

Nagrodę Dziekanów

za najlepszy artykuł w *Delcie*
w roku akademickim 2013/2014
otrzymali

Urszula Foryś i Paweł Matejek

za tekst

O pewnym ciekawym zastosowaniu modelu drapieżnik-ofiara

zamieszczony w numerze 8(483)/2014

SPIS TREŚCI NUMERU 3 (490)

O tajnikach eksfoliacji, czyli
co łączy grafen z odklejaniem
etykiety z cenami
Karol Nogajewski

str. 1

Magiczna liczba 0,000029%
Krzysztof Turzyński

str. 4

Ekstremalny kryształ
*Klaudia Płodzień,
Marta Sawicka*


str. 7

 Zadania

str. 9

Machina meteorologica
i Złoty Diviś
Krzysztof Rejmer

str.10

 Architekci i algorytmy
Paweł Perekieta


str.12

Informatyczny kącik olimpijski
(79): Filary
Tomasz Idziaszek

str.13

Modelowanie fikcji:
inwazja zombie
Grzegorz Kosiorowski


str.14

 Czytać każdy może
Magdalena Fikus

str.17

Dowód w stylu greckim
Marek Kordos

str.18

 *Siła czy sposobem?*
VII konferencja SEM
*Krzysztof Chelmiński,
Barbara Roszkowska-Lech*


str.20

Aktualności str.21

Klub 44 str.22

Prosto z nieba:
Ultraszaskakujące
źródło rentgenowskie str.24

Niebo w marcu str.24

 *MI = MB = MC*
Joanna Jaszuńska str.25

W następnym numerze polecamy

1	7	10	13	19	23	28	31	32	44	49	68	70	79	82	86	91	94	97	100																																																																																																							
103	109	129	130	133	139	167	176	188	190	192	193	203	208	219	226	230	236	239	262	263	280	291	293	301	302	310	313	319	320	326	329	331	338	356	362	365	367	368	376	379	383	386	391	392	397	404	409	440	446	464	469	478	487	490	496	536	556	563	565	566	608	617	622	623	632	635	637	638	644	649	653	655	656	665	671	673	680	683	694	700	709	716	736	739	748	761	763	784	790	793	802	806	818	820	833	836	847	860	863	874	881	888	899	901	904	907	910	912	913	921	923	931	932	937	940	946	964	970	973	989	998	1000

i inne wesołe liczby

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2015 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

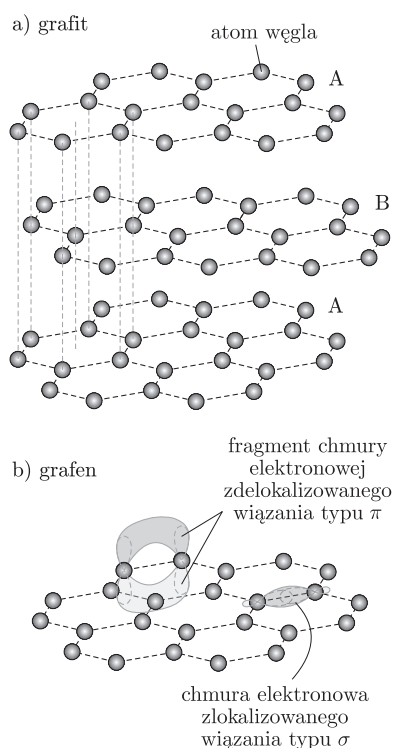
Cena 1 egzemplarza 4 zł

O tajnikach eksfoliacji, czyli co łączy grafen z odklejaniem etykiet z cenami

Karol NOGAJEWSKI*



Odklejanie etykiet z cenami lub kodami paskowymi w taki sposób, by nie pozostawiły po sobie żadnych śladów, jest jedną z tych czynności, które potrafią doprowadzić do stanu irytacji niemal każdego. Co ciekawe, niezależnie od stopnia zdeterminowania jednostki, by – mierząc się z takim wyzwaniem – zachować spokój i pełną kontrolę nad wykonywanymi ruchami, przebieg jej zmagania na ogół odtwarza ten sam uniwersalny schemat, po którym zamiast słodczy długo oczekiwanego zwycięstwa należy spodziewać się raczej gorzkiej kolejnej porażki. Podobnie jak w wielu innych codziennych sytuacjach, tak i tutaj początki złego bywają miłe. Delikatnie podważamy jeden z rogów etykiety, a następnie bardzo wolno odklejamy go od powierzchni przedmiotu, który pragniemy wyzwolić od szpecącej go informacji o cenie czy miejscu zakupu. Mając ten etap za sobą, poprawiamy chwyt i pewni końcowego sukcesu przestajemy zaprzętać sobie głowę cierpliwością, co natychmiast przynosi niepożądany efekt w postaci nieświadomego zwiększenia prędkości odklejania etykiety. Na karę nie trzeba czekać długo, bo oto w najmniej oczekiwanym momencie naklejka, z którą dzielnie walczyliśmy, zaczyna się rozwarstwiać, a jej dolny fragment ani myśli rozstać się z powierzchnią, do której został przyklejony. Odrywamy więc ze złością przytrzymywaną palcami górną część, a po chwili rozpoczynamy opisaną wyżej procedurę od kolejnego rogu, by po niedługim czasie zakończyć ją z równie marnym skutkiem. Po wyczerpaniu zbioru narożników konieczna staje się zmiana strategii – nie ulega bowiem wątpliwości, że stawiający opór centralny skrawek etykiety nie podda się tak łatwo. Ponieważ poziom desperacji sięga na tym etapie zenitu, większość osób porzuca metody łagodnej perswazji i przystępuje do brutalnego zdrapywania resztek pokrytego klejem papieru, wspomagając się przy tym często wodą lub rozpuszczalnikami takimi jak aceton, jeżeli tylko czyszczona powierzchnia sprawia wrażenie odpornej na tego typu traktowanie. Krajobraz po zakończonej tym frontalnym atakem bitwie wygląda dość przygnębiająco: na polu walki nie ma już wprawdzie pozostałości po etykiecie, ale śladów po konfrontacji za to nie brakuje...



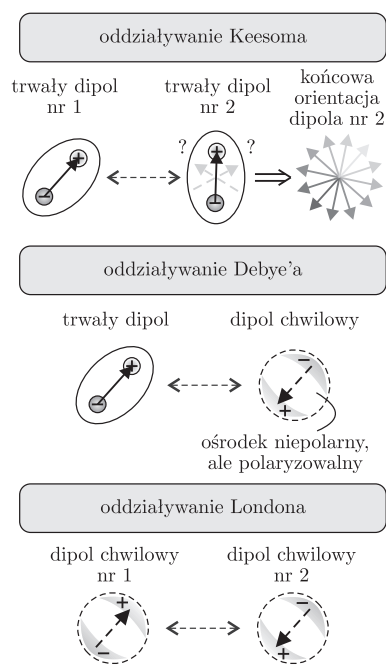
Rys. 1. Wycinek sieci krystalicznej: a) grafitu o uporządkowaniu ABA nazywanym również ułożeniem Bernala, b) grafenu z oznaczonymi schematycznie: fragmentem chmury elektronowej zdelokalizowanego wiązania typu π oraz chmurą elektronową jednego z wiązań typu σ .

By nie doświadczać na co dzień sytuacji takich, jak ta opisana powyżej z pewną dozą dramaturgii, a tym samym poprawić komfort swojego życia poprzez wyzwolenie go od chwil niepotrzebnej frustracji, warto pochylić się nad głębszym zrozumieniem procesów fizycznych, na których opiera się zasada działania większości taśm klejących, czy też – mówiąc ogólniej – warstw adhezyjnych. Choć zabrzmi to w pierwszej chwili dziwnie, podjęcie takiego wysiłku intelektualnego może zaowocować nawet dokonaniem odkrycia na miarę pierwszych stron najbardziej poczytnych czasopism naukowych jak *Nature* czy *Science*. Przekonali się o tym w 2004 roku dwaj badacze z Uniwersytetu w Manchesterze, Andre Geim oraz Konstantin Novoselov, którzy właśnie za pomocą taśmy klejącej zdołali wyizolować z grafitu płatki złożone z pojedynczej warstwy atomów węgla uporządkowanych przestrzennie w charakterystyczną strukturę plastra miodu [1]. Pionierskie badania właściwości optycznych, elektrycznych, termicznych oraz elastycznych pozyskanego przez nich w ten sposób dwuwymiarowego materiału, który znany jest obecnie szerokim kręgiem jako grafen [2], przyniosły im w 2010 roku Nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki.

Przedstawiona na rysunku 1 warstwowa budowa grafitu jest następstwem specyficznego kształtu, jaki wskutek tzw. hybrydyzacji sp^2 uzyskują walencyjne powłoki elektronowe tworzących go atomów węgla. Jak odczytać można z układu okresowego pierwiastków, każda z nich jest złożona z czterech tzw. orbitali atomowych (jednego o symetrii s i trzech o symetrii p), które łącznie mogą być „wypełnione” maksymalnie ośmioma elektronami. Zgodnie z kwantowomechanicznym obrazem świata gęstość prawdopodobieństwa

*absolwent Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, obecnie na stażu doktorskim w Laboratoire des Champs Magnétiques Intenses w Grenoble (Francja)

Za pośrednictwem oddziaływania Keesoma trwały dipol wpływa na przestrzenne uporządkowanie innych trwałych dipoli, które znajdują się w jego bliskim otoczeniu, w taki sposób, że prawdopodobieństwo, iż przyjmą one w stosunku do niego przynajmniej częściowo antyrównoległe (przyciągające) ustawienie, staje się większe aniżeli prawdopodobieństwo przybrania przez nie przynajmniej częściowo równoległej (odpychającej) orientacji. W przypadku oddziaływań Debye'a (pomiędzy trwałym dipolem a dipolem chwilowym) oraz Londona (między dwoma chwilowymi dipolami) uporządkowanie reagujących na swoją wzajemną obecność dipoli jest zawsze antyrównoległe.



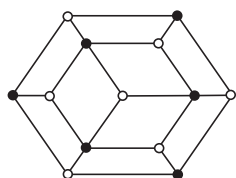
Rys. 2. Rodzaje oddziaływań pomiędzy trwałymi i chwilowymi dipolami elektrycznymi.

O perowskitach pisaliśmy w *Delcie* 1/2015.

Red.



Rozwiązanie zadania M 1452. Pokolorujmy wierzchołki pajęczyny na czarno i biało w sposób pokazany na rysunku.

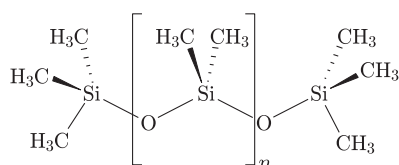


Zauważmy, że pajęk z pola białego zawsze przechodzi do czarnego i odwrotnie. Ponieważ pól białych jest więcej niż czarnych, żądana ścieżka nie istnieje.

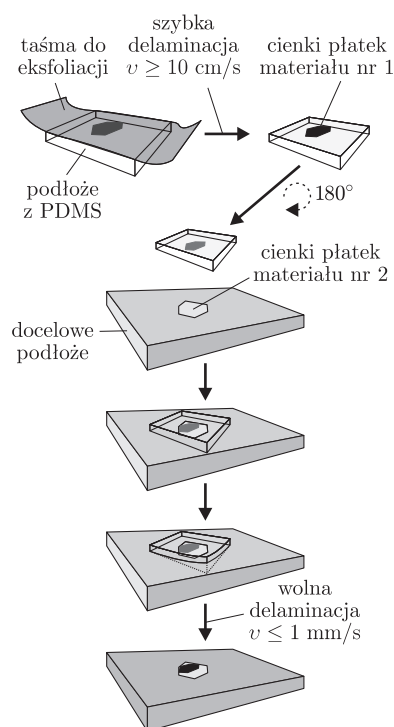
znaleźnia tych elektronów w przestrzeni otaczającej rdzeń atomu jest określona przez kształt obsadzonych nimi orbitali. Za sprawą hybrydyzacji sp^2 cztery elektrony walencyjne atomu węgla zostają rozmieszczone w taki sposób, że szansa natrafienia na nie w otoczeniu rdzenia atomowego jest największa wzdłuż czterech wyróżnionych kierunków: trzech wyznaczonych przez zawarte w jednej płaszczyźnie półproste tworzące parami kąty 120° oraz jednego prostopadłego do tej płaszczyzny. Elektrony rezydujące na zhybrydyzowanych orbitalach pierwszej z wprowadzonych wyżej grup chętnie uczestniczą w tworzeniu silnych wiązań kowalencyjnych, nazywanych przez chemików wiązaniami typu σ . Za ich pośrednictwem kolejne atomy węgla mogą łączyć się ze sobą w płaską sieć o charakterystycznej symetrii sześciokątnej, która swoim wyglądem przypomina plaster miodu. Warto dodać w tym miejscu, że to właśnie wiązania typu σ odpowiadają za nadzwyczajne właściwości elasto-mechaniczne grafenu. Rola pozostałych 25% elektronów walencyjnych, obsadzających w graficie ustawione prostopadle do płaszczyzny wiązań σ orbitale o symetrii p , które zgodnie z nazwą sp^2 nie zostały poddane procesowi hybrydyzacji, jest nieco odmienna. Elektrony te tworzą siatkę tzw. wiązań typu π , które pod względem siły ustępują znacząco wiązaniom typu σ , a ponadto mają w odróżnieniu od nich zdelokalizowany charakter, co oznacza, że nie można ustalić precyzyjnie ich położenia w sieci krystalicznej. Ta specyficzna cecha leży u podstaw znakomych właściwości elektrycznych i termicznych grafenu.

Jak wynika z powyższych rozważań, wszystkie elektrony walencyjne należące do płaszczyzny grafenowej są zaangażowane w powstawanie wiązań pomiędzy atomami węgla. Oznacza to w szczególności, że grafen jest materiałem obojętnym elektrycznie. Na pierwszy rzut oka wniosek ten wydaje się przeczyć istnieniu, a w najlepszym przypadku stabilności chemicznej grafitu. Jaka bowiem siła miałaby utrzymywać warstwy grafenowe ułożone jedna na drugiej? Odpowiedź na to pytanie brzmi: siła van der Waalsa, która, choć dużo słabsza od wiązań typu π , pozwala np. gekonom na prowadzenie beztrudnych wędrówek po szklanych ścianach terrarium. Na gruncie mikroskopowym źródłem siły van der Waalsa są, zilustrowane na diagramie obok, krótkozasięgowe oddziaływania elektrostatyczne pomiędzy dipolami elektrycznymi (trwałymi bądź chwilowymi), tzn. obiektami, których ładunek jest globalnie równy zeru, ale lokalnie może przyjmować zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości. Wskutek ciągłego ruchu elektronów, tworzących sieć zdelokalizowanych wiązań typu π , obszary o takich właściwościach powstają nieustannie w każdej z płaszczyzn grafenowych i to za ich sprawą płaszczyzny te przyciągają się wzajemnie, kiedy tylko zostaną umieszczone dostatecznie blisko siebie.

Rodzina materiałów, które mają strukturę warstwową podobną do grafitu, jest bardzo liczna. Należą do niej, między innymi, związki takie jak: dichalkogenidki metali przejściowych o ogólnym wzorze MX_2 , gdzie M to atom metalu jak: Mo, W, Ti, Ta, Nb czy Zr, a X to: S, Se lub Te, półprzewodniki takie jak: GaSe, GaTe, InSe czy Bi_2Se_3 , oraz niektóre azotki i tlenki, np. miki, tlenki miedzi, a także wykazujące nadprzewodnictwo wysokotemperaturowe tlenki o budowie perowskitu [3]. Na większości z nich pierwsze badania przeprowadzono w drugiej połowie XX wieku. Prawdziwe zainteresowanie czołowych grup naukowych na świecie materiały te wzbudziły jednak dopiero po 2010 roku, kiedy zaczęto je na dużą skalę eksfoliować, tzn. rozdzielać na fragmenty złożone z różnej liczby warstw, w tym również te najcieńsze o grubości zaledwie jednej warstwy. Podobnie jak w przypadku grafitu, tak i tutaj jedną z kluczowych ról w procesie eksfoliacji odgrywały i wciąż odgrywają różnego rodzaju taśmy klejące, które na co dzień wykorzystywane są m.in. do zabezpieczenia na czas transportu podatnych na zarysowania powierzchni urządzeń elektronicznych (telewizorów, sprzętu hi-fi, smartfonów etc.) oraz w szeroko rozumianym przemyśle krzemowym. Kolejnym pierwszoplanowym aktorem stały się natomiast warstwy wykonane z elastomerów, czyli związków o wyraźnych właściwościach wiskoelastycznych, wśród których na szczególną uwagę zasługuje poli(dimetylosiloksan) (PDMS). W miejscu tym dodać należy, że zarówno w przypadku wspomnianych wyżej taśm klejących jak i elastomerów, głównym



Rys. 3. Wzór stereochemiczny poli(dimetylosiloksanu).



Rys. 4. Etapy konstrukcji mikrostruktury opartej na stosie cienkich płytek wyizolowanych na drodze eksfoliacji z różnych kryształów objętościowych o warstwowej budowie.

składnikiem wypadkowej siły, za pośrednictwem której oddziałują one z powierzchniami innych ciał jest siła van der Waals'a. Nikogo nie powinno zatem dziwić, że z pomocą tego typu warstw adhezyjnych możliwe jest „odrywanie” cienkich płytek od makroskopowych fragmentów kryształów o warstwowej budowie.

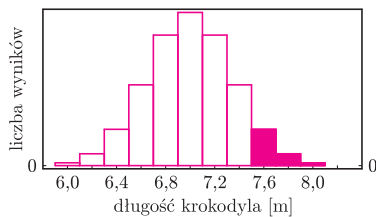
Elastomery łączą w sobie cechy materiałów doskonale sprężystych oraz doskonale lepkich cieczy. Tak jak sugeruje to rysunek 3, wszystkie są polimerami o długich łańcuchach alifatycznych. Na małych odległościach (rzędu kilkukrotnej długości wiązań międzyatomowych) oraz w krótkich skalach czasu ich zachowanie jest praktycznie w całości zdeterminowane przez właściwości sprężyste. Ciekła natura bierze nad nimi górę dopiero na odległościach porównywalnych z długością całej cząsteczki oraz w długich skalach czasu. Z praktycznego znaczenia tej dwoistości oraz jej potencjalnych zastosowań w nanotechnologii zdano sobie sprawę niespełna dekadę temu, kiedy środowisko naukowe usłyszało po raz pierwszy o kinetycznie kontrolowanej sile adhezji (przyczepności) [4]. Pod tą enigmatyczną nazwą kryje się obserwacja, że energia oddziaływania warstw wykonanych z elastomerów, takich jak PDMS, z powierzchniami innych ciał, na których warstwy te zostały umieszczone, zależy od prędkości ich delaminacji, czyli, mówiąc mniej uczenie, zrywania. Jest ona mianowicie tym mniejsza, im wolniej przeprowadzany jest proces separacji obu powierzchni. W takich warunkach cząsteczki elastomerów niczym ciecz odpływają dostojnie z miejsca swojego dotychczasowego pobytu, nie pozostawiając po sobie żadnych śladów. Przy dużych prędkościach delaminacji mogą one natomiast związać się silnie z obiektami, do których przyłgnęły, pozwalając następnie na przenoszenie ich na różne podłoża. W taki właśnie sposób „budowane” są obecnie w laboratoriach mikrostruktury wysokiej jakości złożone z umieszczonych na sobie cienkich płytek rozmaitych materiałów warstwowych, o których była mowa wcześniej (grafenu, heksagonalnego azotku boru, dichalkogenidków metali przejściowych etc.), co zobrazowano schematycznie na rysunku obok. Już pierwsze publikacje [5, 6] pokazały, że prowadzone z ich wykorzystaniem badania naukowe mogą otworzyć drzwi do dużo głębszego zrozumienia niezwykle skomplikowanej fizyki oddziaływań wielociałowych, w tym zjawisk takich jak nadprzewodnictwo wysokotemperaturowe, a poprzez to przyspieszyć realizację wielu wzniosłych planów poprawy jakości naszego życia, do których przez lata niepowodzeń na gruncie tak poznawczym, jak i technicznym zaczęto podchodzić z bardzo dużym dystansem.

