



tel. 22 63 10 34 46 fax 22 63 10 53 92






20 lutego 2015 roku zmarł

Grzegorz Sitarski

Astronom

wieloletni Członek Komitetu Redakcyjnego
i Autor *Delty*

SPIS TREŚCI NUMERU 4 (491)

| | |
|---|--------|
| Demokracja i (NP-)trudne problemy <i>Andrzej Dąbrowski</i> | str. 1 |
| Matematyka jest jedna: metoda probabilistyczna <i>Tomasz Kobos</i> | str. 5 |
|  Zadania | str. 7 |
| Pudełko Smoluchowskiego, losowe ruchy w grafie i egzopeptydazy <i>Wojciech Niemiro</i> | str. 8 |
|  Pozbądźmy się koła <i>Kamila Lyczek</i> | str.12 |
| Informatyczny kącik olimpijski (80): Podział grafu <i>Tomasz Idziaszek</i> | str.14 |
|  Nauka i sztuka <i>Magdalena Fikus</i> | str.15 |
| Wesołe liczby <i>Karol Gryszka</i> | str.16 |
|  O LXVI Olimpiadzie Matematycznej <i>Michał Krych</i> | str.20 |
| Aktualności | str.21 |
| Klub 44 | str.22 |
| Prosto z nieba: W sprawie orientacji | str.24 |
| Niebo w kwietniu | str.24 |
|  Desargues i nożyce <i>Joanna Jaszewska</i> | str.25 |

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Lyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2015 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.
Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

W następnym numerze polecamy



dylematy społeczne

Demokracja i (NP-)trudne problemy

Andrzej DĄBROWSKI*

Podczas XXVII Kongresu Matematycznego, odbywającego się w Seulu między 13 a 21 sierpnia 2014 roku, prestiżową Nagrodę Nevanlinny (informatyczny odpowiednik Medalu Fieldsa) otrzymał pracujący w USA hinduski informatyk Subhash Khot. W laudacji poświęconej wynikom Khota jego mentor i współautor wielu prac, Sanjeev Arora, wspominał o przełomowym wyniku uzyskanym przez profesora Uniwersytetu Warszawskiego, Krzysztofa Oleszkiewicza wraz z Elchananem Mosselem i Ryanem O'Donnellem. W pracy *Noise stability of functions with low influences: Invariance and optimality*, opublikowanej w *Annals of Mathematics* w 2010 roku, udowodniona została, istotnie związana z wynikami Subhasha Khota, hipoteza *Większość jest najbardziej stabilna* (*MiS, Majority is Stablest*). Hipotezę tę można interpretować w języku teorii zajmującej się systemami głosowania. Fascynujące jest jej powiązanie z należącymi do informatyki teoretycznej wynikami Khota, które z kolei są ściśle związane z nierozstrzygniętą hipotezą $P \neq NP$, wartego milion dolarów Problemu Milenijnego. Została ona postawiona na początku lat 70. niezależnie przez Stephena Cooka i Leonida Levina. Mimo upływu przeszło 40 lat nikomu nie udało się ani jej udowodnić, ani obalić. Jak każdy wielki problem, stała się źródłem wielu cennych wyników w różnych działach matematyki i informatyki teoretycznej, szczególnie w teorii złożoności obliczeniowej.

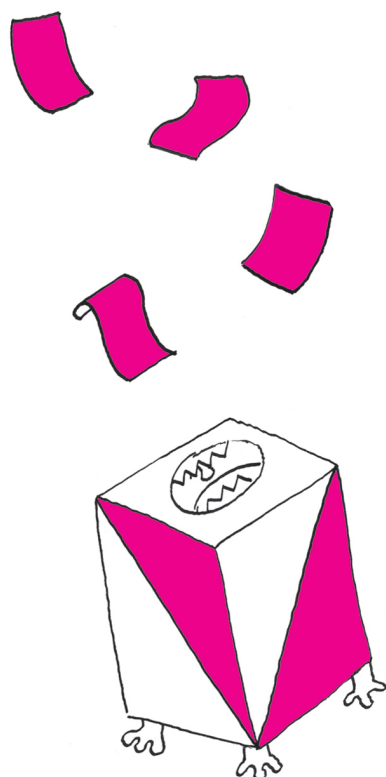
Problem $P \neq NP$ jest związany z konstrukcją efektywnych, czyli wykonywanych w realistycznym czasie, algorytmów. Czas wykonywania algorytmu zależy od wielkości użytych w nim danych. Mówimy, że jest on *wielomianowy*, jeśli istnieją takie stałe C i k , że dla danych o rozmiarze n algorytm potrzebuje co najwyżej Cn^k kroków. Klasę problemów, dla których istnieje algorytm rozwiązania w wielomianowym czasie, oznaczamy przez P . Istnieją problemy, o których nie wiadomo, czy należą do tej klasy, można jednak w czasie wielomianowym sprawdzić poprawność dowolnie zadanego rozwiązania. O takich problemach mówimy, że należą do klasy NP . Oczywiście, gdy problem jest klasy P , to jest również klasy NP , gdyż w takim przypadku możemy sprawdzić poprawność rozwiązania w czasie wielomianowym, po prostu sami je rozwiązując. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne, oznaczające, że każdy problem, którego rozwiązanie można efektywnie sprawdzić, ma efektywny algorytm jego rozwiązania? Gdyby umiejętność oceny poprawności rozwiązania pociągała zdolność do jego konstrukcji, czyli gdyby $NP \subset P$, to, jak powiedział profesor MIT Scott Aaronson, *każdy, kto umiałby docenić piękno symfonii, zostałby Mozartem. Każdy, kto potrafi śledzić rozumowanie krok po kroku, zostałby Gaussem.*

Przykładem zagadnienia ściśle powiązanego z tą problematyką jest próba znalezienia minimalnego pokrycia grafu niezorientowanego. W roku 1972 Richard M. Karp z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Berkeley wykazał, że jeśli $P \neq NP$, to nie istnieje efektywny (czyli działający w wielomianowym czasie) sposób rozwiązania tego zadania. Rozważmy jednak następujący, prosty algorytm:

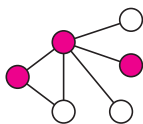
1. Wybierz krawędź grafu. Dołącz do pokrycia oba wierzchołki połączone tą krawędzią.
2. Usuń z grafu te wierzchołki i *wszystkie* krawędzie zawierające co najmniej jeden z tych wierzchołków.
3. Powtarzaj kroki 1-2 aż do wyczerpania krawędzi grafu.

Nietrudno zauważyć, że ten algorytm znajduje pokrycie grafu. Nie musi być ono minimalne, zawiera jednak co najwyżej dwukrotnie więcej wierzchołków niż rozwiązanie idealne (wśród każdej pary usuwanych wierzchołków musi znaleźć się co najmniej jeden należący do pokrycia minimalnego). Skonstruowaliśmy zatem przykład *algorytmu przybliżonego* ze współczynnikiem 2. Ogólniej:

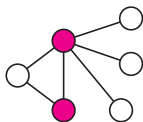
Algorytm rozwiązania problemu minimum jest *przybliżony ze współczynnikiem* $\alpha \geq 1$, jeśli znalezione za jego pomocą rozwiązanie x spełnia dla każdej instancji warunek $f(x) \leq \alpha f(x_0)$, gdzie f jest minimalizowaną funkcją, a x_0 rozwiązaniem optymalnym.



Mówimy, że podzbiór wierzchołków grafu jest jego pokryciem, gdy każda krawędź zawiera co najmniej jeden z wierzchołków tego podzbioru, tak jak zbiór kolorowych wierzchołków na rysunku poniżej.



Minimalne pokrycie to pokrycie wykorzystujące najmniejszą możliwą liczbę wierzchołków, na przykład tak:



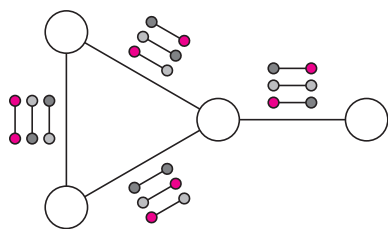
Instancja to egzemplarz problemu, np. zadanego grafu.

*Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

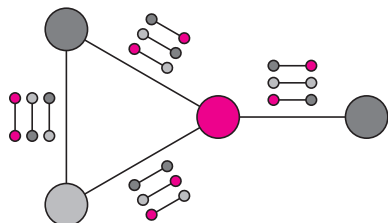


Analogicznie możemy zdefiniować przybliżony algorytm rozwiązania problemu *maksimum* ze współczynnikiem $\alpha \leq 1$. Takie rozwiązania mają wielkie znaczenie praktyczne – skoro nie można osiągnąć efektywnego rozwiązania optymalnego, sięga się po prostsze rozwiązania przybliżone. Powstaje naturalne pytanie, czy aktualnie funkcjonujące rozwiązania można jeszcze choć trochę polepszyć, a więc dla jakich α istnieją przybliżone rozwiązania efektywne o tym współczynniku. Okazuje się, że istnienie takich granic efektywności również związane jest z omawianą hipotezą. W roku 2002 Irit Dinur i Shmuel Safra pokazali, że jeśli $P \neq NP$, to dla problemu minimalnego pokrycia grafu nie istnieje nawet przybliżony algorytm o wielomianowym czasie działania o współczynniku mniejszym niż $\alpha = 10\sqrt{5} - 21 \approx 1,36$.

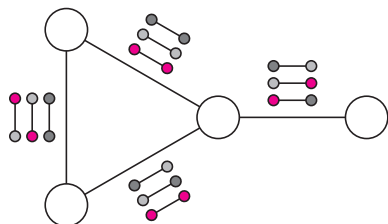
W roku 2001 pojawił się inny ciekawy problem optymalizacyjny, który przedstawił swojemu promotorowi, Sanjeevowi Arorze, 23-letni student Uniwersytetu Princeton, Subhash Khot. Zadanie jest wariantem problemu kolorowania wierzchołków grafu na k kolorów w taki sposób, aby wierzchołki połączone krawędzią miały różne kolory. Istnieje prosty i efektywny algorytm rozstrzygający, czy pokolorowanie jest możliwe dla $k = 1$ i $k = 2$. Dla $k \geq 3$ jest to problem *NP-trudny*, czyli problem, do którego można w czasie wielomianowym przekształcić *każdy* problem *NP*. Oznacza to, że gdy $P \neq NP$, to nie istnieje efektywny algorytm kolorowania.



Powyższy graf z zadaniem zestawem ograniczeń ma rozwiązanie – i to nawet trzy. Jednym z nich jest poniższe.



Dla takiego samego grafu z innym systemem ograniczeń (poniżej) możliwe jest spełnienie co najwyżej trzech z nich.



To, co odróżnia przypadek $k < 3$ od przypadku $k \geq 3$ i co jest jednym z powodów tak nagłego wzrostu złożoności, to fakt, że w tym drugim przypadku kolor wierzchołka nie wyznacza jednoznacznie koloru jego sąsiadów. Khot zaproponował, by dla każdej krawędzi wyznaczony był zestaw dopuszczalnych pokolorowań końców, zwanych ograniczeniami, w którym kolor jednego końca krawędzi jednoznacznie wyznacza kolor drugiego. Czasami taki zestaw ograniczeń jest sprzeczny – nie istnieje pokolorowanie grafu spełniające wszystkie ograniczenia. I tu Khot zażądał, aby znaleźć pokolorowanie spełniające maksymalną liczbę ograniczeń. Innymi słowy, dla każdego grafu z ograniczeniami poszukuje się pokolorowania o maksymalnej *wartości*, czyli ułamka liczby krawędzi grafu, spełniających przypisane im ograniczenia. Ta maksymalna wartość wynosi 1 w grafie, dla którego istnieje pokolorowanie spełniające wszystkie ograniczenia, jeśli natomiast nie istnieje pokolorowanie spełniające którekolwiek z ograniczeń, wynosi 0. Maksymalna wartość w grafie z drugiego przykładu wynosi $\frac{3}{4}$.

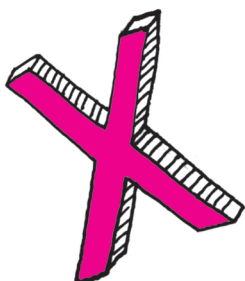
Gdy maksymalna wartość grafu jest równa 1, to szybko można znaleźć właściwe pokolorowanie. Wystarczy rozpatrzyć wszystkie przypadki pokolorowania *jednego* węzła, gdyż determinują one jednoznacznie pokolorowanie całego grafu. Takie grafy łatwo rozpoznać, jest to jednak znacznie trudniejsze dla grafów z maksymalną wartością nawet nieznacznie mniejszą od 1. Okazuje się bowiem, że odróżnienie dwóch skrajnych typów grafów:

- graf, dla którego najlepsze pokolorowanie ma wartość co najmniej równą $1 - \epsilon$ dla danego z góry $\epsilon > 0$ (przypadek *TAK*),
- graf, dla którego najlepsze pokolorowanie ma wartość co najwyżej równą δ dla danego z góry $\delta > 0$ (przypadek *NIE*),

jest bardzo problematyczne, jeśli dysponujemy dużą liczbą kolorów (i tym samym dużą liczbą ograniczeń dla krawędzi). Trudność tę formalnie wyraża sformułowana przez Khota w 2002 roku hipoteza *Unique Games Conjecture (UGC)*.

Dla każdej pary $\epsilon, \delta > 0$ istnieje taka liczba kolorów $n = n(\epsilon, \delta)$, że odróżnienie grafu spełniającego przypadek *TAK* od grafu spełniającego przypadek *NIE* jest *NP-trudne*.

Hipoteza *UGC* do dziś nie została rozstrzygnięta. Jej istnienie pozwala jednak spojrzeć na znane problemy z nowego punktu widzenia. Gdyby była prawdziwa, to znalezienie nawet przybliżonego rozwiązania dla wielu problemów okazałoby się niezwykle trudne. Wiemy już, na przykład, że w problemie minimalnego pokrycia grafu nie ma nawet przybliżonego efektywnego rozwiązania o współczynniku mniejszym niż 1,36. Znamy za to proste rozwiązanie o współczynniku 2.



W 2003 roku Khot i Regev wykazali, że

gdy hipoteza *UGC* jest prawdziwa, to znalezienie przybliżonego rozwiązania o dowolnym współczynniku *mniejszym od 2* jest *NP-trudne*.

Oznacza to, że zaproponowane przez nas proste rozwiązanie przybliżone jest najlepszym nietrudnym sposobem podejścia do zadania.

Kolejnym znanym problemem jest znalezienie maksymalnego cięcia w grafie (problem *MAXCUT*). Polega on na podziale wierzchołków grafu na dwa podzbiory (tzn. dokonaniu *cięcia*). Jego rozmiarem nazwiemy liczbę krawędzi „granicznych”, których wierzchołki należą do różnych podzbiorów. Należy oczywiście znaleźć cięcie o największym rozmiarze. *MAXCUT* jest problemem *NP-trudnym*, a więc (o ile $P \neq NP$) nie istnieje efektywny sposób znalezienia maksymalnego cięcia. Sensownym rozwiązaniem jest znalezienie algorytmu przybliżonego. Pierwszy algorytm o współczynniku $\alpha = \frac{1}{2}$ znaleziono w roku 1976. Po 18 latach Goemans i Williamson znaleźli lepszy algorytm, oparty na rozumowaniu czysto geometrycznym, co wprawiło w zdumienie znawców zagadnienia. Wyznaczony przez nich współczynnik α wynosi

$$\alpha_{GW} = \min_{0 < \theta < \pi} \frac{2\theta}{\pi(1 - \cos \theta)} \approx 0,878567.$$

Podobnie, jak w przypadku minimalnego pokrycia grafu, hipoteza *UGC* wyjaśnia sprawę do końca, to znaczy

Jeżeli hipoteza *UGC* jest prawdziwa, to każdy przybliżony algorytm w problemie *MAXCUT* o współczynniku większym niż α_{GW} jest *NP-trudny*.

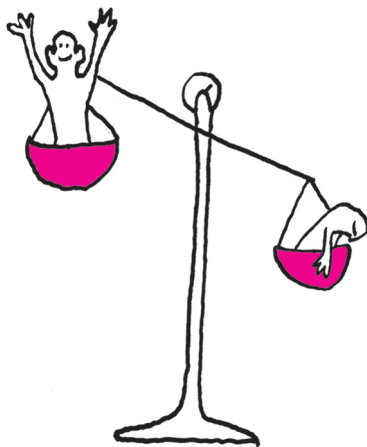
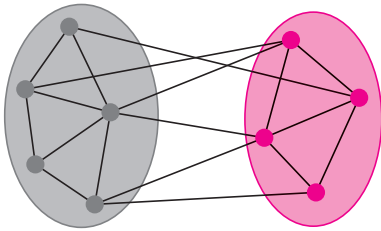
Rezultat ten został opublikowany w 2005 roku, ale przy dodatkowym założeniu o prawdziwości wówczas jeszcze nierozstrzygniętej hipotezy *MiS*. Dowód jej prawdziwości ogłoszono jednak jeszcze w tym samym roku w materiałach pewnej konferencji poświęconej podstawom informatyki – jednym ze współautorów tego wyniku jest wspomniany już Krzysztof Oleszkiewicz. Najlepsze przybliżone rozwiązanie problemu *MAXCUT* zależy więc tylko od prawdziwości hipotezy *UGC*.

Przyjrzyjmy się bliżej hipotezie *MiS*. Jest ona związana z analizą harmoniczną funkcji boolowskich. Definicje i twierdzenia w tej dziedzinie zazwyczaj sformułowane są w języku polityki i teorii wyboru socjalnego (np. współczynnik siły koalicji Banzhafa czy twierdzenie Arrowa o dyktaturze). Hipoteza dotyczy stabilności systemu głosowania, w którym głosuje się na jedną z alternatyw, tak jak w wyborach prezydenckich w Stanach Zjednoczonych. System wyborów w tym kraju jest pośredni: wyborcy głosują na kolegium elektorskie, a następnie elektorzy dokonują wyboru prezydenta. W wielu krajach panuje bezpośredni system większościowy, gdzie większość głosów wyborców decyduje o wyborze.

Spektakularnym przykładem występowania niestabilności systemu elektorskiego był przypadek wyborów prezydenckich w roku 2000. Rywalizowali wtedy George W. Bush i Al Gore. Językiem u wagi w tych wyborach okazało się głosowanie na Florydzie. Wyniki we wszystkich stanach, bez Florydy, wskazywały na wygraną Busha w większości stanów, ale Gore miał więcej głosów elektorskich. Różnica głosów na Florydzie była niewielka, a co więcej, niestarannie przygotowana karta do głosowania mogła spowodować błędne zakwalifikowanie głosu przez maszynę zliczającą. Walka toczyła się o decydujące 25 głosów elektorskich Florydy. Ostatecznie Bush otrzymał na Florydzie 2912790 głosów, Al Gore 2912253 głosy. Przewaga Busha wyniosła tylko 537 głosów (przewaga 0,009%). Gdyby w Stanach Zjednoczonych panował system większościowy bezpośredni, wybory wygrałby Gore. W obowiązującym systemie elektorskim wygrał jednak Bush.

