





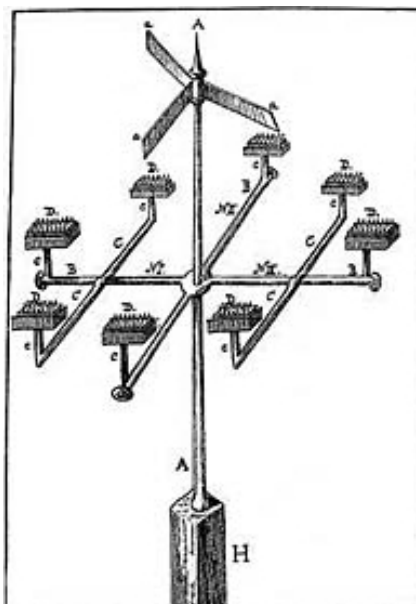


tel. 22 634 10 34, 448 71-24 14 53 92

SPIS TREŚCI NUMERU 2 (489)

Matematyka jest jedna <i>Tomasz Kobos</i>	str. 1
O dobru jeszcze lepiej <i>Ewelina Knapska</i>	str. 4
Traktat o lataniu na Niczym <i>Krzysztof Rejmer</i>	str. 5
 Zadania	str. 7
Krótką opowieść o symedianie <i>Malgorzata Dutka</i>	str. 8
 O tym, jak Puchatek podzbiory permutował <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.13
O obrotach centrów trójkąta <i>Dariusz Miklaszewski</i>	str.14
 Zdolne dziecko. Pierwsza pomoc <i>Magdalena Fikus</i>	str.15
Proste zadanie o wielomianach <i>Michał Adamaszek, Sławomir Kolasiński</i>	str.16
Skąd wiadomo, że moneta ma i orla, i reszkę? <i>Krzysztof Turzyński</i>	str.17
Aktualności	str.18
Klub 44	str.19
Prosto z nieba: Tajemnice oceanów Tytana	str.24
Niebo w lutym	str.24
 Oszacujmy pole <i>Joanna Jaszuska</i>	str.25

W następnym numerze



Złoty Diviš i wynalazki bardziej współczesne

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okladki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2015 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

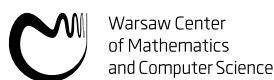
Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

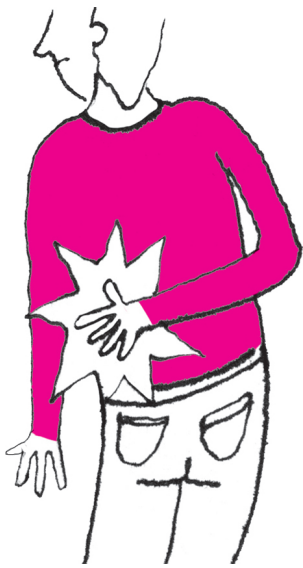
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł



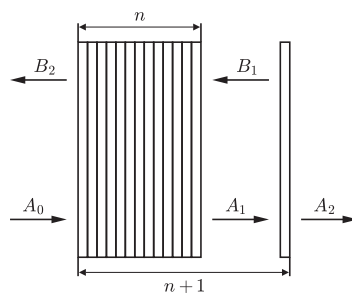
Warsaw Center
of Mathematics
and Computer Science

wcmcs.edu.pl



Rozwiązanie zadania F 874.

Aby uwzględnić wielokrotne odbicia od powierzchni poszczególnych płytek wewnątrz ich stosu, szukamy wzoru rekurencyjnego pokazującego, jak zmienia się współczynnik transmisji stosu przy dodaniu kolejnej płytki. Przyjmijmy, że transmisja stosu n płytek wynosi T_n . Dodając jeszcze jedną płytkę, dostajemy „złożony” stos składający się z $n + 1$ płytek. Niech na ten stos pada światło o natężeniu A_0 . Oznaczmy natężenia światła rozchodzącego się na zewnątrz i wewnątrz „złożonego” stosu jak na rysunku.



Korzystając z tego, że współczynnik odbicia to $R_n = 1 - T_n$, dostajemy układ równań

$$\begin{aligned} A_2 &= T A_1, \\ A_1 &= T_n A_0 + (1 - T_n) B_1, \\ B_1 &= (1 - T) A_1, \\ B_2 &= (1 - T_n) A_0 + T_n B_1. \end{aligned}$$

Rozwiązując go, znajdujemy wyrażenie rekurencyjne na odwrotność transmisji układu $n + 1$ płytek, zdefiniowanej jako $T_{n+1} = A_2/A_0$:

$$\begin{aligned} A_0/A_2 &= 1/(T_{n+1}) = \\ &= (1/T_n) + ((1 - T)/T). \end{aligned}$$

Dla dwóch płytek ($n + 1 = 2$) mamy

$$1/T_2 = 1/T + (1 - T)/T,$$

dla trzech ($n + 1 = 3$) mamy

$$\begin{aligned} 1/T_3 &= 1/T_2 + (1 - T)/T = \\ &= ((1/T) + 2(1 - T)/T). \end{aligned}$$

Kontynuując takie postępowanie dla stosu składającego się z n płytek, dostajemy

$$\begin{aligned} 1/T_n &= (1/T) + (n - 1)(1 - T)/T = \\ &= (T + n(1 - T))/T, \end{aligned}$$

a stąd znajdujemy jego transmisję

$$\begin{aligned} T_n &= T/(T + n(1 - T)) = T/(T + nR) = \\ &= 0,92/(0,92 + 0,08n). \end{aligned}$$

Matematyka jest jedna

Tomasz KOBOS*

Drogi Czytelniku, czy zdarza Ci się czasem doświadczać bólu pleców w odcinku lędźwiowym? Jest to całkiem prawdopodobne, gdyż wedle sondażu ponad połowa ankietowanych Polaków oświadczyła, że cierpi z tego powodu, a co szósty badany stwierdził, że bóle kręgosłupa odczuwa bardzo często. A jeżeli tak właśnie jest, to czy zdajesz sobie sprawę z tego, że przyczyna tego bólu może być bardzo mocno związana ze sposobem, w jaki używasz swoich szczęk? Mięśnie, które je kontrolują, mają bowiem wpływ również na ruch głowy – możesz to sprawdzić, próbując kręcić głową z maksymalnie zaciśniętymi szczękami, a następnie próbując zrobić to samo ze szczękami rozluźnionymi, obserwując jednocześnie, w którym przypadku ruch jest łatwiejszy i płynniejszy. Ten sam eksperyment można powtórzyć w celu zbadania relacji ruchu głowy i oczu: spróbuj pokręcić swobodnie głową, trzymając oczy utkwione w jednym punkcie na ścianie. Ponieważ przemieszczenie głowy jest dla naszego układu nerwowego zadaniem priorytetowym, nawet gdy natrafia na pewne utrudnienie (na przykład zbyt mocno zaciśnięte szczęki), znajdzie on sposób, żeby to zadanie wykonać. Często jest to jednak sposób nieoptymalny i odbywający się kosztem innych partii ciała, które muszą wówczas pracować dużo ciężiej. W podobny sposób ból pleców może być skojarzony ze sposobem, w jaki używamy naszych stóp, ból kolana czy biodra może zależeć od organizacji barku, a ból w barku może mieć dużo wspólnego z brakiem mobilności w biodrze. W tego typu problemach właściwie niemożliwe jest wyróżnienie jednej przyczyny czy źródła problemu, nawet jeżeli ból odczuwamy tylko w konkretnym miejscu. Istotna jest organizacja ruchu naszego ciała jako jednej całości. Być może tłumaczy to w pewnym stopniu ogromną nieskuteczność służb zdrowia w walce z dolegliwościami kręgosłupa – w samych Stanach Zjednoczonych wydaje się na ten cel ponad 100 miliardów dolarów rocznie. Ponieważ większa część tych pieniędzy przeznaczona jest na zakup leków, których zadaniem jest tylko i wyłącznie stłumienie bólu, a nie rozwiązanie prawdziwego problemu, efektów nie widać.

Prawdopodobnie zaczęliście się w tym momencie zastanawiać, czy na pewno trzymacie w ręce kolejny numer *Delty*, czy może jednak przypadkiem sięgnęliście po miesięcznik przeznaczony dla fizjoterapeutów. Cały ten rozwlekły wstęp ma na celu przedstawienie pewnego fenomenu, który można zaobserwować w wielu innych dziedzinach życia i nauki, z matematyką włącznie. Chodzi o sytuację, w której rozważana przez nas dziedzina funkcjonuje bardziej jako jedna całość niż jako suma swoich odrębnych części. Zamierzeniem tego, jak i następnych artykułów, jest ukazanie bardziej holistycznego spojrzenia na matematykę, przez zwrócenie uwagi na często zaskakujące i głębokie związki między różnymi jej obszarami.

O tym, jak owo holistyczne spojrzenie jest istotne, wie każdy, kto choć trochę interesuje się postępowaniem współczesnej matematyki. Praktycznie wszystkie największe odkrycia ostatnich lat są bowiem wynikiem genialnego połączenia różnych jej dziedzin. Być może najbardziej narzucającym się przykładem jest wielkie twierdzenie Fermata: dla liczby naturalnej $n > 2$ nie istnieją liczby naturalne x, y, z , które spełniałyby równanie $x^n + y^n = z^n$. Chociaż sformułowanie tego twierdzenia powinno być w pełni zrozumiałe dla uczniów szkoły podstawowej, to jego dowód (na który przyszło czekać ponad 300 lat) jest w rzeczywistości konsekwencją bardzo głębokiego wyniku z dziedziny krzywych eliptycznych. Potrzeba było jednak wiele czasu, żeby znaleźć związek pomiędzy trudną i bardzo abstrakcyjną teorią tych krzywych a wyjątkowo konkretnym i wręcz narzucającym się pytaniem dotyczącym liczb całkowitych.

Za inny przykład może posłużyć twierdzenie Greena i Tao udowodnione przez nich w 2004 roku. Głosi ono, że w ciągu wszystkich liczb pierwszych znajdują się dowolnie długie ciągi arytmetyczne. Chociaż podobnie jak w poprzednim przykładzie zagadnienie jest pozornie o czysto teorii liczbowym charakterze, to jego dowód jest osadzony głęboko w realiach teorii ergodycznej, korzystający jednocześnie w istotny sposób z analizy harmonicznej, geometrii dyskretnej i metody probabilistycznej. Również dowód słynnej hipotezy Poincarégo, jedynego rozwiązanego do tej pory problemu milenijnego, opiera się na badaniu tzw. potoków Ricciego, zaawansowanego pojęcia geometrii różniczkowej. W dziedzinie kombinatoryki ekstremalnej bardzo dużą popularnością cieszą się obecnie tzw. algebry flagowe, które pochodzą ze świata algebry wyższej. Tego typu przykłady można by wymieniać bardzo długo.

Naszym celem nie jest jednak dokładna analiza powyższych rezultatów, gdyż przekroczyłaby ona znacznie zarówno objętość *Delty*, jak i kompetencje autora.

*doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

To, co jednak leży w naszym zasięgu, to zademonstrowanie podobnego fenomenu na dużo mniej doniosłych (lecz często równie fascynujących) przykładach. Bardzo często również w matematyce elementarnej można bowiem napotkać zupełnie zaskakujące dowody, które ujawniają związki między pozornie istotnie różnymi koncepcjami.

Zademonstrujemy to zjawisko na przykładzie zadań o charakterze olimpijskim. W artykule pokażemy parę różnorodnych, niezwiązanych ze sobą przykładów. W kolejnych omówimy bardziej szczegółowo wybrane metody, które ukazują głęboko położone relacje. Należy w tym momencie zaznaczyć, że nad każdym z omawianych dalej przykładów warto zastanowić się przez dłuższą chwilę samodzielnie przed sięgnięciem do rozwiązania. W innym przypadku łatwo bowiem przegapić prawdziwą trudność zadania i nie wychwycić subtelny pomysł, który pozwala ją pokonać.

Zacniemy od, być może, dobrze znanego przykładu z dziedziny geometrii płaskiej.

Zadanie 1. Okrąg o środku I , wpisany w trójkąt ABC , jest styczny do boku AB w punkcie D . Punkt M jest środkiem boku AB , punkt E jest symetryczny do punktu D względem M . Udowodnić, że proste IM oraz CE są równoległe.

Rozwiązanie. Za pomocą obliczeń na długościach odcinków stycznych można łatwo wykazać, że punkt E jest punktem styczności z bokiem AB okręgu dopisanego do trójkąta ABC . Jeżeli więc przez F oznaczmy punkt środkowosymetryczny do D względem I , to jednokładność o środku w punkcie C , która przekształca okrąg wpisany na okrąg dopisany, przeprowadza punkt F na punkt E . A zatem punkty C , F i E są współliniowe. Prosta IM jest zatem prostą łączącą środki boków w trójkącie DEF , a stąd wynika żądana równoległość.

Powyższy przykład, chociaż stosunkowo nietrudny i z całą pewnością doskonale znany specjalistom, dobrze ilustruje opisywany przez nas fenomen – treść zadania dotyczyła okręgu wpisanego, ale to będący w cieniu okrąg dopisany odegrał kluczową rolę w rozwiązaniu.

Drugi przykład demonstruje, jak przydatne może być znalezienie pewnej zewnętrznej struktury, którą w naturalny sposób można dopasować do rozważanego przez nas problemu. Czytelnik jest gorąco zachęcany do próby odnalezienia jej najpierw samodzielnie.

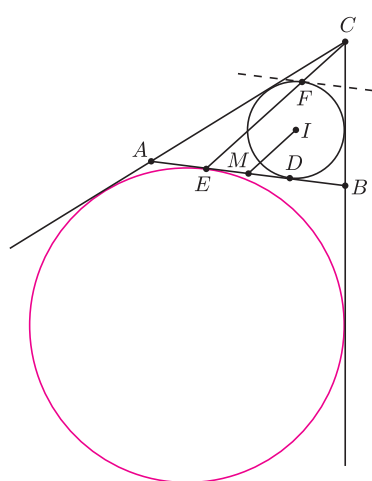
Zadanie 2. W każde pole tablicy $n \times n$ wpisano liczbę rzeczywistą w taki sposób, że każde dwa wiersze są różne (czyli różnią się na co najmniej jednej pozycji). Udowodnić, że z danej tablicy można usunąć pewną kolumnę tak, aby ta własność została zachowana.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu tego zadania odwołamy się do **teorii grafów**.

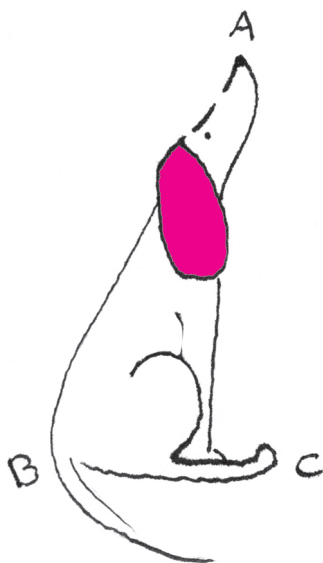
Skorzystamy z powszechnie znanego i nietrudnego w dowodzie faktu: w dowolnym grafie prostym o n wierzchołkach i n krawędziach istnieje cykl.

Dla dowodu nie wprost założmy, że usunięcie dowolnej z kolumn spowoduje powstanie tablicy o dwóch identycznych wierszach. Oznacza to, że dla każdej z kolumn istnieje para wierszy, która różni się między sobą tylko w tej kolumnie. Rozważmy więc graf, którego wierzchołkami są wiersze naszej tablicy i połączmy dwa wiersze krawędzią, jeżeli dla pewnej kolumny są one tymi wierszami, które różnią się tylko w niej. Jeśli dla pewnej kolumny istnieje więcej takich par wierszy, to wybierzmy z nich dowolną i tylko między nimi poprowadźmy krawędź w naszym grafie. Oczywiście, jedna para wierszy zostanie połączona krawędzią co najwyżej raz – nie może bowiem zdarzyć się sytuacja, w której dwa wiersze różnią się na tylko jednej pozycji dla dwóch różnych pozycji. Utworzona przez nas struktura jest więc n -wierzchołkowym grafem prostym o n krawędziach. Z przytoczonego wcześniej faktu wynika istnienie cyklu w tym grafie. Innymi słowy, istnieje ciąg wierszy o numerach a_1, a_2, \dots, a_k o tej własności, że dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, k$ wiersze a_i oraz a_{i+1} różnią się na dokładnie jednej pozycji (przyjmujemy, że $a_{k+1} = a_1$). Oznaczmy przez j numer pozycji, na której różnią się wiersze o numerach a_1 i a_2 . Każda kolejna para wierszy różni się już w innej kolumnie niż j -ta. Począwszy więc od wiersza o numerze a_2 , każdy następny wiersz w naszym ciągu zawiera tę samą liczbę x na pozycji j -tej. Ale wiersze a_k oraz a_1 różnią się również w innej kolumnie niż j -ta, a zatem wiersz a_1 zawiera liczbę x na pozycji j . Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Kolejna ilustracja pochodzi z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Tym razem do rozwiązania klasycznego zadania z teorii liczb użyjemy... twierdzeń cosinusów i Ptolemeusza z planimetrii!



Graf prosty to taki, w którym nie ma podwójnych krawędzi ani pętli.



**Rozwiązanie zadania M 1449.**

Niech R oznacza gracza rozpoczynającego, zaś P jego przeciwnika. Wykażemy, że P ma strategię wygrywającą, polegającą na pozostawianiu po każdym swoim ruchu dwóch stosów o nieparzystej liczbie monet.

Jeśli na każdym stosie jest nieparzysta liczba monet i przynajmniej jedna z nich jest większa od 1, to R po wykonaniu swojego ruchu zostawi dla P stos z parzystą liczbą monet (i drugi o nieparzystej liczbie monet). Wówczas P może usunąć stos o nieparzystej liczbie monet, a ten o parzystej liczbie monet podzielić na dwa stosy zgodnie ze swoją strategią.