Materiałami wiskoelastycznymi są też pokrywające taśmy klejące i rozmaite naklejki warstwy adhezyjne, wykonane na ogół z pochodnych kwasu akrylowego ($\text{CH}_2=\text{CH}-\text{COOH}$). Choć pod względem zakresu kinetycznej kontroli przyczepności ustępują one znacząco elastomerom, takim jak PDMS, wybór odpowiedniej prędkości odklejania ich z powierzchni przedmiotów, na których nie są mile widzianymi gośćmi, może znacząco zredukować ilość zanieczyszczeń, które za sobą pozostawiają. Dlatego też gorąco zachęcam Was, Drogie Czytelniczki i niemniej Drodzy Czytelnicy, abyście stawiając następnym razem czoła nieznośnym etykietom z cenami lub kodami paskowymi, podeszli do kwestii ich usuwania w ściśle naukowy sposób. Wytyńcie wzrok i bacznie obserwujcie, jak w pierwszych chwilach delaminacji etykiety zachowuje się jej warstwa akrylowa, a następnie dobierzcie na tej podstawie prędkość odklejania tak, by w trakcie trwania całego procesu żaden z fragmentów owej warstwy nie uległ rozerwaniu. Niektóre z nich mogą „trzymać się” powierzchni przedmiotu bardziej zdecydowanie od pozostałych. Widząc, że z takim przypadkiem macie właśnie do czynienia, zmniejszcie na moment tempo odklejania etykiety i poczekajcie, aż siły spójności wezmą górę nad siłami adhezji, a kłopotliwy fragment warstwy akrylowej oddzieli się od kolejnego ułamka milimetra kwadratowego podłoża. Postępując w ten sposób, na pewno zwiększycie liczbę uwieńczonych sukcesem potyczek, przegrywając jedynie z wiekowymi naklejkami o zdegradowanych chemicznie warstwach adhezyjnych, z którymi rozstać można się wyłącznie za pomocą brutalnych metod, o jakich w kilku słowach wspomniano na początku niniejszego artykułu.

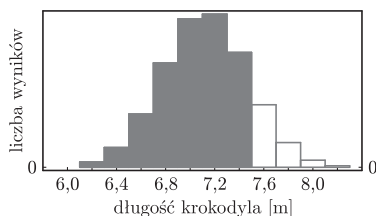
Dla ciekawych szczegółów:

- [1] K.S. Novoselov et al., *Science* **306**, 666 (2004).
- [2] A.K. Geim, K.S. Novoselov, *Nat. Mater.* **6**, 183 (2007).
- [3] A.K. Geim, I.V. Grigorieva, *Nature* **499**, 419 (2013).
- [4] M.A. Meitl et al., *Nat. Mater.* **5**, 33 (2006).
- [5] L.A. Ponomarenko et al., *Nature* **497**, 594 (2013).
- [6] C.R. Dean et al., *Nature* **497**, 598 (2013).

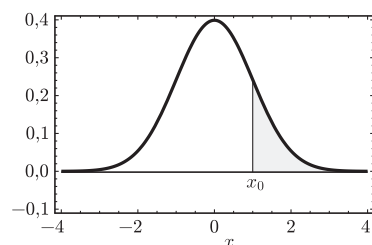
Cytaty i większość przykładów zawartych w niniejszym artykule oparte są na wykładzie, jaki wygłosił Tommaso Dorigo podczas 3rd International Conference on New Frontiers in Physics latem 2014 roku na Krecie.



Rys. 1. Rozkład wyników pomiaru długości siedmiometrowego krokodyla. W 7,6% przypadków uzyskuje się wynik co najmniej równy 7,5 m.



Rys. 2. Rozkłady wyników pomiaru długości krokodyla mierzącego 7,12 m. W 86% przypadków uzyskujemy wynik nieprzekraczający 7,5 m.



Rys. 3. Wykres gęstości rozkładu Gaussa (1). Pole pod krzywą jest równe 1; pole zacieniowanego obszaru odpowiada prawdopodobieństwu uzyskania wyniku równego co najmniej x_0 .

Magiczna liczba 0,000029%

Krzysztof TURZYŃSKI

Żeby zrozumieć coś z zachodzących w świecie procesów, należy to i owo pomierzyć. Żeby odkryć coś nowego – trzeba wykonać pomiar i uzasadnić, że nie zgadza się on z istniejącą wiedzą. Jednak wykonywanie pomiarów na granicy możliwości doświadczalnych to nie taka prosta sprawa.

Przypuśćmy, że podręcznik zoologii stwierdza autorytatywnie, iż krokodyle nie miewają więcej niż siedem metrów długości. Mamy oto przed sobą wyjątkowo dorodny okaz śpiącego krokodyla oraz dwudziestocentymetrową linijkę. Podchodzimy ostrożnie do gada i przymierzamy doń odpowiednią liczbę razy nasze narzędzie pomiarowe. Niestety, okropnie trzęsą się nam ręce, a oczy zachodzą mgłą, co wprowadza element losowości do pomiaru. Na podstawie tych wyników chcielibyśmy zdecydować, czy możemy odrzucić *hipotezę zerową* mówiącą, że mierzony krokodyl, tak jak i wszystkie inne krokodyle, ma mniej niż siedem metrów. W skrajnym przypadku siedmiometrowego krokodyla z uwagi na ów element losowy otrzymamy rozkład wyników pomiarów przedstawiony na rysunku 1. Z niezerowym prawdopodobieństwem pomiar długości siedmiometrowego krokodyla da wynik większy niż siedem metrów. Możemy jednak przyjąć lepsze kryterium: wynik przekraczający 7,5 m dostaniemy z prawdopodobieństwem jedynie 7,6%. Uznamy zatem krokodyla za ponad siedmiometrowego, gdy wynik pomiaru przekracza 7,5 m. Nie jest to rozwiązanie idealne, możemy bowiem popełnić *błąd pierwszego rodzaju* polegający na pochopnym odrzuceniu hipotezy zerowej, ale mylimy się tylko w 76 przypadkach na 1000, co nie jest w końcu takie złe.

Unikanie błędu pierwszego rodzaju ma swoją cenę. Rozważmy *hipotezę alternatywną*, że długość krokodyla jest równa 7,12 m. Analogiczny do poprzedniego rozkład wyników pomiarów jest przedstawiony na rysunku 2, gdzie zacięniowano przypadki odpowiadające wynikom pomiaru poniżej 7,5 m – czyli znaczną większość. Okazuje się, że w rozważanym przypadku nader często, bo w 86 przypadkach na 100, popełniamy *błąd drugiego rodzaju*, czyli nie odrzucamy hipotezy zerowej, chociaż poprawna jest hipoteza alternatywna. Strzegąc się przed błędem pierwszego rodzaju, łatwo zatem popełnić błąd drugiego rodzaju – i na odwrót.

Jakie zatem należy przyjąć dopuszczalne prawdopodobieństwo popełnienia błędu pierwszego rodzaju? Odpowiedź zależy od tego, co właściwie badamy. W naukach o życiu prawdopodobieństwo to ustala się często na poziomie 5%, fizyków cząstek elementarnych satysfakcjonuje zaś dopiero wartość 0,000029%. Dlaczego właśnie taka? O tym za chwilę. Najpierw musimy bowiem zapoznać się z powszechnie używanym przez fizyków słownictwem.

Rozkłady możliwych wyników pomiarów nader często przypominają kształtem *rozkład Gaussa*, którego gęstość dana jest wzorem:

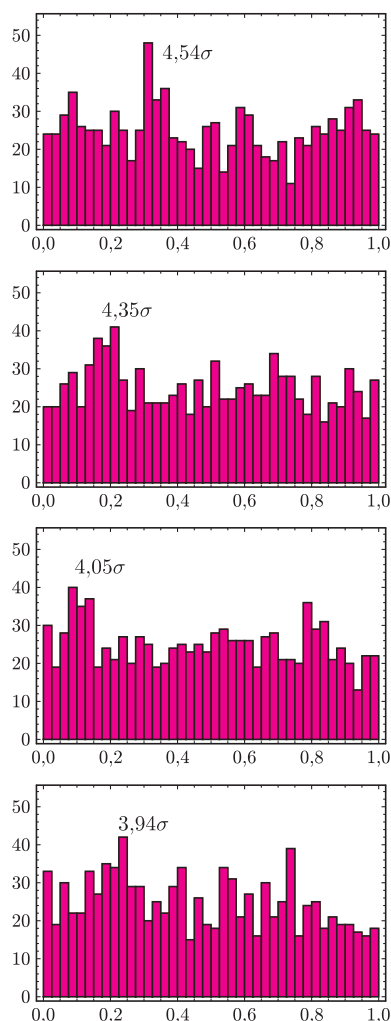
$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Dla takiego rozkładu możemy, podobnie jak dla zagadnienia pomiaru długości krokodyla, przyjąć, że mierzona wartość x jest z zadowalającym prawdopodobieństwem większa od zera, jeśli przekracza ona pewną ustaloną wartość x_0 (rys. 3). Wartości x_0 i odpowiadające im prawdopodobieństwa zebrane są w poniższej tabeli.

x_0	1	2	3	4	5
prawdopodobieństwo	16%	2,3%	0,13%	0,0032%	0,000029%

Prawda, że ulubione prawdopodobieństwo fizyków cząstek elementarnych nie wydaje się już taką przypadkową liczbą? Ponieważ wartość $x_0 = 1$ odpowiada *odchyleniu standardowemu* rozkładu Gaussa, które oznacza się tradycyjnie przez σ , więc poszczególne prawdopodobieństwa możemy zapisać umownie jako 1σ , 2σ itd.

Zastanówmy się teraz, jak fizycy odkrywają nowe cząstki. Pisał o tym w *Delcie* 12/2013 Maciej Misiura, więc przypomnimy tutaj tylko pokrótce najważniejsze wiadomości. Wiedząc, na jakie odpowiednio stabilne cząstki poszukiwana cząstka nietrwała może się rozpaść, należy pomierzyć energie i pędy cząstek potomnych. Znając te wielkości, możemy obliczyć *masę niezmienniczą*, która odpowiada masie rozpadającej się cząstki. Niestety, z uwagi na losowe efekty w detektorze energie



Rys. 4. Wybrane histogramy przedstawiające rozkłady liczb losowanych z przedziału (0, 1). Przy „garbach” podano obliczone na podstawie rozkładu Poissona prawdopodobieństwo uzyskania tak dużej sumy wyników w trzech przedziałach w pojedynczym losowaniu. Po uwzględnieniu liczby niezależnych trójek sąsiadujących przedziałów w histogramie prawdopodobieństwa te zmniejszają się odpowiednio do $3,97\sigma$, $3,74\sigma$, $3,39\sigma$ i $3,27\sigma$.

Leon Lederman (ur. 1922 r.) jest jednym z najwybitniejszych fizyków doświadczalnych zajmujących się cząstkami elementarnymi. Współtwórca potworka językowego *boska cząstka* na określenie cząstki Higgsa (z D. Teresim), u szczytu swej kariery dokonywał ważnych odkryć w takim tempie, że pominięte przezeń rezultaty wystarczyłyby pewnie na kilka Nagród Nobla. Doskonałym przykładem może być niedocenie wagi procesów słabych z udziałem tzw. prądów neutralnych: Lederman te reakcje zarejestrowane w swoim eksperymencie nazwał dosadnie „gównionami” (ang. *crapon*).

i pędy znamy ze skończoną dokładnością, zatem zamiast otrzymywać za każdym razem tę samą wartość masy niezmienniczej, otrzymamy pewien jej rozkład. Co gorsza, detektor może zarejestrować także *tła*, czyli cząstki powstające w wyniku innych procesów niż rozpad poszukiwanej cząstki. Poszukiwanie nowych, nietrwałych cząstek sprowadza się zatem przede wszystkim do poszukiwania „garbów” w rozkładach odpowiednio wyznaczonej masy niezmienniczej przy uwzględnieniu *tła*.

Niestety, także w przypadku *tła* obecny jest nasz nieszczęsny element losowy. Może to znacząco utrudnić decyzję, czy obserwowany w badanym rozkładzie masy niezmienniczej „garb” jest efektem losowym, czy też przejawem nowego, poszukiwanego procesu fizycznego polegającego na rozpadzie nieznannej cząstki. Łatwo to pokazać na następującym przykładzie. Losujemy 1000 liczb z przedziału (0, 1), a następnie grupujemy je w 40 równych długości przedziałach. Powtarzamy tę procedurę 2000 razy i wybieramy w jakiś sposób rozkłady z najbardziej wyraźnymi „garbami”. Jeden z możliwych wyników tej zabawy przedstawiony jest na rysunku 4. Jak zdecydować, czy obecne na rysunkach „garby” pochodzą od losowych wartości *tła*? Pół biedy, jeżeli wiemy, spośród ilu rozkładów zostały wybrane te „garbate”. Jak jednak podjąć taką decyzję, jeśli to kolega pokazuje nam takie obrazki, a my nie wiemy, jak bardzo się starał, żeby je wyprodukować? Nie sztuką jest nawoływać: „Bądźmy konserwatywni i nie popełniamy błędów pierwszego rodzaju!”, jak jednak pocieszyć naukowca, któremu w ten sposób uciekło odkrycie i – być może – Nagroda Nobla?

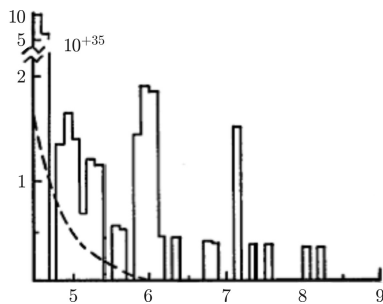
Problemem tym zajął się w 1968 roku Arthur Rosenfeld. W poświęconym odkrywaniu nowych, egzotycznych cząstek artykule pisał, że każdego roku masę niezmienniczą wyznacza się około 35 milionów razy. Rzut oka na czasopisma naukowe pozwala stwierdzić, że typowy histogram dla takich danych opiera się na około 2500 liczbach, co oznacza, że rocznie sporządza się około 15 tysięcy takich histogramów. Na tej podstawie Rosenfeld oszacował, że każdego roku analiza tych histogramów powinna dawać od 10 do 100 pozornych „garbów”, błędnie interpretowanych jako nowe cząstki (większa z tych liczb uwzględnia fakt, że gdy badacz uwierzy już w odkrycie zawarte w przygotowanych przezeń danych, będzie dane te obrabiał tak, by odkrycie to stało się możliwie bezdyskusyjne). Porównanie z publikowanymi w literaturze naukowej doniesieniami o nowych cząstkach okazało się zgodne z tym zgrubnym oszacowaniem. Z tego względu Rosenfeld podsumował swój artykuł następująco.

Dla teoretyka bądź fenomenologa moral jest prosty: trzeba czekać na efekty na poziomie 5σ . Może to być trudniejsze dla zespołu doświadczalnego, który zainwestował rok pracy i jakiś milion dolarów, [...] można więc opublikować takie dane, [...] powinno być jednak jasne, że każdy garb poniżej poziomu 5σ wskazuje na konieczność powtórzenia doświadczenia.

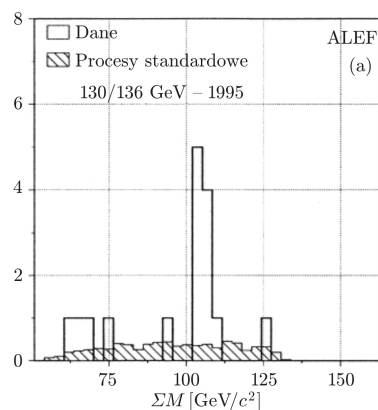
Apel Rosenberga nie od razu jednak został potraktowany poważnie. Można się o tym przekonać, przyglądając się niektórym odkryciom w fizyce cząstek elementarnych z ostatnich 40 lat.

W 1974 roku odkryto czarmonium, J/ψ , cząstkę złożoną z kwarka powabnego i jego antycząstki. „Garby” były w tym przypadku tak doskonale widoczne, że nikt się nie przejmował porządną analizą statystyczną. Podobna sytuacja miała miejsce kilka lat później przy odkrywaniu taonu.

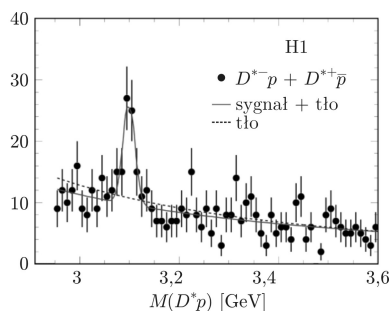
W 1976 roku grupa fizyków z Fermilabu, kierowana przez Leona Ledermana, odkrywcę neutrino mionowego i późniejszego laureata Nagrody Nobla, doniosła o zaobserwowaniu nowej cząstki o masie równej około siedmiu masom protonu ($6,5 \text{ GeV}/c^2$) i zaproponowała dla niej oznaczenie Υ . Rozkład liczby zliczeń par elektron-pozyton o różnych masach niezmienniczych przedstawiony jest na rysunku 5; prawdopodobieństwo, że taki rezultat wynika po prostu z losowych własności *tła* został oszacowany na 2% (około 2σ). W miarę przybywania danych okazało się jednak, że widoczny na wykresie „garb” po prostu zanikł po uwzględnieniu świeższych wyników, a więc hipoteza zerowa (brak nowej cząstki) została w tym przypadku odrzucona nieco zbyt pochopnie. Złośliwość fizyków sprawiła, że w annałach historii nauki był, którego istnienie zaanonsował Lederman *et consortes*, został uwieczniony jako pomyłka tego fizyka i wynik ten określa się dziś hasłem *Oops-Leon*. Oznaczenie Υ przydało się zaś dla bottomonium, cząstki o masie około dziesięciu mas protonu odkrytej przez ten sam zespół rok później. Nauczeni przykrym doświadczeniem badacze po zaobserwowaniu „garbu”, który mógł być zgodny z hipotezą braku nowej cząstki jedynie na poziomie przekraczającym 3σ , cierpliwie poczekali, czy i ten nie „rozplynie” się w później uzyskanych danych.



Rys. 5. Rozkład tempa produkcji par elektron-pozyton w zależności od masy niezmienniczej, który doprowadził do ogłoszenia odkrycia cząstki Υ . Źródło: Horn i wsp., Phys. Rev. Lett. 36 (1976) 1236.



Rys. 6. Rozkład masy niezmienniczej w przypadkach z czterema wiązkami (dżetami) cząstek uzyskany przez zespół ALEPH. Zakresowany histogram odpowiada oszacowanemu poziomowi tła. Na podstawie: Buskalic i wsp., Z. Phys. C71 (1996) 179.



Rys. 7. Uzyskany przez zespół H1 rozkład masy niezmienniczej, na podstawie którego wysunięto hipotezę o istnieniu pentakwarków. Na podstawie: Aktas i wsp., Phys. Lett. B588 (2004) 17.

W styczniu 1983 roku ogłoszono odkrycie w CERN-ie cząstki W . Artykuł naukowy, w którym to uczyniono, opierał się na sześciu zaobserwowanych przypadkach-kandydatach, nie podawał prawdopodobieństwa, z jakim odrzuca się hipotezę zerową, zauważał jedynie, że prawdopodobieństwo zaobserwowania takiej sytuacji wskutek losowych własności tła jest niezwykle małe. Tak samo rzecz się miała z ogłoszeniem odkrycia cząstki Z w maju tego samego roku, na podstawie czterech zaobserwowanych reakcji.

Reguła Rosenberga znalazła bardziej rygorystyczne zastosowanie dopiero w nieco nowszych czasach. W 1994 roku badacze z zespołu CDF w Fermilabie widzieli w rozkładach masy niezmienniczej „garb” w miejscu odpowiadającym temu, gdzie spodziewano się znaleźć kwark top. Ponieważ jednak nie byli w stanie odrzucić hipotezy zerowej z prawdopodobieństwem przekraczającym poziom 3σ , w pierwszych swoich artykułach pisali o argumentach (ang. *evidence*) na rzecz istnienia kwarka top. Dopiero po roku, kiedy zarówno CDF, jak i D0, dwa zespoły z Fermilabu, badające ten wycinek rzeczywistości, uzyskały odrzucenie hipotezy zerowej na poziomie przekraczającym 5σ , zdecydowano się mówić o odkryciu nowej cząstki – i to rok 1995 przyjmuje się za datę odkrycia kwarka top.