Niestabilność systemu objawiła się zbytnią wrażliwością systemu elektorskiego na niepewne wyniki u niewielkiej liczby głosujących. W tym przypadku wady tej nie miał system bezpośredni. Spróbujmy ją opisać za pomocą matematycznego formalizmu. Niech x_1, x_2, \dots, x_n będą wynikami głosowania na jednego z dwóch kandydatów, które koduje się jako -1 i 1 . System głosowania jest funkcją n zmiennych $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o wartościach w zbiorze $\{-1, 1\}$. System,

Rozmiar cięcia na poniższym rysunku wynosi 6.



w którym istnieje taki wskaźnik $1 \leq d \leq n$, że $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_d$, nazywa się *dyktaturą*, a wyborca o indeksie d – dyktatorem. System opisany funkcją

$$\text{Maj}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{sgn}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

System większościowy określony jest tylko dla n nieparzystego, co w praktyce nie jest żadnym ograniczeniem.

nazywany jest *większościowym*. Wpływem i -tego wyborcy na wynik głosowania jest liczba

$$\text{Inf}_i(f) = P(f(x) \neq f(x^i)),$$

gdzie $x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ jest głosowaniem, w którym i -ty wyborca zmienił swoją decyzję. Wpływ i -tego wyborcy jest zatem prawdopodobieństwem zauważenia skutku zmiany decyzji tego wyborcy. Dla dyktatury $\text{Inf}_i(f) = 0$, gdy $i \neq d$ oraz $\text{Inf}_d(f) = 1$. Dyktator ma absolutny wpływ na wynik wyborów, inni wyborcy nie mają żadnego. System uważa się za *daleki od dyktatury*, gdy dla pewnego małego $\tau > 0$ zachodzi $\text{Inf}_i(f) \leq \tau$ dla każdego wyborcy i . O liczbie τ można zatem myśleć jako o poziomie niezależności od dyktatury. Dla systemu większościowego

$$\text{Inf}_i(\text{Maj}_n) = \frac{\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi(n-1)}}.$$

Wpływ każdego z wyborców jest taki sam i jest niewielki, gdy liczba wyborców jest duża – przy takiej liczbie wyborców system większościowy jest zatem daleki od dyktatury.

Badanie jakości systemu głosowania prowadzi się poprzez analizę jego własności w najbardziej nieprzewidywalnych warunkach, to znaczy wtedy, gdy wyborcy głosują niezależnie i z tym samym prawdopodobieństwem na każdego z kandydatów. Jeśli wówczas $Ef(x) = 0$, to mówimy, że system wyborczy jest *zrównoważony*. Aby zbadać jego podatność na zmiany, rozważymy sytuację, w której każdy z wyborców zmienił decyzję z ustalonym prawdopodobieństwem. Niech zatem $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ będzie wektorem wyników głosowania oraz niech $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ będzie wektorem, jaki powstałby z wektora x , gdyby każdy z wyborców losowo i z prawdopodobieństwem $p \leq \frac{1}{2}$ zmienił swoją decyzję. Wtedy $P(y_i = -x_i) = p$ i $P(y_i = x_i) = 1 - p$. Wektory x i y są ze sobą ściśle związane. Ich współczynnik korelacji wynosi $\rho = 1 - 2p$, jest nieujemny i jest malejącą funkcją p . Funkcjonał

$$S_\rho(f) = P(f(x) = f(y)) - P(f(x) \neq f(y))$$

nazywa się *stabilnością na poziomie ρ* systemu f . Wartości S_ρ zbliżone do zera charakteryzują systemy stabilne. Dla dyktatury $S_\rho(f) = \rho$. Dla systemu większościowego stabilność jest skomplikowaną funkcją ρ , można jednak obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_\rho(\text{Maj}_n) = \frac{2 \arcsin(\rho)}{\pi}.$$

Teraz wreszcie można sformułować hipotezę *MiS*.

Zadane są: współczynnik korelacji ρ i mała liczba $\varepsilon > 0$. Istnieje wtedy takie $\tau > 0$, że dla wszystkich zrównoważonych systemów wyborczych o poziomie niezależności od dyktatury τ zachodzi

$$S_\rho(f) \leq \frac{2 \arcsin(\rho)}{\pi} + \varepsilon.$$

Hipoteza została udowodniona we wspomnianej pracy Mossela, O'Donnella i Oleszkiewicza. W tej samej pracy została udowodniona jeszcze jedna niezwykle interesująca hipoteza, występująca pod barokową nazwą *It Ain't Over Till It's Over*. Mówi ona, że dla zrównoważonych systemów wyborczych istnieje taki poziom niezależności od dyktatury, że nawet gdy ujawni się frakcję $\rho < 1$ głosów losowo wybranych wyborców, to niezależnie od wartości ρ z dużym prawdopodobieństwem wynik wyborów jest jeszcze niezdecydowany. W systemach dalekich od dyktatury ujawnienie nawet dużej frakcji wyników wyborów jeszcze nie daje pewności co do ostatecznego rezultatu. Bolesnie przekonał się o tym Al Gore i zapewne niewielkim pocieszeniem byłaby dla niego świadomość, że jak doniosłym matematycznym problemem związana była jego porażka w walce o prezydencki fotel.



Autor artykułu nie wie, czy nazwa ta wiąże się z piosenką Lenniego Kravitzo o tym samym tytule.

Matematyka jest jedna: metoda probabilistyczna

Tomasz KOBOS

doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

W pierwszej części cyklu (*Delta* 2/2015) mieliśmy okazję przyjrzeć się wybranym przykładom zaskakujących połączeń, z którymi możemy spotkać się w świecie matematyki. W drugiej części zapoznamy się z jednym z takich połączeń dużo dokładniej. Mowa tu o *metodzie probabilistycznej*, wiązanej często z nazwiskiem Paula Erdősa, który w trakcie swojej kariery naukowej korzystał z niej niezliczoną liczbę razy. Większość uczniów szkół średnich, nawet tych startujących w konkursach i olimpiadach, rachunek prawdopodobieństwa kojarzy głównie z niezbyt porywającymi zadaniami typu: „Rzucamy 3 razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, w którym...”. Sytuacja zmienia się na studiach wyłącznie odrobinę, gdy dochodzą pojęcia zmiennej losowej i jej rozkładu czy wartości oczekiwanej. Repertuar poszerza się więc o zadania, w których trzeba znaleźć rozkład czy wartość oczekiwaną pewnej zmiennej losowej, ale dalej nie powoduje to u większości okrzyków zachwytu. Mówiąc krótko – rachunek prawdopodobieństwa przeciętnemu uczniowi czy studentowi nie kojarzy się z niczym fascynującym.

Jeżeli tak jest i w Twoim przypadku, Drogi Czytelniku, to ten artykuł jest właśnie dla Ciebie. Jego celem jest bowiem ukazanie zupełnie zaskakujących możliwości zastosowania rachunku prawdopodobieństwa w zagadnieniach, które nie tylko nie mają związku z żadnymi kostkami i monetami, a nawet nie ma w nich słowa o jakimkolwiek prawdopodobieństwie. Jedno z najbardziej typowych zastosowań metody probabilistycznej dotyczy sytuacji, w której chcemy udowodnić istnienie obiektu o pewnej żądanej własności. Często taki obiekt skonstruować jest bardzo trudno. Zamiast tego możemy udowodnić, że... prawdopodobieństwo jego istnienia jest dodatnie! Brzmi to być może na tyle nieprawdopodobnie (!), że lepiej będzie zobaczyć to na przykładzie.

Zadanie 1. Dowieść, że można pokolorować każdy element zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2015\}$ na jeden z czterech kolorów w taki sposób, że żaden rosnący 10-wyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazach z tego zbioru nie składa się z elementów o jednakowym kolorze.

Rozwiązanie. Wykażemy, że jeżeli każdy element zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2015\}$ pokolorujemy na jeden z czterech kolorów w sposób losowy, to prawdopodobieństwo zdarzenia, w którym żaden rosnący 10-wyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazach z tego zbioru nie składa się z elementów o jednakowym kolorze, jest dodatnie. Zakładamy przy tym, że każdy element malujemy na dowolny z czterech kolorów z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ i że losowania są niezależne.

Ustalmy chwilowo pojedynczy 10-wyrazowy ciąg arytmetyczny. Jest 4^{10} wszystkich możliwych pokolorowań tego ciągu, z których dokładnie 4 składają się wyłącznie z elementów o jednakowym kolorze. Prawdopodobieństwo tego, że ustalony ciąg składa się z elementów o jednakowym kolorze, wynosi zatem $\frac{4}{4^{10}}$. Oszacujmy od góry liczbę N wszystkich rosnących 10-wyrazowych ciągów arytmetycznych o wyrazach w danym zbiorze. Każdy taki

ciąg jest wyznaczony przez swój wyraz początkowy a oraz różnicę $r > 0$. Spełnione są przy tym nierówności $1 \leq a \leq 2006$ oraz $a + 9r \leq 2015$, czyli $r \leq \frac{2015-a}{9}$. Dla ustalonego a istnieje więc co najwyżej $\frac{2015-a}{9}$ ciągów, których pierwszym wyrazem jest a . Otrzymujemy zatem nierówność

$$\begin{aligned} N &\leq \frac{2015-1}{9} + \frac{2015-2}{9} + \frac{2015-3}{9} + \dots + \frac{2015-2006}{9} = \\ &= \frac{2014 + 2013 + 2012 + \dots + 10 + 9}{9} = \frac{2006 \cdot 2023}{2 \cdot 9} < \\ &< \frac{2^{11} \cdot 2^{11}}{2 \cdot 2^3} = 4^9. \end{aligned}$$

Ponumerujemy wszystkie N z rozważanych ciągów w sposób dowolny i dla $1 \leq i \leq N$ oznaczmy przez A_i zdarzenie, w którym i -ty ciąg zawiera elementy wyłącznie jednego koloru. Z podstawowej własności prawdopodobieństwa (tzw. *subaddytywności*) otrzymujemy wówczas

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_N) = \frac{N}{4^9} < 1.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, w którym pewien ciąg pomalowany został z użyciem wyłącznie jednego koloru, jest mniejsze niż 1. Prawdopodobieństwo dopełnienia tego zdarzenia jest więc dodatnie, co oznacza, że w pewnym kolorowaniu żaden z rozważanych ciągów nie jest jednokolorowy. Kończy to dowód.

W tym przykładzie wyraźnie rzuca się w oczy bardzo istotna cecha metody probabilistycznej: za jej pomocą z reguły dowodzimy, że coś istnieje, ale nie wskazujemy tego. Ten schemat rozumowania w żadnym wypadku nie wyczerpuje jednak wszystkich jej możliwych zastosowań. Aby to zademonstrować, przyjrzyjmy się, jak korzystając z rachunku prawdopodobieństwa, można udowodnić równość dotyczącą wielokątów wypukłych, których wierzchołki znajdują się w ustalonym zbiorze punktów na płaszczyźnie.

Zadanie 2. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów, wśród których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Niech \mathcal{S} oznacza zbiór wszystkich wielokątów wypukłych o wierzchołkach w tym zbiorze (jako wielokąty wypukłe traktujemy również zbiór pusty, pojedyncze punkty oraz odcinki). Dla dowolnego wielokąta $P \in \mathcal{S}$ przez $a(P)$ i $b(P)$ oznaczamy odpowiednio liczbę punktów z danego zbioru, które leżą na obwodzie i na zewnątrz wielokąta P . Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\sum_{P \in \mathcal{S}} x^{a(P)} (1-x)^{b(P)} = 1.$$

Rozwiązanie. Dla ustalonego, skończonego zbioru punktów na płaszczyźnie wyrażenie

$$\sum_{P \in \mathcal{S}} x^{a(P)} (1-x)^{b(P)}$$

jest wielomianem zmiennej x . Aby wykazać, że jest to wielomian stale równy 1, wystarczy sprawdzić, że żądana równość zachodzi dla liczb x w przedziale $(0, 1)$.

Rozważmy losowe kolorowanie każdego z danych punktów na biało lub czarno. Załóżmy przy tym, że dowolny punkt malujemy na biało z prawdopodobieństwem x , na czarno

z prawdopodobieństwem $1 - x$ oraz że wszystkie losowania odbywają się niezależnie. Zauważmy, że wówczas dla ustalonego wielokąta $P \in \mathcal{S}$ liczba $x^{a(P)}(1-x)^{b(P)}$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia, w którym wszystkie wierzchołki P zostały pomalowane na biało, a punkty leżące na zewnątrz P na czarno. Co więcej, dla dwóch różnych wielokątów $P_1, P_2 \in \mathcal{S}$ tego typu zdarzenia wykluczają się wzajemnie. Dla dowolnych dwóch różnych wielokątów wypukłych istnieje bowiem wierzchołek jednego z nich, który nie należy do drugiego. Gdyby opisane zdarzenia nie były rozłączne, to wierzchołek ten musiałby być pomalowany na dwa kolory, co jest, oczywiście, niemożliwe.

Suma

$$\sum_{P \in \mathcal{S}} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)}$$

jest w tej sytuacji prawdopodobieństwem zdarzenia, w którym wierzchołki jednego z wielokątów P ze zbioru \mathcal{S} zostały pomalowane na biało, zaś punkty leżące na zewnątrz P na czarno. Do rozwiązania zadania wystarczy więc stwierdzić, że jest to zdarzenie pewne – co oznacza, że w dowolnym pokolorowaniu taki wielokąt istnieje.

Szukanym wielokątem jest wielokąt P będący *otoczką wypukłą* białych punktów – czyli najmniejszym wielokątem wypukłym, który zawiera punkty białe (w przypadku gdy liczba punktów białych jest równa 0, 1 lub 2 ich otoczką wypukłą jest odpowiednio zbiór pusty, punkt i odcinek). Jego wierzchołki są koloru białego, a każdy inny punkt biały znajduje się w jego wnętrzu. Kończy to dowód.

W dalszych przykładach wykorzystamy pojęcia zmiennej losowej oraz jej wartości oczekiwanej. Precyzyjne definicje Czytelnik znajdzie bez problemu w Internecie lub w dowolnym podręczniku rachunku prawdopodobieństwa, a więc jedynie poglądowo przypomnimy znaczenie tych pojęć. Na zmienną losową możemy patrzeć jako na funkcję liczbową związaną z losowaniem. Na przykład rzucamy trzy razy kostką. Zmienną losową jest wówczas, powiedzmy, suma wyrzuconych oczek, iloczyn wyrzuconych oczek, liczba kostek, na których wypadła szóstka i tak dalej. Wartością oczekiwaną $E[X]$ zmiennej losowej X jest jej wartość „średnia” – czyli jeżeli zmienna losowa X przyjmuje wartość i z prawdopodobieństwem x_i , to $E[X] = \sum_i i x_i$. Nietrudno udowodnić, że wartość oczekiwana jest liniowa, tzn. $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$ dla dowolnych zmiennych losowych X, Y . Dla nas jest jeszcze istotna jej inna oczywista własność: zmienna losowa zawsze przyjmuje pewną wartość nie mniejszą (i pewną nie większą) niż jej wartość oczekiwana.

Zadanie 3. W 1600-osobowym stowarzyszeniu działa 16000 komisji, z których każda złożona jest z 80 osób. Udowodnić, że pewne dwie różne komisje mają przynajmniej czterech wspólnych członków.

Rozwiązanie. Rozważmy takie losowanie par różnych komisji, że dla dowolnych dwóch par prawdopodobieństwo ich wylosowania jest jednakowe. Wylosujmy w ten sposób pewną parę komisji i oznaczmy przez X liczbę wspólnych członków tej pary. Niech $X_i \in \{0, 1\}$ będzie *funkcją charakterystyczną* i -tej osoby, czyli $X_i = 1$, jeżeli i -ta osoba należy do obu wylosowanych komisji oraz $X_i = 0$ w przeciwnym przypadku. Funkcje X oraz X_i są zmiennymi losowymi. Ponieważ $X = \sum_{i=1}^{1600} X_i$, więc zachodzi równość

$E[X] = \sum_{i=1}^{1600} E[X_i]$. Jednocześnie wprost z definicji wartości oczekiwanej wynika, że liczba $E[X_i]$ jest w rzeczywistości prawdopodobieństwem tego, że i -ta osoba należy do obu z wylosowanych komisji. Jeśli przez x_i oznaczymy więc liczbę komisji, do których należy i -ta osoba ze stowarzyszenia, to zachodzi równość

$$E[X_i] = \frac{\binom{x_i}{2}}{\binom{16000}{2}}.$$

Skoro każda komisja zawiera 80 członków, to mamy ponadto $\sum_{i=1}^{1600} x_i = 16000 \cdot 80$. Wykorzystując nierówność między średnią arytmetyczną a kwadratową, otrzymujemy

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^{1600} E[X_i] = \sum_{i=1}^{1600} \frac{\binom{x_i}{2}}{\binom{16000}{2}} = \sum_{i=1}^{1600} \frac{x_i^2 - x_i}{16000 \cdot 15999} \geq \\ &\geq \frac{(\sum_{i=1}^{1600} x_i)^2}{16000 \cdot 15999 \cdot 1600} - \frac{\sum_{i=1}^{1600} x_i}{16000 \cdot 15999} = \\ &= \frac{80^2 \cdot 16000}{15999 \cdot 1600} - \frac{80}{15999} = \frac{64000 - 80}{15999} = \frac{63920}{15999} > 3. \end{aligned}$$

Zmienna losowa X przyjmuje wyłącznie wartości całkowite, a więc skoro jej wartość oczekiwana jest większa niż 3, to co najmniej raz przyjmuje ona wartość nie mniejszą niż 4. Istnieje więc para różnych komisji, która ma przynajmniej czterech wspólnych członków.

Na zakończenie rozważymy przykład o bardziej teoretycznym charakterze.

Zadanie 4. Dana jest liczba całkowita dodatnia $n \geq 1$. Niech A będzie ustalonym zbiorem n reszt z dzielenia przez n^2 . Udowodnić, że istnieje zbiór B złożony z n reszt z dzielenia przez n^2 , który spełnia następujący warunek: co najmniej połowa reszt z dzielenia przez n^2 przystaje do liczby postaci $a + b$ dla $a \in A$ oraz $b \in B$.

Rozwiązanie. Dokonajmy n niezależnych losowań ze zbioru reszt z dzielenia przez n^2 , zakładając przy tym, że prawdopodobieństwo wylosowania dowolnej z reszt jest równe $\frac{1}{n^2}$. Z uzyskanych reszt tworzymy zbiór B . Ponieważ losowania są niezależne, może on składać się z mniej niż n reszt, gdyż pewna reszta mogła zostać wylosowana więcej niż jeden raz. Jeżeli spełniony jest jednak warunek, w którym co najmniej połowa reszt może być zapisana w postaci $a + b$ dla $a \in A$ oraz $b \in B$, to możemy dopełnić zbiór B do zbioru n -elementowego w dowolny sposób i warunek ten pozostanie spełniony.

Niech X będzie liczbą reszt, które przystają do liczby postaci $a + b$ dla $a \in A$ oraz $b \in B$. Wystarczy udowodnić, że wartość oczekiwana zmiennej losowej X wynosi co najmniej $\frac{n^2}{2}$. Ustalmy dowolną resztę $0 \leq i \leq n^2 - 1$. Ponieważ zbiór A składa się z n elementów, więc istnieje dokładnie n takich reszt b , że $i \equiv a + b \pmod{n^2}$ dla pewnego $a \in A$. Prawdopodobieństwo tego, że ustalona reszta i nie może być zapisana w żądanej postaci, wynosi zatem $(1 - \frac{n}{n^2})^n = (1 - \frac{1}{n})^n$. Co za tym idzie, prawdopodobieństwo tego, że może być ona tak zapisana, wynosi $1 - (1 - \frac{1}{n})^n$. Korzystając z definicji wartości oczekiwanej oraz nierówności $e^x \geq 1 + x$ dla $x \in \mathbb{R}$, dostajemy

$$E[X] = n^2 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right) \geq n^2 (1 - e^{-1}) > n^2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{n^2}{2}.$$

To kończy dowód.

