





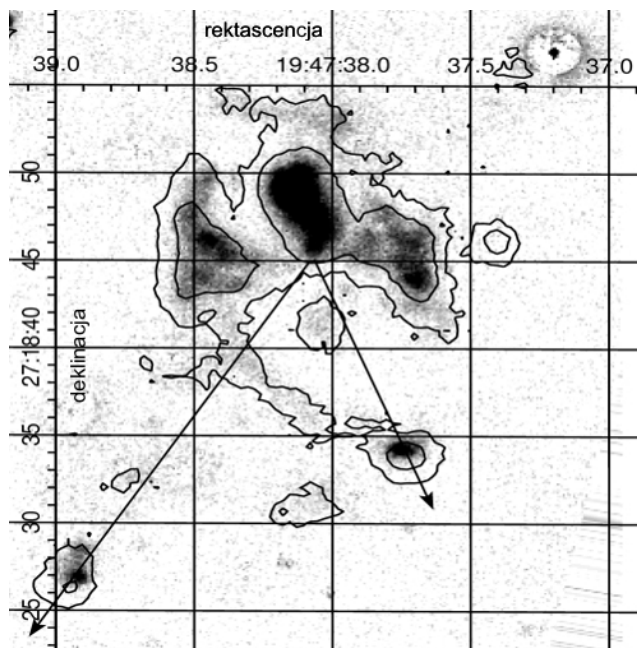


tel. 22 63 40 34 45 tel. 22 63 41 53 92

## SPIS TREŚCI NUMERU 5 (492)

O spinach i genach <i>Jacek Miękiś</i>	str. 1
 Zadania	str. 5
(Nie)prawdopodobne izotopy <i>Piotr Dittwald</i>	str. 6
Monte Carlo, spacer i polimery <i>Wojciech Niemirowicz</i>	str. 8
„Co jest grane” w dylematach społecznych <i>Tadeusz Płatkowski</i>	str.12
 My i Neandertalczyk <i>Magdalena Fikus</i>	str.17
 Nawijamy, odwijamy <i>Marek Kordos</i>	str.18
Pierwszy reaktor jądrowy <i>Grzegorz Lizurek</i>	str.19
Informatyczny kącik olimpijski (81): Kuglarz <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Andromeda	str.24
Niebo w maju	str.24
 Kolorowe kropki <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

W następnym numerze polecamy



pierwszą czerwoną gwiazdę nową

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.  
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2015 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–17<sup>00</sup>.

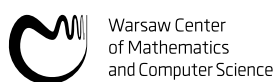
Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

**Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):** [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**



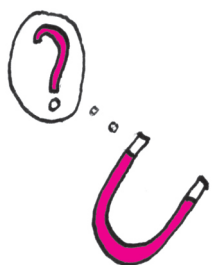
Warsaw Center  
of Mathematics  
and Computer Science

[wcmcs.edu.pl](http://wcmcs.edu.pl)

## O spinach i genach

Jacek MIEKISZ\*

Czego można się nauczyć, studiując na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW?



**Odpowiedź krótka:** wszystkiego tego, co można sformułować precyzyjnie w języku matematyki, czyli wszystkiego.

**Odpowiedź praktyczna:** tego, czym się zajmują nasi pracownicy – kilka przykładów przedstawimy w tym i następnych artykułach.

**Odpowiedź konkretna:** na przykład, zachowania się układów wielu oddziałujących obiektów. Ja zajmuję się tym przez całe życie, ciągle tym samym, a jednak za każdym razem czymś innym. Na początku były to oddziałujące atomy oraz cząsteczki tworzące kryształy i inne ciała stałe, potem nastał czas graczy (czasami nazywanych agentami) – czyli ludzi lub zwierząt – w teorii gier ewolucyjnych, a teraz są to głównie białka w matematycznych modelach regulacji genów.

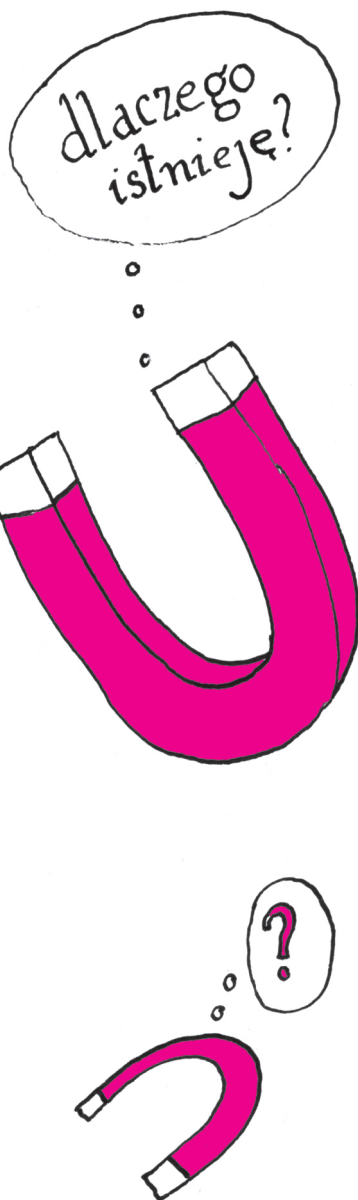
Każdy z tych obiektów oddziałuje z innymi obiektami znajdującymi się w pewnym sąsiedztwie. Zachowanie danego obiektu zależy od jego położenia, prędkości i innych charakterystyk, zwanych stanami tej cząstki lub osobnika, ale też od stanu obiektów, z którymi oddziałuje. Ruch oddziałujących cząstek opisują równania Newtona – równania różniczkowe II zasady dynamiki znane Wam z liceum (zapewne byliście nieświadomi, że spotkaliście już wtedy na swojej drodze równania różniczkowe). Przypomnijmy: zmiana stanu danego obiektu zależy od jego stanu i od stanów wszystkich obiektów, z którymi oddziałuje, a zmiana ich stanów zależy od stanu danego obiektu itd., itd. W tym momencie być może niektórym z Was przypominają się wypowiedzi Russella Crowe'a, czyli Johna Nasha z filmu *Piękny umysł*. Jak chcecie się dowiedzieć, czym różnią się równowagi Nasha oddziałujących graczy od stanów równowagowych oddziałujących cząstek w fizyce statystycznej, to przyjdźcie na nasz wydział, niecierpliwym polecam notatki do wykładu Modele matematyki stosowanej [1].

W układach bardzo wielu oddziałujących obiektów niemożliwe jest śledzenie każdego z nich, niemożliwe jest analityczne rozwiązanie odpowiednich równań, a nawet gdybyśmy rozwiązali je numerycznie, to byłibyśmy przytłoczeni kosmiczną ilością danych liczbowych. Naszym celem może być obliczenie średniego zachowania, czyli – jak to mówią matematycy – wartości oczekiwanej. I to, niestety, też jest trudne zadanie.

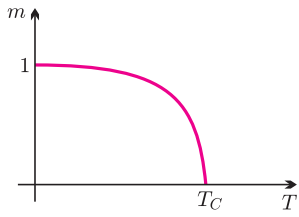
Nadszedł czas, aby przedstawić głównego aktora naszej opowieści – pole średnie. Otóż niezwykle prosty pomysł polega na tym, aby oddziaływanie danego obiektu z innymi obiektami przedstawić jako oddziaływanie danego obiektu z (nieznany) średnim otoczeniem wytworzonym przez pozostałe obiekty. Powtórzmy: otrzymany w ten sposób układ to jeden obiekt oddziałujący z uśrednionym otoczeniem. W tak prostym układzie względnie łatwo jest obliczyć jego średni stan. Otrzymany wzór zawiera nieznaną wartość pola średniego, a więc jest *de facto* równaniem na nieznaną wartość pola średniego. Możemy rozwiązać to równanie, czyli – jak mówią fizycy – samouzgodnić pole średnie, które musi być równe średniemu stanowi naszego wyjściowego obiektu.

Proste, nieprawdaż? Ale, jak powszechnie wiadomo, diabeł tkwi w konkretnych przykładach. Zobaczmy, że nie taki on straszny.

**Przykład 1: Dlaczego istnieje magnes?** Fizycy wiedzą, że podgrzany magnes traci swoje własności magnetyczne. Zjawisko to stara się wyjaśnić teoria ciała stałego, dział fizyki zajmujący się własnościami ciał makroskopowych. W bardzo dużym uproszczeniu przyjmujemy, że namagnesowanie ciała jest sumą wektorową małych magnesów związanych z jego poszczególnymi atomami. Z jednej strony, siły oddziaływań pomiędzy magnesikami prowadzą do ich ułożenia wzdłuż jednego kierunku. Sąsiednie magnesiki lubią układać się w tym samym kierunku (wtedy mają najmniejszą energię i tak – od sąsiada do sąsiada – ta chęć naśladowania trafia do wszystkich). Z drugiej strony, ruchy cieplne atomów



\*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1. Namagnesowanie jako funkcja temperatury.

zaburzają ten idealny porządek. Wynikiem tych dwóch przeciwstawnych oddziaływań jest ustalenie się równowagowego namagnesowania ciała. Wynikałoby z tego, że namagnesowanie jest malejącą funkcją temperatury, zbiegającą do zera wraz z jej wzrostem. Okazuje się jednak, jak to widzimy na rysunku 1, że istnieje temperatura krytyczna, tak zwana temperatura Curie, powyżej której ciało całkowicie traci własności magnetyczne – mamy do czynienia z przejściem fazowym. Nasze pierwsze ćwiczenie w używaniu pola średniego pozwoli nam wyjaśnić to niezwykle ciekawe i nieintuicyjne zjawisko.

**Magnes matematyczny – ferromagnetyczny model Isinga.** W modelu Isinga oddziałujące obiekty – magnesyki – umieszczone są w węzłach regularnej kraty sześcienniej  $\mathbb{Z}^3$ , gdzie  $\mathbb{Z}$  jest zbiorem liczb całkowitych. W każdym węźle  $i \in \mathbb{Z}^3$  umieszczamy matematyczną reprezentację  $\sigma_i$  magnesyki, zmienną mogącą przyjmować dwie wartości:  $+1$  (magnesik skierowany do góry) i  $-1$  (magnesik skierowany do dołu). Zmienną  $\sigma_i$  nazywamy spinem w węźle  $i$ . Niech  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^3$  będzie skończonym podzbiorem węzłów naszej kraty.  $\Omega_\Lambda = \{+1, -1\}^\Lambda$  jest zbiorem konfiguracji na  $\Lambda$ , czyli zbiorem wszystkich funkcji przypisujących węzłom spin skierowany do góry lub do dołu. A teraz najważniejsza rzecz: jak oddziałują ze sobą spiny. O tym mówi hamiltonian, czyli funkcja na  $\Omega_\Lambda$  przypisująca energię konfiguracjom na  $\Lambda$ . Przyjmujemy, że oddziałują ze sobą spiny, które są najbliższymi sąsiadami,

$$H_\Lambda = - \sum_{\langle i,j \rangle, i,j \in \Lambda} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i,$$

gdzie  $\langle i, j \rangle$  jest parą najbliższych sąsiadów, a  $h > 0$  jest zewnętrznym polem magnetycznym.

Hamiltonian w mechanice klasycznej oddziałujących cząstek jest sumą ich energii kinetycznych i energii potencjalnej oddziaływań między nimi. W powyższym wyrażeniu nie uwzględniamy energii kinetycznej.

Nasz układ spinowy podlega nieustannym ruchom cieplnym i w związku z tym nawet w równowadze jest układem stochastycznym. Powinniśmy więc określić prawdopodobieństwa przebywania układu w każdym z mikroskopowych stanów, czyli elementów zbioru  $\Omega_\Lambda$ . Wszelkie makroskopowe wielkości fizyczne, takie jak energia czy namagnesowanie układu, są więc zmiennymi losowymi na  $\Omega_\Lambda$ . Interesować nas będą wartości oczekiwane tych zmiennych losowych.

Wprowadzamy następujący rozkład prawdopodobieństwa,

$$\rho_{T,h,\Lambda}(X) = \frac{e^{-\frac{1}{T}H_\Lambda(X)}}{Z(T,h,\Lambda)},$$

gdzie  $T$  jest temperaturą układu, czyli miarą jego ruchów cieplnych, a

$$Z(T,h,\Lambda) = \sum_{X \in \Omega_\Lambda} e^{-\frac{1}{T}H_\Lambda(X)}$$

jest czynnikiem normalizującym prawdopodobieństwo. W fizyce  $Z(T,h,\Lambda)$  nazywane jest sumą statystyczną, natomiast  $\rho_{T,h,\Lambda}$  – wielkim rozkładem kanonicznym albo stanem Gibbsa. Ciekawy świata Czytelnik może znaleźć uzasadnienie wprowadzenia takiego, a nie innego rozkładu prawdopodobieństwa we wspomnianych już notatkach.

Definiujemy teraz zmienną losową namagnesowania układu:

$$M = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i.$$

Aby uniknąć niepotrzebnych, drugorzędnych problemów technicznych, wprowadzamy okresowe warunki brzegowe, a więc zwiijamy  $\Lambda$  w trójwymiarowy torus. Na wartość oczekiwaną  $m$  zmiennej losowej  $M$  w stanie Gibbsa otrzymujemy wtedy wyrażenie

$$m = \frac{\sum_{X \in \Omega_\Lambda} \sigma_0(X) e^{\frac{1}{T}(\sum_{\langle i,j \rangle \in \Lambda} \sigma_i(X)\sigma_j(X) + h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(X))}}{Z(T,h,\Lambda)},$$

gdzie  $0$  jest dowolnym węzłem,  $0 \in \Lambda$ .

Występowanie w sumie  $\sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$  iloczynów  $\sigma_i \sigma_j$ , a więc oddziaływań między spinami, nie pozwala znaleźć wzoru na  $m$ . Na pomoc przychodzi pole średnie. Zmieniamy  $\sigma_j$  w powyższych iloczynach na (nieznaną) wartość oczekiwaną  $m$ . Każdy spin oddziałuje z sześcioma sąsiednimi spinami, co oznacza, że zastępujemy  $\sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$  przez  $\sum_{i \in \Lambda} 3m \sigma_i$  (uwaga: aby nie uwzględniać dwa razy oddziaływania pomiędzy spinami w węzłach  $i$  i  $j$  piszemy 3 zamiast 6). Czytelnik łatwo zauważy, że zarówno licznik, jak i mianownik można przedstawić za pomocą odpowiednich iloczynów, i po prostych przekształceniach otrzyma równanie

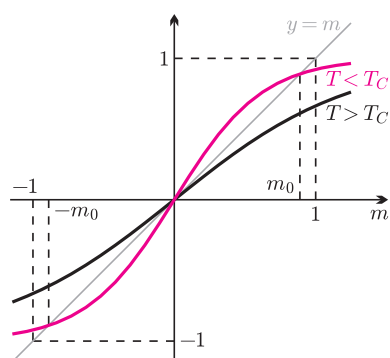
$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$m = \operatorname{tgh} \frac{3m + h}{T}.$$

Zauważmy, że zewnętrzne pole magnetyczne  $h$  zostało zmodyfikowane przez średnie pole  $3m$ , które interpretujemy jako efektywne pole pochodzące z uśrednienia oddziaływań danego spinu. Jesteśmy w szczególności sposobie zainteresowani przypadkiem zerowego pola zewnętrznego,  $h = 0$ , to znaczy namagnesowaniem spontanicznym. Aby dostać w takim przypadku samouzdognioną wartość  $m$ , musimy rozwiązać równanie

$$(1) \quad m = \operatorname{tgh} \frac{3m}{T}.$$

Możemy je rozwiązać graficznie. Znajdujemy przecięcie wykresu funkcji  $f(m) = \operatorname{tgh} \frac{3m}{T}$  i linii prostej  $y = m$  (patrz rysunek 2). Łatwo zauważyć, że dla  $T > 3$  oba wykresy przecinają się tylko w jednym punkcie  $m = 0$ . Jeśli jednak  $T < T_C = 3$ , wykresy przecinają się w trzech punktach i w ten sposób dostajemy trzy rozwiązania:  $m = 0$  i  $m = \pm m_0(T)$ , gdzie  $m_0(T)$  jest dodatnim namagnesowaniem.  $T_C$  jest krytyczną temperaturą Curie, w której zachodzi przejście fazowe. Rysunek 1 to wniosek z rysunku 2; nasz cel został osiągnięty.



Rys. 2. Graficzne rozwiązanie równania pola średniego (1).

Można udowodnić, że dla  $T < T_C$  rozwiązanie  $m = 0$  jest termodynamicznie niestabilne. Współistnienie dwóch rozwiązań  $m = \pm m_0(T)$  jest wynikiem symetrii hamiltonianu (w przypadku zerowego pola zewnętrznego,  $h = 0$ ) ze względu na odwrócenie spinów  $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ . Oznacza to, że w temperaturze niższej od krytycznej współistnieją dwa makroskopowe stany równowagowe naszego magnesu.

**Przykład 2: Samoograniczający się gen.** Produkcja białek w komórkach jest wynikiem różnych biochemicznych procesów. Umożliwiają one różnicowanie się komórek i ich odpowiedź na zmieniające się środowisko. O tym, jakie białko powstanie, decyduje informacja genetyczna zapisana w DNA. W najprostszym modelu produkcji białka, czyli – jak to mówią biolodzy – ekspresji genu, w każdym momencie może zajść jedno z dwóch zdarzeń: produkcja lub degradacja jednej cząsteczki białka. Opisujemy to matematycznie stochastycznymi procesami urodzin i śmierci. W procesie takim stan komórki w każdej chwili jest określony przez liczbę cząsteczek białka. Zmiany stanu w czasie zachodzą z odpowiednimi prawdopodobieństwami. Zakładamy, że jeśli w czasie  $t$  w komórce było  $n$  cząsteczek białka, to

- Prawdopodobieństwo produkcji (urodzin) jednej cząsteczki w odcinku czasowym  $(t, t + h)$  wynosi  $kh + o(h)$ ,
- Prawdopodobieństwo degradacji (śmierci) jednej cząsteczki w odcinku czasowym  $(t, t + h)$  wynosi  $\gamma nh + o(h)$ ,
- Prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż jednej zmiany (reakcji) w odcinku czasowym  $(t, t + h)$  wynosi  $o(h)$ ,

gdzie  $k$  i  $\gamma$  to intensywności produkcji i degradacji, a  $o(h)$  jest wielkością mniejszego rzędu niż  $h$ , to znaczy  $\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/h = 0$ .