Cząstka Higgosa także była odkrywana dwa razy. Autor tego artykułu doskonale pamięta napięcie, z jakim w grudniu 2011 roku śledził transmisję na żywo z CERN-u, gdzie ogłoszono zaobserwowanie w trzech rodzajach rozkładów masy niezmienniczej „garbu” na poziomie 3σ w miejscu odpowiadającym właśnie cząstce Higgosa o masie około $125 \text{ GeV}/c^2$. Wydarzenie to zapoczątkowało prawdziwy wysyp prac naukowych analizujących własności tej cząstki ze wszystkich możliwych punktów widzenia. CERN-owska konferencja prasowa z 4 lipca 2012 roku, na której ogłoszono przekroczenie poziomu 5σ i której datę na ogół przyjmuje się za oficjalną „chwilę” odkrycia cząstki Higgosa, w świadomości naukowców zmieniła już niewiele.

Nie wolno też zapominać o blamażach w stylu *Oops-Leon*, przed jakimi reguła Rosenberga pozwoliła środowisku naukowe uchronić. W 1996 roku badacze z zespołu badawczego używającego detektora ALEPH przy akceleratorze LEP w CERN-ie, poszukując cząstki Higgosa, uzyskali rozkład masy niezmienniczej przedstawiony na rysunku 6. W tym przypadku hipotezę zerową można było odrzucić z prawdopodobieństwem 0,01% ($3,7\sigma$), jednak dalsze badania nie potwierdziły zaobserwowania nowej cząstki.

Nie zawsze jednak wystarczy ślepo stosować regułę Rosenberga, by nie popełnić błędu pierwszego rodzaju. W 2004 roku zespół badawczy używający detektora H1 przy akceleratorze Hera pod Hamburgiem uzyskał przedstawiony na rysunku 7 rozkład masy niezmienniczej, kuszący wręcz, by ogłosić światu istnienie pentakwarka, cząstki złożonej z pięciu kwarków i antykwarków – tyle że jej istnienia nikt się właściwie nie spodziewał. Odrzucenie hipotezy zerowej było w tym przypadku błędem z prawdopodobieństwem zaledwie $3 \cdot 10^{-10}$ (ponad 6σ), jednak analizujący te dane fizycy, najwyraźniej uznając, że rewolucyjne doniesienia wymagają nadzwyczajnie mocnych dowodów, skromnie użyli frazy „argumenty na rzecz istnienia” w tytule swego artykułu. Jak się okazało, słusznie, bo istnienia pentakwarków potwierdzić się nie udało.

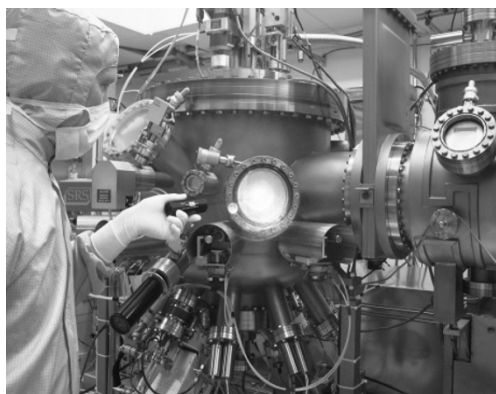
Niekiedy za nazbyt łatwe odrzucanie hipotezy zerowej odpowiadają nie efekty losowe, ale te związane ze sposobem przeprowadzenia doświadczenia (systematyczne). Zespół badawczy, używający detektora OPERA w Gran Sasso we Włoszech rejestrującego neutrina z wiązki wyprodukowanej w CERN-ie, ogłosił w 2011 roku, że z prawdopodobieństwem na poziomie 6σ należy odrzucić hipotezę, że neutrina są cząstkami poruszającymi się co najwyżej z prędkością światła. Jak się okazało w kolejnym roku, owo 6σ nie miało nic wspólnego z rzeczywistością, a cały efekt spowodowany był opóźnieniem rejestracji neutrin wskutek luźno wetkniętego kabla.

Czy wszystko to oznacza, że nie można wierzyć nawet „prawdom naukowym”? Nic podobnego! Jak wynika z przytoczonych wyżej przykładów, pierwsza reakcja badacza uzyskującego nowy, zaskakujący wynik lub o takim wyniku się dowiadującego polega na próbie zgromadzenia większej liczby danych, niezależnego powtórzenia doświadczenia lub zastanowienia się, czy podczas doświadczenia nie popełniono jakichś błędów. W ten sposób nauka nieustannie się oczyszcza z błędnych wniosków, także i tych, które są w stanie przejść przez sito zasady Rosenberga. I właśnie dlatego nauka jest nam w stanie co nieco powiedzieć o świecie.

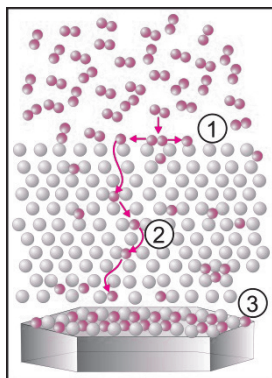
Ekstremalny kryształ

Klaudia PŁODZIEN^{*}, Marta SAWICKA^{**}

Emiterzy światła oparte na azotku galu (GaN) rewolucjonizują codzienne życie. Dzięki niebieskim laserom azotkowym Blu-ray czterokrotnie zwiększyła się gęstość optycznego zapisu danych. Gdy włączamy telewizor, cieszy nas wysoka jakość obrazu i odwzorowanie kolorów, możliwe dzięki nowoczesnym wyświetlaczom z podświetleniem diodowym. Od kilku lat powszechne stają się mikroprojektory, oparte na bardzo jasnych, półprzewodnikowych źródłach światła. Poszerzają się też możliwości diagnostyki medycznej czy komunikacji podwodnej dzięki laserom emitującym światło zielone 480–500 nm. Wszystko to zawdzięczamy kryształowi azotku galu, który określany jest jako półprzewodnik przyszłości.



Maszyna do epitaksji z wiązek molekularnych (MBE), służąca do produkcji niebieskich i zielonych diod laserowych, znajdująca się w Instytucie Wysokich Ciśnień PAN. (www.topganlasers.com)



Schemat krystalizacji GaN z roztworu metodą wysokociśnieniową.

(1) Azot cząsteczkowy pod wysokim ciśnieniem dysocjuje na powierzchni roztworu galu.

(2) Atomy azotu dyfundują w stopionym galu w kierunku zarodkującego kryształu GaN.

(3) Rosnące płytki GaN mają kształt heksagonalny.

Źródło: www.unipress.waw.pl

Kryształ GaN jako kamień filozoficzny.

Azotek galu jest kryształem, który nie występuje w środowisku naturalnym, w przeciwieństwie do diamentu czy szafiru. Jego właściwości fizyczne i optyczne zostały przewidziane teoretycznie na początku XX wieku. Materiał wydawał się idealnym kandydatem do wytwarzania emiterów światła niebieskiego, jednakże wytworzenie wysokiej jakości kryształów GaN okazało się nie lada wyzwaniem. Wysiłki zmierzające do znalezienia właściwego podłoża, na którym można by otrzymać dobrej jakości warstwę GaN, nie przynosiły żadnych pozytywnych wyników – w produkowanych warstwach było zbyt dużo defektów (ok. 10^{10} cm⁻²). Trudności pojawiły się też przy wytwarzaniu złącza p-n, które jest niezbędne, aby po przyłożeniu napięcia do diody LED uzyskać emisję światła. W złączu p-n nośniki (elektrony i dziury) pod wpływem przyłożonego napięcia dyfundują do centrum złącza, gdzie rekombinują (łączą się), emitując światło. Teoretycznie, aby uzyskać warstwę typu p z wspomnianego złącza, wystarczyło wprowadzić do GaN niewielki procent atomów magnezu. W praktyce jednak to nie działało i nikt nie wiedział dlaczego.

Impas przełamali ubiegłoroczni laureaci Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki – Japończycy Isamu Akasaki, Hiroshi Amano i Shuji Nakamura. Dzięki ich przełomowym odkryciom w latach osiemdziesiątych świat w końcu uwierzył, że warto inwestować w GaN. Cienkie warstwy buforowe GaN lub AlN, wytwarzane w niskiej temperaturze na szafirze, umożliwiły redukcję ilości defektów w warstwach GaN do takiego poziomu, który pozwala na całkiem wydajną rekombinację i emisję światła niebieskiego. Zaproponowali też prosty mechanizm aktywacji domieszki magnezowej podczas wygrzewania struktur, usuwając odpowiedzialny za kłopoty wodór. I tak pierwsze azotkowe diody LED zaświeciły na niebiesko w 1992 roku. Od tego momentu technologia uległa znacznym transformacjom, jednak impuls potrzebny do jej rozwoju niewątpliwie zawdzięczamy wspomnianym badaczom.

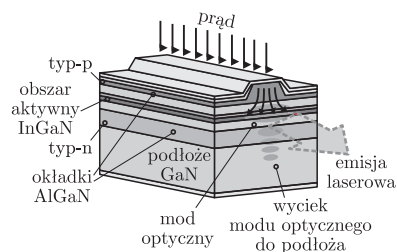
Polak jednak potrafi. Diody LED to, oczywiście, tylko jeden z typów urządzeń azotkowych. Azotek galu ma wiele innych zastosowań, spośród których bardzo ważnym jest konstrukcja laserów. Do tego celu nie wystarczą jednak wspomniane warstwy GaN na szafirze – konieczne są podłoża o mniejszej ilości defektów.

Próbie opracowania nowego sposobu otrzymywania kryształów GaN podjęli polscy naukowcy z Instytutu Wysokich Ciśnień Polskiej Akademii Nauk (IWC PAN). W połowie lat osiemdziesiątych rozpoczęli prace nad syntezą GaN z roztworu. Z uwagi na ekstremalne warunki topnienia (temperatura ponad 2200°C i ciśnienie ponad 6 GPa) nie można syntetyzować go popularną dla innych półprzewodników metodą Czochralskiego, polegającą na powolnym wyciąganiu zarodka ze stopionego roztworu w celu otrzymania dużego kryształu (tak otrzymywane są np. monokryształy krzemu, germanu, arsenku galu). Pierwszym wyzwaniem, jakie przyszło im pokonać, była konstrukcja niezwykle wytrzymałych komór wysokociśnieniowych, mogących stabilnie pracować w temperaturach rzędu 1500°C i ciśnieniu 1,2 GPa (około 12 000 atmosfer).

^{*}studentka, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

^{**}Instytut Wysokich Ciśnień Polskiej Akademii Nauk

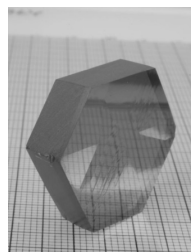
Wspólna praca fizyków i inżynierów w IWC PAN zaowocowała wkrótce pierwszymi sukcesami – z roztworu otrzymywano cienkie płytki GaN o heksagonalnym kształcie i powierzchni około 100 mm².



Schemat struktury laserowej, w której następują straty z uwagi na wyciek modu optycznego do podłoża. Rozwiązaniem tego problemu są podłoża plazmoneczne GaN o bardzo wysokiej koncentracji elektronów swobodnych.



Kryształ GaN wytworzony w IWC PAN (fot. Tomasz Sochacki, IWC PAN)



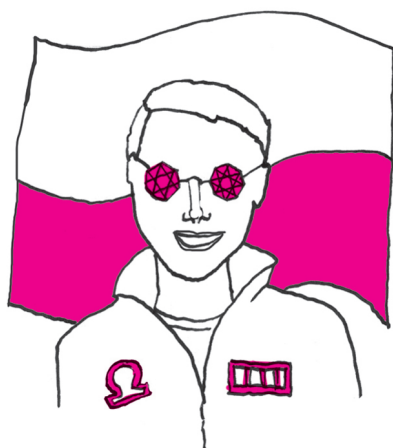
Kryształ GaN wytworzony metodą amonotermalną. Źródło: www.ammono.com

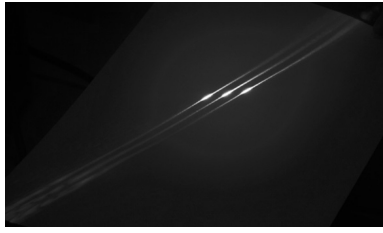
Kryształy wytwarzane metodą wysokociśnieniową są właściwie doskonale – praktycznie nie ma w nich defektów. Na jednym z nich stworzono w 2001 roku pierwszy polski niebieski laser azotkowy. Kryształy te mają wyjątkowo wysoką koncentrację swobodnych elektronów (ponad $5 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$), więc z łatwością przewodzą prąd elektryczny. Prąd, który zasila laser, zamieniany jest na światło generowane w obszarze aktywnym. Aby światło lasera nie „uciekło” do podłoża, potrzebne są okładki z materiału o małym współczynniku załamania światła, na przykład warstwy AlGaIn. Niestety, dla długości fal ponad 450 nm działają one bardzo słabo. Jak zatem w inny sposób zablokować wyciekanie modu optycznego do podłoża? Rozwiązaniem są podłoża wysokociśnieniowe, nazywane również „plazmonecznymi”, ponieważ obecne w nich swobodne elektrony zaczynają (jeśli jest ich odpowiednio dużo) wykazywać właściwości charakterystyczne dla plazmy i skutecznie „trzymają” światło lasera, zapewniając wysoką sprawność przyrządu. Niestety, kryształy GaN spontanicznie rosnące metodą wysokociśnieniową mają małe rozmiary, co nie pozwala na masową produkcję urządzeń na ich bazie. Sprytnym pomysłem na obejście tego problemu jest włożenie do komory ciśnieniowej zarodki w postaci kilku dużych płytek GaN i wytwarzanie na nich warstwy o opisanych właściwościach. Obecnie metoda ta pozwala na efektywne wytwarzanie nowej generacji 1–1,5 calowych plazmonecznych podłoży GaN, używanych do produkcji diod laserowych.

Równoległe do prac prowadzonych w IWC PAN na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego badana była inna metoda syntezy GaN wykorzystująca wysokie ciśnienie – metoda amonotermalna. Wzrost kryształów GaN tą metodą odbywa się w temperaturze 400–600°C i ciśnieniu 0,1–0,3 GPa. W nadkrytycznym amoniaku, w obecności mineralizatorów (w przypadku metody amono-zasadowej są to metale alkaliczne lub ich amidy, tj. LiNH_2 , NaNH_2) odbywa się rozpuszczanie umieszczonego w autoklawie zanieczyszczonego polikrystalicznego proszku GaN. Dzięki zjawisku konwekcji GaN przemieszcza się w kierunku wysokiej jakości zarodków i tam w wyniku przesylenia roztworu krystalizuje. Kryształy rosną dość wolno, ale ich jakość krystaliczna jest bardzo wysoka – typowa gęstość defektów to zaledwie 10^4 cm^{-2} . W kontrolowany sposób można też wytwarzać kryształy GaN o wysokiej koncentracji swobodnych elektronów. Ponadto, technologia amonotermalna, podobnie jak opisana poprzednio hydrotermalna, jest w pełni skalowalna, co pozwala obniżyć koszty produkcji i daje nadzieję na sukcesywne zwiększanie dostępności wysokiej jakości podłoży GaN. Obecnie metoda amonotermalna jest rozwijana i udoskonalana przez firmę Ammono SA, mającą zakłady produkcyjne pod Warszawą. Produkuje ona największe i najlepszej jakości kryształy GaN na świecie, będąc niekwestionowanym liderem w tej technologii.

Wykorzystana szansa. Gdy w 2001 roku IWC PAN zademonstrował jedną z pierwszych azotkowych diod laserowych na świecie, prywatni inwestorzy zdecydowali się wesprzeć finansowo badaczy. Tak powstała firma TopGaIn Sp. z o.o., która swoją przewagę rynkową oparła na dostępie do najlepszej w tamtym momencie jakości kryształów GaN. Zespół badawczy skupił się na produkcji i optymalizacji półprzewodnikowych diod laserowych emitujących światło fioletowe, niebieskie i zielone. Metodą wytwarzania struktur laserowych jest m.in. opatentowana w 2004 roku przez Polaków epitaksja z wiązek molekularnych z wykorzystaniem plazmowego źródła azotu (ang. *Plasma-Assisted Molecular Beam Epitaxy*, PA-MBE). Ciśnienie stosowane w metodzie PA-MBE jest ekstremalnie niskie, podobne do tego, jakie panuje w kosmosie. Przed epitaksją w komorze wzrostu ciśnienie wynosi 10^{-7} Pa , a podczas epitaksji $\approx 10^{-3} \text{ Pa}$, aby zapewnić warunki nieoddziałujących wiązek molekularnych. Parametry laserów azotkowych wytwarzanych techniką MBE plasują to laboratorium w światowej czołówce.

Od samego początku TopGaIn szczególną uwagę poświęcał produkcji laserów o dużej mocy optycznej, które mogą zostać wykorzystane w projektorach





Wiązka światła emitowana przez matrycę laserową. Źródło: www.topganlasers.com

laserowych nowej generacji, w fotolitografii lub przemyśle drukarskim. Obecnie takie diody wytwarza i sprzedaje na zasadach komercyjnych. Oferowane przyrządy emitują światło w zakresie 380–450 nm. Aby maksymalizować moc optyczną emitowaną przez lasery azotkowe, firma rozpoczęła regularne badania nad matrycami laserowymi. Matryce laserowe są systemami połączonych chipów laserowych i mają wszystkie zalety diod laserowych: kompaktową wielkość, dużą niezawodność oraz bardzo wysoką całkowitą moc optyczną. Jednym z ostatnich sukcesów było stworzenie mini-matrycy laserowej emitującej aż 4W mocy optycznej z 16 niebieskich laserów pracujących w trybie pracy ciągłej. Matrycę laserową zaprezentowano w 2013 roku na konferencji Photonics West w USA, jako owoc współpracy IWC PAN oraz firm TopGaN i Ammono.

Gdy śledzimy kolejne osiągnięcia technologii produkcji coraz doskonalszych kryształów azotku galu, a także sukcesy optymalizacji diod laserowych, pomysły w stylu telewizorów, które możemy zmieścić w kieszeni, wydają się zupełnie nieodległą przyszłością. Ogromny potencjał naukowy IWC PAN we współpracy z polskimi firmami hi-tech: TopGaN i Ammono stanowi masę krytyczną azotkowej technologii w Polsce, pozwalającą na współzawodnictwo na arenie międzynarodowej w dziedzinie produkcji objętościowych podłoży GaN oraz laserów azotkowych z nawet tak dużymi konkurentami jak japońskie korporacje.

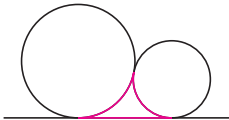


Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1450. Okręgi o promieniach R i r są styczne zewnętrznie. Poprowadzono ich wspólną styczną i w obszar ograniczony przez nią i okręgi (rys. 1) wpisano okrąg. Ile wynosi jego promień?

Rozwiązanie na str. 10



Rys. 1

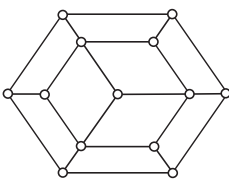
M 1451. Dla liczby całkowitej $n \geq 1$ znaleźć wartość sumy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Rozwiązanie na str. 24

M 1452. Rozstrzygnąć, czy pająk może znaleźć taką ścieżkę na pajęczynie z rysunku 2, aby odwiedzić każdy jej wierzchołek dokładnie raz i wrócić do wierzchołka, z którego zaczął?

Rozwiązanie na str. 2



Rys. 2

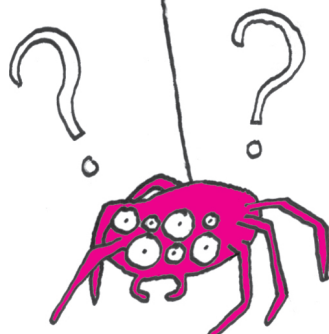
Przygotował Piotr ZALEWSKI

F 875. Jednorodna żelazna kwadratowa płyta o masie m i boku x (oraz nieistotnej dla problemu grubości) wisi na przymocowanym do jej rogu zawiasie (umożliwiającym obrót płyty w jej płaszczyźnie) i jest dodatkowo przytrzymana elektromagnesem tak, że jej górna krawędź jest pozioma. Wyznaczyć siłę, z jaką zawias działa na płytę w chwili zwolnienia elektromagnesu. Jako wprawkę należy wyprowadzić wzór na moment bezwładności takiej płyty (względem dowolnej osi prostopadłej do jej płaszczyzny), wykorzystując tylko analizę wymiarową i twierdzenie Steinera.