Chociaż metoda probabilistyczna słynie przede wszystkim ze swoich zastosowań w kombinatoryce, jej możliwości są dużo większe. Na stronie angielskiej Wikipedii zebrane zostały przykłady poważnych twierdzeń, które można udowodnić z użyciem rachunku prawdopodobieństwa. Lista jest doprawdy imponująca i zawiera przykłady z dziedziny analizy, algebry, teorii liczb czy nawet topologii. Do najbardziej fascynujących ilustracji tej metody na pewno można zaliczyć twierdzenie Weierstrassa o aproksymacji funkcji ciągłych wielomianami, które można udowodnić z użyciem tzw. prawa wielkich liczb. Bardzo intrygujący może być również dowód zasadniczego twierdzenia algebry z użyciem dwuwymiarowych ruchów Browna.

Metoda probabilistyczna nie jest jedynie kolejną techniką rozwiązywania zadań olimpijskich, a potężnym narzędziem stosowanym wspólnie w wielu działach matematyki. Bardzo duża część obecnie intensywnie badanej wielowymiarowej geometrii wypukłej opiera się na metodach losowych.

Czytelnik zainteresowany bardziej zaawansowanymi zastosowaniami tej metody może zajrzeć do doskonałej książki Nogi Alona i Joela H. Spencera: *The Probabilistic Method* oraz spróbować swoich sił

w dwóch interesujących zadaniach pozostawionych do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 5. Dwustu uczniów wzięło udział w konkursie matematycznym. Mieli oni do rozwiązania 6 zadań. Każde z zadań zostało rozwiązane przez przynajmniej 120 uczniów. Udowodnić, że istnieją tacy dwaj uczniowie, że każde z zadań zostało rozwiązane przez przynajmniej jednego z nich.

Podpowiedź. Rozważ dwóch losowych uczniów i oszacuj prawdopodobieństwo tego, że nie rozwiązali oni oboje zadania pierwszego. Postąp podobnie dla pozostałych zadań i wykorzystaj fakt, że prawdopodobieństwo sumy mnogościowej nie przekracza sumy prawdopodobieństw.

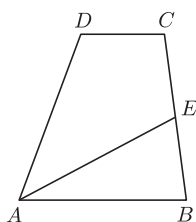
Zadanie 6. W kole o promieniu 16 znajduje się 650 punktów. Mamy do dyspozycji pierścień, który powstał przez usunięcie koła o promieniu 2 ze współśrodkowego z nim koła o promieniu 3. Wykazać, że ów pierścień można umieścić na płaszczyźnie w taki sposób, że przykrywa on przynajmniej 10 z danych punktów.

Podpowiedź. Rozważ losowy punkt w kole o promieniu 19, które jest współśrodkowe z danym. Udowodnij, że jeżeli środek pierścienia umieścimy w tym punkcie, to wartość oczekiwana liczby przykrytych punktów jest większa niż 9.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1453. W trapezie $ABCD$ boki AB i CD są równoległe oraz $AB = 2 \cdot CD$. Punkt E jest środkiem boku BC . Udowodnić, że jeśli $AB = BC$, to w czworokąt $AECD$ można wpisać okrąg.

Rozwiązanie na str. 17

M 1454. Niech x_1, \dots, x_n będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi, przy czym $n \geq 3$. Dla wygody przyjmijmy dodatkowo, że $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$. Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geq \frac{n}{4}.$$

Rozwiązanie na str. 9

M 1455. 12 rycerzy siedzi przy okrągłym stole. Każdy z nich ma dokładnie dwóch wrogów, jednego po swej prawej i jednego po swej lewej stronie. Na ile sposobów król może wybrać drużynę składającą się z 5 rycerzy, w której nie będzie wrogów?

Rozwiązanie na str. 18

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 877. Jednakowe atomy o masach M i prędkościach u_0 tworzą równoległą wiązkę. Wiązka ta zderza się z przeciwniebną, monochromatyczną wiązką fotonów (światła laserowego) o energiach równych energii wzbudzenia atomów ze stanu podstawowego do jednego ze stanów wzbudzonych o naturalnym czasie życia τ . Jak długą drogę przebędzie każdy z atomów od pierwszego zderzenia z fotonem do zatrzymania? Długość fali światła laserowego wynosi λ . Wiązka światła jest wystarczająco intensywna. Obliczenia wykonaj dla atomów magnezu. Rozwiązanie na str. 14

F 878. Atom w stanie wzbudzonym, po pewnym czasie przechodzi do stanu o niższej energii, emitując przy tym

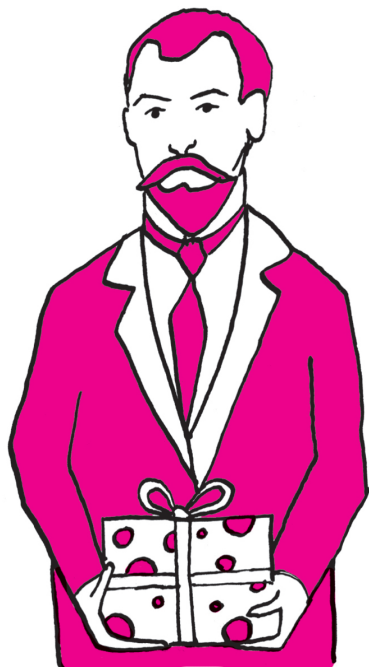
foton. Średni czas życia τ w stanie wzbudzonym wyznacza tzw. naturalną szerokość linii widmowej, czyli dokładność, ΔE , z jaką możliwe jest wyznaczenie energii stanu wzbudzonego: $\tau \Delta E \geq h/(2\pi)$, gdzie h oznacza stałą Plancka. Obserwowane linie widmowe gazu w temperaturze T są dodatkowo poszerzone ze względu na termiczny ruch atomów emitujących fotony. Miarą szerokości linii widmowej jest połowa szerokości rejestrowanego rozkładu natężenia w połowie wysokości tego sygnału (tzw. FWHM – *full width at half maximum*). Oszacuj, do jakiej temperatury należy ochłodzić gaz atomów magnezu, aby termiczna szerokość linii widmowej (FWHM) odpowiadającej długości fali świetlnej była równa naturalnej szerokości tej linii, ΔE . Rozwiązanie na str. 10

Wartości stałych występujących w obu zadaniach: długość fali światła laserowego $\lambda = 2852,1 \text{ \AA}$, czas życia stanu wzbudzonego $\tau = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s}$, masa atomu magnezu $M = 2,264 \cdot 10^{10} \text{ eV}/c^2$, prędkość termiczna atomów magnezu w temperaturze 600 K to $u_0 = 800 \text{ m/s}$, stała Plancka $h = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$, stała Boltzmanna $k = 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$, prędkość światła $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Pudełko Smoluchowskiego, losowe ruchy w grafie i egzopeptydazy

Wojciech NIEMIRO*

Marian Ritter von Smolan Smoluchowski – światowej sławy polski fizyk, pionier fizyki statystycznej, alpinista i taternik, żył w latach 1872–1917. Egzopeptydazy to specjalny typ enzymów. Co może mieć wspólnego Smoluchowski z egzopeptydazami, skoro ani on, ani nikt z jego współczesnych nie wiedzieli o ich istnieniu? I co do tego mają grafy? Postaram się wszystko wyjaśnić w odpowiedniej kolejności. Zaczęę od uproszczonego modelu fizycznego. Podobno zbliżony model rozpatrywał Smoluchowski, ale, niestety, nie udało mi się dotrzeć do źródeł i sprawdzić tej informacji.



Wyobraźmy sobie „pudełko” (określony obszar przestrzeni), do którego losowo wpadają cząstki i z którego losowo wypadają. Mówiąc nieco dokładniej, zakładamy, że w „krótkim” odcinku czasu, powiedzmy $[t, t + h]$,

- do pudełka wpada 1 cząstka z prawdopodobieństwem w przybliżeniu równym a_*h ; prawdopodobieństwo wpadnięcia 2 lub więcej cząstek jest tak małe, że możemy je zaniedbać,
- każda spośród cząstek znajdujących się w pudełku wypada z niego z prawdopodobieństwem w przybliżeniu równym a_+h , niezależnie od pozostałych cząstek.

Żeby to sformułować jeszcze dokładniej, wprowadzimy wygodną terminologię i kilka oznaczeń. Zamiast mówić „w pudełku jest n cząstek”, powiemy, że „układ znajduje się w stanie n ”. Niech $P^h(n, n')$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że układ w chwili $t + h$ będzie w stanie n' , jeśli w chwili t jest w stanie n . Rozumie się, że $n, n' \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Założmy istnienie granic

$$(1) \quad \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} P^h(n, n') = Q(n, n') \quad (n \neq n').$$

Nazwiemy $Q(n, n')$ intensywnością przejścia z n do n' . Ścisłe sformułowanie założeń modelu Smoluchowskiego jest takie:

$$(2) \quad \begin{cases} Q(n, n+1) = a_*, \\ Q(n, n-1) = na_+, \\ Q(n, n') = 0, \end{cases} \quad (n \neq n', n+1 \neq n', n-1 \neq n').$$

Układ znajduje się w równowadze, jeśli prawdopodobieństwa poszczególnych stanów nie zmieniają się w czasie (mówimy tu o równowadze probabilistycznej, która nie oznacza bezruchu, tylko zrównoważone losowe fluktuacje). Niech $\pi(n)$ będzie prawdopodobieństwem stanu n . *Ogólny warunek równowagi* jest następujący:

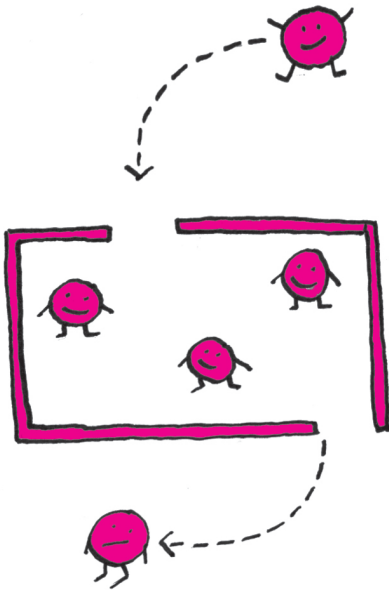
$$(3) \quad \pi(n) \sum_{n': n' \neq n} Q(n, n') = \sum_{n': n' \neq n} \pi(n') Q(n', n) \quad \text{dla każdego } n.$$

Wzór (3) mówi tyle, że prawdopodobieństwo wyjścia ze stanu n jest równe prawdopodobieństwu wejścia do stanu n . Jeśli rozkład prawdopodobieństwa π spełnia (3), to mówimy, że jest *rozkładem równowagi* lub inaczej stacjonarnym. Chwila zastanowienia wystarczy, żeby zrozumieć, że to dobra definicja. Silniejszy od ogólnego warunku równowagi jest następujący *warunek równowagi szczegółowej*:

$$(4) \quad \pi(n) Q(n, n') = \pi(n') Q(n', n) \quad \text{dla wszystkich } n \neq n'.$$

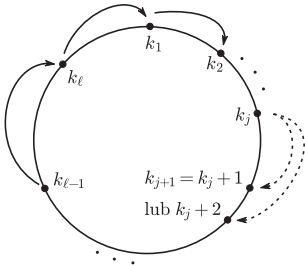
Pozostawiamy Czytelnikowi łatwe sprawdzenie, że (4) implikuje (3). Warunek (4) można interpretować jako *odwracalność w czasie*. Film, pokazujący stan układu, powiedzmy $n(t)$, w pewnym odcinku czasu, $t \in [t_0, t_1]$, wygląda tak samo, jak tenże film „puszczony wspak”: $n(t_1 + t_0 - t)$. To dlatego, że przejścia $n \rightarrow n'$ zdarzają się jednakowo często jak przejścia $n' \rightarrow n$ (przy równowagowym rozkładzie prawdopodobieństwa π).

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski; Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń



Rozwiązanie zadania M 1454.

Niech x_{k_1} oznacza największą z liczb x_1, \dots, x_n . Popatrzmy na wyraz k_1 naszej sumy: $\frac{x_{k_1}}{x_{k_1+1} + x_{k_1+2}}$ i oznaczmy większy ze składników z mianownika, x_{k_1+1} lub x_{k_1+2} , przez x_{k_2} . Popatrzmy teraz na wyraz k_2 naszej sumy: $\frac{x_{k_2}}{x_{k_2+1} + x_{k_2+2}}$ i oznaczmy większy ze składników z mianownika, x_{k_2+1} lub x_{k_2+2} , przez x_{k_3} . Kontynuując to postępowanie, otrzymujemy ciąg indeksów k_1, k_2, \dots



Ponieważ nierówność, którą chcemy udowodnić, jest cykliczna, możemy bez utraty ogólności przyjąć, że $k_1 = 1$. Z definicji mamy $k_j = k_{j-1} + 1$ lub $k_j = k_{j-1} + 2$. Zatem po pewnej liczbie kroków po raz pierwszy otrzymamy $k_\ell = n - 1$ lub $k_\ell = n$. Ponadto $\ell \geq n/2$, bo w każdym kroku przesuwamy się o co najwyżej dwa. Zauważmy też, że $k_{\ell+1} = 1 = k_1$.

Stosując teraz nierówność między średnimi, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geq \sum_{j=1}^{\ell} \frac{x_{k_j}}{x_{k_j+1} + x_{k_j+2}} \geq \sum_{j=1}^{\ell} \frac{x_{k_j}}{2x_{k_j+1}} \geq \ell \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2^\ell}} = \frac{\ell}{2} \geq \frac{n}{4}$$

Zastanówmy się, jaki jest rozkład równowagi w modelu Smoluchowskiego. Odpowiedź jest łatwa, jeśli wpadniemy na pomysł, żeby szukać rozkładu π spełniającego warunek równowagi szczegółowej. Istotnie, jeśli zachodzi (4), to

$$\pi(n-1)a_* = \pi(n)na_\dagger \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Stąd $\pi(n) = \pi(n-1)\lambda/n$, gdzie $\lambda = a_*/a_\dagger$, a więc

$$\pi(n) = \frac{\pi(n)}{\pi(n-1)} \frac{\pi(n-1)}{\pi(n-2)} \dots \frac{\pi(1)}{\pi(0)} \pi(0) = \frac{\lambda^n}{n!} \pi(0).$$

Aby wyznaczyć stałą $\pi(0)$, wystarczy skorzystać z oczywistego równania $\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) = 1$. Ponieważ $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n/n! = e^\lambda$, więc $\pi(0) = e^{-\lambda}$. Otrzymaliśmy następujący wynik.

Twierdzenie 1. W modelu Smoluchowskiego rozkład prawdopodobieństwa dany wzorem

$$\pi(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

jest rozkładem równowagi.

Można pokazać, że wychodząc z dowolnego stanu początkowego, w długim okresie czasu zbliżamy się do rozkładu równowagi: $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t(n_0, n) = \pi(x)$ dla wszystkich n_0 i n . Sławny rozkład występujący w Twierdzeniu 1 związany jest (jak wiele innych wspaniałych obiektów matematycznych) z nazwiskiem francuskiego fizyka i matematyka Siméona Denisa Poissona (1781–1840). Zastanówmy się, jaka jest *średnia* liczba cząstek w pudełku Smoluchowskiego (znajdującym się w równowadze). Jeśli tę średnią liczbę oznaczmy chwilowo przez m , to możemy przeprowadzić następujące rozumowanie. W krótkim okresie długości h , w przybliżeniu,

- do pudełka wpada *średnio* a_*h cząstek,
- z pudełka wypada *średnio* $ma_\dagger h$ cząstek.

Ponieważ średnio tyle samo cząstek wpada, co wypada (równowaga!) to $a_*h = ma_\dagger h$, skąd $m = a_*/a_\dagger = \lambda$. Tak więc zmienna losowa o rozkładzie Poissona ma wartość średnią (nieszczęśliwie nazywaną też „wartością oczekiwaną”) równą λ . Koledzy matematycy nie uznają tego rozumowania za dowód, ale moim zdaniem to ciekawe wprowadzenie.

Zwróćmy uwagę na zaskakujący fakt. Ponieważ model (2) spełnia warunek (4), to jest on odwracalny w czasie. Oglądając nasze pudełko znajdujące się w równowadze probabilistycznej, nie mamy możliwości rozpoznania, w którym kierunku płynie czas.

Przejdźmy do grafów. Wyobraźmy sobie wiele pudełek Smoluchowskiego, oznaczonych numerami $1, \dots, i, \dots, k$. Cząstki wpadają do pudełek z zewnątrz układu, wypadają na zewnątrz oraz przemieszczają się z jednego pudełka do drugiego. Zakładamy, że w „krótkim” odcinku czasu $[t, t + h]$,

- do pudełka i wpada z zewnątrz 1 cząstka z prawdopodobieństwem w przybliżeniu równym $a_{*i}h$,
- każda spośród cząstek znajdujących się w pudełku i wypada z niego na zewnątrz z prawdopodobieństwem w przybliżeniu równym $a_{i\dagger}h$ lub przemieszcza się do pudełka j z prawdopodobieństwem w przybliżeniu równym $a_{ij}h$, niezależnie od pozostałych cząstek.

Możemy interpretować pudełka jako wierzchołki grafu. Z wierzchołka i do j prowadzi strzałka opatrzona liczbą a_{ij} . Dodatkowo można sobie wyobrazić dwa fikcyjne pudełka oznaczone symbolami $*$ i \dagger (źródło cząstek przybywających z zewnątrz i miejsce gromadzące cząstki opuszczające układ). Jeśli $a_{ij} = 0$, to nie ma strzałki między i i j . Nasz model jest zatem opisany przez skierowany, ważony graf. Dla uproszczenia wzorów przyjmijmy jeszcze umownie, że $a_{ii} = 0$ dla wszystkich i .

Stan układu opisuje wektor (lub „konfiguracja”) $n = (n_1, \dots, n_i, \dots, n_k)$, gdzie n_i oznacza liczbę cząstek w pudełku i . Definicja intensywności przejścia w wektorowym przypadku pozostaje taka sama, wzór (1) pozostaje w mocy.

Potrzebujemy jeszcze kilku oznaczeń. Niech n_{-i} oznacza wektor n z pominiętym elementem n_i , czyli $(n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_k)$. Co oznacza n_{-i-j} , można się łatwo domyślić. Możemy teraz przetłumaczyć nasze założenia na ścisły język intensywności przejścia:

$$(5) \quad Q(n, n') = \begin{cases} a_{*i} & \text{jeśli } n'_{-i} = n_{-i}, n'_i = n_i + 1 \text{ dla pewnego } i, \\ n_i a_{ij} & \text{jeśli } n'_{-i-j} = n_{-i-j}, n'_i = n_i - 1, n'_j = n_j + 1 \text{ dla pewnych } i \neq j, \\ n_i a_{i\dagger} & \text{jeśli } n'_{-i} = n_{-i}, n'_i = n_i - 1 \text{ dla pewnego } i, \\ 0 & \text{we wszystkich pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Twierdzenie 2. Rozpatrzmy proces zdefiniowany powyżej, w którym intensywności przejścia są dane wzorem (5). Załóżmy, że układ liczb λ_i spełnia następujące „równania równowagi średniej”:

$$(6) \quad \sum_j \lambda_j a_{ji} + a_{*i} = \lambda_i \left(\sum_j a_{ij} + a_{i\dagger} \right) \quad \text{dla każdego } i.$$

Wtedy rozkład prawdopodobieństwa π dany wzorem

$$\pi(n) = \prod_i e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{n_i}}{n_i!}$$

jest rozkładem równowagi.