Gra zakończy się wygraną P , gdy zostawi on dla R dwa jednomonetowe stosy.

Zadanie 3. Liczby całkowite dodatnie $a > b > c > d$ spełniają równanie $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$. Udowodnić, że liczba $ab + cd$ nie jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie. Warunek dany w zadaniu przekształca się w równoważny sposób do postaci $a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$. Rozważmy taki czworokąt $ABCD$, że $AB = a$, $BC = d$, $CD = b$, $AD = c$ oraz $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkątów ABD oraz CBD otrzymujemy wówczas

$$\cos \sphericalangle BCD = \frac{b^2 + d^2 - BD^2}{2bd} = \frac{a^2 - ac + c^2 - BD^2 - bd}{2bd} = -\frac{bd}{2bd} = -\frac{1}{2},$$

a stąd $\sphericalangle BCD = 120^\circ$.

Oznaczmy przez α miarę kąta ABC . Wówczas $\sphericalangle CDA = 180^\circ - \alpha$ i korzystając z twierdzenia cosinusów tym razem w trójkątach ABC i ACD , dostajemy

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = AC^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha,$$

skąd mamy

$$2 \cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}$$

i ostatecznie

$$AC^2 = a^2 + d^2 - ad \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to z twierdzenia Ptolemeusza wynika równość $AC^2 \cdot BD^2 = (ab + cd)^2$, którą – korzystając z wcześniejszych obserwacji – możemy przepisać w postaci

$$(ac + bd)(a^2 - ac + c^2) = (ab + cd)(ad + bc).$$

Z warunku $a > b > c > d$ wynikają zależności $(a - d)(b - c) > 0$ oraz $(a - b)(c - d) > 0$, z których otrzymujemy ciąg nierówności

$$ab + cd > ac + bd > ad + bc.$$

Jeżeli liczba $ab + cd$ jest pierwsza, to biorąc pod uwagę powyższe nierówności, widzimy, że jest ona względnie pierwsza z liczbami $ad + bc$ oraz $ac + bd$. Z otrzymanej przez nas równości otrzymujemy więc podzielność $ac + bd \mid ad + bc$. To jednak przeczy drugiej z powyższych nierówności i w efekcie dowodzi, że liczba $ab + cd$ jest złożona.

W ostatnim z zadań zaprezentujemy zaskakujące zastosowanie algebry w zagadnieniu z geometrii kombinatorycznej, dotyczącym punktów i prostych na płaszczyźnie. Wykorzystamy dobrze znany fakt: jednorodny układ liniowy o mniejszej liczbie równań niż niewiadomych ma nietrywialne rozwiązanie. Jak zawsze, zachęcamy do próby samodzielnego rozwiązania – nawet z tą podpowiedzią nie będzie to wcale takie proste!

Zadanie 4. Na płaszczyźnie danych jest $n \geq 3$ różnych punktów, które nie leżą wszystkie na jednej prostej. Udowodnić, że istnieje co najmniej n różnych prostych, z których każda zawiera co najmniej dwa spośród danych punktów.

Rozwiązanie. Niech $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ będą wszystkimi prostymi, które zawierają co najmniej dwa spośród danych punktów. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $m < n$. Zauważmy, że wówczas możliwe jest przyporządkowanie każdemu punktowi jednej z liczb rzeczywistych x_1, x_2, \dots, x_n w taki sposób, aby suma na każdej prostej ℓ_i była równa 0, ale aby nie wszystkie liczby x_j były równe 0. Wynika to natychmiast z faktu, iż jednorodny układ równań liniowych

$$\sum_{j \in \ell_i} x_j = 0 \quad \text{dla} \quad 1 \leq i \leq m,$$

o m równaniach i $n > m$ niewiadomych ma nietrywialne rozwiązanie.

W szczególności prawdziwa jest zależność

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j \in \ell_i} x_j \right)^2 = 0.$$

Po wymnożeniu i uporządkowaniu składników widzimy, że lewa strona powyższej równości składa się z wyrazów postaci x_j^2 oraz $x_j x_k$ dla $j \neq k$. Skoro nie wszystkie

**Rozwiązanie zadania F 873.**

Poruszanie się kulki „po ósemce” (szczególny przypadek krzywej Lissajous) jest możliwe, jeżeli jej częstość drgań w pionie ω_v jest dwa razy większa, niż jej częstość drgań w poziomie ω_h , tzn. $\omega_v = 2\omega_h$.

Niech T oznacza siłę naciągu sprężyn, a k – ich współczynnik sprężystości, przy czym $T = k(L - L_0)$. Przy wychyleniu kulki w poziomie na odległość x , gdzie $x \ll L$, będzie działała na nią pozioma siła zwrotna $F = -(2T/L)x$, a w konsekwencji kwadrat częstości drgań w poziomie wyniesie $\omega_h^2 = 2T/mL$. Kwadrat częstości drgań w pionie jest dany wzorem $\omega_v^2 = 2k/m$ („wahadło sprężynowe”). Korzystając z warunku ruchu „po ósemce”, mamy $\omega_v^2 = 4\omega_h^2$, a więc $2k/m = 4(2k(L - L_0)/mL)$, czyli $1 - (L_0/L) = 1/4$, a stąd $L_0 = (3/4)L$.

punkty leżą na jednej prostej, to każdy punkt pojawia się na co najmniej dwóch prostych, a zatem każdy składnik postaci x_j^2 występuje co najmniej dwukrotnie w powyższej sumie. Co więcej, ponieważ przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta, liczby x_j i x_k , gdzie $j \neq k$, znajdują się razem w dokładnie jednej sumie. A zatem przy składniku $x_j x_k$ znajduje się współczynnik 2. W tej sytuacji

$$0 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j \in \ell_i} x_j \right)^2 \geq 2 \sum_{j=1}^n x_j^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2.$$

Stąd jednak wynika, że $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, co stanowi sprzeczność z wyborem liczb x_j . Kończy to dowód.

Na zakończenie proponujemy dwa zadania, dla których Czytelnik może sam spróbować odnaleźć zaskakujący sposób rozwiązania.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x , które spełniają równanie $x^2 + (4x^3 - 3x)^2 = 1$.

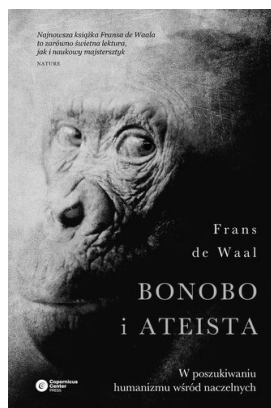
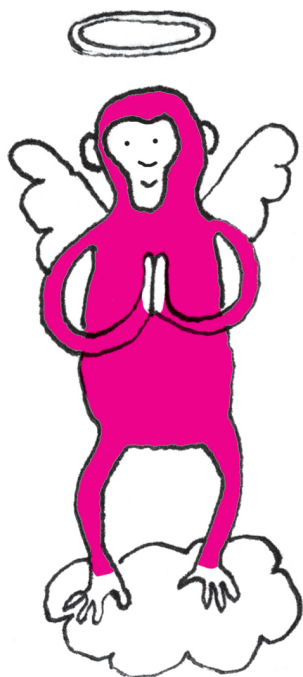
Podpowiedź. Wykorzystaj wzór na cosinus kąta potrojonego.

Zadanie 6. Dane są takie liczby całkowite dodatnie k, n , że $k \leq n - 1$. Zbiory A_1, A_2, \dots, A_k są niepustymi podzbiorymi zbioru n -elementowego S . Udowodnić, że można pokolorować pewne elementy zbioru S dwoma kolorami w taki sposób, że spełnione są następujące warunki:

- Każdy element zbioru S jest albo niepokolorowany, albo pokolorowany na jeden z dwóch kolorów.
- Przynajmniej jeden element zbioru S jest pokolorowany.
- Dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$ zbiór A_i jest albo całkowicie niepokolorowany, albo zawiera elementy obu kolorów.

Podpowiedź. Przy konstrukcji żądanego kolorowania skorzystaj z podanego wcześniej faktu dotyczącego układu równań.

W kolejnych artykułach przedyskutujemy znacznie dokładniej wybrane metody, ukazujące niezwykle związki w matematyce.



O dobru jeszcze lepiej

Frans de Waal, *BONOBO i ATEISTA*. W poszukiwaniu humanizmu wśród naczelnych

Copernicus Center PRESS

Człowiek jest elementem biologicznego kontinuum. Myśl ta, narzucająca się, gdy rozważa się cykl rozwojowy człowieka, jego budowę anatomiczną czy też procesy fizjologiczne weń zachodzące, jest nader rzadko przywoływana w dyskusji własności uznawanej niekiedy za specyficznie ludzką –

moralności. Wciąż rośnie jednak liczba i jakość dowodów na to, że wiele zwierząt przejawia skłonności prospołeczne, takie jak umiejętność działania zespołowego albo opieka nad starymi i zniedołężniałymi członkami stada. Nie da się zatem uciec od pytania, czym takie zachowanie jest – u człowieka i innych zwierząt – uwarunkowane lub, dokładniej, jakie mechanizmy mózgowie są za takie zachowania odpowiedzialne. Istnieją silne argumenty za hipotezą, że to, co u ludzi nazwalibyśmy dobrem, jest postrzegane w kategoriach nagrody, czynienie dobra sprawia zaś przyjemność. Oznacza to, że źródła moralności należy szukać w aspektach funkcjonowania mózgu związanych z motywacją do działania – a więc w przetwarzaniu emocji.

Idea to nienowa, ale i zarazem rewolucyjna. Ślady powyższego rozumowania można znaleźć już w pismach Darwina, ile jednak czasu upłynąć musi, by dotarła wraz z dawką niezbędnej wiedzy do studentów filozofii lub teologii? Przez wieki szukano przecież źródeł moralności poza światem przyrody – Kant uważał, że jest ona konsekwencją rozumowego poznania świata (ale jak, skoro umysł to wytwór mózgu?), wielu ludzi zaś odwołuje się do Boga jako źródła dobra, sprawiedliwości, prawdy i piękna. Czy oznacza to, że poznanie świata metodami nauk przyrodniczych okazuje się fundamentalnie niezgodne z religią?

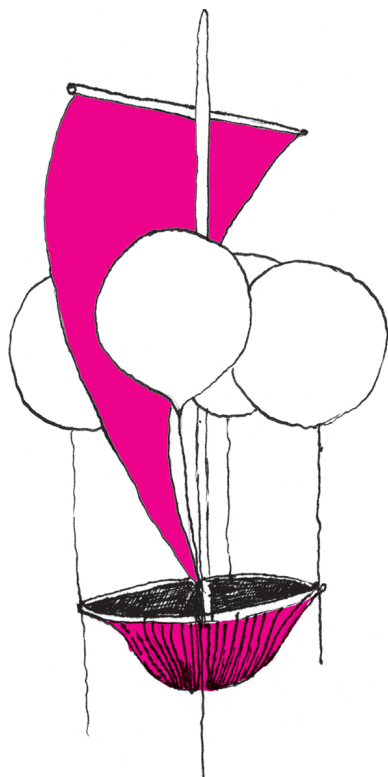
Wybitny badacz zachowania zwierząt, Frans de Waal, w swej najnowszej książce *Bonobo i ateista* przekonuje, że zarysowany powyżej dylemat jest przesadnie udramatyzowany mimo coraz śmielszego odkrywania tajemnic psychiki ludzkiej i zwierzęcej przez nauki empiryczne. Świetnie udokumentowana, logiczna i pasjonująca opowieść de Waala sprawi przyjemność każdemu czytelnikowi łaknącemu przystępnego wprowadzenia do współczesnej wiedzy o badaniach nad zachowaniami społecznymi zwierząt. A dla wszystkich tych, którzy zastanawiają się niekiedy, jak żyć (obojętnie, czy chodzi o życie własne, czy innych) – powinna być zgoła lekturą obowiązkową.

Pracownia Neurobiologii Emocji, Instytut Biologii Doświadczalnej im. M. Nenckiego PAN Ewelina KNAPSKA

Traktat o lataniu na Niczym

Krzysztof REJMER

Balon, żeby unieść się w przestworza i pożeglować, musi być wypełniony gazem lżejszym od powietrza atmosferycznego. Wie to każdy. Ale czy na pewno jest to jedyna możliwość?



Uznawany za ojca powietrznej nawigacji, wykładowca matematyki oraz fizyki w Brescii, jezuita Francisco Lana de Terzi (1631–1687), widział to nieco inaczej. Lana nie chciał niczym balonu wypełniać. On go chciał opróżnić! Siłę nośną powietrznego statku Lany dać miały cztery miedziane kule, z których za pomocą pompy próżniowej Boyle'a usunięto powietrze. W przeciwieństwie do innych pionierów lotów balonem posługujących się metodą prób i błędów, Lana wspierał się obliczeniami; znał prawo Archimedesesa oraz wiedział, że powietrze ma swój ciężar. Na ile jego obliczenia były poprawne, to rzecz inna, liczy się już sama próba dokonania matematycznej analizy warunków lotu. Znacznie gorzej poradził sobie z zarzutem, że kule po opróżnieniu zostaną zgniecione przez działające z zewnątrz potężne siły parcia atmosfery. Wiadomo: *horror vacui!* Lana z niezmałym spokojem odpierał ten zarzut, posługując się scholastyczno-arystotelesowskim argumentem: kula, będąc kształtem doskonałym, znieśnie wszystko. Na jego obronę rzec trzeba, że sensowna odpowiedź na to pytanie wymaga pewnej wiedzy materiałowej, w jego czasach jeszcze nieistniejącej.

Książka Lany, *Prodromo dell'Arte Maestra* (1670 r.) zdobyła znaczny rozgłos. W 1690 roku została przetłumaczona na angielski przez Roberta Hooke'a. Dwadzieścia lat później, w 1710 roku, Leibniz udowodnił, że pomysł Lany jest nierealistyczny. Autor tego artykułu wprawdzie nie zna argumentacji Leibniza, ale też wcale nie istnieje potrzeba, by dziś do niej sięgać.

Zacznijmy od przypomnienia, że – zgodnie z prawem Archimedesesa – na ciało zanurzone w płynie (obojętne, czy jest to ciecz, czy gaz) znajdującym się w polu grawitacyjnym działa siła wyporu, o wartości równej ciężarowi wypartego przez to ciało płynu. Jest to konsekwencją liniowego spadku ciśnienia płynu wraz z wysokością. Dowód jest elementarny, choć, oczywiście, wymaga pewnych założeń; rzecz się nieco komplikuje, jeśli temperatura gazu (cieczy nie będą nas interesować) nie jest ustalona albo też wieje wiatr. W przypadku ogólnym siły działające na ciała ze strony płynu bywają skomplikowane. Dlatego przyjmujemy, że atmosfera jest izotermiczna i nieruchoma. Również nie będziemy tu mówić o montgolfierach, czyli o balonach wypełnionych gorącym powietrzem.

Przede wszystkim musimy wiedzieć, ile „ważą” różne gazy. W tak zwanych warunkach standardowych (temperatura 0°C i ciśnienie 1000 hPa czyli 0,986 atm) gęstość powietrza ma wartość $1,28\text{ kg/m}^3$, czyli 1,28 g/l. Ta druga jednostka (g/l) wydaje się lepiej przemawiać do wyobraźni. Wynika stąd, że każdy „litr próżni” daje siłę wyporu o wartości 1,28 G. Moneta jednozłotowa ma masę 5 gramów, a zatem aby ją unieść w powietrze, potrzeba niemal czterech litrów próżni. W rzeczywistości więcej, bo próżnię trzeba w coś „opakować”. Jeśli wypełnimy balon gazem, będzie gorzej, bo gaz, w przeciwieństwie do próżni, ma masę. Oczywiście, najlepiej użyć możliwie lekkiego gazu, na przykład wodoru. Jego gęstość w warunkach normalnych to tylko 0,09 g/l. Tak więc od siły wyporu dla każdego litra objętości należy odjąć ciężar o wartości 0,09 G. To daje wyobrażenie, jak wielkie muszą być balony, żeby człowiek mógł nimi latać.

Niestety, wodór potrafi wybuchać, dlatego znacznie lepszy jest – w epoce pierwszych lotów balonem jeszcze nieznaną – hel. Jego gęstość w warunkach standardowych ma wartość 0,178 g/l. Tak więc, jeśli użyjemy helu, siła wyporu zostaje zmniejszona o około 14 procent. Obecność gazu zmniejsza siłę wyporu o ciężar monety jednogroszowej (masa jednogroszówki to 1,64 g) dla 18 litrów wodoru i 9 litrów helu. Pamiętajmy też, że pole powierzchni balonu rośnie wraz z jego rozmiarami wolniej niż objętość, zatem siła wyporu rośnie szybciej niż jego ciężar (przy założeniu, że balon wykonany jest zawsze z tego samego materiału) dlatego im większy balon, tym większego balastu wymaga.

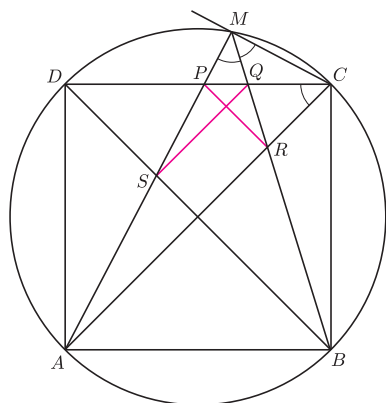


Rozwiązanie zadania M 1447.