Oznaczmy przez  $f(n, t)$  prawdopodobieństwo tego, że w komórce w chwili  $t$  jest  $n$  cząsteczek białka. Naszym celem jest znalezienie wzoru na wartość stacjonarną, czyli niezależną od czasu  $f(n)$ , albo przynajmniej na wartość średnią liczby cząsteczek białka,  $\sum_{n=0}^{\infty} n f(n)$ . Aby coś obliczyć, trzeba na to coś ułożyć równanie i, oczywiście, potem je rozwiązać. By w komórce było  $n$  cząsteczek



w chwili  $t + h$ , powinno być  $n - 1$  cząsteczek w chwili  $t$  i jedna cząsteczka powinna być wyprodukowana w czasie  $h$  lub  $n + 1$  cząsteczek w chwili  $t$  i jedna cząsteczka powinna zdegradować w czasie  $h$  lub  $n$  cząsteczek w chwili  $t$  i nic nie powinno się zdarzyć w czasie  $h$ .

Możemy napisać wyrażenie na prawdopodobieństwo całkowite:

$$\begin{cases} f(n, t + h) = khf(n - 1, t) + (n + 1)\gamma hf(n + 1, t) + (1 - kh - n\gamma h)f(n, t) + o(h), & \text{dla } n \geq 1, \\ f(0, t + h) = \gamma hf(1, t) + (1 - kh)f(0, t) + o(h). \end{cases}$$

Przenosimy teraz  $f(n, t)$  na lewą stronę, dzielimy przez  $h$ , przechodzimy do granicy  $h \rightarrow 0$ , dostajemy pochodną jako granicę ilorazu różnicowego, czyli po prostu prędkość zmian prawdopodobieństwa, i ostatecznie otrzymujemy nieskończony układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{df(n, t)}{dt} = kf(n - 1, t) + (n + 1)\gamma f(n + 1, t) - (k + n\gamma)f(n, t), & n \geq 1, \\ \frac{df(0, t)}{dt} = \gamma f(1, t) - kf(0, t), \end{cases}$$

powiedzmy, z warunkiem początkowym  $f(0, 0) = 1$ . Jest to słynne równanie M.

Nie będziemy go rozwiązywać. Interesować nas będzie stan stacjonarny  $f(n)$ , w którym wpływy i wypływy w księgowaniu prawdopodobieństw równoważą się. Funkcja  $f(n)$  jest rozwiązaniem nieskończonego układu równań algebraicznych, opisujących **równowagę globalną**, uzyskanych z (2) przez przyrównanie do zera pochodnych czasowych.

Rozwiążemy powyższy układ równań krok po kroku. Z równania na  $f(0)$  dostajemy  $kf(0) = \gamma f(1)$ , z równania na  $f(1)$  i uwzględnieniu poprzedniej relacji dostajemy  $kf(1) = 2\gamma f(2)$ . Czytelniku, proszę, sprawdź, że dla dowolnego  $n > 1$  mamy  $kf(n) = (n + 1)\gamma f(n + 1)$ . Łatwo zrozumieć, dlaczego relacje takie nazywamy warunkami **równowagi szczegółowej**. Teraz już szybko zdążamy do mety, czyli do wzoru na rozkład prawdopodobieństwa  $f(n)$ . Wyznaczamy kolejno z powyższych wzorów  $f(n) = f(0)(k/\gamma)^n/n!$  i po uwzględnieniu warunku, że suma wszystkich prawdopodobieństw musi być równa 1, otrzymujemy

$$f(n) = \frac{\left(\frac{k}{\gamma}\right)^n}{n!} e^{-\frac{k}{\gamma}}.$$

Jest to słynny rozkład Poissona.

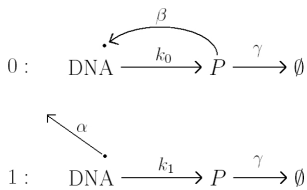
Ale życie, czyli biologia, nie jest takie proste. Okazuje się, że bardzo często gen sam siebie ogranicza. Dzieje się to w ten sposób, że cząsteczka białka może związać się z pewną częścią DNA zwaną promotorem i ograniczyć jego ekspresję, czyli produkcję następnych cząsteczek. W modelu matematycznym przyjmujemy, że DNA może znajdować się w dwóch stanach: stanie związanym, oznaczanym przez 1 i w stanie wolnym 0. W stanie wolnym produkcja białka zachodzi z intensywnością  $k_0$ , a w stanie związanym – z intensywnością  $k_1$  (rysunek 3).

Stan naszej komórki jest teraz dodatkowo opisany przez  $f_i(n)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , i jest łącznym prawdopodobieństwem tego, że w komórce w chwili  $t$  jest  $n$  cząsteczek białka, a DNA jest w stanie  $i$ . Wtedy dla  $n \geq 1$  równanie M ma następującą postać:

$$\begin{cases} \frac{df_0(n, t)}{dt} = k_0 f_0(n - 1, t) + (n + 1)\gamma f_0(n + 1, t) - (k_0 + n\gamma)f_0(n, t) + \alpha f_1(n, t) - n\beta f_0(n, t), \\ \frac{df_1(n, t)}{dt} = k_1 f_1(n - 1, t) + n\gamma f_1(n + 1, t) - (k_1 + (n - 1)\gamma)f_1(n, t) - \alpha f_1(n, t) + n\beta f_0(n, t), \end{cases}$$

gdzie  $\alpha$  jest intensywnością odłączania białka od promotora, a  $\beta$  intensywnością przyłączania. Zauważmy, że zgodnie z obserwacjami biologicznymi związana cząsteczka białka nie ulega degradacji.

Okazuje się, że powyższego układu równań nie możemy rozwiązać nawet w stanie stacjonarnym. Łatwo sprawdzić, że nie są spełnione warunki równowagi szczegółowej. I znowu na pomoc przychodzi pole średnie. Zastępujemy  $n$  w składnikach opisujących przełączanie się genu między dwoma stanami przez jego nieznaną wartość oczekiwaną.



Rys. 3. Samoograniczający się gen,  $\alpha, \beta, k_i, \gamma$  są odpowiednio intensywnościami odłączania i przyłączania białka do promotora, produkcji i degradacji białka.

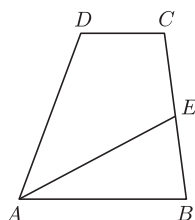


## Literatura

- [1] Portal Matematyka Stosowana, <http://mst.mimuw.edu.pl/>.
- [2] Jacek Miękiś i Paulina Szymańska, *Gene expression in self-repressing system with multiple gene copies*, Bull. Math. Biol. 75 (2013), 317–330, <https://www.mimuw.edu.pl/~miekijsz/bmbselfreg.pdf>, rozszerzona wersja pracy magisterskiej P. Szymańskiej.
- [3] Jacek Miękiś i Paulina Szymańska, *On spins and genes*, Mathematica Applicanda 40 (2012), 15–25, <https://www.mimuw.edu.pl/~miekijsz/ongenesandspins.pdf>.



## Zadania



Niestety, nadal nie umiemy rozwiązać równania M w stanie stacjonarnym (brak równowagi szczegółowej nadal nam doskwiera), ale przynajmniej dostajemy – tak jak w modelu Isinga – równanie (dokładniej: układ równań) na nieznaną wartość oczekiwaną. Rozwiązujemy równanie i dostajemy wzór na wartość oczekiwaną liczby cząsteczek białka w stanie stacjonarnym, a to zawsze cieszy matematyków i mamy nadzieję, że również będzie cieszyć biologów. Kończy nam się czas i przestrzeń przeznaczona na rozważania o polu średnim dla samoograniczającego się genu, zaciekawionych Czytelników odsyłamy znowu do naszych notatek i do artykułu naukowego [1, 2], a także do [3].

O innych ciekawych zastosowaniach matematyki można przeczytać w artykułach Marka Bodnara, Urszuli Forys i Pawła Matejka w sierpniowym numerze *Delta* w 2014 roku oraz Witolda Sadowskiego w numerze grudniowym. I oczywiście przeczytajcie w tym numerze artykuł Tadeusza Płatkowskiego o dylematach społecznych, Wojciecha Niemiry o spacerach i polimerach oraz Piotra Dittwalda o (nie)prawdopodobnych izotopach. I do zobaczenia na Banacha (wejście od Pasteura).

Redaguje Tomasz TKOCZ

**M 1456.** W trapezie  $ABCD$  boki  $AB$  i  $CD$  są równoległe oraz  $AB = 2 \cdot CD$ . Punkt  $E$  jest środkiem boku  $BC$  (rys. obok). Udowodnić, że jeśli w czworokąt  $AECD$  można wpisać okrąg, to  $AB = BC$ .

Rozwiązanie na str. 15

**M 1457.** Niech  $x_1, \dots, x_n$  będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi, przy czym  $n \geq 3$ . Dla wygody przyjmijmy dodatkowo, że  $x_{n+1} = x_1$ ,  $x_{n+2} = x_2$ .

(a) Udowodnić, że

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{x_{k+1}}{x_k + x_{k+1}}.$$

(b) Wykazać, że jeśli dodatkowo ciąg  $(x_k)_{k=1}^n$  jest monotoniczny, to

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_k + x_{k+1}},$$

oraz

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geq \frac{n}{2}.$$

Rozwiązanie na str. 13

**M 1458.** Rozstrzygnąć, czy dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 3$  można wybrać  $n$  punktów na płaszczyźnie tak, aby odległość między każdymi dwoma była co najwyżej 1 i była równa 1 dla dokładnie  $n$  par punktów.

Rozwiązanie na str. 12



Przygotował Michał NAWROCKI

**F 879.** Z południowego i z północnego bieguna ziemskiego wystrzelono równocześnie rakiety z jednakowymi prędkościami początkowymi, skierowanymi poziomo. Po 3 godzinach i 20 minutach rakiety znalazły się w maksymalnej odległości od siebie. Znaleźć tę maksymalną odległość. Przyjąć, że przyspieszenie ziemskie wynosi  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , a Ziemia jest kulą o promieniu  $R = 6400 \text{ km}$ .  
Rozwiązanie na str. 14

**F 880.** Czasową zależność natężenia pola elektrycznego fali elektromagnetycznej o częstości kołowej  $\omega = 2 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$  i amplitudzie modulowanej z częstością  $\Omega = 2 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  można zapisać jako  $E = A(1 + \cos \Omega t) \cos \omega t$  (gdzie  $A$  to stała). Znaleźć maksymalną energię elektronów „wybijanych” przez taką falę z atomów gazowego wodoru, dla którego energia jonizacji wynosi  $W_i = 13,5 \text{ eV}$ .  
Rozwiązanie na str. 16

# (Nie)prawdopodobne izotopy

Piotr DITTWALD\*



Pisząc „masa” mam tu na myśli masę atomową.



Elektrony (właśnie z powodu ich bardzo małej masy względem masy nukleonów) będziemy dalej w naszej analizie pomijać.

W niniejszym artykule skoncentrujemy się tylko na izotopach stabilnych, tj. niepodlegających samoczynnemu rozpadowi, jak to dzieje się w przypadku izotopów promieniotwórczych.



Wyobraźmy sobie fabrykę cząsteczek składających się z dwóch atomów wodoru ( $H_2$ ). Inżynier obsługujący skomplikowaną maszynę zgłasza do magazynu zapotrzebowanie na dwa atomy wodoru, jednak okazuje się, że dostępne są dwa typy atomów wodoru (które oznaczymy jako  $^1H$  oraz  $^2H$ ), różniące się masą (dla typu  $^1H$  wynosi ona  $M_{H,1}$ , zaś dla typu  $^2H$  masa jest równa  $M_{H,2}$ ). Dodatkowo, inżynier otrzymuje każdy z tych typów atomów wodoru z właściwym temu typowi prawdopodobieństwem (odpowiednio  $p_{H,1}$  oraz  $p_{H,2}$ , przy czym zachodzi równość  $p_{H,1} + p_{H,2} = 1$ ).

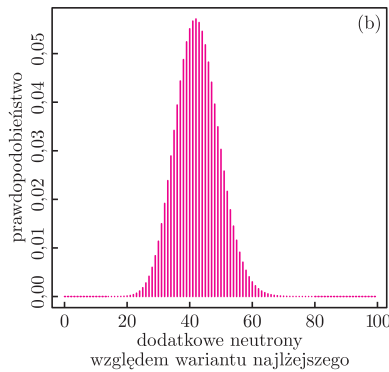
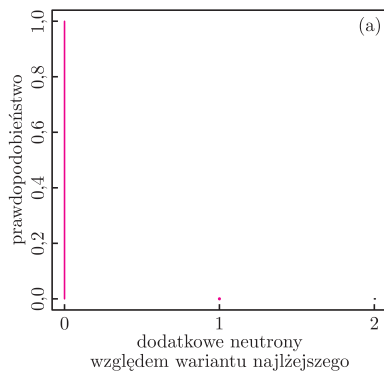
W rezultacie teoretycznie ta sama cząsteczka  $H_2$  może być wyprodukowana w różnych odmianach. Załóżmy, że inżynier chciałby dowiedzieć się, którą cząsteczkę otrzymał, a jedynym narzędziem, które ma pod ręką, jest odpowiednio dokładna waga. Tak więc (pomijając kolejność atomów, która nie wpływa na masę) możliwe są trzy sytuacje: (a) dwa atomy  $^1H$  (o łącznej masie  $2M_{H,1}$ ); (b) jeden atom  $^1H$  oraz jeden atom  $^2H$  o łącznej masie  $M_{H,1} + M_{H,2}$ ; (c) dwa atomy  $^2H$  (o masie  $2M_{H,2}$ ). Jeśli inżynier powtórzy swoje obserwacje dla dostatecznie dużej liczby cząsteczek, to częstości wystąpienia każdej z sytuacji (a), (b), oraz (c) będą odpowiadać prawdopodobieństwom wynoszącym odpowiednio  $(p_{H,1})^2$ ,  $2p_{H,1}p_{H,2}$ , oraz  $(p_{H,2})^2$ . Warto podkreślić ciche dotąd założenie, że każdy z wodorów dostarczany jest niezależnie, więc prawdopodobieństwa się wymnażają; dwójka w wariancie (b) wiąże się z dwiema możliwymi konfiguracjami, których nie rozróżniamy w naszej analizie, tj.  $^1H^2H$  oraz  $^2H^1H$ .

Jak się ma nasza wyobrażona sytuacja do rzeczywistości? Być może pamiętamy z lekcji chemii, że atomy (wbrew ich nazwie pochodzącej od greckiego słowa *átomos*, oznaczającego coś, czego nie da się już podzielić) składają się z jeszcze mniejszych cegiełek: protonów i neutronów (zwanym nukleonami, gdyż tworzą jądro atomowe) oraz dużo od nich lżejszych elektronów. Niektóre pierwiastki chemiczne mają swoje odmiany – izotopy – różniące się liczbą neutronów. W przypadku wodoru, podobnie jak w powyższej historyjce z inżynierem, obserwujemy dwie odmiany izotopowe: prot (jądro składa się z pojedynczego protonu) i deuter (w jądrze występuje jeden proton i jeden neutron), oznaczane właśnie jako  $^1H$  oraz  $^2H$ . Występują one w danym środowisku w ustalonych proporcjach.

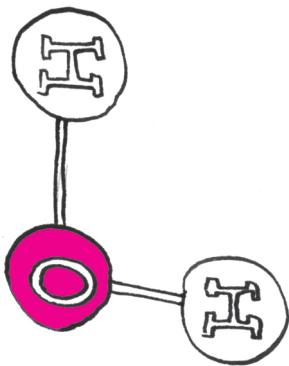
Dodajmy, że przy wyznaczaniu składników mieszanin można posłużyć się bardzo dokładną „wagą”, tj. spektrometrem mas, który jest w stanie zbadać ilość substancji o zadanej masie. Bardziej precyzyjnie, spektrometr mas rozdziela cząsteczki względem wartości współczynnika  $m/z$ , tj. stosunku masy do ładunku – mierzone są tylko naładowane cząsteczki; wartość  $m/z$  oblicza się np. na podstawie czasu, jaki potrzebuje cząsteczka na pokonanie określonej drogi w polu elektrycznym. My założymy dla uproszczenia, że nasz spektrometr mas analizuje cząsteczki naładowane znanym ładunkiem, więc przekształcenie między stosunkiem masy do ładunku a masą jest łatwe.

Podsumowując nasze dotychczasowe rozważania, cząsteczka wodoru ( $H_2$ ) w idealnym eksperymencie będzie widoczna z grubsza w trzech różnych miejscach na osi oznaczającej masę. Masy protonu i neutronu są bardzo zbliżone. Dla uproszczenia założymy, że każdy nukleon waży jednostkę masy (oznaczoną jako dalton, Da), tak więc  $M_{H,1} = 1$  Da;  $M_{H,2} = 2$  Da. Przyjmijmy ponadto, że  $p_{H,1} = 0,999885$ , zaś  $p_{H,2} = 0,000115$  (użyte wartości odpowiadają w przybliżeniu rzeczywistym prawdopodobieństwom występowania poszczególnych izotopów w glebie wg standardu IUPAC, por. z tabelą na str. 7). Dla powyższych wartości możemy naszkicować rozkład prawdopodobieństw wariantów izotopowych wodoru względem ich masy (rysunek a). Od razu widzimy, że wyraźnie najbardziej prawdopodobny (ponad 99,9%) jest wariant najlżejszy.

\*Instytut Informatyki,  
Uniwersytet Warszawski;  
Instytut Chemii Organicznej  
Polskiej Akademii Nauk



Rozkłady izotopowe cząsteczek (a) wodoru ( $H_2$ ) oraz (b) surowiczey albuminy wołowej (BSA;  $C_{2934}H_{4615}N_{781}O_{897}S_{39}$ ).



$^{16}C$	0,9893	$^{16}O$	0,99757
$^{17}C$	0,0107	$^{17}O$	0,00038
$^1H$	0,999885	$^{18}O$	0,00205
$^2H$	0,000115	$^{32}S$	0,9493
$^{14}N$	0,99632	$^{33}S$	0,0076
$^{15}N$	0,00368	$^{34}S$	0,0429
		$^{36}S$	0,0002

Prawdopodobieństwa występowania stabilnych wariantów izotopowych dla pięciu pierwiastków chemicznych wg IUPAC (ang. *International Union of Pure and Applied Chemistry*) na podst. raportu Rosman et al., 1998.