Zanim podam dowód, skomentuję założenia i tezę. Później opowiem o swojej przygodzie związanej z tym twierdzeniem.

Założenie (6) dotyczy w istocie średnich przepływów w grafie. Jeśli w pudełku i średnio znajduje się λ_i cząstek, to średnio $\lambda_i a_{ij} h$ cząstek przemieszcza się z i do j w krótkim odcinku czasu h . Podobna interpretacja stosuje się do a_{*i} i $a_{i\dagger}$. Warunek (6) mówi zatem tyle, że *średnio* tyle samo cząstek wpływa do i co wypływa z i . Stabilizowanie się wartości średnich jest warunkiem koniecznym dla stabilizowania się rozkładów prawdopodobieństwa.

W tezie Twierdzenia 2 jest zawarty fakt, że poszczególne komponenty n_i wektora n są, w rozkładzie równowagi, statystycznie niezależne (prawdopodobieństwo stanu n jest iloczynem czynników zależnych od pojedynczych n_i). Otóż ten fakt jest zadziwiający i przeczy naiwnej intuicji! Rozważmy bardzo prosty graf naszkicowany poniżej.

$$* \quad \xrightarrow{a_{*1}} \mathbf{1} \quad \xrightarrow{a_{12}} \mathbf{2} \quad \xrightarrow{a_{2\dagger}} \dagger$$

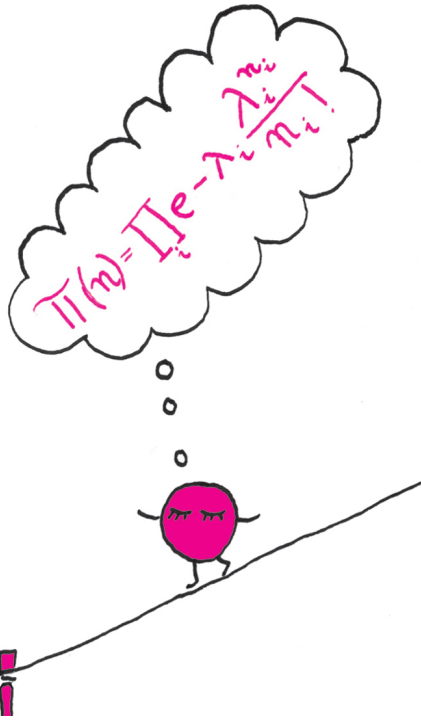
Do pudełka **2** cząstki mogą wpaść tylko z pudełka **1**. Trudno uwierzyć, że zawartość pudełka **2** nie zależy od liczby cząstek w **1**. Żeby ten pozorny paradoks wyjaśnić (przynajmniej w pewnym stopniu), zauważmy, że twierdzenie mówi o niezależności n_1 i n_2 w tej samej chwili. Nie wyklucza wpływu n_1 w momencie t na wartość n_2 w późniejszym czasie $t + h$. Przy okazji zauważmy, że model z dwoma pudełkami Smoluchowskiego (połączonymi tak, jak pokazano powyżej) w oczywisty sposób *nie jest* odwracalny w czasie.

Dowód Twierdzenia 2. Mamy wykazać, że dla dowolnego stanu n zachodzi warunek (3). Napišmy

$$\pi(n) = \pi(n_{-i}) e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{n_i}}{n_i!} = \pi(n_{-i-j}) e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^{n_j}}{n_j!}.$$

Możemy uznać, że powyższy wzór czysto algebraicznie definiuje $\pi(n_{-i})$ i $\pi(n_{-i-j})$. Przypomnijmy jeszcze stałe obowiązującą umowę, że $a_{ii} = 0$. We wszystkich poniższych wzorach indeksy i, j przebiegają zbiór $\{1, \dots, k\}$ i nie będziemy tego powtarzać. Biorąc pod uwagę postać intensywności $Q(n, n')$, wnioskujemy, że lewa strona wzoru (3) (odpowiadająca wyjściu ze stanu n) jest równa

$$\text{WYJŚCIE} = \sum_i \sum_j \pi(n_{-i}) e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{n_i}}{n_i!} n_i a_{ij} + \sum_i \pi(n_{-i}) e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{n_i}}{n_i!} n_i a_{i\dagger} + \sum_i \pi(n_{-i}) e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{n_i}}{n_i!} a_{*i}.$$



Rozwiązanie zadania F 878.

Energia fotonu odpowiadającego promieniowaniu o częstotliwości f wynosi hf . Naturalna szerokość linii widmowej ΔE odpowiada więc przedziałowi częstotliwości $\Delta f = (2\pi\tau)^{-1}$. Fali światła o długości λ odpowiada częstotliwość $f = c/\lambda$, gdzie c oznacza prędkość światła. Jeśli źródło emitujące światło o częstotliwości f porusza się z prędkością v w kierunku odbiornika, to ze względu na zjawisko Dopplera, odbiornik zarejestruje częstotliwość f' różną od f , z dokładnością do wyrazów liniowych w v/c , $f' = f(1 + v/c)$. Składowa prędkości termicznego ruchu atomów w kierunku odbiornika podlega rozkładowi Maxwella o gęstości:

$$P(v) = \sqrt{\left(\frac{M}{2\pi kT}\right)} \exp\left(-\frac{Mv^2}{2kT}\right).$$

Różnica częstotliwości emitowanej i rejestrowanej $(f' - f)/f = v/c$, podlega więc rozkładowi $P(f')$, który jest proporcjonalny do:

$$\exp\left(-\frac{Mc^2(f' - f)^2}{2kTf^2}\right),$$

co odpowiada

$$\text{FWHM} = \sqrt{\left(\frac{8kT \ln 2}{Mc^2}\right)} f.$$

Tak obliczona wartość FWHM jest równa naturalnej szerokości $\Delta f = (2\pi\tau)^{-1}$, dla temperatury

$$T = \frac{M\lambda^2}{4\pi^2 \cdot 8k\tau^2 c^2 \ln 2}.$$

Dla podanej linii magnezu $T = 0,18$ K.



Pierwszy wyraz odpowiada takim przejściom z n do n' , że $n'_i = n_i - 1$ i $n'_j = n_j + 1$ (cząstka przemieszcza się z pudełka i do j). Drugi wyraz – to przejścia $n'_i = n_i - 1$ (cząstka ucieka z pudełka i na zewnątrz). Trzeci – to przejścia $n'_i = n_i + 1$ (cząstka przychodzi z zewnątrz do pudełka i). Łącząc pierwszy i drugi wyraz, otrzymujemy

$$\text{WYJŚCIE} = \sum_i \pi(n_{-i}) e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \lambda_i \left(\sum_j a_{ij} + a_{i\dagger} \right) + \pi(n) \sum_i a_{*i}.$$



Podobnie, prawa strona wzoru (3) (odpowiadająca wejściu do stanu n) jest równa

$$\begin{aligned} \text{WEJŚCIE} &= \sum_j \sum_i \pi(n_{-j-i}) e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^{n_j+1}}{(n_j+1)!} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{n_i-1}}{(n_i-1)!} (n_j+1) a_{ji} + \\ &+ \sum_i \pi(n_{-i}) e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{n_i-1}}{(n_i-1)!} a_{*i} + \\ &+ \sum_i \pi(n_{-i}) e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{n_i+1}}{(n_i+1)!} (n_i+1) a_{i\dagger}. \end{aligned}$$

Pierwszy wyraz odpowiada takim przejściom z n' do n , że $n_j = n'_j - 1$ i $n_i = n'_i + 1$ (cząstka przemieszcza się z pudełka j do i). Drugi wyraz – to przejścia $n_i = n'_i + 1$ (cząstka przychodzi z zewnątrz do pudełka i). Trzeci – to przejścia $n_i = n'_i - 1$ (cząstka ucieka z pudełka i na zewnątrz). Analogicznie jak poprzednio,

$$\text{WEJŚCIE} = \sum_i \pi(n_{-i}) e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \left(\sum_j \lambda_j a_{ji} + a_{*i} \right) + \pi(n) \sum_i \lambda_i a_{i\dagger}.$$

Równania (6) implikują

$$\text{WEJŚCIE} = \text{WYJŚCIE},$$

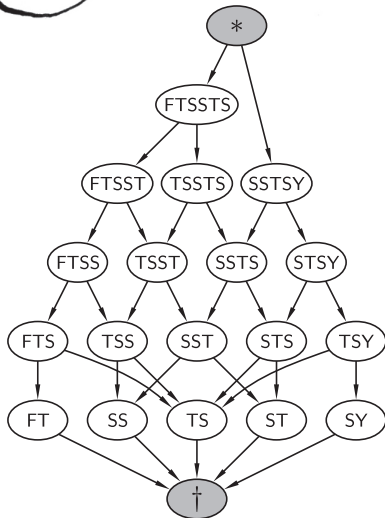
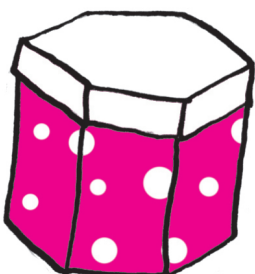
co kończy dowód. \square

Proces zdefiniowany równaniem (5) pojawia się przy modelowaniu pewnych zjawisk biologicznych. Popatrzmy na graf na rysunku. Wierzchołki odpowiadają *peptydom*, które w uproszczeniu identyfikujemy z ciągami liter z 20-elementowego alfabetu. *Egzo-peptydazy* to enzymy, które „odrywają jedną literkę z prawej lub lewej strony ciągu”. Każda krawędź grafu odpowiada działaniu specyficznej egzo-peptydazy. Stan układu opisuje wektor, zawierający liczby cząstek peptydów,

$$n = (n_1, \dots, n_k).$$

Oderwanie literki jest równoważne przejściu cząstki z jednego wierzchołka do drugiego wzdłuż krawędzi grafu. „Długie ciągi” napływają z zewnątrz, ze źródła oznaczonego symbolem $*$. Ciągi złożone z pojedynczych literek są nieobserwowane (pochlania je stan umownie nazwany \dagger). Jesteśmy w sytuacji przedstawionej poprzednio.

Parę lat temu pracowałem nad tym modelem wraz z dwójgim młodych, wspaniałych bioinformatyków, Anną Gambin i Bogusławem Kluge. W pewnej chwili uświadomiliśmy sobie, że symulacje komputerowe sugerują fakt sformułowany w Twierdzeniu 2. Długo nie mogliśmy w prawdziwość tego faktu uwierzyć, tak się wydawał nieintuicyjny i... podejrzenie prosty. Jak tylko przełamaliśmy barierę psychologiczną, to szybko i łatwo znaleźliśmy dowód (przytoczony powyżej). Kilka miesięcy po opublikowaniu naszej pracy dowiedzieliśmy się, że Twierdzenie 2 było już wcześniej znane. Nasz główny wynik zawarty w publikacji polegał jednak na czymś innym.



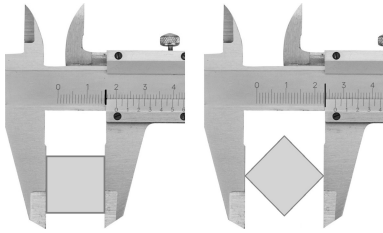


mała delta

Pozbądźmy się koła

Dawno, dawno temu za górami, za lasami na Euklidesowych Równinach żyło sobie koło. Niezmiernie było dumne ze swej stałej szerokości. Chadzało ścieżkami, które miały szerokość równą jego średnicy, i jako jedyna figura zamieszkująca równiny mogło kręcić się przy tym jak szalone, stale podpierając obie krawędzie ścieżki.

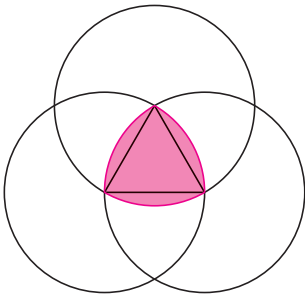
Szerokość figury – odległość między takimi prostymi równoległymi, że figura mieści się w „pasie” wyznaczonymi przez te proste (wraz z nimi samymi) i gdy każda z tych prostych ma co najmniej jeden punkt wspólny z tą figurą. Przykładowo najmniejszą szerokością kwadratu jest jego bok, a największą jego przekątna.



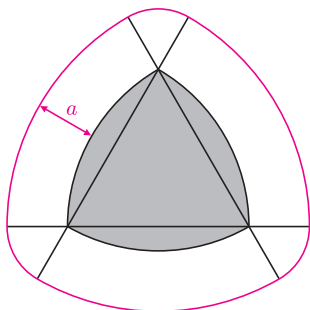
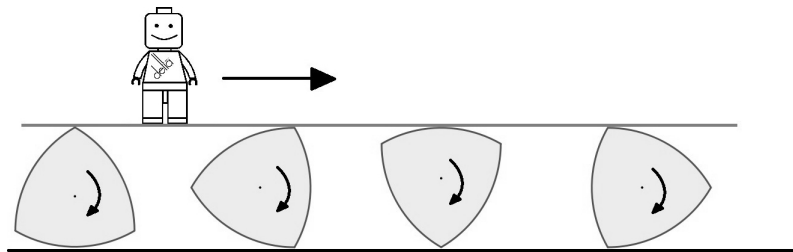
Fakt, że jak dotąd żaden zamieszkujący równiny wielokąt nie miał obwodu równego obwodowi koła (problem znany jako wyprostowanie okręgu) – gdyż wszystkie one zostały stworzone jedynie przy użyciu cyrkla i linijki bez podziałki – napawało koło jeszcze większą dumą. I tak spacerowało kręcące się koło, przekonane o swej wyjątkowości.

Gdy w 1882 roku fakt niemożliwości kwadratury koła został udowodniony, dotknięty tym kwadrat wyznaczył nagrodę (w postaci matematycznej sławy) dla tego, kto jako pierwszy udowodni, że koło nie jest tak wyjątkowe, jak mu się wydaje. A koło było niezmiernie rade, że zainteresowanie nim rośnie...

Wesprzyjmy kwadrat i poszukajmy figury, której szerokość (zdefiniowana na marginesie) jest stała niezależnie od kierunku, w jakim będzie mierzona (ang. *curve of constant width*). Bierzemy pod uwagę tylko figury wypukłe, ponieważ w innym przypadku koło z dowolnym otworem w środku spełniałoby nasze wymagania. Figurą, która zdobyła nagrodę wyznaczoną przez kwadrat, był trójkąt Reuleaux (od nazwiska jego twórcy). Żeby go otrzymać, skonstruuje trójkąt równoboczny, a następnie poprowadź łuk okręgu o środku w jednym z jego wierzchołków i promieniu równym długości boku trójkąta, łączący dwa pozostałe wierzchołki. Po powtórzeniu owej procedury w każdym z jego wierzchołków, otrzymasz zwycięską figurę. Żeby zrozumieć jej okrągłość, pomimo nie do końca okrągłego kształtu, wyobraźmy sobie deskę podpieraną przez te trójkąty. Podczas ich toczenia deska nie zmienia wysokości nad ziemią, nie następują „skoki”, a znajdujący się na desce ludek nie jest w stanie rozpoznać, czy pod nim obracają się koła, czy zwycięskie trójkąty.



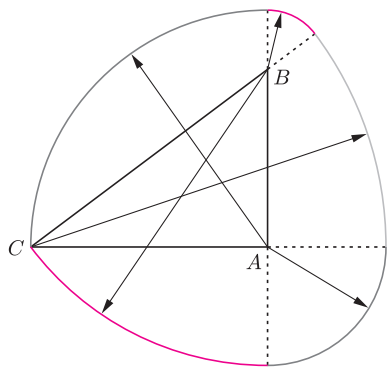
Konstrukcja trójkąta Reuleaux.



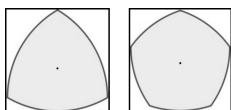
Trójkąt Reuleaux w otoczce o szerokości a ma teraz szerokość $2a$ plus długość boku wyjściowego trójkąta.

Figur z rodziny Reuleaux jest dużo więcej, kolejną będzie pięciokąt Reuleaux, siedmiokąt Reuleaux itd. (figury o nieparzystej liczbie łuków). Ich konstrukcja za każdym razem polega na zakreśleniu łuków okręgu pomiędzy sąsiadującymi wierzchołkami wielokąta foremego o nieparzystej liczbie kątów, gdzie środkiem okręgu jest wierzchołek najbardziej oddalony od tego boku, a promień to najdłuższa przekątna. Drogi Czytelniku, samodzielnie wyznacz szerokości tych figur w zależności od długości boku wyjściowego wielokąta.

Tak uzyskane figury mają pewną cechę nie przez wszystkich uważaną za zaletę – mają rogi. Ale, oczywiście, rogów można się pozbyć. Wystarczy zrobić dla takiej rogatej figury otoczkę: dołączyć do niej wszystkie punkty odległe od niej nie więcej niż o dowolnie ustalony dystans – tak opatulona figura będzie miała gładki brzeg, a ponieważ w każdym kierunku przybędzie jej tyle samo, więc nadal będzie miała stałą szerokość.



Konstrukcja figury o stałej szerokości na bazie trójkąta o bokach 5, 4, 3; jeden z promieni przy C okazał się zerowy.



Figury o stałej szerokości obracają się bez luzu w kwadracie.



Figury z rodziny Reuleaux oraz monety w kształcie bardzo do nich zbliżonym – 50 pensów brytyjskich oraz jednodolarówka kanadyjska.



Chiński konstruktor Guan Bailhua nie dał kołu za wygraną i w 2009 roku skonstruował rower o nieokrągłych kołach przystosowany do prostych dróg. Żeby rowerzysta mógł znajdować się na stałej wysokości nad ziemią, zmienił on konstrukcję roweru. Jego rama jest niejako położona na „kołach” (tak jak deska z ludkiem na trójkątach Reuleaux), a nie umocowana do osi obrotu koła jak w standardowym rowerze.
Źródło: http://www.china.org.cn/china/photos/2009-05/07/content_17738257_4.htm.

Figury o stałej szerokości można tworzyć na wiele różnych sposobów – oto jeszcze jeden, w którym za punkt wyjścia weźmiemy tym razem dowolny trójkąt o bokach $a \geq b \geq c$. Niech $k = a + b$. Kreślimy dwa łuki o środku w A i promieniu $k - a$ z tej strony, gdzie jest trójkąt oraz promieniu $k - b - c$ z przeciwnej strony. Podobnie kreślimy dwa łuki o środku B i promieniach $k - b$ oraz $k - a - c$. No i wreszcie rysujemy łuki o środku C i promieniach $k - c$ oraz $k - a - b$ (czyli zero). Proszę spróbować: każdy dostrzeże, jak z tych łuków powstaje figura o stałej szerokości (jakiej?). Dla leniwych konkretny przykład jest na marginesie.

Do tej pory brzeg otrzymanych figur składał się z łuków okręgów. Można zbudować figurę o stałej szerokości niemającą na brzegu żadnego takiego łuku (ale to już robota dla zawodowców).

