1}^n x_i),$$

gdź każdy z  $\binom{n}{s_n}$   $n$ -wyrazowych ciągów wyników z  $s_n$  sukcesami jest równie prawdopodobny. Spróbujmy teraz obliczyć prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  sukcesów w  $n$ -tej rundzie, gdzie  $n < N = 100$ . Pamiętajmy, że po  $N$ -tej rundzie mamy mieć na koncie  $K = 20$  zwycięstw. Każda z permutacji tych  $N$  przyszłych wyników jest równie prawdopodobna, zastanówmy się zatem, jak wiele z nich oznacza  $k$  sukcesów po  $n$  rundach. Najpierw musimy wybrać  $k$  zwycięskich rund spośród pierwszych  $n$  na  $\binom{n}{k}$  sposobów, następnie  $K - k$  pozostałych sukcesów spośród  $N - n$  końcowych rozgrywek na  $\binom{N-n}{K-k}$  sposobów. Ponadto zwycięskie rundy możemy pomieszać na  $K!$  sposobów, a przegrane na  $(N - K)!$ , co przy  $N!$  wszystkich możliwych permutacji daje nam równość

$$\mathbb{P}(S_n = k | S_N = K) = \frac{\binom{n}{k} \binom{N-n}{K-k} K!(N-K)!}{N!} = \binom{n}{k} \frac{(K)_k (N-K)_{n-k}}{(N)_n},$$

gdzie  $(x)_l = x(x-1)(x-2)\dots(x-l+1)$ . Niestety, w kasynie nie powinniśmy liczyć na pomoc sił nadprzyrodzonych, jednak uzyskana wyżej równość i tak może być użyteczna dla naszych celów. Zauważmy bowiem, że nawet jeśli nie znamy wartości  $S_N$ , to – korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo



**Rozwiązanie zadania M 1470.**  
Odp. Tak!

Oznaczmy chłopców  $C_0, \dots, C_9$ , a dziewczyny –  $D_0, \dots, D_9$ . Niech dla każdego  $i = 0, \dots, 9$ , chłopiec  $C_i$  zadzwoni do  $D_i, D_{i+1}$  oraz  $D_{i+3}$  (gdzie  $D_{10} = D_0, D_{11} = D_1$  i  $D_{12} = D_2$ ). Wówczas zostanie wykonanych łącznie 30 połączeń i pierwszy warunek będzie spełniony w sposób oczywisty. Aby sprawdzić drugi warunek, spójrzmy na tabelę połączeń („1” oznacza, że  $C_i$  zadzwoni do  $D_j$ ).

1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Gdyby drugi warunek nie był spełniony, to na wszystkich 4 wierzchołkach pewnego prostokąta byłyby jedynki, a to nie ma miejsca (między jedynkami w jednym wierszu odległości mogą wynosić odpowiednio 1 lub 9, 2 lub 8 i 3 lub 7, a każda z tych odległości jest realizowana przez co najwyżej jedną parę jedynek).



Sensownym sensem jest w tym wypadku zbieżność według rozkładu. Wnioskujemy ją z twierdzenia Helly'ego, zastosowanego do dystrybuant zmiennych  $\Theta_N$ .

całkowite – możemy uzyskać

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k) &= \sum_{K=k}^N \mathbb{P}(S_n = k | S_N = K) \cdot \mathbb{P}(S_N = K) = \\ &= \binom{n}{k} \sum_{K=k}^N \frac{(K)_k (N-K)_{n-k}}{(N)_n} \cdot \mathbb{P}(S_N = K). \end{aligned}$$

Przyjmijmy teraz oznaczenie  $\Theta_m = \frac{S_m}{m}$ , co pozwoli powyższą zależność przepisać w postaci

$$\mathbb{P}\left(\Theta_n = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} \sum_{K=k}^N \frac{(K)_k (N-K)_{n-k}}{(N)_n} \cdot \mathbb{P}\left(\Theta_N = \frac{K}{N}\right).$$

Jest ona prawdziwa dla dowolnych liczb naturalnych  $k < n < N$ . Ustalmy teraz  $k, n$  i zwiększajmy  $N$ . Niestety, nie możemy jeszcze stwierdzić, że zmienne  $\Theta_N$  zbiegają w jakimś sensie do jednej zmiennej. Wszystkie jednak są zmiennymi na  $[0, 1]$  – okazuje się, że w tej sytuacji jest im na tyle ciasno, że jesteśmy w stanie wybrać z nich podciąg  $(\Theta_{N_i})$  zbieżny (w pewnym sensownym sensie) do konkretnej zmiennej losowej  $\Theta$  na  $[0, 1]$ . Wyobraźmy sobie teraz, że wspomniany wcześniej tajemniczy cudzoziemiec zdradził nam, że gdybyśmy grali w nieskończoność, zmienna  $\Theta$  osiągnęłaby wartość  $\theta$ . Przeprowadzając poprzednie rozumowanie, moglibyśmy wówczas dojść do równości

$$(3) \quad \mathbb{P}\left(\Theta_n = \frac{k}{n} \mid \Theta = \theta\right) = \binom{n}{k} \sum_{K=k}^{N_i} \frac{(K)_k (N_i - K)_{n-k}}{(N_i)_n} \cdot \mathbb{P}\left(\Theta_{N_i} = \frac{K}{N_i} \mid \Theta = \theta\right).$$

dla dowolnej liczby naturalnej  $i$ . Okazuje się teraz, iż wraz ze wzrostem  $i$

Pod warunkiem  $\Theta = \theta$  zmienne  $\Theta_{N_i}$  zbiegają według rozkładu do stałej, a zatem zbieżność ta jest również według prawdopodobieństwa, co tłumaczy pierwszą kropkę.

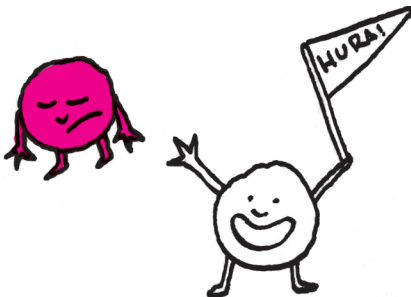
- $\mathbb{P}(\Theta_{N_i} = \frac{K}{N_i} \mid \Theta = \theta)$  „koncentruje się” wokół  $\frac{K}{N_i} = \theta$ , tzn. jeśli wybierzemy dowolnie małe otoczenie  $\theta$ , to suma wspomnianych prawdopodobieństw dla  $\frac{K}{N_i}$  spoza tego otoczenia będzie zbiegała do 0,
- różnica między  $\frac{(K)_k (N_i - K)_{n-k}}{(N_i)_n}$  a  $\left(\frac{K}{N_i}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N_i}\right)^{n-k}$  zbiega do 0. By się o tym przekonać, wystarczy sprawdzić, że oba ciągi są ograniczone, a ich ilorz zbiega do 1.

Powyższe uwagi miały za zadanie skłonić Czytelnika, by uwierzył, że dysponując odpowiednim zapasem cierpliwości i zręcznością w posługiwaniu się *epsilon*ami i *deltami*, można wykazać, że prawa strona równania (3) zbiega do  $\binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$  przy  $i \rightarrow \infty$ , co oczywiście pociąga za sobą  $\mathbb{P}(S_n = k \mid \Theta = \theta) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$ . Korzystając z „warunkowego” odpowiednika równości (2), dostajemy zatem

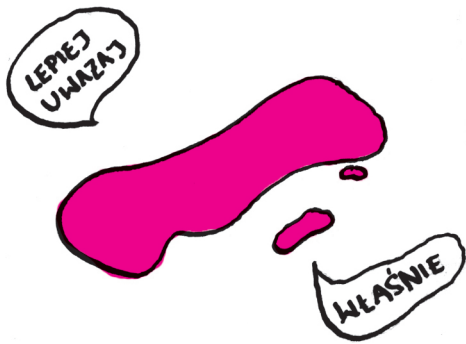
$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid \Theta = \theta) = \theta^{s_n} (1 - \theta)^{n-s_n} = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1 - \theta)^{1-x_i}.$$

Oznacza to dokładnie tyle, że przy ustalonej wartości zmiennej  $\Theta$  wymienne  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne oraz wszystkie mają ten sam rozkład o prawdopodobieństwie sukcesu wskazywanym przez  $\Theta$ . Innymi słowy, pracujący w kasynie analityk nie byłby w stanie, bazując wyłącznie na wynikach, odróżnić naszej gry od takiej, która polegałaby na niezależnych powtórzeniach tej samej rozgrywki z prawdopodobieństwem sukcesu określonym *a priori* przy użyciu zmiennej  $\Theta$ . A skoro tak, to na mocy równości (1) zmienna ta – określona wcześniej jako granica podciągu  $(\Theta_{N_i})_{i=1}^{\infty}$  – jest również granicą całego ciągu  $(\Theta_N)_{N=1}^{\infty}$ , której istnienia nie mogliśmy wcześniej założyć.

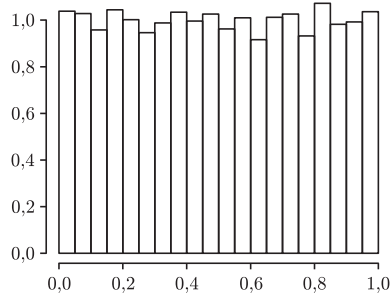
Czy jednak krupier byłby w stanie zaproponować nam grę, w której istnienie wspomnianej granicy byłoby nieoczywiste? Okazuje się, że tak, i przykład nie jest specjalnie skomplikowany. Wyobraźmy sobie, że postawiono przed nami urnę, w której znajdują się dwie kule – jedna biała, druga czarna. W każdej rundzie wyciągamy z urny jedną kulę, a następnie wkładamy ją z powrotem wraz z jeszcze jedną kulą tego samego koloru. Rundę uznajemy za wygraną, jeśli wyciągnęliśmy w niej kulę białą. Oczywiście, kolejne rozgrywki nie są powtarzaniem tego samego doświadczenia – każde wyciągnięcie białej kuli zwiększa prawdopodobieństwo sukcesu w kolejnej rundzie. Łatwo można jednak



W tym miejscu mowa o granicy „prawie na pewno”, o czym doskonale wiedzą Czytelnicy znający Mocne Prawo Wielkich Liczb.



Okazuje się, że jeśli na początku w urnie znajdowało się  $b$  kul białych i  $c$  czarnych, to zmienna  $\Theta$  ma rozkład beta o parametrach  $b$  i  $c$ . W szczególności dla  $b = c = 1$  (i tylko w tym przypadku) jest to rozkład jednostajny na  $[0, 1]$ , o czym przyjemnie jest się przekonać, przeprowadzając komputerową symulację opisanego procesu. Poniżej znajduje się histogram 10000 wartości średniej liczby sukcesów w 1000 początkowych rundach.



wykazać, że otrzymywane wyniki tworzą ciąg zmiennych wymiernych. Aby się o tym przekonać, wystarczy w tym przypadku stwierdzić, że zamiana ostatnich dwóch wyników w dowolnym ciągu początkowych rezultatów nie zmieni nam prawdopodobieństwa jego uzyskania pod warunkiem wcześniejszych wyników. Niech zatem  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$  będzie ciągiem  $n$  pierwszych wyników. Jeśli  $x_{n-1} = x_n$ , postulowana równość jest oczywista. Bez straty ogólności przyjmijmy zatem  $x_{n-1} = 1 = 1 - x_n$  i wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-2} = x_{n-2}) &= \\ &= \frac{1 + s_{n-2}}{n} \left( 1 - \frac{2 + s_{n-2}}{n + 1} \right) = \frac{(n - 1 - s_{n-1})(1 + s_{n-2})}{n(n + 1)} = \\ &= \left( 1 - \frac{1 + s_{n-2}}{n} \right) \frac{1 + s_{n-2}}{n + 1} = \\ &= \mathbb{P}(X_{n-1} = x_n, X_n = x_{n-1} \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-2} = x_{n-2}). \end{aligned}$$

Zgodnie z naszymi wcześniejszymi obserwacjami oznacza to ich niezależność i ten sam rozkład pod warunkiem znajomości (istniejącej) granicy  $\Theta = \lim \sum_1^n X_i/n$  – gdyby tajemniczy cudzoziemiec zdradził nam jej wartość  $\theta$ , to szansę na sukces w **każdej** kolejnej rundzie ocenialibyśmy właśnie na  $\theta$ . Wydaje się to dosyć zaskakujące, zwłaszcza jeśli przeprowadzimy podobne rozumowanie przy założeniu, że początkowo w urnie znajdowały się jedna kula biała i 100 czarnych oraz dostaliśmy informację  $\Theta = 0,999$  – choć serce drżałoby z trwogi, zimna kalkulacja nakazywałaby już w pierwszej rundzie stawiać na szali zwycięstwa wszystkie nasze oszczędności, dom, psa i ubranie, gdyż szansa na sukces i tak wynosiłaby 99,9%! Cały sekret tkwi w fakcie, że pozornie duże prawdopodobieństwo porażki w pierwszym losowaniu jest „pożerane” przez informację o tak dużej (lecz również tak mało prawdopodobnej) wartości  $\Theta$ . Przy naszych założeniach prawdopodobieństwo zdarzenia, że  $\Theta$  jest nie mniejsze od 0,999, jest rzędu...  $10^{-297}$ . Nie trzeba wielkiej przenikliwości umysłu, by stwierdzić, że w tej sytuacji nasz cudzoziemiec z pewnością nie jest żadnym Bułhakowskim Wolandem, a jedynie zwykłym hochsztaplerem. No, może nie z *pewnością*, a *prawdopodobnie*, więc może na wszelki wypadek uważajmy na plamy rozlanego oleju...