Rozwiązanie na str. 11

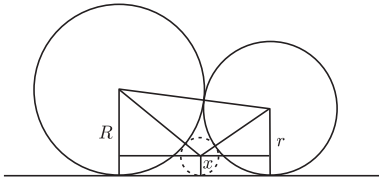
F 876. W sytuacji opisanej w poprzednim zadaniu zawias został zamocowany pod suwakiem pozwalającym na swobodne przemieszczanie się zawiasu po poziomej belce (leżącej w płaszczyźnie płyty). Z jaką siłą zawias będzie działał na płytę i jakie będzie przyspieszenie suwaka w chwili zwolnienia elektromagnesu? W jakiej pozycji zatrzyma się suwak, gdy jego opory ruchu można zaniedbać w porównaniu do pozostałych oporów ruchu (które należy uznać za minimalne: ich początkowy wpływ zaniedbujemy, ale oczekujemy, że dzięki nim płyta w końcu znieruchomieje).

Rozwiązanie na str. 16





Rozwiązanie zadania M 1450. Niech x oznacza szukany promień. Jeden z trójkątów prostokątnych widocznych na rysunku ma przeciwprostokątną będącą sumą promieni o długościach R i x oraz przyprostokątną o długości $R - x$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że długość drugiej przyprostokątnej, a więc również długość odcinka pomiędzy odpowiednimi punktami styczności jest równa $\sqrt{(R+x)^2 - (R-x)^2}$.



Z analogicznych obliczeń dla pozostałych par punktów styczności otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} &\sqrt{(R+x)^2 - (R-x)^2} + \\ &+ \sqrt{(r+x)^2 - (r-x)^2} = \\ &= \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2}, \end{aligned}$$

które pozostaje rozwiązać. Upraszczając, dostajemy

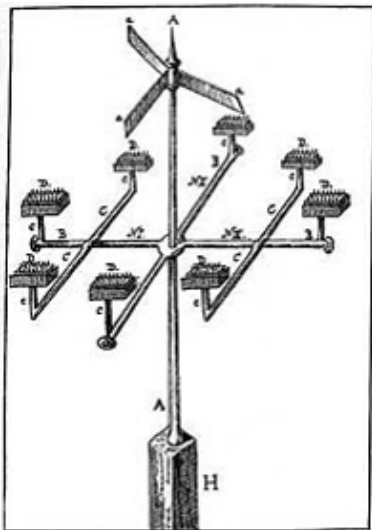
$$\sqrt{4Rx} + \sqrt{4rx} = \sqrt{4Rr},$$

co daje

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}},$$

czyli

$$x = \frac{rR}{(\sqrt{r} + \sqrt{R})^2}.$$



První autentické vyobrazení bleskosvodu

Pierwszy oryginalny model piorunochronu.

Machina meteorologica i Złoty Diviš

Krzysztof REJMER

Na brzegu Dzikiej Orlicy, w wiosce Helvíkovice, która dziś jest przedmieściem Žamberku, stoi niewielki dom, wybudowany w stylu charakterystycznym dla regionu Gór Orlickich. Urodził się w nim wynalazca Waclaw Divíšek, który na kartach nauki zapisał się jako Prokop Diviš (1698–1765). Kiedy po śmierci ojca gospodarstwo objął jego starszy brat, dzięki pomocy pochodzącego z Žamberku rektora szkoły Henryka Dušíka, chłopiec nie został, na przykład, pomocnikiem cieśli albo kowala, ale rozpoczął naukę w jezuickim kolegium w Znojmie. Wstąpił do zakonu norbertanów i uczył się dalej, obronił doktoraty z teologii oraz z filozofii w Salzburgu i w Ołomuńcu. Jednak pasją jego życia stały się nauki przyrodnicze.

W 1736 roku Prokop Diviš został proboszczem w Příměticach pod Znojmem; to tam właśnie rozpoczął swoje eksperymenty z elektrycznością statyczną. Przez wiele lat niezwykle systematycznie zbierał różnorodne obserwacje meteorologiczne burz, które potem posyłał profesorowi Sorinkinowi do Pragi. Wszystko spisał w dziele *Magia naturalis* dedykowanym cesarzowej Marii Teresie. Eksperymenty te kontynuował dalej, już jako przeor klasztoru w Louce (1741–1742), a potem znów jako proboszcz.

W 1753 roku, mierząc natężenie pola elektrycznego w atmosferze, w wyniku uderzenia piorunem śmierć poniósł w Petersburgu profesor Georg Wilhelm Richmann. Dla Prokopa Diviša stało się to impulsem do napisania krótkiej, łacińskiej rozprawy o sprowadzaniu elektrycznych nabożów z chmur do ziemi, którą posłał Petersburskiej Akademii Nauk. Rozprawa pozostała raczej niezauważona, ponieważ miała dość dziwaczną formę. Zaczynała się od biblijnych cytatów i dalej rozwijała jakąś cudaczną elektroteologiczną teorię.

Po śmierci profesora Richmanna, która w świecie nauki wywołała duży wstrząs, zaprzestano prowadzenia ryzykownych eksperymentów. Prokop Diviš postanowił zająć się zagadnieniem bezpieczeństwa i rozpoczął prace nad przyrządem meteorologicznym (*machina meteorologica*), jak nazywał swój wynalazek. W zamierzeniu nie był to piorunochron, ale urządzenie, które miało chronić przed gromadzeniem się ładunków w chmurach, a przez to przed powstawaniem wyładowań atmosferycznych. W 1754 roku owa meteorologiczna maszyna była już gotowa. Tworzył ją zespół czterystu ostrzy umieszczonych na maszcie, połączonych łańcuchami z ziemią, których zadaniem było wysysać elektryczne ładunki z chmur. O ile w laboratoryjnych eksperymentach Prokop Diviš potrafił tego dokonać (a nawet popisywał się tą umiejętnością na wiedeńskim dworze), o tyle skala zjawiska, jakim jest burza, czyni to niemożliwym, o czym jednak Diviš w tamtej epoce nie mógł wiedzieć.

Za wynalazcę piorunochronu (1752 r.) uważany jest Benjamin Franklin (1706–1790). Cel Franklina, przechwytywanie piorunów, był jednak dużo skromniejszy, a konstrukcja prostsza, wystarczało do tego zaledwie jedno ostrze. Naukowy konkurent Franklina, zasłużony w badaniach nad elektrycznością, pierwszy profesor fizyki doświadczalnej w Paryżu, ksiądz Jean-Antoine Nollet (1700–1770) był wielkim przeciwnikiem budowy piorunochronu, jako właściwy środek zaradczy zalecając bicie w dzwony. Piorunochron, twierdził Nollet, to urządzenie grzeszne, bo jest wynikiem sprzeciwu wobec woli Boga. A poza tym on pioruny ściąga, co akurat jest prawdą, ale właśnie dzięki temu (o ile instalacja jest poprawnie wykonana) zapewnia większe bezpieczeństwo.

Meteorologiczna maszyna Prokopa Diviša elektryczności z chmur, co prawda, nie wysysała, niemniej dobrze działała jako piorunochron. Dość komiczny był koniec owego urządzenia. Lato w roku 1759 było bardzo suche. W Příměticach zaczęto uważać, że to właśnie ta dziwna rzecz stojąca przy plebanii rozgania chmury. W 1760 roku chłopci wtargnęli do probostwa i piorunochron zniszczyli. Jednak w rok później, po katastrofalnych burzach, mieszkańcy wsi zmienili zdanie i poprosili o odbudowanie urządzenia. Minęło jeszcze piętnaście lat i na zamku Měšice pod Pragą w 1775 roku umieszczono pierwszy piorunochron według pomysłu Franklina. Było to dziesięć lat po śmierci přímětickiego wynalazcy.

Prokop Diviš poświęcił elektryczności większą część swojego pracowitego życia. Prowadził doświadczenia dotyczące wpływu elektryczności na rośliny oraz zwierzęta. Próbował stosować elektryczność do leczenia paraliżu, chorób reumatycznych oraz kurczów mięśni. Terapeutyczne stosowanie elektryczności wprawdzie konsultował z nadwornym lekarzem Marii Teresy, Gerardem van Svietenem, uznanym medycznym



Rozwiązanie zadania F 875.

Z analizy wymiarowej wynika, że moment bezwładności kwadratu (jednorodnej kwadratowej płyty) o boku x względem jego środka jest proporcjonalny do jego masy i kwadratu długości boku.

Oznaczając stałą proporcjonalności przez k , otrzymujemy

$I(x) = k \cdot m(x) \cdot x^2$. Jest on jednocześnie równy sumarycznemu momentowi bezwładności czterech mniejszych kwadratów (na które ten większy można podzielić) względem ich stykających się rogów. Wykorzystując twierdzenie Steinera, otrzymujemy

$$I(x) = 4 \left(I\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{m}{4} d^2 \right),$$

gdzie $d = x \frac{\sqrt{2}}{4}$ jest odległością środków masy małych kwadratów do środka masy dużego. Przystępując wzory na $I(x)$, wyznaczamy $k = \frac{1}{6}$.

Moment bezwładności kwadratowej płyty względem jej rogu jest, oczywiście, równy

$$I^*(x) = I(x) + m \left(\frac{x\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{2}{3} m x^2.$$

Płyta w chwili zwolnienia elektromagnesu zaczyna się obracać wokół zawiasu pod wpływem momentu siły $mg \frac{x}{2}$, gdzie $\frac{x}{2}$ jest ramieniem siły ciężkości (przyłożonej do środka masy) względem osi wyznaczonej przez zawias. Otrzymujemy warunek $I^*(x)\mathcal{E} = mg \frac{x}{2}$, skąd

wyznaczamy przyspieszenie kątowe $\mathcal{E} = \frac{3}{4} \frac{g}{x}$. Składowe pionowa i pozioma przyspieszenia środka masy są równe co do wartości (dlaczego?) i wynoszą

$$a = \frac{x}{2} \mathcal{E} = \frac{3}{8} g \text{ (jak to wykazać?)}$$

Z równania opisującego ruch w kierunku pionowym otrzymujemy warunek

$$ma = mg - F_{\uparrow}, \text{ czyli } F_{\uparrow} = \frac{5}{8} mg.$$

Natomiast z równania opisującego ruch w kierunku poziomym wyznaczamy składową poziomą $F_{\leftarrow} = am = \frac{3}{8} mg$

(składowa ta jest skierowana przeciwnie do składowej poziomej wektora poprowadzonego od zawiasu do środka masy płyty).

autorytetem w ówczesnej Austrii, który pomysłem Prokopa Diviša był przychylny, jednak lekarze, aptekarze, a zwłaszcza księża, przyjęli ten pomysł z wrogością. Medyczne pisma Diviša w Austrii zostały zatrzymane przez cenzurę, a za granicą ukazały się tylko nieliczne i nie wywołały żadnego oddźwięku. Przyjaciel Diviša, znojemski lekarz Pichler, posyłał mu tylu pacjentów, że na plebanii w Příměticach powstała wręcz przychodnia ze stałymi godzinami przyjęć. Źródła wspominają o wielu wyleczonych, trudno jest jednak ocenić wiarygodność tych doniesień.

W 1753 roku Prokop Diviš, który był także wyśmienitym muzykiem, skonstruował unikatowy instrument strunowy, napędzany energią elektryczną czerpaną z baterii butelek lejdejskich. Dennis d'Or, czyli Złoty Diviš – bo tak się ten instrument nazywał – miał 790 strun, niektóre źródła mówią o czterestu klawiaturach, czy jest to prawda, trudno dziś ocenić, bo nie zachował się ani sam instrument, ani żaden jego dokładny opis. Johann Ludwig Fricker, który odwiedził wynalazcę, napisał entuzjastyczny artykuł zamieszczony w naukowym periodyku *Tübingsche Berichte von gelehrten Sachen* XXX (Juli 1754, 395). Złoty Diviš miał być rodzajem syntetyzatora dźwięku, podobno imitował dźwięki harfy, pianina, fagotu, leśnego rogu, klarnetu i kilku innych instrumentów. Mówiono, że także głos ludzki, ale to już brzmi chyba nazbyt fantastycznie. Instrument ten tak oczarował cesarza Józefa II, że – po kasacie zakonu w Louce – nakazał przewieźć go na wiedeński dwór i podarował organiście Norbertowi Weiserowi, który koncertował nie tylko na dworze, ale też w wielu innych miastach habsburskiej monarchii. Ponieważ instrument był skomplikowany, tylko bardzo niewielu potrafiło na nim grać. Niestety, nie zachował się on do dziś, zaginął w Bratysławie, gdzie zmarł Weiser.

Rozprawa *Magia naturalis* została po raz pierwszy wydana w Niemczech przed samą śmiercią autora. Księga składa się z trzech części zatytułowanych: *O ogniu naturalnym, O ogniu podstawowym i elektrycznym, O meteorologii, czyli o makroskopowej elektryzacji albo właściwie o burzy*. W książce tej Diviš przedstawia swoją osobliwą, jak na katolickiego księdza, teorię śmierci; otóż śmierć następuje wcale nie w chwili opuszczenia ciała przez duszę, ale w momencie opuszczenia ciała przez wszelki elektryczny ogień (czyli w dzisiejszym języku – przez ładunek elektryczny). Nic więc dziwnego, że autor miał nieustanne kłopoty z cenzurą.

Nie można jednak powiedzieć, że Prokop Diviš nie został za życia doceniony. Wieści o jego zdumiewających eksperymentach szybko dotarły do Wiednia i został zaproszony na dwór, gdzie demonstrował Marii Teresie i Franciszkowi Lotaryńskiemu swoje eksperymenty. Cesarska para przyjęła je z ogromnym zainteresowaniem i nagrodziła uczonemu złotym medalem. Królewskie uznanie jest cenne, ale najważniejsza jest jednak reakcja innych uczonych. Wspomnieliśmy wcześniej o braku zainteresowania rozprawą, którą Diviš posłał do Petersburga. Wydarzenie to jednak nie oznacza, że był on przez naukową społeczność swej epoki ignorowany. Wiemy, że utrzymywał liczne kontakty z innymi uczonymi, a wśród nich z Leonardem Eulerem. *Twoje badania w całych Niemczech przyjmowane są z wielkim uznaniem. Nie możesz mi ofiarować wspanialszego daru niż szczegółowy opis owego godnego podziwu instrumentu Twojej konstrukcji...* pisał do Diviša ów wielki uczyony. Czy otrzymał to, o co prosił – tego, niestety, nie wiemy. Zapewne nie, skoro do dziś nie zachował się żaden szczegółowy opis Złotego Diviša.

Gdy życie Prokopa Diviša dobiegało już końca, na Śląsku Cieszyńskim urodził się ksiądz Jan Brzuska (1757–1840), który jeszcze jako student teologii w Ołomuńcu rozmiłował się w fizyce. Będąc proboszczem w Istebnej, budził lęk wśród górali (uważających go za czarownika), wytwarzając iskry i prąd elektryczny za pomocą maszyny elektrycznej. Jak Diviš stosował elektryczność do celów terapeutycznych, napisał też dzieło o wpływie elektryczności na organizm ludzki. Ciekawe, czy Jan Brzuska wiedział o Prokopie Divišu, w końcu łączył ich Ołomuniec.

A maszyna meteorologiczna? Dziś jedna jej replika stoi obok rodzinnego domu Diviša, gdzie obecnie mieści się małe muzeum, a druga znajduje się na dachu teatru w Žamberku, który nosi imię nieco zapomnianego już wynalazcy.

* * *

Jak wiadomo, Franklin był jednym z ojców-założycieli Stanów Zjednoczonych. Z tym faktem wiąże się pewna anegdota. Gdy w Europie zaczęto zakładać piorunochrony, żywą dyskusję wywołało pytanie, jakie zakończenie piorunochronu jest lepsze: tępe czy też ostre, jak chciał Franklin. Niechętny Franklinowi król Jerzy III Hannoverki usiłował wymusić na Royal Society uznanie za lepsze tego pierwszego rozwiązania. Prezydent stowarzyszenia, lekarz John Pringle, odparł: *Sir, nie potrafię zmieniać praw ani zjawisk natury*. Jednak taka bezczelność nie mieściła się w głowie króla Jerzego. *W takim razie – odparł władca – lepiej podaj się do dymisji*.

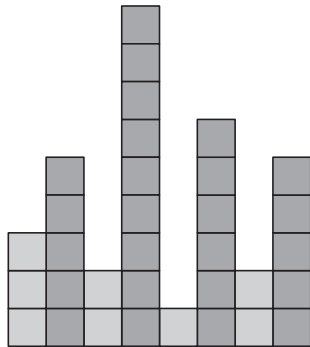


mała delta

Architekci i algorytmy

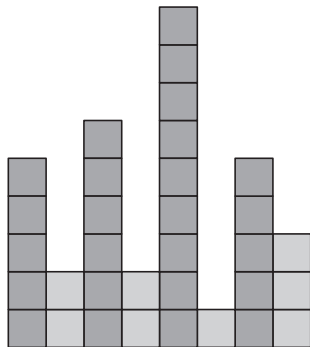
W pewnym mieście podjęto decyzję o budowie nowego osiedla. Postanowiono, że będzie to szereg ośmiu budynków. Przyjęto, że żadne trzy stojące obok siebie budynki nie mogą być tej samej wysokości. Ustalono, że budynki będą mieć wysokości równe odpowiednio: 5, 10, 10, 15, 25, 25, 30 i 45 metrów.

Pojawiło się pytanie: Jak należy uszeregować budynki, aby widok osiedla z pewnej odległości był jak najładniejszy? Zdania na ten temat wśród miejscowych architektów były podzielone. Ogłoszono konkurs na projekt osiedla. Dwie pracownie architektoniczne, znajdujące się w tym mieście, przedstawiły swoje projekty urbanistyczne.



Pierwsza grupa architektów, bardziej tradycyjna, zaproponowała, by trzymać się zasady, że należy minimalizować sumę różnic wysokości sąsiadujących ze sobą budynków. Ich zdaniem oznaczało to tyle, że budynki należy uszeregować od najniższego do najwyższego (lub w odwrotnej kolejności).

Druga pracownia, bardziej nowoczesna, uważała inaczej – architekci uznali, że sąsiednie budynki powinny różnić się co do wysokości najbardziej, jak to jest tylko możliwe (czyli suma różnic wysokości sąsiadujących ze sobą budynków powinna być jak największa). Co zaskakujące, do projektu druga grupa architektów dołączyła aż dwa rysunki (plany) osiedla, które ich zdaniem stanowiły przykłady optymalnych rozwiązań. Algorytmu, który zastosowali do ich znalezienia, pracownia jednak nie ujawniła.



Po burzliwej dyskusji jury konkursu ostatecznie zdecydowało, że zwycięży drugi projekt drugiej grupy architektów.

Warto zastanowić się, czy grupy architektów miały rację? To znaczy: Czy algorytmy, jakie zastosowano, rzeczywiście dawały najlepsze z możliwych (optymalne) rozwiązania dla różnych dla obu grup specyfikacji problemu?

Przeanalizujmy propozycję pierwszej grupy.

Załóżmy, że budynków jest n . Niech b_1, b_2, \dots, b_n to wysokości budynków uszeregowanych od najniższego do najwyższego. Oznaczmy dodatkowo $b_{\min} = b_1$ i $b_{\max} = b_n$. W przypadku takiego uszeregowania otrzymamy sumę różnic wysokości równą $|b_2 - b_1| + |b_3 - b_2| + \dots + |b_n - b_{n-1}|$, którą, oczywiście, możemy zastąpić sumą

Suma typu

$$(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1})$$

jest przykładem sumy częściowej szeregu, zwanego w matematyce szeregiem teleskopowym. Własności takich szeregów są czasami używane w analizie algorytmów.