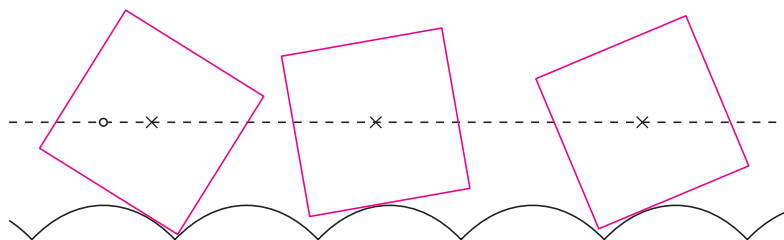
Figury o stałej szerokości można również zdefiniować na inne sposoby, na przykład:

- jest to figura, która, obracając się wewnątrz kwadratu, w dowolnym momencie dotyka każdego z jego boków (tj. obraca się w nim „bez luzu”);
- jest to figura, do której nie można dołączyć ani jednego nowego punktu bez zwiększania jej szerokości.

Co ciekawe, wszystkie figury o stałej szerokości d mają obwód równy πd . Mówiąc o tym Twierdzenie Barbiera ubodło koło do kości. Czytelnika Wnikliwego odsyłamy do dowodu tegoż twierdzenia zawartego m.in. w *Okruchach matematyki* Jarosława Górnickiego. Wśród figur o danej szerokości największe pole ma koło, a najmniejsze trójkąt Reuleaux.

Możemy uznać, że figury o stałej szerokości zostały rozpracowane, a koło zdebronizowane. Może w takim razie udało się koło całkiem pozbawić wkładu w rzeczywistość i skonstruować nieokrągłe koło (dzięki czemu wszystkie używane w pojazdach koła można by zastąpić figurą o stałej szerokości). Przychodzące na myśl umiejscowienie osi obrotu w środku figury o stałej szerokości nie przyniesie oczekiwanego rezultatu. Rowerzysta na kołach w postaci trójkątów Reuleaux, nie znajdowałby się na stałej wysokości nad ziemią, co po dłuższej podróży mogłoby przyprawić go o mdłości. Podejmijmy próbę raz jeszcze: chcemy znaleźć *nieokrągłe koła*, w których odległość osi obrotu od poziomu (a tym samym rowerzysty od poziomu), byłaby stała – czyż to nie jest żywcem wzięta definicja okręgu? Mamy jednak pewne wyjście: czy zostały narzucone jakieś ograniczenia dotyczące podłogi? Nie!

Wybermy „koło” o dowolnym kształcie, na przykład kwadrat (żeby wzmocnić w nim poczucie własnej wartości) i skonstruujmy dla niego odpowiednią podłogę. Podłoga pomiędzy „wglębieniami” ma kształt krzywej łańcuchowej, czyli taki jak, na przykład, zwisające przewody linii wysokiego napięcia (oczywiście, do góry nogami). Rowerzysta, mając taki kształt „kół” i jadąc po tej podłodze, będzie na stałej wysokości. Okazuje się, że dla dowolnego kształtu kół można skonstruować taką podłogę, żeby rowerzysta czuł się komfortowo. Jednak zdecydowanie lepiej jest (mimo wszystko) zostać przy standardowym okrągłym kształcie kół, niż modernizować trasy rowerowe, ulice i autostrady. Jednak jakieś uznanie dla koła mieć należy.



Podłoga przystosowana do kwadratowych kół.

Małą Deltę przygotowała Kamila ŁYCZEK



Rozwiązanie zadania F 877.

Atom w stanie podstawowym pochłonie foton (wiązki laserowej) o energii odpowiadającej stanowi wzbudzonemu, a następnie, średnio po czasie τ , wyemituje go w losowym kierunku.

W każdym akcie absorpcji foton przekazuje atomowi swój pęd $p = h/\lambda$, w wyniku czego atom zmniejsza swą prędkość (pęd fotonu jest przeciwnie skierowany do pędu atomu) o $\Delta u = h/(M\lambda)$. Proces powtórzy się po wyemitowaniu pochłoniętego fotonu, tj. po czasie τ . Ze względu na losowy kierunek emisji średni pęd emitowanego fotonu wynosi zero. Atomy poruszają się więc ze średnim opóźnieniem $a = \Delta u/\tau$, a droga przebyta do zatrzymania wynosi

$$s = u_0^2/(2a) = u_0^2 \tau M \lambda / (2h) \approx 11 \text{ cm.}$$

Opisaną tu metodę „chłodzenia” atomów zaproponowali T. W. Hänsch (nagroda Nobla 2005) i A. L. Schawlow (Nagroda Nobla 1981) w pracy w *Optics Communications* **15**, 68 (1975) skąd zaczerpnięte zostały także dane liczbowe zadania.

Informatyczny kącik olimpijski (80): Podział grafu

Jednym z najtrudniejszych zadań, z którym mierzyli się uczestnicy światowych finałów konkursu ACM ICPC w roku 2014, było zadanie pt. *Metal Processing Plant*. W zadaniu mamy dany n -wierzchołkowy ($n \leq 200$) nieskierowany graf pełny. Dla każdej krawędzi uv grafu znamy jej wagę $d(u, v)$. Wagą podzbioru wierzchołków S nazwiemy maksymalną wagę krawędzi po wszystkich parach wierzchołków z tego podzbioru, tzn. $d(S) = \max_{u, v \in S} d(u, v)$. Należy znaleźć podział wierzchołków grafu na dwa podzbiory A, B , których sumaryczna waga $d(A) + d(B)$ jest jak najmniejsza.

Załóżmy na początek, że zdecydowaliśmy, iż podzielimy graf na dwa podzbiory o wagach nie większych niż ustalone liczby d_A i d_B , i chcemy stwierdzić, czy da się to zrobić. Innymi słowy, chcemy znaleźć dwa podzbiory A i B , że $d(A) \leq d_A$ i $d(B) \leq d_B$. Dla każdego wierzchołka u wprowadźmy zmienną logiczną x_u , która oznaczać będzie, czy wierzchołek u należy do podzbioru B . Skonstruujemy teraz listę zdań logicznych, które zakodują ograniczenia na wartości zmiennych.

Każda z krawędzi uv łączy dwa wierzchołki z podzbioru A (wtedy $d(u, v) \leq d_A$), dwa wierzchołki z podzbioru B (wtedy $d(u, v) \leq d_B$) lub wierzchołki należące do różnych podzbiorów (i wtedy nie mamy ograniczenia na wagę tej krawędzi). Załóżmy bez straty ogólności, że $d_A \leq d_B$.

- (1) Jeśli $d(u, v) \leq d_A$, to wierzchołki u, v mogą znajdować się gdziekolwiek.
- (2) Jeśli $d_A < d(u, v) \leq d_B$, to co najmniej jeden z wierzchołków u, v musi znajdować się w podzbiorze B , czyli musi być spełniona alternatywa $x_u \vee x_v$.
- (3) Jeśli $d_B < d(u, v)$, to wierzchołki u, v muszą znajdować się w różnych podzbiórach, czyli muszą być spełnione obie alternatywy $x_u \vee x_v$ oraz $\neg x_u \vee \neg x_v$.

Każda z alternatyw zawiera dwie zmienne (lub ich negacje), zatem do znalezienia takich wartości zmiennych, które spełniają wszystkie alternatywy, możemy użyć algorytmu 2-SAT. Algorytm ten działa w czasie liniowym od liczby zmiennych i alternatyw, w naszym przypadku będzie to zatem czas $O(n^2)$.

Jesteśmy już gotowi zaproponować pierwsze rozwiązanie naszego zadania. Ponieważ waga podzbioru jest równa wadze jednej z krawędzi grafu, więc mamy $O(n^2)$ możliwości wyboru każdej z liczb d_A i d_B . Sprawdzenie dla wszystkich tych wyborów, czy istnieje podział, i wybranie podziału dla najmniejszej sumy $d_A + d_B$ daje rozwiązanie działające w czasie $O(n^6)$. Jednak wybory te nie są zupełnie niezależne. Zauważmy, że jeśli dla pewnej pary d_A, d_B podział istnieje, to istnieje też dla pary o większych wartościach. Zatem dla ustalonej wartości d_B , którą wybierzemy na $O(n^2)$ sposobów, możemy znaleźć najmniejszą wartość d_A , używając wyszukiwania binarnego w czasie $O(\log n)$. To da nam rozwiązanie działające w czasie $O(n^4 \log n)$.

Okazuje się, że możemy istotnie zmniejszyć liczbę kandydatów na wartość d_B . Powiemy, że krawędź uv jest *wewnętrzna*, jeśli oba wierzchołki u, v znajdują się w tym samym podzbiorze. Załóżmy, że znaleźliśmy maksymalne drzewo rozpinające grafu. Każda krawędź uv nienależąca do tego drzewa wyznacza cykl (w którym pozostałe krawędzie należą do drzewa). Jeśli cykl ten ma nieparzystą długość, to co najmniej jedna z jego krawędzi musi być wewnętrzna. Z kolei jeśli cykl ten ma parzystą długość i zawiera jakąś krawędź wewnętrzną, to musi zawierać co najmniej dwie takie krawędzie (a więc co najmniej jedną krawędź drzewową).

Załóżmy, że $d_B = d(u, v)$ nie jest równe wadze żadnej krawędzi z maksymalnego drzewa rozpinającego, w szczególności krawędź wewnętrzna uv nie należy do drzewa. Jeśli ta krawędź wyznacza cykl długości parzystej, to na tym cyklu znajduje się jeszcze jedna krawędź wewnętrzna xy . Ale wtedy $d_B \geq d(x, y) > d(u, v)$, co daje sprzeczność. Zatem krawędź uv wyznacza cykl długości nieparzystej. Rozważmy krawędź niedrzewową xy wyznaczającą nieparzysty cykl, taką że waga $d(x, y)$ jest maksymalna; zatem $d(x, y) \geq d(u, v)$. Ponieważ $d(x, y)$ jest minimalną wagą na tym cyklu i cykl ten zawiera krawędź wewnętrzną, to $d_B \geq d(x, y)$. Tak więc w tym przypadku $d(u, v) = d(x, y)$.

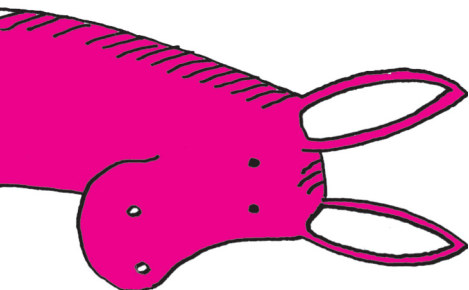
Z tego wynika, że mamy $O(n)$ kandydatów na wartość d_B . Są to wagi wszystkich krawędzi należących do drzewa oraz maksimum z wag krawędzi niedrzewowych tworzących cykle o nieparzystej długości. Drzewo rozpinające można znaleźć algorytmem Kruskala w czasie $O(n \log n)$. Jeśli wykonamy dwukolorowanie tego drzewa w czasie $O(n)$, to będziemy mogli dla każdej niedrzewowej krawędzi odpowiadać w czasie stałym, czy tworzy ona cykl nieparzystej długości.

Ostatecznie dostajemy algorytm działający w czasie $O(n^3 \log n)$.

Tomasz IDZIASZEK

życie na

ży  55



Piotr Francuz wydał książkę *Imagia* nagrodzoną nagrodą Teofrasta za najlepszą książkę z zakresu psychologii 2014, o swoich badaniach mówił w Kawiarni Naukowej Festiwalu Nauki w Warszawie 15 grudnia 2014. O osobliwościach iluzji słuchu rozmawiała Katarzyna Paluch z Dianą Deutsch w *Tygodniku Powszechnym* 11 I 2015. O chorobach neurologicznych książkę *POMYLENI. Chorzy bez winy* napisała Irena Cieślińska (PWN 2014).

Nauka i sztuka

Parę lat temu w Centrum Nauki Kopernik odbyła się sesja „gadana” i wystawa z zakresu *Bioart*. Byłoby łatwo, gdyby to właśnie bioart realizował potrzebę sojuszu sztuki z nauką, ale jest to jedynie nietrwała ciekawostka, wykorzystywanie materiałów biologicznych do tworzenia różnego typu instalacji. Kolorowe bakterie, kolorowe białka, kultury tkankowe, rośliny sterujące (?) dźwiękami.

O sposobie odbioru sztuk wizualnych, ściślej barwnych, mówi i pisze psycholog z KUL, Piotr Francuz. Żeby ten problem zgłębiać, badacz musi stosować wiedzę z zakresu biochemii, fizjologii, genetyki, z zakresu informatyki – żeby wiedzieć, jak to modelować i opisać, z zakresu psychologii – żeby komunikować się z twórcami i odbiorcami. Z tych badań w największym skrócie wynika, że odbiór dzieł malarskich czy też muzycznych ma charakter osobniczy i zależy od warunków percepcji. Różne sposoby wpływania na percepcję używane były intuicyjnie przez artystów wieki temu, dziś nauka może je przeanalizować.

W procesie widzenia nasz mózg stosuje różne sztuczki do analizy tego, co widzą oczy.

O wyodrębnieniu słów lub zdań z kakofonii dźwięków decyduje indywidualna „podświadomość” słuchacza, dowodzi Diana Deutsch, psycholożka z Uniwersytetu Kalifornijskiego w San Diego, zainteresowana badaniami dźwiękowych iluzji. W słuchawkach stereo emitowane równocześnie dwa dźwięki w odstępnie oktawy odbierane są jako dwa odrębne dźwięki, wysoki i niski. To, jak słyszymy muzykę, zależy od tego, kim jesteśmy.

To, jak widzimy obraz modernistyczny – także.

Nasze receptory różnie odbierają różne działania zewnętrzne. Czym to się kończy? Tym, że nie ma uniwersalnych ocen jakości dzieł sztuki. Nawet profesjonalni recenzenci w gruncie rzeczy piszą o tym, „czy im się podobało?”, choć takich określeń unikają.

W wyolbrzymionym wymiarze problemy z percepcją widać w przypadkach pewnych chorób neurologicznych. Są np. tacy ludzie, którzy słyszą kolory albo przypisują kolory liczbom. Czy nie tak tworzyli obrazy malarze, których kolorystyki zwykle nie rozumiemy? Niektórzy chorzy na otępienie czołowo skroniowe (choroba Picka) odbierają w wyjątkowo intensywny sposób kolory, kształty i dźwięki. Na chorobę tę cierpiał Maurycy Ravel, co może tłumaczyć niezwykłość jego „Bolera”. Dzieci z zespołem Williamsa (delecja w chromosomie 7) mają znakomity słuch i wrażliwość na dźwięki.

Największych kłopotów interpretacyjnych dostarcza tzw. sztuka współczesna. Komu się podoba? Zaryzykuję twierdzenie, że tym, którzy starają się zrozumieć artystę, a nie „odbierać” go spontanicznie. Dlatego utwór muzyczny trzeba wysłuchać kilkakrotnie, a na wystawę współczesnego malarza też kilka razy powrócić. Zetknęłam się z tym problemem zaproszona do skomentowania wystawy *Postęp i Higiena*. Wystawa odwołuje się do dwudziestowiecznych osiągnięć nauki i wyraża to środkami artystycznymi. Wybrnęłam z kłopotu, rozgraniczając sferę nauki (poszukiwanie odpowiedzi na pytania, których to odpowiedzi nie znamy), od wiedzy, którą sformułowaliśmy na podstawie, jak sądziliśmy, osiągnięć nauki. Wystawa w Zachęcie pokazuje poprzez dzieła sztuki zastosowania wyników badań, bez względu na to, czy osiągnięto pełne zrozumienie istoty badanego problemu. Nie należy obarczać nauki konsekwencjami wyznawania eugeniki, różnic rasowych, eutanazji.

I sztuka, i nauka są produktami ludzkich umysłów i zgodnie z właściwościami ludzkich mózgów są analizowane i oceniane. W poszukiwaniach łącznika między nauką i sztuką najbliższy jest mi sposób myślenia Piotra Francuza.

Magdalena FIKUS



Liczby wesołe, choć bez tej nazwy, są treścią zadania 2 w książce Hugona Steinhausa *100 zadań*, wydanej w 1958 roku. Jest tam też dowód (trochę inny) twierdzenia zamieszczonego w tym artykule dwie strony dalej. *100 zadań* zostało wydane w wielu językach. Ostatnio w Polsce w 1993 roku.

Nie wiemy, czy zdefiniowane zostały już liczby krnąbrne, ale nie przypisywalibyśmy im żadnych specjalnych własności.

Redakcja

Triskaidekafobia (gr. triskaídeka – 13, phóbos – strach, lęk) – irracjonalny strach przed liczbą 13. Ludzie cierpiący na tę fobię twierdzą, że liczba 13 jest powszechnym źródłem pecha w ich życiu. Na triskaidekafobię cierpieli między innymi Napoleon Bonaparte, Mark Twain czy Richard Wagner. Wiele różnych wydarzeń historycznych związanych jest z liczbą 13. Misja Apollo 13 wystartowała 11 kwietnia o godzinie 13:13:00, wybuch zbiornika z tlenem nastąpił dwa dni później, 13 kwietnia. W XIX wieku wierzono, że jeżeli trzynaście osób zasiądzie do jednego stołu, jedna z nich umrze w ciągu roku. Aby obalić ten przesąd, w 1881 roku powstał „Klub Trzynastki”. Pierwsze spotkanie członków nastąpiło w piątek, 13 stycznia, o godzinie 8:13. Goście wchodzili pod drabiną do pokoju numer 13 i rozsiadali się pomiędzy stosami rozsypanej soli.

Czy jest coś weselszego na twarzy drugiego człowieka od jego uśmiechu? To w pewnym sensie filozoficzne pytanie potrafi wzbudzić wiele zainteresowania u każdego człowieka. Wszak każda osoba posiada swój własny kanon piękna oraz szczęścia. Doświadcza wielu sytuacji wywołujących śmiech. Zna osoby, w towarzystwie których chętniej się śmieje. Rodzina, przyjaciele, koleżanki i koledzy – każdy z nich może być potencjalnym źródłem uśmiechu, zamieniając nasz smutek w radość. Nasza ulubiona komedia, ulubiony skecz kabaretowy potrafią nas rozbawić do łez. Wielokrotnie sposób, w jaki się śmiejemy, wywołuje śmiech u innych. Gdy przeglądamy stare gazety, czasem natrafiamy na dowcipy. Komiksy czytane w czasach dzieciństwa niejednokrotnie nas bawiły (niektórych zapewne dalej bawią). Czasem pojawiają się sytuacje okolicznościowe, tak niepowtarzalne, że już nigdy nie będą nas bawić tak dobrze, jak to robiły za pierwszym razem.

Wszystkie wymienione sytuacje łączy jedno słowo – wesoły. Matematyka długo pozostawała w cieniu i nie miała swoich „wesołych” pojęć. Sytuacja uległa znaczącej zmianie w 1994 roku, gdy Richard K. Guy w książce *Unsolved Problems in Number Theory* zdefiniował liczby wesołe oraz postawił liczne problemy dotyczące tychże liczb. Nazwa ta jest o tyle intrygująca, że w pierwszej kolejności kojarzy nam się z liczbami, obiektami matematycznymi, które z natury swojej nazwy powinny być w jakiś sposób wesołe, radosne, może nawet zabawne. Ta subiektywna intuicja musi jednak pozostać w tyle, gdyż jak się za chwilę okaże, jest ona nietrafiona.

Czym więc są liczby wesołe? Wybierzmy liczbę naturalną $N > 0$ i rozważmy następujący algorytm.