## Matematyka jest jedna: wielomiany mogą wszystko

Tomasz KOBOS\*

Jednomiany postaci  $f(x) = x^n$  są jednymi z pierwszych funkcji rzeczywistych, z którymi mamy do czynienia w naszym matematycznym życiu. Odrobina później poznajemy ich kombinacje o współczynnikach rzeczywistych, czyli tytułowe **wielomiany**. Jest więc to pojęcie elementarne, które powinno być doskonale znane każdemu maturzyście. Tym bardziej może zadziwiać, jak często wielomiany i ich podstawowe własności stanowią klucz do wielu trudnych problemów, które na pozór nic z wielomianami wspólnego nie mają. Zaprezentujemy to na przykładach z algebry, teorii liczb i kombinatoryki.

**Zadanie 1.** Niech  $a, b, c, d$  będą takimi liczbami rzeczywistymi, że

$$a + b + c + d > 0, \quad ab + ac + ad + bc + bd + cd > 0,$$

$$abc + abd + acd + bcd > 0, \quad abcd > 0.$$

Wykazać, że  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .

**Rozwiązanie.** Czytelnik doświadczony w dziedzinie rozwiązywania problemów olimpijskich z całą pewnością natychmiast skojarzy dany warunek ze wzorami Viète’a. Jest to istotnie dobry trop. Rozważmy bowiem wielomian  $P(x)$ , którego pierwiastkami są liczby  $a, b, c, d$ , czyli

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s.$$

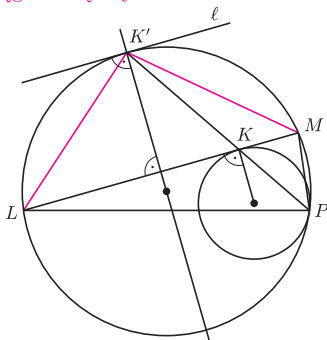
Z danych założeń i wspomnianych wzorów Viète’a wynika bezpośrednio, że  $p, q, r, s > 0$ . Jeżeli więc  $x \leq 0$ , to oczywiście  $P(x) > 0$ . Widzimy zatem, że żaden z pierwiastków  $P$  nie może być liczbą ujemną, co kończy rozwiązanie.

\*doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

$P(x) =$



**Rozwiązanie zadania M 1468.**  
Rozważmy jednokładność o środku w punkcie  $P$ , przeprowadzając mniejszy okrąg na większy.



Obrazem prostej  $LM$  jest prosta  $\ell$ , równoległa do  $LM$  i styczna do większego okręgu w pewnym punkcie  $K'$  (obrazie punktu  $K$ ). Punkty  $P, K, K'$  są współliniowe. Ponieważ  $\ell \parallel LM$ , punkty  $L$  i  $M$  są symetryczne względem średnicy większego okręgu przechodzącej przez  $K'$  i zachodzi równość  $K'M = K'L$ , więc  $\sphericalangle MPK' = \sphericalangle K'PL$ .

Twierdzenie o pierwiastku wymiernym głosi, że jeżeli liczba wymierna  $\frac{p}{q}$  (zapisana w postaci nieskracalnej) jest pierwiastkiem wielomianu

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  o współczynnikach całkowitych, to  $p \mid a_0$  oraz  $q \mid a_n$ . W szczególności, jeżeli współczynnik wiodący wielomianu  $P$  jest równy 1, to dowolny pierwiastek tego wielomianu, który jest liczbą wymierną, jest również liczbą całkowitą.



**Rozwiązanie zadania F 887.**  
Powietrze ma mniejszy współczynnik załamania niż woda, co oznacza, że nie zachodzi całkowite odbicie promieni padających na powierzchnię wody. Zatem w rozważanych warunkach rybka zawsze może zobaczyć wędkarza.

Powyższy przykład z całą pewnością nie był zaskakujący dla ekspertów, gdyż pomysł skorzystania z wielomianu pomocniczego nasuwał się praktycznie sam. Kolejne zadanie jest dużo bardziej intrygujące.

**Zadanie 2.** Udowodnić, że liczba

$$\sqrt{1007^2 + 1} + \sqrt{1008^2 + 1} + \dots + \sqrt{2014^2 + 1}$$

jest niewymierna.

**Rozwiązanie.** Oznaczmy sumę daną w zadaniu przez  $s$ . Udowodnimy najpierw, że liczba  $s$  nie jest całkowita. Zauważmy w tym celu, że dla dowolnej liczby całkowitej  $n \geq 1$  zachodzą nierówności

$$n < \sqrt{n^2 + 1} < n + \frac{1}{n+1}.$$

Pierwsza z nich jest oczywista, zaś druga po podniesieniu do kwadratu redukuje się do

$$1 < \frac{2n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2},$$

co jest prawdą, gdyż  $2n \geq n+1$ .

W szczególności dla dowolnego  $n \in \{1007, 1008, \dots, 2014\}$  prawdziwe są nierówności

$$n < \sqrt{n^2 + 1} < n + \frac{1}{1008}.$$

Wynika stąd, że suma  $s$  nie jest liczbą całkowitą, gdyż część ułamkowa każdego z jej 1008 składników jest mniejsza niż  $\frac{1}{1008}$ . Dowodzi to naszego stwierdzenia.

Może się wydawać, że do osiągnięcia celu jest jeszcze daleko. Liczba, która nie jest całkowita, nie musi przecież od razu być niewymierna. W tym jednak momencie można zacząć podejrzewać, jaką rolę odegrają własności wielomianów. W następnym kroku udowodnimy bowiem, że istnieje wielomian unormowany  $P$  o współczynnikach całkowitych, taki, że  $P(s) = 0$ . Stąd już natychmiast otrzymamy tezę zadania, gdyż z **twierdzenia o pierwiastku wymiernym** wynika, że każdy wymierny pierwiastek wielomianu  $P$  jest również całkowity. W szczególności, skoro  $s \notin \mathbb{Z}$ , to tym samym  $s \notin \mathbb{Q}$ .

Za pomocą indukcji po  $n$  wykażemy ogólniejsze stwierdzenie: dla dowolnych liczb całkowitych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  istnieje unormowany wielomian  $P$  o współczynnikach całkowitych, dla którego

$$P(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}) = 0.$$

Gdy  $n = 1$ , wystarczy przyjąć  $P(x) = x^2 - a_1$ . Załóżmy więc, że  $n \geq 2$  oraz istnieje wielomian unormowany  $P(x)$  o współczynnikach całkowitych, dla którego  $P(s - \sqrt{a_n}) = 0$ , gdzie  $s = \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}$ . Przyjmijmy, że stopień wielomianu  $P$  to  $r$  i że  $P$  zapisuje się w postaci  $P(x) = x^r + \sum_{i=0}^{r-1} c_i x^i$ . W szczególności

$$0 = P(s - \sqrt{a_n}) = (s - \sqrt{a_n})^r + \sum_{i=0}^{r-1} c_i (s - \sqrt{a_n})^i.$$

Po rozwinięciu wszystkich potęg ze wzoru dwumianowego Newtona otrzymujemy równanie postaci

$$s^r + Q(s) + \sqrt{a_n} R(s) = 0,$$

gdzie  $Q$  i  $R$  są wielomianami o współczynnikach całkowitych stopnia mniejszego niż  $r$ . Przenosząc składnik  $\sqrt{a_n} R(s)$  na drugą stronę i podnosząc obie strony równości do kwadratu, dostajemy

$$s^{2r} + 2s^r Q(s) + (Q(s))^2 = a_n (R(s))^2.$$

W szczególności liczba  $s$  jest pierwiastkiem unormowanego wielomianu

$$x^{2r} + 2x^r Q(x) + (Q(x))^2 - a_n (R(x))^2.$$

Kończy to zarówno dowód indukcyjny, jak i rozwiązanie zadania.

O trudności kolejnego zadania niech świadczy fakt, że na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej zostało ono rozwiązane jedynie przez 5 osób.

**Zadanie 3.** Rozważmy zbiór

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$

złożony z  $(n+1)^3 - 1$  punktów w przestrzeni. Wyznaczyć minimalną liczbę płaszczyzn, których suma mnogościowa zawiera zbiór  $S$ , ale nie zawiera punktu  $(0, 0, 0)$ .

**Rozwiązanie.** Zauważmy, że  $3n$  płaszczyzn o równaniach  $x = i, y = i, z = i$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$  spełnia żądany warunek. Wykażemy, że  $3n$  jest minimalną liczbą o tej własności.

Załóżmy więc, że suma mnogościowa pewnych  $N$  płaszczyzn danych równaniami

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \quad \text{gdzie } 1 \leq i \leq N,$$

pokrywa zbiór  $S$ , ale nie zawiera punktu  $(0, 0, 0)$ . Rozważmy wielomian trzech zmiennych  $P(x, y, z)$  dany jako

$$P(x, y, z) = \prod_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i z + d_i).$$

Jest to wielomian łącznego stopnia  $N$ , który spełnia warunek  $P(x_0, y_0, z_0) = 0$  dla  $(x_0, y_0, z_0) \in S$  oraz  $P(0, 0, 0) \neq 0$ .

Za pomocą wielomianu  $P$  udało się nam przetłumaczyć kombinatoryczny warunek dotyczący płaszczyzn na język algebry. Dzięki temu możemy wykorzystać jej narzędzia, zapominając o kombinatorycznej naturze zadania.

Dla dowolnego wielomianu trzech zmiennych  $Q(x, y, z)$  okreśmy operację  $\Delta_x$  zdefiniowaną jako

$$\Delta_x Q(x, y, z) = Q(x+1, y, z) - Q(x, y, z).$$

W analogiczny sposób definiujemy operację  $\Delta_y$  oraz  $\Delta_z$ .

Za pomocą nietrudnego rachunku na współczynnikach sprawdzimy najpierw, że operacja  $\Delta_x$  zmniejsza łączny stopień wielomianu co najmniej o 1. Załóżmy bowiem, że stopień pewnego wielomianu  $Q(x, y, z)$  to  $k+l+m$ , przy czym w rozwinięciu  $Q$  pojawia się jednomian postaci  $x^k y^l z^m$ . Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, uzyskujemy

$$(x+1)^k y^l z^m - x^k y^l z^m = y^l z^m \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^i.$$

Otrzymaliśmy więc sumę jednomianów o łącznym stopniu nieprzekraczającym  $k+l+m-1$ . Stosując to samo rozumowanie do każdego jednomianu postaci  $x^p y^q z^r$ , który pojawia się w rozwinięciu  $Q$  i spełnia  $p+q+r = k+l+m$ , widzimy, że operacja  $\Delta_x$  redukuje wszystkie jednomiany o łącznym stopniu  $k+l+m$ . Potwierdza to nasze stwierdzenie.