Rozpatrzmy czysto hipotetyczną cząsteczkę wodoru składającą się z  $w$  atomów (ozn.  $H_w$ ). Teraz możliwe są następujące warianty izotopowe tej cząsteczki: dla  $0 \leq k \leq w$  istnieje wariant składający się z  $w - k$  atomów  $^1H$  oraz  $k$  atomów  $^2H$  o masie  $(w - k)M_{H,1} + kM_{H,2}$ , oraz o prawdopodobieństwie występowania:

$$(1) \quad q_k = \binom{w}{k} p_{H,1}^{w-k} p_{H,2}^k.$$

Rozpoznajemy tu dobrze znany rozkład dwumianowy. Wprowadźmy wielomian  $Q_{H_w}(I) = \sum_k q_k I^k$ . Zauważmy, że  $Q_{H_w}(I) = (p_{H,1} + p_{H,2}I)^w$ , gdyż po wymnożeniu i zgrupowaniu wyrazów z  $I^k$  otrzymamy właśnie wartość prawdopodobieństwa wariantu o  $k$  neutronów cięższego niż wariant najlżejszy. Funkcję  $Q_{H_w}(I)$  nazywamy funkcją tworzącą rozkładu cząsteczki  $H_w$  (z równania (1) znamy wzór na  $q_k$ , ale w bardziej skomplikowanych przypadkach funkcje tworzące okazują się bardzo wygodne). Ponadto, dla dużych  $w$  najbardziej prawdopodobny wcale niekoniecznie będzie wariant najlżejszy, np. dla  $w = 10\,000$  mamy  $q_0 < q_1$  (sprawdzenie tej nierówności pozostawiamy Czytelnikowi jako proste ćwiczenie; ponadto proponujemy znalezienie najmniejszego takiego  $w$ , dla którego wskazana nierówność zachodzi). Powyższy przykład, choć wykorzystujący cząsteczkę hipotetyczną, miał na celu wyrobienie w Czytelniku intuicji, że nawet jeśli dla pojedynczego atomu wariant najlżejszy jest najbardziej prawdopodobny (w przypadku wodoru różnica wynosi kilka rzędów wielkości), to dla dużych cząsteczek wcale już niekoniecznie.

Rozważmy teraz cząsteczkę wody  $H_2O$ . Tlen ma aż trzy stabilne izotopy, oznaczone jako  $^{16}O$ ,  $^{17}O$ , oraz  $^{18}O$  (wariant najlżejszy składa się z ośmiu protonów i ośmiu neutronów, kolejne warianty mają, odpowiednio, jeden i dwa neutrony więcej). Masy i prawdopodobieństwa poszczególnych izotopów dla rozważanych pierwiastków będziemy oznaczać analogicznie jak w przypadku wodoru. Tak więc w cząsteczce wody rozróżnimy pięć różnych wariantów izotopowych o prawdopodobieństwach:

$$\begin{aligned} q_0 &= p_{H,1}^2 p_{O,16}, \\ q_1 &= p_{H,1}^2 p_{O,17} + 2p_{H,1} p_{H,2} p_{O,16}, \\ q_2 &= p_{H,1}^2 p_{O,18} + 2p_{H,1} p_{H,2} p_{O,17} + p_{H,2}^2 p_{O,16}, \\ q_3 &= 2p_{H,1} p_{H,2} p_{O,18} + p_{H,2}^2 p_{O,17}, \\ q_4 &= p_{H,2}^2 p_{O,18}. \end{aligned}$$

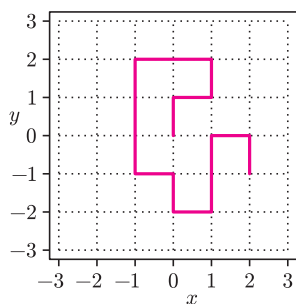
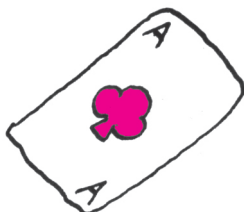
Widzimy, że powyższe wzory są już dużo bardziej skomplikowane. Dlatego raz jeszcze przyda się nam zastosowanie funkcji tworzącej, tym razem postaci  $Q_{H_2O}(I) = (p_{H,1} + p_{H,2}I)^2 (p_{O,16} + p_{O,17}I + p_{O,18}I^2)$ . Poszczególne prawdopodobieństwa znów możemy uzyskać ze standardowej reprezentacji wielomianowej, tj.  $Q_{H_2O}(I) = \sum_k q_k I^k$ .

Badane w spektrometrii mas białka składają się głównie z pięciu pierwiastków chemicznych: wodoru, węgla, azotu, tlenu i siarki. Stabilne izotopy wraz z ich masami oraz prawdopodobieństwami występowania przedstawione są w tabelce obok. Dla związku chemicznego o sumarycznym wzorze  $C_v H_w N_x O_y S_z$  ( $v$  to liczba atomów węgla,  $w$  to liczba atomów wodoru itd.) odpowiednia funkcja tworząca ma postać

$$(2) \quad Q(I)_{C_v H_w N_x O_y S_z} = (p_{C,12} + p_{C,13}I)^v \cdot (p_{H,1} + p_{H,2}I)^w \cdot (p_{N,14} + p_{N,15}I)^x \cdot (p_{O,16} + p_{O,17}I + p_{O,18}I^2)^y \cdot (p_{S,32} + p_{S,33}I + p_{S,34}I^2 + p_{S,36}I^4)^z.$$

Warto zdawać sobie sprawę, że w przyrodzie występują białka o olbrzymiej liczbie atomów, np. surowicza albumina wołowa (oznaczana też BSA od ang. *Bovine Serum Albumin*) o wzorze chemicznym  $C_{2934}H_{4615}N_{781}O_{897}S_{39}$  wcale nie należy do największych. Rozkład izotopowy tego białka prezentujemy na rysunku b. Rzeczywiście, mimo znacznej przewagi najlżejszych izotopów





Rys. 1. Przykład SAW-a o długości  $k = 15$ .

\*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski; Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

w przyrodzie, wariant najlżejszy przestaje być najbardziej prawdopodobny – dominuje natomiast wariant z 42 dodatkowymi neutronami. Tak więc dzięki obliczeniu teoretycznego rozkładu izotopowego łatwo zorientować się, że osoba analizująca BSA spektrometrem mas powinna oczekiwać, że aparat zmierzy substancję cięższą o około 42 Da od masy najlżejszego wariantu tej cząsteczki.

Często istnieje wiele cząsteczek o zadanej masie, każda dodatkowa informacja może więc być przydatna w poprawnej identyfikacji. Taką informacją jest, na przykład, właśnie rozkład izotopowy. Rozważmy dwie cząsteczki: propan ( $C_3H_8$ ) oraz dwutlenek węgla ( $CO_2$ ). Mają one taką samą masę wariantu najlżejszego (44 Da), w obu przypadkach też najwyższe jest prawdopodobieństwo tego wariantu. Gdy obliczymy stosunek prawdopodobieństw  $\frac{q_1}{q_0}$  dla każdego z nich, okaże się, że choć obie wartości są bardzo małe, to jednak w przypadku pierwszej cząsteczki jest ona około trzy razy większa niż w przypadku drugiej (dokładne obliczenia pozostawiamy Czytelnikowi).

Przy przewidywaniu tego, jak będzie wyglądał dla danej cząsteczki wynik pomiaru w eksperymencie wykorzystującym spektrometr mas, pomocne może okazać się więc obliczenie jej rozkładu izotopowego. Problem ten sprowadziliśmy zaś do czysto matematycznego zagadnienia potęgowania wielomianów (por. równanie (2)). To już jednak temat na inną opowieść...

## Monte Carlo, spacer i polimery

Wojciech NIEMIRO\*

Z czym kojarzy się Monte Carlo? Z kasynami, hazardem, ruletką. A więc Monte Carlo jest symbolem potęgi *przypadku*, który jednym pozwala zbijać fortuny, innych rujnuje. Są jednak ludzie, którzy przypadkowość, losowość potrafią okiełznać i wykorzystać z pożytkiem (przynajmniej dla siebie). Oczywiście, takimi ludźmi są właściciele kasyn gry, ale nie tylko. Również matematycy zaprzęgają losowość do pożytecznej roboty. Metody obliczeniowe oparte na generowaniu (symulowaniu komputerowym) zdarzeń losowych nazywają się... oczywiście, metodami Monte Carlo.

*Liczenie przedmiotów* nie wydaje się zadaniem wymagającym wyrafinowanej matematyki, wykraczającej ponad program przedszkolny. Nie widać też, jaką rolę w czynności zliczania miałby odgrywać przypadek. A jednak! Rozważymy pozornie proste zadanie zliczania dróg, w którym ujawnią się nieoczekiwane trudności i pokażemy, jak pomysłowe metody Monte Carlo wynaleziono, aby te trudności pokonać.

Wyobraźmy sobie, że idziemy na spacer. Załóżmy, że mieszkamy w mieście, w którym ulice tworzą regularną, kwadratową siatkę, tak jak na rysunku 1. Ruszamy z punktu początkowego, wybierając jedną z czterech ulic. Idziemy zatem na północ, na zachód, na południe lub na wschód. Przechodzimy do sąsiedniego skrzyżowania i znowu wybieramy jeden z 4 kierunków. Powtarzamy całą procedurę, powiedzmy,  $k$  razy. Przebyta droga jest łamaną składającą się z  $k$  odcinków o jednostkowej długości. Na rysunku 1 mamy przykład drogi o długości  $k = 15$ . Używając układu współrzędnych „zaczepionego w punkcie początkowym”, możemy tę drogę zapisać jako ciąg kolejno odwiedzanych punktów:

$$(0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (0, 2) \rightarrow \dots \rightarrow (2, 0) \rightarrow (2, -1).$$

Inny sposób zakodowania tej samej drogi to podanie kierunków ruchu w kolejnych „krokach”:  $N, E, N, W, W, \dots, E, S$ . Ile jest wszystkich dróg o długości  $k$ ? Odpowiedź jest łatwa:  $4^k$ . Musimy tu wyjaśnić, że licząc drogi wychodzące z tego samego punktu, utożsamiamy drogi z ciągami liter z alfabetu  $\{N, W, S, E\}$ .

$k$	$Z_k$
1	4
2	12
3	36
4	100

Odpowiedź można znaleźć w dalszej części tego artykułu.

Zmieńmy teraz nasze „reguły spacerowania”. Przypuśćmy, że nie chcemy powtórnie przechodzić przez punkt, który już wcześniej odwiedziliśmy. W ciągu opisującym drogę nie może dwukrotnie pojawić się ten sam punkt. Tę własność ma np. droga na rysunku 1. Po angielsku taka droga nazywa się *Self Avoiding Walk*, w skrócie SAW. Ile jest SAW-ów o długości  $k$ ? Wystarczy je wszystkie narysować i policzyć, prawda? Tą metodą można zbudować widoczną obok tabelkę. Liczbę SAW-ów o długości  $k$  oznaczmy przez  $Z_k$ . Ale co dalej? Im dalej, tym gorzej. Ile jest SAW-ów o długości  $k = 50$ ? W istocie, liczenie SAW-ów jest na tyle trudnym zadaniem, że matematycy (i fizycy, o czym dalej) uciekają się do przybliżonego zliczania metodą Monte Carlo. Najprostszy algorytm tego rodzaju jest niemal oczywisty. Ustalmy  $k$ . Oznaczmy przez  $\mathcal{X}$  zbiór wszystkich dróg o długości  $k$ , zaś przez  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$  zbiór SAW-ów o długości  $k$ . Oczywiście  $|\mathcal{Z}| = Z_k$  i  $|\mathcal{X}| = 4^k$  (kreseczki  $| \cdot |$  oznaczają liczbę elementów zbioru; dla uproszczenia przy symbolach zbiorów zrezygnowaliśmy z indeksu  $k$ ). Jeśli wybierzemy losowo jedną z dróg ze zbioru  $\mathcal{X}$ , to prawdopodobieństwo otrzymania „przypadkiem” SAW-a jest równe  $|\mathcal{Z}|/|\mathcal{X}|$ . Jeśli wybierzemy losowo i niezależnie  $n$  dróg, to spośród nich znajdzie się pewna liczba, powiedzmy  $n_1$ , SAW-ów. Widać, że dla dużych  $n$  powinniśmy mieć

$$(1) \quad \frac{n_1}{n} \approx P(\mathcal{Z}) = \frac{|\mathcal{Z}|}{|\mathcal{X}|}.$$

Przybliżenie staje się coraz lepsze w miarę zwiększania  $n$ . Ścisłe sformułowanie tego stwierdzenia nazywa się Prawem Wielkich Liczb (PWL) i jest podstawą rachunku prawdopodobieństwa. Nie trzeba jednak wielkiej wiedzy z tej dziedziny, wystarczy trochę zdrowego rozsądku, aby w przybliżoną równość (1) uwierzyć i ją zrozumieć. Z naszego punktu widzenia ważne jest wykorzystanie PWL do oszacowania nieznaney liczby SAW-ów. Wiemy, że  $|\mathcal{X}| = 4^k$ . Zatem

- $\frac{n_1}{n} 4^k \approx |\mathcal{Z}|$  jest oszacowaniem liczby  $Z_k$  prostą metodą Monte Carlo.

W zasadzie możemy osiągnąć dowolną dokładność dla odpowiednio dużych  $n$ . Zauważmy, że bardzo łatwo wylosować drogę ze zbioru  $\mathcal{X}$  w taki sposób, aby dla każdego  $x \in \mathcal{X}$  prawdopodobieństwo wybrania  $x$  było jednakowe, równe  $P(x) = 1/4^k$ . Na każdym kroku wybieramy jeden z 4 kierunków losowo. Możemy dwa razy rzucić monetą i umówić się: jeśli otrzymamy OO, to  $N$ , jeśli OR, to  $W$ , jeśli RO, to  $S$ , jeśli RR, to  $E$ . W ten sposób generujemy ciąg kodujący drogę „błądzenia przypadkowego”. Komputer pozwala szybko „rzucić monetą” np.  $(2k) \cdot 10000$  razy i wygenerować  $n = 10000$  takich dróg.

Niestety, prosta metoda Monte Carlo jest bardzo nieefektywna, bo dla dużych  $k$  prawdopodobieństwo  $P(\mathcal{Z}) = |\mathcal{Z}|/|\mathcal{X}|$  szybko zbliża się do zera. Oczekiwanie na przypadkowe trafienie w zbiór  $\mathcal{Z}$ , czyli wylosowanie SAW-a, zaczyna przypominać poszukiwanie igły w stogu siana. Możliwym rozwiązaniem tego problemu jest metoda „wzrostu” zaproponowana przez Ariannę i Marshalla Rosenbluthów polega na losowaniu kolejnych kroków błądzenia przypadkowego tylko spośród „dopuszczalnych punktów”, to znaczy punktów wcześniej nieodwiedzonych. W każdym kroku, z wyjątkiem pierwszego, mamy co najwyżej 3 możliwości. Rysunek 2 (następna strona) pokazuje kolejne kroki prowadzące do zbudowania SAW-a z rysunku 1. Widać, że kolejne kroki wybieraliśmy spośród

4, 3, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 1, 3

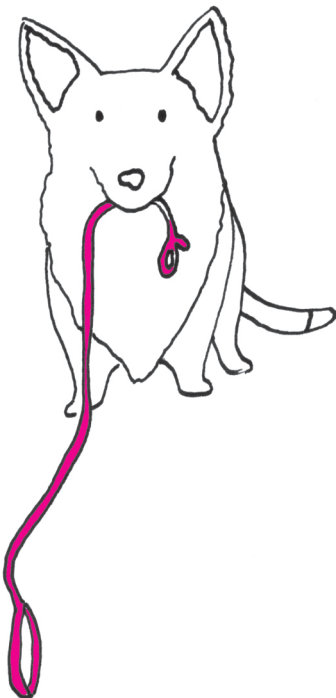
możliwych. Nasz SAW został zatem wylosowany z prawdopodobieństwem

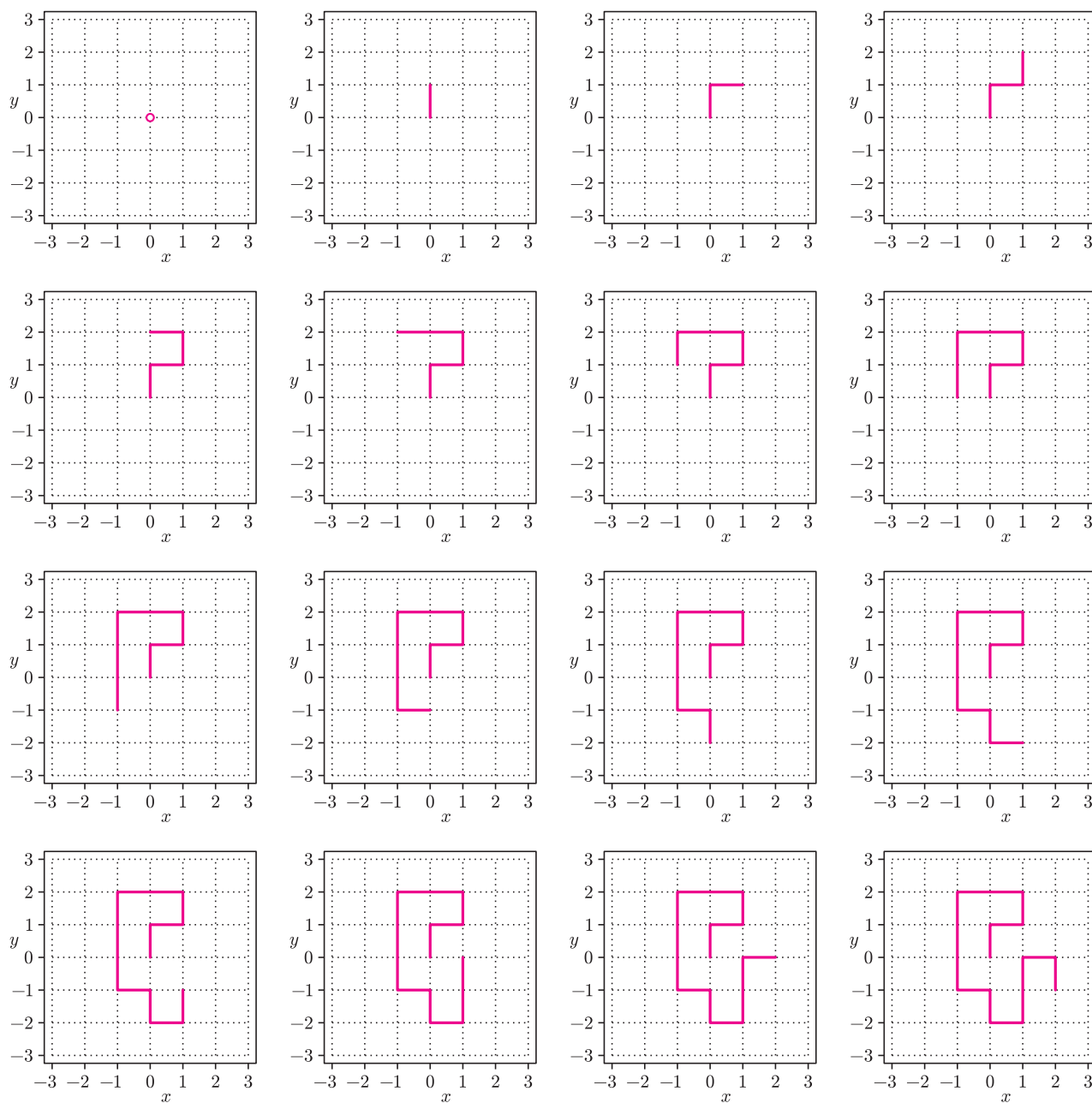
$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3}.$$

Powiedzmy ogólniej, że przy budowaniu SAW-a  $x$  o długości  $l$  mamy kolejno

$$m_1 = 4, m_2, \dots, m_l$$

możliwości. Nie jest przy tym wykluczone, że w pewnym kroku  $l < k$  nie mamy żadnej dalszej możliwości,  $m_{l+1} = 0$ . Mówimy wtedy, że powstał nieprzedłużalny SAW o długości  $l$ . Niech  $\mathcal{Y}$  oznacza zbiór wszystkich SAW-ów o długości  $l = k$  oraz nieprzedłużalnych SAW-ów o długości  $l < k$ . Oczywiście,  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$ .