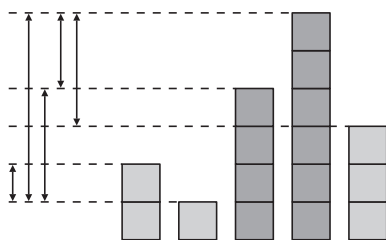
$$(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1}) = b_n - b_1 = b_{\max} - b_{\min}.$$

Zauważmy, że nie sposób uszeregować budynki tak, aby suma różnic wysokości sąsiednich budynków była mniejsza niż różnica wysokości najwyższego i najniższego. Inaczej mówiąc – w przypadku każdego innego uszeregowania poszukiwana suma różnic wysokości będzie większa od różnicy $b_{\max} - b_{\min}$.

Dlaczego? W zrozumieniu tej prawidłowości może pomóc interpretacja geometryczna – poszukiwana suma jest sumą długości odcinków o długościach równych odpowiednim różnicom wysokości sąsiednich budynków. Oczywiście, suma mnogościowa tych odcinków jest równa odcinkowi o długości $b_{\max} - b_{\min}$.

Podsumowując – pierwsza grupa architektów przedstawiła optymalne rozwiązanie (dla ich specyfikacji problemu).

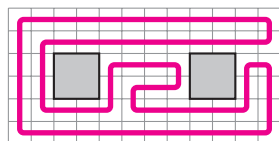
Co możemy powiedzieć o rozwiązaniu (rozwiązaniach) drugiej grupy? Czy ktoś z Czytelników potrafi sformułować algorytmy, jakimi posługiwali się architekci w celu otrzymania rozwiązań? Czy te algorytmy dają optymalne rozwiązanie dla ich specyfikacji problemu? Odpowiedź na drugie pytanie wydaje się nie być wcale taka prosta.



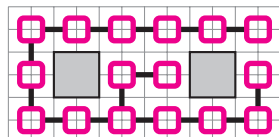
Inspiracją do powstania tekstu były łamigłówki algorytmiczne ze zbiorów konkursu Australian Informatics Competition. www.ioinformatics.org/oi/pdf/v8_2014_179_190.pdf

Małą Deltę przygotował Paweł PEREKIETKA
nauczyciel, V LO w Poznaniu

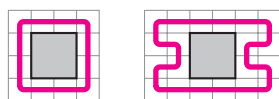
Informatyczny kącik olimpijski (79): Filary



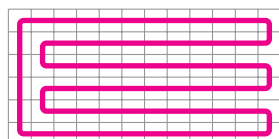
Rys. 1. Z prostokąta 6×12 wycięto dwa kwadraty 2×2 . Kolorem zaznaczono przykładowy cykl spełniający warunki zadania.



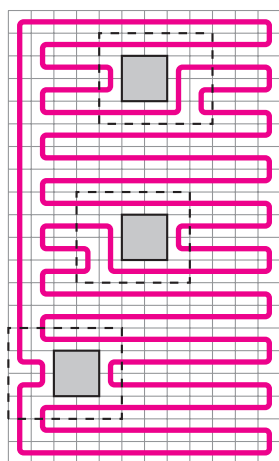
Rys. 2. W każdym z 16 niewyciętych kawałków umieszczamy cykl. Drzewo rozpinające grafu kawałków zaznaczono pogrubionymi czarnymi krawędziami.



Rys. 3. Otoczenie wyciętego kwadratu cyklem w kawałkach 4×4 i 4×6 .



Rys. 4. Początkowe wypełnienie pełnego prostokąta w drugim rozwiązaniu.



Rys. 5. Trzy przypadki lokalnych poprawek „kaloryfera”.

W tym kąciku omówimy zadanie *Filary*, które pojawiło się na Akademickich Mistrzostwach Polski w Programowaniu Zespołowym 2014. Zadanie, pomimo prostej treści i (jak się za chwilę przekonamy) całkiem prostego rozwiązania, sprawiło sporo kłopotów drużynom startującym w zawodach i ostatecznie zostało rozwiązane tylko przez jedną z nich.

Dany jest prostokąt o parzystych wymiarach $n \times m$ podzielony na nm kwadratów jednostkowych, z którego wycięto f kwadratów 2×2 . Wycięte kwadraty nie są rozmieszczone zbyt gęsto – środki każdego z nich są oddalone o co najmniej 6, a ponadto środek każdego kwadratu jest oddalony o co najmniej 3 od brzegu prostokąta. Należy znaleźć cykl przechodzący dokładnie raz przez wszystkie niewycięte kwadraty jednostkowe (patrz rys. 1).

Powyższe zadanie może być wyrażone w języku teorii grafów. Jeśli rozważymy graf, w którym wierzchołkami są nieusunięte kwadraty jednostkowe, a krawędzie łączą kwadraty jednostkowe mające wspólny bok, to zadanie polega na znalezieniu w tym grafie cyklu Hamiltona (czyli takiego, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz). Nie jest tajemnicą, że w pełnej ogólności (tzn. jeśli chcemy znaleźć algorytm dający rozwiązanie dla dowolnego grafu) jest to problem NP-zupełny, nie jest więc znane jego efektywne rozwiązanie. Musimy więc skorzystać z tego, że graf z naszego zadania ma specjalną postać. (W szczególności jest planarny, ale to nam nie wystarczy, gdyż znajdowanie cyklu Hamiltona w dowolnym grafie planarnym jest również NP-zupełne.)

Na początek rozważmy prostszy wariant zadania, w którym środek każdego wyciętego kwadratu jest oddalony od brzegów prostokąta o nieparzystą liczbę. Innymi słowy, jeśli posklejamy wszystkie kwadraty jednostkowe w kawałki o rozmiarach 2×2 , to każdy z takich kawałków będzie w całości wycięty lub nie. W każdym niewyciętym kawałku umieszczamy cykl o długości 4 (rys. 2). Następnie tworzymy graf, którego wierzchołkami są kawałki (połączone krawędzią, jeśli mają wspólny bok) i znajdujemy w nim dowolne drzewo rozpinające. Porównując oba rysunki, nietrudno zauważyć, jak za pomocą tego drzewa połączyć małe cykle, by dały rozwiązanie. Złożoność czasowa rozwiązania to $O(nm + f)$.

Rozwiązując zadanie bez uproszczeń, będziemy musieli dopuścić podział prostokąta na trochę mniej regularne kawałki. Wycięte kwadraty oddalę od brzegów prostokąta o parzystą liczbę umieścimy w kawałkach rozmiaru 4×4 , natomiast wycięte kwadraty oddalę od brzegów o liczby o różnej parzystości umieścimy w kawałkach 4×6 lub 6×4 (rys. 3). Założenia o odległościach pomiędzy środkami wyciętych kwadratów wystarczają do tego, aby nasze kawałki nie nachodziły na siebie. Dalsza część rozwiązania z budowaniem drzewa rozpinającego i łączeniem cykli jest analogiczna.

Zadanie ma prostsze rozwiązanie. Na początek wypełniamy pełny prostokąt „kaloryferem”, jak na rysunku 4 (cykl przechodzi przez kwadraty jednostkowe położone wzdłuż lewego brzegu, a następnie kolejnymi wierszami, zmieniając kierunek).

Następnie wycinamy kolejne kwadraty, za każdym razem poprawiając cykl lokalnie. Na rysunku 5 są przedstawione trzy przypadki, które musimy w tym celu rozważyć. W pierwszym z nich odległość środka wyciętego kwadratu od górnego brzegu prostokąta jest nieparzysta, w pozostałych przypadkach jest parzysta (ostatni przypadek występuje, gdy odległość od lewego brzegu jest równa 3).

Co ciekawe, jeśli zwiększymy do 4 minimalną odległość środków wyciętych kwadratów od brzegów prostokąta, to rozwiązanie stanie się jeszcze prostsze i nie tylko dlatego, że odpadnie nam trzeci przypadek, ale też z uwagi na alternatywną implementację. Wycinamy wszystkie kwadraty, a następnie, zaczynając od lewego dolnego rogu, budujemy cykl zachłannie, zawsze wykonując pierwszy możliwy ruch z następującej listy: góra, prawo, lewo, dół. Czytelnicy zechcą sprawdzić, że dla prostokąta z rysunku 5 (w którym nie wycinamy dolnego kwadratu) algorytm lokalnie poprawiający cykl i algorytm zachłanny dają taki sam wynik.

Tomasz IDZIASZEK



Modelowanie fikcji: inwazja zombie

Grzegorz KOSIOROWSKI*

Najbardziej zachęcającym aspektem uprawiania matematyki (oczywiście, poza niezaprzeczalnym pięknem matematycznych teorii) jest jej szeroka gama zastosowań i olbrzymia efektywność w modelowaniu świata rzeczywistego. Popularne jest nawet określenie „niepojęta skuteczność matematyki” (np. w pracy E. Wignera pod tożsamym tytułem *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*). Warto jednak pamiętać, że modelowanie matematyczne jest czymś więcej niż tylko wyjątkowo użytecznym młotkiem wbijającym kolejne gwoździe, na których opiera się nasze rozumienie wszechświata. Dzięki matematyce możemy modelować nie tylko to, co jest rzeczywiste (w jakimkolwiek tego słowa znaczeniu), ale też wszystko, co tylko potrafimy sobie wyobrazić.

Definicja 1. *Zombie* – powstały z grobu człowiek, obdarzony jedynie resztkami świadomości, którego instynkt zmusza do polowania na ludzi i przemieniania ich w kolejnych przedstawicieli swojego gatunku.

Definicja 2. *Inwazja* – jeden z podstawowych procesów ekologicznych polegający na zajmowaniu przez gatunki terytorium zajmowanego do tej pory przez przedstawicieli innych gatunków.

Artykuł ten poświęcony jest przykładowi, który ilustruje uniwersalność zastosowań matematyki: modelowaniu tzw. inwazji zombie – będącej popularnym tematem horrorów. Z praktycznego punktu widzenia zombie (często w przeciwieństwie do ludzi) są idealni do matematycznego modelowania, gdyż występują w dużych, podobnie zachowujących się grupach, działają praktycznie bez udziału świadomości i przemieszczają się bez widocznego celu, więc można zakładać, że czynią to w sposób losowy.

Model inwazji zombie zaczerpnięto z epidemiologii – „zombizm” został potraktowany jako choroba zakaźna. Opisuje on dynamikę zmian przynależności członków pewnej populacji do grup: zdrowych (lecz podatnych na infekcję), zarażonych chorobą zakaźną (zazombionych) i martwych. Same równania tworzone są na podstawie szacowanego prawdopodobieństwa kontaktu osoby zdrowej i zarażonej oraz prawdopodobieństwa zarażenia w przypadku takiego kontaktu. W modelach związanych z inwazją zombie pojawia się nowy element: osoby zaklasyfikowane jako zmarłe mogą powracać do modelu jako zarażone „zombizmem”. Pierwsze matematyczne modele inwazji zombie przedstawiła grupa studentów pod kierownictwem profesora Roberta J. Smith’a (to nie jest literówka, autor artykułu faktycznie nazywa się Smith? ze znakiem zapytania na końcu) z uniwersytetu w Ottawie w pracy *When zombies attack! Mathematical modelling of an outbreak of zombie infection* w 2009 roku. Niniejszy artykuł jest prezentacją wyników ich „badań”.



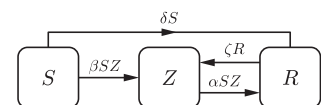
Center for Disease Control and Prevention, największa amerykańska agencja zajmująca się walką z epidemiami oraz klęskami żywiołowymi, opublikowała podręcznik z instrukcjami dotyczącymi zachowania się w sytuacjach kryzysowych i wcześniejszego przygotowania do nich na przykładzie... masowego pojawiania się zombie.



Układ równań różniczkowych opisujący model inwazji zombie:

$$\begin{cases} S' = -\beta SZ - \delta S, \\ Z' = (\beta - \alpha)SZ + \zeta R, \\ R' = \delta S + \alpha SZ - \zeta R. \end{cases}$$

1. Model podstawowy. Przez S oznaczamy liczbę ludzi niezarażonych, ale podatnych na „zombizm” (zakładamy, że nie ma ludzi, którzy są odporni na zarazę). Przez Z oznaczamy liczbę aktywnych, zarażających zombie, zaś przez R – liczbę zmarłych. Prawdopodobieństwo spotkania zombie i „zdrowego” człowieka jest proporcjonalne do iloczynu SZ . Współczynnik β odpowiada za prawdopodobieństwo tego, że w wyniku takiego spotkania człowiek zostanie zarażony, a α za prawdopodobieństwo tego, że zombie zginie (oczywiście, zgodnie z wiedzą, jaką wynosimy z horrorów, β jest znacząco większe niż α). Dodatkowo zakładamy, że ludzie mogą umierać z powodów niezwiązanych z inwazją (o umieralności decyduje parametr δ), a zmarli mogą przemieniać się w zombie (o czym decyduje parametr ζ). Wpływ przyrostu naturalnego ludzi został pominięty ze względu na założenie (pochodzące z „obserwacji”) o krótkim czasie trwania inwazji zombie.



Wnioski płynące z rozwiązania modelu nie są zbyt optymistyczne. Powstają dwa punkty równowagi odpowiadające sytuacji braku zombie oraz całkowitej zagłady ludzkości. Niestety, tylko ten drugi okazuje się być stabilny (prawie) niezależnie od wartości parametrów. Nawet jeżeli na świecie nie ma ani jednego zombie, w każdej chwili jakaś jednostka może powstać z grobu, rozpoczynając kolejną inwazję. Jeżeli ta się nie powiedzie i na świecie ponownie nie będzie ani jednego zombie, kolejna inwazja to tylko kwestia czasu. Która inwazja w końcu będzie

*Wydział Finansów,
Katedra Matematyki,
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie



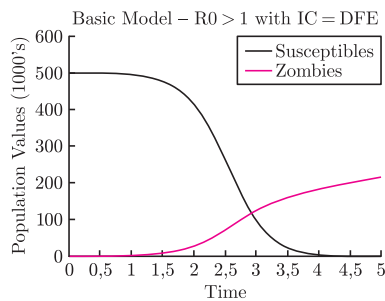
skuteczna... Zatem zombie i ludzie w tym scenariuszu nie mogą współistnieć. Praktycznie pewne jest, że w końcu zombie zainfekują wszystkich ludzi.

Jednakże utwory na temat zombie dostarczają szerokiej palety rozwiązań problemu: od kwarantanny, przez znalezienie lekarstwa, po bezpośrednią walkę zbrojną z potworami. Warto też uwzględnić, że ludzie nie muszą stawać się zombie natychmiast. Może któreś z tych założeń pozwoli ludzkości przetrwać apokalipsę?

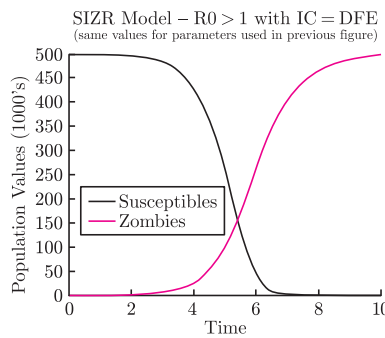
2. Modele rozbudowane. Pierwszą poprawką do modelu podstawowego jest wprowadzenie nowej kategorii: I , czyli zainfekowanych. Zgodnie z zasadami większości filmów ludzie zaatakowani przez zombie przez pewien okres podlegają stopniowej przemianie, w trakcie której nie są jeszcze zagrożeniem dla innych. Zainfekowani nadal mogą umrzeć, zanim zmienią się w zombie (z tym samym prawdopodobieństwem δ). W innym przypadku przechodzą do grupy Z (z parametrem ρ) odpowiadającym za prędkość przemiany.

Model inwazji zombie rozszerzony o grupę zainfekowanych:

$$\begin{cases} S' = -\beta SZ - \delta S, \\ I' = \beta SZ - (\rho + \delta)I, \\ Z' = \rho I - \alpha SZ + \zeta R, \\ R' = \delta(S + I) + \alpha SZ - \zeta R. \end{cases}$$



Model podstawowy



Model z opóźnioną przemianą

Model inwazji zombie rozszerzony o kwarantannę:

$$\begin{cases} S' = -\beta SZ - \delta S, \\ I' = \beta SZ - (\rho + \delta + \kappa)I, \\ Z' = \rho I - \alpha SZ - \sigma Z + \zeta R, \\ R' = \delta(S + I) + \alpha SZ - \zeta R + \gamma Q, \\ Q' = \kappa I + \sigma Z - \gamma Q. \end{cases}$$

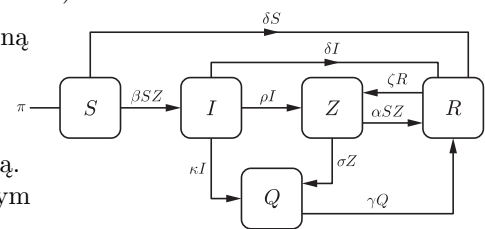
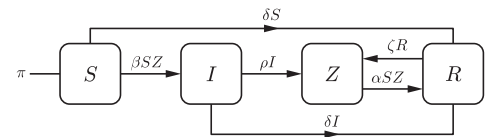


Analizując dynamikę układu, znów otrzymujemy dwa punkty równowagi: odpowiadający za zupełny brak zombie i za kompletną zagładę ludzkości. Niestety, znów tylko ten drugi okazuje się być stabilny, czyli i w tym przypadku zombie w końcu zainfekują wszystkich. Dzieje się to jednak wolniej niż w modelu podstawowym, co można zaobserwować na wykresach (użyto parametrów: $\alpha = 0,005$, $\beta = 0,0095$, $\zeta = 0,0001$, $\delta = 0,0001$, $\rho = 0,005$).

W każdym z przykładów w chwili $t = 0$ populacja ludzi liczy 0,5 mln, natomiast zombie nie występują. W modelu podstawowym po czasie $t = 4,5$ nie ma już żywego człowieka. Natomiast w modelu opóźnionym ludzki gatunek wymarł po czasie 6,5.

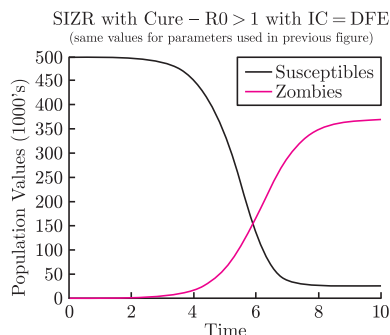
Dodajmy do modelu kolejny element – kwarantannę – być może to pomoże w ocaleniu ludzkości. Ludzie zainfekowani lub zmienieni w zombie mogą być poddani kwarantannie, czyli usunięci z populacji i niezdolni zarażać. Tę grupę oznaczamy przez Q . Za możliwość schwytania i umieszczenia pod kwarantanną osób niebezpiecznych odpowiadają parametry σ i κ . Z kolei parametr γ oznacza prawdopodobieństwo podjęcia próby ucieczki spod kwarantanny. By spojrzeć na sprawę optymistycznie, zakłada się, że teren kwarantanny jest chroniony idealnie, więc wszystkie próby ucieczki kończą się śmiercią (przy czym zabici w ten sposób też mogą powrócić jako zombie).

Punkty równowagi modelu z kwarantanną nie różnią się od poprzednich. Są nimi: kompletny brak zombie oraz zupełny brak zdrowych ludzi. Ale tym razem stabilność jest bardziej delikatną kwestią. Okazuje się, że brak zombie jest stabilnym punktem równowagi wtedy i tylko wtedy, gdy tzw. współczynnik reprodukcji $R_0 = \frac{\beta N \rho}{(\rho + \kappa)(\alpha N + \sigma)}$ jest mniejszy od 1 (dla dużych N – liczby niezainfekowanych – można użyć przybliżenia $R_0 \approx \frac{\beta \rho}{(\rho + \kappa)\alpha}$). W innym przypadku stabilnym punktem stałym jest zagłada.



Model inwazji zombie z możliwością wyleczenia:

$$\begin{cases} S' = -\beta SZ - \delta S + cZ, \\ I' = \beta SZ - (\rho + \delta)I, \\ Z' = \rho I - \alpha SZ - cZ + \zeta R, \\ R' = \delta(S + I) + \alpha SZ - \zeta R. \end{cases}$$



Przykładowe wyniki modelu z leczeniem.



Rozwiązanie zadania F 876.