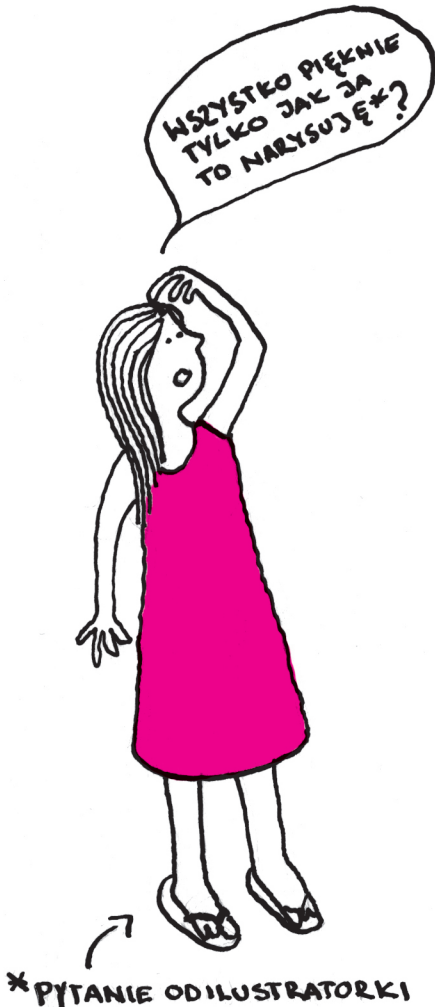
Zauważmy, że skoro wielomian  $P(x, y, z)$  zeruje się dla dowolnej trójki  $(x_0, y_0, z_0)$  spełniającej  $0 \leq y_0, z_0 \leq n$  oraz  $1 \leq x_0 \leq n$ , to  $\Delta_x P(x, y, z)$  zeruje się dla dowolnej trójki  $(x_0, y_0, z_0)$ , która spełnia  $0 \leq y_0, z_0 \leq n$  oraz  $1 \leq x_0 \leq n-1$ . Jednocześnie, mamy  $\Delta_x P(0, 0, 0) = P(1, 0, 0) - P(0, 0, 0) = -P(0, 0, 0) \neq 0$ .

Powtarzając operację  $\Delta_x$  aż  $(n-1)$ -krotnie, otrzymujemy wielomian  $\Delta_x^{n-1} P(x, y, z)$ , który zeruje się dla dowolnej trójki postaci  $(1, y_0, z_0)$ , gdzie  $0 \leq y_0, z_0 \leq n$ , oraz nie zeruje się dla  $(0, 0, 0)$ . Używając więc operacji  $\Delta_x$ , już ostatni raz dostajemy

$$\begin{aligned} \Delta_x^n P(0, 0, 0) &= \Delta_x^{n-1} P(1, 0, 0) - \Delta_x^{n-1} P(0, 0, 0) = \\ &= -\Delta_x^{n-1} P(0, 0, 0) \neq 0. \end{aligned}$$

Wielomian, który otrzymaliśmy z wielomianu  $P$  po  $n$ -krotnym zastosowaniu operacji  $\Delta_x$ , nie zeruje się więc w punkcie  $(0, 0, 0)$ , ale zeruje się dla dowolnego punktu postaci  $(0, y_0, z_0)$  gdzie  $0 \leq y_0, z_0 \leq n$  i co najmniej jedna z liczb  $y_0, z_0$  jest różna od zera.

Możemy zatem powtórzyć cały powyższy proces, tym razem względem zmiennej  $y$ , startując od wielomianu otrzymanego w ostatnim kroku. Wielomian  $\Delta_y^n \Delta_x^n P(x, y, z)$  zeruje się więc dla dowolnej trójki postaci  $(0, 0, z_0)$ , gdzie



**Rozwiązanie zadania F 888.**  
Kierunki biegu fali dźwiękowej w powietrzu i w wodzie spełniają związek

$$\sin \alpha = \frac{v_p}{v_w} \sin \beta,$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem padania na powierzchnię wody, zaś  $\beta$  – kątem załamania w wodzie. W skrajnym przypadku  $\sin \beta = 1$ , co daje

$$\sin \alpha = \frac{v_p}{v_w} = n.$$

Dla danego  $h$  maksymalna odległość, przy której dźwięk nie ulegnie całkowitemu odbiciu od powierzchni wody, to

$$h \operatorname{tg} \alpha = h \frac{n}{\sqrt{1-n^2}}.$$

Ale te wzory obowiązują przy założeniu, że dźwięk w ośrodku jednorodnym rozchodzi się prostoliniowo (tzn. że można pominąć efekty falowe, np. dyfrakcję) i są prawdziwe dla odległości znacznie większych niż długość fali. Ponieważ w powietrzu długość fali dźwiękowej mówiącego człowieka może dochodzić do kilkudziesięciu centymetrów, efektów związanych z falową naturą dźwięku nie można pominąć. Zatem rację ma Kasia.



$1 \leq z_0 \leq n$ , ale nie dla trójki  $(0, 0, 0)$ . Ostatecznie już, rozumując w ten sam sposób względem zmiennej  $z$ , dochodzimy do wniosku, że wielomian  $\Delta_z^n \Delta_y^n \Delta_x^n P(x, y, z)$  nie zeruje się w punkcie  $(0, 0, 0)$ .

Nie jest to zatem wielomian zerowy. Wcześniej udowodniliśmy jednak, że dowolna z operacji  $\Delta$  redukuje łączny stopień wielomianu co najmniej o 1. Stopień wielomianu  $\Delta_z^n \Delta_y^n \Delta_x^n P(x, y, z)$  nie przekracza zatem  $N - 3n$ . Stąd  $N \geq 3n$  i rozwiązanie zadania jest zakończone.

Kolejny problem jest jednym z najbardziej zadziwiających, które autor artykułu napotkał w życiu. Aby w pełni go docenić, zdecydowanie należy się z nim wypróbować wcześniej na własną rękę – do czego bardzo zachęcamy!

**Zadanie 4.** Niech  $a_1, a_2, \dots, a_n$  oraz  $b_1, b_2, \dots, b_n$  będą dwoma różnymi (czyli różniącymi się nie tylko porządkiem) zestawami liczb całkowitych dodatnich. Udowodnić, że jeżeli zestaw liczb postaci  $a_i + a_j$ , gdzie  $1 \leq i < j \leq n$  pokrywa się z zestawem  $b_i + b_j$ , dla  $1 \leq i < j \leq n$ , to  $n$  jest potęgą liczby 2.

**Rozwiązanie.** Zadanie może wydawać się całkiem tajemnicze. W naturalny sposób nasuwają się dwa pytania: dlaczego akurat potęga liczby 2 i gdzie tu znaleźć wielomiany? Jako rozgrzewkę możemy zaproponować Czytelnikowi proste ćwiczenie: dla dowolnej potęgi liczby 2 skonstruować różne zestawy liczb o żądanej własności.

Odpowiedzmy zatem na drugie. Rozważmy bowiem wielomiany

$$f(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_n} \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + \dots + x^{b_n}.$$

Kluczowa obserwacja polega na połączeniu danego warunku z operacją brania kwadratu wielomianu. Zauważmy bowiem, że

$$\begin{aligned} (f(x))^2 - f(x^2) &= \sum_{i=1}^n x^{2a_i} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x^{a_i + a_j} - \sum_{i=1}^n x^{2a_i} = \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x^{a_i + a_j} = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x^{b_i + b_j} = (g(x))^2 - g(x^2). \end{aligned}$$

Przypatrzmy się teraz wielomianowi  $f(x) - g(x)$ . Nie jest to wielomian zerowy oraz  $f(1) - g(1) = n - n = 0$ , a więc liczba 1 jest jego pierwiastkiem. Oznaczmy przez  $k$  krotność owego pierwiastka, czyli  $f(x) - g(x) = (x - 1)^k h(x)$  dla pewnego wielomianu  $h$ , takiego, że  $h(1) \neq 0$ . Wówczas

$$f(x) + g(x) = \frac{f(x^2) - g(x^2)}{f(x) - g(x)} = \frac{(x^2 - 1)^k Q(x^2)}{(x - 1)^k Q(x)} = (x + 1)^k \frac{Q(x^2)}{Q(x)}.$$

Podstawiając  $x = 1$  w powyższej równości, dostajemy

$$2n = f(1) + g(1) = 2^k,$$

skąd  $n = 2^{k-1}$ .

Przykłady zaprezentowane w artykule stanowią jedynie absolutny wierzchołek góry lodowej, którą stanowią możliwe zastosowania wielomianów w różnych dziedzinach matematyki. Tradycyjnie już oferujemy dwa zadania do samodzielnego rozwiązania. Mamy nadzieję, że pomogą one Czytelnikowi skorzystać z wielomianów w jeszcze wielu kolejnych problemach.

**Zadanie 5.** Liczby rzeczywiste  $x, y, z$  spełniają warunki

$$x + y + z = 3, \quad xy + yz + zx = -9.$$

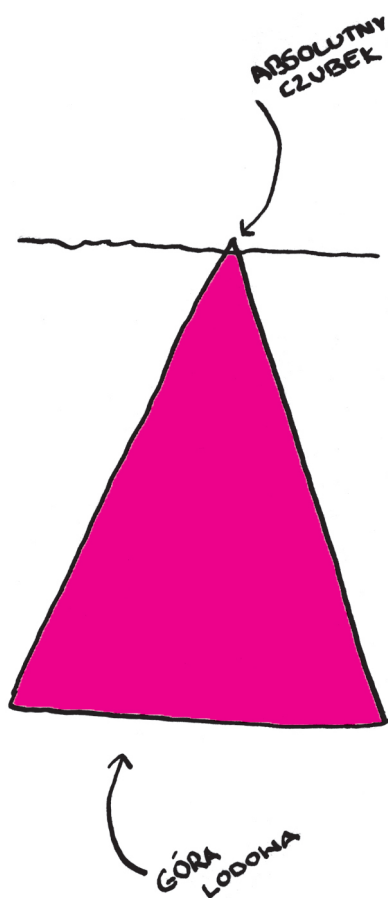
Udowodnić, że  $-27 \leq xyz \leq 5$ .

**Podpowiedź.** Rozważ pochodną wielomianu, którego pierwiastkami są liczby  $x, y, z$ .

**Zadanie 6.** Dane jest  $2n$  parami różnych liczb rzeczywistych

$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  oraz tablica  $n \times n$ . W pole leżące w  $i$ -tym wierszu i w  $j$ -tej kolumnie wpisano liczbę  $a_i + b_j$  dla  $1 \leq i, j \leq n$ . Udowodnić, że jeżeli iloczyn liczb we wszystkich kolumnach są równe, to również iloczyny liczb we wszystkich wierszach są równe.

**Podpowiedź.** Rozważ wielomian  $P(x) = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) - c$ , gdzie  $c$  jest wartością wspólną iloczynów liczb w kolumnach.



## Zagadki o wszystkim

Na początku wyglądało to nieciekawie. Tata sprzątnął ze stolika w moim pokoju wystawę moich konstrukcji z klocków lego i położył tam stertę książek. Nie mam nic przeciwko książkom, ale większość z tych, które tata przynosi do domu, nie nadaje się do niczego. Przynajmniej dla mnie.

O dziwo, te książki dają się czytać i są całkiem ciekawe. Jest w nich dużo o liczbach, wybuchach, trujących substancjach, groźnych zwierzętach i dziwnych dźwiękach. Pomiędzy rzeczami ciekawymi jest też trochę takich, które są chyba za trudne. Tata chce mi je (oraz wszystkie słowa mające więcej niż trzy sylaby) od razu tłumaczyć, ale ja wolę przeskoczyć do następnych, które lubię i rozumiem. Tata złości się też na pomyłki w tekstach, ale chyba trudno jest opisać jakąś złożoną sprawę w dwudziestu liniijkach bez uproszczeń. Mama mówi, że wybór zagadek ją frasuje (a może mówiła „frapuje”?), ale mnie się podoba, zwłaszcza te o wybuchach. I wreszcie wiem, jakie napięcie dadzą połączone w szereg węgorz elektryczny i dwie drętwy. Babcia nieco się natomiast skrzywiła, kiedy pytałem, co znaczy słowo „kobieciarz”, bo podobno Kazimierz Wielki nim był – a przecież uczyła w szkole i powinna to wiedzieć.