Rys. 2. Generowanie SAW-a metodą „wzrostu”.

Prawdopodobieństwo wylosowania SAW-a  $x \in \mathcal{Y}$  jest równe

$$P(x) = \frac{1}{m_1} \cdot \frac{1}{m_2} \cdots \frac{1}{m_l}.$$

Niech, dla  $x \in \mathcal{Y}$ , będzie

$$W(x) = \begin{cases} m_1 \cdot m_2 \cdots m_k & \text{jeżeli } x \in \mathcal{Z} \text{ (a więc } l = k); \\ 0 & \text{jeżeli } x \notin \mathcal{Z} \text{ (a więc } l < k \text{ i } m_{l+1} = 0). \end{cases}$$

Można interpretować  $W(x)$  jako „wagę” SAW-a  $x$ . Powtórzmy teraz losowanie metodą wzrostu  $n$  razy. Powstaje  $n$  losowych SAW-ów  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ze zbioru  $\mathcal{Y}$ . Obliczamy „średnią wagę” wylosowanych SAW-ów i zauważamy, że

$$(2) \quad \bar{W} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W(X_i) \approx \sum_{x \in \mathcal{Y}} P(x) W(x) = \sum_{x \in \mathcal{Z}} 1 = |\mathcal{Z}|.$$

W rezultacie,

- $\bar{W} \approx |\mathcal{Z}|$  jest to oszacowaniem liczby  $Z_k$  „metodą wzrostu”.

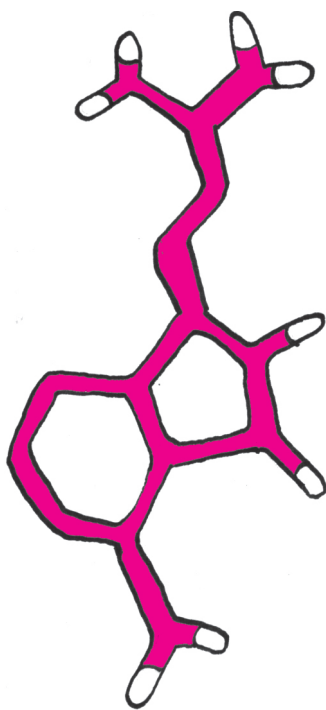
Dodajmy komentarz na temat wzoru (2). Po lewej stronie mamy średnią wagę obliczoną dla wylosowanych  $n$  elementów, czyli „średnią z próbki”. Po prawej mamy też średnią, ale „w całej populacji  $\mathcal{Y}$ ”. Wagi  $W$  zostały specjalnie dobrane tak, aby ta średnia populacyjna była równa  $|\mathcal{Z}|$ . Jeśli  $n$  jest dużo, dużo mniejsze od  $|\mathcal{Z}|$ , to obliczenie  $\bar{W}$  jest możliwe, a bezpośrednio policzenie elementów  $\mathcal{Z}$  jest niemożliwe. Kluczowy jest fakt, że średnia próbkowa przybliża średnią populacyjną. To jest odrobinę ogólniejsza wersja PWL. Poniższy rachunek jest próbą przekonania Czytelnika, że aproksymacja we wzorze (2) jest równie intuicyjna jak ta we wzorze (1). Niech  $n_s$  oznacza liczbę tych spośród wylosowanych elementów  $X_i$ , dla których  $W(X_i) = s$  i  $\mathcal{W}_s = \{x \in \mathcal{Y} : W(x) = s\}$ . Podobnie jak we wzorze (1), na mocy PWL,  $n_s/n \approx P(\mathcal{W}_s)$ . Mamy zatem

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W(X_i) &= \sum_s s \frac{n_s}{n} \approx \\ &\approx \sum_s s P(\mathcal{W}_s) = \sum_s s \sum_{x \in \mathcal{W}_s} P(x) = \sum_x P(x) W(x). \end{aligned}$$

Przy użyciu bardzo wyrafinowanych metod można obliczyć  $Z_k$  dla  $k \leq 72$ , ale o ile mi wiadomo, na tym koniec.

Poniższa tabelka podaje dokładne wartości  $Z_k$ , oszacowania tych liczb prostą metodą Monte Carlo (MC) i „metodą wzrostu”. Dla obu metod, dla każdego  $k$ , liczba symulowanych doświadczeń losowych była równa  $n = 10000$ .

$k$	$Z_k$	proste MC	metoda wzrostu
1	4	4	4
2	12	11,99	12,00
3	36	36,27	36,00
4	100	98,74	100,18
5	284	282,73	283,21
10	44100	41628,47	44041,61
20	897697164	659706977	893264097
30	16741957935348	0	$1,66208 \cdot 10^{13}$
40	300798249248474268	0	$3,067392 \cdot 10^{17}$
50	5292794668724837206644	0	$5,261991 \cdot 10^{21}$



Skąd wzięły się niepokojące zera w dolnej części tabelki? To się natychmiast stanie jasne, jeśli Czytelnik zechce obliczyć  $Z_k/4^k$  dla  $k = 30, 40, 50$ . Z tabelki widać, że metoda wzrostu radzi sobie nie najgorzej nawet dla sporych wielkości  $k$ . Trzeba jednak dodać, że ta metoda, wynaleziona w latach pięćdziesiątych ubiegłego wieku, może być znacznie ulepszona. Istnieją bardziej efektywne algorytmy Monte Carlo, przeznaczone do zliczania SAW-ów. Niektóre z nich wykorzystują zupełnie inne pomysły niż metoda wzrostu. Niestety, opowieść o tym przekracza ramy tego artykułu.

SAW-y pojawiają się w fizyce jako najprostszy model budowy polimerów. Są to duże cząsteczki mające postać łańcucha złożonego z monomerów. Znajdują się w najróżniejszych materiałach: od włókien tkanin, tworzyw sztucznych, gumy i celulozy, aż po białka w żywych organizmach. Struktura przestrzenna łańcucha wpływa na własności fizyczne polimeru. W ogromnym uproszczeniu tę strukturę reprezentuje trójwymiarowy SAW (o długości  $k$  od ok.  $10^3$  do  $10^5$ ).

W przestrzeni trójwymiarowej SAW definiuje się bardzo podobnie jak dwuwymiarowy: jako ciąg punktów o trzech współrzędnych całkowitych, w którym nie ma powtórzeń. Okazuje się, że pewne istotne cechy polimerów są związane np. z odległością (euklidesową) między końcami łańcucha. Badanie tej wielkości było zasadniczą motywacją przytoczonych prac. Zadanie zliczenia SAW-ów pojawiło się „przy okazji” i zafrapowało matematyków. Na zakończenie przytoczę przypuszczenie, którego dotąd nie udało się ani udowodnić, ani obalić. Powróćmy do dwuwymiarowych SAW-ów o długości  $k$  i liczb  $Z_k$ . Przypuszcza się, że istnieje granica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Z_k}{k^{11/32} \mu^k} = A,$$

gdzie  $0 < A < \infty$  i  $2,6256 < \mu \leq 2,6792$ . Coś, co zaczyna się jak przedszkolna zabawa, prowadzi do takich tajemnic.

# „Co jest grane” w dylematach społecznych

Tadeusz PŁATKOWSKI\*

Dylemat społeczny to sytuacja grupy ludzi, w której interes jednostki nie jest zbieżny z interesem grupy – występuje konflikt między interesem prywatnym a zbiorowym. Charakteryzuje się tym, że jeżeli członkowie grupy postąpią zgodnie ze swoimi indywidualnymi interesami, to zyskają mniej, niż gdyby brali przede wszystkim pod uwagę w swoich działaniach interes grupy. Jeżeli jednak wszyscy mieliby postąpić zgodnie z interesem grupy, to osoba, która jako jedyna zmieni decyzję i postąpi zgodnie ze swoim indywidualnym interesem, zyska więcej, niż gdyby działała zgodnie z interesem grupy.

Wiele globalnych problemów ma charakter dylematu społecznego, np. zanieczyszczanie lub niszczenie środowiska naturalnego, konflikty zbrojne, realizacja wspólnych projektów ekonomicznych, socjalnych itp. Dylematy społeczne występują również w małych, np. dwuosobowych grupach. Zaczniemy właśnie od takiego przykładu.

**Przykład 1.** Każda z dwóch osób (graczy) decyduje, nie wiedząc, jaka jest decyzja drugiej strony, czy chce dostać, np. w złotych, 1000 (nazwijmy to akcją D), czy też druga osoba ma dostać 2000 (akcja C). W wyniku tych decyzji następuje przydział pieniędzy. Zakładamy anonimowość graczy: osoby te się nie znają i nigdy się nie poznają, decyzja gracza nie jest i nigdy nie będzie znana przez nikogo innego, włącznie z anonimowym systemem czy instytucją, która przydziela kwoty. Zakładamy też racjonalność graczy: gracz nie interesuje, ile dostanie drugi (przeciwnik), a jedynie, ile dostanie on sam. No i że każdy woli więcej niż mniej...

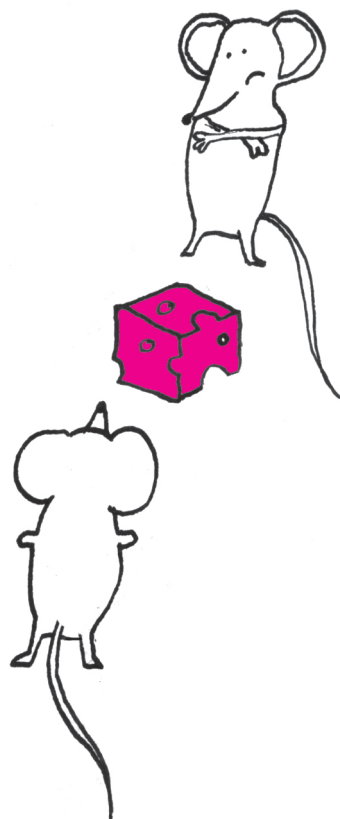
Wybierzesz C czy D, będąc jednym z graczy? Jeśli obaj wybieriecie (zagracie) C, to dostaniecie po 2000, jeżeli D, to po 1000. Naturalne wydawałoby się, że gracze zagrają C. Jeżeli uważasz, że przeciwnik też myśli w ten sposób, czyli zagra C, to możesz ulec pokusie, by zagrać D. Dlaczego? Bo wtedy dostaniesz 1000 za swoją decyzję oraz 2000 w wyniku decyzji C przeciwnika, czyli razem 3000! Ale przeciwnik też może pomyśleć, że zagrasz C, więc także u niego może pojawić się pokusa, by zagrać D, aby otrzymać łącznie 3000. Jeżeli obaj tak zagracie, to dostaniecie po 1000. Co gorsza, jeżeli zagrasz C, a przeciwnik ulegnie pokusie (czyli zagra D), to nic nie dostaniesz!

Opisana sytuacja to dylemat społeczny. Jako interes grupy dwóch graczy przyjmijmy zagranie C przez obu (dostają wtedy po 2000). Interes indywidualny gracza to ulegnięcie pokusie (z perspektywą otrzymania 3000), czyli zagranie D. Jeżeli jednak obaj gracze postąpią zgodnie ze swoim indywidualnym interesem, to dostaną po 1000. Istnieją różne typy dylematów społecznych. Zajmiemy się modelami matematycznymi dylematów. Opiszemy wpieryw najprostsze ciekawe sytuacje.

Niech grupa składa się z dwóch nierozróżnialnych graczy, mających do wyboru, tak jak w omawianym wyżej przykładzie, tylko dwie akcje (strategie): C – współpracować, lub D – zdradzić (od ang. *cooperate-defect*). Będziemy zakładać, że gracze są racjonalni, a ich decyzje anonimowe. W wyniku podjętych akcji gracze otrzymują wypłaty, określone tzw. macierzą gry:

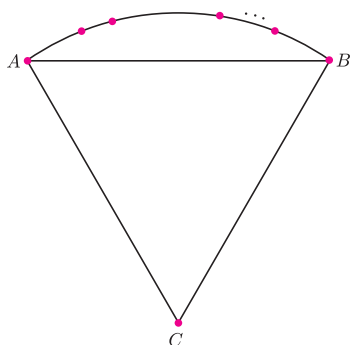
$$(1) \quad \begin{array}{c|cc} & C & D \\ \hline C & R, R & S, T \\ D & T, S & P, P \end{array}$$

Pierwsza współrzędna każdej pary wypłat w macierzy oznacza wypłatę gracza wierszowego (inaczej: pierwszego), gdy gra strategię numerującą ten wiersz, druga – gracza kolumnowego (drugiego), gdy gra strategię numerującą kolumnę. Przykładowo: w parze  $(S, T)$ , gdy gracz wierszowy gra C, a kolumnowy gra D, wypłatą gracza wierszowego jest  $S$ , a kolumnowego –  $T$ . W ten sposób uzyskaliśmy (skończoną) dwuosobową grę strategiczną. Ogólnie:



Rozwiązanie zadania M 1458.  
Odp. Tak!

Wystarczy wybrać trzy punkty  $A, B$  i  $C$  leżące w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku 1, a pozostałe  $n - 3$  punkty z krótszego łuku  $AB$  okręgu o środku  $C$  i promieniu  $CA$ .



\*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



### Rozwiązanie zadania M 1457.

(a) Ponieważ iloczyn liczb  $\frac{x_k + x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}}$ , dla  $k = 1, \dots, n$ , wynosi 1, to korzystając z nierówności między średnimi, dostajemy

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k + x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geq n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k + x_{k+1}}{x_k + x_{k+1}}.$$

Odejmując od obu stron nierówności sumę

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_k + x_{k+1}},$$

dostajemy tezę.

(b) Będziemy korzystać z następującego lematu: *jeśli ciągi liczb rzeczywistych*

$(a_k)_{k=1}^n$  i  $(b_k)_{k=1}^n$  spełniają  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$

oraz

$$b_1, \dots, b_{n-1} \geq b_n,$$

to wówczas

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &\geq \\ &\geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \dots + a_n b_{n-1}. \end{aligned}$$

Prawdziwość lematu wynika z nierówności

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2)b_1 + (a_2 - a_3)b_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)b_{n-1} &\geq \\ &\geq (a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \dots + a_{n-1} - a_n)b_n = \\ &= (a_1 - a_n)b_n = a_1 b_n - a_n b_n, \end{aligned}$$

która jest równoważna tezie.

Załóżmy, że ciąg  $(x_i)$  jest nierosnący:

$$x_1 \geq \dots \geq x_n > 0.$$

Wówczas

$$\frac{1}{x_2 + x_3}, \dots, \frac{1}{x_{n-1} + x_n}, \frac{1}{x_n + x_1} \geq \frac{1}{x_1 + x_2}$$

i z lematu dostajemy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} &= \\ &= \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \\ &\geq \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n}{x_n + x_1} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_k + x_{k+1}}, \end{aligned}$$

co dowodzi (2). Gdy ciąg  $(x_1, \dots, x_n)$  jest niemalejący, postępujemy analogicznie.

Teraz (3) otrzymujemy łatwo przez dodanie nierówności (1) i (2) stronami.

**Definicja 1.** (Skończona)  $N$ -osobowa gra strategiczna jest to trójka:

$$(2) \quad (\mathfrak{N}, (S_i)_{i=1, \dots, N}, (u_i)_{i=1, \dots, N}),$$

gdzie  $\mathfrak{N}$  to zbiór  $N$  graczy,  $S_i$  – skończony zbiór strategii gracza  $i$  (może być inny dla każdego gracza),  $u_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_N \rightarrow R$  – funkcja wypłaty gracza  $i$ , dla  $i = 1, \dots, N$ .

Omówimy trzy sytuacje – gry dwuosobowe opisane powyższą macierzą wypłat – które – na razie intuicyjnie – uznamy za dylematy społeczne. W każdej z nich zbiór strategii każdego gracza to  $\{C, D\}$ , a wypłaty, czyli wartości funkcji wypłat z (2), to odpowiednie wyrazy ogólnej macierzy wypłat (1).

**1.  $T > R > P > S$ .** Każdą grę spełniającą te nierówności nazwiemy **dylematem więźnia**. Przykład 1 jest taką grą, gdyż  $T = 3000$ ,  $R = 2000$ ,  $P = 1000$ ,  $S = 0$ . Nazwa wiąże się z pewną historyjką „śledczo-więzienną”. Wybrałem jednak inną (jej autorem jest noblista, Robert Aumann), by pokazać, że dylemat więźnia niekoniecznie musi się rozgrywać w areszcie...

**2.  $T > R > S > P$ .** Każdą grę spełniającą te nierówności nazwiemy grą **zamieć śnieżna**.

**Przykład 2.** Dwóch kierowców (graczy) siedzi w unieruchomionych autach, po przeciwnych stronach zasypanej przez lawinę drogi. Aby drogę odsnieżyć, należy zużyć  $c > 0$  energii. Oznaczmy  $b$  – korzyść każdego gracza z odsnieżenia drogi (a więc np. z dojechania do domu), przy czym  $b > c$ . Każdy podejmuje samodzielnie decyzję, czy odsnieżyć drogę (strategia C), czy czekać w aucie (strategia D). Zakładamy że jeśli obaj odsnieżają, to tracą  $\frac{c}{2}$  energii każdy. Zakładamy też racjonalność i anonimowość graczy, oraz że decyzje graczy nie wpływają na ich reputację (choć nie wiem, czy nie chciałbym wpłynąć na reputację wygrzewającego się w aucie z drugiej strony lawiny, gdybym sam odsnieżył drogę...).

Grę opisuje macierz wypłat

	C	D
C	$b - \frac{c}{2}, b - \frac{c}{2}$	$b - c, b$
D	$b, b - c$	$0, 0$

Tu, w przeciwieństwie do dylematu więźnia, racjonalna decyzja zależy od tego, co się założy o drugim graczu. Jeżeli założyć, że drugi nie odsnieża (gra D), to lepiej odsnieżyć, bo warto wrócić do domu ( $b > c$ ). Jeżeli założyć, że drugi gracz gra C (odsnieża, bo też chce wrócić do domu!), to lepiej jest zostać w aucie ( $b > b - \frac{c}{2}$ ). No, ale drugi też może tak przebiegle rozumować i wtedy obaj zamarną (wypłata 0). Mamy w ogólnych oznaczeniach wypłat gry dwuosobowej:  $T = b > R = b - \frac{c}{2} > S = b - c > P = 0$ , a więc Przykład 2 opisuje grę zamieć śnieżna.