Ponieważ kąty $\angle PMR$ i $\angle PCR$ są równe (jako kąty wpisane oparte na ćwiartce okręgu), to na czworokącie $PMCR$ można opisać okrąg. Zatem

$$\sphericalangle PRM = \sphericalangle PCM = \sphericalangle DCM = \sphericalangle DBM.$$

W takim razie odcinki PR i DB są równoległe.



Rozważając czworokąt $QMDS$, wykazemy analogicznie, że $QS \parallel AC$, a stąd łatwo wywnioskować tezę.



Warto może dodać, że oprócz montgolfiery oraz balonu wypełnionego wodorem, od nazwiska wynalazcy (Charlesa) nazywanego szarliera, istniały również – raczej zapomniane już – napełniane gazem błotnym gryniery (pomysłu Greena) oraz roziery, hybrydy będące kombinacją montgolfiery i szarliery. Ich imię pochodzi od Pilâtre de Roziera, jednego z pionierów lotnictwa balonowego, który zginął podczas próby pokonania Kanału La Manche, gdy iskra z paleniska montgolfiery spowodowała eksplozję wodoru.

Widzimy, że w zasadzie Lana miał rację, bo balon próżniowy ma większą wyporność niż gazowy. Ale wyporność to przecież jeszcze nie wszystko. Zastanówmy się nad wytrzymałością próżniowego balonu. Taki balon musi być sztywny. Niech to będzie metalowa sfera. Podzielimy ją na dwie półsfery, dolną i górną. Skierowana pionowo siła parcia powietrza atmosferycznego, działająca na każdą z nich, jest równa

$$\frac{1}{2}Ap = \pi R^2 p,$$

gdzie p to ciśnienie atmosferyczne, A jest polem powierzchni półsfery, zaś R to jej promień. Tym razem, w przeciwieństwie do wyprowadzenia prawa Archimedesesa, możemy pominąć różnice ciśnień. Czynnikiem $1/2$ bierze się z całkowania kosinusa kąta azymutalnego (interesuje nas pionowa składowa siły). Wynika stąd, że naprężenie σ , ściskające sferę na jej równiku, jest równe

$$\sigma = \frac{\pi R^2 p}{2\pi R h} = \frac{Rp}{2h}.$$

Grubość sferycznej powłoki oznaczyliśmy przez h ($h \ll R$). Aby balon mógł swobodnie wisieć w powietrzu, siła wyporu musi zrównoważyć jego ciężar; tak więc, dla próżniowego balonu (w naszym oszacowaniu pomijamy ciężar gondoli, lotnika oraz ładunku) będzie

$$4\pi R^2 h \rho_s = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p,$$

gdzie ρ_s jest gęstością materiału, z którego wykonano sferę, natomiast ρ_p jest gęstością powietrza. Jak widać, grubość powłoki musi być proporcjonalna do jej promienia, przy czym stała proporcjonalności zależy od stosunku gęstości

$$\frac{h}{R} = \frac{\rho_p}{3\rho_s}.$$

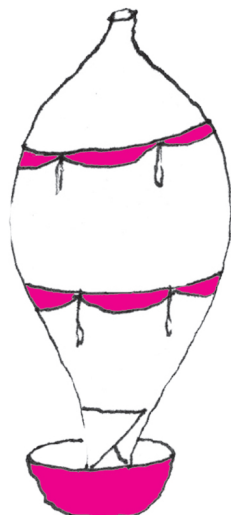
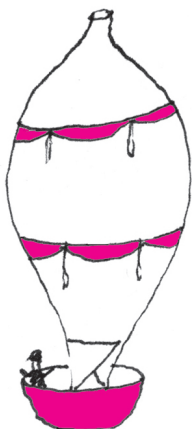
Dla mniej cennego od miedzi aluminium ($\rho_p = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) i standardowego powietrza otrzymujemy $h/R = 1,6 \cdot 10^{-4} \ll 1$. Dla sfery o promieniu 10 m stosowna grubość powłoki to nieco ponad półtora milimetra. Taka sfera wydaje się być czymś bardzo delikatnym, zderzenie z czymkolwiek: wieżą, drzewem, a kto wie, czy również nie ptakiem, mogłoby mieć dla niej poważne następstwa! Mogłaby zostać przedziurawiona lub ulec deformacji. O tym drugim jeszcze za chwilę.

Z powyższych równań wynika, że niezależnie od promienia i grubości powłoki opróżnionej z powietrza sfery jest

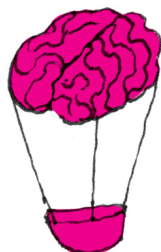
$$\sigma = \frac{3\rho_s}{2\rho_p} p.$$

Dla aluminium daje to wartość $\sigma = 3,3 \cdot 10^8 \text{ Pa}$. Ten rząd wielkości zgadza się z danymi dotyczącymi wytrzymałości większości stopów aluminium. Otrzymaliśmy wynik zbyt bliski granicy bezpieczeństwa, a zatem negatywny.

Akhmeteli i Gavrilin przedyskutowali stabilność próżniowego balonu związaną ze zjawiskiem wyboczenia. Dla każdej konstrukcji jest ono niebezpieczne. Ta analiza jest bardziej skomplikowana. Na czym polega wyboczenie, opiszemy na najprostszym możliwym przykładzie: ściskania pręta. Jeśli ściskamy go wzdłuż jego długiej osi, to przy pewnej wartości ściskającej siły, tak zwanej wartości krytycznej, następuje zjawisko gwałtownego przejścia od deformacji ściskania do innego rodzaju deformacji – zginania. Dla sferycznej powłoki zjawisko wyboczenia jest oczywiście dużo bardziej skomplikowane, jednak analiza przeprowadzona przez wspomnianych powyżej badaczy dowodzi, że żadna metalowa powłoka (a nawet i diamentowa, gdyby ktoś chciał i potrafił ją wykonać) nie ochroni próżniowego balonu przed wyboczeniem. Co prawda,



można oczekiwać, że jakaś powłoka mająca skomplikowaną wewnętrzną strukturę będzie dostatecznie lekka, wytrzymała i sztywna. A zatem, kto wie? Ale póki co, to tylko fantastyka.



Sam Lana pesymistycznie uważał, że jakkolwiek balon jest jedynie igraszką umysłu i zbudowanie go nie jest możliwe, ponieważ: [...] *pewnym jest, iż Bóg nie zezwoli, by taka maszyna się udała, ponieważ może ona sprawić wiele kłopotu sprawującym rządy. Czyż znajdzie się człowiek, który może zapewnić, że żadne miasto nie zostanie narażone na niespodziankę, gdy powietrzny statek zacznie manewrować nad jego domami i placami? Twierdze i miasta mogłyby zostać bezsprzecznie zniszczone, gdyby masy żelaza, kule ognia i bomby zostały zrzucone z wysoka [...]*

Bardziej optymistycznie widział to ksiądz Józef Herman Osiński (1738–1802), warszawski uczony, mający pewne osiągnięcia w dziedzinie badań nad elektrycznością. W książce *Robota maszyny powietrznej Pana Montgolfier* (1784) przedstawił własny projekt balonu transportowego, jaki, jego zdaniem, unosząc się na niewielkiej wysokości ponad powierzchnią Ziemi, ciągnięty przez parę koni, dwadzieścia razy rocznie przemieszczałby się między Warszawą i Krakowem przenosząc ładunek 640 kg, co przyniosłoby zysk w wysokości 24 000 złotych. Rozwodził również budowę balonów według pomysłu Lany (najwyraźniej nic nie wiedział o obiekcjach Leibniza, a może zwyczajnie nic sobie z nich nie robił): [...] *szklę na kule latające nie można używać, bo zepsuciu zbyt podległe [...]* *Można zaś z metalu, a w szczególności z żelaza pomienione kule robić, a urobiwszy, powietrze z nich wyciągnąć, czyli częze uczynić, zaczem na powietrze wzniosą się.*



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1447. Punkt M leży na krótszym łuku CD okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Prosta AM przecina BD , CD odpowiednio w punktach S , P , zaś prosta BM przecina AC , CD odpowiednio w punktach R , Q (rys. 1). Udowodnić, że odcinki SQ i PR są prostopadłe.

Rozwiązanie na str. 5

M 1448. Udowodnić, że dla nieujemnych liczb x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) \leq \frac{9}{8}(x + y)(y + z)(z + x).$$

Rozwiązanie na str. 15

M 1449. Rozpatrzmy następującą grę. Przed rozpoczęciem gry dane są dwa niepuste stosy z m i n monetami. Ruch polega na usunięciu jednego ze stosów i podzieleniu drugiego na dwa *niepuste*. Gracze wykonują ruchy na przemian. Jeśli któryś *nie* może wykonać ruchu, to przegrywa. Rozstrzygnąć, kto ma strategię wygrywającą, gdy $m = n = 2015$.

Rozwiązanie na str. 3

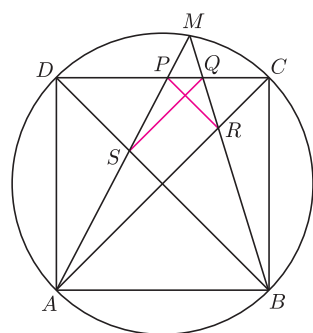
Przygotował Michał NAWROCKI

F 873. Małą kulkę zawieszono na dwóch jednakowych sprężynach, rozciągniętych do długości L każda. Po wytrąceniu z równowagi kulka porusza się periodycznie po trajektorii w kształcie ósemki (rys. 2). Jaka musi być długość nierozciągniętych sprężyn L_0 , aby kulka poruszała się w taki sposób (ciężar sprężyn pominąć)?

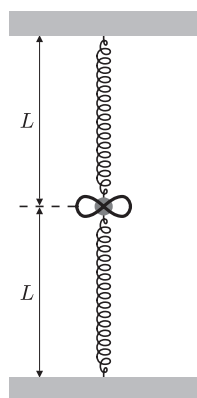
Rozwiązanie na str. 3

F 874. Gdy światło pada na płaską płytkę szklaną prostopadle do jej powierzchni, to 8% energii fali odbija się, a 92% przechodzi przez płytkę. Innymi słowy, współczynnik odbicia wynosi $R = 0,08$, a współczynnik transmisji wynosi $T = 0,92$ (uwzględniono już tutaj odbicie od obu powierzchni płytki). Jaki będzie współczynnik transmisji stosu złożonego z n płytek?

Rozwiązanie na str. 1



Rys. 1



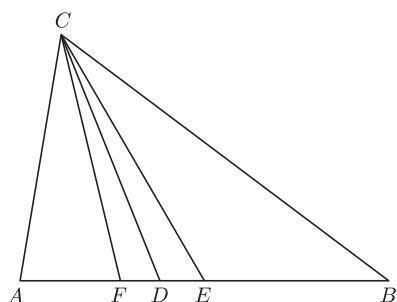
Rys. 2

Krótka opowieść o symedianie

Małgorzata DUTKA laureatka XXXI Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, I LO Bydgoszcz

Zechciejcie państwo wysłuchać dziś krótkiej opowieści z królestwa geometrii. Za siedmioma górami matematycznych podręczników, za siedzioma rzekami matematycznych równań, za siedzioma lasami matematycznych sprzeczności znajdowała się symediana. Dziś symediana ujrzy światło dzienne. Jednak na samym początku powinniśmy złożyć podziękowanie francuskiemu matematykowi i inżynierowi budownictwa, panu Émile'owi Lemoine'owi (1840–1911), którego to zasługą jest uwiecznienie tego pojęcia, a także sformułowanie wielu twierdzeń z nim związanych. Matematyczny świat oddał mu hołd w sobie tylko znany sposób – twierdzeniom związanym z symedianą niejednokrotnie nadając nazwy zawierające jego nazwisko. W poniższym artykule przytoczę wiele ciekawych związków dla równie ciekawej prostej, związków noszących nazwisko tego francuskiego matematyka.

Definicja symediany. Symedianą nazywamy prostą, będącą obrazem symetrycznym środkowej wychodzącej z danego wierzchołka trójkąta względem dwusiecznej kąta wewnętrznego znajdującego się przy tym samym wierzchołku. Z wierzchołka C trójkąta ABC prowadzimy dwusieczną CD oraz środkową CE . Odbijamy wówczas prostą CE względem prostej CD . Otrzymujemy prostą CF – w poniższym artykule mówiąc o symedianie, będę miała na myśli właśnie odcinek tej prostej ograniczony przez dany trójkąt.



Rys. 1

Pierwsze i jednocześnie zasadnicze twierdzenie charakteryzujące symedianę w swojej nazwie nie zawiera nazwiska Lemoine'a. Jednak bez tej własności nie byłibyśmy w stanie wykazać następujących zależności.

Twierdzenie o podziale boku. Symediana poprowadzona z jednego wierzchołka trójkąta dzieli wewnętrznie przeciwny bok proporcjonalnie do kwadratów długości boków przyległych. Według oznaczeń standardowych, takich że $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (rys. 1) otrzymujemy związek

$$\frac{AF}{FB} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Dowód tego faktu opiera się bezpośrednio na twierdzeniu sinusów zastosowanym dla par trójkątów: AFC , BEC oraz AEC , BFC .

Stosunek podziału boku przez symedianę przypomina stosunek podziału boku trójkąta przez dwusieczną. Różnica polega tak naprawdę jedynie na obecności stosunku kwadratów długości boków, a nie samych długości boków. Ponadto prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia o podziale boku. Jeżeli prosta poprowadzona z jednego wierzchołka trójkąta dzieli wewnętrznie przeciwny bok proporcjonalnie do kwadratów długości boków przyległych, to jest ona symedianą.

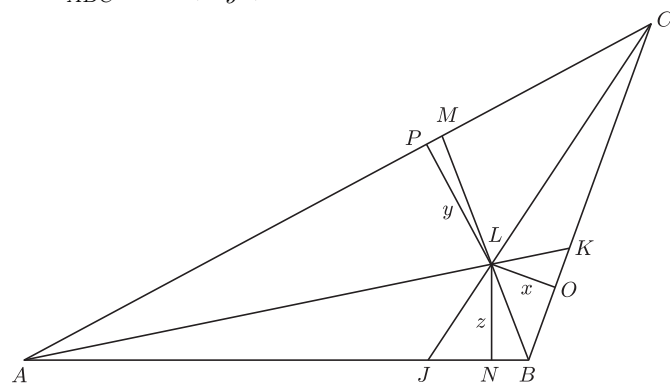
W dowodzie twierdzenia zakładamy, że istnieje prosta spełniająca stosunek z poprzedniego twierdzenia i jednocześnie niebędąca symedianą. Dojdziemy wówczas do sprzeczności, która kończy dowód.

Powróćmy do pana Lemoine'a. Ten zacny francuski matematyk doczekał się swojego własnego punktu. Cóż to za punkt? Kierując się analogią do innych prostych w trójkącie, możemy łatwo się domyślić! Symediany również przecinają się w jednym punkcie. Jest to punkt oznaczany standardowo literą L i nazywany punktem Lemoine'a. Dowód tego faktu opiera się jedynie na twierdzeniu odwrotnym do twierdzenia Cevy, wykorzystującym stosunek podziału boku.

Okazuje się również, że punkt L ma bardzo charakterystyczne położenie wewnątrz trójkąta.

Twierdzenie o minimalnej sumie odległości punktu Lemoine'a od boków trójkąta. Jeżeli dany punkt wewnątrz trójkąta spełnia warunek mówiący, że suma kwadratów jego odległości od boków trójkąta przyjmuje minimum, to ten punkt jest punktem przecięcia symedian.

Dowód. Niech L będzie dowolnym punktem leżącym wewnątrz trójkąta ABC oraz $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Korzystając z oznaczeń na rysunku 2, możemy napisać, iż $2S_{ABC} = ax + by + cz$.



Rys. 2

Z nierówności Cauchy'ego–Schwarza otrzymujemy:

$$4S_{ABC}^2 = (ax + by + cz)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dla danych a, b, c wyrażenie $x^2 + y^2 + c^2$ przyjmuje wartość najmniejszą, gdy zachodzi równość, a ta ma miejsce dla

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

Zauważamy jednocześnie, że $\frac{AJ}{JB} = \frac{S_{ALJ}}{S_{BLJ}}$, $\frac{AJ}{JB} = \frac{S_{ACJ}}{S_{BCJ}}$,

$$\frac{AJ}{BJ} = \frac{S_{ACJ} - S_{ALJ}}{S_{BCJ} - S_{BLJ}} = \frac{S_{ALC}}{S_{BLC}} = \frac{\frac{1}{2}by}{\frac{1}{2}ax} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o podziale boku przez symedianę wnioskujemy, że punkt L jest punktem przecięcia symedian. \square

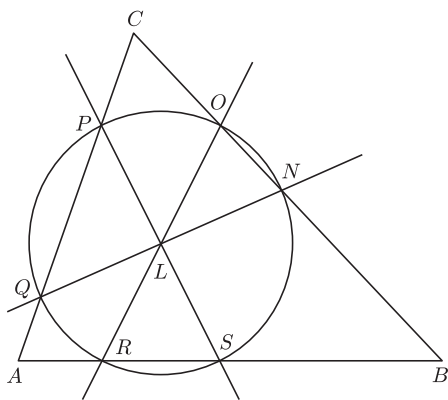
Z symedianą związane są również charakterystyczne okręgi. Wśród nich można wyróżnić okręgi bezpośrednio związane z punktem Lemoine'a. Do wykonania konstrukcji pierwszego okręgu Lemoine'a pomocne będzie przypomnienie definicji antyrównoległej.

Definicja. Antyrównoległą do boku AB w trójkącie ABC nazywamy prostą przecinającą przeciwległy do kąta A bok pod takim samym kątem, jaki jest przy wierzchołku A oraz bok przeciwległy do wierzchołka B pod takim samym kątem, jaki jest przy wierzchołku B .

Zwróćmy uwagę również na charakterystyczny związek symediany i antyrównoległych.