Nie wiem, czy dobrze o tym pisać, bo to miał być sekret, ale mówiłem tacie, że poproszę dziadka o chloran, który jest mi potrzebny do pokazu ryczenia misiowych żelków. Tata zrobił dziwną minę, jakby zobaczył w lesie dzika, więc chyba będę musiał trochę odczekać przed rozmową z dziadkiem. Tymczasem poczytam jeszcze trochę te książki, żeby zrozumieć więcej rzeczy – mam przecież dopiero sześć i pół roku, a wszyscy mi mówią, że muszę się rozwijać.

*Tymoteusz TURZYŃSKI*

(notował i przygotował do druku K.T.)

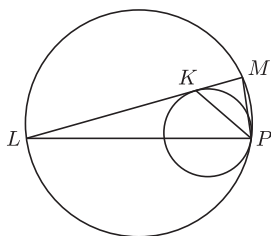
### Seria „Poznajemy” Wydawnictwa Demart

- Krzysztof Ciesielski, Zdzisław Pogoda, *Zagadki matematyczne*
- Joanna Olczyk, *Zagadki muzyczne*
- Krzysztof Szujecki, *Zagadki sportowe*
- Iwona Paleska, Agnieszka Siporska, *Zagadki chemiczne*
- Jerzy Kunicki, *Zagadki fizyczne*
- Filip Basaj, Michał Lis, *Zagadki geograficzne*
- Beata Jankowiak-Konik, Jacek Konik, *Zagadki historyczne*
- Jakub Paweł Cygan, *Zagadki przyrodnicze*



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



**M 1468.** Dwa okręgi o różnych promieniach są styczne wewnętrznie w punkcie  $P$ . Poprowadzono styczną do mniejszego z nich w pewnym punkcie  $K$ , przecinającą większy okrąg w punktach  $L$  i  $M$ . Udowodnić, że  $PK$  jest dwusieczną kąta  $LPM$ .  
Rozwiązanie na str. 14

**M 1469.** Udowodnić, że dla dodatnich liczb  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ , spełniających  $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$ , prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Rozwiązanie na str. 10

**M 1470.** Rozstrzygnąć, czy można tak zaplanować 30 połączeń telefonicznych (każde pomiędzy jednym z 10 chłopców i jedną z 10 dziewczyn) w taki sposób, aby żadna para osób nie rozmawiała ze sobą dwukrotnie oraz aby w każdej czwórce złożonej z dwóch chłopców i dwóch dziewczyn istniały dwie osoby różnej płci, które ze sobą nie rozmawiały.  
Rozwiązanie na str. 11

*Poniższe zadania pochodzą z I etapu LXIV Olimpiady Fizycznej. Więcej zadań z rozwiązaniami na [www.kgof.edu.pl](http://www.kgof.edu.pl).*

**F 887.** W jakiej odległości od brzegu jeziora powinien znajdować się wędkarz o wysokości  $h$ , aby pływająca w tym jeziorze rybka nie mogła go zobaczyć? Powierzchnia wody jest idealnie płaska. Pomiń krzywiznę Ziemi.  
Rozwiązanie na str. 14

**F 888.** Leszek twierdzi, że jeśli wędkarz znajduje się w odległości od brzegu nieco większej niż  $h \frac{n}{\sqrt{1-n^2}}$ , gdzie  $h$  jest wysokością ust wędkarza ponad poziomem wody,

a  $n = \frac{v_p}{v_w}$  ( $v_p \approx 340$  m/s – prędkość dźwięku w powietrzu,  $v_w \approx 1500$  m/s

– prędkość dźwięku w wodzie) to nawet mała rybka pływająca tuż przy brzegu, tuż pod powierzchnią wody nie słyszy, co on mówi. Kasia natomiast twierdzi, że tak by było, gdyby można było pominąć falowe własności dźwięku, a w tym przypadku nie jest to słuszne. Kto ma rację?

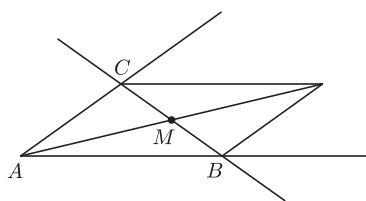
Rozwiązanie na str. 15



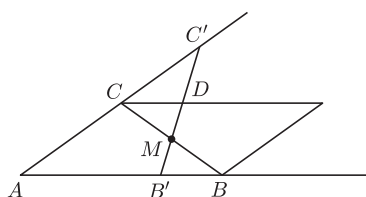
# Zabawy w kącie

Jarosław GÓRNICKI

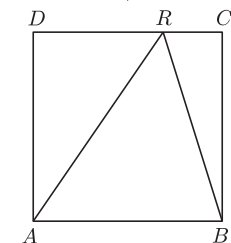
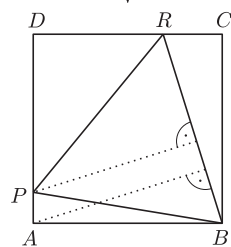
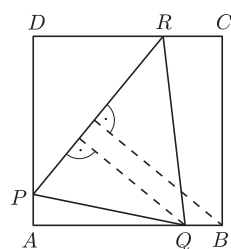
Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska



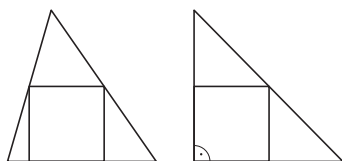
Rys. 1



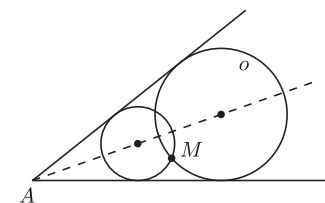
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

W każdym zjawisku przyrody można dostrzec dążenie do osiągnięcia jakiegoś maksimum lub minimum. Umiejętność wyznaczania wartości ekstremalnych nie powinna więc być niczym niezwykłym. Oto zadanie z niespodzianką, które proponuję rozwiązać samodzielnie (wrócimy do niego na końcu artykułu):

**Zadanie 1.** Przez dany punkt leżący we wnętrzu kąta poprowadzić prostą o najkrótszym odcinku między jego ramionami.

Tymczasem rozważmy kilka innych ciekawych problemów.

**Zadanie 2.** Przez dany punkt  $M$  leżący we wnętrzu kąta o wierzchołku  $A$  poprowadzić prostą, która, przecinając ramiona kąta w punktach  $B$  i  $C$ , wyznacza trójkąt  $ABC$  o najmniejszym polu.

**Rozwiązanie.** Wykreślamy równoległobok, którego dwa boki leżą na ramionach kąta o wierzchołku  $A$ , a jego przekątne przecinają się w punkcie  $M$ . Przekątna tego równoległoboku, która przecina ramiona kąta (w punktach  $B$  i  $C$ , rys. 1), wyznacza trójkąt  $ABC$  o najmniejszym polu.

Jeśli  $B'C' \neq BC$  jest inną prostą przechodzącą przez punkt  $M$  (na przykład taką, że  $|AB'| < |AB|$ , rys. 2), to, korzystając z przystawiania trójkątów  $B'BM$  i  $DCM$ , mamy:

$$\begin{aligned} |\triangle AB'C'| &= |AB'MC| + |\triangle CMD| + |\triangle CDC'| > \\ &> |AB'MC| + |\triangle CMD| = |AB'MC| + |\triangle B'MB| = |\triangle ABC|. \end{aligned}$$

**Zadanie 3.** Wykazać, że maksymalne pole trójkąta zawartego w kwadracie jednostkowym jest równe  $\frac{1}{2}$ , a minimalne pole trójkąta zawierającego kwadrat jednostkowy jest równe 2.

**Rozwiązanie.** Pierwsza część jest łatwa. Weźmy kwadrat jednostkowy  $ABCD$  i w nim trójkąt  $PQR$ , którego wierzchołki leżą na różnych bokach kwadratu tak, że  $P, Q, R \notin \{A, B, C, D\}$ . Wówczas trójkąt  $PQR$  łatwo zastąpić trójkątem o większej wysokości, czyli większym polu (rys. 3):

$$|\triangle PQR| < |\triangle PBR| < |\triangle ABR| = \frac{1}{2}.$$

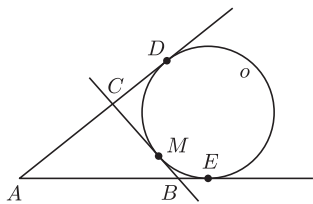
Druga część jest konsekwencją zadania 2. Jeśli trójkąt ma najmniejsze pole wśród trójkątów zawierających kwadrat (jednostkowy), to środki boków tego trójkąta muszą należeć do boków kwadratu. Oznacza to, że jeden bok kwadratu musi należeć do boku trójkąta, a przeciwległy bok kwadratu łączy środki boków trójkąta (rys. 4). Nietypowe w tym zadaniu jest to, że istnieje wiele różnych realizacji warunków ekstremalnych.

**Zadanie 4.** Przez dany punkt  $M$  leżący we wnętrzu kąta o wierzchołku  $A$  poprowadzić prostą, która, przecinając ramiona kąta w punktach  $B$  i  $C$ , wyznacza trójkąt  $ABC$  o najmniejszym obwodzie.

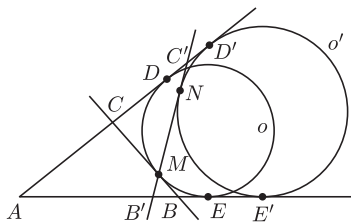
**Rozwiązanie.** W kąt o wierzchołku  $A$  wpisujemy dwa okręgi przechodzące przez punkt  $M$  (rys. 5). Do większego z nich, powiedzmy  $o$ , w punkcie  $M$  wyznaczamy styczną, która przecina ramiona kąta w punktach  $B$  i  $C$  (rys. 6). Tak utworzony trójkąt  $ABC$  spełnia warunki zadania i ma najmniejszy obwód równy  $|AD| + |AE|$ , gdzie  $D$  i  $E$  to punkty styczności okręgu  $o$  z ramionami kąta (jest tak, bo  $|MC| = |CD|$  i  $|MB| = |BE|$ ).

Jeśli  $B'C' \neq BC$  jest inną prostą zawierającą punkt  $M$ , to okrąg  $o'$  dopisany do trójkąta  $AB'C'$  jest styczny do ramion kąta w punktach  $D'$  i  $E'$  oraz do odcinka  $B'C'$  w punkcie  $N \neq M$  (rys. 7). Ponieważ punkt  $M$  leży na zewnątrz okręgu dopisanego  $o'$ , więc okrąg  $o'$  ma większy promień niż okrąg  $o$  i obwód trójkąta  $AB'C'$  jest równy  $|AD'| + |AE'| > |AD| + |AE|$ .

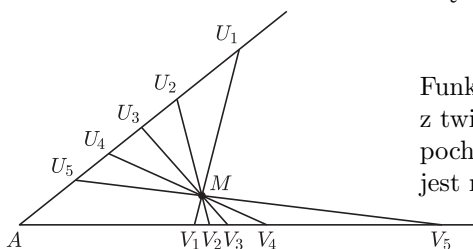
Odrobina geometrii pozwoliła nam sprawnie rozwiązać trzy zadania. Kto próbował rozwiązać zadanie 1, ten wie, że jest ono trudniejsze.



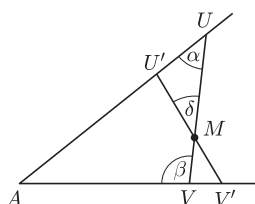
Rys. 6



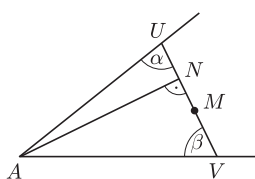
Rys. 7



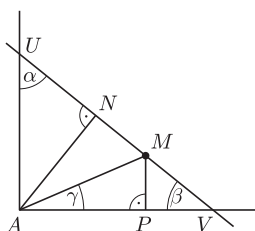
Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

**Rozwiązanie zadania 1.** Rozpocznijmy od wykazania, że istnieje najkrótszy odcinek realizujący warunki zadania. Niech  $M$  będzie danym punktem we wnętrzu kąta o wierzchołku  $A$ . Odcinek, którego końce ślizgają się po ramionach kąta od położenia  $U_1V_1$  przez  $U_2V_2, U_3V_3$ , itd. do położenia  $U_5V_5$  (rys. 8) i przechodzący przez punkt  $M$ , zmienia swoją długość w sposób ciągły. Ponieważ długość ta najpierw maleje, a potem wzrasta, więc wśród rozpatrywanych odcinków istnieje taki odcinek  $UV$ , którego długość jest najmniejsza.