Ponieważ na płytę nie działa żadna (niepominięta w modelu) pozioma siła zewnętrzna, to pozioma współrzędna położenia środka masy nie może się zmienić. Suwak znajdzie się dokładnie nad środkiem masy, gdy ruch płyty ustanie.

W chwili zwolnienia elektromagnesu wartość przyspieszenia suwaka a (które jest skierowane poziomo) musi być taka sama jak wartość (skierowanego pionowo) przyspieszenia środka masy (dlaczego?). W takim razie chwilowym punktem obrotu jest punkt znajdujący się pod zawieszaniem na wysokości środka masy płyty. Moment bezwładności płyty względem tego punktu jest równy

$$I_O(x) = I(x) + m\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{5}{12}mx^2.$$

Rozpatrując obrót wokół tego punktu, uzyskujemy warunek $I_O(x)\varepsilon = mg\frac{x}{2}$, natomiast rozpatrując obrót wokół środka masy mamy $I(x)\varepsilon = F_1\frac{x}{2}$. Porównując te

warunki, otrzymujemy $F_1 = \frac{2}{5}mg$,

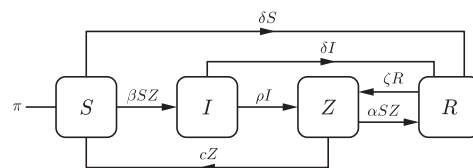
a z równania, opisującego ruch w kierunku pionowym mamy

$$ma = mg - F_1, \text{ wyznaczamy } a = \frac{3}{5}g,$$

czyli również wartość początkowego przyspieszenia suwaka.

Przy rozwiązywaniu takiego zadania łatwo się pomylić, rozpatrując obrót wokół punktu, który jest poddany przyspieszeniu \bar{a} , bez uwzględnienia siły bezwładności $-m\bar{a}$ przyłożonej do środka masy. Siła taka nie wiąże się z dodatkowym momentem siły jedynie gdy rozpatrywanym punktem jest środek masy (co zostało wykorzystane w rozwiązaniu), lub punkt przyspiesza w kierunku środka masy. Łatwo zauważyć, że wszystkie punkty, dla których nie ma dodatkowego momentu siły, leżą na okręgu, którego średnicą jest odcinek między chwilowym punktem obrotu a środkiem masy.

W kolejnym modelu zapominamy o kwarantannie. Zresztą nie jest już potrzebna, gdyż tym razem naukowcy wynaleźli możliwe do natychmiastowego wyprodukowania lekarstwo na „zombizm”. Skoro dysponujemy lekarstwem,



nie potrzebujemy kwarantanny, ponieważ leczymy wszystkich, których moglibyśmy odosobnić. Wyleczone zombie stają się na powrót ludźmi (szansę na to oznaczamy przez c), lecz wciąż są podatne na ponowne zarażenie. Nieco optymistyczne jest założenie, że wyleczyć można każdego, niezależnie od tego, w jaki sposób został zombie i w jakim jest stanie.

Jest to pierwszy model, w którym ludzie i zombie mogą współistnieć. Dzięki składnikowi cZ stabilnym punktem równowagi tego układu jest:

$$(\tilde{S}, \tilde{I}, \tilde{Z}, \tilde{R}) = \left(\frac{c}{\beta}, \frac{c}{\rho} \tilde{Z}, \tilde{Z}, \frac{\alpha c}{\zeta \beta} \tilde{Z} \right).$$

Jak widać liczba ludzi, którzy będą koegzystować z zombie, zależy głównie od efektywności leczenia: c . Według przewidywań liczba ta byłaby niewielka (patrz wykres).

Ponieważ wszystkie „pokojowe” metody pozostawiają ludzkość w sytuacji nie do pozazdroszczenia (albo ludzie wymrą doszczętnie, albo zostanie garstka koegzystująca z zombie), zdecydowanie zalecane są metody „niepokojowe”. Załóżmy, że po zgromadzeniu odpowiedniej ilości zasobów (np. broni, amunicji, przeszkoleniu żołnierzy) ludzkość może wykonać strategiczny kontratak, niszcząca część populacji zombie. Pomiędzy atakami musi upłynąć trochę czasu, by uzupełnić zasoby i skoordynować działania. W każdym ataku ludzkość musi zniszczyć (procentowo) coraz więcej zombich. Analiza wszystkich scenariuszy doprowadziła autorów do wniosku, że w przypadku ataku zombie trzeba działać szybko i agresywnie, jeśli ludzkość ma przetrwać.

Warto zwrócić uwagę również na inne naukowe podejścia do tematyki zombie. Np. w *Is It Safe To Go Out Yet? Statistical Inference in a Zombie Outbreak Model*, na podstawie modeli z przytoczonej pracy autorzy B. Calderhead, M. Girolami, D.J. Higham, próbują z wykorzystaniem metod statystycznych obliczyć optymalny moment opuszczenia kryjówki w zależności od obserwacji liczby zombie w okolicy. Z kolei A. Chodorow w pracy *Death and Taxes and Zombies* bada prawno-podatkowe konsekwencje pojawienia się nieumarłych (przede wszystkim zombie, ale też wampirów), dochodząc do milego politykom wniosku, że śmierć nie powinna być podstawą do uniknięcia opodatkowania i zombie również powinny się dołożyć do „umowy społecznej”.

Czy wszystko to, co opisałem, jest tylko matematyczną zabawką, bez żadnych zastosowań (oczywiście, jeżeli nie wierzymy w ewentualność takiej inwazji)? Okazuje się, że nie do końca. Podobnymi modelami, w których „usunięci z zakresu zainteresowań” mogą do modelu powracać, można opisać choroby przechodzące w postać uszpioną, takie jak wirusowe zapalenia wątroby i niektóre grzybice. Takie sytuacje mogą też zachodzić w modelach niezwiązanych z medycyną, takich jak dynamika organizacji społecznych (np. partii politycznych). Jednakże sam Robert J. Smith? zwrócił uwagę na najbardziej spektakularne znaczenie swojego artykułu: pobudzanie zainteresowania matematyką i matematycznym modelowaniem wśród szerokiej publiczności. Informacje o matematykach badających inwazję zombie pojawiły się we wszystkich najbardziej znanych amerykańskich i kanadyjskich gazetach. Smith? twierdzi, że otrzymał tysiące wiadomości tylko o szkolnych projektach matematycznych zainspirowanych tą pracą, nie mówiąc już o pojedynczych osobach zachęconych do tak niebanalnej nauki. Powinno to stawiać twórców programu szkolnej matematyki i nauczycieli przed niepokojącym pytaniem: jak bardzo przerażająca musi być dla uczniów matematyka, skoro dopiero towarzystwo zombie czyni ją bardziej przyjazną i interesującą?



Kryptarytm z *Delty* 12/2014 rozwiązany

Rozwiązania było wiele, a konkretnie dwanaście:

$29\ 429 + 847\ 109 = 876\ 538$
 $19\ 419 + 846\ 309 = 865\ 728$
 $14\ 314 + 835\ 964 = 850\ 278$
 $49\ 249 + 827\ 109 = 876\ 358$
 $64\ 064 + 807\ 294 = 871\ 358$
 $13\ 413 + 645\ 293 = 658\ 706$
 $43\ 243 + 627\ 853 = 671\ 096$
 $17\ 617 + 468\ 307 = 485\ 924$
 $82\ 082 + 409\ 652 = 491\ 734$
 $31\ 431 + 247\ 651 = 279\ 082$
 $41\ 341 + 237\ 561 = 278\ 902$
 $76\ 176 + 219\ 306 = 295\ 482$

Pierwszych piętnastu Czytelników, którzy prawidłowo wskazali największy sukces, otrzymali od Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Wrocławskiego pamiątkowe koszulki.

Oto oni (w kolejności nadsyłania rozwiązań):

Ewa Kamińska, Warszawa
Andrzej Bartz, Fürth, Niemcy
Marian Maciocha, Wrocław
Józef Wieteska, Warszawa
Anna Kadłubowska, Łomża
Wojciech Przybyszewski, Skierniewice
Adrian Koźluk, Szczecin
Jakub Madej, Kraków
Mateusz Janczura, Kraków
Marek Spychała, Warszawa
Kinga Wasilewska, Grudziądz
Arkadiusz Lewandowski, Poznań
Justyna Świdorska, Wrocław
Maciej Czerwiński, Kielce
Marcin Kucharski, Siekierczyn

Zwycięzcom gratulujemy, tym bardziej że zadanie nie okazało się łatwe – liczba rozwiązań niepoprawnych była prawie równa liczbie rozwiązań prawidłowych.

Redakcja

Czytać każdy może

... jeden lepiej, a drugi trochę gorzej... co jest lekko zmienionym świetnym tekstem Jonasza Kofty o śpiewaniu. Rzeczywiście, władza ludowa wypeniła w Polsce zjawisko analfabetyzmu i wydawało się, że odtąd wystarczy już wydawać gazety i książki i cały naród (teraz się mówi „społeczeństwo”) będzie wiedział wszystko, co należy. Jeżeli były też jakieś wiadomości mniej zalecane, to jeszcze były wydawnictwa drugiego obiegu i nadal życie społeczeństwa biegło w porządku właściwego uświadomienia.

Aż tu nastąpiło nowe i okazało się, że *mogę czytać* nie oznacza *czytam*. A zaczęło się, jak to bywa, gdy się dobrze przyjrzeć czemuś, od szkoły.

W szkole istniały od zawsze obowiązkowe lektury. Póki nie było Internetu, to też można było bardziej lub mniej zrećcznie przymusić ucznia do przeczytania *Eyska z pokładu Idy* – bo zdobycie streszczenia zajmowało mniej więcej tyle samo czasu, ile przeczytanie. Na starych maturach (taką ja zdawałam, sprzed *n*-tych prób reformowania) pisało się eseje. Ja pisałam jakiś temat w oparciu o polską poezję! Tzw. konia z rżędem temu, kto potrafi napisać 10 stron formatu A4 bez przeczytania poezji!

Szkolne lektury umiejętnie zniechęcały do czytania w ogóle i często wśród moich rówieśników słyszałam opinie: po co inżynierowi jakieś lektury, ja już czytać nie muszę. I mamy jak mamy – statystyczny Polak nie czyta, nawet jeżeli pozwolimy mu za książkę uznać instrukcję włączania dekodera.

Co słyhać w szkołach? Tam się nadal reformuje, więc nie jestem na bieżąco, ale wiem, że nauczyciele zyskali dużo swobody w wyborze zalecanych lektur. Oprócz lektur „z gwiazdką”, które czytane być muszą. Zapytano też w dużej, statystycznie istotnej ankiecie samych uczniów – co chcą, a czego nie chcą czytać. W szkołach podstawowych zwycięzca „na tak” jest oczywisty i bezdyskusyjny: *Harry Potter*. Ale te dzieci jeszcze nie zostały przez dorosłych do końca opanowane, więc nie wiedzą, czego się od nich oczekuje. Na liście książek (po 6) „na nie” znaleźli się *Chłopcy z placu broni* oraz *Akademia Pana Kleksa*. Wśród sześciu książek lubianych figurują, a jakże, *Chłopcy z placu broni* i *Akademia Pana Kleksa*.

Dwunastolatki chcą czytać *Magiczne drzewo*, *Igrzyska śmierci*, *Zmierzch*, książki, których nie było, gdy ja czytałam polską poezję wszechpok.

W liceach lepiej niż w podstawowych – listy się nie pokrywają. Nie chce nasza młodzież czytać *Pana Tadeusza*. Nie chce *Dziadów*, *Lalki* i *Potopu*. Nauczycielka ze społecznej, stołecznej szkoły mówi, że chcą czytać książki niejednoznaczne – takie, o których można dyskutować i bronić różnych interpretacji. To może być... *Proces*. Mówi, że ta książka nigdy jej nie zawiodła, bo na inne przychodzą i odchodzą mody.

Są w tym czytaniu pewne ogólne prawidłowości. Niektóre zadziwiające, jak ta, że dzieci czytają chętniej w domu, w którym czyta tata (mój inżynier sprzed wielu lat?). Zasadą oczywistą jest, że dzieci czytają tam, gdzie są w domu książki. Więcej, znacznie więcej czytają dzieci miejskie – dostęp do książek w domu wiejskim jest jeszcze ograniczony (20% gimnazjalistów na wsi w ogóle nic nie czyta), a biblioteka daleko. Ciekawe pytanie w trakcie spotkania o czytaniu zorganizowanego przez Centrum Edukacji Obywatelskiej (Projekt Szkoła z Klasą 2.0), które wywarło na mnie wielkie wrażenie, zadała Pani Irena Koźmińska, pomysłodawczyni już europejskiego ruchu „Cała Polska (Słowacja, Węgry itd.) czyta dzieciom”. Pytanie brzmiało: co to znaczy czyta? Padło kilka odpowiedzi, ale Pani Irena wolała swoją: czyta się wtedy, kiedy się zna swój język, kiedy się MÓWI!

Może to o to chodzi?

Magdalena FIKUS

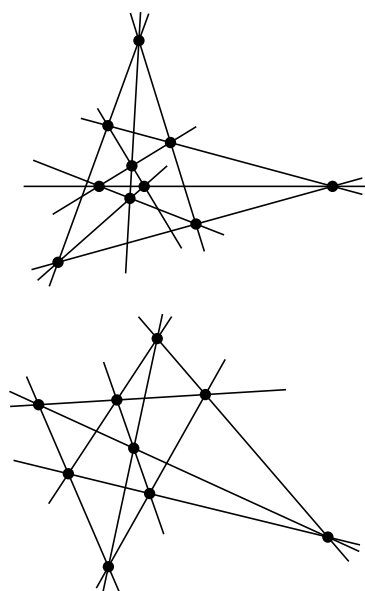
Dowód w stylu greckim

Marek KORDOS

Rozpowszechnione jest przeświadczenie, że znaczna część dowodów geometrycznych prowadzonych przez mędrców Złotego Wieku Grecji, a więc czasów po zwycięskich wojnach perskich i kojarzących się nam np. z Peryklosem, wyglądała tak, iż był to rysunek ze słownym komentarzem: *Patrz*. Niezależnie od podziwu dla intelektualnej estetyki takich dowodów podejrzewamy, że dotyczyły one problemów mało skomplikowanych, rozumowań wymagających jednego kroku myślowego.

Tutaj chciałem przedstawić taki „grecki” dowód twierdzenia, które zostało odkryte dopiero po 250 latach od postawienia problemu.

Zapewne część z Czytelników pamięta problem posadzenia dziesięciu drzew w dziesięciu rzędach po trzy w każdym rzędzie i dziewięciu drzew w dziewięciu rzędach po trzy w każdym rzędzie. Przykładowe rozwiązania (a jest ich wiele) przedstawia rysunek 1. Problemy te zajmują poczesne miejsce w matematyce ze względu na rolę, jaką odgrywają w geometrii rzutowej, ale tym razem tę sprawę pominiemy. Matematyka w nich zawarta zasadza się w tym, że rysunek spełniający podane warunki można wykonać bardzo łatwo i to na bardzo wiele różnych sposobów. Oto oryginalne przepisy twórców stosownych twierdzeń.



Rys. 1. Przykładowe konfiguracje Desarguesa i Pascala.

	x	x			x			
x		x					x	
x	x							x
			x	x	x			
			x	x				x
x		x						x
	x		x					x
		x		x				x
						x	x	x

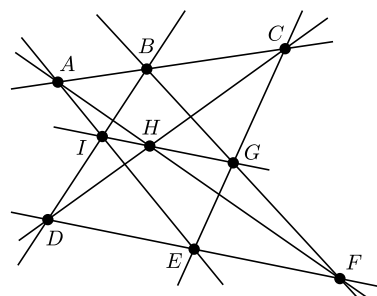
Inaczej narysowana konfiguracja Desarguesa: kolumny to punkty, wiersze to proste, znak \times w i -tej kolumnie i j -tym wierszu oznacza, że i -ty punkt leży na j -tej prostej.

		x	x			x		
x				x	x			x
x						x	x	
		x	x	x				
	x		x					x
x		x				x		x
		x		x				x
						x	x	x

A to tak samo narysowana konfiguracja Pascala.

Aksjomatyka geometrii rzutowej to

- przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta,
- każde dwie proste mają punkt wspólny,
- istnieje czworokąt.



Rys. 2

Twierdzenie Girarda Desarguesa. *Jeśli dwa trójkąty mają środek perspektywiczny, to mają też oś perspektywiczną.*

Twierdzenie Blaise’a Pascala, często również nazywane imieniem Pappusa. *Punkty przecięcia przeciwnych boków sześciokąta wpisanego w dwie proste przecinają się na jednej prostej.*

Objaśnienia: mówimy, że trójkąty $A_1A_2A_3$ i $A'_1A'_2A'_3$ mają środek perspektywiczny, jeśli proste $A_iA'_i$, dla $i = 1, 2, 3$, mają punkt wspólny; mówimy, że mają one oś perspektywiczną, gdy punkty przecięcia prostych A_iA_j i $A'_iA'_j$, dla $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, leżą na jednej prostej. Sześciokąt wpisany w dwie proste to taki, którego kolejne wierzchołki leżą na innej z nich. Ponadto zakładamy, że dowolne proste przecinają się, co wymaga uzupełnienia płaszczyzny euklidesowej do rzutowej, ale wszystko, o czym będzie dalej mowa, będzie poprawne, jeśli ograniczymy się do sytuacji, w których prostych równoległych nie będzie.

Jak to się ma do konfiguracji w rysunku 1? Otóż, można na pierwszej z nich obrać dowolny punkt i odnaleźć na niej dwa trójkąty, dla których jest on ich środkiem perspektywnym i prostą, która jest ich osią perspektywiczną. Podobnie druga konfiguracja wskazuje na możliwość swobodnego potraktowania jej jako ilustracji twierdzenia Pascala.

Pascal i Desargues ogłosili swoje twierdzenia niemal równocześnie. Powstał problem, czy przypadkiem jedno z nich nie implikuje drugiego w geometrii rzutowej. Po dwustu latach okazało się, że z twierdzenia Desarguesa nie wynika twierdzenie Pascala (w płaszczyźnie rzutowej nad kwaternionami jest Desargues, a nie ma Pascala). Po następnym pół wieku Gerhard Hessenberg udowodnił, że z twierdzenia Pascala wynika twierdzenie Desarguesa. I właśnie dowód tego faktu można przedstawić w czysto greckim stylu.