Twierdzenie o podziale antyrównoległych przez symediany. Symediana poprowadzona z wierzchołka C trójkąta ABC dzieli antyrównoległe względem boku AB na połowy.

Pierwszy okrąg Lemoine'a. Aby skonstruować pierwszy okrąg Lemoine'a, musimy poprowadzić antyrównoległe do każdego z boków trójkąta, przechodzące przez punkt przecięcia symedian. Wówczas punkty przecięcia tych antyrównoległych z bokami trójkąta leżą na jednym okręgu zwanym właśnie pierwszym okręgiem Lemoine'a.

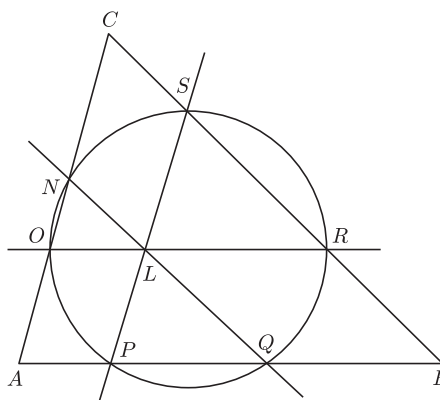


Rys. 3

Dowód. Z twierdzenia o podziale antyrównoległych przez symediany wiemy, że $PL = LS$, $NL = LQ$, $RL = LO$ (rys. 3). Ponadto zauważamy, że jeżeli proste RO i SP są antyrównoległymi do boków AC i BC , to $\sphericalangle LRS = \sphericalangle LSR = \sphericalangle C$. Zauważamy wówczas, że trójkąt LSR jest równoramienny, czyli $LS = LR$. Oznacza to również, że $LS = LR = LO = LP$. Wówczas cztery

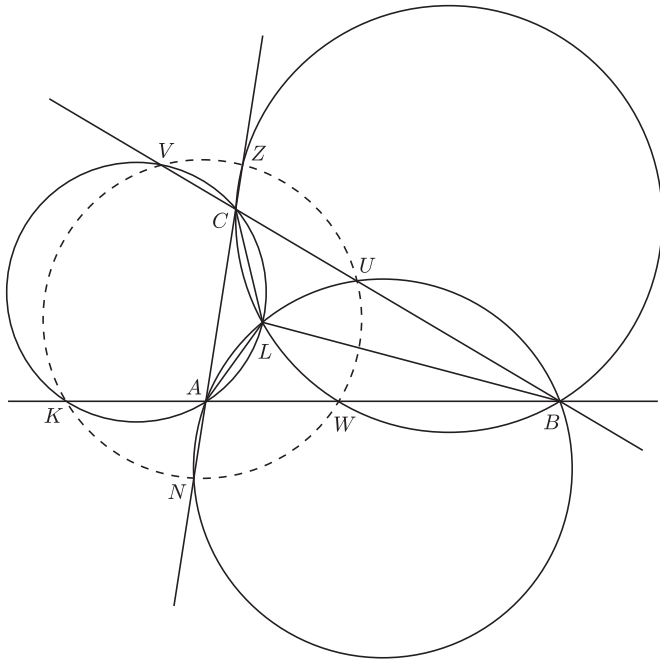
punkty: S, R, P oraz O są równo oddalone od punktu L , czyli leżą na jednym okręgu. Takie samo rozumowanie możemy poprowadzić dla prostej QN . Jeżeli proste PS i QN są antyrównoległymi do boków BC i AB , to $\sphericalangle LQP = \sphericalangle LPQ = \sphericalangle B$. Zatem trójkąt PLQ jest równoramienny, co oznacza, że $LQ = LP$, ale również na podstawie podziału antyrównoległej przez symedianę $LQ = LP = LS = LN$ – podsumowując: $LS = LR = LP = LO = LQ = LN$. Zatem wszystkie te punkty są równo odległe od punktu L , co oznacza, że leżą na jednym okręgu, mającym środek w punkcie L . \square

Drugi okrąg Lemoine'a. Aby skonstruować drugi okrąg Lemoine'a, musimy poprowadzić równoległe do każdego z boków trójkąta, przechodzące przez punkt przecięcia symedian. Wówczas punkty przecięcia tych równoległych z bokami trójkąta leżą na jednym okręgu zwanym właśnie drugim okręgiem Lemoine'a.



Rys. 4

Dowód. Łatwo zauważyć, że czworokąt $CSLN$ (rys. 4) jest równoległobokiem. W każdym równoległoboku przekątne połowią się. Zatem odcinek CL dzieli na pół odcinek SN . Zauważamy również, że odcinek CL należy do symediany trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C . Skoro CL należy do symediany oraz dzieli odcinek SN na połowę, to prosta SN musi być antyrównoległą do boku AB (łatwo wywnioskować to z twierdzenia o podziale antyrównoległych). Wówczas $\sphericalangle CSN = \sphericalangle A = \sphericalangle NOR$. Stąd punkty N, O, R, S muszą leżeć na jednym okręgu oznaczonym jako o_1 , gdyż $\sphericalangle NSR + \sphericalangle NOR = 180^\circ$. Analogicznie punkty Q, N, O, P muszą leżeć na jednym okręgu oznaczonym jako o_2 . Weźmy teraz pod uwagę czworokąt $PONS$. Zauważymy wówczas, że jest to trapez o podstawach NO oraz PS . Skoro NS jest antyrównoległa do boku AB oraz OP jest antyrównoległa do boku BC , to $\sphericalangle CNS = \sphericalangle AOP = \sphericalangle B$. Oznacza to, że $\sphericalangle NOP = \sphericalangle SNO$, czyli trapez $SNOP$ jest równoramienny, zatem można na nim opisać okrąg o_3 . Podsumowując, wszystkie trzy okręgi muszą się pokrywać, gdyż wspólny okrąg o_1 oraz o_3 wyznaczają trzy punkty: S, N, O , natomiast wspólny okrąg o_2 oraz o_3 wyznaczają trzy punkty: N, O, P . Ale wszystkie z wymienionych punktów leżą na jednym okręgu (punkty: S, N, O, P). \square



Rys. 5

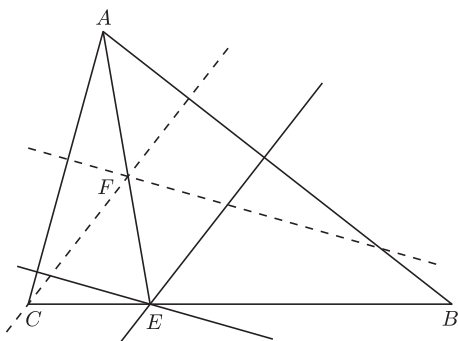
Istnieje również trzeci okrąg Lemoine'a. Jego konstrukcja jest już nieco bardziej złożona (rys. 5).

Trzeci okrąg Lemoine'a. Niech L będzie punktem przecięcia symedian w trójkącie ABC . Wówczas na każdym z trójkątów: ALB, BLC, CLA opisujemy okręgi. Punkty przecięcia tych okręgów z bokami lub przedłużeniami boków trójkąta leżą również na jednym okręgu zwanym trzecim okręgiem Lemoine'a.

Bezpośrednio z punktem Lemoine'a związany jest trójkąt o bardzo charakterystycznej własności. Do jej dowodu wykorzystamy jedną z własności dowolnego punktu należącego do symediany trójkąta.

Twierdzenie o odległości punktu należącego do symediany od boków trójkąta. Niech punkt E będzie punktem leżącym na boku BC trójkąta ABC . Jeżeli AE jest symedianą trójkąta ABC przechodzącą przez punkt A (rys. 6), to dla każdego punktu F , leżącego na prostej AE , zachodzi równość

$$\frac{d(F, AB)}{d(F, AC)} = \frac{d(E, AB)}{d(E, AC)} = \frac{AB}{AC}.$$

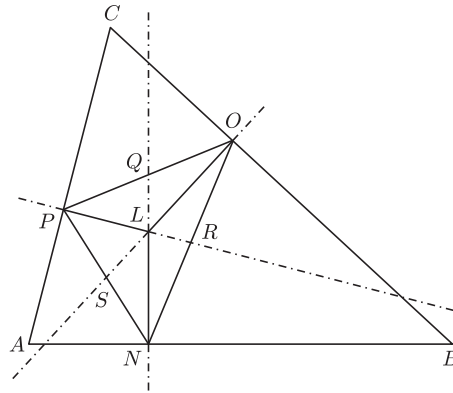


Rys. 6

Twierdzenie o trójkącie spodkowym Lemoine'a.

Punkt Lemoine'a trójkąta ABC jest jednocześnie środkiem ciężkości trójkąta utworzonego poprzez połączenie rzutów punktu Lemoine'a na boki trójkąta ABC .

Obserwujemy tutaj związek z symetrycznym odbiciem. Przecież symediana powstaje jako odbicie środkowej względem dwusiecznej, a wspólne położenie punktu przecięcia symedian i dwusiecznych dla tych trójkątów jest wyjątkowe.



Rys. 7

Dowód. Niech Q (rys. 7) będzie punktem przecięcia odcinka PO oraz prostopadłej do boku AB , przechodzącej przez punkt Lemoine'a (L). Wówczas stosując twierdzenie sinusów, otrzymujemy zależność:

$$\frac{PQ}{QO} = \frac{PL}{OL} \cdot \frac{\sin \sphericalangle PLQ}{\sin \sphericalangle OLQ}.$$

Jeżeli CL jest symedianą w trójkącie ABC , to z twierdzenia o odległości punktu należącego do symediany od boków trójkąta otrzymujemy

$$\frac{PL}{LO} = \frac{d(L, CA)}{d(L, CB)} = \frac{CA}{CB}.$$

Ponadto $\sphericalangle QLO = \sphericalangle B$, $\sphericalangle QLP = \sphericalangle A$, gdyż na czworokątach $BOLN$ oraz $ANLP$ można opisać okręgi. Uwzględniając to w zapisie pierwszego związku, otrzymujemy

$$\frac{PQ}{QO} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sin \sphericalangle A}{\sin \sphericalangle B}.$$

Ale z twierdzenia sinusów mamy

$$\frac{\sin \sphericalangle A}{\sin \sphericalangle B} = \frac{BC}{AC}.$$

Zatem

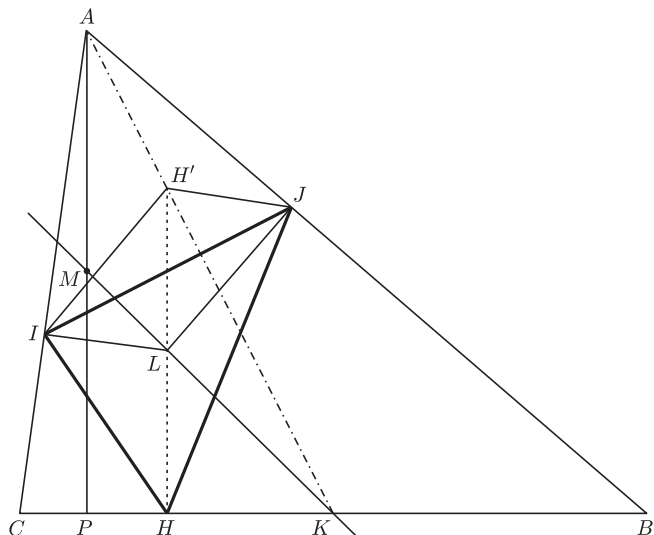
$$\frac{PQ}{QO} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = 1.$$

Stąd NQ jest środkową trójkąta NOP . Analogiczny tok rozumowania występuje w przypadku punktu S będącego punktem przecięcia odcinka PN oraz prostopadłej do boku BC , przechodzącej przez punkt Lemoine'a oraz dla punktu R będącego punktem przecięcia odcinka ON oraz prostopadłej do boku AC , przechodzącej przez punkt Lemoine'a. Stąd odcinki NQ, OS, PR są środkowymi w trójkącie NOP oraz punkt L jest również środkiem ciężkości tego trójkąta. \square

Dociekliwy matematyk zapewne chciałby się dowiedzieć jeszcze dokładniej, gdzie w trójkącie znajduje się punkt przecięcia symedian.

Twierdzenie o położeniu punktu Lemoine'a.

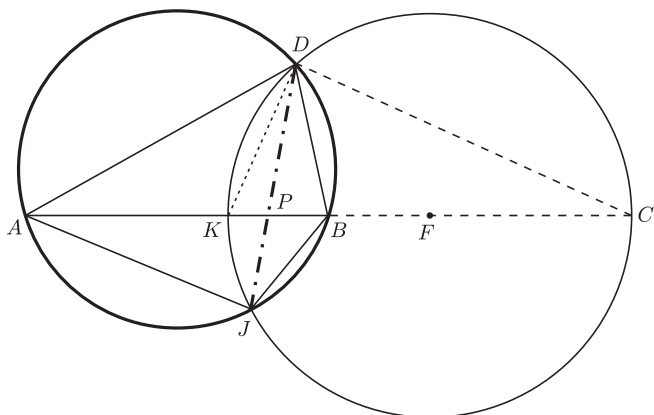
Punkt przecięcia symedian znajduje się na prostej zawierającej środek wysokości opuszczonej z jednego z wierzchołków oraz środek przeciwległego boku trójkąta.



Rys. 8

Wskazówka. W dowodzie tego twierdzenia można wykorzystać twierdzenie o trójkącie spodkowym Lemoine'a. Pomocne okaże się odbicie punktu H względem punktu L .

Z symedianą spotkamy się również, gdy będziemy chcieli poznać bliżej okrąg Apoloniusza. Przypomnijmy, że dla danych punktów A i B , gdzie A jest różne od B , oraz liczby dodatniej m , różnej od 1, zbiorem punktów G na płaszczyźnie, takich że $\frac{AG}{GB} = m$, jest okrąg, nazwany okręgiem Apoloniusza.



Rys. 9

Twierdzenie o symedianie i okręgu Apoloniusza.

Niech punkt J będzie takim różnym od wierzchołka D punktem na okręgu opisanym na trójkącie ABD (rys. 9), że

$$\frac{JB}{JA} = \frac{BD}{AD}.$$

Wówczas odcinek DJ jest symedianą trójkąta ABD , przechodzącą przez wierzchołek D .

Dowód. Niech P będzie punktem przecięcia prostej DJ z bokiem AB trójkąta ABD . Posługując się twierdzeniem

sinusów, otrzymujemy zależność

$$\frac{BP}{PA} = \frac{JB}{JA} \cdot \frac{\sin \sphericalangle BJP}{\sin \sphericalangle PJA}.$$

Jednocześnie korzystając z założenia, że $\frac{JB}{JA} = \frac{BD}{AD}$, możemy napisać, iż

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{\sin \sphericalangle BJP}{\sin \sphericalangle PJA}.$$

Z własności kątów opartych na tym samym łuku wiemy, że $\sphericalangle DJB = \sphericalangle A$, $\sphericalangle DJA = \sphericalangle B$. Zatem

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{\sin \sphericalangle A}{\sin \sphericalangle B},$$

ale z twierdzenia sinusów wyciągamy wniosek, że

$$\frac{\sin \sphericalangle A}{\sin \sphericalangle B} = \frac{BD}{AD},$$

stąd

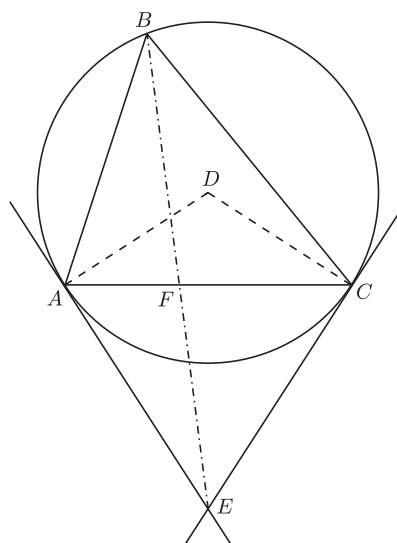
$$\frac{BP}{PA} = \frac{BD^2}{AD^2}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o podziale boku przez symedianę wyciągamy wniosek, iż prosta DJ jest symedianą w trójkącie ABD , przechodzącą przez wierzchołek D . \square

Ponadto ważną własnością symediany, niezwykle przydatną jako zastosowanie przy rozwiązywaniu zadań oraz związaną z okręgiem opisanym na trójkącie, jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie o stycznych do okręgu opisanego na trójkącie i o symedianie.

Na trójkącie ABC opisujemy okrąg o środku D (rys. 10). Prowadzimy styczne do okręgu przechodzące przez wierzchołki A i C . Styczne te przecinają się w punkcie E . Wówczas odcinek BE jest symedianą trójkąta ABC , zawierającą wierzchołek B .



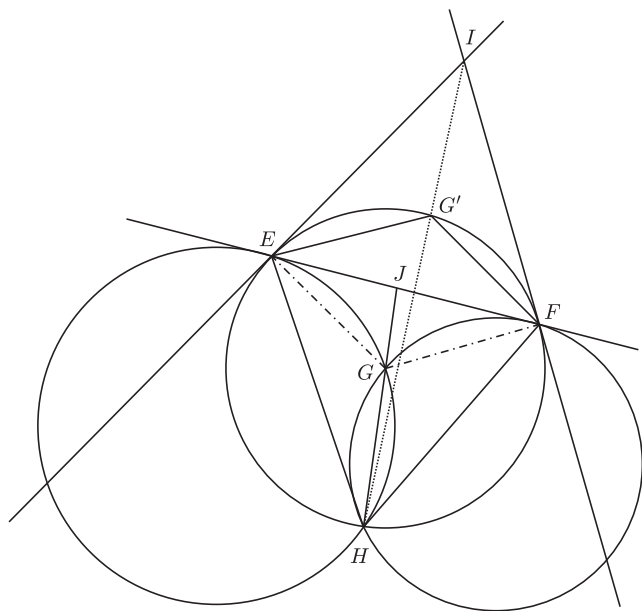
Rys. 10

Dowód pozostawiam Czytelnikom.