- (1) Oblicz sumę kwadratów cyfr wchodzących w skład zapisu liczby $a_0 := N$ i oznacz ją przez a_1 .
- (2) Jeżeli $a_1 = 1$, zakończ algorytm. Jeżeli $a_1 \neq 1$, przejdź do następnego kroku.
- (3) Mając już a_0, a_1, \dots, a_k dla pewnego $k \geq 1$, zastosuj krok pierwszy do liczby a_k – otrzymasz liczbę a_{k+1} .
- (4) Jeżeli $a_{k+1} = a_i \neq 1$ dla pewnego $i \in \{0, \dots, k\}$, zakończ algorytm. W przeciwnym przypadku kontynuuj algorytm, przechodząc do kroku (2), który stosujesz dla liczby a_{k+1} .

Jeżeli w kroku (2) dla pewnego $k \geq 1$ zachodzi $a_k = 1$, to liczbę N nazwiemy **wesołą**. Jeżeli prawdziwy jest warunek $a_{k+1} = a_i \neq 1$ dla pewnego $i \in \{0, \dots, k\}$, to liczbę N nazwiemy **smutną**. W celu lepszego zrozumienia postawionej wyżej definicji przyjrzyjmy się kilku przykładom.

Weźmy liczbę 133. Krok (1) mówi nam „oblicz sumę kwadratów cyfr”. W naszym przypadku jest to $1^2 + 3^2 + 3^2 = 19$, a więc liczba różna od 1. Warunek z kroku (2) nie jest spełniony, przechodzimy więc do kroku (3). Zgodnie z krokiem (3) obliczamy teraz sumę kwadratów cyfr liczby 19. Otrzymujemy $1^2 + 9^2 = 82$. Przechodząc do kroku (4), stwierdzamy, że warunek nie jest spełniony, a więc należy wrócić do kroku (2). Wykonując algorytm, otrzymujemy kolejno 68, 100, 1. Ostatecznie po pięciu powtórzeniach otrzymaliśmy jedynekę, co oznacza, że liczba 133 jest wesoła.

Niech teraz $N = 13$. Nie bez powodu wybraliśmy tę liczbę. Jest ona powszechnie uważana za liczbę pechową, co więcej, wiele osób często wstydzi się związku własnej osoby z liczbą 13. W niektórych hotelach nie ma oficjalnie trzynastego piętra – jeżeli numery pokoi rozpoczynają się od numeru piętra, to może się okazać, że po ułożeniu wszystkich numerów w porządku rosnącym po 1266 nastąpi 1400. Na niektórych konkursach na miss/mistera nie odnajdziemy uczestnika noszącego numer 13. Czy jednak te wszystkie obawy wobec liczby 13 są zawsze w pełni uzasadnione?

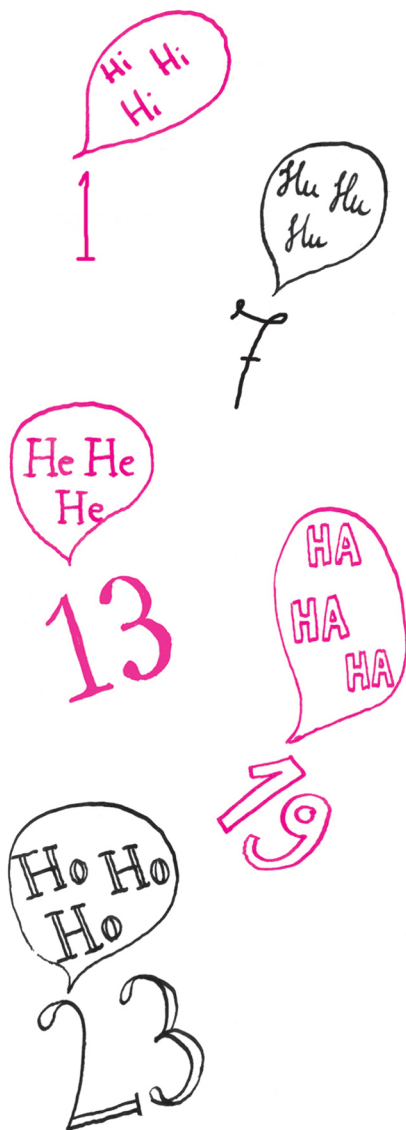
Sprawdźmy, czy 13 jest wesoła, a więc z naszego punktu widzenia ciekawa. Po kroku (1) otrzymujemy $1^2 + 3^2 = 10$, a po powtórzeniu operacji sumowania kwadratów cyfr dostajemy $1^2 + 0^2 = 1$. Okazało się, że 13 jest liczbą wesołą!

*doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

Odpowiedzi na zagadki ze strony 20.

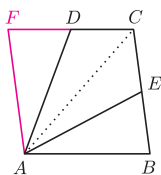
I. 13 miesięcy; kosztowało to 40 000 USD.

II. Według Lipmana Bersa 10 lat.



Rozwiązanie zadania M 1453.

Wybermy na prostej CD punkt F w taki sposób, aby czworokąt $ABCF$ był równoległobokiem.



Z założonej równości $AB = BC$ możemy wywnioskować, że $ABCF$ jest rombem. Ponadto, skoro $CF = AB = 2 \cdot CD$, to punkt D jest środkiem boku CF . Ponieważ punkt E jest środkiem boku BC , więc punkty E i D są symetryczne względem prostej AC . Oznacza to, że czworokąt $AECD$ jest deltoidem, zatem w szczególności można w niego wpisać okrąg.

Odnaleźliśmy więc pozytywny aspekt tej liczby. Każdy z nas może wreszcie przestać wstydić się związku z nią, gdyż niezależnie od tego, jak źle różnym osobom może się kojarzyć nasz numer mieszkania, dzień miesiąca, w którym się urodziliśmy czy też numer z dziennika szkolnego, możemy im powiedzieć „Hej, moja liczba jest wesoła!” i z dumą wytłumaczyć zainteresowanym tę własność.

Dwa przykłady zaprezentowane powyżej dawały wynik pozytywny – liczby w kilku krokach redukowały się do jedynki. Przyjrzyjmy się teraz odmiennemu przypadkowi – weźmy niegroźnie wyglądającą liczbę 4. Wykonując algorytm, szybko okaże się, że jedynki nie osiągniemy. Mianowicie, dostaniemy kolejno 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4. Dalej nie musimy już liczyć, gdyż otrzymaliśmy liczbę, która wcześniej wystąpiła w procesie sprawdzania wesołości naszej liczby. To zapętlenie oznacza, że nie otrzymamy nigdy jedynki, a co za tym idzie, liczba 4 jest liczbą smutną. Ale nie ma powodu do obaw – zapewne każdy z nas potrafi znaleźć w tej liczbie pozytywne aspekty.

Zauważmy istotne wnioski wysuwające się z badania wesołości danej liczby. Jeżeli liczba N jest wesoła, to każda liczba powstała podczas wykonywania algorytmu również jest wesoła. 19, 82, 69 oraz 100 są więc liczbami wesołymi i nie musimy dla nich wykonywać osobnych obliczeń. Podobnie będzie z liczbą 1880 (Czytelnik zechce sprawdzić, iż jest ona istotnie liczbą wesołą) oraz wszystkimi, jakie otrzymamy przy wykonywaniu algorytmu – wszystkie one będą wesołe. Gdy natomiast weźmiemy liczbę smutną, na przykład 4, to również liczby 16, 37, 58, 89, 145, 42 oraz 20 będą smutne. Dzięki tym uwagom będziemy w stanie znacznie szybciej wyznaczyć wszystkie liczby wesołe mniejsze lub równe 1000. Kompletne zestawienie 143 takich liczb reprezentuje poniższa tabela.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 7 | 10 | 13 | 19 | 23 | 28 | 31 | 32 | 44 | 49 | 68 | 70 | 79 | 82 | 86 | 91 | 94 | 97 | 100 |
| 103 | 109 | 129 | 130 | 133 | 139 | 167 | 176 | 188 | 190 | 192 | 193 | 203 | 208 | 219 | 226 | 230 | 236 | 239 | 262 |
| 263 | 280 | 291 | 293 | 301 | 302 | 310 | 313 | 319 | 320 | 326 | 329 | 331 | 338 | 356 | 362 | 365 | 367 | 368 | 376 |
| 379 | 383 | 386 | 391 | 392 | 397 | 404 | 409 | 440 | 446 | 464 | 469 | 478 | 487 | 490 | 496 | 536 | 556 | 563 | 565 |
| 566 | 608 | 617 | 622 | 623 | 632 | 635 | 637 | 638 | 644 | 649 | 653 | 655 | 656 | 665 | 671 | 673 | 680 | 683 | 694 |
| 700 | 709 | 716 | 736 | 739 | 748 | 761 | 763 | 784 | 790 | 793 | 802 | 806 | 818 | 820 | 833 | 836 | 847 | 860 | 863 |
| 874 | 881 | 888 | 899 | 901 | 904 | 907 | 910 | 912 | 913 | 921 | 923 | 931 | 932 | 937 | 940 | 946 | 964 | 970 | 973 |
| 989 | 998 | 1000 | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Przyglądając się jej, dostrzegamy kilka regularności. Zauważmy, że obok 19 w tabeli znajdziemy takie liczby, jak 109 oraz 190. Podobnie mamy 82, 802 oraz 820. W każdym przypadku dopisaliśmy jedno zero w wybranym przez nas miejscu i tak możemy zrobić dla dowolnej wybranej z tabeli liczby. Dopisanie zer do liczby wesołej nie zmienia sumy kwadratów jej cyfr, więc do liczby 82 możemy dopisać dowolną ilość zer, na przykład dostając liczbę 80 002 000 000 i jest to inna liczba wesoła. Zwróćmy też uwagę na to, że w tabeli obok 82 jest również 28. Podobnie odnajdziemy liczby 133, 313 oraz 331 – one wszystkie są wesołe i różni je tylko kolejność cyfr. Zmiana kolejności cyfr (permutacja cyfr) również nie zmienia sumy kwadratów cyfr. Możemy to również połączyć z dopisywaniem zer i tak startując od liczby 133, dojść do liczby 3 001 030. Naturalne może wydawać się to, że zestawienie dwóch liczb wesołych daje liczbę wesołą. Tak jednak nie jest – liczba 7 jest wesoła, natomiast liczba 77 jest smutna.

W związku z regularnością występowania liczb wesołych, to jest tworzenia jednej liczby wesołej z już istniejącej przez dopisanie zera lub przepermutowanie cyfr, można z powyższego zestawienia wyróżnić tylko te liczby wesołe, które nie mają w swym zapisie zera i są najmniejsze spośród liczb otrzymanych przez permutację ich cyfr, wśród liczb mniejszych od tysiąca.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 7 | 13 | 19 | 23 | 28 | 44 | 49 | 68 | 79 | 129 | 133 | 139 | 167 | 188 |
| 226 | 236 | 239 | 338 | 356 | 367 | 368 | 379 | 446 | 469 | 478 | 556 | 566 | 888 | 899 |

Wśród liczb wesołych wyróżniamy inne znane nam rodzaje liczb naturalnych. Do najczęściej wymienianych należą wesołe liczby pierwsze – liczby, które są jednocześnie wesołe i pierwsze:

7, 13, 19, 23, 31, 79, 97, 103, 109, 139, 167, 193, 239, 263, 293, 313, 331, 367, 379, 383, ...

Możemy pójść w inną stronę i wśród wesołych liczb poszukać liczb Fibonacciego. To zadanie wymaga większego nakładu pracy, najmniejszą wesołą liczbą



Rozwiązanie zadania M 1455.

Ustalmy jednego z rycerzy; powiedzmy, że ma on na imię Lancelot. Rozważmy dwa przypadki.

1° Lancelot został wybrany do drużyny. Wówczas żaden z jego dwóch sąsiadów nie będzie w drużynie. Z pozostałych 9 osób musimy wybrać 4, które nie siedzą na sąsiadujących miejscach. Możemy to zrobić na $\binom{6}{4}$ sposobów, ponieważ wybrane osoby jednoznacznie odpowiadają miejscom, a więc wstawieniu pomiędzy 5 miejsc osób spoza drużyny (lub przed pierwszym z nich, lub za ostatnim) 4 miejsc dla osób z drużyny.

2° Lancelot nie został wybrany. Spośród pozostałych 11 osób musimy wybrać 6, niebędących wrogami. W tym przypadku drużynę można wybrać na $\binom{7}{5}$ sposobów: pomiędzy 6 miejsc dla osób spoza drużyny (lub przed pierwszym z nich, lub za ostatnim) wstawiamy 5 miejsc dla osób z drużyny.

Odp. Drużynę można więc wybrać na $15 + 21 = 36$ sposobów.



Fibonacciego jest liczba $F_7 = 13$; dla $n = 7, 83, 359, 433, 509, 569, 35\,999, 104\,911, 397\,379, 590\,041, 593\,689$, liczby F_n są wesołe. Sądzi się, że poza F_7 nie ma innej wesołej liczby pierwszej, która jest również liczbą Fibonacciego.

Możemy również zapytać o największą liczbę wesołą, którą można zapisać przy wykorzystaniu każdej cyfry co najwyżej jeden raz. Rozwiązania tego problemu niech poszuka Czytelnik – jest to proste i pouczające ćwiczenie.

Poznane przez nas wcześniej metody otrzymywania nowych liczb wesołych pozwalają wyciągnąć jeden istotny wniosek – liczb wesołych jest nieskończenie wiele. Nie jest zatem możliwe wypisanie skończenie wielu liczb i stwierdzenie: „Wypisałem już wszystkie liczby wesołe, więcej nie ma!”, gdyż zawsze znajdziemy większą liczbę wesołą. Aby zobaczyć to dokładniej, przyjrzyjmy się ciągowi liczb postaci $10^n + 3$ dla $n \geq 1$. Mamy więc kolejno 13, 103, 1003, 10 003 i tak dalej. Wiemy już, że dopisywanie zer nie zmienia wartości sumy kwadratów cyfr, więc wszystkie te liczby dadzą po pierwszym kroku $1^2 + 3^2 = 10$, a następnie $1^2 + 0^2 = 1$. Otrzymujemy więc prosty wniosek – wszystkie takie liczby są wesołe. Zwróćmy uwagę na to, co zrobiliśmy – pokazaliśmy właśnie, że liczb wesołych jest nieskończenie wiele. Dlaczego? Otóż w miejsce n w liczbie $10^n + 3$ możemy podstawić dowolną liczbę naturalną większą od zera, a ponieważ liczb naturalnych jest nieskończenie wiele, stąd też liczb wesołych musi być nieskończenie wiele. W związku z tym nasuwa się pytanie o to, jak często wśród liczb naturalnych pojawiają się liczby wesołe. Sprawdzono przy użyciu komputerów, że wśród liczb naturalnych nie większych niż 10^{122} jest około 15,5% liczb wesołych. Przypomnijmy – liczb wesołych nie większych od 1000 było 143, natomiast nie większych od 500 jest 76, co w istocie jest bardzo bliskie 15,5% wartości liczby 500.

Liczby wesołe pozostawiają między sobą bardzo wiele liczb smutnych. Jak widzieliśmy na przykładzie liczby 4, od pewnego momentu ciąg cyfr zaczął się powtarzać. Zauważmy, że startując od liczby 2, w drugim kroku otrzymamy 4 i po pewnym czasie do 4 wrócimy. Oznacza to w szczególności, że jeżeli liczby zaczną się powtarzać, to wśród tych liczb, które się powtarzają, nie musi występować oryginalna liczba. Ale skąd właściwie wiemy, że wszystkie liczby, które nie są wesołe, zaczną tworzyć ciągi liczbowe okresowe, a więc będą liczbami smutnymi? Mianowicie o tym mówi ważne twierdzenie dotyczące liczb naturalnych:

Każda liczba naturalna większa od 1 jest albo liczbą wesołą, albo jest liczbą smutną.

Ten fakt jest tylko pozornie trudny do uzasadnienia. Naszkicujemy teraz jego dowód. Weźmy na początku liczbę złożoną z n cyfr. Gdy zsumujemy kwadraty jej cyfr, otrzymamy liczbę nie większą od $81 \cdot n$, gdyż każda z cyfr jest nie większa niż 9. Z drugiej strony liczba złożona z n cyfr jest mniejsza od 10^n , więc jeżeli tylko $81 \cdot n < 10^n$, to w wyniku wykonywania algorytmu nigdy nie przekroczymy 10^n . Tak jest istotnie dla wszystkich $n \geq 3$. Dla $n = 1$ oraz $n = 2$ możemy się łatwo przekonać, że nie dostaniemy nigdy liczby większej od 162 (jaka dwucyfrowa liczba realizuje to szacowanie?). Dla $n = 3$ może się zdarzyć, że suma kwadratów jest liczbą złożoną z takiej samej ilości cyfr jak liczba wyjściowa. Dla $n \geq 4$ zawsze dostaniemy liczbę mającą mniej cyfr niż liczba wyjściowa. W pierwszej z wymienionych sytuacji ($n \geq 3$) wiemy, że dostaniemy zawsze nie więcej niż $81 \cdot n$, więc po wykonaniu $81 \cdot n$ razy algorytmu otrzymamy $81 \cdot n + 1$ liczb. Wśród nich jest albo jedynka, albo zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta muszą się pojawić dwie takie same liczby, co oznacza, że tworzy się okresowy ciąg liczb. W pozostałych przypadkach możemy albo sprawdzić wszystko ręcznie, albo posłużyć się podobnym rozumowaniem z pierwszego przypadku. Wykazaliśmy tym samym podstawowe twierdzenie dotyczące liczb wesołych.

Gdy pierwszy raz stykamy się z liczbami wesołymi, możemy zapytać, dlaczego właściwie podnosimy cyfry do kwadratu? Dlaczego nie podnosimy ich do trzeciej potęgi, czwartej, piątej lub innej potęgi naturalnej? To ograniczenie przyszło wraz z definicją liczby wesołej – pomysłodawca wybrał drugą potęgę. Wyobraźnia matematyka jednak tutaj się nie kończy, wszak możemy sprawdzać, czy liczby są wesołe w innym sensie – czy sumowanie sześcianów cyfr wchodzących w skład liczby da nam jedynkę. Taką liczbę nazwiemy 3-wesołą,

gdzie trójka oznacza potęgę, do jakiej podnosimy cyfry danej liczby. Jeżeli zamiast 3 wybierzemy dowolną potęgę k , to otrzymamy liczby k -wesołe. Jeżeli liczba nie jest k -wesoła, to jest k -smutna.

Weźmy ponownie liczbę 13. Mamy $1^3 + 3^3 = 28$ i kolejno:

$$2^3 + 8^3 = 8 + 512 = 520; 5^3 + 2^3 = 125 + 8 = 133;$$

$$1^3 + 3^3 + 3^3 = 1 + 27 + 27 = 55; 5^3 + 5^3 = 125 + 125 = 250;$$

$$2^3 + 5^3 = 8 + 125 = 133. \text{ Dalsze obliczenia sprowadzą nas do znanej nam}$$

z poprzednich rozważań okresowości liczb, co przekłada się na to, że liczba 13 jest 3-smutna. A co ze szczęśliwą siódemką? Otrzymamy kolejno: 343, 118, 514, 190, 730, 370. Zdziwiająco, liczba 370 będzie się cały czas powtarzać (jaka inna liczba ma tę własność, że suma sześciątów jej cyfr jest równa tej liczbie?). Ale nie zakończyliśmy na jedynce, więc liczba 7 jest 3-smutna. Zauważmy natomiast, że liczby postaci 10^n są liczbami k -wesołymi dla wszystkich $k \geq 2$. I podobnie – do liczby k -wesołej możemy dopisać dowolną ilość zer bez zmiany własności tej liczby oraz możemy permutować jej cyfry, zachowując k -wesołość. Czytelnik zechce poszukać liczb 3-wesołych oraz 4-wesołych innej postaci niż 10^n .