**3.  $R > T > P > S$ .** Każdą grę spełniającą te nierówności nazwiemy grą **polowanie na jelenia**.

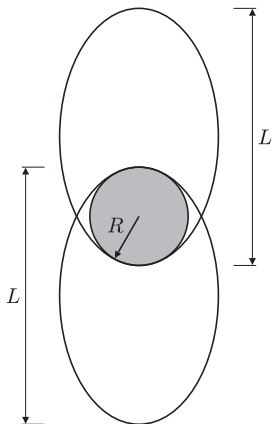
**Przykład 3.** Dwóch myśliwych może zapolować na jelenia (strategia C) lub na zające (strategia D). Ich decyzje zapadają jednocześnie i niezależnie, anonimowo, bez straty reputacji. Jeleń ma wartość  $2b$ , zające po  $c > 0$ , przy czym  $b > 2c$ . Jeśli obaj zapolują na jelenia, to upolują go, dzieląc zysk po równo, czyli otrzymując po  $b$ . Jeśli pierwszy zagra C, drugi D, to pierwszy nic nie upoluje, czyli otrzymuje 0, drugi upoluje dwa zające i otrzymuje  $2c$ . Jeśli obaj zagrają D, to upolują po jednym zającu (wypłata  $c$  dla każdego).

Macierz wypłat graczy ma postać

	C	D
C	$b, b$	$0, 2c$
D	$2c, 0$	$c, c$



**Rozwiązanie zadania F 879.**  
Rakiety będą się poruszały po elipsach (rysunek).



Punkt startu każdej z nich odpowiada minimalnej odległości od środka Ziemi, a punkt orbity leżący dokładnie nad punktem Ziemi po jej przeciwnej stronie stanowi apogeum orbity. W tych punktach prędkość rakiety jest prostopadła do prostej, poprowadzonej od orbity do środka Ziemi. Niech  $L$  będzie dłuższą osią orbity. Maksymalna odległość między raketami wynosi  $D = 2L - 2R$ . Okres obiegu orbity przez raketę wynosi  $T = 2t$ , gdzie  $t$  jest podany w zadaniu okresem. Oznaczmy okres obiegu, gdyby raketa poruszała się po orbicie kołowej o promieniu  $R$  przez  $T_1$ . Zgodnie z III prawem Keplera  $(T/T_1)^2 = [(L/2)/R]^3$  skąd  $L = 2R[(T/T_1)^2]^{1/3}$ . Ponieważ przyspieszenie dośrodkowe rakiety na orbicie wynosi  $g$ , to mamy  $g = (2\pi/T_1)^2 R$ , czyli  $T_1 = 2\pi(R/g)^{1/2}$ . Stąd  $L = 2R(4t^2 g / 4\pi^2 R)^{1/3} \approx 5,67R$  czyli  $D \approx 9,34R \approx 5,98 \cdot 10^4$  km.



W tej historii  $R = b$ ,  $T = 2c$ ,  $P = c$ ,  $S = 0$ , a więc rzeczywiście odpowiada ona grze polowanie na jelenia (często przyjmuje się że wypłata ze strategii D jest równa  $c$  niezależnie od tego, co gra partner; nie zmienia to podstawowych własności matematycznych tej gry).

Jakie strategię wybiorą myśliwi? Gdyby byli pewni, że partner (tu raczej partner, a nie przeciwnik) ma pewną rękę i jak wyceluje, to na pewno trafi, to chyba nie ma wątpliwości, że należy grać C ( $b > 2c$ ). Ale co zagramy, gdy partner miał np. nieprzespaną noc lub podejrzewamy, że ulegnie pokusie strzelenia do tego, co się nawinie, a my nie możemy wrócić z pustymi rękami? Albo że partner nie ma do nas pełnego zaufania, że trafimy, a także nie może do domu wrócić z pustymi rękami i dlatego wymierzy raczej w zająca (założyliśmy, że trafienie zająca jest pewne)? Wtedy decyzja o wyborze strategii nie jest już tak oczywista.

Podaliśmy trzy przykłady gier dwuosobowych, każda z innym układem nierówności na parametry  $T, R, P, S$  i z (intuicyjnie) innego typu „dylematem”. No dobrze, ale przecież istnieje jeszcze 21 innych układów ostrych nierówności spełnianych przez te parametry.

Sformułujemy definicję dylematu społecznego dla ogólnej klasy gier. Okaże się że obejmuje ona ważne i interesujące w zastosowaniach gry wieloosobowe, a dla gier dwuosobowych „zostawia” jedynie gry opisane w Przykładach 1, 2, 3!

Rozważamy zbiór  $\aleph$  złożony z  $N \geq 2$  racjonalnych graczy, mających do wyboru strategię C lub D. Niech  $n = 0, \dots, N$  oznacza liczbę osób grających C. Zakładamy, że gracze są nierozróżnialni, a więc wystarczy określić wypłatę osoby grającej C i osoby grającej D dla wszystkich argumentów  $n$ . Zakładamy pełną anonimowość i racjonalność graczy. Niech  $P_C(n)$ ,  $n = 1, \dots, N$  oznacza wypłatę gracza grającego C (C-gracza), a  $P_D(n)$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$  – wypłatę D-gracza, zwrot „mieć lepiej” (gorzej) oznacza mieć wyższą (niższą) wypłatę. Zakładamy dla uproszczenia, że wszystkie wypłaty są różne.

**Definicja 2.** Dylemat społeczny jest to gra strategiczna (2), w której

$$S_i = \{C, D\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

a funkcje wypłat  $u_i$  są określone przez funkcje  $P_C(n)$  i  $P_D(n)$ , spełniające aksjomaty:

**Aksjomat 1.**  $N$  graczy grających C ma lepiej niż  $N$  graczy grających D:

$$P_C(N) > P_D(0).$$

**Aksjomat 2.** W każdej mieszanej (to znaczy zawierającej co najmniej jednego gracza grającego C i jednego gracza grającego D) grupie  $N$  graczy:

a. D-gracz ma lepiej niż C-gracz:

$$P_D(n) > P_C(n), \quad n = 1, \dots, N - 1.$$

b. Jeśli  $n \leq N - 2$ , to jeżeli D-gracz zmieni strategię na C, to pozostali D-gracze będą mieli lepiej niż przed zmianą:

$$P_D(n) < P_D(n + 1), \quad n = 0, \dots, N - 2.$$

**Aksjomat 3.** Jeśli  $n \geq 2$ , to jeżeli C-gracz zmieni strategię na D, pozostali C-gracze będą mieli gorzej niż przed zmianą:

$$P_C(n - 1) < P_C(n), \quad n = 2, \dots, N.$$

**Aksjomat 4.** Dla co najmniej jednego układu  $N$  graczy z  $n \geq 1$  osobami grającymi C grający C będzie miał lepiej, zmieniając strategię na D (mówimy, że strategia C nie dominuje ściśle strategii D):

$$\exists n \in \{1, \dots, N\} : P_C(n) < P_D(n - 1).$$

Przedstawimy trzy interesujące i ważne w zastosowaniach gry  $N$ -osobowe, i udowodnimy, że są one dylematami społecznymi w sensie Definicji 2 dla dowolnego  $N \geq 2$ .

**Przykład 4.  $N$ -osobowy dylemat więźnia.** Każdy z  $N$  graczy wybiera jedną strategię: C – współpracować, ponosząc koszt  $c$ , lub D – nic nie robić. Strategia współpracy przynosi zysk  $b$ ,  $b > c > 0$ , który jest równo dzielony między pozostałych  $N - 1$  graczy (czyli gracz współpracujący nie bierze udziału w podziale wypracowanego przez siebie zysku!).

Funkcje wypłat mają postać:

$$P_C(n) = -c + \frac{b(n-1)}{N-1}, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$P_D(n) = \frac{bn}{N-1}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

**Przykład 5. Wspólne dobro.** Każdy z  $N$  graczy otrzymuje niepodzielne „dobro” o wartości  $c$  i ma dwie akcje do wyboru: C – przekazać je do wspólnej puli lub D – nie przekazać. Gdy wszyscy gracze wybiorą strategię, następuje efekt synergii: zawartość wspólnej puli jest powiększona  $r$  razy,  $1 < r < N$ , i podzielona równo pomiędzy wszystkich graczy.

Funkcje wypłat mają postać:

$$P_C(n) = rnc/N, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$P_D(n) = rnc/N + c, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

**Przykład 6. Dylemat wspólnego pastwiska.** Każdy z  $N$  rolników może hodować jedną krowę (strategia D) albo nie hodować (strategia C) na wspólnym pastwisku. Niech  $b$  będzie zyskiem rolnika z hodowania krowy, a  $c$  wynikającym z tego zanieczyszczeniem środowiska. Zakładamy  $0 < b < c < bN$ , oraz że wszyscy rolnicy (czyli też grający C!) ponoszą po równo koszt zanieczyszczenia środowiska przez  $N - n$  krow (  $n$  to liczba C-graczy, czyli rolników, którzy nie hodują krowy!).

Funkcje wypłat mają postać:

$$P_C(n) = -\frac{c(N-n)}{N}, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$P_D(n) = b - \frac{c(N-n)}{N}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

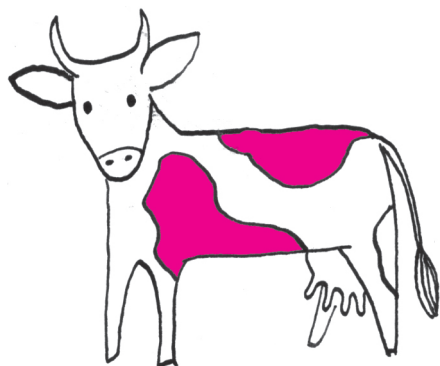
Udowodnimy

**Stwierdzenie 1.** Dla  $N \geq 2$  gry zdefiniowane przez Przykłady 4, 5, 6 są dylematami społecznymi. Dla  $N = 2$  każda z nich jest dylematem więźnia (czyli spełnia nierówności  $T > R > P > S$ ).

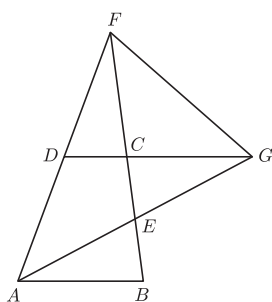
**Dowód.** W każdym z Przykładów 4, 5, 6 postępujemy tak samo. Aksjomaty 1 i 2a sprawdzamy przez podstawienie. Aksjomaty 2b i 3 wynikają z faktu, że  $P_C$  i  $P_D$  są ściśle rosnące. Nierówność definiująca Aksjomat 4 zachodzi dla każdego  $n = 1, \dots, N$ . Dla  $N = 2$  łatwo sprawdzić, że w każdym z Przykładów 4, 5 i 6 zachodzi  $T > R > P > S$ , czyli każdy jest dylematem więźnia. Proste rachunki zostawiamy Czytelnikowi.  $\square$

**Stwierdzenie 2.** Dla  $N = 2$  istnieją tylko trzy gry (czyli trzy układy nierówności spełnianych przez wypłaty  $T, R, P, S$ ) będące dylematami społecznymi: dylemat więźnia, zamieć śnieżna i polowanie na jelenia.

**Dowód.** Dla  $N = 2$  i ogólnej macierzy wypłat (1) z parametrami  $R, S, T, P$ , Aksjomaty 1, 2a, 2b, 3 dają nierówności: 1:  $R > P$ , 2a:  $T > S$ , 2b:  $P < T$ , 3:  $R > S$ . Aksjomat 4 ma postać (przypomnijmy, że rozważamy tylko nierówności ostre):  $T > R \vee P > S$ , a zatem dopuszcza trzy układy nierówności, czyli trzy dylematy społeczne:  
 4a:  $S < P \wedge R < T$ : dylemat więźnia.  
 4b:  $S > P \wedge R < T$ : zamieć śnieżna.  
 4c:  $S < P \wedge R > T$ : polowanie na jelenia.  $\square$



**Rozwiązanie zadania M 1456.** Niech przedłużenia ramion  $AD$  i  $BC$  przecinają się w punkcie  $F$ , a proste  $AE$  i  $DC$  w punkcie  $G$ .



Wówczas trójkąty  $ABE$  i  $GCE$  są przystające, a w szczególności  $GC = AB$  oraz  $E$  jest środkiem  $AG$ . Ponadto  $D$  jest środkiem  $AF$ , ponieważ odcinek  $CD$  jest równoległy do  $AB$  i dwa razy krótszy. Zatem  $FE$  i  $GD$  są środkowymi w trójkącie  $AGF$ .

Skoro w czworokąt  $AECD$  można wpisać okrąg, to zachodzi równość

$$EC + DA = AE + CD.$$

Ponadto ten okrąg jest wpisany w trójkąty  $AGD$  i  $AEF$ , które mają równe pola (równe połowie pola trójkąta  $AGF$ ). W takim razie mają również równe obwody, czyli

$$AE + EG + GC + CD + DA = AE + EC + CF + FD + DA.$$

Dodając te równości stronami i upraszczając, otrzymujemy równość

$$EG + GC + DA = CF + FD + AE.$$

Skoro wiemy, że  $EG = AE$  i  $DA = FD$ , to mamy też  $GC = CF$ . Stąd dostajemy  $AB = GC = CF = BC$ , czyli tezę.





**Rozwiązanie zadania F 880.**

Zależność  $E = A(1 + \cos \Omega t) \cos \omega t$  można zapisać jako

$$A \cos \omega t + (1/2)A \cos[(\omega - \Omega)t] + (1/2)A \cos[(\omega + \Omega)t].$$

Oznacza to, że zmodulowana amplitudowo fala stanowi sumę trzech monochromatycznych fal o częstościach  $\omega$ ,  $\omega_1 = \omega - \Omega$  i  $\omega_2 = \omega + \Omega$ . Energie fotonów odpowiadające każdej z tych fal wynoszą odpowiednio:

$$W = \hbar\omega = 2,1 \cdot 10^{-18} \text{ J}, \\ W_1 = \hbar\omega_1 = 1,89 \cdot 10^{-18} \text{ J}, \\ W_2 = \hbar\omega_2 = 2,31 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

Ponieważ energia jonizacji atomu wodoru  $W_i = 13,5 \text{ eV} = 2,16 \cdot 10^{-18} \text{ J}$  jest większa od energii  $W$  i energii  $W_1$  to fale o częstościach  $\omega$  i  $\omega_1$  nie mogą spowodować jonizacji atomu wodoru, natomiast może ją spowodować fala o częstości  $\omega_2$ . Maksymalna energia „wybitych” przez odpowiadające jej fotony elektronów będzie równa  $W_2 - W_1 = 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

Dla omawianych gier strategicznych możemy podać dodatkową, „psychologiczną” charakterystykę dylematów społecznych za pomocą terminów pokusa i obawa.

**Pokusa:** W grupie  $N$  graczy z  $n \geq 1$  C-graczy pokusa występuje, gdy gracz grający C będzie miał lepiej, zmieniając strategię na D:

$$P_C(n) < P_D(n - 1).$$

Zauważmy, że Aksjomat 4 można sformułować tak: dla  $n \geq 1$  występuje pokusa.

**Obawa:** W grupie  $N$  graczy z  $n \geq 2$  C-graczy obawa występuje wtedy, gdy jeden z C-graczy (nazwijmy go **A**) obawia się następującego scenariusza: inny gracz grający C zmienia akcję na D, przez co obniża wypłatę **A**, i to do wartości niższej niż wypłata, która otrzymałby **A**, gdyby także zmienił swoją strategię na D. Odpowiada to zachodzeniu nierówności

$$P_C(n) > P_C(n - 1) \wedge P_D(n - 2) > P_C(n - 1) \quad \forall n = 2, \dots, N.$$

Pierwsza nierówność odpowiada Aksjomatowi 3, druga Aksjomatowi 4 z  $n \geq 2$ .

Dla gier dwuosobowych z wypłatami danymi przez parametry  $T, R, P, S$  pokusa występuje, gdy  $R < T$ . Obawa występuje, gdy  $R > S$  i  $P > S$ . Tak więc w dylemacie więźnia występuje pokusa i obawa, w zamieci śnieżnej jedynie pokusa, a w polowaniu na jelenia jedynie obawa. Można powiedzieć więc, że w grach dwuosobowych „najostrzejszym” dylematem społecznym jest dylemat więźnia, następnie kolejno zamieć śnieżna i polowanie na jelenia.

Wszystkie powyższe spostrzeżenia i wnioski poczyniliśmy bez konieczności odwoływania się do najważniejszego pojęcia w grach strategicznych – równowagi Nasha (RN). Spróbujmy nasze wnioski „dowiązać” do RN.

**Definicja 3.** RN gry strategicznej (2) jest to taki wektor strategii  $(s_1, \dots, s_N)$ ,  $s_i \in S_i, i = 1, \dots, N$ , że jeżeli każdy gracz gra odpowiadającą mu strategią z tego wektora (tzn. gracz  $i$  gra  $s_i$ ), to żaden z graczy nie podwyższy swojej wypłaty, jeżeli jako jedyny zmieni strategię  $s_i$  na dowolną strategię  $\tilde{s}_i \in S_i$ :

$$u_i((s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)) \geq u_i((s_1, \dots, \tilde{s}_i, \dots, s_n))$$

(są to tzw. RN w strategiach czystych).

Zobaczmy, jak wyglądają takie RN dla trzech omówionych gier  $N$ -osobowych.

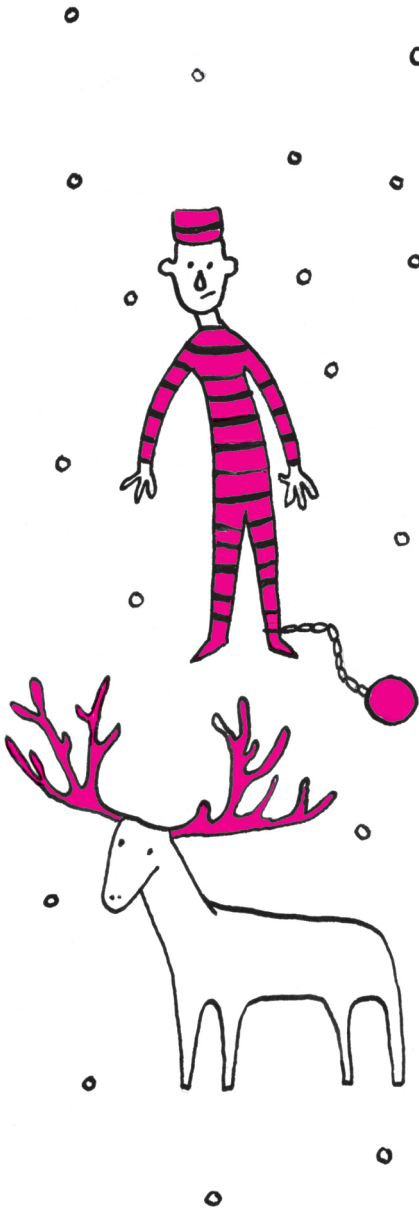
**Stwierdzenie 3.** W Przykładach 4, 5, 6 jedyną RN jest wektor strategii  $(D, \dots, D)$ .