Ktoś, kto zapoznałby się jedynie z wyżej wymienionymi własnościami symediany, mógłby jej zarzucić brak przydatności w świecie zadań geometrycznych. Jednak okazuje się, że symediany z powodzeniem znajdują zastosowanie, na przykład, w zadaniach olimpijskich. Kluczem do pierwszego z nich będzie wyżej wymieniona zależność.

Zadanie 1 (Vietnam Team Selection Test 2001).

Na płaszczyźnie dwa okręgi przecinają się w punktach G i H . Ich wspólna styczna, bliższa punktowi G , dotyka tych okręgów w punktach E i F . Opisujemy okrąg na trójkącie HEF . Styczne do niego przechodzące przez wierzchołki E i F przecinają się w punkcie I . Niech G' będzie obrazem punktu G w symetrii względem prostej EF . Udowodnij, że punkty H, G', I są współliniowe (rys. 11).



Rys. 11

Rozwiązanie. Z twierdzenia o stycznych do okręgu opisanego na trójkącie i o symedianie wiemy, że odcinek HI jest symedianą trójkąta HEF , zatem należy wykazać, że również punkt G' leży na tej symedianie. Ponadto odcinek HG leży na środkowej trójkąta HEF . Wnioskujemy to z twierdzenia o potędze punktu:

$$JE^2 = JG \cdot JH = JF^2.$$

Więc $JE = JF$, czyli punkt J jest środkiem odcinka EF .

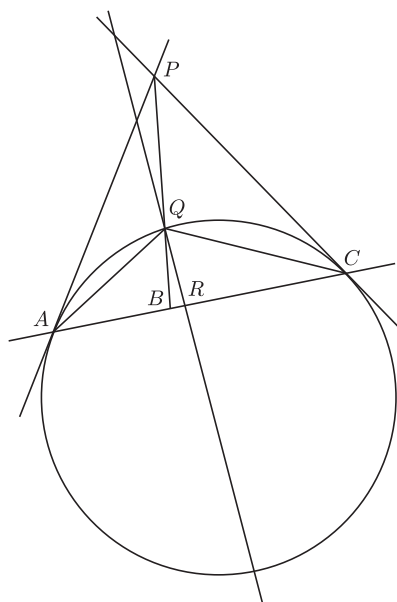
Jako że $\sphericalangle FG'E = \sphericalangle FGE = 180^\circ - \sphericalangle GEF - \sphericalangle GFE = 180^\circ - \sphericalangle GHE - \sphericalangle GHF = 180^\circ - \sphericalangle EHF$, punkty E, H, F, G' leżą na jednym okręgu, stąd

$$\sphericalangle G'HF = \sphericalangle G'EF = \sphericalangle FEG = \sphericalangle GHE.$$

Zatem skoro GH jest środkową trójkąta HEF , to HG' jest symedianą tego trójkąta. Zatem punkty H, G', I leżą na jednej prostej.

Symedianą i jej własnościami można posłużyć się również jako narzędziami w dowodzie.

Zadanie 2 (Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna 2003). Trzy różne punkty A, B, C leżą kolejno na jednej prostej. Niech Γ będzie okręgiem przechodzącym przez punkty A i C , którego środek nie leży na prostej AC . Niech P będzie punktem przecięcia stycznych do okręgu w punktach A i C . Punkt przecięcia odcinka PB z okręgiem Γ oznaczmy jako Q . Udowodnij, że punkt przecięcia dwusiecznej $\sphericalangle AQC$ i odcinka AC nie zależy od wyboru okręgu (rys. 12).



Rys. 12

Rozwiązanie. Niech QR będzie dwusieczną $\sphericalangle AQC$. Z twierdzenia o dwusiecznej możemy zapisać, że

$$\frac{AR}{RC} = \frac{AQ}{QC}.$$

Zatem należy wykazać, że stosunek z Q nie zależy od wyboru okręgu Γ . Z twierdzenia sinusów otrzymujemy, że

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{\sin \sphericalangle ACQ}{\sin \sphericalangle CAQ}.$$

Ale korzystając z twierdzenia o siecznej i stycznej, mamy

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{\sin \sphericalangle PAQ}{\sin \sphericalangle PCQ}.$$

Przekształcając powyższy związek, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{AQ}{QC} &= \frac{\sin \sphericalangle PAQ}{\sin \sphericalangle PCQ} = \frac{\frac{PQ}{AP} \sin \sphericalangle AQP}{\frac{PQ}{CP} \sin \sphericalangle CQP}} = \\ &= \frac{\sin \sphericalangle AQP}{\sin \sphericalangle CQP}} = \\ &= \frac{\sin \sphericalangle AQB}{\sin \sphericalangle CQB}} = \frac{\frac{AB}{AQ} \sin \sphericalangle ABQ}{\frac{CB}{CQ} \sin \sphericalangle CBQ}} = \frac{AQ \cdot QC}{CB \cdot AQ}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{AQ^2}{QC^2} = \frac{AB}{CB}.$$

Zatem QB jest symedianą w trójkącie ACQ . Powyższe stwierdzenie potwierdza, że punkt przecięcia dwusiecznej $\sphericalangle AQC$ i odcinka AC nie zależy od wyboru okręgu Γ .

Na tym zakończę dzisiejszą opowieść, choć muszę ostrzec, że pokazane przeze mnie twierdzenia to tylko kilka wybranych zależności. Możemy, na przykład, wyznaczyć również długość symediany za pomocą twierdzenia Stewarta czy stosunek jej podziału przez punkt Lemoine'a za pomocą twierdzenia van Aubela. Podsumowując to opowiadanie, dodam, że nie wiem, czy symediana będzie żyła długo i szczęśliwie, ale mam nadzieję, że pozostanie w pamięci Czytelników.



mała delta

O tym, jak Puchatek podzbiory permutował

Niektórzy znajdują co rano na progu swojego domu butelkę ze świeżym mlekiem. Kubuś Puchatek każdego ranka znajduje tam n garnczków miodu. Garnczki są różnej wielkości i Kubuś każdego dnia stara się opróżniać je w innej kolejności. Oczywiście, nawet Kubuś wie (po tym, jak mu to wytłumaczył Krzyś), że jest $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ sposobów, na jakie to może zrobić (na n sposobów może wybrać pierwszy garnczek, na $n - 1$ sposobów drugi itd.). Dziś jednak Kubuś jest w nastroju do niebezpiecznych rozmyślań i zastanawia się, co się stanie, jeśli dopuści możliwość, że może nie opróżnić wszystkich garnczków. „Oczywiście, jest to zupełnie bezsensowne z punktu widzenia misiowego żołądka – pomyślał Kubuś. – Ale ciekawe, jak bardzo zwiększy to liczbę sposobów dokonania wyboru.”

Zsumujmy liczbę uporządkowań poszczególnych podzbiorów n -elementowego zbioru garnczków – oznaczmy tę liczbę przez $s(n)$ i spróbujmy ją obliczyć dla małych przykładów. Dla $n = 1$ mamy dwie możliwości: Kubuś albo opróżni jedyny garnczek, jaki ma, albo nie zrobi tego, zatem $s(1) = 2$. Dla $n = 2$ mamy już pięć sposobów postępowania: Kubuś nie robi nic, opróżnia jeden z dwóch garnczków, albo opróżnia oba garnczki w jednej z dwóch kolejności. Natomiast dla trzech garnczków mamy $s(3) = 16$ sposobów (nic, 1, 2, 3, 12, 13, 21, 23, 31, 32, 123, 132, 213, 231, 312, 321). Wyniki dalszych eksperymentów udokumentowane są w tabelce na marginesie.

n	$n!$	$s(n)$
1	1	2
2	2	5
3	6	16
4	24	65
5	120	326
6	720	1957

Liczba uporządkowań n garnczków oraz liczba uporządkowań dowolnych podzbiorów n garnczków.

Z tabelki wynika, że dla małych przykładów $s(n) < 3 \cdot n!$, czyli rozważanie uporządkowań podzbiorów zwiększa liczbę sposobów co najwyżej 3 razy. Okazuje się, że tak jest również dla większych n . Kubuś chętnie podzieliłby się tym odkryciem z Krzysiem, ale do tego potrzebuje je udowodnić. Pomóżmy mu.

Jeśli Kubuś chce danego dnia opróżnić k garnczków, to pierwszy garnczek może wybrać na n sposobów, drugi na $n - 1$ sposobów, aż do ostatniego, który może wybrać na $n + 1 - k$ sposobów. To sumarycznie daje nam $n!/(n - k)!$ możliwości. Sumując po wszystkich możliwych wyborach k , dostajemy

$$s(n) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n - k)!} = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Gdybyśmy poprosili o pomoc uczoną Sowę, na pewno podpowiedziałałaby nam, że wartość sumy z prawej strony jest rzeczywiście ograniczona przez 3, a dokładniej jest nie większa niż

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \approx 2,7182818.$$

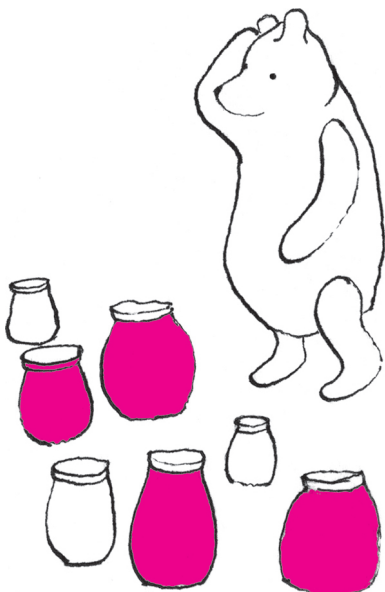
Z tego wynika, że wartość $s(n)$ może być przybliżona przez $n! \cdot e$. Pójdźmy krok dalej i obliczmy, jak dobre jest to przybliżenie. Zauważmy, że dla $n \geq 1$ mamy

$$\begin{aligned} n! \cdot e - s(n) &= n! \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots < \\ &< \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e - 2 < 1. \end{aligned}$$

Skoro zatem $n! \cdot e$ jest większe od całkowitej liczby $s(n)$, ale nie więcej niż o 1, to części całkowite tych dwóch liczb muszą być takie same. Dzięki temu w nagrodę za naszą wytrwałość dostajemy związany wzór na poszukiwaną liczbę uporządkowań podzbiorów n garnczków:

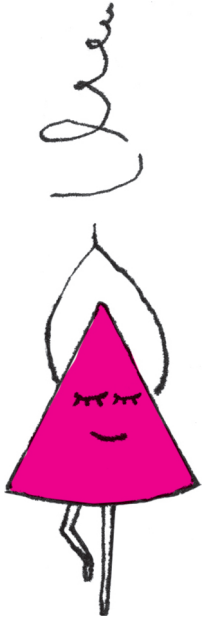
$$s(n) = \lfloor n! \cdot e \rfloor.$$

Małą Deltę przygotował Tomasz IDZIASZEK



O obrotach centrów trójkąta

Zająłem się ciekawym problemem dotyczącym centrów trójkąta. Ciekawym, bo łatwym do wyobrażenia, a w pewnych aspektach nawet bardzo trudnym.



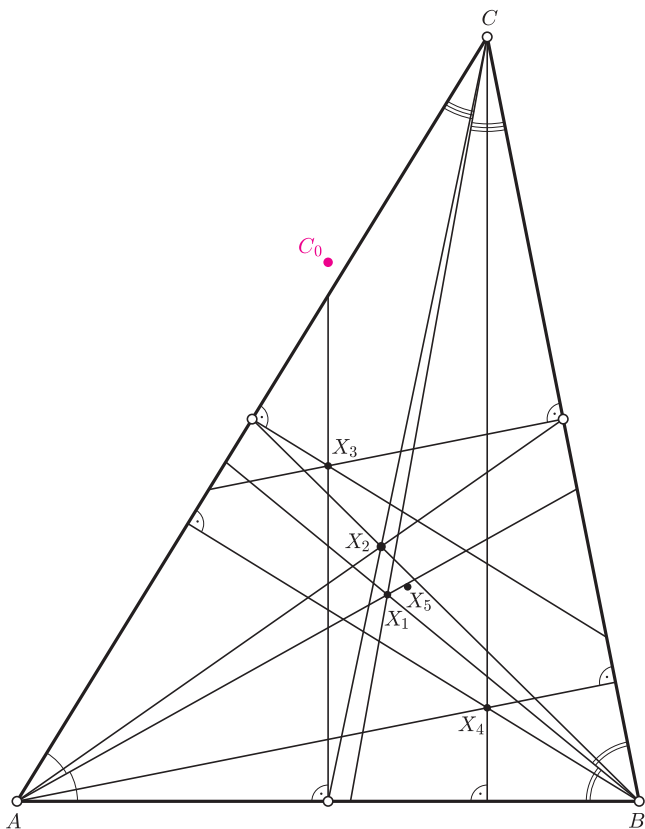
Najpierw wyjaśnienie, dlaczego napisałem „centrów”, a nie zwyczajnie „środków” – chodzi tu o wspólną nazwę dla wszelkiego rodzaju wyróżnionych punktów związanych z trójkątem. Właściwie każdy punkt można jako wyróżnić – np. Clark Kimberling wyróżnił i opisał ich kilka tysięcy w swojej *Encyclopedia of Triangle Centers*. Tutaj „z imienia i nazwiska” będą przywołane: środek okręgu wpisanego jako X_1 , środek ciężkości jako X_2 , środek okręgu opisanego jako X_3 , ortocentrum jako X_4 , środek okręgu Feuerbacha (czyli dziewięciu punktów) jako X_5 .

Na początek rozważmy wszystkie trójkąty równoramienne o wspólnej podstawie AB z wierzchołkiem C w danej półpłaszczyźnie ograniczonej prostą AB . Dla ustalenia uwagi wprowadzimy prostokątny układ współrzędnych, w którym $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, t)$, $t > 0$. Interpretując t jako czas, możemy powiedzieć, że wierzchołek C porusza się ruchem jednostajnym z prędkością 1 w górę, po symetralnej odcinka AB . Po tej samej prostej poruszają się wymienione centra trójkąta ABC . Skupimy się na razie na X_2 i X_3 . Póki $t < \sqrt{3}$, centrum X_3 jest pod X_2 . W chwili $t = \sqrt{3}$, gdy trójkąt ABC staje się równoboczny, centrum X_3 dogania X_2 . Dla $t > \sqrt{3}$ centrum X_3 wychodzi na prowadzenie i potem już cały czas jest ponad X_2 . Nic dziwnego: w pogoni za X_2 centrum X_3 rozwinęło większą prędkość, więc po nieuchronnym zrównaniu musiało je wyprzedzić. Centra X_1 i X_5 w chwili zrównania mają te same prędkości i nie następuje zmiana lidera.

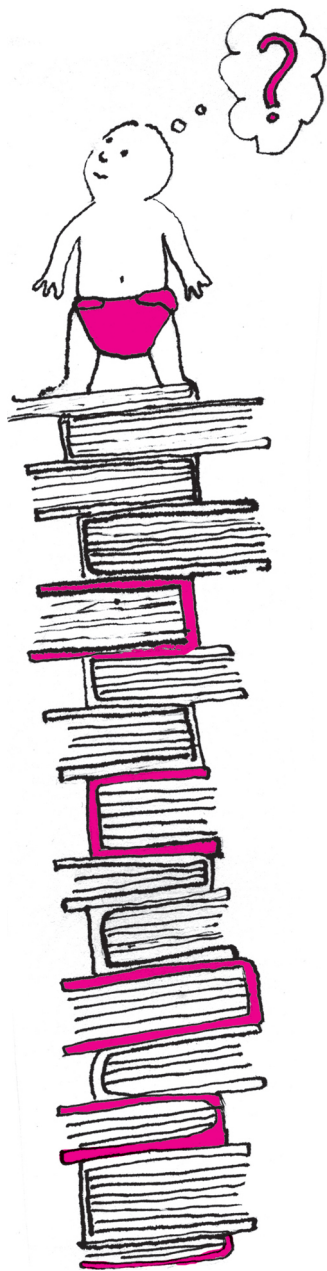
Zrezygnujmy teraz z założenia, że trójkąt ABC jest równoramienny, a niech trójkąt ABC_0 będzie równoboczny. Rozważmy problem: ile okrążeń wokół X_i dokona centrum X_j , gdy wierzchołek C jednokrotnie okrąży punkt C_0 zgodnie z ruchem wskazówek zegara (wierzchołki A i B tkwią tam, gdzie poprzednio)? Z rozważań topologicznych (których nie będę tu przytaczał) wynika, że jeśli centra X_i i X_j pokrywają się wyłącznie w trójkącie równobocznym, to odpowiedź na to pytanie nie zależy od konkretnego kształtu krzywej, po której wierzchołek C obiega punkt C_0 – możemy więc przyjąć, że krzywa ta jest okręgiem. Na małym okręgu wokół punktu C_0 położonych jest dokładnie 6 punktów, z których każdy tworzy wraz z punktami A i B pewien trójkąt równoramienny. Dla tych sześciu punktów znamy kierunek wektora $\vec{X_i X_j}$. Nietrudno zgadnąć na tej podstawie, że X_3 obiegnie jednokrotnie X_2 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, natomiast X_5 dwukrotnie okrąży X_1 zgodnie z ruchem wskazówek.