O liczbach wesołych możemy również mówić w systemach pozycyjnych innych niż dziesiętny. Liczba 7 staje się liczbą wesołą w siódemkowym systemie pozycyjnym – ma w nim reprezentację równą 10, a więc już po pierwszym kroku dostajemy jedynekę. W systemie binarnym (dwójkowym) bardzo szybko odnajdujemy najmniejszą liczbę wesołą różną od jedynki – jest nią 10 (w reprezentacji dziesiętnej odpowiada ona liczbie 2). Prowadząc dalsze obliczenia, stwierdzamy, że również 11, 100, 101, 110 oraz 111 (w reprezentacji dziesiętnej są to kolejno: 3, 4, 5, 6 oraz 7) są liczbami wesołymi. Okazuje się, że zachodzi znacznie ogólniejszy i bardzo zaskakujący fakt: w systemie binarnym wszystkie liczby są wesołe. Podobnie jest w systemie czwórkowym i... na tym trop urywa się, gdyż wśród podstaw mniejszych od 500 000 000 nie znaleziono innej mającej taką własność.

Wracając do klasycznej definicji, możemy zadać jeszcze wiele pytań dotyczących liczb wesołych oraz liczb smutnych. Jeżeli liczba jest smutna, to ile co najwyżej różnych liczb będzie się powtarzać przy wykonywaniu algorytmu? Odpowiedzi dostarcza nam przykład z liczbą 4 – okazuje się bowiem, że dla dowolnej liczby początkowej N proces sumowania kwadratów liczb albo zakończy się na liczbie 1, albo wejdzie w jedno z miejsc cyklu liczb 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20. Liczba 229 wkroczy w cykl począwszy od liczby 89, 24 od 20, a 11 od 4 i w każdym z tych przypadków doświadczymy powtarzającego się cyklu złożonego z ośmiu różnych liczb, wymienionych wyżej. Innym problemem jest istnienie dowolnie długich ciągów kolejnych liczb naturalnych wesołych. Odpowiedź pozytywną na to pytanie przedstawił w roku 2000 Esam El-Sedy wraz z Samirem Siksekiem. Ich dowód polegał, między innymi, na pokazaniu, iż liczba

$$\sum_{r=1}^{233\,192} 9 \cdot 10^{r+4} + 20\,958 + u$$

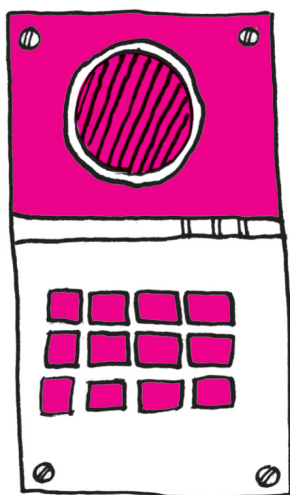
jest liczbą wesołą dla dowolnego $u \in \{1, 4, 16, 20, 37, 42, 58, 89, 145\}$. Wspomnimy jeszcze o największej znanej wesołej liczbie pierwszej: $2^{42\,643\,801} - 1$. Jest to trzecia największa znana liczba pierwsza, odkryta w roku 2009, której rozwinięcie dziesiętne składa się z 12 837 064 cyfr. Jako (niekoniecznie trudne) ćwiczenie niech Czytelnik sprawdzi, ile co najwyżej sumowań kwadratów cyfr dla tej liczby należy wykonać, aby otrzymać 1.

Wesołe liczby pierwsze pojawiły się w popularnym serialu „Doctor Who”.

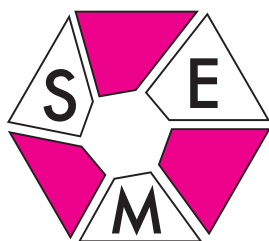
Zamieszczony obok tekst jest definicją wesołej liczby pierwszej podanej przez Doktora (granego przez Davida Tennanta) w odcinku pt. „42”. W tym odcinku liczby wesołe pojawiły się jako zabezpieczenie do jednych z drzwi blokujących dostęp do maszyny silnika statku kosmicznego. Aby otworzyć drzwi, bohaterowie musieli odpowiedzieć na następujące pytanie:

Znajdź następną liczbę w ciągu: 313, 331, 367, ...?

Tytułowy Doktor podał natychmiast odpowiedź „379”, wyjaśniając następnie definicję wesołej liczby pierwszej. Jego opis zwińczyło zdanie: „Czy nie uczą już matematyki rekreacyjnej?”.



Any number that reduces to one when you take the sum of the squares of its digits and continue iterating until it yields one is a happy number; any number that doesn't, isn't. A happy prime is a number that is both happy and prime.



Wszystkie zadania z zawodów pierwszego stopnia wraz z rozwiązaniami są dostępne na stronie internetowej Olimpiady www.om.edu.pl.

Więcej o tym zadaniu piszę w <http://www.mimuw.edu.pl/krych/odczyty/ocenie-w-OM.pdf>.

Dwie zagadki

I. Jak długo w laboratorium Edisona pracowano nad żarówką, zanim uzyskano taką, która mogła świecić przez kilkadziesiąt godzin (wcześniejsze od kilku do trzydziestu minut)?

II. Jak długo Johannes Kepler pracował nad trzecim prawem ruchu planet?

(odpowiedzi w numerze)

Oblicze

Oblicze jest ogólnopolską konferencją matematyczną odbywającą się w Poznaniu w dniach

8–10 maja 2015

po raz drugi. Będzie można na niej wysłuchać oraz wygłosić referaty wchodzące w zakres ogólnie pojętej matematyki i informatyki. Podczas niej poszerzysz kontakty, podzielisz się zainteresowaniami, wymienisz się doświadczeniami.

Liczymy na udział w konferencji studentów od pierwszego roku do doktoratu.

Więcej informacji:
<http://oblicze.wmi.amu.edu.pl>;
<https://www.facebook.com/Oblicze2014>

O LXVI Olimpiadzie Matematycznej

W LXVI Olimpiadzie Matematycznej wzięło udział 895 uczniów, więc aż o 272 osoby mniej niż w pierwszym stopniu poprzedniej Olimpiady. Niżej podpisanemu, który nie jest w tym osądzie osamotniony, wydaje się, że jest to związane z trudnością zadań, których rozwiązanie zaproponowaliśmy uczestnikom bieżącej OM.

Zwyczajowo przyjmujemy, że zadanie pierwsze powinno być łatwe. Na 895 uczestników nadeszło je 554. Tymczasem było ono trzecie w kolejności: rozwiązania drugiego przysłało 767 osób, a trzeciego – 646 osób.

Średnie za te zadania to 2,97, 2,81 i 3,43 punktu.

Zatrzymam się chwilę przy zadaniu pierwszym:

Dane są takie liczby całkowite a, b i c różne od zera, że liczba $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ jest całkowita. Wykazać, że iloczyn abc jest sześcianem liczby całkowitej.

Załóżmy więc, że liczby całkowite α, β i γ są niepodzielne przez liczbę pierwszą p , oraz że dla pewnej trójki liczb całkowitych nieujemnych k, m, n zachodzą równości $a = p^k \alpha$, $b = p^m \beta$ i $c = p^n \gamma$ (w dalszym ciągu myślę, że zadanie nie jest trudne). Aby wykazać, że iloczyn abc jest sześcianem pewnej liczby całkowitej, wystarczy przecież wykazać, iż każdy czynnik pierwszy występuje w rozkładzie tej liczby z wykładnikiem podzielny przez 3. Mamy $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2c + b^2a + c^2b}{abc}$. Mianownik tego ułamka jest podzielny przez liczbę p^{k+m+n} i niepodzielny przez $p^{k+m+n+1}$. Zastąpienie uporządkowanej trójki liczb (a, b, c) trójką (b, c, a) lub (c, a, b) powoduje, że liczba $\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}$ lub $\frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}$ – więc ta z treści zadania – ma być całkowita (trójka b, a, c to jednak coś innego, bo na ogół $\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \neq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$). Można więc założyć, że $k \geq m, n$.

Mamy $a^2c + b^2a + c^2b = p^{2k+n} \alpha^2 \gamma + p^{2m+k} \beta^2 \alpha + p^{2n+m} \gamma^2 \beta$.

Jeśli $k = m = n$, to $p^{k+m+n} = p^{3k}$, więc p występuje w rozkładzie iloczynu abc na czynniki pierwsze z wykładnikiem $3k$.

Jeśli $k = m > n$, to $2k + n = k + m + n$, $2m + k = 3k > k + m + n$

i $2n + m < n + k + m$, więc dwa z trzech składników licznika dzielą się przez p^{k+m+n} , a trzeci nie, co oznacza, że liczba $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ nie jest całkowita, wbrew założeniu.

Jeśli $k = n > m$, to $2k + n > k + m + n$, $2m + k < m + n + k$ i $2n + m = k + m + n$, więc znów liczba $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ nie jest całkowita.

Jeśli $k > m \geq n$, to $2k + n > k + m + n$, $2m + k \geq k + m + n$ i $2n + m < k + m + n$, więc znów liczba $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ nie jest całkowita.

Jeśli $k > n > m$, to $2k + n > k + m + n$, $2m + k < k + m + n$ i $2n + m < k + m + n$, to teraz dwa składniki nie dzielą się przez p^{k+m+n} .

Ich suma może dzielić się przez p^{k+m+n} tylko wtedy, gdy

$2m + k = 2n + m \Leftrightarrow k + m + n = 3n$, więc w tym wypadku liczba abc jest podzielna przez p^{3n} .

Wykazaliśmy, że jeśli liczba $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ jest całkowita, to liczba pierwsza p wchodzi w rozkład liczby abc na czynniki pierwsze z wykładnikiem podzielny przez 3.

To rozumowanie nie zawiera żadnych skrótów, ani pomysłów poza rozpatrywaniem podzielności, co jest oczywiście konieczne. Dowód został wymęczony. Zadanie, jako domowe powinno być rozwiązane przez większą liczbę startujących w OM. Coś jednak powoduje, że rozpatrzenie kilku przypadków (w braku lepszego pomysłu) staje się dla wielu uczniów trudne.

Jeszcze dwa słowa o równaniu kwadratowym w związku z rozwiązaniem jednego z zadań II stopnia 65 OM:

Jeśli $A(x)x^2 + B(x)x + C(x) = 0$ i $A(x) \neq 0$, to $B(x)^2 \geq 4A(x)C(x)$.

Uczestniczka OM tak rozumowała nie dowodząc, że w jej sytuacji $A(x) \neq 0$, co było nieomal oczywiste. Najpierw chciało jej postawić 2 p., ale skończyło się na 5 p. Również większość nauczycieli, z którymi rozmawiałem na ten temat w pierwszej chwili mówiła, że to nie równanie kwadratowe (jeśli któryś ze współczynników jest zmienny). Ale

$$0 = A(x)x^2 + B(x)x + C(x) = A(x) \left(x - \frac{B(x)}{2A(x)} \right)^2 - \frac{B(x)^2 - 4A(x)C(x)}{4A(x)},$$

więc tak rozumować wolno (założenia szkolne nie są spełnione, ale dowód twierdzenia działa!).

Michał KRYCH

Wakacyjne Warsztaty Wielodyscyplinarne (11)

Jesteś pasjonatem matematyki, informatyki, fizyki lub astronomii?

Chcesz podzielić się swoimi zainteresowaniami i poprowadzić ciekawe zajęcia dla zdolnych, pełnych pasji licealistów?

WWW

to coroczna impreza organizowana przez studentów Uniwersytetu Warszawskiego i innych uczelni, skierowana do młodych pasjonatów nauk ścisłych.

Podczas warsztatów odbywa się kilkanaście bloków zajęć w małych grupach. Dawniej prowadzone były zajęcia poświęcone m.in. równaniom diofantycznym, mikrokontrolerom AVR, czarnym dziurom i inżynierii wstecznej. Wieczorami odbywają się luźne wykłady, a także gry planszówki, go i RPGi.

Szukamy chętnych do prowadzenia trzydniowych warsztatów (po 3 godzinie dziennie) lub wygłoszenia luźnego wykładu (także spoza nauk ścisłych).

Od kadry oczekujemy zapału i pomysłu na interesujące zajęcia. Jeżeli już masz pomysł, albo chcesz zasięgnąć dodatkowych informacji – napisz na adres:

warsztatywww@gmail.com

Więcej informacji pod adresem:

<http://warsztatywww.wikidot.com>

Jeśli znasz innych Pasjonatów – podziel się z nimi informacją o Warsztatach!

Pamiętać po wieczne czasy

Wśród wielu wyróżników rozwoju cywilizacyjnego wybija się sposób przekazywania informacji. Pozornie obserwujemy, wyglądający na wykładniczy, wzrost we wszystkich aspektach tego przekazu.

Linia rozwoju przypomina jednak linię śrubową, co jest związane z praktyczną niezmiennością podmiotu przekazu. Można twierdzić, że właśnie radośnie powracamy do przekazu ustnego. Z jednej strony, większość ludzi jedynie mota sobie ulotne wrażenia na własnych uprzedzeniach. Z drugiej strony, przechowujemy informację na nośnikach o trwałości rzędu wielkości gorszej od papieru. Zachowuje się tylko to, co jest stale kopiowane, tak jak kiedyś zachowywało się tylko to, co było stale powtarzane.

Zawsze znajdują się tacy, którzy pragną przeciwstawić się naturalnej erozji informacji. Małowidła naskalne oraz „tu byłem Gienek” to tylko dwa odległe w czasie przykłady uzyskanych efektów.

Niektórzy podchodzą jednak do sprawy bardziej naukowo. Od mniej więcej dekady wiadomo, że ciekawym nośnikiem informacji może być DNA. Jednym z argumentów jest to, że jest to jedyny sposób zapisu, który został już przetestowany na okoliczność prawdziwej długowieczności. Takim sprawdzianem jest udane sekwencjonowanie DNA pozyskanego ze szczątków kopalnych.

Właśnie ukazała się praca [1], której autorzy przekonują o potencjalnej milenijnej trwałości tak zapisanej informacji cyfrowej. Efekt jest uzyskiwany poprzez połączenie znanych technik w jedną całość.

Po pierwsze, trzeba umieć zapisywać, a następnie odczytywać. W dobie sekwencjonowania DNA nie ma z tym większego problemu. (Można się jedynie zastanawiać, jak uwiecznić samą metodę odczytu, ale takimi filozoficznymi pytaniami autorzy sobie głowy nie zawracali.) Ciekawostką jest może to, że po drodze przechodzi się z zapisu dwójkowego na trójkowy.

Po drugie, należy skutecznie zabezpieczyć się przed przekłamaniami. Algorytmy zapisu z korekcją błędów są jednak znane od ponad pół wieku i od dawna stosowane są na masową skalę (CD, DVD, WiFi etc.). Idea takiego zapisu polega na zakodowaniu informacji np. o prostej (czyli zakodowania dwóch liczb) nie za pomocą zapisania współrzędnych tylko dwóch, lecz aż czterech punktów, przez które ona przechodzi.

Ostatnim elementem jest zmniejszenie tempa naturalnej degradacji DNA. Okazuje się, że po wyeliminowaniu lub ograniczeniu tego, co ograniczyć łatwo (światło, promieniowanie kosmiczne) pozostaje woda, tlen i temperatura. Pierwsze dwa czynniki zostały ograniczone poprzez zamknięcie DNA w silikonie, czyli wytworzenie sztucznych skamielin.

Jeżeli chodzi o temperaturę, to wykorzystano jej podwyższenie do przyspieszenia degradacji DNA, w celu sprawdzenia, jak długo tak zachowaną informację da się przechować. Na podstawie wyników wygrzewania w 70. stopniach Celsjusza oszacowano, że w -18 stopniach informację da się przechować przez milenium. Do tego testu użyty został tekst *Aktu Konfederacji Szwajcarskiej* z 1291 roku (autorzy pracują w Zurychu) oraz angielskie tłumaczenie tzw. traktatu *O metodzie*, czyli fragmentu Kodeksu Archimedesesa, który do końca XX wieku był uważany za zaginiony. Jego średniowieczna kopia odnalazła się jako palimpsest, czyli jako dający się odczytać tekst przebijający się spod późniejszego o kilka wieków modlitewnika. Jak widać, traktat zachował się nie dlatego, że ktoś uznał go za ważny, tylko dlatego, że został zapisany na deficytowym nośniku.

Jeżeli uznamy, że przechowywanie istotnych informacji opracowaną metodą jest dobrym pomysłem, pozostanie tylko zastanowić się, które informacje są istotne. Na uznanie nośnika za deficytowy raczej nie ma co liczyć.

Piotr ZALEWSKI

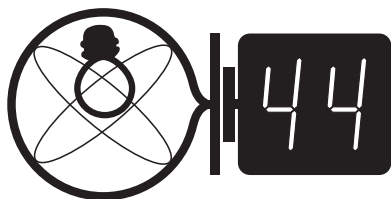
[1] R.N. Grass, R. Heckel, M. Puddu, D. Paunescu, W.J. Stark; *Robust Chemical Preservation of Digital Information on DNA in Silica with Error-Correcting Codes*; *Angewandte Chemie International Edition*; 2015; DOI: 10.1002/anie.201411378.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 596, 597

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



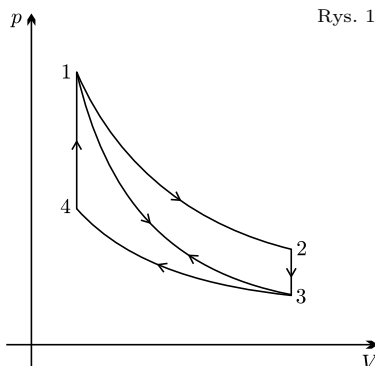
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2015

596. Od prostoliniowego fragmentu brzegu odpłynęły jednocześnie dwa statki A i B , które w chwili początkowej znajdowały się w odległości a . Statek A poruszał się po prostej prostopadłej do brzegu. Statek B przez cały czas trzymał kurs na statek A . Wartości prędkości obu statków były stałe i jednakowe. Jaka była odległość między statkami, gdy można było już uznać, że statek B zaczął płynąć za statkiem A ?

597. Trzy płytki metalowe o powierzchniach S ustawiono równoległe. Pierwsza naładowana jest ładunkiem Q , druga i trzecia połączone są drutem przewodzącym (rys. 1). Rozmiary liniowe płytek są dużo większe od odległości między nimi. Jaka siła działa na środkową płytkę?



Rys. 1



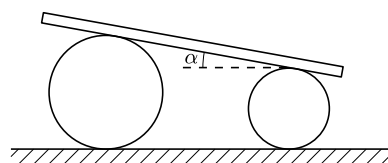
Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 12/2014

Przypominamy treść zadań:

588. Procesy 1–2 oraz 3–4 na wykresie p - V (rys. 2) są przemianami izotermicznymi. Proces 1–3 jest przemianą adiabatyczną. Procesy 2–3 oraz 4–1 to izochory. Sprawność cyklu 1–2–3–1 wynosi η_1 , sprawność cyklu 1–3–4–1 wynosi η_2 . Oblicz sprawność cyklu 1–2–3–4–1.