Spróbujmy ten odcinek scharakteryzować. Niech  $U'V' \neq UV$  będzie innym odcinkiem zawierającym punkt  $M$  i łączącym ramiona kąta. Niech  $|\sphericalangle AUM| = \alpha$ ,  $|\sphericalangle MVA| = \beta$ ,  $0 < \alpha + \beta < \pi$ , a mniejszy z kątów o wierzchołku  $M$  (między odcinkami  $UV, U'V'$ ) ma miarę  $\delta$  (rys. 9). Dla małych kątów  $\delta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  rozważmy funkcję

$$f(\delta) = |U'V'| = |U'M| + |MV'|.$$

Z twierdzenia sinusów, zastosowanego do trójkątów  $UMU'$  i  $VMV'$ , mamy

$$\frac{|MU'|}{\sin \alpha} = \frac{|MU|}{\sin(\pi - (\alpha + \delta))}, \quad \frac{|MV'|}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{|MV|}{\sin(\pi - \delta - (\pi - \beta))},$$

więc

$$f(\delta) = |MU| \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \delta)} + |MV| \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \delta)}.$$

Funkcja ta jest różniczkowalna, osiąga minimum dla  $\delta = 0$ , więc zgodnie z twierdzeniem Fermata spełnia warunek  $f'(0) = 0$ , który po obliczeniu pochodnej i niezbyt skomplikowanych przekształceniach trygonometrycznych jest równoważny warunkowi

$$\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{\text{ctg } \beta}{\text{ctg } \alpha}.$$

Jaki jest sens geometryczny tego warunku? Niech  $N$  będzie rzutem (prostopadłym) wierzchołka  $A$  na odcinek  $UV$  (rys. 10). Wyznaczając  $\text{ctg } \beta$  i  $\text{ctg } \alpha$  z trójkątów prostokątnych  $ANU$  i  $ANV$ , łatwo stwierdzamy, że  $\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{\text{ctg } \beta}{\text{ctg } \alpha} = \frac{|NV|}{|NU|}$ . Oznacza to, że  $|MU| = |NV|$  i  $|MV| = |NU|$ , czyli punkt  $N$  jest symetryczny do punktu  $M$  względem środka odcinka  $UV$ .

Niespodzianką (trudnością) w tym zadaniu jest to, że – poza szczególnymi przypadkami – odcinka  $UV$  nie można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki. Dlaczego tak jest? Niech kąt przy wierzchołku  $A$  będzie prosty. Wtedy, przy oznaczeniach takich jak na rysunku 11, jeśli  $UV$  jest najkrótszym odcinkiem łączącym ramiona kąta i przechodzącym przez punkt  $M$ , to

$$\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{\text{ctg } \beta}{\text{ctg } \alpha} = \frac{\text{ctg } \beta}{\text{ctg}(\frac{\pi}{2} - \beta)} = \text{ctg}^2 \beta.$$

Z twierdzenia Talesa  $\frac{|MU|}{|PA|} = \frac{|MV|}{|PV|}$ , więc  $\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{|PA|}{|PV|}$ . Ponieważ  $\frac{|PA|}{|MP|} = \text{ctg } \gamma$ ,  $\frac{|PV|}{|MP|} = \text{ctg } \beta$ , więc

$$\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{\text{ctg } \gamma}{\text{ctg } \beta},$$

gdzie  $\gamma$  jest miarą kąta  $MAP$ . W konsekwencji  $\frac{\text{ctg } \gamma}{\text{ctg } \beta} = \text{ctg}^2 \beta$ , więc  $\text{ctg } \beta = \sqrt[3]{\text{ctg } \gamma}$ . Gdyby istniała konstrukcja najkrótszego odcinka  $UV$ , to, biorąc  $|AP| = 2$  i  $|MP| = 1$ , otrzymamy odcinek  $|PV| = \sqrt[3]{2}$ , który umożliwiłby wykonanie zadania podwojenia sześcianu jednostkowego. Wystarczy teraz wiedzieć (!), że jest to niemożliwe do zrealizowania za pomocą cyrkla i linijki (patrz np. M. Bryński, L. Włodarski, *Konstrukcje geometryczne*, Biblioteczka Deltę 1, WSiP, Warszawa 1979).

Puentą niech będą słowa Adama Mickiewicza

#### PRAKTYKA

„Na co będą potrzebne, pytało pacholę –  
Trójkąty, czworoboki, koła, parabole?”

„Że potrzebne – rzekł mędrzec – musisz teraz wierzyć;  
Na co potrzebne, zgadniesz, gdy zaczniesz świat mierzyć.”



## LXVI Olimpiada Matematyczna

W LXVI Olimpiadzie Matematycznej uczestniczyło 895 uczniów, więc aż o 272 osoby mniej niż rok wcześniej, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 409 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 126 uczniów. Wiele osób, w tym niżej podpisany, uznało, że zadania domowe były za trudne i nie zachęcały uczniów spoza szkół o dużych tradycjach olimpijskich (a raczej uczniów nauczycieli, którzy uczą matematyki, a nie tylko przygotowują do zdania matury) do startowania w tych zawodach.

Niektóre okręgi obniżyły zwyczajowe progi dopuszczenia do zawodów drugiego stopnia, ale i tak zakwalifikowano do nich o 98 osób mniej niż rok wcześniej. Komisja zadaniowa OM starała się wziąć pod uwagę te czynniki. Jako członek tego gremium uznaję, że zadania na zawody drugiego i trzeciego stopnia nie były za trudne.

Do finału dopuściliśmy tych uczniów, którzy uzyskali co najmniej 19 punktów, co oznacza rozwiązanie 3,5 zadania (np.  $2 \cdot 6 + 5 + 2$ ). Obniżenie progu do 18 punktów oznaczałoby dopuszczenie dodatkowych 22 osób do finału.

Zadania finałowe dobrze rozróżniły czołówkę: tym razem ustalając składy reprezentacji Polski na Olimpiadę Międzynarodową i inne zawody, nie musieliśmy korzystać z wyników zawodów okręgowych. Tylko 9 finalistów (około 7%) nie rozwiązało żadnego zadania (w drugim stopniu było to 30 osób (około 7,4%)).

Liczby zadań ocenionych na 6 lub 5 punktów w drugim stopniu: pierwsze – 330, drugie – 112, trzecie – 154, czwarte – 217, piąte – 141 i szóste – 30.

Liczby zadań finałowych ocenionych na 6 lub 5 punktów: pierwsze – 100, drugie – 33, trzecie – 21, czwarte – 50, piąte – 19, a szóste – 26.

**Najtrudniejsze z zadań finałowych** było zadanie piąte, z planimetrii, choć spodziewaliśmy się, że będzie nim zadanie trzecie, z kombinatoryki. Co więcej, w czasie omawiania rozwiązań tuż po zawodach dwóch byłych olimpijczyków przedstawiło swe rozwiązania tego zadania wykorzystujące wiele twierdzeń, często nieznanymi większości słuchających.

Oto treść zadania: *Dowieść, że przekątne wypukłego czworokąta są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy wewnątrz tego czworokąta znajduje się punkt, którego rzuty prostopadłe na boki czworokąta są wierzchołkami prostokąta.*

Podam jego „antygeometryczne” rozwiązanie. Drobne luki Czytelnicy wypełnią, jeśli zechcą, sami.

Załóżmy, że rzuty punktu  $P$  na boki czworokąta  $ABCD$  tworzą prostokąt i oberzmy układ współrzędnych tak, by  $P = (0, 0)$  był jego początkiem, a osie były równoległe, odpowiednio, do boków prostokąta. Niech rzutem  $P$  na  $AB$  będzie punkt  $Q = (a, b)$ , na bok  $BC$  – punkt  $R = (c, b)$ , na bok  $CD$  – punkt  $S = (c, d)$  a na bok  $DA$  – punkt  $T = (a, d)$ , przy czym  $a, b > 0 > c, d$ . Prosta  $AB$  jest prostopadła do wektora  $(a, b)$ , więc ma równanie  $ax + by = a^2 + b^2$ . Podobnie równaniami prostych  $BC$ ,  $CD$  i  $DA$  są odpowiednio  $cx + by = c^2 + b^2$ ,  $cx + dy = c^2 + d^2$  i  $ax + dy = a^2 + d^2$ .

Proste  $ax + by = a^2 + b^2$  i  $cx + by = c^2 + b^2$  przecinają się w punkcie  $(a + c, \frac{b^2 - ac}{b})$ , więc  $B = (a + c, \frac{b^2 - ac}{b})$ . Podobnie  $C = (\frac{c^2 - bd}{c}, b + d)$ ,  $D = (a + c, \frac{d^2 - ac}{d})$  i  $A = (\frac{a^2 - bd}{a}, b + d)$ . Prosta  $AC$  jest równoległa do osi  $OX$ , a prosta  $BD$  – do osi  $OY$ , więc przekątne prostokąta  $ABCD$  są prostopadłe.

Czysto geometryczne rozwiązanie można obejrzeć na stronie [http://www.om.edu.pl/sites/default/files/zadania/om/om66\\_3r.pdf](http://www.om.edu.pl/sites/default/files/zadania/om/om66_3r.pdf).

Jedyną trudnością w tym rozwiązaniu jest wybranie „dobrego” układu współrzędnych.

Z kolei gdy czworokąt  $ABCD$  ma prostopadłe przekątne, możemy umieścić go tak, by miał wierzchołki na osiach:  $A = (a, 0)$ ,  $B = (0, b)$ ,  $C = (c, 0)$  i  $D = (0, d)$ . Z już udowodnionego wiemy, że jeśli rzuty pewnego punktu tworzą prostokąt, ma on boki równoległe do osi.

Równaniem prostej  $AB$  jest  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , bo spełniają je współrzędne punktów  $A$  i  $B$ . Analogicznie równaniami prostych  $BC$ ,  $CD$  i  $DA$  są odpowiednio  $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$ ,  $\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1$  i  $\frac{x}{a} + \frac{y}{d} = 1$ . Niech  $Q_t = (t, b(1 - \frac{t}{a}))$ ,  $R_t = (\frac{ct}{a}, b(1 - \frac{t}{a}))$ ,  $S_t = (\frac{ct}{a}, d(1 - \frac{t}{a}))$ ,  $T_t = (t, d(1 - \frac{t}{a}))$  – wyliczone zostały kolejno współrzędne tych punktów w zależności od pierwszej współrzędnej punktu  $Q_t$  oznaczonej literą  $t$  tak, by punkt  $Q_t$  leżał na prostej  $AB$ , punkt  $R_t$  – na  $BC$ , punkt  $S_t$  – na  $CD$ , punkt  $T_t$  – na  $DA$ . Znajdziemy taki punkt  $P_d = (p, q)$ , że odcinek  $P_d Q_t$  będzie prostopadły do prostej  $AB$ , a odcinek  $P_d R_t$  – prostopadły do prostej  $BC$ . Spełnione mają być równości  $(p - t) \cdot \frac{1}{b} - (q - b + \frac{bt}{a}) \cdot \frac{1}{a} = 0$  oraz  $(p - \frac{ct}{a}) \cdot \frac{1}{b} - (q - b + \frac{bt}{a}) \cdot \frac{1}{c} = 0$ . Wynika z nich, że  $p = t \frac{c+a}{a}$  i  $q = b + t \frac{ac - b^2}{ab}$ . W taki sam sposób znajdujemy taki punkt  $P_g = (\tilde{p}, \tilde{q})$ , że  $P_g T_t \perp AD$  i  $P_g S_t \perp CD$ :  $\tilde{p} = t \frac{c+a}{a} = p$  i  $\tilde{q} = d + t \frac{ac - d^2}{ad}$ . Obliczymy  $t$  z równania  $q = \tilde{q}$ :

$$d - b = t \frac{(ac - b^2)d - (ac - d^2)b}{abd} = t \frac{(ac + bd)(d - b)}{abd},$$

zatem  $t = \frac{abd}{ac + bd}$ . Dla tego  $t$  otrzymujemy

$$P := P_d = P_g = \left( \frac{bd(a+c)}{ac+bd}, \frac{ac(b+d)}{ac+bd} \right).$$

Rzutami punktu  $P$  na proste  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  i  $DA$  są punkty  $Q := Q_t = (\frac{abd}{ac+bd}, \frac{abc}{ac+bd})$ ,  $R := R_t = (\frac{bcd}{ac+bd}, \frac{abc}{ac+bd})$ ,  $S := S_t = (\frac{bcd}{ac+bd}, \frac{acd}{ac+bd})$ ,  $T := T_t = (\frac{abd}{ac+bd}, \frac{acd}{ac+bd})$ .