Wydaje się, że trzy obroty wektora $\vec{X_i X_j}$ wokół X_i są wykluczone. Okazuje się jednak, że możliwe są cztery. W tym celu wskazałem odpowiednie dwa centra (inne od wymienionych – każdy może przecież zdefiniować swoje własne centra, nie ograniczając się nawet do encyklopedii Kimberlinga). Jak to zrobiłem, możesz dowiedzieć się na stronie www.deltami.edu.pl, ale może najpierw sam spróbujesz?

Dariusz MIKLASZEWSKI



Centra X_1, \dots, X_5 w trójkącie równobocznym.



Rozwiązanie zadania M 1448.
Wymnażając wyrażenia w nawiasach i redukując wyrazy podobne, dostajemy równoważną nierówność

$$6xyz \leq x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2,$$

która jest prawdziwa wobec nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną.

Zdolne dziecko. Pierwsza pomoc

Tytuł pożyczyłam od Marcina Brauna i Marii Mach, którzy tak zatytułowaną książeczkę opublikowali jako rodzaj przemyśleń po ponad 30. latach działalności Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci. Tytuł zadziorny, natychmiast prowokujący do formułowania własnych poglądów. Tym bardziej, jeżeli sami byliśmy zdolnym dzieckiem lub jako takie oceniamy swoich potomków. Myślę o tym tytule także po dwóch dniach uczestniczenia w III Forum Klubu Młodego Odkrywcy (listopad 2014, Centrum Nauki Kopernik). Uczestnicy Forum spotkali się m.in. z Panią Agatą Wilam, dyrektorką jednego z dużych polskich „Uniwersytetów Dzieci” i już wspomnianą wyżej Marią Mach. Dla obu stron było to ważne spotkanie i konfrontacja poglądów oraz osiągnięć.

Na III Forum przyjechało z całutkiej Polski kilkuset opiekunów takich klubów, w większości przypadków nauczycieli. Klub powstaje „przy szkole” (niekoniecznie w szkole), gdy znajdzie się ktoś natchniony, kto pragnie spotkać z dziećmi zadającymi pytania. Jeżeli takim dzieciom zajęcia w klubie dostarczą satysfakcji, to klub trwa i się rozwija. Z pracy w KMO, w najmniej sformalizowanej formie ukazywania dziecku nowych możliwości badawczych, wynika najważniejsze odkrycie: w dziecku (i w dorosłym) motorem działań musi być ciekawość.

Kluby powstają na wszystkich poziomach edukacji, tylko pytania stają się coraz trudniejsze. W projektowaniu zajęć uczestniczą także młodzi. Opiekun nie cofa się przed stwierdzeniem: *nie wiem, poszukajcie odpowiedzi sami*. Pytania wynikają z obserwacji życia wokół, nie patrzenia, ale właśnie obserwacji. Jak wie każdy, kto kiedykolwiek zajmował się badaniami naukowymi, znalezienie odpowiedzi na pytanie nasuwa kilka nowych. W dodatku każdy może szukać odpowiedzi inaczej. Na warsztatach Forum zrobiliśmy proste i klasyczne doświadczenie: jeżeli kilku osobom poradzimy, żeby parę razy złożyły kartkę na kolejne „pół”, a po każdym takim zabiegu odrywali lewy górny róg, to trudno po rozłożeniu potem kartki znaleźć w grupie dwa identyczne wzory. Bo każdy inaczej decyduje o tym, co oznacza polecenie złożenia na połowę!

Cytuję parę śródtytułów ze wspomnianego tekstu obojga autorów.

Myślenie jest dla wszystkich, a uczniowie potrzebują intelektualnej samodzielności, a nie zwiększenia informacji. Wysoka średnia ocen nie wyklucza zdolności, ale nie jest ich dowodem. Nauczyciel jest niezbędny, by porządkować wiedzę i nauczyć mądrego stawiania pytań. Jeśli kroczymy od sukcesu do sukcesu, to najprawdopodobniej prawdziwe problemy omijamy szerokim łukiem. Także zdolne dziecko musi się czasem ponudzić. Im później przychodzi porażka, tym gorzej. Rozmowa jest niedocenianą formą kontaktu z uczniem. W grupie zdolnych zdolny jest wreszcie zwyczajnym człowiekiem.

Każde z tych stwierdzeń warte jest namysłu. Wszyscy kształcący w sposób nietypowy zgodni są z poglądem, że nie powinno się oddzielać socjalnie tzw. „zdolnych” od „niezdolnych”, ponieważ nie mamy kryteriów wyodrębniania żadnej z tych grup. Ostatnio dowiedziałam się, na przykład, że dysleksja stwarza ludzi o INNYM postrzeganiu świata, dostrzegających inaczej. Ale nie gorzej, oni widzą różnorodność świata na sposób często umykający uwagi rówieśników.

Na Forum rozmawialiśmy także o klubach tworzonych w środowiskach pozaszkolnych, np. wśród dzieci z tzw. trudnych rodzin. Okazało się, czego należało się spodziewać wśród dyskutantów tego kręgu, że można (i trzeba) z nimi pracować tak samo, jak w innych klubach, co więcej, na Pikniku Naukowym CNK zdobywają często najwyższe oceny publiczności, za autentyczne zaangażowanie w upowszechnianiu i nauki, i swoich osiągnięć.

Pozostaje chyba tylko życzyć sobie, żeby te różne edukacyjne obserwacje i działania przenieść w świat ludzi dorosłych. Stanie się on ciekawszy, ułatwi dojrzalą realizację różnorodnych pasji.

Magdalena FIKUS

Proste zadanie o wielomianach

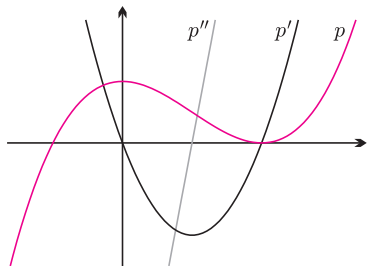
Weźmy wielomian $p(x) = a(x+b)^n$ i obliczmy wszystkie jego niezerowe pochodne:

$$\begin{aligned} p'(x) &= na \cdot (x+b)^{n-1}, \\ p''(x) &= n(n-1)a \cdot (x+b)^{n-2}, \\ &\dots \\ p^{(k)}(x) &= \frac{n!}{(n-k)!} a \cdot (x+b)^{n-k}, \\ &\dots \\ p^{(n-1)}(x) &= \frac{n!}{1!} a \cdot (x+b), \\ p^{(n)}(x) &= n!a. \end{aligned}$$

Widzimy, że $p(x)$ ma wspólny pierwiastek z każdą ze swoich pochodnych $p'(x), p''(x), \dots, p^{(n-1)}(x)$. Czy są inne wielomiany o tej własności?

Zadanie. Niech $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $a_n \neq 0$. Przypuśćmy, że dla każdego $k = 1, \dots, n-1$ wielomiany $p(x)$ i $p^{(k)}(x)$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty. Udowodnij, że $p(x) = a(x+b)^n$.

Wielomiany $p(x)$ i $p'(x)$ mają wspólny pierwiastek wtedy i tylko wtedy, gdy $p(x)$ ma przynajmniej jeden pierwiastek wielokrotny. Tym samym rozwiązaliśmy zadanie dla $n=2$, bo wielomian stopnia 2, mający pierwiastek wielokrotny, jest postaci $a(x+b)^2$. Dla $n=3$ musimy jeszcze rozważyć wielomiany postaci $p(x) = a(x+b)^2(x+c)$, gdzie $b \neq c$, jednak taki wielomian nie może mieć wspólnego pierwiastka ze swoją drugą pochodną $p''(x)$, o czym przekonuje nas rzut oka na rysunek. Zatem także dla $n=3$ zadanie jest rozwiązane.



Podobny argument – prosta analiza wzajemnego położenia pierwiastków wielomianu i jego pochodnych na podstawie twierdzenia Rolle'a – działa jeszcze dla $n=4$.

Spróbujmy inaczej. Dla dowolnych dwóch wielomianów $p(x)$ i $q(x)$ zdanie „ $p(x)$ i $q(x)$ mają wspólny czynnik” można zapisać jako równanie algebraiczne zawierające współczynniki tych wielomianów. Czytelnikom zainteresowanym szczegółami polecamy zapoznanie się z pojęciem *rugownika* (ang. *resultant*) dwóch wielomianów. Wobec tego warunek z treści zadania prowadzi do układu $n-1$ równań algebraicznych w zmiennych a_n, \dots, a_0 . Na przykład dla $n=2$ dostajemy znaną wszystkim „deltę”:

$$a_1^2 - 4a_2a_0 = 0,$$

a dla $n=3$ mamy warunki:

$$\begin{aligned} -a_2^2 a_1^2 + 4a_3 a_1^3 + 4a_3^2 a_0 - 18a_3 a_2 a_1 a_0 + 27a_3^2 a_0^2 &= 0, \\ -2a_2^3 + 9a_3 a_2 a_1 - 27a_3^2 a_0 &= 0 \end{aligned}$$

i tak dalej. Pozostaje wykazać, że jedyne rozwiązania tak otrzymanego układu odpowiadają współczynnikom

wielomianów postaci $a(x+b)^n$. Jak dotychczas, możliwości obliczeniowe znanych algorytmów rozwiązywania układów równań algebraicznych kończą się na $n=12$, i w tym zakresie nasze zadanie można uznać za rozwiązane (zob. [CLO14]).

Jak ważne jest założenie, że $p(x)$ ma wspólny pierwiastek ze *wszystkimi* swoimi pochodnymi do rzędu $n-1$ włącznie?

Spójrzmy na przykład:

$$\begin{aligned} p(x) &= x(x^2-1)(x^2-9) = x^5 - 10x^3 + 9x, \\ p'(x) &= 5x^4 - 30x^2 + 9, \\ p''(x) &= 20x^3 - 60x = 20x(x^2-3), \\ p'''(x) &= 60x^2 - 60 = 60(x^2-1), \\ p''''(x) &= 120x. \end{aligned}$$

Wielomian $p(x)$ ma wspólny pierwiastek z każdą wymienioną pochodną z wyjątkiem pierwszej. Okazuje się, co więcej, że dla każdej takiej pary k, n , że $1 \leq k \leq n-1$, można skonstruować wielomian stopnia n , mający wspólny pierwiastek z każdą ze swoich pochodnych z wyjątkiem k -tej, i który nie jest postaci $a(x+b)^n$. Czytelnik może się o tym przekonać, eksperymentując z jednym z wielu programów (np. [Dra] lub [Tor]) pozwalających wizualizować wzajemne położenie pierwiastków wielomianu i pierwiastków jego pochodnych. Ambitniejszy Czytelnik, wykorzystując twierdzenie Brouwera o punkcie stałym, może spróbować samodzielnie udowodnić nawet silniejsze twierdzenie: dla każdego wyboru $n-2$ par liczb naturalnych (k_i, m_i) , spełniających $1 \leq k_i \leq n-1$ oraz $1 \leq m_i \leq n-k_i$ dla $i=1, \dots, n-2$, istnieje taki wielomian f stopnia n , że m_i -ty co do wielkości pierwiastek k_i -tej pochodnej f jest również pierwiastkiem f oraz f nie jest postaci $a(x+b)^n$.

Czytelnik już na pewno podejrzewa, że nasze zadanie jest trudniejsze niż typowe zadanie olimpijskie, nawet jeżeli na takie wygląda. Faktycznie, jest ono znane jako *hipoteza Casas-Alvero* od nazwiska matematyka, który postawił ją na początku obecnego wieku w związku ze swoją pracą nad krzywymi algebraicznymi. Dokładniej rzecz biorąc, hipoteza Casas-Alvero mówi o wielomianach o współczynnikach zespolonych, mających wspólne pierwiastki zespolone ze swoimi pochodnymi. Nasze sformułowanie, potencjalnie łatwiejsze, jest jednak także problemem otwartym. Przez ponad dekadę nastąpił tylko nieznaczny postęp w pracach nad hipotezą, lecz Czytelnik nie powinien się tym zrażać – najprawdopodobniej niewielu matematyków nią się interesuje. Używając silnych narzędzi algebraicznych, udowodniono, na przykład, [GvBLSvdW07], że hipoteza jest prawdziwa dla wielomianów stopnia $n = p^k$ lub $n = 2p^k$, gdzie p jest liczbą pierwszą i w kilku innych szczególnych przypadkach. Po bieżące wyniki odsyłamy do publikacji dostępnych w Internecie.

Michał ADAMASZEK, Sławomir KOLASIŃSKI

Literatura

- [CLO14] W. Castryck, R. Laterveer, and M. Ounaies, *Constraints on counterexamples to the Casas-Alvero conjecture and a verification in degree 12*, Math. Comp. 83 (2014), no. 290, 3017–3037.
- [Dra] J. Draisma, *Casas-Alvero conjecture Java applet*, <http://www.win.tue.nl/~jdraisma/index.php?location=recreational>.
- [GvBLSvdW07] H.-Ch. Graf von Bothmer, O. Labs, J. Schicho, and Ch. van de Woestijne, *The Casas-Alvero conjecture for infinitely many degrees*, J. Algebra 316 (2007), no. 1, 224–230.
- [Tor] B. Torrence, *Wolfram Demonstration Project. Lucas-Gauss Theorem*, <http://demonstrations.wolfram.com/LucasGaussTheorem/>.

Skąd wiadomo, że moneta ma i orła, i reszkę?

W *Delcie* 1/2015 Łukasz Rajkowski oszacował, kiedy należy spodziewać się końca świata. Narzędziem użytym w tej analizie było wnioskowanie bayesowskie. Nie od dziś wiadomo, że należy je stosować z odpowiednią ostrożnością oraz dbałością o założenia i interpretacje. Dlaczego? Zastanówmy się nad poniższym prostym przykładem, gdzie na użytek tych, którzy nie wyobrażają sobie prawdopodobieństwa bez kul w urnach lub rzutów monetą, został wykorzystany ten ostatni model.

Rozważania te inspirowane są znanym w statystyce paradoksem Jeffreysa–Lindleya. Za cenę technicznej komplikacji przedstawiane tu dylematy można jeszcze bardziej wystrzyć.

W cyrkach, do których nie dotarła jeszcze zasada równouprawnienia płci, sztuczki magiczne przedstawiane są przez magika wspieranego przez asystentkę. Wyobraźmy sobie sztuczkę, podczas której asystentka zamykana jest w solidnej skrzyni wraz z symetryczną monetą, którą wykonuje m rzutów, odczytując na głos wyniki. Niestety, od czasu do czasu asystentkę nachodzi przemożna chęć zełgania wyniku: z prawdopodobieństwem p_b udzieli ona zatem odpowiedzi R , gdy wypadnie orzeł, a odpowiedzi O po uzyskaniu reszki.

Przedstawiona sytuacja może wydawać się, jak to w cyrku, nieco sztuczna, ale cyrk ten to w zasadzie codzienność dowolnego badacza wykonującego i interpretującego doświadczenia. Opisany model jest przecież bardzo podobny choćby do dylematów fizyka cząstek elementarnych, który musi wybrać między hipotezą nieistnienia nowej cząstki oraz istnienia nowej cząstki o nieznannej masie (analogia staje się szczególnie wyraźna, gdy ciągi orłów i reszek utożsamimy z zapisanymi w systemie dwójkowym możliwymi masami owej cząstki).

Wyniki podane magikowi przez asystentkę tworzą następujący ciąg danych

$$D = \underbrace{ORRR \dots R}_{m-1}.$$

Zadanie magika polega na rozstrzygnięciu, która z poniższych hipotez jest *poprawna*, tzn. lepiej opisuje rzeczywistość.

H_0 : Moneta ma dwie reszki. (Moneta bez orła?! Prezes NBP przed Trybunał Stanu!)

H_A : Moneta jest zwykłą symetryczną monetą z orłem i reszką.

Korzystając z twierdzenia Bayesa, magik może obliczyć prawdopodobieństwo tego, że prawdziwa jest hipoteza H_0 pod warunkiem uzyskania danych D :

$$\mathbb{P}(H_0|D) = \frac{\mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}(D|H_0)}{\mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}(D|H_0) + \mathbb{P}(H_A)\mathbb{P}(D|H_A)}.$$

Prawdopodobieństwem warunkowym $\mathbb{P}(A|B)$ zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B , nazywamy liczbę

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Prawdopodobieństwa $\mathbb{P}(H_0)$ i $\mathbb{P}(H_A)$ muszą zostać przyjęte niejako „z góry” i „na wiarę” – wyrażają one *poglądy* magika na temat modelowanego zjawiska. Jasne jest, że $\mathbb{P}(D|H_0) = p_b(1 - p_b)^{m-1}$ (jeżeli asystentka rzuca monetą dwureszkową, to wynik pierwszego rzutu musiał być zmyślny, a pozostałe – nie) oraz $\mathbb{P}(D|H_A) = 1/2^m$ (jeżeli orły i reszki pojawiają się losowo, to ciąg D jest jednym z 2^m możliwych wyników i losowe kłamstwo asystentki tego nie zmienia). Zachodzi zatem równość:

$$\mathbb{P}(H_0|D) = \frac{\mathbb{P}(H_0)p_b(1 - p_b)^{m-1}}{\mathbb{P}(H_0)p_b(1 - p_b)^{m-1} + \mathbb{P}(H_A) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m}.$$

Ściśle rzecz biorąc, wnioskowanie statystyczne wykazuje powinowactwo z manią ogarniającą niektórych śledczych: nie ma hipotez, które należy przyjąć za prawdopodobne (a więc opisujące rzeczywistość), są tylko takie, których nie można odrzucić.

Niezależnie od poglądów na temat wartości $\mathbb{P}(H_0)$ i $\mathbb{P}(H_A)$, przy $p_b < \frac{1}{2}$ prawdopodobieństwo $\mathbb{P}(H_0|D)$ może być dowolnie bliskie jedności (a prawdopodobieństwo $\mathbb{P}(H_A|D)$ dowolnie bliskie zera) pod warunkiem, że m jest dostatecznie duże. Oznacza to, że uzyskanie przez asystentkę odpowiednio długiego ciągu reszek będzie argumentem na rzecz odrzucenia przez magika hipotezy H_A i *uznania* hipotezy H_0 za prawdopodobną.