Najpierw formalne wprawki. Konfigurację Pappusa będziemy oznaczać w następujący, zaproponowany przez Coxetera, sposób:

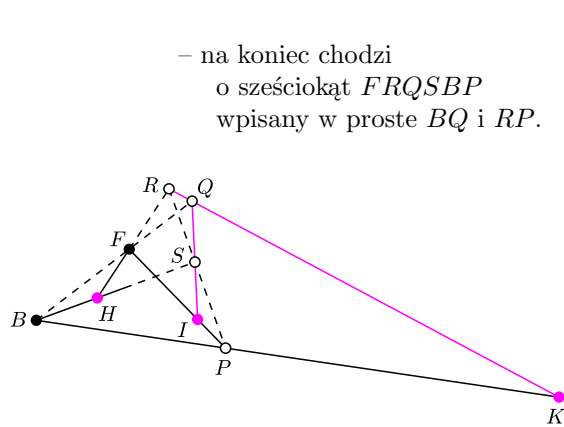
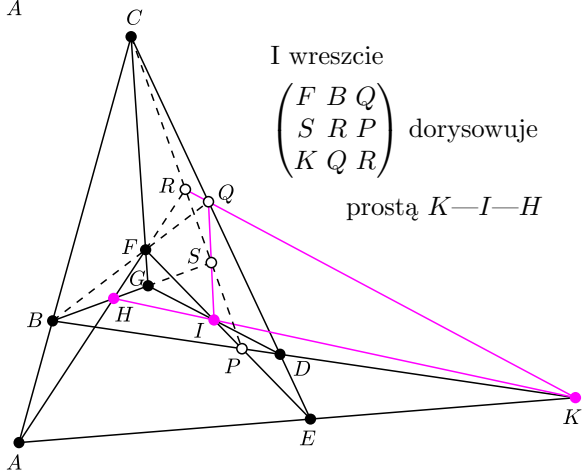
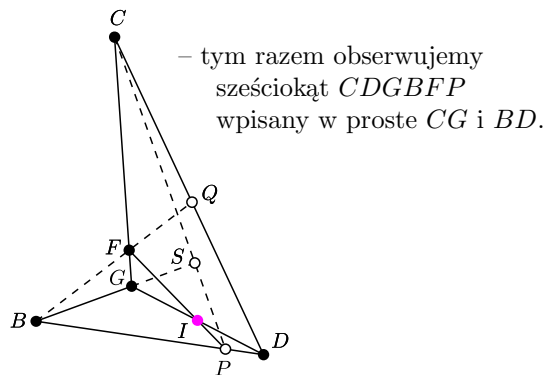
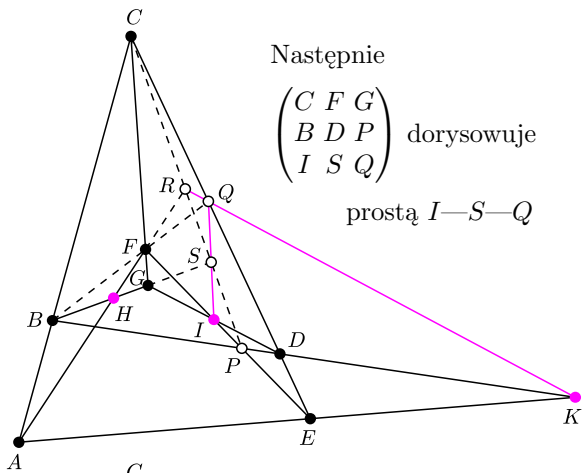
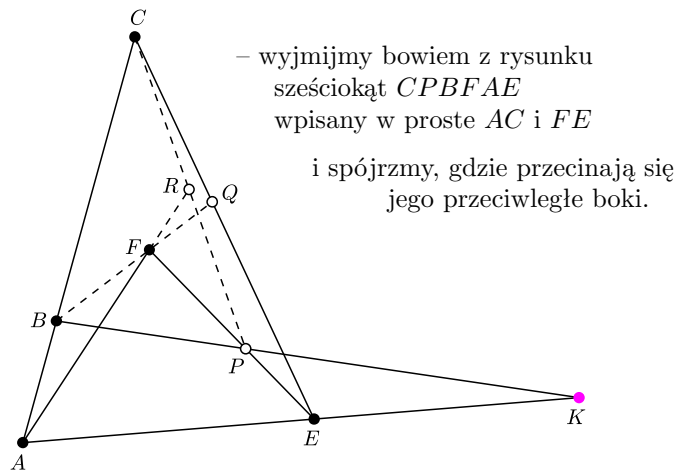
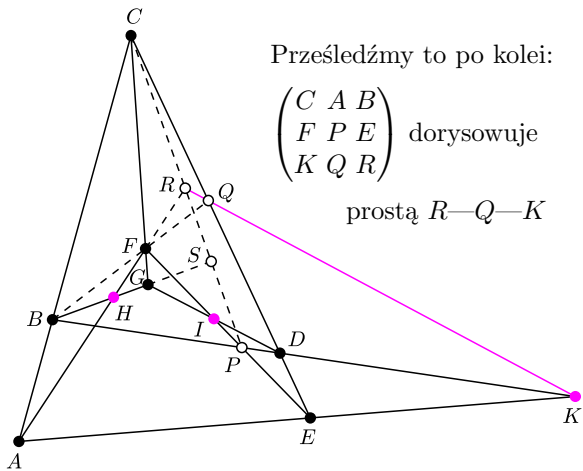
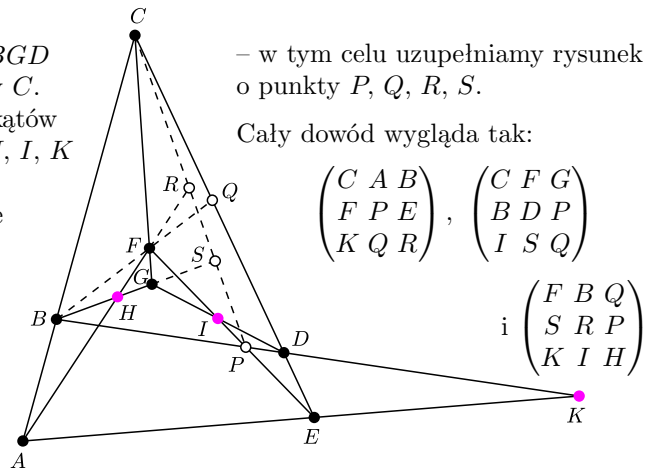
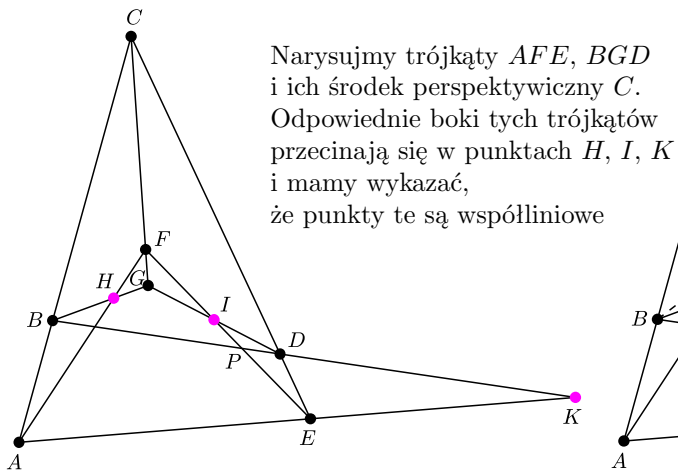
$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}$$

– jeśli punkty w pierwszym i drugim wierszu są współliniowe, oraz zachodzi „wyznacznikowa” zależność między ich elementami (czyli „przekątne” kolorowego prostokąta przecinają się w kolorowym punkcie trzeciego wiersza)

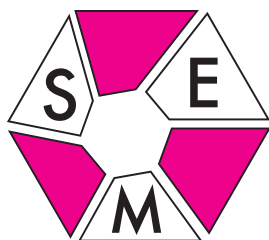
$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix},$$

to punkty w trzecim wierszu też są współliniowe (rys. 2).

A teraz zapowiadany dowód.



Odpowiednie boki trójkątów przecinają się na jednej prostej, co kończy dowód – prawda, że był grecki?



Siłą czy sposobem? VII konferencja SEM

W dniach 24–26 października 2014 roku odbyła się kolejna – siódma już – konferencja organizowana przez Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej. Konferencja była okazją do spotkania się osób z różnych środowisk zaangażowanych w edukację matematyczną, popularyzację matematyki i pracę z młodzieżą uzdolnioną matematycznie. Do Ameliówki koło Kielc przyjechało około 180 nauczycieli matematyki i pracowników wyższych uczelni. Tytuł konferencji skłaniał do zastanowienia się nad różnymi sposobami rozwiązywania zadań i problemów matematycznych. Czasem zauważenie pewnej zależności, dorysowanie odpowiedniej „kreski”, czy właściwe pokolorowanie rysunku powoduje, że zadanie, które wydaje się trudne i wymaga wielu rachunków, staje się proste, krótkie i przyjemne. Wszyscy lubimy takie rozwiązania – wywołują one efekt zaciekawienia, zadziwienia i zachwyty. O takich „sposobach” rozwiązywania trudnych zadań matematycznych mówili prelegenci. Mówiono również sporo o potrzebie uczenia rzetelnego rzemiosła matematycznego, niezbędnego w rozwiązywaniu problemów. Konferencja pokazała po raz kolejny, jak bardzo potrzebne są tego rodzaju spotkania osób z różnych środowisk zainteresowanych pokazywaniem piękna matematyki.

25 października wieczorem odbyło się Walne Zgromadzenie członków SEM. Wybrano nowe władze SEM na kadencję 2014–2019. Przewodniczącym Zarządu SEM został ponownie wybrany Krzysztof Chełmiński, a członkami Zarządu SEM zostali: Irena Brzozowska, Andrzej Fryszkowski, Renata Juraszińska, Michał Krych, Artur Miśkiewicz, Barbara Roszkowska-Lech i Tomasz Szymczyk.

W trakcie wykładów zaprezentowano sporo ciekawych problemów i zadań do wykorzystania w pracy z uczniami w szkole i na zajęciach pozalekcyjnych. Odpowiedź na pytanie *siłą czy sposobem?* wydawała się oczywista: *siłą i sposobem!* Zaprezentowano wiele interesujących przykładów rozwiązań zadań, prezentujących zarówno „siłę”, jak i „sposób”.

Zachęcając wszystkich zainteresowanych do zapoznania się z programem i materiałami z konferencji na stronie <http://sem.edu.pl/konferencja-2014>, przedstawiamy jedno z zadań, z wykładu *Wiele jest dróg*.

Zadanie. Znaleźć najmniejszą wartość funkcji

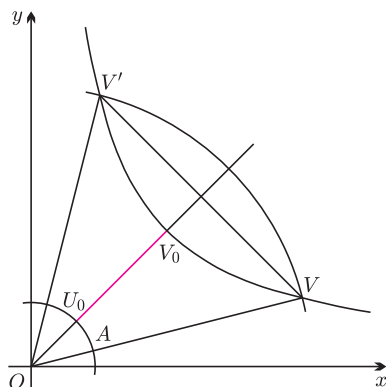
$$f(u, v) = (u - v)^2 + \left(\sqrt{2 - u^2} - \frac{9}{v} \right)^2,$$

dla $0 < u < \sqrt{2}$, $v > 0$.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że $f(u, v)$ to kwadrat odległości między punktami $U = (u, \sqrt{2 - u^2})$ oraz $V = (v, \frac{9}{v})$.

Pierwszy punkt leży na okręgu o zadanym równaniem $x^2 + y^2 = 2$ (a dokładniej na jego części znajdującej się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych), a drugi na gałęzi hiperboli $y = \frac{9}{x}$, dla $x > 0$. Aby znaleźć najmniejszą wartość funkcji f , wystarczy znaleźć odległość okręgu $x^2 + y^2 = 2$ od hiperboli $y = \frac{9}{x}$. Niech V będzie wybranym punktem na hiperboli, a punkt A punktem przecięcia o z odcinkiem OV , gdzie O jest środkiem układu współrzędnych (patrz rysunek). Odległość punktu V od o jest równa długości odcinka AV . Niech punkt V' będzie symetryczny do V względem prostej $y = x$. Odległość V od o jest równa odległości V' od o . Ponadto, z wypukłości funkcji $y = \frac{9}{x}$ dla $x > 0$ wynika, że punkt $V_0 = (3, 3)$ znajduje się po przeciwnej stronie prostej VV' niż łuk okręgu o środku w punkcie O i promieniu równym długości odcinka OV łączący punkty V i V' (patrz rysunek). Zatem odległość V_0 od o jest mniejsza niż odległość V od o . Z dowolności V wynika, że najmniejsza wartość funkcji $f(u, v)$ jest równa kwadratowi długości odcinka V_0U_0 , gdzie $U_0 = (1, 1)$, czyli 8.

Zadanie pochodzi z amerykańskiego konkursu *Putnam Competition* z 1984 roku i można je rozwiązać, wykorzystując rachunek różniczkowy funkcji dwóch zmiennych.



Krzysztof CHEŁMIŃSKI i Barbara ROSZKOWSKA-LECH

Ostatnia taka randka w ciemno

Przygotowania będą zgodnie z planem. Schłodzony już został hel, i to aż do nadciekłości (styczeń 2015), w największej i najzimniejszej lodowce znanego wszechświata. Pierwsze wiązki protonów o energii 6,5 TeV spodziewane są tuż po ukazaniu się tego numeru *Delty*, a pierwsze zderzenia przy 13 TeV mają zajść dwa miesiące później.

LHC budzi się z dwuletniej śpiączki farmakologicznej, w czasie której przeprowadzono kompleksową operację chirurgiczną, która ma pozwolić na użycie tych nigdy wcześniej w kontrolowanych warunkach nieosiągniętych energii.

Newralgiczne są magnesy dipolowe zginające tory protonów w lekko graniaste kółko o obwodzie 27 kilometrów. Budzenie kolosa będzie przeprowadzane powoli i ostrożnie. W szczególności nadprzewodzące uzwojenia dipoli muszą się ułożyć (zaciśnąć) poprzez wielokrotne napełnianie prądem o coraz wyższym natężeniu.

Oprócz energii podniesiona zostanie tzw. świetlnosc, czyli liczba zderzeń w jednostce czasu. Ma to być osiągnięte, między innymi, poprzez zmniejszenie odległości między paczkami protonów z 15 metrów (50 ns) do 7,5 metra (25 ns), czyli do wartości pierwotnie zaprojektowanej. W takim modzie pracy LHC, zanim wtórne miony opuszczą detektor (miony to jedyne cząstki naładowane, które nie grzęzną w materii detektora oraz mają wystarczająco długi do jego opuszczenia czas życia), pojawią się w nim cząstki powstałe w kolejnym przecięciu wiązek, czyli w kolejnych kilkudziesięciu zderzeniach proton-proton.

Będzie to rejestrowane przez do stu tysięcy kanałów elektroniki na detektor i analizowane w czasie rzeczywistym, w celu wybrania kilkuset najbardziej interesujących spośród kilkudziesięciu milionów przypadków na sekundę.

Tak wyglądają przygotowania do *rendez-vous* z nową fizyką. Po raz pierwszy od bardzo dawna wkraczamy w zupełnie nieznaną obszar. Być może jest to ostatnia taka szansa, jeżeli nie ludzkości, to przynajmniej zaangażowanych w to przedsięwzięcie badaczy. Choć precyzyjne plany osiągnięcia jeszcze wyższych energii są bardzo zaawansowane, to ich finansowanie (mówiąc eufemistycznie) nie jest przesądzone. Inaczej niż w przypadku poszukiwania bozonu Higgsa, wcale nie jesteśmy skazani na chwytny sukces.

Maksimum prawdopodobieństwa *a priori* dostrzeżenia przesłanek ewentualnego odkrycia wypada za rok [1], czyli po przeanalizowaniu pierwszej solidnej porcji danych zebranych przy nowej energii. Następnie nadzieja będzie szybko gasnąć (choć – oczywiście – „względna chwilowa nadzieja warunkowa” pozostanie bliska jedności).

Bezpośrednie odkrycie czegoś nowego nie jest jedynym celem LHC. Równie ważne są precyzyjne pomiary, w tym badania bozonu Higgsa. Choć maszyna hadronowa nie jest idealnym do tego narzędziem, to innego nie mamy i długo mieć nie będziemy.

Czego i dlaczego możemy się spodziewać [2]?

Po pierwsze Model Standardowy (którego niedawno odkryty bozon Higgsa jest efektywnym zwieńczeniem) nie może być ostatnim słowem, bo np. nie posiada kandydata na ciemną materię czy nie wystarcza do wyjaśnienia ewidentnej asymetrii między materią i antymaterią (bez której materii, w tym nas, we wszechświecie by nie było).

Jednym z ciekawszych argumentów za niekompletnością Modelu Standardowego jest tzw. niestabilność próżni. Istotność tego problemu wynika z mierzonych wartości masy kwarku top oraz bozonu Higgsa. Po wstawieniu tej drugiej (niedawno zmierzonej) wielkości do obliczeń okazało się, że bez nowej fizyki przy skali energii około 10^{10} GeV (lub mniejszej) próżnia jest metastabilna, bo minimum potencjału (determinujące masy bozonów pośredniczących W^\pm i Z^0) jest tylko minimum lokalnym. W każdej chwili wszechświat może przetunelować do głębszego minimum, kończąc swoje istnienie w znanej nam postaci.

Z samej definicji randki w ciemno wynika, że nie wiadomo, na kogo się trafi. W naszym przypadku w ogóle nie ma pewności, że cokolwiek nowego czeka nas w LHC. Można sobie jednak wyobrazić najbardziej odpowiednią kandydatkę. Dla wielu z nas jej imię to Zuzia (SUSY, jak pieszczotliwie zwiemy supersymetrię). Choć nic jeszcze nie wskazuje na jej istnienie, to byłoby naprawę szkoda, gdyby Natura nam spotkania z nią poskąpiła. Ma ona lekarstwo, lub przynajmniej jego obietnicę, na większość bolączek Modelu Standardowego. Jest jedną z niewielu kandydatek na nową fizykę, której bozon Higgsa o masie około 125 GeV/c², w dodatku wyglądający jak ten z Modelu Standardowego, nie tylko nie wyklucza, ale wręcz jest przez nią pożądany.

Poszukiwanie najpopularniejszej, przewidywanej przez nią cząstki ciemnej materii – neutralina – nie jest ograniczone do LHC (próbuje się zarejestrować taką cząstkę pochodzącą z halo galaktycznego lub produkty jej anihilacji), więc randkę może wygrać ktoś inny. W ramach supersymetrii są jednak też tacy kandydaci na to wakujące stanowisko (np. grawitino), których obecność będzie można (pośrednio) wykryć tylko w LHC.

Trzeba jednak uzbroić się w cierpliwość. Na odkrycie bozonu Higgsa czekaliśmy prawie pół wieku. Idea supersymetrii jest niewiele młodsza. LHC ma działać z coraz większą świetlnością (ale już bez istotnego zwiększenia energii) jeszcze przez jakiś mendel wiosen.

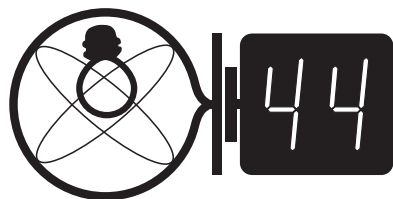
Supersymetria, oprócz niezliczonych zalet, ma co najmniej jedną poważną wadę. Nie sposób wykluczyć tej idei, można ją tylko porzucić. Ciekawe, czy rozstrzygnięcie jej użyteczności w fizyce cząstek zajmie więcej niż kopę lat.

Piotr ZALEWSKI

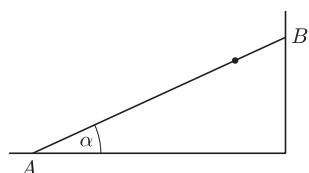
[1] <http://resonaances.blogspot.com/2015/01/do-or-die-year.html>
[2] John Ellis, *The Beautiful Physics of LHC Run 2*, arXiv:1412.2666v1.

Klub 44

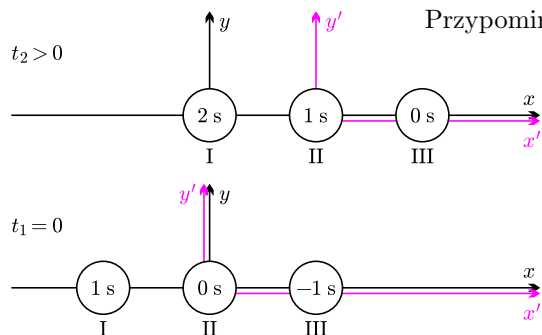
Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*



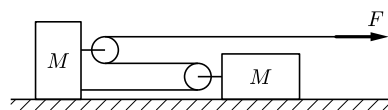
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2015



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 582 ($WT = 1,96$) i 583 ($WT = 2,32$) z numeru 9/2014

Tomasz Wietecha	Tarnów	45,78
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Andrzej Idzik	Bolesławiec	36,05
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Marian Łupieżowicz	Gliwice	22,43
Michał Koźlik	Gliwice	14,30
Krzysztof Magiera	Łosiów	12,44

Liczbę 44 punktów po raz dziesiąty przekroczył pan Tomasz Wietecha – gratulujemy!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 594, 595

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

594. Żuk pełźnie po sztywnej słomce, opartej o gładką podłogę i gładką pionową ściankę (rys. 1). Słomka jest jednorodna, tworzy z poziomem kąt α , jej długość wynosi l , masa słomki jest zanedbywalna w porównaniu z masą żuka m . Prędkość początkowa żuka w punkcie B wynosi v_0 . Jak musi poruszać się żuk, aby słomka pozostawała nieruchoma? Po jakim czasie dopełźnie on do punktu A ?