## Wyniki dopasowania

mogą być interesujące. Znacząca część publikacji naukowych opiera się na dopasowaniu modelu teoretycznego do danych doświadczalnych. Jest tak w poniższych przykładach.

### Podwójnie powabne pentakwarki o pięknym pochodzeniu

Pentakwarki to poszukiwane od pół wieku stany związane pięciu kwarków. Kilka razy wydawało się, że zostały odkryte, ale zawsze doniesienia te były weryfikowane negatywnie. Dla porządku przypomnijmy, że, standardowo, hadrony (cząstki interpretowane jako stany związane kwarków) zawierają albo parę kwark-antykwarik – tzw. mezony, albo trójkę (anty)kwarków – tzw. (anty)bariony (najlżejszym barionem jest proton).

Układem doświadczalnym był detektor LHCb. Jak sama nazwa wskazuje (i jak wielokrotnie pisaliśmy), służy on do uprawiania fizyki kwarku  $b$  (jak *beauty*, jest to najmasywniejszy kwark tworzący układy związane). Tym razem jednak najlżejszy piękny barion  $\Lambda_b$  był tylko stanem pośrednim (duża próbka tych cząstek może być obecnie wytworzona tylko w LHC).

Jednym z kanałów jego rozpadu jest  $\Lambda_b \rightarrow J/\psi + K^- + p$  (gdzie  $J/\psi$  to układ związany  $c\bar{c}$  – kwarku i antykwarku powabnego). Zazwyczaj rozpad ten jest dwuciałowy, bo kaon ( $K^-$ ) i proton tworzą stan rezonansowy  $\Lambda^*$ . Okazało się jednak, że uwzględnienie wszystkich znanych wzbudzeń barionu  $\Lambda$  (najlżejszego barionu zawierającego kwark dziwny  $s$ ) nie wystarcza do opisu obserwowanego wielowymiarowego rozkładu kinematycznego produktów rozpadu  $\Lambda_b$ . Udaje się to natomiast zrobić [1] po dopuszczeniu możliwości, że rozpad zachodzi również poprzez kanał  $P_c^+ K^-$ , gdzie  $P_c^+$  jest właśnie pentakwarkiem o składzie kwarkowym  $\{c, \bar{c}, u, u, d\}$ .

Odkryto w ten sposób od razu dwa stany (podwójnie) powabnego (zawierającego kwark  $c$ ) pentakwarku (na bardzo wysokim poziomie istotności statystycznej). Wyznaczono ich masy, szerokości (są to stany rezonansowe, czyli natychmiast się rozpadające) i liczby kwantowe.

### Czy ciemna materia oddziałuje?

Tak, grawitacyjnie, o ile oczywiście istnieje. Praca [2] nie tylko dostarcza kolejnego na to dowodu, ale również pokazuje, jak można by było określić jej siłę samooddziaływania innego niż grawitacyjne.

Pomysł jest w zasadzie ten sam, co dekadę temu w przypadku gromady (zderzających się gromad) galaktyk *Bullet* (*Delta* 7/2001). Świecąca materia w gromadach galaktyk to przede wszystkim gorący gaz, świetnie widoczny w zakresie rentgenowskim. Gwiazdy w galaktykach to tylko kilkuprocentowy dodatek. Natomiast większość masy powinna przypadać na ciemną materię, oddziałującą głównie grawitacyjnie.

Zderzenie gromad galaktyk powinno wpłynąć wyłącznie na rozkład gazu, bo on samooddziaływa elektromagnetycznie, a galaktyki i gwiazdy w galaktykach są w tak dużych odległościach, że zderzenia praktycznie nie zachodzą.

Podobnie rozkłady ciemnej materii nie powinny ulec zaburzeniu, ze względu na słabość oddziaływania.

Widać to „jak na dłoni” właśnie w gromadzie *Bullet*, ale obrazy niektórych układów zderzających się gromad galaktyk są mniej oczywiste. Jest to częściowo związane z różnymi fazami zderzeń oraz różnymi kątami widzenia.

Autorzy pracy [2] postanowili przebadać wszystkie takie układy, pomierzone tak w zakresie rentgenowskim, jak w optycznym. W tym drugim przypadku chodzi nie tylko o rozkład galaktyk, lecz, przede wszystkim, o wykorzystanie soczewkowania grawitacyjnego do określenia rozkładu masy. Po odrzuceniu tych z jednodomałymi rozkładami gazu pozostało 30 zderzających się układów zawierających łącznie 72 gromady galaktyk.

Najpierw odrzucono hipotezę całkowitego braku ciemnej materii na poziomie istotności odpowiadającym  $7,6\sigma$ . Następnie zmierzono wartość „pozostawiania w tyle za gromadą” halo ciemnej materii względem takiego „pozostawiania” obłoku gazu. Pozwoliło to na oszacowanie przekroju czynnego na samooddziaływanie ciemnej materii  $\sigma_{\text{DM}}/m = -0,25^{+0,42}_{-0,43} \text{ cm}^2/\text{g}$  lub  $\sigma_{\text{DM}}/m < 0,47 \text{ cm}^2/\text{g}$  na poziomie ufności 95%. Z pierwszej formy wyniku widać, jak dużo brakuje do pozytywnego pomiaru samooddziaływania (w dodatku błąd nie jest tylko statystyczny; ujemność wyniku interpretuje się jako fluktuację w granicach niepewności pomiarowej). Wystarczyło to jednak na odrzucenie kilku klas modeli z ciemną materią o niezaniebnywalnym samooddziaływaniu.

### W co inwestować?

Wszyscy (prawie) zostali już przekonani do globalnego ocieplenia. Niektórzy wieszczą jednak nadejście małej epoki lodowcowej związanej ze zmniejszającą się aktywnością słoneczną. To nie są wcale tezy przeciwstawne, bo mechanizmy są w zasadzie niezależne (a sumaryczny wpływ na temperaturę niepewny).

Na spotkaniu (brytyjskiego) *Royal Astronomical Society* (w lipcu 2015) Valentina Zharkova przedstawiła wyniki dopasowania modelu wnętrza Słońca do pomiarów pola magnetycznego naszej gwiazdy zebranych za pomocą *Wilcox Solar Observatory* w latach 1976–2008.

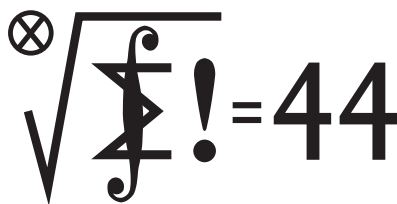
Ponoć (wyniki nie były do lipca opublikowane) model zawierający podwójne dynamo świetnie się zgadza i przewiduje destruktywną interferencję aktywności z minimum w cyklu 26. czyli około 2030 roku.

To może inwestować w opcje na średnią temperaturę za 15 lat?

Piotr ZALEWSKI

- [1] The LHCb collaboration, *Observation of  $J/\psi p$  resonances consistent with pentaquark states in  $\Lambda_b \rightarrow J/\psi K^- p$  decays*, arXiv:1507.03414v1; <http://lhcb-public.web.cern.ch/lhcb-public/Welcome.html#Penta>.
- [2] D. Harvey, R. Massey, T. Kitching, A. Taylor & E. Tittley, *The non-gravitational interactions of dark matter in colliding galaxy clusters*, arXiv:1503.07675v2; <http://astropix.ipac.caltech.edu/image/esahubble/heic1506h>.
- [3] <https://www.ras.org.uk/news-and-press/2680-irregular-heartbeat-of-the-sun-driven-by-double-dynamo>.

## Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 XI 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
695 ( $WT = 1,77$ ) i 696 ( $WT = 2,86$ )  
z numeru 2/2015

Janusz Olszewski	Warszawa	44,85
Wojciech Tobiś	Praszka	44,21
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Łukasz Garncarek	Opole	37,98
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	37,05
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Jędrzej Garnek	Poznań	34,89
Paweł Najman	Kraków	33,64

Janusz Olszewski – nazwisko może znane  
uczestnikom *ligi* i czytelnikom *Delt*y?  
To po raz *szesnasty*, jakby co.  
Nowy zaś w szeregach Klubu 44 M:  
Wojciech Tobiś – to już numer 126.

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delt*y

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

### Zadania z matematyki nr 705, 706

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**705.** Niech  $A_0$  będzie ustalonym wierzchołkiem  $(n+1)$ -kąta foremnego. Numerujemy pozostałe wierzchołki  $A_1, \dots, A_n$  w dowolnej kolejności. Każdemu bokowi  $A_i A_j$  przyporządkowujemy liczbę  $|i - j|$ . Niech  $S$  będzie sumą  $n + 1$  liczb, przyporządkowanych wszystkim bokom. Dla zadanej liczby naturalnej  $n$ :

- Obliczyć najmniejszą osiągalną wartość sumy  $S$ .
- Wyjaśnić, ile jest sposobów ponumerowania  $n$  wierzchołków (poza  $A_0$ ), przy których  $S$  osiąga ową minimalną wartość.

**706.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne  $n \geq 1$ , dla których istnieje wielomian  $W$  stopnia  $n$ , o współczynnikach całkowitych, ze współczynnikiem wiodącym równym 1, i taki, że równanie  $W(x)^2 = 1$  ma  $2n$  pierwiastków całkowitych (niekoniecznie różnych).

Zadanie 706 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2015

Przypominamy treść zadań:

**701.** Niech  $n$  będzie ustaloną dodatnią liczbą nieparzystą. Wyznaczyć największą możliwą liczbę całkowitych  $n \geq 1$ , dla których równanie dodatnich, mniejszych od  $3n$ , w którym każde dwa różne elementy mają i różnicę, i sumę różną od  $n$ .

**702.** Niech  $F_n(t) = t^n + (t+1)^n$ . Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych  $n \geq 1$ , dla których równanie  $F_{2n}(x) = F_n(y)$  nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych  $x, y \geq 1$ .

**701.** Liczba  $n$  jest nieparzysta, zatem zbiór wszystkich liczb parzystych, mniejszych od  $3n$ , ma własność, o którą chodzi. Jest ich  $(3n - 1)/2$ . Wykażemy, że jest to największa możliwa liczebność.

Rozbijamy zbiór  $\{1, \dots, 3n-1\}$  na rozłączne pary:

$$\{1, n-1\}, \{2, n-2\}, \dots, \{(n-1)/2, (n+1)/2\}, \\ \{n, 2n\}, \{n+1, 2n+1\}, \dots, \{n+(n-1), 2n+(n-1)\}.$$

W górnym rzędku mamy  $(n-1)/2$  par, w dolnym  $n$  par; razem  $(3n-1)/2$  par. Zbiór o większej liczebności (zawarty w  $\{1, \dots, 3n-1\}$ ) musi zawierać jedną z wymienionych par. Ale w każdej parze albo suma, albo różnica elementów jest równa  $n$ . Stąd nasza teza.