**Dowód.** W każdej z tych gier z definicji funkcji wypłat widać, że  $P_D(0) > P_C(1)$ , czyli że  $(D, \dots, D)$  jest RN. Dla  $n > 0$  zachodzi  $P_C(n) < P_D(n - 1)$ : C-gracz podwyższy swoją wypłatę, zmieniając strategię na D, a zatem jest to jedyna RN. □

Wykazaliśmy, że gry z Przykładów 4, 5, 6 to dylematy społeczne.

W szczególności, zgodnie z Aksjomatem 1, gdyby wszyscy grali C, mieliby lepiej niż w RN (jedynej, jak przed chwilą udowodniliśmy) dla każdej z tych gier:  $P_C(N) > P_D(0)$ . Wektor strategii  $(C, \dots, C)$  nie jest jednak RN w żadnej z nich. Nie jest to prawda dla innych gier będących dylematami społecznymi. Na przykład, dla  $N = 2$  w grze polowanie na jelenia wektor strategii  $(C, C)$  jest RN! [ale nie jedyną: drugą RN w strategiach czystych jest  $(D, D)$ ].

Jak sobie radzić z dylematami społecznymi, aby wynikiem interakcji między graczami była współpraca? Jednym z rozwiązań jest wprowadzenie do gry strategicznej nowych elementów, które promują wybór współpracy jako strategii społecznie pożądanej. Może to być, na przykład, uwzględnienie aspiracji graczy, wprowadzenie interakcji wielokrotnych (gry powtarzalne), usytuowanie gry na grafach, w których gracze – węzły sieci – oddziałują jedynie z graczami ze swojego otoczenia, wprowadzenie niemonetarnych motywacji wyboru strategii, uwzględnienie reputacji graczy itp. Te i podobne idee są obecnie tematami wielu prac naukowych, zarówno o charakterze matematycznym, jak i aplikacyjnym.





## My i Neandertalczycy

W północnym Izraelu, w jaskini Manot, badacze z Izraela, amerykańscy i europejscy, odkryli kobiecą czaszkę, której wiek ocenia się na 55 tysięcy lat. Jest ona w świetnym stanie, co pozwala na dokładniejsze oceny, z którego ludzkiego gatunku pochodzi. Odkrycie to należy uznać za ważne również z tego powodu, że paleontolodzy nadal dyskutują o tym, kiedy *Homo sapiens* wywedrował z Afryki (uznawanej powszechnie za kolebkę tego gatunku), i którą wybrał drogę. Im więcej dobrze datowanych wykopalisk, tym bardziej wiarygodne są współczesne wnioski.

Jaskinia Manot uznana została za ważne odkrycie w 2008 roku, gdy odsłoniła się w trakcie prac budowlanych. Wejście do jaskini przez 15 tysięcy lat blokowało złomisko skalne i stalagmity.

Tylna, zachowana część czaszki, ma charakterystyczny kształt przypominający kształt czaszki dzisiejszych mieszkańców Afryki i Europy, a różni się od współczesnych czaszek mieszkańców Bliskiego Wschodu (Cypr, Izrael, Jordania, Liban, Syria). Z faktu tego wyciąga się wniosek, że mieszkańcy jaskini Manot byli blisko spokrewnieni z pierwszymi kolonizatorami Europy. Wracamy także do wcześniej formułowanych przypuszczeń, że w tym regionie współmieszkali w plejstocenie ludzie naszego gatunku i neandertalczycy.

Różnorodne wnioski dotyczące naszej prehistorii wynikają także ze szczegółowych porównań danych genetycznych. Niezwykle pomocne okazały się wyniki badań sekwencji genomowych człowieka neandertalskiego (najważniejsze prace pochodzą z laboratorium dr Svante Pääbo, kierującego Wydziałem Genetyki w Instytucie Antropologii Ewolucyjnej Maxa Plancka w Lipsku). Dane te wskazują na mniejszą różnicę w sekwencjach między współczesnymi ludźmi i neandertalczykami niż między ludźmi i szympanсами. Dziś większość genetyków godzi się ze stwierdzeniem, że w naszym genomie istnieje 1–4% unikatowych sekwencji znajdujących w genomie neandertalczyków. Ocenia się również, że ludzie neandertalscy wymarli mniej więcej 10 tysięcy lat temu. Przyczyny są nadal dyskutowane, bo (poza zmianami klimatycznymi) niektórzy przypisują „nam” istotną rolę w tym procesie.

Bardzo ciekawe dane epidemiologiczne pojawiły się też ostatnio w związku z dokładniejszą analizą szczegółów genomu neandertalskiego. Stwierdzono, że prawdopodobnie ponad milion lat temu w genomie hominidów doszło do delecji (ubytek sekwencji DNA obecnych w genomie szympansa), które to delecje dziś uważa się za częściowo odpowiedzialne za dwie „ludzkie”, autoimmunologiczne i bardzo uciążliwe choroby genetyczne: łuszczycę i chorobę Crohna. Oznacza to, że neandertalczycy na te choroby też prawdopodobnie chorowali, a do delecji doszło – jak oceniają genetycy – milion lat temu. Dane te również pozwalają na powracanie do pytania o to, dlaczego w ewolucji takie szkodliwe mutacyjne zmiany trwają. Wysłano hipotezę, iż dana mutacja może być z pewnych powodów pożyteczna. Często cytuje się przykłady mutacji leżącej u przyczyn anemii sierpowatej, rozpowszechnionej w rejonie Morza Śródziemnego, która w pewnym stopniu ułatwia przebieg malarii, lub mutacji będącej przyczyną mukowiscydozy, która zmniejsza śmiertelność w przebiegu chorób zakaźnych powodujących biegunki (np. cholera). W przypadku łuszczycy i choroby Crohna być może wzrost aktywności układu immunologicznego był korzystny w zwalczaniu chorób pasożytniczych.

O korzeniach zmian ewolucyjnych warto zawsze rozmyślać.

Magdalena FIKUS

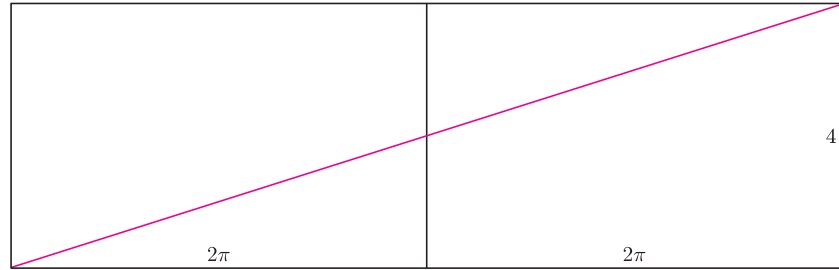
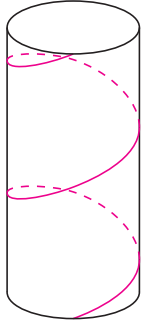
# 5

# mała delta

## Nawijamy, odwijamy

Jaką długość ma linia śrubowa owijająca dwukrotnie walec o promieniu 1 i wysokości 4, tak jak widać poniżej na obrazku z lewej?

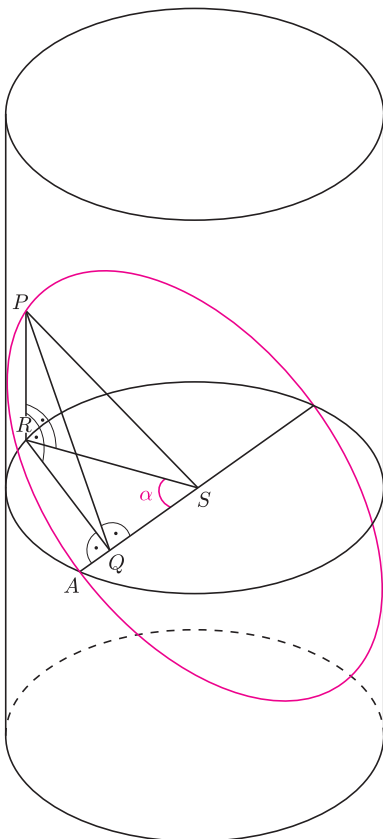
Oczywiście,  $4\sqrt{\pi^2 + 1}$ . Aby przekonać się, że rzeczywiście, wystarczy spojrzeć na obrazek z prawej – jeśli nawiniemy go na walec, to otrzymamy obrazek z lewej.



To elementarne, Watsonie!

Wobec tego zapytajmy teraz o to, jaką długość ma jeden okres sinusoidy (czyli od jakiegoś kąta  $\gamma$  do kąta  $\gamma + 2\pi$ ), bo tego nie ma w poradnikach.

Oczywiście, nie podamy konkretnej liczby, tylko wskażemy inną linię tej samej długości – jest nią elipsa o osiach długości 2 i  $2\sqrt{2}$ . W tym celu wystarczy zauważyć, że jeśli walec o promieniu 1 (ten sam co poprzednio!) owiniemy papierem, a następnie przetniemy płaszczyzną tworzącą z jego osią kąt  $\frac{\pi}{4}$ , to obie otrzymane części papieru po rozwinięciu będą miały jeden z brzegów dokładnie sinusoidalny. To też nietrudno obliczyć. A przecięcie walca płaszczyzną to elipsa (czasami będąca okręgiem). Możemy nawet obliczyć, co otrzymamy przy dowolnym przecięciu owiniętego walca płaszczyzną. Przyjmijmy oznaczenia z rysunku na marginesie. Niech  $S$  będzie środkiem koła dzielącego na pół elipsę otrzymaną z przecięcia walca płaszczyzną tworzącą z osią walca kąt  $\varphi$ . Ograniczający to koło okrąg przecnie elipsę w dwóch punktach będących końcami jego średnicy – jeden z nich oznaczmy przez  $A$ .



Płaszczyzna elipsy i płaszczyzna koła tworzą kąt dwuścienny o rozwartości  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ , czyli gdy poprowadzimy z dowolnego punktu prostej  $AS$  proste do niej prostopadłe w obu tych płaszczyznach, taki też będzie kąt między nimi.

Niech teraz  $P$  będzie dowolnym punktem elipsy. Zrzutujemy go prostopadłe na okrąg, otrzymując punkt  $R$ , który z kolei zrzutujemy prostopadłe na  $AS$ , otrzymując punkt  $Q$ .

Mamy zatem  $AS = RS = 1$  i  $\sphericalangle RQP = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ; oznaczmy też  $a := \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$  oraz  $\alpha := \sphericalangle ASR$  – jest to zarazem długość łuku (po rozwinięciu papieru – odcinka)  $AR$ .

Bez trudu zauważamy, że  $PR = a \sin \alpha$ , co oznacza, że po rozwinięciu przeciętego papieru otrzymamy wykres sinusoidalny, którego wartości zostały pomnożone przez  $a$ . Oryginalną sinusoidę otrzymamy dla  $a = 1$ , czyli gdy  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

Dla  $a = 1$  i  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  odcinek  $PS$  (czyli dłuższa półoś elipsy) będzie miał długość  $\sqrt{2}$ . Krótszą osią elipsy będzie średnica okręgu.

Prawda, że nie bolało?

*Małą Deltę przygotował Marek KORDOS*

## Pierwszy reaktor jądrowy

Grzegorz LIZUREK\*

Pierwszy na Ziemi reaktor jądrowy powstał w... Afryce. Około 2 miliardów lat temu w złożach uranu w okolicach Oklo w Gabonie dochodziło do reakcji łańcuchowej rozszczepienia jąder uranu. Skąd o tym wiemy? Na pierwszy ślad tego zjawiska natrafiono w 1972 roku podczas rutynowych testów próbek z kopalni uranu w Oklo. Okazało się, że zawartość izotopu  $^{235}\text{U}$  w złożu była mniejsza niż w innych tego typu złożach. Ze względu na to przeprowadzono różnego rodzaju badania złoża w Oklo, sprawdzając nie tylko zawartości izotopów uranu, ale także izotopów będących produktem jego rozszczepienia: neodymu i rutenu. Okazało się, że w przypadku wszystkich badanych izotopów zawartość odbiegała od oczekiwanej: na przykład, zawartość izotopu  $^{99}\text{Ru}$ , będącego typowym produktem rozszczepienia uranu za pomocą neutronów termicznych, była ponaddwukrotnie większa niż w innych złożach. Wynioskowano stąd, że w obrębie złoża w Oklo doszło do powstania naturalnego reaktora jądrowego.

Obecnie w żadnym złożu na Ziemi nie zachodzi podobne zjawisko, ponieważ nigdzie nie ma już dostatecznie dużej zawartości izotopu uranu  $^{235}\text{U}$ . W przypadku reaktora w Oklo wynosiła ona około 3% całej masy uranu w złożu, czyli mniej więcej tyle, ile stosuje się we współczesnych reaktorach. Obecnie naturalna koncentracja  $^{235}\text{U}$  jest mniejsza niż 1%, a to ze względu na krótszy czas połowicznego rozpadu tego izotopu od czasu rozpadu  $^{238}\text{U}$ . Są jeszcze inne warunki, które muszą być spełnione, aby naturalny reaktor jądrowy mógł zadziałać.

- Rozmiar złoża uranu powinien przekraczać średni zasięg neutronów rozszczepiających, co odpowiada wielkości złoża równej około 70 cm.
- Musi być obecny *moderator*, czyli substancja, która spowalnia neutrony powstałe w wyniku rozszczepienia na tyle, by te mogły rozszczepić kolejne jądra uranu.
- W złożu powinna być niska koncentracja innych niż uran pierwiastków absorbujących neutrony.

Mechanizm działania reaktora w Oklo polegał na tym, że w złożu uranu występowała woda gruntowa, która działała jako moderator reakcji rozszczepienia, pozwalając rozpocząć się reakcji łańcuchowej. W momencie, kiedy ciepło generowane w rozszczepieniach powodowało wyparowanie wody, moderator zniknął i łańcuchowa reakcja rozszczepienia zwalniała lub ustawała. Następnie, gdy złożo się schłodziło i woda gruntowa z powrotem wsączała się w jego obręb, reakcja ponownie się rozpoczynała. Na podstawie badań pozostałości produktów rozszczepienia obecnych w minerałach złoża oszacowano, że cykl ten składał się z 30-minutowej reakcji łańcuchowej, a następnie dwupółgodzinnego schładzania złoża i powrotu wody gruntowej. Co ciekawe, mechanizm ten był wydajny na tyle, że nigdy nie doszło do wybuchu lub stopienia złoża w wyniku „niekontrolowanej” reakcji łańcuchowej w obrębie złoża. Działanie reaktora w Oklo mogło trwać kilkaset tysięcy lat.

W Oklo znajdowało się 16 stref stanowiących naturalne reaktory jądrowe. Oszacowano, że łączna moc reaktorów wynosiła około 100 kW. W skali globalnej to niewiele: dla porównania moc elektrowni w Bełchatowie, największej konwencjonalnej elektrowni Europy, przekroczyła w 2011 roku 5000 MW, a moc jednego tylko bloku tej elektrowni to ponad 850 MW.

2 mld lat to spory ułamek wieku wszechświata. Ponieważ zaś tempa reakcji jądrowych zależą od „siły” oddziaływań elektromagnetycznych, badanie składu izotopowego złoż w Oklo pozwoliło także na stwierdzenie, że podczas działania naturalnego reaktora oddziaływania elektromagnetyczne miały w zasadzie takie same własności jak dziś. Jest to o tyle ważne, że ogranicza rozpasaną wyobraźnię naukowców próbujących wytłumaczyć anomalie widm absorpcyjnych oświetlanych przez kwazary odległych obłoków gazu właśnie za pomocą zmiennych w czasie własności elektromagnetyzmu. O całej sprawie pisaliśmy w *Delcie* 12/2001.

Redakcja

Powyższy tekst został przygotowany w ramach projektu **EDUSCIENCE**, którego celem jest zmiana formuły nauczania prowadząca do zainteresowania dzieci i młodzieży naukami matematyczno-przyrodniczymi, informatycznymi, technicznymi oraz niezbędnymi w dzisiejszym świecie językami obcymi.

W ramach projektu przygotowane zostały: innowacyjna platforma e-learningowa, portal przyrodniczy, wsparcie metodyczne dla nauczycieli, programy wycieczek dydaktycznych do jednostek naukowych oraz program ogólnopolskiego monitoringu przyrodniczego.

Od roku szkolnego 2014/2015 zapraszamy nauczycieli wszystkich szkół w Polsce do nieodpłatnego korzystania z produktów projektu. Każda szkoła zainteresowana korzystaniem z platformy edukacyjnej i zgromadzonych na niej zasobów, wizytą w obserwatoriach i instytucjach naukowych, lub udziałem w transmisji z Polskiej Stacji Polarnej Hornsund na Spitsbergenie może przyłączyć się do projektu.

Więcej informacji na [www.eduscience.pl](http://www.eduscience.pl).

Agata GOŹDZIK, Instytut Geofizyki PAN, kierownik projektu EDUSCIENCE



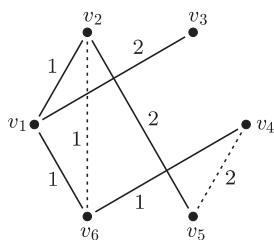
PROJEKT EDUSCIENCE JEST WSPÓLFINANSOWANY ZE ŚRODKÓW UNII EUROPEJSKIEJ W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO.

## Informatyczny kącik olimpijski (81): Kuglarz

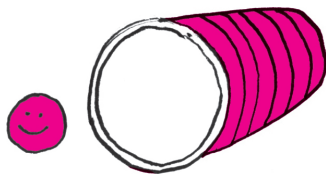
W tym miesiącu omówimy zadanie *Kuglarz* z pierwszej rundy Potyczek Algorytmicznych 2014. Tytułowy kuglarz zaprasza przechodniów do następującej gry. Na stoliku w rzędzie ustawił  $n$  kubków z numerami  $1, 2, \dots, n$ , a zawczasu pod niektórymi schował kauczukowe kulki. Jeśli grający dokładnie odgadnie, które to kubki, to dostaje nagrodę. Kuglarz odpłatnie udziela grającemu podpowiedzi. Za  $c_{ij}$  bajtogroszy (dla  $1 \leq i < j \leq n + 1$ ) gotów jest zdradzić, jaka jest parzystość liczby kulek schowanych pod kubkami o kolejnych numerach  $i, i + 1, \dots, j - 1$ . Znając ceny wszystkich możliwych podpowiedzi, należy wyznaczyć koszt zebrania informacji, które pozwolą określić z całą pewnością, pod którymi kubkami znajdują się kulki. Ścisłej rzecz biorąc, należy znaleźć najmniejszą taką liczbę  $k$ , że istnieje strategia zadawania pytań, która niezależnie od odpowiedzi kuglarza pozwala na zlokalizowanie kulek za co najwyżej  $k$  bajtogroszy.