589. Na poziomej podłodze leżą dwa równoległe walce o różnych promieniach. Na walcach położono ciężką deskę, która tworzy z poziomem kąt α (rys. 3). Znaleźć przyspieszenie deski. Nie ma poślizgu między walcami i deską oraz między walcami i podłogą. Masy walców są zanedbywalnie małe w porównaniu z masą deski.



Rys. 3

588. Oznaczmy przez Q_1 ciepło pobrane na izotermie 1–2, a przez Q_3 wartość bezwzględną ciepła oddanego na izotermie 3–4. Na wykresie p - V są one równe polu pod odpowiednią izotermą, bo w przemianie izotermicznej energia wewnętrzna nie zmienia się. Zatem praca uzyskana w cyklu 1–2–3–4–1 wynosi $W = Q_1 - Q_3$.

Sprawność tego cyklu $\eta = \frac{W}{Q_1 + Q_2}$, gdzie Q_2 jest ciepłem pobranym

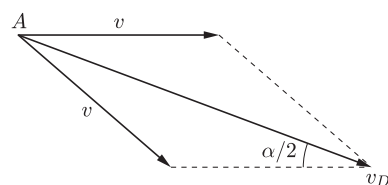
na izochorze 4–1. Jest ono równe wartości bezwzględnej ciepła oddanego na izochorze 2–3, bo obie izochory łączą na wykresie p - V punkty o tych samych temperaturach.

Sprawność cyklu 1–2–3–1 dana jest wzorem $\eta_1 = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$, stąd $Q_1 = \frac{Q_2}{1 - \eta_1}$.

Sprawność cyklu 1–3–4–1 to $\eta_2 = 1 - \frac{Q_3}{Q_2}$, stąd $Q_3 = Q_2(1 - \eta_2)$. Ostatecznie

szukana sprawność cyklu wynosi $\eta = \frac{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2}{2 - \eta_1}$.

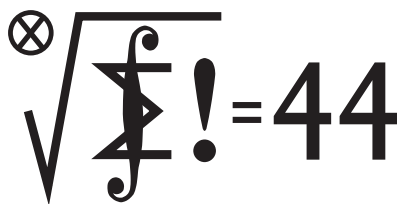
589. Ponieważ nie ma poślizgu, prędkość deski względem ziemi v_D jest taka sama jak punktów na powierzchni walców, które w danej chwili stykają się z deską. Niech A będzie jednym z takich punktów. Jego prędkość względem ziemi jest złożeniem poziomej prędkości ruchu postępowego walca v i prędkości ruchu obrotowego względem środka walca o tej samej wartości (rys. 4). Wektor prędkości deski względem ziemi tworzy z poziomem kąt $\frac{\alpha}{2}$. Tarcie jest statyczne, możemy więc korzystać z zasady zachowania energii mechanicznej, zanedbując zmianę energii kinetycznej walców: $\frac{Mv_D^2}{2} = Mgh = Mgs \sin \frac{\alpha}{2}$, gdzie M jest masą deski a h jej przesunięciem w kierunku pionowym. Droga s przebyta przez deskę od chwili rozpoczęcia ruchu dana jest wzorem $s = \frac{v_D^2}{2g \sin \frac{\alpha}{2}}$. Deska porusza się więc ruchem



Rys. 4

jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a = g \sin \frac{\alpha}{2}$.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
685 ($WT = 1,85$) i 686 ($WT = 1,53$)
z numeru 9/2014

| | | |
|-----------------|-----------|-------|
| Jerzy Cisło | Wrocław | 46,97 |
| Tomasz Wietecha | Tarnów | 44,78 |
| Michał Miodek | Zawiercie | 43,68 |
| Marek Spychała | Warszawa | 42,75 |
| Wojciech Maciak | Warszawa | 41,18 |
| Piotr Kumor | Olsztyn | 36,47 |
| Wojciech Tobisz | Praszka | 36,15 |

I znów dwa nazwiska, jakże dobrze znane.
Linie 44 przekraczają jednocześnie
dwaj wytrawni wielokrotni Weterani:
Jerzy Cisło (po raz jedenasty)
i Tomasz Wietecha (po raz dziesiąty).

Zadania z matematyki nr 699, 700

Redaguje Marcin E. KUCZMA

699. Cztery różne punkty na płaszczyźnie wyznaczają sześć odcinków. Załóżmy, że trzy spośród tych odcinków mają jednakową długość a , zaś pozostałe trzy mają jednakową długość b , przy czym $a < b$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości stosunku b/a .

700. Czy dla każdej funkcji $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, spełniającej warunek $g(1) = 1$, istnieje funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, spełniająca warunki $f(n) \geq g(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $f(mn) = f(m)f(n)$ dla każdej pary liczb względnie pierwszych $m, n \in \mathbb{N}$? (\mathbb{N} to zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich).

Zadanie 700 zaproponował pan Jędrzej Garnek z Poznania.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2014

Przypominamy treść zadań:

691. Mamy skończoną liczbę koszyków, w każdym z nich skończoną liczbę kamieni; znamy wagę każdego kamienia. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu przekładamy jeden kamień z jakiegoś koszyka K do innego koszyka K' ; musi być przy tym spełniony warunek, że łączna waga kamieni w koszyku K' po wykonaniu ruchu jest mniejsza niż łączna waga kamieni w koszyku K przed wykonaniem ruchu. Czy ciąg ruchów może być nieskończony?

692. Dany jest trójkąt ABC . Rozważamy trzy elipsy: każda z nich ma ogniska w dwóch wierzchołkach tego trójkąta i przechodzi przez trzeci wierzchołek. Pokazać, że te trzy elipsy mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest prostokątny.

691. Ponumerujmy koszyki: K_1, \dots, K_n . Niech W_i będzie wagą koszyka K_i (tj. łączną wagą kamieni w tym koszyku) w ustalonej chwili. W kolejnym ruchu przekładamy kamień z koszyka K_j do koszyka K_l . Niech x będzie wagą tego kamienia; postulowany warunek:

$$W_l + x < W_j.$$

Suma kwadratów wag koszyków po wykonaniu ruchu wynosi

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j, l} W_i^2 + (W_j - x)^2 + (W_l + x)^2 &= \\ &= \sum_i W_i^2 + 2x(x + W_l - W_j) < \sum_i W_i^2. \end{aligned}$$

Suma kwadratów wag jest więc (ściśłym) pólniezmiennikiem: maleje w każdym kroku procedury. Jest tylko skończenie wiele możliwych rozlokowań kamieni w koszykach, więc wartości tego pólniezmiennika przebiegają zbiór skończony. Proces musi się zakończyć.

692. Załóżmy, że trzy elipsy, o których mowa, mają punkt wspólny X , leżący w odległościach x, y, z odpowiednio od wierzchołków A, B, C zadanego trójkąta, o bokach długości $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$. Elipsa o ogniskach B, C przechodzi przez punkty A, X , więc $y + z = b + c$. Analogicznie $z + x = c + a, x + y = a + b$. Ten układ równań z niewiadomymi x, y, z ma jedyne rozwiązanie $x = a, y = b, z = c$. Odległości punktu X od B oraz C wynoszą więc, odpowiednio, b oraz c – czyli przeciwnie niż odległości punktu A od B oraz C . To wyznacza dwa możliwe położenia punktu X – może to być punkt symetryczny do A względem symetralnej odcinka BC lub punkt symetryczny do A względem środka odcinka BC .

W pierwszym przypadku punkty X, A, B, C są wierzchołkami trapezu równoramiennego ($BC \parallel AX$); w drugim – tworzą równoległobok $ABXC$. Dodatkowa informacja, że $a = x$, czyli $|BC| = |AX|$, daje w obu przypadkach wniosek, że ów czworokąt jest prostokątem. A zatem trójkąt ABC jest prostokątny.

Na odwrót, gdy trójkąt jest prostokątny, wówczas wystarczy go uzupełnić do prostokąta czwartym wierzchołkiem; widać, że ów wierzchołek będzie wspólnym punktem trzech omawianych elips.

Z zalem żegnamy

ANDRZEJA IDZIKA

Nadweterana Klubu 44F
i dwukrotnego
Weterana Klubu 44M

Prosto z nieba: W sprawie orientacji

Przestrzeń pomiędzy gwiazdami Galaktyki, jeśli tylko jest dostatecznie przejrzysta, nęci astronomów posiadających dostatecznie duże i czułe teleskopy. Jednym z miejsc zachęcających do spoglądania tak daleko, jak tylko się da, jest słynne Głębokie Pole Hubble'a (*Hubble Deep Field*). Rzut oka na ten niewielki kawałek nieba ujawnia niesłychane bogactwo – w istocie jest bowiem tak, że w jakim kierunku byśmy nie spojrzeli, znajdziemy na niebie chaotycznie rozrzucone miliony galaktyk różnych rodzajów, kolorów i kształtów. Od dawna zadawane jest pytanie, czy ich rozkład oraz parametry (np. względne nachylenie płaszczyzn dysków) są w jakiś sposób powiązane. Pytanie nie jest trywialne; po chwili zastanowienia można równie łatwo argumentować za, jak i przeciw takim korelacjom.

Nowych danych do dyskusji dostarczają niedawne obserwacje urządzenia FORS (*UV FOcal Reducer*) teleskopu VLT (*Very Large Telescope*), badającego kwazary, czyli odległe galaktyki zawierające aktywne jądro. Znajdująca się w centrum każdej z nich supermasywna czarna dziura otoczona jest dyskiem akrecyjnym, a wzdłuż osi obrotu układu emitowany jest relatywistyczny wypływ materii i promieniowania o ogromnej energii: tzw. dżet. FORS służy, między innymi, do obserwacji linii widmowych i polaryzacji,

czyli spektropolarymetrii; z próbki prawie 100 kwazarów wybrano 19, których dane polarymetryczne były dostatecznie pełne, i na tej podstawie (oraz przy założeniu modelu dżetu z dyskiem akrecyjnym, w którym kierunek polaryzacji jest określony) wywnioskowano, że kierunki dżetów są skorelowane, mimo że galaktyki te dzielą astronomiczne odległości miliardów lat świetlnych.

Rozkład świecącej kosmicznej materii jest tylko w przybliżeniu jednorodny; w skalach miliardów lat świetlnych gromady galaktyk grupują się w „kosmiczną sieć” ścian i włókien, otaczającą kosmiczne pustki. Orientacja badanych kwazarów jest związana z tą wielkoskalową strukturą – kierunki osi rotacji dysków akrecyjnych otrzymane za pomocą obserwacji polaryzacji światła chętniej ustawiają się równoległe do włókien kosmicznej sieci, w których się znajdują (zapewne powodem jest zasada zachowania momentu pędu w poszczególnych włóknach). W przypadku przebadanej próbki oszacowano, że czysto losowe ułożenie orientacji mogło wystąpić z prawdopodobieństwem mniejszym niż 1%. Mimo że wynik obserwacji FORS/VLT został otrzymany przy użyciu niewielkiej liczby kwazarów, jest interesującą nową informacją dla kosmologów modelujących powstawanie struktur we wczesnych etapach życia Wszechświata.

Michał BEJGER

Niebo w kwietniu

W tym miesiącu ominie nas znowu zaćmienie Księżyca, widoczne 4 IV dla mieszkańców przeciwnej do Polski strony Ziemi – w pasie przechodzącym przez wschodnią Azję, Australię, Pacyfik, aż do Ameryki Północnej. Na szczęście i na pocieszenie mamy jednak kilka innych astronomicznych atrakcji do wyboru, na przykład spośród obiektów z Katalogu Messiera.

12 IV będzie miała miejsce koniunkcja Wenus z obiektem M45, czyli najsłynniejszą chyba gromadą otwartą: Plejadami. Zjawisko to możemy swobodnie podziwiać nawet nieuzbrojonym okiem albo lornetką. Wenus i Plejady zblizną się na odległość 2,5 stopnia. Około godziny 19:45, po zmroku, para pojawi się nad zachodnim horyzontem na wysokości około 30° i widoczna będzie przez następne trzy godziny. Wenus osiągnie jasność $-4,5^m$, natomiast M45 jasność $1,6^m$.

Dobre warunki do obserwacji M104, czyli Galaktyki Sombbrero, którą najłatwiej obserwuje się z półkuli południowej, będziemy mieli 1 IV. Tego dnia po północy M104 osiągnie najwyższy punkt na naszym niebie, znajdzie się na wysokości 24° ponad południowym horyzontem. Jej jasność wyniesie około 9^m , więc będzie to obiekt doskonały do obserwacji lornetką lub małym teleskopem.

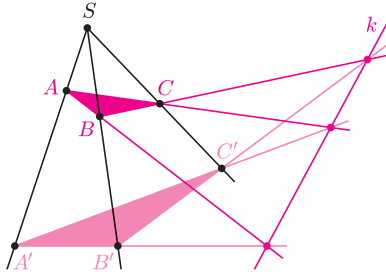
Kwiecień to także świetny czas na obserwację kolejnego obiektu katalogu Messiera – galaktyki spiralnej M94, która będzie widoczna wtedy przez całą noc. M94 pojawia się po zmroku 48° nad wschodnim horyzontem, a zniknie w świetle wschodzącego Słońca na takiej samej wysokości nad horyzontem zachodnim. Jej jasność to 9^m . Kolejna bardzo piękna galaktyka spiralna – M51, czyli Galaktyka Wir – znajdzie się w sprzyjających warunkach do obserwacji 14 IV. Będzie ona widoczna również przez całą noc na niebie i będzie miała jasność podobną do poprzednich obiektów. Polecamy także gromadę kulistą gwiazd o nazwie M3, na którą również warto „zapolować” w połowie miesiąca. Przykładowo, w dniu 17 IV około godziny 20:00 pojawi się na wysokości 44° nad wschodnim horyzontem, około północy osiągnie najwyższy punkt na niebie i zniknie o świcie 45° ponad zachodnim horyzontem. Jej jasność to $6,2^m$.

Na kwietniowym niebie zagospzczą też meteory pochodzące z kilku rojów, przede wszystkim z Lirydów, którego radiant znajduje się w okolicach Wegi w gwiazdozbiornie Lutni. Maksimum tego roju wypada 23 IV z 10–15 meteorami na godzinę.

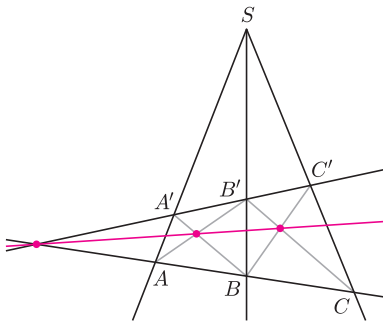
Magda OTULAKOWSKA-HYPKA

$k \cap l$ – punkt przecięcia prostych k i l .

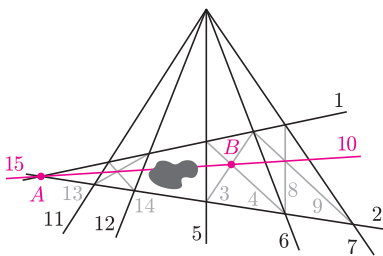
Rysunki 1 i 2 przedstawiają po jednej z wielu możliwych konfiguracji.



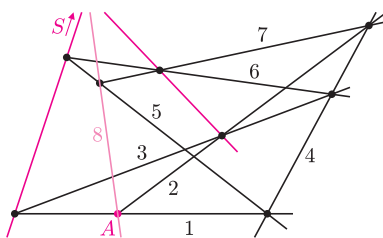
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3. Kolejność rysowania prostych oznaczono liczbami.



Rys. 4. Kolejność rysowania prostych oznaczono liczbami.

Zadanie 3 pochodzi z XLIX Olimpiady Matematycznej.

Desargues i nożyce

Joanna JASZUŃSKA

W geometrii rzutowej przyjmujemy, że każde dwie proste równoległe przecinają się w pewnym ustalonym punkcie w nieskończoności, odpowiadającym ich kierunkowi, oraz że wszystkie takie punkty w nieskończoności tworzą prostą („horyzont”). Poniżej przedstawiamy przykłady pojęć i twierdzeń rzutowych oraz ich zastosowań; dopuszczamy w nich takie właśnie punkty przecięcia „na horyzoncie”.

Dane są trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ (rys. 1). Jeśli proste AA' , BB' , CC' przecinają się w jednym punkcie S , to punkt ten nazywamy *środkiem perspektywicznym* danych trójkątów. Jeśli punkty $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$, $CA \cap C'A'$ leżą na jednej prostej k , to nazywamy ją *osią perspektywiczną* danych trójkątów.

Twierdzenie Desarguesa. *Dwa trójkąty mają środek perspektywiczny wtedy i tylko wtedy, gdy mają oś perspektywiczną.*

Każda taka płaska konfiguracja jest rzutem pewnej konfiguracji trójwymiarowej, można więc dowodzić tego twierdzenia przestrzennie (dowód w jedną stronę opisano w *deltoidzie* 5/2010).

Twierdzenie o nożycach. *Pęk prostych o wierzchołku S przecięto dwiema prostymi, po czym narysowano przekątne uzyskanych w ten sposób czworokątów, jak na rysunku 2. Wówczas kolorowe punkty są współliniowe.*

Dowód. Trójkąty $AB'C$ i $A'BC'$ mają środek perspektywiczny S , więc z twierdzenia Desarguesa mają też oś perspektywiczną, co kończy dowód dla pęku trzech prostych. Gdy jest ich więcej, wystarczy rozważać kolejne trójki spośród nich. \square

1. Na kartce znajdują się punkty A , B oraz plama oleju pomiędzy nimi. Poprowadź prostą przez punkty A i B , używając tylko linijki i nie brudząc jej w oleju.
2. Na kartce narysowano dwie proste, przecinające się w pewnym punkcie S poza kartką, oraz punkt A pomiędzy nimi. Korzystając wyłącznie z linijki, narysuj tę część prostej AS , która mieści się na kartce.
3. Pięciokąt wypukły $ABCDE$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDES$. Płaszczyzna przecina krawędzie SA , SB , SC , SD , SE odpowiednio w punktach A' , B' , C' , D' , E' (różnych od wierzchołków ostrosłupa). Udowodnij, że punkty przecięcia przekątnych czworokątów $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EAA'E'$ leżą na jednej płaszczyźnie.

Rozwiązania

R1. Rysunek 3 ilustruje konstrukcję wykorzystującą twierdzenie o nożycach. \square

R2. Rysunek 4 przedstawia konstrukcję korzystającą z twierdzenia Desarguesa. \square

R3. Spójrzmy na dany ostrosłup z boku, w kierunku równoległym do płaszczyzny $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$ (rysunek podobny do rys. 2). Na mocy twierdzenia o nożycach, rozważane punkty przecięcia przekątnych widzimy wówczas jako współliniowe, więc w rzeczywistości leżą one na jednej płaszczyźnie. \square

Zadania domowe

4. Rozwiąż zadanie 2, korzystając z twierdzenia o nożycach, tak jak w zadaniu 1.
5. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC , CA , AB odpowiednio w punktach D , E , F . Udowodnij, że punkty $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CA \cap DF$ leżą na jednej prostej.

Wskazówka. Wykaż, że proste AD , BE , CF są współpękowe i wykorzystaj twierdzenie Desarguesa. Inne rozwiązanie opisano w *deltoidzie* 9/2014.

6. Dany jest trójkąt ABC . Punkty E i G leżą na boku BC , punkty F i H – na boku AC . Punkty $AG \cap BH$, $AE \cap BF$ oraz punkt C leżą na jednej prostej. Wykaż, że jeśli proste EF i GH nie są równoległe, to przecinają się na prostej AB .

Wskazówka. Rozważ trójkąty AEG oraz BFH .