**702.** Pokażemy, że gdy  $p$  jest nieparzystą liczbą pierwszą, równanie  $F_{2p}(x) = F_p(y)$  nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Przypuśćmy, że para liczb całkowitych  $x, y \geq 1$  jest rozwiązaniem. Zgodnie z małym twierdzeniem Fermata,

$$F_{2p}(x) = x^{2p} + (x+1)^{2p} \equiv x^2 + (x+1)^2 \pmod{p},$$

$$F_p(y) = y^p + (y+1)^p \equiv y + (y+1) \pmod{p}.$$

Jeśli więc  $F_{2p}(x) = F_p(y)$ , to  $2x^2 + 2x \equiv 2y$ , czyli  $x^2 + x \equiv y \pmod{p}$ .

Z wypukłości funkcji  $t \mapsto t^p$  (w zbiorze liczb dodatnich) wynika nierówność

$$F_p(y) = F_{2p}(x) = (x^2)^p + (x^2 + 2x + 1)^p > \\ > (x^2 + x)^p + (x^2 + x + 1)^p = F_p(x^2 + x).$$

Funkcja  $F_p$  jest rosnąca; stąd  $y > x^2 + x$ . Skoro zaś  $x^2 + x \equiv y \pmod{p}$ , widzimy, że  $y \geq x^2 + x + p$ . A zatem  $F_p(y) \geq F_p(x^2 + x + p)$ . Aby uzyskać oczekiwaną sprzeczność, wystarczy wykazać, że

$$(1) \quad F_p(x^2 + x + p) > F_{2p}(x).$$

Oznaczmy:  $x + \frac{1}{2} = z$ ; wtedy  $x^2 + x = z^2 - \frac{1}{4} > z^2 - \frac{1}{2}$ .

Ponownie korzystając z wypukłości funkcji  $t^p$ , mamy nierówność  $F_p(t) > 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^p$ . Wobec tego

$$(2) \quad F_p(x^2 + x + p) > F_p\left(z^2 - \frac{1}{2} + p\right) > 2\left(z^2 + p\right)^p = 2 \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} z^{2p-2k} p^k.$$

Z drugiej strony,

$$(3) \quad F_{2p}(x) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^{2p} + \left(z + \frac{1}{2}\right)^{2p} = 2 \sum_{k=0}^p \binom{2p}{2k} z^{2p-2k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

Nierówność (1) będzie udowodniona, jeśli pokażemy, że w wyrażeniu po prawej stronie (2) współczynnik stojący przy  $z^{2p-2k}$  jest nie mniejszy niż analogiczny współczynnik w wyrażeniu (3); czyli, że

$$(4) \quad a_k := (4p)^k \binom{p}{k} \binom{2p}{2k}^{-1} \geq 1 \quad \text{dla } k = 0, \dots, p.$$

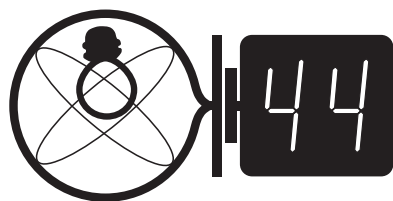
Łatwo przeliczyć, że

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{4p(2k+1)}{2p-2k-1} > \frac{4p}{2p} > 1.$$

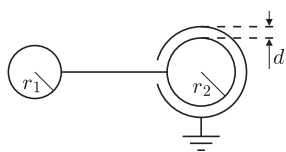
Stąd  $1 = a_0 < a_1 < \dots < a_p$ ; oszacowanie (4) gotowe, dowód zakończony.

Przypominamy komentarz, towarzyszący treści zadania (prop. Piotr Kumor): jest to kontynuacja dawnego zadania 194 (prop. Marcin Mazur) z tezą: dla  $n \geq 2$  badane równanie ma w liczbach całkowitych co najwyżej skończenie wiele rozwiązań – oraz zasygnalizowanym problemem: czy to równanie w ogóle ma rozwiązania poza trywialnymi ( $|x|, |y| \leq 1$ )?

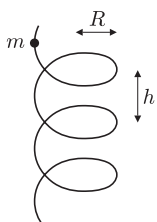
# Klub 44



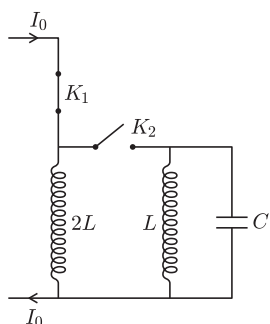
Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 XI 2015



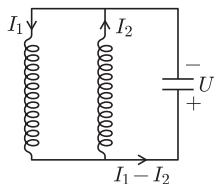
Rys. 1



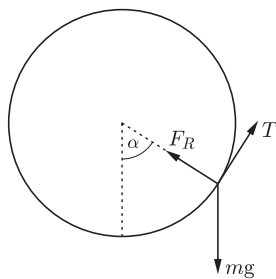
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

## Zadania z fizyki nr 602, 603

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**602.** Dwie przewodzące kule o promieniach  $r_1$  i  $r_2$ , połączone przewodzącym drutem, znajdują się w dużej odległości od siebie. Kula o promieniu  $r_2$  otoczona jest uziemioną sferą przewodzącą z małym otworkiem (rys. 1). Odległość sfery od kuli wynosi  $d$  i jest dużo mniejsza od promienia kuli. Kule naładowano ładunkiem  $Q$ . Wyznacz rozmieszczenie ładunku na kulach.

**603.** Po ustawionej pionowo sztywnej spirali zsuwa się z zerową prędkością początkową mały koralik o masie  $m$ . Promień spirali wynosi  $R$ , skok spirali (odległość między sąsiednimi zwojami) wynosi  $h$  (rys. 2). Znaleźć wartość przyspieszenia koralika na końcu  $n$ -tego zwoju. Tarcie zaniedbać.

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2015

Przypominamy treść zadań:

**598.** Przez cewkę o współczynniku samoindukcji  $2L$  płynie prąd stały o natężeniu  $I_0$  z zewnętrznego źródła (rys. 3). Po zamknięciu klucza  $K_2$  do cewki podłączamy równolegle cewkę o współczynniku samoindukcji  $L$  oraz kondensator o pojemności  $C$ . Następnie otwieramy klucz  $K_1$ . Znaleźć maksymalne napięcie na kondensatorze i maksymalne natężenie prądu płynącego w cewce o współczynniku samoindukcji  $L$ . Elementy obwodu uważamy za idealne.

**599.** Koło, którego cała masa rozłożona jest równomiernie na obwodzie, może obracać się bez tarcia wokół swojej osi skierowanej poziomo. Wewnątrz koła, wzdłuż jego obwodu biegnie wiewiórka. Współczynnik tarcia między kołem a wiewiórką wynosi  $\mu$ . Stosunek masy koła do masy wiewiórki równy jest  $n$ . Jakie maksymalne, stałe przyspieszenie liniowe może nadać kołu wiewiórka?

**598.** Po zamknięciu klucza  $K_2$  kondensator nie ładuje się, bo napięcie między końcami cewki o współczynniku samoindukcji  $2L$  wynosi 0, a przez cewkę o współczynniku samoindukcji  $L$  nie płynie prąd, gdyż zmiana natężenia prądu indukowałaby siłę elektromotoryczną na bezporowej cewce. Po otwarciu obwodu zewnętrznego, oznaczając natężenia prądów jak na rysunku 4, mamy dla lewego oczka:  $2L \frac{dI_1}{dt} + L \frac{dI_2}{dt} = 0$ , z warunkami początkowymi  $I_1(0) = I_0$ ,  $I_2(0) = 0$ . Stąd  $2(I_0 - I_1) = I_2$ . Ponieważ elementy obwodu uważamy za idealne, w obwodzie nie ma strat energii:  $2L \frac{I_0^2}{2} = 2L \frac{I_1^2}{2} + L \frac{I_2^2}{2} + C \frac{U^2}{2}$ . Gdy natężenia prądów w cewkach mają te same wartości  $I_1 = I_2 = 2 \frac{I_0}{3}$ , kondensator nie ładuje się ani nie rozładowuje i napięcie na nim jest maksymalne. Stąd  $U_{\max} = I_0 \frac{2L}{3C}$ . Natężenia prądów w cewkach są maksymalne, gdy ich pochodne, a tym samym siły elektromotoryczne samoindukcji są równe zero. W tym momencie znika również napięcie na kondensatorze połączonym równolegle z cewkami i cała energia skupiona jest w cewkach:  $2L \frac{I_0^2}{2} = 2L \frac{I_1^2_{\max}}{2} + L \frac{I_2^2_{\max}}{2}$ . Stąd  $I_2_{\max} = \frac{4I_0}{3}$ .

**599.** Rysunek 5 przedstawia siły działające na wiewiórkę. Są to: siła ciężkości  $mg$ , siła reakcji  $F_R$  i siła tarcia  $T$ . Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki na koło działa stycznie siła o wartości  $T$ , która nadaje mu przyspieszenie  $a = \frac{T}{M}$ , gdzie  $M$  jest masą koła. Przyspieszenie koła ma być stałe, zatem  $T$  również musi być stałe. Ponieważ przyspieszenie koła ma mieć maksymalną wartość, to  $T = \mu F_R$  oraz  $F_R$  też jest stałe. W układzie odniesienia związanym z Ziemią wiewiórka porusza się po okręgu:  $\frac{mv^2}{R} = F_R - mg \cos \alpha$ , gdzie  $m$  jest masą wiewiórki,  $v$  jej prędkością, a  $R$  promieniem okręgu. Siła reakcji  $F_R$  może być stała w dwóch przypadkach: albo wiewiórka biegnie po okręgu tak, że jej kwadrat prędkości jest sumą funkcji proporcjonalnej do  $(-\cos \alpha)$  i funkcji stałej, albo jest nieruchoma i  $F_R = mg \cos \alpha$ . W pierwszym przypadku dla  $\alpha = 0$  i  $\alpha = \pi$  kwadrat prędkości osiąga odpowiednio najmniejszą i największą wartość. Wtedy składowa przyspieszenia wiewiórki styczna do okręgu wynosi 0, a zatem i siła tarcia  $T$  równa jest zero (siła ciężkości jest w tych położeniach skierowana wzdłuż promienia). Przypadek pierwszy należy więc odrzucić. Gdy wiewiórka nie porusza się względem Ziemi, zachodzi związek:  $T = mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha$ , zatem  $\tan \alpha = \mu$ . Stąd mamy  $T = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ . Szukane przyspieszenie jest równe  $a = \frac{\mu g}{n \sqrt{1 + \mu^2}}$ .



## Prosto z nieba: Kwazikryształy

Kryształ to wyjątkowo dobrze uporządkowana forma ciała stałego, w której atomy (cząsteczki, jony) ułożone są według określonych, powtarzających się periodycznie w przestrzeni reguł. Rezultatem mogą być wyjątkowe własności optyczne, elektryczne i mechaniczne kryształów, np. dwójłomność, duże przewodnictwo cieplne i elektryczne lub ogromna twardość. Ściśle periodyczne kryształy bez jakichkolwiek zaburzeń struktury i domieszek (monokryształy) były doceniane przez ludzkość od zarania dziejów, a obecnie są wykorzystywane w wielu dziedzinach techniki (w *Delcie 3/2015* pisaliśmy np. o niebieskim laserze). Nieco bardziej subtelną i przez to trudniejszą do studiowania klasą ciał stałych są *kwazikryształy*. Struktura kwazikryształu jest pozornie regularna, jednak w przeciwieństwie do monokryształów nie powtarza się regularnie w przestrzeni; kwazikryształ jest uporządkowany, ale nieperiodyczny.

Przykładem modelu kwazikryształu jest układanka (kafelki) Rogera Penrose'a, który w latach siedemdziesiątych XX wieku bawił się pokrywaniem płaszczyzny za pomocą dwóch rodzajów deltoidów.

Ciała o strukturze tego typu zaistniały w naukowym świecie w 1982 roku, gdy Dan Shechtman zaobserwował w mieszaninie manganu i glinu siatkę o przybliżonej pięciokątnej symetrii. Za odkrycie to (nawiasem mówiąc początkowo ostro kwestionowane przez środowisko naukowe) został uhonorowany w 2011 r. Nagrodą Nobla.

## Niebo we wrześniu

Tegoroczny wrzesień będzie obfitował w zaćmienia. 13 IX wystąpi częściowe zaćmienie Słońca, które, niestety, nie będzie widoczne w Polsce. Zjawisko to polecamy zwolennikom dalekich podróży, gdyż możliwość obserwacji będzie jedynie z terenu południowej Afryki oraz części Antarktydy.