$i \setminus j$	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	1
2		4	3	2	1
3			3	4	5
4				2	1
5					5

Rys. 1. Przykładowa tabela kosztów dla  $n = 5$  kubków. Koszt  $c_{ij}$  pytania  $[i, j]$  znajduje się na przecięciu wiersza  $i$  z kolumną  $j$ .



Rys. 2. Graf  $G$  po rozważeniu podpowiedzi o kosztach 1 i 2. Zadajemy pytania odpowiadające pogrubionym krawędziom.



Spróbujmy wyznaczyć rozwiązanie dla tabelki kosztów z rysunku 1. Naiwne zadanie pytań o jednokubkowe przedziały kosztowałyby  $1 + 4 + 3 + 2 + 5 = 15$  bajtogroszy. Czy da się lepiej? Oznaczmy przez  $[i, j]$  podpowiedź na temat parzystości liczby kulek pod kubkami o numerach  $i, i + 1, \dots, j - 1$ . Zaczniemy od pytań o małych kosztach: pytanie  $[1, 2]$  daje nam informację, czy pod pierwszym kubkiem znajduje się kulka, a pytanie  $[1, 6]$  o parzystość liczby wszystkich kulek. Zadanie ich kosztuje  $c_{12} + c_{16} = 2$  bajtogrosze. Następne pytanie o małym koszcie to  $[2, 6]$ , ale czy rzeczywiście opłaca się je zadawać? Nie, gdyż na podstawie poprzednich podpowiedzi, znamy parzystość kulek na pozycjach od 2 do 5.

Tę obserwację można nieco uogólnić: na podstawie odpowiedzi na dwa dowolne pytania z trójki  $[i, j]$ ,  $[j, k]$  oraz  $[i, k]$  jesteśmy w stanie wyznaczyć odpowiedź na trzecie z tych pytań. Tutaj następuje kluczowy pomysł: zbudujemy graf pusty  $G$  o  $n + 1$  wierzchołkach  $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ . Dla każdego zadanego przez nas pytania  $[i, j]$ , będziemy w tym grafie łączyć krawędzią wierzchołki  $v_i$  oraz  $v_j$ . Zachodzi teraz następujący fakt: jeśli wierzchołki  $v_i$  oraz  $v_j$  należą do tej samej spójnej składowej grafu, to albo zadaliśmy już kiedyś pytanie  $[i, j]$ , albo jesteśmy w stanie wyznaczyć na nie odpowiedź na podstawie dotychczasowych podpowiedzi kuglarza. Istotnie: jeśli wierzchołki te łączy ścieżka  $v_i = v_{p_0}, v_{p_1}, \dots, v_{p_\ell} = v_j$ , to przez indukcję można pokazać, że możemy wyznaczyć odpowiedzi na kolejne pytania  $[p_0, p_1], [p_0, p_2], \dots, [p_0, p_\ell]$ .

Z powyższych rozważań wynikają następujące wnioski. Nie opłaca się prosić o podpowiedzi, które spowodują powstanie cyklu w grafie, zatem po zadaniu dokładnie  $n$  pytań graf  $G$ , który nam powstanie, będzie drzewem, a zdobyte informacje umożliwią zlokalizowanie wszystkich kulek (obecność kulki pod  $i$ -tym kubkiem to odpowiedź na pytanie  $[i, i + 1]$ ). Zauważmy, że musimy zadać  $n$  pytań, bo każda podpowiedź kuglarza daje nam co najwyżej 1 bit informacji, a musimy zgromadzić  $n$  bitów, żeby wyznaczyć lokalizację kulek. Ponadto, kolejność zadawania pytań nie ma znaczenia. Pozostaje kwestia, jak wybierać pytania. Rozważając je w kolejności od najmniejszych kosztów i pomijając pytania, na które znamy odpowiedź, możemy znaleźć strategię dla przykładu o koszcie 7 bajtogroszy (rys. 2).

Zauważmy, że postępując w taki sposób, obliczyliśmy nic innego, jak drzewo rozpinające o minimalnym koszcie dla nieskierowanego grafu pełnego, w którym każda para wierzchołków  $v_i$  i  $v_j$  jest połączona krawędzią o wadze  $c_{ij}$ . Nasza strategia zachłanna działa dokładnie tak jak algorytm Kruskala, służący do wyznaczania tego drzewa. Ponieważ, jak powiedzieliśmy wyżej, każda strategia zadawania pytań wyznacza nam drzewo rozpinające, zatem, aby znaleźć optymalną strategię, należy znaleźć drzewo rozpinające o minimalnej wadze.

Standardowo robi się to, korzystając właśnie z algorytmu Kruskala lub algorytmu Prima z kolejką priorytetową zrealizowaną za pomocą kopca binarnego. Dla grafu o  $n$  wierzchołkach i  $m$  krawędziach oba algorytmy działają w czasie  $O(m \log n)$ . W naszym przypadku mamy jednak do czynienia z grafem pełnym, w którym  $m = \Omega(n^2)$ , co daje czas  $O(n^2 \log n)$ . Można ten czas poprawić, zastępując kolejkę priorytetową w algorytmie Prima zwykłą tablicą, w której czas wyszukiwania będzie  $O(n)$ , ale czas aktualizacji krawędzi będzie stały. Dzięki temu złożoność rozwiązania zmniejszy się do  $O(n^2)$ .

Tomasz IDZIASZEK

## Kropelki jak żywe

Czyż najbardziej fascynującym zjawiskiem fizycznym nie jest życie? Ale gdzie przebiega granica między materią ożywioną a nieożywioną?

Proszę się nie obawiać – nie będziemy podejmować próby odpowiedzi na te pytania.

Zajmiemy się czymś, co, choć żywe nie jest, to sprawia wrażenie, jakby było [1]. W tym miejscu chciałoby się zawołać za komentatorami radiowymi „szkoda, że Państwo tego nie widzą”. I choć Państwo mogą „to” jednak zobaczyć za pomocą Internetu [2], to przez pierwsze 38 sekund pozostaniemy przy relacji radiowej.

*Szanowni Państwo, rozpoczynamy (czterokrotnie) przyspieszoną relację z zawodów na tafli szklanej o wymiarach w przybliżeniu tysiąc razy mniejszych od lodowiska hokejowego. Zawodnicy, w postaci różnokolorowych kropelek, są właśnie rozstawiani w przypadkowy sposób. Na razie nic się nie dzieje, zawodnicy spokojnie oczekują, choć jednak widać pewne zniecierpliwienie. Wybija czternasta sekunda i nagle kropelki, dwie granatowe i jedna pomarańczowa, ruszają na siebie i zlewają się! Za chwilę mała żółta rzuca się na większą czerwoną i pcha ją do bandy! Jednocześnie niebieska przepycha żółtą po drugiej stronie! I wtedy się zaczyna! Nikt już nad tym nie panuje! Kropelki przepychają się, ganiają, dzielą, odskakują, zlewają! Proszę Państwa, nigdy wcześniej czegoś takiego nie widziałem!*

Na relacjonowanym filmie [2] kropelki są utworzone z mieszaniny glikolu propylenowego (propano-1,2-diolu  $\text{CH}_3\text{CHOHCH}_2\text{OH}$ ) i wody (w której glikol ten, jak wszystkie alkohole o niskiej masie cząsteczkowej, doskonale się rozpuszcza). Płytką szklaną została uprzednio powierzchniowo aktywowana. Dzięki temu jest ona doskonale zwilżana zarówno przez czysty glikol, jak i przez czystą wodę. Natomiast mieszanina wykazuje skończony kąt zwilżania (samo to jest zastanawiające). Kropelki o różnym stężeniu glikolu są różnie zabarwione.

Każde dwie kropelki, oddalone nawet o kilka swoich średnic, przyciągają się tym silniej, im są bliżej. Zetknięcie kropelek o zbliżonym stężeniu powoduje ich zlanie się (1:15 – 1:23). Natomiast gdy stężenia są istotnie różne, to ta o większym stężeniu zaczyna przepychać tę drugą (0:41 – 1:04).

Okazuje się [1], że mechanizmy oddziaływania długozasięgowego i krótkozasięgowego są różne, choć oba wynikają z dwuskładnikowości cieczy.

Niezerowy kąt zwilżania i oddziaływanie długozasięgowo są wywołane parowaniem. Znaczenie ma przede wszystkim ciśnienie pary składnika bardziej lotnego, czyli w tym przypadku wody. Najpierw wykazano, że kosinus wspomnianego kąta zwilżania zależy liniowo od wilgotności. Mikroskopowa obserwacja kropelek

wykazała, że wokół nich rozciąga się mikronowej grubości warstwa, „wyciągnięta” przez oddziaływanie z powierzchnią. Na brzegu kropelki parowanie powoduje wzrost stężenia glikolu (woda paruje szybciej, a stosunek powierzchni do objętości jest duży). Ponieważ glikol ma mniejsze napięcie powierzchniowe niż woda, to ciecz jest ściągana po powierzchni kropelki od brzegu do środka (wraca po dnie od środka do brzegu). Kropelka „nie czuje” powierzchni płytki, bo pływa po utworzonym z cieczy dysku. Obserwowany kąt zwilżania to „kąt zwilżania dysku”; jest on skutkiem różnicy napięć powierzchniowych dysku i kropelki wynikających z indukowanej parowaniem różnicy stężeń.

Długozasięgowo przyciąganie jest ostatecznie wywołane lokalnym zwiększeniem wilgotności przez obecność drugiej kropelki: po tej stronie woda paruje wolniej, więc dysk jest bardziej „wodnisty”, czyli ma większe napięcie powierzchniowe i kropelka pełźnie po powierzchni w kierunku drugiej kropelki.

Efekt oddziaływania krótkozasięgowego jest znany od dawna. Jest on wywołany gradientem stężenia. To, co wygląda na przepychanie, jest właściwie wciąganiem kropelki o większym stężeniu do tej o mniejszym (czyli o większym napięciu powierzchniowym), połączone z rozciąganiem się tej drugiej we wszystkich kierunkach, w których nie styka się ona z tą wciąganą.

Zrozumienie zjawiska ułatwiło przeprowadzenie szeregu efektownych pokazów. Np. na filmie [2] można zobaczyć (2:00 – 2:34) ustawianie się szeregu kropelek (oddzielonych naniesionymi na płytkę barierami) w jednej linii, kilkudziesięciosekundową gonitwę dwóch kropelek po kołowym torze (2:35 – 2:55) albo kropelkowy oscylator (2:58 – 3:33).

Natomiast na filmie [3] pokazane jest urządzenie automatycznie segregujące kropelki o różnych stężeniach (2:29 – 2:55).

Dostępne są instrukcje samodzielnego przeprowadzenia doświadczeń ([2] od 6:10). Można również obejrzeć ilustrowane demonstracjami wypowiedzi autorów [4].

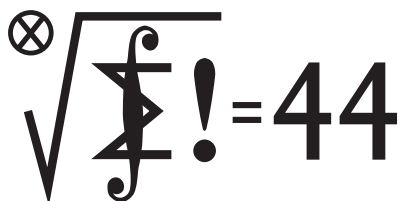
Naukowcy nie ukrywają, że główną motywacją ich kilkuletnich badań była zwykła ciekawość, pragnienie wyjaśnienia zadziwiającego zachowania kropelek. Badania te mogą jednak mieć duże znaczenie praktyczne wszędzie tam, gdzie potrzebne jest głębsze zrozumienie fizyki zwilżania

Piotr ZALEWSKI

- [1] N.J. Cira, A. Benusiglio oraz M. Prakash, *Vapour-mediated sensing and motility in two-component droplets*, doi:10.1038/nature14272.
- [2] Film zawierający dodatkowe materiały publikacji [1], <https://www.youtube.com/watch?v=fUHS1gKkS4>.
- [3] N.J. Cira, A. Benusiglio oraz M. Prakash, Materiał umieszczony na stronach Uniwersytetu Stanforda zawierający pokaz i skrótowne wyjaśnienie zjawiska, <https://www.youtube.com/watch?v=K8Wx2PHIYGI>.
- [4] Materiał umieszczony na stronach Uniwersytetu Stanforda zawierający ilustrowane filmami wypowiedzi autorów publikacji [1], <https://www.youtube.com/watch?v=ZMsaH6SY4CY>.

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 687 ( $WT = 1,07$ ) i 688 ( $WT = 2,08$ ) z numeru 10/2014

Michał Miodek	Zawiercie	46,62
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Maciak	Warszawa	42,25
Piotr Kumor	Olsztyn	39,62
Wojciech Tobiś	Praszka	37,22
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	35,79

Michał Miodek – już po raz drugi.

### Zadania z matematyki nr 701, 702

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**701.** Niech  $n$  będzie ustaloną dodatnią liczbą nieparzystą. Wyznaczyć największą możliwą liczbę zbioru złożonego z liczb całkowitych dodatnich, mniejszych od  $3n$ , w którym każde dwa różne elementy mają i różnicę, i sumę różną od  $n$ .

**702.** Niech  $F_n(t) = t^n + (t + 1)^n$ . Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych  $n \geq 1$ , dla których równanie  $F_{2n}(x) = F_n(y)$  nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych  $x, y \geq 1$ .

Zadanie 702 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

Opatrzył je komentarzem: dokładnie przed ćwierćwieczem to samo równanie było przedmiotem zadania ligowego 194 (*Delta* 5/1990 – treść i rozwiązanie); teza brzmiała: dla  $n \geq 2$  równanie może mieć w liczbach całkowitych  $x, y$  co najwyżej skończenie wiele rozwiązań (autor: Marcin Mazur); zaś w rocznym omówieniu (*Delta* 2/1992) pozostało otwarte pytanie, czy to równanie w ogóle ma rozwiązania poza trywialnymi ( $|x|, |y| \leq 1$ ); obecna propozycja to mały krok w kierunku próby badania tego problemu.

### Rozwiązania zadań z numeru 1/2015

Przypominamy treść zadań:

**693.** Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste niewymierne  $x$ , dla których każda z liczb  $x^2 - 44x$  oraz  $x^3 - 2015x$  jest wymierna.

**694.** Niech  $a(n)$  oznacza odległość liczby naturalnej  $n$  od najbliższej liczby, będącej pełnym kwadratem:  $a(n) = \min\{|n - k^2| : k \in \mathbb{N}\}$ , i niech  $S(n) = a(1) + \dots + a(n)$  oraz  $f(n) = \frac{1}{n}S(n)$ . Udowodnić, że każda dodatnia liczba całkowita występuje w ciągu  $f(1), f(2), f(3), \dots$  dokładnie trzykrotnie.

**693.** Zgodnie z zadaniem, niech  $x \notin \mathbb{Q}$  będzie taką liczbą, że  $\alpha = x^2 - 44x \in \mathbb{Q}$  oraz  $\beta = x^3 - 2015x \in \mathbb{Q}$ . Tak więc

$$\alpha x = x^3 - 44x^2 = (\beta + 2015x) - 44(\alpha + 44x) = (\beta - 44\alpha) + 79x,$$

skąd  $(\alpha - 79)x \in \mathbb{Q}$ . Skoro  $x \notin \mathbb{Q}$ , musi być  $\alpha - 79 = 0$ .

Dostajemy równanie  $x^2 - 44x = 79$ , z rozwiązaniami  $x = 22 + \sqrt{563}$  oraz  $x = 22 - \sqrt{563}$ . Obie wartości spełniają wymagane warunki ( $\alpha = x^2 - 44x = 79$ ,  $\beta = x(x^2 - 2015) = 44 \cdot 79$ ).

**694.** Liczby, dla których najbliższym kwadratem jest  $k^2$ , mają postać

$$(1) \quad k^2 + r \quad (0 \leq r \leq k) \quad \text{lub} \quad k^2 - r \quad (1 \leq r \leq k - 1).$$

Suma wartości  $a(n)$  dla tych liczb wynosi  $2(1 + \dots + k) - k = k^2$ . Stąd

$$\begin{aligned} S(k^2) &= S(k^2 + k) - (1 + \dots + k) = \\ &= (1^2 + \dots + k^2) - (1 + \dots + k) = \frac{k(k^2 - 1)}{3}. \end{aligned}$$

Dla liczb postaci (1) obliczamy:

$$\begin{aligned} S(k^2 + r) &= S(k^2) - (1 + 2 + \dots + r) = \frac{k(k^2 - 1)}{3} + \frac{r(r + 1)}{2}, \\ S(k^2 - r) &= S(k^2) - (0 + 1 + \dots + (r - 1)) = \\ &= \frac{k(k^2 - 1)}{3} - \frac{r(r - 1)}{2}. \end{aligned}$$

Aby ujednoclić zapis, wprowadzamy parametr  $\epsilon = \pm 1$

i wyznaczamy  $f(n) = S(n)/n$  (dla  $n$  w formie (1)):

$$f(k^2 + \epsilon r) = \frac{\frac{1}{3}k(k^2 - 1) + \epsilon \cdot \frac{1}{2}r(r + \epsilon)}{k^2 + \epsilon r} \quad \left( \begin{array}{l} \epsilon = +1 : r = 0, 1, \dots, k, \\ \epsilon = -1 : r = 1, \dots, k - 1 \end{array} \right).$$

Interesują nas wartości całkowite uzyskanego wyrażenia. Przekształcamy je do postaci

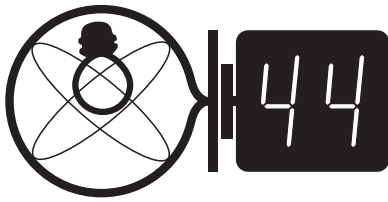
$$(2) \quad f(k^2 + \epsilon r) = \frac{k}{3} - h(k, \epsilon, r), \quad \text{gdzie} \quad h(k, \epsilon, r) = \frac{(\epsilon r + 1)(2k - 3r)}{6(k^2 + \epsilon r)}.$$

Dla  $r = 0$  oraz  $r = k$  ( $\epsilon = 1$ ) wychodzą wartości niecałkowite – można je zignorować, ograniczając zakres parametru  $r$  do  $1, \dots, k - 1$ . Wówczas

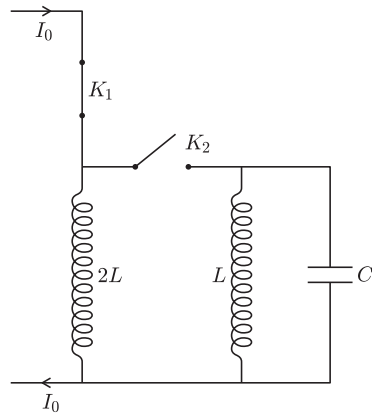
$$|h(k, \epsilon, r)| = \frac{|\epsilon r + 1| \cdot |2k - 3r|}{6|k^2 + \epsilon r|} \leq \frac{k(2k - 3)}{6(k^2 - k + 1)} < \frac{1}{3}.$$

Różnica (2) jest więc liczbą całkowitą (równą  $j$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $k = 3j$ , zaś  $h(k, \epsilon, r) = 0$ . Gdy  $k = 3j$ , ostatni warunek ( $h = 0$ ) jest spełniony dla trzech par  $(\epsilon, r)$ , mianowicie  $(-1, 1)$ ,  $(-1, 2j)$ ,  $(+1, 2j)$ .