Nietrudno sprawdzić, że dla $\mathbb{P}(H_0) = \mathbb{P}(H_A) = \frac{1}{2}$ magik odrzuca hipotezę H_A na tym samym *poziomie istotności*, na jakim widz odrzuca hipotezę H_0 , o ile $p_b \approx \frac{1}{\sqrt{m}2^{m/2}}$.

Intuicyjnie oczywiste? Jednak z jednej z łóż słycać gwizdy! Siedzący tam widz postanowił spojrzeć na cyrkową sztuczkę od bardziej klasycznej strony. Można przecież sprawdzić, czy hipoteza H_0 jest po prostu zgodna z danymi D . Gdyby hipoteza H_0 była prawdziwa, prawdopodobieństwo uzyskania wyniku innego niż ciąg samych reszek równałoby się $1 - (1 - p_b)^m$. Jeżeli p_b jest odpowiednio małą liczbą, prawdopodobieństwo to także jest małe, więc widz mógłby żądać *odrzuć* hipotezy H_0 .

To właściwie dlaczego odrzuciłeś hipotezę, że moneta ma i orła, i reszkę, magiku?

Krzysztof TURZYŃSKI

Coś tu śmierdzi, czy to chlor?

Znowu doniesiono o odkryciu ciemnej materii. Całkiem dawno, bo przed rokiem. Czemu zatem fizycy cząstek elementarnych nie rzucili się odkorkowywać szampana oraz umawiać na wywiady w telewizjach śniadaniowych i na randki z wyróżniającymi się młodszymi specjalistami modelingu (co wydaje się być powszechnie przyjętym atrybutem sławy i uznania)? Sprawa jest prosta – nowe, nieoczekiwane wyniki naukowe muszą się nieco *ucukrować* i *uleżeć*. Nie chodzi tu, rzecz jasna, o nabieranie dostojności i mocy urzędowej, ale o wytrzymanie naporu krytyki, jaka zwykle się w takich sytuacjach podnosi.

A było tak. Esra Bulbul ze współpracownikami postanowił się bliżej przyjrzeć liniom emisyjnym w gromadach galaktyk oraz w najjaśniejszej na północnym niebie Galaktyce Andromedy. Uważa się bowiem, iż zawarta w takich obiektach świecąca materia utrzymywana jest w nich, między innymi, wskutek grawitacyjnego oddziaływania ciemnej materii, nieemitującej i nieabsorbującej światła. Gdyby cząstki ciemnej materii były bardzo długo żyjące, ale nietrwałe, a jednym z produktów ich rozpadu był foton, powinniśmy obserwować emisję takich fotonów o energii równej $\frac{1}{2}mc^2$, połowie energii spoczynkowej cząstek ciemnej materii o masie m . Bulbul i koledzy zabrali się więc za analizę danych dotyczących promieniowania rentgenowskiego badanego przez satelity XMM i Chandra, stwierdzając, że zarówno w Galaktyce Andromedy, jak i w gromadach galaktyk w gwiazdozbiorach Perseusza, Centaura, Wężownika i Warkocza Bereniki widać tajemniczą linię emisyjną odpowiadającą energii 3,55 keV [1]. Analogiczne wyniki zostały uzyskane równolegle i upublicznione nieco później przez Alexeya Boyarsky'ego i kolegów [2].

Jak zwykle w takich sytuacjach teoretycy zaczęli na wyścigi proponować modele wyjaśniające ten stan rzeczy. Wiele z tych modeli zakładało, że nową cząstką, której rozpadu udało się zaobserwować, jest tzw. neutrino sterylne o masie $7,1 \text{ keV}/c^2$, rozpadające się na zwykłe neutrino i foton.

Latem ubiegłego roku radość z odkrycia zaczęła słabnąć. Tesla Jeltema i Stefano Profumo opublikowali analizę o chwytliwym tytule *Dark matter searches going bananas* (w luźnym tłumaczeniu: poszukiwaczom ciemnej materii odbiło), w której zwracali uwagę na konieczność bardzo dokładnego modelowania emisji wszystkich fotonów o rozważanej energii [3]. W szczególności spojrzeli się oni widmom emisyjnym centrum naszej Galaktyki i stwierdzili, że linie emisyjne jonów potasu o dwóch elektronach doskonale opisują sytuację w miejscu linii odkrytej przez Bulbula i współpracowników, chociaż ciemna materia powinna i tam dawać jakiś sygnał. Zwrócili również uwagę na to, że analiza konkurencyjnego zespołu zakłada, iż natężenia tych linii emisyjnych nie przekraczają wartości obliczonych na podstawie analizy widmowej siarki z jednym elektronem,

co obarczone jest trudnym do oszacowania błędem systematycznym. Jego uwzględnienie oraz włączenie do analizy linii emisyjnych jonów chloru z jednym elektronem pozwoliło wyjaśnić obserwowane widma bez konieczności postulowania nowych cząstek i oddziaływań, sprowadzając całą dyskusję do zagadnień modelowania znajdującej się w obiektach astronomicznych zjonizowanej materii.

Na kontratak nie trzeba było długo czekać. Kilka dni później Boyarsky i współpracownicy ogłosili, że w centrum naszej Galaktyki *widać* będącą przedmiotem dyskusji linię widmową [4]. Odtąd spór rozdzielił się na dwa główne wątki: co naprawdę widać w liniach emisyjnych galaktyk i gromad galaktyk oraz jak linie te modelować.

Jeszcze latem Malyshev i współpracownicy przeanalizowali linie emisyjne galaktyk karłowatych, które powinny zawierać proporcjonalnie dużo ciemnej materii, ale nie znaleźli żadnych odstępstw od znanej fizyki [5]. Negatywny wynik, niezgodny z [1], przyniosła analiza Andersona i współpracowników, którzy zbadali wiele galaktyk i gromad galaktyk [6]. Jesienią Urban i współpracownicy donieśli, że nie dostrzegli żadnej nowej linii w gromadach galaktyk w gwiazdozbiorach Panny, Wężownika i Warkocza Bereniki, ale znaleźli ją w gromadzie w gwiazdozbiorze Perseusza [7]. Równolegle, Jeltema i Profumo, wspomagani przez Erica Carlsona, zbadali dokładnie kształty linii emisyjnych, dochodząc do wniosku, że nie mogą one pochodzić z rozpadu cząstek ciemnej materii [8].

Wartko toczy się także dyskusja na temat właściwego modelowania zjonizowanej materii w gromadach galaktyk. Bulbul ze współpracownikami zauważyli, że Jeltema i Profumo użyli błędnych danych do swoich oszacowań [9], ci utrzymują z kolei, że po uwzględnieniu poprawki ich wnioski pozostają niezmienione. Krótko mówiąc, mamy do czynienia z wiedzą podręcznikową *in statu nascendi*.

Co do jednego wszyscy się jednak już zgadzają. Sporna linia emisyjna na pewno nie pochodzi od chloru, gdyż ten dawałby także dodatkowe linie emisyjne o innych energiach.

Krzysztof TURZYŃSKI

Ta i wiele innych fascynujących historii ze współczesnej fizyki cząstek elementarnych relacjonowana jest w miarę rozwoju wydarzeń na angielskojęzycznym blogu resonaances.blogspot.com. Niewątpliwie będą tam też omówione kolejne zwroty akcji w opisywanej wyżej sprawie.

[1] Bulbul *et al.*, arxiv.org/abs/1402.2301.

[2] Boyarsky *et al.*, arxiv.org/abs/1402.4119.

[3] Jeltema, Profumo, arxiv.org/abs/1408.1699.

[4] Boyarsky *et al.*, arxiv.org/abs/1408.2503.

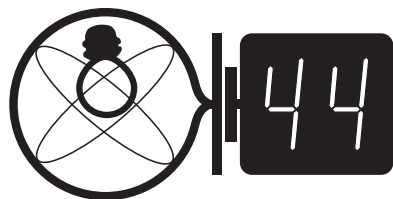
[5] Malyshev *et al.*, arxiv.org/abs/1408.3531.

[6] Anderson *et al.*, arxiv.org/abs/1408.4115.

[7] Urban *et al.*, arxiv.org/abs/1411.0050.

[8] Carlson *et al.*, arxiv.org/abs/1411.1758.

[9] Bulbul *et al.*, arxiv.org/abs/1409.4143.

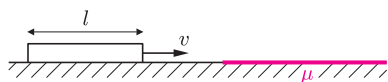


Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2015

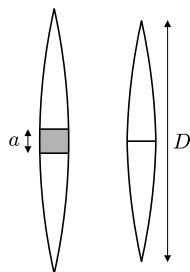
Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po 581 zadaniach

Tomasz Wietecha (Tarnów)	9	43,56
Tomasz Rudny (Warszawa)		37,68
Andrzej Idzik (Bolesławiec)	11	31,77
Jacek Konieczny (Poznań)		27,92
Ryszard Woźniak (Kraków)		22,51
Marian Łupieżowicz (Gliwice)	1	20,47
Krzysztof Magiera (Łosiów)	3	12,44
Michał Koźlik (Gliwice)	1	9,63
Jacek Piotrowski (Rzeszów)	2	8,89
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	3	3,08
Paweł Kubit (Kraków)		1,09

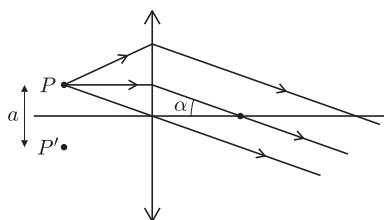
Liczba przed pauzą oznacza krotność
zdobycia 44 punktów.



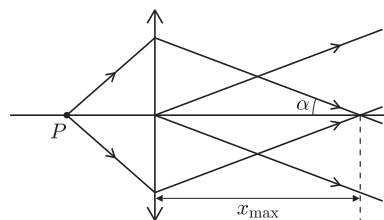
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Skrót regulaminu

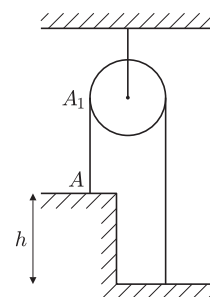
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 592, 593

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

592. Układ składa się z dwóch cienkich soczewek o wspólnej osi optycznej: skupiającej o ogniskowej $f_1 = 3$ cm i rozpraszającej o ogniskowej $f_2 = -2$ cm, ustawionych w odległości $d = 6$ cm. Przedmiot znajduje się w odległości $x_1 = 4$ cm od soczewki skupiającej. Znaleźć konstrukcyjnie położenie obrazu po przejściu promieni przez układ.

593. Cienki, nierozciągliwy łańcuszek o zaniedbywalnie małych ogniwach przerzucony jest przez nieruchomy bleczek (rys. 1). Końce zwisających z bleczka części łańcuszka leżą na stole i na podłodze, przy czym część leżąca na stole jest wystarczająco długa i ułożona w mały kopczyk wokół punktu A (odcinek AA_1 jest pionowy). Znaleźć ustaloną prędkość wiszącej części łańcuszka. Błat stołu znajduje się na wysokości h nad podłogą. Tarcie zaniedbujemy.



Rys. 1

Rozwiązania zadań z numeru 10/2014

Przypominamy treść zadań:

584. Po gładkiej, poziomej płaszczyźnie ślizga się z prędkością v jednorodny klocek o długości l . Klocek wsuwa się na szorstki odcinek powierzchni o współczynniku tarcia μ (rys. 2). Po jakim czasie klocek zatrzyma się?

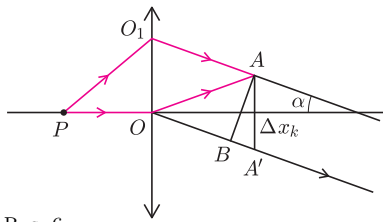
585. Z ciennej soczewki o ogniskowej $f = 50$ cm usunięto część środkową o szerokości $a = 0,6$ mm. Obie połówki soczewki stykają się. Średnica soczewki wynosi $D = 6$ cm. W odległości f od soczewki, na jej osi optycznej, ustawiono punktowe źródło światła monochromatycznego o długości fali $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ m. Z drugiej strony soczewki umieszczony jest ekran. Jakie musi być położenie ekranu, aby można było obserwować na nim prążki interferencyjne? Zakładając, że warunek ten jest spełniony, znaleźć odległość między sąsiednimi jasnymi prążkami.

584. Niech $x \leq l$ oznacza odległość, na jaką wsunął się na szorstką powierzchnię poruszający się klocek. Działa na niego siła tarcia $F_T = -kx$, gdzie $k = \frac{\mu mg}{l}$. Klocek będzie się poruszał ruchem harmonicznym do chwili, kiedy albo zatrzyma się, albo cały wjedzie na szorstką powierzchnię. Z zasady zachowania energii możemy wyznaczyć amplitudę drgań $A = v \sqrt{\frac{l}{\mu g}}$.

Gdy $l \geq A$, czyli długość klocka jest nie mniejsza od amplitudy drgań, a stąd $v \leq \sqrt{\mu gl}$, klocek zatrzyma się po czasie $t = T/4 = 0,5\pi \sqrt{\frac{l}{\mu g}}$, gdzie T jest okresem drgań.

Gdy $l < A$, klocek wjedzie na szorstką powierzchnię w czasie t_1 , poruszając się ruchem harmonicznym, a następnie w czasie t_2 będzie poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym. Droga przebyta ruchem harmonicznym $l = A \sin \omega t_1$, gdzie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\mu g}{l}}$. Prędkość v_1 , jaką osiągnie klocek w chwili t_1 , możemy otrzymać z zasady zachowania energii: $\frac{mv^2}{2} = \frac{kl^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}$, stąd $v_1 = \sqrt{v^2 - \mu gl}$. Ruch jednostajnie opóźniony odbywać się będzie w czasie $t_2 = \frac{v_1}{\mu g}$. Klocek zatrzyma się po czasie $t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{v^2 - \mu gl}}{\mu g} + \sqrt{\frac{l}{\mu g}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{\mu gl}}{v} \right)$.

585. Jeżeli w płaszczyźnie ogniskowej soczewki w odległości $\frac{a}{2}$ od ogniska umieścimy punkt świecący P , to promienie wychodzące z tego punktu po przejściu przez soczewkę



Rys. 6

utworzą wiązkę równoległą nachyloną do osi optycznej soczewki pod kątem α , przy czym $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2f}$ (rys. 4). Po wycięciu części środkowej i zetknięciu połówek soczewki, promienie wychodzące z punktu P tworzą przecinające się wiązki równoległe. Z rysunku 5 widać, że maksymalna odległość, w jakiej można ustawić ekran, aby wiązki te interferowały ze sobą, wynosi $x_{\max} = \frac{D \operatorname{ctg} \alpha}{2} = \frac{Df}{a}$.

Niech ekran znajduje się w dowolnej odległości od soczewki, mniejszej niż x_{\max} . Na środku ekranu powstaje maksimum interferencyjne. Aby w p. A w odległości Δx_k od środka ekranu powstało k -te maksimum (rys. 6), promienie PO_1A i POA muszą się wzmacniać, zatem ich różnica dróg optycznych wynosi $\Delta s = k\lambda$. Droga optyczna promienia OA jest taka sama jak promienia OA' . Promienie z wiązki równoległej mają w punktach A i B zgodne fazy, zatem $\Delta s = 2\Delta x_k \sin \alpha \approx 2\Delta x_k \frac{a}{2f}$. Odległość między sąsiednimi prążkami wynosi $\Delta x = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k = \frac{f\lambda}{a} = 0,5 \text{ mm}$.

* * *

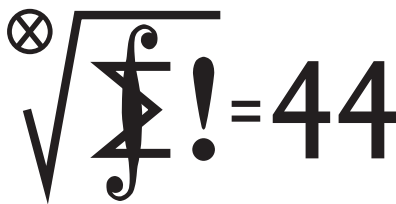
W ubiegłym roku najtrudniejsze okazało się zadanie 570, gdzie należało znaleźć przyspieszenie pręta poruszającego się w rurze z wodą. Jego współczynnik trudności wyniósł 3,90. Gdy pręt podnosi się, pewna masa wody porusza się do dołu, zapelniając oswoobodzone miejsce. Siła działająca na pręt ze strony wody zależy od przyspieszenia tej wody. Prawo Archimedesusa w postaci: siła wyporu równa jest ciężarowi wypartej cieczy, nie ma w tym przypadku zastosowania, a tak właśnie próbowali rozwiązać zadanie uczestnicy klubu. Trudne okazało się też zadanie 563 ($WT = 3,40$), które zresztą, jak słusznie wytknął mi **Andrzej Idzik**, pojawiło się już w *Delcie* w 1986 r. Trzeba było w nim obliczyć prędkość, jaką należy nadać ładunkowi punktowemu w środku wydrążonej metalowej kuli, aby oddalił się do nieskończoności przez wąską szczelinę w tej kuli. W nadesłanych rozwiązaniach uwzględniano na ogół oddziaływanie ładunku punktowego z ładunkami indukowanymi na powierzchniach kuli, natomiast nie uwzględniano

oddziaływania między ładunkami indukowanymi na obu powierzchniach. W zadaniu 577, odpowiadając na pytanie, jaką prędkość uzyska walec po wyłączeniu pola magnetycznego, w którym był umieszczony, rozwiązujący zaniedbali zjawisko samoindukcji. Zadanie 575 (wciąganie cieczy dielektrycznej do kondensatora) część klubowiczów rozwiązała poprawnie, poszukując minimum energii takiego układu, część jednak uznała, że przyrost energii potencjalnej grawitacji rekompensowany jest obniżeniem energii elektrostatycznej, powtarzając błąd szeroko dyskutowany po jednej z matur jeszcze przed reformą. Niektóre błędy trzymają się więc mocno. Zadanie 576, gdzie klocki połączone sprężyną zsuwały się z równi, dwóch uczestników rozwiązało w układzie związanym z równią, wykazując się imponującą sprawnością rachunkową. Warto jednak było zrobić to w układzie związanym ze środkiem masy, co zdecydowanie upraszczało obliczenia i pozwalało łatwiej uchwycić istotę tego ruchu.