Zdecydowaną gratką dla miłośników zaćmień będzie natomiast Księżyc. Całkowite zaćmienie nastąpi 28 IX i widoczne będzie z terenu całej Polski. Początek nastąpi o godzinie 2:12, natomiast koniec o 7:22, kiedy będziemy mieli możliwość obserwacji Księżyca zachodzącego za horyzontem. Maksymalna faza zaćmienia będzie o godzinie 4:48 (15 stopni nad horyzontem dla Warszawy). Chcąc podziwiać zaćmienie Księżyca za pomocą małych instrumentów astronomicznych, warto wcześniej sprawdzić lokalne strony Polskiego Towarzystwa Miłośników Astronomii (PTMA), astrobaz oraz obserwatoriów astronomicznych, gdyż bardzo często przy sprzyjających warunkach pogodowych instytucje te organizują bezpłatne pokazy nieba.

23 IX to początek astronomicznej jesieni, która oficjalnie rozpocznie się o godzinie 10:21. Jesienne noce to okazja do dłuższych obserwacji, warto wtedy zwrócić uwagę na planety. Osoby wyposażone choćby w lornetki lub małe lunetki mogą obserwować Neptuna, który 1 IX znajdzie się w opozycji, czyli w konfiguracji najlepszej do obserwacji, a jego jasność będzie wynosiła 7,8<sup>m</sup>.

Istnienie kwazikryształów było przez wiele lat podawane w wątpliwość, ponieważ wielu badaczom wydawało się, że taka struktura jest zbyt nietrwała, by istnieć w przyrodzie w stanie stabilnym. Tym ciekawsze wydają się w tym kontekście odkrycia kwazikryształów, złożonych z atomów miedzi, żelaza i glinu, w naturalnie występujących skałach. Mineral taki znaleziono np. na Czukotce – jest on niezwykle twardy, ale w przeciwieństwie do monokryształów słabo przewodzi ciepło i elektryczność, nadaje się więc świetnie na ekstremalnie wydajny izolator termiczny.

Kolejnym dowodem na wszędobylskość kwazikryształów jest stwierdzenie ich obecności w znalezionym (również w Rosji) meteorycie. Wiek meteorytu szacowany jest na 4,6 miliarda lat. Kwazikryształ o dekadonalnej (dziesięciokrotnej) symetrii, składający się z atomów niklu, żelaza oraz glinu powstał najprawdopodobniej również wtedy, przy narodzinach Układu Słonecznego. Zaródź kwazikryształu otoczona jest warstwą kwarcu, formująca się w warunkach dużych temperatur i ciśnień. Badacze z Uniwersytetu Princeton w USA i Florencji we Włoszech (wśród nich pionier fizyki kwazikryształów Paul Steinhardt) są przekonani, że meteorytowy kwazikryształ przyczyni się do zrozumienia naturalnego powstawania tego typu struktur i stanu materii we wczesnych etapach życia Układu Słonecznego.

Michał BEJGER

Tę najdalszą planetę Układu Słonecznego będzie można odnaleźć w gwiazdozbiornie Wodnika, czyli spoglądając na południowe niebo. Już podczas kolejnej nocy, czyli 2 IX, w okolicach godziny 20:00, Wenus będzie w odległości 9 stopni w kierunku południowym od Marsa. Obie planety będą wtedy na tle gwiazdozbioru Raka, a ich jasności będą wynosiły  $-4,4^m$  dla Wenus i  $1,8^m$  dla Marsa, zatem będą dostępne na wieczornym niebie nawet z terenów najbardziej oświetlonych miast.

Wrześniowe niebo oferuje także atrakcje dla zapalonych obserwatorów spadających gwiazd. Warto wtedy zwrócić uwagę na rój meteorów  $\epsilon$ -Perseidy, zwanych także Wrześniowymi Perseidami, który będzie widoczny od 5 do 21 IX, a jego maksimum nastąpi 9 IX. Jest to rój o średniej aktywności wynoszącej do 5 meteorów na godzinę, a jego radiant znajduje się na współrzędnych RA: 3,1 h, Dec:  $+40^\circ$ .

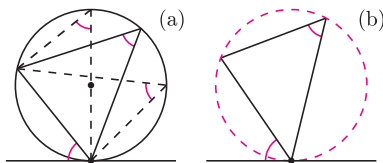
Koniec września to okazja do obserwacji planety karłowatej 4 Vesta (czwórka oznacza, że jest to czwarta odkryta przez ludzkość planetoida), która 28 IX znajdzie się w opozycji i widać będzie ją w gwiazdozbiornie Wieloryba. Jasność tej planetki wyniesie  $6,2^m$ , zatem jest polecana dla osób o doskonałym wzroku wykonujących obserwacje z terenów o minimalnym zanieczyszczeniu światłem lub dla posiadaczy małych instrumentów astronomicznych.

Karolina BĄKOWSKA

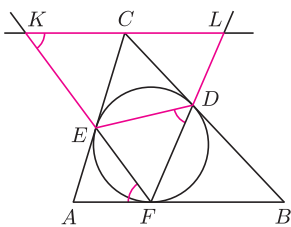
doktorantka, Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika, Warszawa

# del oia

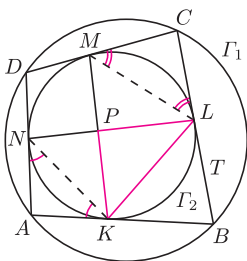
81



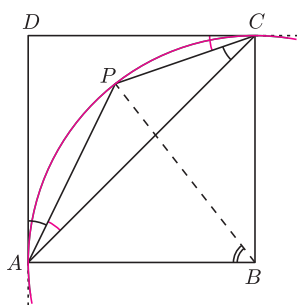
Rys. 1(a) i (b). Twierdzenie o stycznej i cięciwie oraz twierdzenie odwrotne do niego.



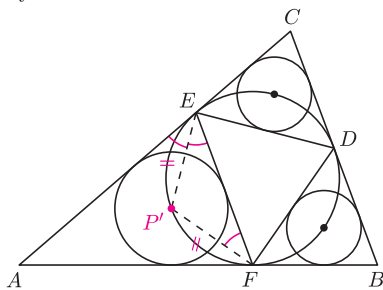
Rys. 2



Rys. 3.  $\alpha = \sphericalangle AKN = \sphericalangle ANK$ ,  
 $\gamma = \sphericalangle CLM = \sphericalangle CML$ .



Rys. 4



Rys. 5

## Styczna i cięciwa

Joanna JASZUŃSKA

Twierdzenie o stycznej i cięciwie (\*) jest niezwykle prostym, a zarazem ogromnie przydatnym faktem z elementarnej geometrii. Głosi ono, że kąt między styczną do okręgu a jego cięciwą przechodzącą przez punkt styczności równy jest kątowi wpisanemu w ten okrąg, opartemu na odpowiednim łuku – rysunek 1(a). Dla dowodu wystarczy rozważyć ten spośród kątów wpisanych, którego ramię jest prostopadłe do stycznej.

Zachodzi również twierdzenie odwrotne do (\*): jeśli odpowiednie kąty są równe (rys. 1(b)), to okrąg opisany na trójkącie jest styczny do danej prostej.

**1.** Okrąg wpisany w trójkąt  $ABC$  jest styczny do boków  $BC, CA, AB$  odpowiednio w punktach  $D, E, F$ . Prosta równoległa do  $AB$ , przechodząca przez punkt  $C$ , przecina proste  $FE$  i  $FD$  odpowiednio w punktach  $K$  i  $L$ . Udowodnij, że na czworokącie  $KEDL$  można opisać okrąg.

**2.** Czworokąt  $T$  jest wpisany w okrąg  $\Gamma_1$  oraz opisany na okręgu  $\Gamma_2$ , przy czym  $K, L, M, N$  są kolejnymi punktami styczności  $T$  z  $\Gamma_2$ . Wykaż, że  $KM \perp LN$ .

**3.** Dany jest kwadrat  $ABCD$  i taki punkt  $P$  w jego wnętrzu, dla którego  $\sphericalangle CAP = \sphericalangle DCP = 19^\circ$ . Wyznacz  $\sphericalangle ABP$ .

**4.** Okrąg  $\Gamma$ , wpisany w trójkąt  $ABC$ , jest styczny do boków  $BC, CA, AB$  odpowiednio w punktach  $D, E, F$ . Wykaż, że środki  $P, Q, R$  okręgów wpisanych w trójkąty  $AEF, BFD, CDE$  leżą na okręgu  $\Gamma$ .

### Rozwiązania

**R1.** Korzystając kolejno z równoległości prostych  $AB$  i  $KL$  oraz z twierdzenia (\*), uzyskujemy  $\sphericalangle EKL = \sphericalangle EFA = \sphericalangle EDF$  (rys. 2). Stąd  $\sphericalangle EKL + \sphericalangle EDL = \sphericalangle EKL + 180^\circ - \sphericalangle EDF = 180^\circ$ , co kończy dowód.  $\square$

**R2.** Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 3. Skoro czworokąt  $T$  jest wpisany w okrąg, to  $180^\circ = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\gamma$ , więc  $\alpha + \gamma = 90^\circ$ .

Jednocześnie, na mocy twierdzenia (\*) dla okręgu  $\Gamma_2$ , mamy  $\sphericalangle KLN = \alpha$  oraz  $\sphericalangle LKM = \gamma$ . Wobec tego  $\sphericalangle KPL = 180^\circ - \alpha - \gamma = 90^\circ$ , co kończy dowód.  $\square$

**R3.** Na mocy danej równości kątów oraz twierdzenia odwrotnego do (\*), prosta  $CD$  jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie  $PAC$  (rys. 4). Wobec tego środek tego okręgu leży na prostej  $BC$  (bo  $BC \perp CD$ ). Analogicznie prosta  $AD$  także jest styczna do tego okręgu, gdyż  $\sphericalangle DAP = \sphericalangle ACP = 26^\circ$ , zatem środek rozważanego okręgu leży też na prostej  $AB$ . Stąd jest nim punkt  $B$ .

Kąt  $ABP$  jest więc kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt wpisany  $ACP$ , zatem  $\sphericalangle ABP = 2 \cdot 26^\circ = 52^\circ$ .  $\square$

**R4.** Oznaczmy środek krótszego łuku  $EF$  okręgu  $\Gamma$  przez  $P'$  (rys. 5). Wówczas  $\sphericalangle P'EF = \sphericalangle P'FE = \sphericalangle P'EA$ , przy czym druga równość wynika z twierdzenia (\*). Wobec tego  $P'$  leży na dwusiecznej kąta  $AEF$ . Analogicznie dla kąta  $AFE$ , więc  $P' = P$ . Dowód dla punktów  $Q$  i  $R$  przebiega podobnie.  $\square$

### Zadania domowe

**5.** Udowodnij twierdzenie o stycznej i cięciwie oraz twierdzenie odwrotne.

**6.** Dwa okręgi przecinają się w punktach  $A$  i  $B$ . Proste styczne do tych okręgów w punkcie  $A$  przecinają je w drugich punktach  $C$  i  $D$ . Wykaż, że  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$ .

**7.** Z punktu  $P$  poprowadzono prostą przecinającą dany okrąg  $\Gamma$  w punktach  $A$  i  $B$  oraz prostą styczną do  $\Gamma$  w punkcie  $C$ . Wykaż, że  $PA \cdot PB = PC^2$ .

**8.** Okrąg  $\Gamma$  jest styczny do prostej  $k$  w punkcie  $D$ , cięciwa  $AB$  tego okręgu jest równoległa do  $k$ , punkt  $C$  należy do prostej  $k$ . Proste  $AC$  i  $BC$  przecinają okrąg  $\Gamma$  w drugich punktach  $E$  i  $F$ . Wykaż, że prosta  $EF$  przechodzi przez środek odcinka  $CD$ .

**9.** W sytuacji z zadania 4 wykaż, że proste  $DP, EQ, FR$  przecinają się w jednym punkcie  $J$  oraz że punkty  $F$  i  $J$  są symetryczne względem prostej  $PQ$ .