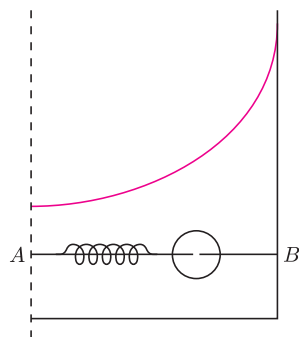
Wniosek: dowolna liczba całkowita  $j \geq 1$  jest wartością wyrażenia  $f(n)$  jedynie dla  $n = k^2 + \epsilon r$ , gdzie  $k = 3j$ , zaś  $(\epsilon, r)$  jest jedną z trzech powyższych par – czyli, po podstawieniu, dla  $n = 9j^2 - 1$ ,  $n = 9j^2 - 2j$ ,  $n = 9j^2 + 2j$ .



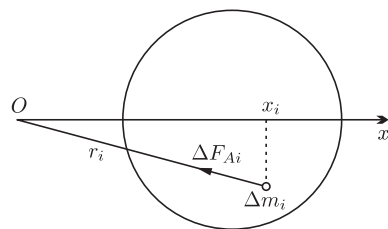
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2015



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 584 ( $WT = 2,08$ ), 585 ( $WT = 3,64$ ), 586 ( $WT = 3,64$ ) i 587 ( $WT = 1,96$ ) z numerów 10/2014 i 11/2014

Andrzej Idzik	Bolesławiec	37,76
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Marian Łupieżowicz	Gliwice	25,29
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Michał Koźlik	Gliwice	20,31
Krzysztof Magiera	Łosiów	14,40

W opublikowanym w numerze 2/2015 zestawieniu uczestników Klubu 44 F chciałbym drukarski usunąć przy jednym z nazwisk wielokrotność uzyskania liczby 44 punktów. **Pana Michała Koźlika, Weterana Klubu 44 F i trzykrotnego zdobywcę 44 punktów, serdecznie przepraszamy.**

## Zadania z fizyki nr 598, 599

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**598.** Przez cewkę o współczynniku samoindukcji  $2L$  płynie prąd stały o natężeniu  $I_0$  z zewnętrznego źródła (rys. 1). Po zamknięciu klucza  $K_2$  do cewki podłączamy równolegle cewkę o współczynniku samoindukcji  $L$  oraz kondensator o pojemności  $C$ . Następnie otwieramy klucz  $K_1$ . Znaleźć maksymalne napięcie na kondensatorze i maksymalne natężenie prądu płynącego w cewce o współczynniku samoindukcji  $L$ . Elementy obwodu uważamy za idealne.

**599.** Koło, którego cała masa rozłożona jest równomiernie na obwodzie, może obracać się bez tarcia wokół swojej osi skierowanej poziomo. Wewnątrz koła, wzdłuż jego obwodu biegnie wiewiórka. Współczynnik tarcia między kołem a wiewiórką wynosi  $\mu$ . Stosunek masy koła do masy wiewiórki równy jest  $n$ . Jakie maksymalne, stałe przyspieszenie liniowe może nadać kołu wiewiórka?

## Rozwiązania zadań z numeru 1/2015

Przypominamy treść zadań:

**590.** W naczyniu w kształcie walca znajduje się ciecz o gęstości  $\rho$ . Walec obraca się ze stałą prędkością kątową  $\omega$  wokół własnej osi. Wewnątrz walca, wzdłuż jego promienia, umocowany jest cienki pręt  $AB$ . Po przecięciu może ślizgać się bez tarcia koralik w kształcie kuli o masie  $m$  i promieniu  $r$  (rys. 2). Kula połączona jest z końcem  $A$  pręta za pomocą sprężyny o współczynniku sprężystości  $k$ . Długość nieodkształconej sprężyny wynosi  $l_0$ . Znaleźć odległość środka kuli od osi obrotu.

**591.** Na sferze o promieniu  $R$ , złożonej z dwóch półsfery, równomiernie rozłożony jest ładunek  $Q$ . Jaką siłą trzeba działać na każdą półsferę, aby nie rozsuwały się one pod wpływem oddziaływania ładunków?

**590.** Oznaczmy przez  $x$  szukaną odległość środka kuli od punktu  $A$ . W układzie inercyjnym w kierunku wzdłuż pręta działają na kulę: siła sprężystości  $F_S = k(x - r - l_0)$  oraz siła ze strony cieczy  $F_A$ , a ich wypadkowa jest siłą dośrodkową  $F_S + F_A = m\omega^2 x$ . Aby wyznaczyć siłę  $F_A$ , rozważmy obracającą się naczynie z samą cieczą, wyodrębnijmy w niej myślowo część znajdującą się w tym samym miejscu co kula i podzielmy ją na bardzo małe elementy o masach  $\Delta m_i$ . Siła ze strony pozostałej cieczy działająca na taki element w płaszczyźnie poziomej wynosi  $\Delta F_{Ai} = \Delta m_i \omega^2 r_i$ , gdzie  $r_i$  jest odległością elementu od osi obrotu (rys. 3). Niech pozioma oś  $OX$  prostokątnego układu współrzędnych ma początek na osi obrotu i przechodzi przez środek wydzielonej części cieczy, a oś  $OZ$  skierowana jest wzdłuż osi obrotu, prostopadle do płaszczyzny rysunku. Rzut siły  $\Delta F_{Ai}$  na oś  $OX$  wynosi  $F_{xi} = \Delta m_i \omega^2 x_i$ . Całkowita siła działająca w płaszczyźnie poziomej ze strony pozostałej cieczy na część wyróżnioną działa wzdłuż osi  $OX$ , co wynika z symetrii problemu, skierowana jest do osi obrotu i ma wartość  $F_A = \omega^2 \sum_i \Delta m_i x_i = \omega^2 x M$ , gdzie  $x$  jest odległością środka masy kuli od osi obrotu, a  $M = 4\pi r^3 \rho / 3$ . Siła  $F_A$  zależy tylko od położenia, kształtu i objętości wyróżnionej części cieczy. Taka sama siła działa na dowolne ciało umieszczone w tym samym miejscu wewnątrz cieczy. Szukana odległość wynosi

$$x = \frac{k(r + l_0)}{k - \omega^2(m - 4\pi r^3 \rho / 3)}$$

Rozwiązanie jest poprawne, gdy  $k > \omega^2(m - M)$ . W przeciwnym przypadku sprężyna jest zbyt słaba, aby utrzymać kulę wewnątrz cieczy, i kula w zależności od swojej gęstości przemieszcza się do jednego z końców pręta.

**591.** Szukana siła wynosi  $F = \pi R^2 p$ , gdzie  $p$  jest ciśnieniem wywieranym od wewnątrz na powierzchnię sfery, wywołanym oddziaływaniem ładunków. Aby wyznaczyć  $p$ , należy obliczyć pracę, jaką trzeba wykonać, zmniejszając promień sfery o małą wielkość  $\Delta R$ :

$$\Delta W = p|\Delta V| = \frac{4\pi p[R^3 - (R - \Delta R)^3]}{3} \approx 4\pi R^2 p \Delta R.$$

Praca ta powoduje zwiększenie energii elektrostatycznej sfery. Energia

elektrostatyczna sfery o promieniu  $R$  naładowanej ładunkiem  $Q$  wynosi  $W_E = \frac{Q^2}{2C}$ ,

gdzie  $C = 4\pi\epsilon_0 R$  jest pojemnością sfery. Stąd  $\Delta W_E \approx \frac{Q^2 \Delta R}{8\pi\epsilon_0 R^2}$ .  $\Delta W = \Delta W_E$ , a więc

mamy  $p = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4}$ . Szukana siła jest równa  $F = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}$ .



## Prosto z nieba: Andromeda

Spiralna galaktyka w gwiazdozbiorze Andromedy (M31) jest istotnym składnikiem Grupy Lokalnej, w skład której wchodzi także porównywalna z nią rozmiarem nasza Galaktyka, Droga Mleczna. Obie otoczone są rojem mniejszych galaktyk satelitarnych – w sumie w Grupie Lokalnej o rozmiarze 10 mln lat świetlnych (3 Mpc) znajduje się około 50 mniejszych lub większych galaktyk. Grupa Lokalna nie jest, oczywiście, tworem statycznym: obiekty orbitują wokół wspólnego środka masy, zderzając się co jakiś czas. Symulacje komputerowe przyszłości Grupy przewidują, że za około 4 miliardy lat nastąpi kolizja M31 i Drogi Mlecznej. W wyniku powstanie duża, przypuszczalnie eliptyczna galaktyka (nazywana już teraz *Milkdromedą*).

Bliskie spotkania mniejszych składników z dużymi galaktykami spiralnymi są, oczywiście, częstsze niż zderzenia dużych składników. Astronomów interesują w szczególności obserwacje Andromedy, która z racji podobieństwa do Drogi Mlecznej dostarcza bezcennych z naszego punktu widzenia informacji na temat budowy i ewolucji galaktyk spiralnych. Jednym z takich badań jest SPLASH (*Spectroscopic and Photometric Landscape of Andromeda's Stellar Halo*), w którym do pomiaru prędkości radialnych ponad 10 tysięcy gwiazd użyto danych spektroskopowych teleskopu Keck/DEIMOS. Informacji fotometrycznych dostarczył z kolei niedawno zakończony przegląd PHAT (*Panchromatic Hubble Andromeda Treasury*) teleskopu Hubble'a – są to obserwacje w wysokiej rozdzielczości i wielu

długościach fal dla ponad połowy wyżej wspomnianych gwiazd. Takie dane umożliwiają modelowanie dysku Andromedy oddziałującego raz na jakiś czas z krążącymi wokół mniejszymi galaktykami. Podczas porównania obserwacji okazało się, że Droga Mleczna ma o wiele lepiej „uporządkowany” dysk niż M31, co oznacza bardziej burzliwą przeszłość tej drugiej – więcej kolizji z galaktykami karłowatymi. Według powszechnie uznawanej teorii tworzenia się galaktyk we wszechświecie opisywanym przez zimną ciemną materię i stałą kosmologiczną (model  $\Lambda$ CDM) galaktycznych zderzeń powinno być tak dużo, jak wskazują obserwacje Andromedy – być może więc Droga Mleczna była (szczęśliwie?) mniej często bombardowana przez swoje satelity.

<http://www.spacetelescope.org/images/heic1502a/zoomable>

Przy okazji zachęcamy też do samodzielnego przestudiowania niezwykle, jak do tej pory największego (1,5 miliarda pikseli!) i najostrzejszego zdjęcia Andromedy, wykonanego za pomocą teleskopu Hubble'a. Na zdjęciu uwieczniono około 100 milionów gwiazd i tysiące gromad gwiazdowych zanurzonych w części dysku M31 rozciągającym się na około 40 tysięcy lat świetlnych.

Michał BEJGER

## Niebo w maju

Maj jest dobrym czasem do obserwacji Saturna i Merkurego. W dniu 7 V Merkury ( $0,5^m$ ) znajdzie się w punkcie największej elongacji wschodniej. Największa elongacja, zwana również maksymalną dygresją, oznacza najlepsze warunki do jego obserwacji, ponieważ Merkury znajdzie się wtedy w największej odległości od Słońca po jego wschodniej stronie, zatem będzie go można obserwować podczas zachodu Słońca. Dodatkową atrakcją jest położenie Merkurego: pierwszego dnia maja planeta znajdzie się blisko – w odległości kątowej  $2^\circ$  – od gromady otwartej M45, czyli Plejad w gwiazdozbiorze Byka.

Saturn natomiast będzie 23 V w opozycji, czyli po przeciwnej stronie Ziemi w stosunku do Słońca. Będzie zatem świecić z maksymalną jasnością ( $0,2^m$ ). Obserwacje z terenu Polski mogą być jednak nieco utrudnione, ponieważ – podobnie do Merkurego – największa wysokość, jaką osiągnie Saturn na niebie, to jedynie  $20^\circ$  nad południowym horyzontem (gwiazdozbiór Wagi, około północy). Nachylenie pierścieni, które może wynosić dla ziemskiego obserwatora nawet  $30^\circ$ , osiągnie maksimum dopiero na przełomie 2016 i 2017 r., jednak

posiadacze sprzętu optycznego nie powinni przegapić tegorocznej okazji: pierścienie będą nachylone pod kątem  $24^\circ$ . Mars znajduje się w maju pomiędzy Merkurym i Słońcem, zbliżając się do gwiazdy, co zmniejsza szanse na jego obserwacje. Co innego Jowisz ( $-1,6^m$ ), widoczny przez całą noc w gwiazdozbiorze Raka. 24 V wieczorem dojdzie do spotkania Jowisza z Księżycem. Separacja  $4,5^\circ$  jest, być może, za duża na obserwacje teleskopowe, ale oba obiekty będą doskonale widoczne gołym okiem. Wenus ( $-3,7^m$ , gwiazdozbiór Bliźniąt) zmierza, podobnie do Merkurego, w kierunku największej elongacji wschodniej. Osiągnie ją jednak dopiero na początku czerwca.

W nocy z 5 na 6 V przypada maksimum roju Eta Akwarydów (radiant w gwiazdozbiorze Wodnika, który pojawi się ponad wschodnim horyzontem po północy), związanych z kometą Halleya. Eta Akwarydy trwają od trzeciej dekady kwietnia do końca maja; w maksimum oczekujemy 30 zdarzeń na godzinę. Obserwacje maksimum mogą być utrudnione z powodu przypadającej dzień wcześniej pełni Księżyca (4 V; now 18 V).

M. B.



## Kolorowe kropki

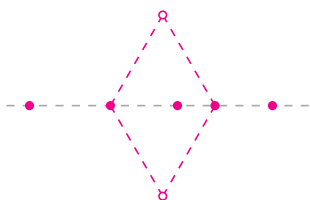
Joanna JASZUŃSKA

W wielu zadaniach występują różnokolorowe punkty płaszczyzny, a w ich rozwiązaniach przydatne bywają rozmaite rozumowania kombinatoryczne.

1. Maja i Gucio grają w grę. Malują na przemian punkty płaszczyzny wedle następujących reguł. Maja rozpoczyna; w swoim ruchu maluje dowolnie wybrany bezbarwny punkt na kolorowo. Gdy nadchodzi kolej Gucia, wybiera on 2015 bezbarwnych punktów i maluje je na czarno. Maja wygrywa, jeśli na płaszczyźnie pojawią się trzy kolorowe punkty tworzące trójkąt równoboczny. Czy Gucio może jej to uniemożliwić?
2. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieje na tej płaszczyźnie prostokąt o wierzchołkach jednego koloru.
3. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z  $n$  kolorów ( $n > 2$ ). Wykaż, że istnieje na tej płaszczyźnie prostokąt o wierzchołkach jednego koloru.
4. Każde pole szachownicy  $12 \times 12$  pomalowano jednym z trzech kolorów. Wykaż, że istnieją cztery pola o tym samym kolorze, których środki są wierzchołkami prostokąta.

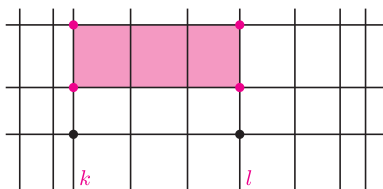
### Rozwiązania

**R1.** Nie, Maja może zastosować następującą strategię, która gwarantuje jej zwycięstwo. W pierwszych  $n$  swoich ruchach Maja maluje na kolorowo  $n$  punktów z jednej prostej. Każdą parę takich kolorowych punktów można na dwa sposoby uzupełnić do trójkąta równobocznego (rys. 1), par punktów spośród  $n$  jest  $\frac{1}{2}n(n-1)$ , więc łącznie po  $n$  ruchach na płaszczyźnie jest  $n(n-1)$  takich punktów, że pomalowanie dowolnego z nich na kolorowo da Mai zwycięstwo.



Rys. 1

Dla  $n > 2016$  mamy  $n(n-1) > 2015n$ , zatem Gucio nie może w swoich początkowych  $n$  ruchach wszystkich opisanych powyżej punktów pomalować na czarno i Maja może wygrać w ruchu numer  $n+1$ .  $\square$



Rys. 2

**R2.** Narysujmy 3 poziome proste, 9 pionowych i rozważmy 27 punktów ich przecięć. Każdy punkt pomalowano jednym z dwóch kolorów, łącznie jest więc  $2^3 = 8$  możliwych układów kolorów trójki wyróżnionych punktów z pojedynczej pionowej prostej. Ponieważ mamy 9 pionowych prostych, na pewnych dwóch z nich (nazwijmy je  $k$  i  $l$ ) jest ten sam układ kolorów takiej trójki (rys. 2).

Wśród trzech wyróżnionych punktów na prostej  $k$ , pomalowanych dwoma kolorami, pewne dwa punkty mają ten sam kolor. Niech to będą dwa wierzchołki szukanego prostokąta, pozostałe dwa to odpowiadające im punkty tego samego koloru z prostej  $l$  (leżą one na tych samych poziomych prostych).  $\square$

**R3.** Wystarczy uogólnić rozwiązanie poprzedniego zadania i rozważyć  $n+1$  prostych poziomych oraz  $2^{n+1} + 1$  prostych pionowych.  $\square$

**R4.** Istnieje kolor, którym pomalowano przynajmniej  $\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$  pól. Rozważmy 48 pól tego właśnie koloru i niech  $w_i$  oznacza liczbę tych pól

występujących w  $i$ -tym wierszu; oczywiście  $\sum_{i=1}^{12} w_i = 48$ . W każdym wierszu dwa spośród rozważanych pól można wybrać na  $\frac{1}{2}w_i(w_i-1)$  sposobów. Wobec tego

$$\sum_{i=1}^{12} \frac{1}{2}w_i(w_i-1) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{12} w_i^2 - \sum_{i=1}^{12} w_i \right) \geq \frac{12}{2} \left( \frac{\sum_{i=1}^{12} w_i}{12} \right)^2 - \frac{48}{2} = 6 \left( \frac{48}{12} \right)^2 - 24 = 72,$$

przy czym nierówność wynika z nierówności średnich (na marginesie).

Tymczasem dwie z 12 kolumn można wybrać na  $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 11 = 66$  sposobów – mniej niż 72. Oznacza to, że w pewnych dwóch wierszach można wybrać po dwa pola tego samego koloru i w tych samych kolumnach; ich środki tworzą szukany prostokąt.  $\square$

W zadaniu 4 rozumowanie z zadania 3 nie działa, bowiem  $2^{3+1} + 1 > 12$ .

Dla dowolnych liczb  $w_1, w_2, \dots, w_n$  zachodzi nierówność między średnią kwadratową a arytmetyczną:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{n}.$$

Zadanie 4 pochodzi z obozu naukowego Olimpiady Matematycznej z 2011 roku.