595. W pionowo ustawionym cylindrze zamkniętym tłokiem znajduje się w stanie równowagi n moli jednoatomowego gazu doskonałego o temperaturze T_0 . Układ jest izolowany cieplnie od otoczenia. Gaz ściśnięto za pomocą tłoka, wykonując nad gazem pracę W . Następnie tłok puszczono i zatrzymał się on w nowym położeniu równowagi. Jaka jest temperatura końcowa gazu? Ciśnienie zewnętrzne jest stałe.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2014

Przypominamy treść zadań:

586. K i K' to inercjalne układy odniesienia o zgodnych osiach, K' porusza się z prędkością V względem K wzdłuż osi x . Wzdłuż tej osi w układzie K' rozmieszczony jest ciąg jednakowych, równo odległych i zsynchronizowanych zegarów. Obserwator w K notuje równoczesne dla niego wskazania tych zegarów w dwóch chwilach: $t_1 = 0$ i $t_2 > 0$ (rys. 2). Na podstawie tych pomiarów wyznaczyć V oraz odległość l' między sąsiednimi zegarami mierzona w K' .

587. W układzie przedstawionym na rysunku 3 bloki mają zanedbywalnie małe masy, nić jest nieważka i nierozciągliwa, fragmenty nici, które nie leżą na blokach, są poziome. Masy klocków leżących na poziomej powierzchni są takie same i równe M . Do końca nici przyłożono poziomą siłę F . Z jakim przyspieszeniem porusza się ten koniec nici? Załóż brak tarcia i przyjmij, że klocki poruszają się ruchem postępowym.

586. Zegary spoczywają w K' , zatem $l = l' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$, gdzie l jest odległością między sąsiednimi zegarami w układzie K . W czasie t_2 każdy z zegarów przebywa w tym układzie drogę $l = Vt_2$. Po upływie czasu t_2 wskazania tych samych zegarów w K' różnią się o 1s, stąd $1s = t_2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$. W chwili $t_1 = 0$ współrzędna przestrzenna trzeciego zegara w układzie K wynosi $x_3 = l$ i zegar ten wskazuje czas $t'_3 = -1s$. Zgodnie z transformacją Lorentza:

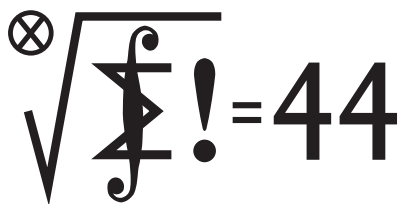
$$-1s = \frac{-Vl}{\left(c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)}$$

Na podstawie wypisanych równań otrzymujemy: $V = \frac{c}{\sqrt{2}}$, $l' = c\sqrt{2} \cdot 1s$.

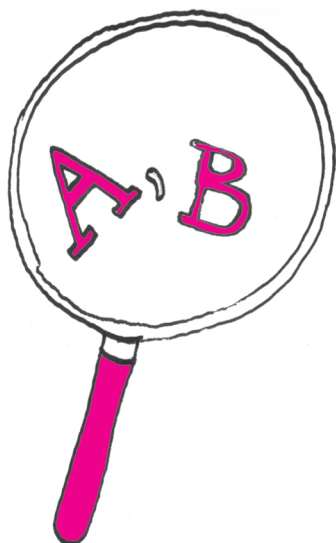


587. Naprężenie wzdłuż nici jest stałe, bo nić i bloczki są nieważkie, zatem przyspieszenia względem ziemi klocków lewego i prawego wynoszą odpowiednio: $a_L = \frac{3F}{M}$, $a_P = \frac{2F}{M}$. Oznaczmy przez a_1, a_2, a_3 wartości bezwzględne przyspieszeń względem ziemi poziomych odcinków nici, od najniższego do najwyższego. Mamy wtedy: $a_1 = a_L$, $a_2 = a_1 + 2a_P$, $a_3 = a_2 + 2a_L$. Przyspieszenie końca nici, do którego przyłożono siłę F , wynosi $a_3 = \frac{13F}{M}$.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2015



Zadania z matematyki nr 697, 698

Redaguje Marcin E. KUCZMA

697. Dana jest liczba naturalna $N > 1$ bekwadratowa (tj. niepodzielna przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej od 1). Spośród wszystkich dodatnich dzielników liczby N losujemy kolejno, bez zwracania, dwa dzielniki: k, m . Rozważamy zdarzenia: (A) liczby k, m są względnie pierwsze; (B) liczba m jest podzielna przez k . Które z tych zdarzeń jest bardziej prawdopodobne? Czy odpowiedź zmieni się, gdy losowanie będzie wykonywane ze zwracaniem?

698. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geq 2$ znaleźć najmniejszą wartość sumy

$$\left\lfloor \frac{1}{x_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x_2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor,$$

gdy x_1, x_2, \dots, x_n są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, spełniającymi warunek $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

Zadanie 698 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2014

Przypominamy treść zadań:

689. Znaleźć wszystkie pary zbiorów A, B , zawartych w zbiorze liczb całkowitych, o następujących własnościach:

- każda liczba całkowita należy do co najmniej jednego ze zbiorów A, B ;
- nie każda liczba całkowita należy jednocześnie do obu tych zbiorów;
- jeśli liczba x jest w zbiorze A , to liczba $x - 1$ jest w zbiorze B ;
- jeśli liczby x, y są w zbiorze B , to liczba $x + y$ jest w zbiorze A .

690. Ciąg liczb całkowitych dodatnich (a_n) spełnia warunki: $a_0 = 1, a_1 > 1$,

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}{a_{\lfloor n/2 \rfloor}} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Niech

$$b_n = \frac{1}{a_{n+1} a_{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

Udowodnić, że szereg $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ jest zbieżny, a jego suma jest liczbą wymierną.

689. Niech A, B będzie parą zbiorów, spełniających wymienione warunki. Ponumerujemy te warunki, w podanej kolejności, (i), (ii), (iii), (iv).

Gdyby liczba 0 była w zbiorze B , to dla każdej liczby $b \in B$ mielibyśmy (z war. (iv)) $b + 0 \in A$; to by znaczyło, że zbiór B zawiera się w zbiorze A , czyli (z war. (i)) $A = \mathbb{Z}$. Wtedy (z war. (iii)) także $B = \mathbb{Z}$, co daje sprzeczność z warunkiem (ii). Wniosek: $0 \notin B$. Warunek (i) wymusza konkluzję: $0 \in A \setminus B$. Stąd (i z war. (iii)) $-1 \in B$.

Gdyby liczba 1 była w zbiorze A , to (z war. (iii)) $0 \in B$; a przecież $0 \in A \setminus B$. Tak więc $1 \notin A$, czyli (z war. (i)) $1 \in B \setminus A$.

Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej liczby całkowitej $k \geq 0$:

$$(*) \quad 2k \in A \setminus B, \quad 2k + 1 \in B \setminus A.$$

Dla $k = 0$ tak jest. Ustalmy liczbę $k \geq 0$ i przyjmijmy słuszność związków (*) dla tej liczby k . Przypuśćmy, że $2k + 2 \in B$; wtedy (z war. (iv)) $2k + 1 = (2k + 2) + (-1) \in A$, wbrew założeniu indukcyjnemu. Zatem $2k + 2 \notin B$, czyli (z war. (i)) $2k + 2 \in A \setminus B$.

Przypuśćmy z kolei, że $2k + 3 \in A$. Wtedy (z war. (iii)) $2k + 2 \in B$, wbrew temu, co wykazaliśmy tuż przed chwilą. Zatem $2k + 3 \notin A$, czyli (z war. (i)) $2k + 3 \in B \setminus A$. Uzyskaliśmy związki (*) z liczbą k zastąpioną przez $k + 1$. Z zasady indukcji własność (*) przysługuje wszystkim liczbom całkowitym nieujemnym.

Teraz pokażemy, że ujemnym – też. Przypuśćmy, że $2k \in B$ dla pewnej liczby $k < 0$. Wiemy już (własność (*)), że $2|k| + 1 \in B$, a więc (z war. (iv)): $1 = (2|k| + 1) + 2k \in A$; sprzeczność z wcześniejszym ustaleniem ($1 \in B \setminus A$). W takim razie $2k \notin B$, czyli (z war. (i)) $2k \in A \setminus B$.

Wreszcie przypuśćmy, że $2k + 1 \in A$ dla pewnej liczby $k < 0$; wtedy (z war. (iii)) $2k \in B$, wbrew temu, co stwierdziliśmy przed chwilą. Zatem $2k + 1 \notin A$, czyli (z war. (i)) $2k + 1 \in B \setminus A$.

Mamy więc słuszność związków (*) dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}$. Mówią one, że A jest zbiorem wszystkich liczb parzystych, a B jest zbiorem wszystkich liczb nieparzystych. Ta para zbiorów spełnia, rzecz jasna, wymagane warunki – i jest to jedyna taka para.

690. Oznaczmy $1/(a_1 \cdot \dots \cdot a_n) = c_n$. Liczby a_1, a_2, a_3, \dots są całkowite i większe od 1, czyli większe lub równe 2. Zatem $c_n \leq 2^{-n}$.

Z rekurencyjnego określenia ciągu (a_n) wynika, że

$$(a_{n+1} - 1)c_n = \frac{1}{a_{\lfloor n/2 \rfloor}} = a_{n+1}b_n.$$

Stąd

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{a_{n+1}}\right)c_n = c_n - c_{n+1},$$

$S_n = b_1 + \dots + b_n = (c_1 - c_2) + \dots + (c_n - c_{n+1}) = c_1 - c_{n+1}$. A skoro $c_{n+1} \leq 2^{-n-1}$, widzimy, że $S_n \rightarrow c_1 = 1/a_1$ przy $n \rightarrow \infty$. Jest to suma szeregu $\sum b_n$; i oczywiście jest to liczba wymierna.



Rozwiązanie zadania M 1451.
Sposób I. Zauważmy, że

$$\binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1},$$

więc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \\ &= \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} (-1)^{k+1} = \\ &= \frac{-1}{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^j - 1 \right) = \\ &= \frac{-1}{n+1} ((1-1)^{n+1} - 1) = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Sposób II. Zauważmy, że

$$\frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k dx,$$

więc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k dx = \\ &= \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Niebo w marcu

20 III, od godziny 23:45, nareszcie astronomiczna wiosna!

Miłośników koniunkcji ciał niebieskich powinny zainteresować obserwacje nieba w dniu 12 III, kiedy Księżyc zbliży się do Saturna na odległość około 2°. Z Polski, ze względu na niewielką wysokość obu obiektów na niebie, obserwacje tej pary będą dość trudne, ale nie niemożliwe. Koniunkcja będzie widoczna na porannym niebie, prawie 18° nad horyzontem. Zjawisko będzie można obserwować od około godziny 00:30 nad południowo-wschodnim horyzontem w konstelacji Skorpiona. Obiekty osiągną swój najwyższy punkt na niebie o godzinie 04:30, a godzinę później znikną w blasku świtu. W momencie największego zbliżenia, Księżyc osiągnie jasność $-12,2^m$, natomiast Saturn 1^m . Para będzie zbyt odległa od siebie, aby zmieścić się w polu widzenia teleskopu, ale będzie widoczna gołym okiem lub za pomocą lornetki.

Z kolei niewątpliwą atrakcją dla właścicieli teleskopów mogą okazać się obserwacje planetoidy 7 Iris, która 6 III znajdzie się w opozycji. Oznacza to doskonałe warunki do obserwacji astronomicznych. Iris, położona na tle

Prosto z nieba: Ultrazaskakujące źródło rentgenowskie

Jakiś czas temu (*Delta* 11/2012) zwróciliśmy uwagę na nowy typ bardzo jasnych źródeł rentgenowskich, odkrytych w galaktykach M31 i M83. Ilość promieniowania tych obiektów jest w trakcie przejściowych wyjaśnień o wiele większa niż przewidywana przez standardowy model cienkiego dysku akrecyjnego. W celu „naprawienia” modelu akrecji dyskowej teoretycy zaproponowali wiele usprawnień dotyczących detali budowy dysku oraz wpływu materii (wiatrów). Spekulowano także na temat masy centralnej czarnej dziury – im większa jej masa, tym większa jasność. Ultrajasne źródła rentgenowskie (*UltraLuminous X-ray sources*, ULX) były zatem uważane za obserwacyjne przejawy istnienia czarnych dziur o masach około 100–1000 M_{\odot} (czarne dziury o masach pośrednich są Świętym Graalem astrofizyki dużych energii; dotychczas nieodkryte, powinny znajdować się w rozkładzie mas pomiędzy „gwiazdowymi” czarnymi dziurami a supermasywnymi olbrzymami w centrach galaktyk).

Tym większym szokiem okazały się niedawne obserwacje ULX w galaktyce spiralnej M82 (zwanej niekiedy Cygarem), przeprowadzone za pomocą satelitalnego teleskopu NASA NuSTAR (*Nuclear Spectroscopic Telescope Array*), obserwatorium rentgenowskiego Chandra, oraz dwumetrowego teleskopu optycznego obserwatorium Kitt Peak. Dostatecznie dobra rozdzielczość czasowa NuSTAR-a pozwoliła na stwierdzenie, że źródło M82 X-2 pulsuje regularnie z okresem około 1,37 s! Zaobserwowano także wyraźną 2,5-dniową modulację, będącą wynikiem ruchu w układzie podwójnym. Krótkookresowe pulsacje rentgenowskie świadczą o tym, że w centrum dysku akrecyjnego zamiast czarnej dziury znajduje się gwiazda neutronowa o zapewne dość silnym polu magnetycznym. Odkrycie NuSTAR-a stawia na głowie rozwój teorii ULX-ów – w przypadku akrecyjnej gwiazdy neutronowej pole magnetyczne z pewnością odgrywa istotną rolę (akrecja odbywa się poprzez kolumny akrecyjne wzdłuż linii sił pola wprost na bieguny gwiazdy), liczy się też fakt, że gwiazda – w przeciwieństwie do czarnej dziury – ma powierzchnię, ale nie bardzo obecnie wiadomo, jak w szczególności wymodelować odpowiednią jasność. By dodatkowo „zaciemnić” sprawę zrozumienia natury ultrajasných źródeł rentgenowskich, najjaśniejszy ULX w galaktyce M82, X-1, wydaje się być jako żywo czarną dziurą o masie pośredniej, około 400 M_{\odot} .

Michał BEJGER

gwiazdozbioru Lwa, będzie wtedy widoczna wysoko ponad horyzontem przez większość nocy, osiągając najwyższy punkt na niebie około północy. Garść danych bardziej szczegółowych: z Polski będzie widoczna 24° ponad południowo-wschodnim horyzontem o godzinie 20:45, następnie osiągnie najwyższy punkt na niebie, 35° nad południowym horyzontem o godzinie 23:30, po czym o 02:20 zniży się do 25° nad południowo-zachodnim horyzontem, co nieco utrudni jej obserwacje.

W dzień równonocy wiosennej będziemy świadkami jeszcze jednego ciekawego zjawiska astronomicznego – zaćmienia Słońca. Niestety z terytorium naszego kraju nie będzie ono całkowite, ale osiągnie prawie 75% zakrycia powierzchni. Pamiętajmy, żeby nigdy nie używać lornetek ani teleskopów do obserwacji Słońca ani obiektów znajdujących się blisko niego, ponieważ może to spowodować nieodwracalną utratę wzroku. Zaćmienie całkowite będzie widoczne tylko z najbardziej północnych krańców naszego kontynentu. Jeżeli więc mamy możliwość takiej podróży, warto wykorzystać okazję by przeżyć niezapomniane 2 minuty!

Magda OTULAKOWSKA-HYPKA

$$MI = MB = MC$$

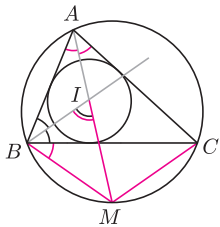
Joanna JASZUŃSKA

Istnieje zaskakujący związek między okręgiem wpisanym w trójkąt i okręgiem na nim opisanym:

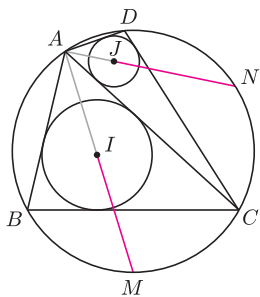
Twierdzenie (*). Dany jest trójkąt ABC (rys. 1). Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego, do którego nie należy punkt A . Wówczas punkt I należący do odcinka AM jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC wtedy i tylko wtedy, gdy $MI = MB = MC$.

Dowód. Skoro M jest środkiem łuku BC , to $MB = MC$ oraz AI jest dwusieczną kąta BAC . Wystarczy zatem dowieść, że BI jest dwusieczną kąta ABC wtedy i tylko wtedy, gdy $MI = MB$, czyli gdy $\sphericalangle MIB = \sphericalangle MBI$.

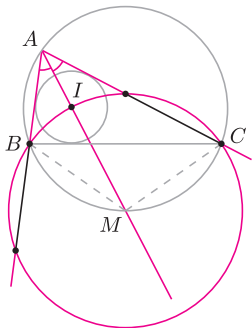
Kąt MIB jest zewnętrznym w trójkącie ABI , więc $\sphericalangle MIB = \sphericalangle IAB + \sphericalangle IBA$. Z kolei $\sphericalangle MBI = \sphericalangle MBC + \sphericalangle IBC$. Ponieważ $\sphericalangle IAB = \sphericalangle IAC = \sphericalangle MBC$, więc równość $\sphericalangle MIB = \sphericalangle MBI$ równoważna jest równości $\sphericalangle IBA = \sphericalangle IBC$, co kończy dowód. \square



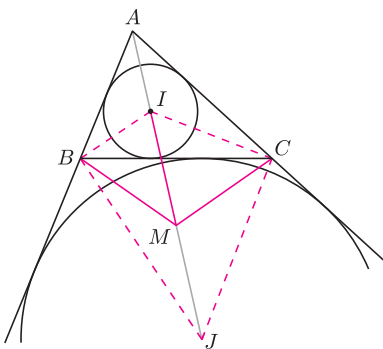
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3. Kolorowa część rysunku jest symetryczna względem prostej AI .



Rys. 4

1. Skonstruuj trójkąt ABC , mając dany jego wierzchołek A , punkt O – środek okręgu opisanego i punkt I – środek okręgu wpisanego.

2. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg Γ . Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , prosta AI przecina okrąg Γ w punkcie $M \neq A$. Punkt J jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ADC , prosta AJ przecina okrąg Γ w punkcie $N \neq A$. Wykaż, że jeżeli $MI = NJ$, to $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$.

3. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wykaż, że okrąg opisany na trójkącie BCI wyznacza na prostych AB i AC równe cięciwy.

4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta. Wykaż, że środek odcinka IJ należy do okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Rozwiązania

R1. Konstruujemy kolejno: okrąg o środku O i promieniu OA , M – jego punkt przecięcia z prostą AI oraz okrąg o środku M i promieniu MI . Na mocy (*), punkty przecięcia powyższych dwóch okręgów to wierzchołki B i C trójkąta. \square

R2. Na mocy (*) i założenia, zachodzi równość $MC = MI = NJ = NC$ (rys. 2). Stąd $\sphericalangle MAC = \sphericalangle NAC$ jako kąty wpisane w okrąg Γ oparte na równych łukach. Wobec tego $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle MAC = 2\sphericalangle NAC = \sphericalangle DAC$. \square

R3. Środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCI jest punkt M z twierdzenia (*); leży on na dwusiecznej kąta BAC . Z symetrii problemu (rys. 3) okrąg ten wyznacza więc na ramionach kąta równe cięciwy. \square

R4. Niech J leży w kącie BAC (rys. 4). Dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe, więc $BI \perp BJ$ oraz $CI \perp CJ$. Wobec tego na czworokącie $BJCI$ można opisać okrąg, którego środkiem jest środek M odcinka IJ . Okrąg ten jest opisany na trójkącie BCI , czyli M to punkt z twierdzenia (*), leży więc na okręgu opisanym na trójkącie ABC . \square

Zadania domowe

5. W dany okrąg wpisz trójkąt ABC , mając dane jego wierzchołki A, B oraz promień okręgu wpisanego.

6. Okrąg O jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie S , a do boków AC i BC odpowiednio w punktach D i E . Wykaż, że jeśli $AC = BC$, to środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest środkiem odcinka DE .

Wskazówka. Wykaż, że $\triangle SAD \equiv \triangle SID$, gdzie I to środek odcinka DE .

Zadanie 6 można też rozwiązać, posługując się twierdzeniem Pascala (deltoid 9/2014).