Dziękuję wszystkim, którzy nadsyłali rozwiązania, zapewniając mi sprzężenie zwrotne, przepraszam za niedociągnięcia i literówki, których nie udało się uniknąć. Podobnie jak w roku ubiegłym, wyrażam szczególne uznanie za sposób prezentacji na ogół bezbłędnych rozwiązań i ich dyskusję przez **Tomasza Wietechę**.

E. Z.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2015

Zadania z matematyki nr 695, 696

Redaguje Marcin E. KUCZMA

695. Znaleźć wszystkie pary wielomianów rzeczywistych P, Q , spełniające równanie

$$\frac{P(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = \frac{Q(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

696. Wyznaczyć największą możliwą liczbę punktów, jakie można rozmieścić na płaszczyźnie tak, by każde trzy spośród nich były wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Zadanie 696 zaproponował pan Krzysztof Kamiński z Pabianic.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2014

Przypominamy treść zadań:

687. Dowieść, że wśród dowolnie wybranych 39 kolejnych liczb naturalnych znajdzie się liczba, której suma cyfr dzieli się przez 11.

688. Trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$. Na krawędziach SA, SB, SC leżą takie punkty X, Y, Z , że suma kwadratów pól trójkątów SXY, SYZ, SZX jest równa kwadratowi pola trójkąta XYZ . Obliczyć objętość ostrosłupa $ABCS$.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
 po zakończeniu sezonu
 (roku szkolnego) 2013/14

Jerzy Cisło	–	10–43,59
Tomasz Wietecha	–	9–42,14
Michał Miodek	–	1–40,49
Wojciech Maciak	–	39,65
Marek Spychała	–	1–39,37
Wojciech Tobiś	–	34,67
Piotr Kumor	–	11–33,09
Grzegorz Karpowicz	–	1–32,75
Tomasz Kochanek	–	32,40
Franciszek Salezy Sikorski	–	1–28,22
Jerzy Witkowski	–	5–27,02
Michał Koźlik	–	26,46
Paweł Najman	–	6–26,32
Krzysztof Maziarz	–	25,35
Janusz Olszewski	–	15–21,28
Bartłomiej Dyda	–	5–20,18
Paweł Burdzy	–	19,87
Zbigniew Skalik	–	2–19,42
Paweł Kubit	–	5–18,24
Adam Dzedzej	–	2–18,00
Witold Bednarek	–	6–17,84
Roksana Słowik	–	1–17,39
Jędrzej Garnek	–	2–17,19
Marcin Kasperski	–	3–16,39
Janusz Wojtal	–	16,17
Marcin Małogrosz	–	1–16,06

Legenda (przykładowo): stan konta 6–26,32 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 26,32 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 15 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2012, 2013 lub 2014.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (11), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (15), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (9), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (5), J. Cisło (10), W. Bednarek (6), D. Kurpiel, P. Najman (6), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, A. Dzedzej, Z. Galias, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, Z. Skalik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

687. Niech m będzie dowolną liczbą co najmniej dwucyfrową, której ostatnią cyfrą jest zero, a przedostatnią cyfrą nie jest dziewiątka. Wówczas w ciągu dwudziestu kolejnych liczb $m, m + 1, \dots, m + 19$ znajduje się liczba o sumie cyfr podzielnej przez 11; jeśli bowiem suma cyfr liczby m wynosi s , to sumy cyfr liczb $m + 1, \dots, m + 9$ wynoszą $s + 1, \dots, s + 9$, zaś liczba $m + 19$ ma sumę cyfr równą $s + 10$; rzecz jasna, któraś z wartości $s, s + 1, \dots, s + 10$ dzieli się przez 11.

Pozostaje teraz zauważyć, że każdy ciąg kolejnych 39 liczb naturalnych zawiera 20-wyrazowy blok o wyrazie początkowym m postaci, jak wyżej.

688. Ściany ASB, BSC, CSA są przystającymi trójkątami równoramiennymi, z jednakowym kątem φ przy wierzchołku S . Niech $t = \cos \varphi$. Oznaczając $x = |SX|, y = |SY|, z = |SZ|, u = |YZ|, v = |ZX|, w = |XY|$, mamy

$$(1) \quad u^2 = y^2 + z^2 - 2t yz, \quad v^2 = z^2 + x^2 - 2t zx, \quad w^2 = x^2 + y^2 - 2t xy.$$

Pole trójkąta SXY wynosi $\frac{1}{2}xy \sin \varphi$; podobnie wyrażają się pola trójkątów SYZ, SZX . Suma kwadratów ich pól jest równa $\frac{1}{4}(1 - t^2) \sum x^2 y^2$; tu i dalej symbol \sum oznacza sumę cykliczną względem trójki x, y, z (lub u, v, w).

Kwadrat pola trójkąta XYZ wyrażamy zgodnie ze wzorem Herona jako

$$\frac{1}{16}((u + v)^2 - w^2)(w^2 - (u - v)^2) = \frac{1}{16}(2uv + u^2 + v^2 - w^2)(2uv + w^2 - u^2 - v^2) = \frac{1}{16}\left(2 \sum u^2 v^2 - \sum u^4\right) = \frac{1}{4} \sum u^2 v^2 - \frac{1}{16} \left(\sum u^2\right)^2.$$

Uzyskana wartość ma być równa $\frac{1}{4}(1 - t^2) \sum x^2 y^2$; mnożąc przez 4 dostajemy równanie

$$(2) \quad \sum u^2 v^2 - \left(\frac{1}{2} \sum u^2\right)^2 - (1 - t^2) \sum x^2 y^2 = 0.$$

Po wprowadzeniu w miejsce u^2, v^2, w^2 wyrażeń (1) i pogrupowaniu wszystkiego według potęg t (to mechaniczny rachunek) okazuje się, że wyrazy niezawierające t znoszą się, a całe równanie (2) redukuje się do postaci

$$2(x + y + z)(xyz)(t^2 - t) = 0.$$

Kąt φ jest niezerowy, więc $t = \cos \varphi \neq 1$; stąd $t = 0$, czyli $\varphi = 90^\circ$. Zatem każdy z trójkątów ASB, BSC, CSA jest prostokątny i równoramienny, o przeciwprostokątnej długości 1; przyprostokątne SA, SB, SC mają długość $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Ostrosłup $SABC$ jest szóstą częścią sześcianu o krawędzi $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Jego objętość wynosi $\frac{1}{24}\sqrt{2}$.

* * *

Oto coroczne omówienie. Jak zwykle, wybrane zostały zadania ciekawsze i trudniejsze, gdzie uczestnicy ligi przedstawili różne zmyślne metody rozwiązań, interesujące uogólnienia, niebanalne komentarze. I jak zwykle namawiamy Czytelników do starannego prześledzenia owych „zmyślnych” rozwiązań, zreferowanych tutaj (z konieczności) mocno skrótowo. Po dopracowaniu ich uroda uwidoczni się w pełni.

Zadanie 667. [Szachownica biało-czarna $n \times n$ (n – liczba parzysty); ciąg ruchów typu: zmiana kolorów wszystkich pól w wybranym prostokącie planszy; min(czas uzyskania planszy jednobarwnej)?] (współczynnik trudności $WT = 2,35$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 11$). Wszyscy podali jednakowy algorytm uzyskania żadanego efektu w n ruchach (wybierać co drugi wiersz i co drugą kolumnę). Uzasadnienia, że tego czasu skrócić się nie da, były różne, i raczej nie prostsze niż w rozwiązaniu firmowym – wszakże poprawne, a to się liczy. Ale, ale – dlaczego ograniczać się do n parzystych? Każde z podanych rozwiązań (firmowe też) wymaga jedynie drobnego retuszu, by objąć przypadek n nieparzystego (co zauważyli prawie wszyscy uczestnicy) – a nawet przypadek planszy prostokątnej $m \times n$; wynik $\lfloor m/2 \rfloor + \lfloor n/2 \rfloor$ wskazali **A. Dzedzej, J. Olszewski** oraz **M. Kasperski**, który ponadto zasugerował rozszerzenie zadania: rozważamy planszę $n \times n$, pomalowaną na starcie niekoniecznie „w szachownicę”; jaki jest minimalny czas, w którym z dowolnego wyjściowego układu pól czarnych można dojść do planszy jednobarwnej?

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, S. Bednarek, T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Duch, J. Fiett, P. Figurny, M. Fiszer, E. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Józwiak, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, M. Małogrosz, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłega, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, M. Miodek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, R. Słowik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawistawski, P. Żmijewski.

Zadanie 669 [$\triangle ABC$; okrąg wpisany styczny do BC, CA, AB w D, E, F ; punkty $X \in BC, Y \in CA, Z \in AB$: $|AY| = |AZ|, |BX| = |BZ| \Rightarrow$ prosta DE połowi odcinek XY] ($WT = 1,38; LPR = 17$). Łatwiutki. Ale, jak zauważyła większość rozwiązujących, czegoś zabrakło w treści zadania – należało wykluczyć przypadek, gdy punkty X, Y, Z pokrywają się z D, E, F ; wówczas bowiem, jak wdzięcznie zauważył **Jacek Bagiński**, prosta DE może rozpołować odcinek XY jedynie wzdłuż, na dwa cieńsze...

Niebanalne spojrzenie na geometrię zadania zaproponował **Janusz Fiett**. Trzy proste $1, 2, 3$ tworzą trójkąt. Wybieramy punkt na prostej 1 , po czym na prostej 2 wyznaczamy punkt leżący w tej samej odległości od punktu przecięcia $1 \cap 2$, tak, by półproste o początku $1 \cap 2$ i przechodzące przez owe dwa punkty (wyjściowy i odwzorowany) albo obie przecinały albo nie przecinały prostej 3 . Punkt otrzymany na prostej 2 w analogiczny sposób odwzorowujemy na punkt na prostej 3 , i dalej tak samo, cyklicznie. Po sześciu krokach wrócimy do punktu wyjściowego. Łącząc kolejne punkty odcinkami dostajemy łamaną sześcioboczną, o przeciwległych bokach równoległych i równoodległych od prostych, wyznaczonych przez punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt z jego bokami (stąd i teza zadania).

Gdy wszystkie uzyskane punkty leżą na bokach trójkąta, możemy pokusić się o model fizyczny: trójkątna płytka, opleciona pętlą sznurka, o kolejnych (sześciu) odcinkach biegnących, na przemian, po jednej i drugiej jej stronie, przy czym końce każdego odcinka są jednakowo odległe od odpowiedniego wierzchołka płytki; przesuwanie równoległe jednego (dowolnego) z owych odcinków wymusi analogiczne przesunięcia pozostałych odcinków, a sznurek pozostanie naprężony. (Gdy któryś z wierzchołków łamanej leży nie na boku trójkąta, lecz na jego przedłużeniu, model przestaje funkcjonować – ale jego algebraiczną namiastkę można uzyskać, wprowadzając znaki plus i minus). Wywód zwieńczony apetyczną zachętą: *Dalsze uogólnienie mogłoby dotyczyć wielokątów innych niż trójkąty, mających okrąg wpisany – w pewnych przypadkach także można je ładnie oplatać łamanymi; ale to już zupełnie inna historia...*

Zadanie 674 [$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x+1) = f(x) + 1; f(x^2) = f(x)^2 \Rightarrow f = ?$] ($WT = 2,94; LPR = 8$). Spośród zadań omawianego rocznika to okazało się najtrudniejsze; a także chyba najciekawsze. Jediną funkcją, spełniającą oba równania, jest funkcja identycznościowa. Uzasadnienie, jak w rozwiązaniu firmowym (lub różniące się nieistotnie) podali **J. Garnek, P. Kumor, M. Małogrosz, J. Olszewski**. Elegancki i nieco odmienny dowód znalazł **Jerzy Cisło**: jak w firmowym, zauważyła, że f jest funkcją nieparzystą i że odwzorowuje \mathbb{R}_+ w \mathbb{R}_+ ; następnie uzasadnia, że $f(r) = r$ dla $r = k/n \in \mathbb{Q}$ (przekształcając wyrażenie $f((r+n)^2)$ na dwa sposoby); wreszcie dowodzi, że $f(x) < f(y)$ dla $x < y$ – najpierw w przypadku, gdy $y - x \geq 1$ (i można między x i y włożyć liczbę całkowitą), potem gdy $x, y \in \langle 1; \infty \rangle$ (więc wysokie potęgi tych liczb różnią się o 1 lub więcej); w pozostałym przypadku, przesunięcie o liczbę całkowitą przeniesie liczby do przedziału $\langle 1; \infty \rangle$. Funkcja rosnąca, będąca identycznością na \mathbb{Q} , jest identycznością na \mathbb{R} .

Zgrabnie poradził sobie **Krzysztof Maziarz**. Wstępne spostrzeżenia (nieparzystość, $f \geq 0$ na \mathbb{R}_+), a dalej:

przypuśćmy, że dla pewnego x zachodzi nierówność $x > f(x) =: x - \epsilon$. Weźmy $k \in \mathbb{N}$ tak duże, by $x + k =: y > (\epsilon + \epsilon^{-1})/2$. Z równania $f(y) = y - \epsilon$ wynika, że $f(y^2) = (y - \epsilon)^2 < y^2 - 1$; stąd zaś $f(y^2 - \lfloor y^2 \rfloor) < y^2 - 1 - \lfloor y^2 \rfloor < 0$, wbrew temu, że $f \geq 0$ na \mathbb{R}_+ . Tak więc $f(x) \geq x$ dla $x \in \mathbb{R}$; wobec nieparzystości, $f(x) = x$. Podobne rozumowanie, zapisane nieco bardziej zawiłe, przedstawił **Adam Dzedzej**.

Janusz Fiett, bardzo oryginalnie, patrzy jedynie na wykres funkcji (czy raczej hipotetyczny wykres, bo to dowód nie wprost), widzi „drabinki punktów” i inne konfiguracje geometryczne; gdy zaś potrzebuje nierówności – uzasadnia je też geometrycznie, porównując pola pewnych prostokątów; język mocno nieformalny, uzasadnienia miejscami z lukami – ale w końcu wszystko się broni, zadanie zrobione.

Wspólnym rysem wszystkich rozwiązań jest użycie argumentów, należących do analizy matematycznej: granic ciągów lub przynajmniej nierówności, de facto generujących owe granice. Tymczasem teza zadania ma charakter algebraiczno-mnogościowy: jedyną funkcją, przemienną (w sensie superpozycji) z funkcjami $\varphi(x) = x + 1, \psi(x) = x^2$, jest $f(x) = x$. Jakie inne pary funkcji φ, ψ mają tę własność? Czy da się takie pary scharakteryzować w terminach czysto mnogościowych – w języku algebry zbiorów i relacji między orbitami iteracyjnymi φ, ψ ? Nie są nam znane żadne twierdzenia tego typu; może ktoś z Czytelników?...

Zadanie 675 [Alfabet α, \dots, ω (24 litery); p_n = prawdopodobieństwo, że w losowym n -słowie litery α, ω nie sąsiadują; $\min\{n: p_n < 1/2\} = ?$] ($WT = 2,29; LPR = 8$). Jasne, że należało szukać rekurencji dla ciągu (p_n) . Ciekawe, że można ją było uzyskać znacznie prościej, niż w firmówce: $p_n = m^{-n}c_n$, gdzie m to liczność alfabetu (tu $m = 24$), c_n jest liczbą n -słów bez $\alpha\omega$ lub $\omega\alpha$; piszemy $c_n = a_n + b_n$, gdzie a_n to liczba tych, które mają na końcu α lub ω , zaś b_n to liczba tych, które są zakończone inaczej. Związki $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, b_n = (m-2)c_{n-1}$ są doprawdy oczywiste i od razu dają

rekurencję

$$(1) \quad c_n = (m-1)c_{n-1} + (m-2)c_{n-2},$$

czyli

$$(2) \quad p_n = \frac{m-1}{m} p_{n-1} + \frac{m-2}{m^2} p_{n-2} \quad (m=24).$$

W ten sposób postąpili: **Jerzy Cisło** (z dowolnym m), **Janusz Fiett** oraz **Roksana Słowik**.

Rozumowanie z rozwiązania firmowego też miało swoich zwolenników: **P. Kumor**, **M. Małogrosz**, **M. Miodek**, **J. Olszewski**. (Jeszcze trochę inną drogą doszedł do wzoru (2) **P. Najman**). Rozstrzygnięcie, dla jakich n wartość p_n spadnie poniżej 0,5, zostało przez wszystkich (łącznie z firmówką) pozostawione maszynie; wynik: $\min n = 208$.

Można było zajmować się wyłącznie ciągiem (c_n) , z zależnością (1) i pytaniem: $c_n < 0,5 \cdot 24^n$ (?), bez przechodzenia do postaci (2). To by prowadziło do badania dużych liczb całkowitych – za dużych (w przeświadczeniu redaktora ligi), by nad zagadnieniem zapanować. Tym większe było redaktora radosne zaskoczenie, gdy w dwóch pracach (**J. Fiett**, **M. Miodek**) znalazł wartości c_{207} , c_{208} wydrukowane *in extenso*! Niech i nasi Czytelnicy trochę tej uciechy mają:

$$c_{207} = 253510478116989667286069556112239483966686696087778708186081 \\ 241005457086185875947576983665148084284804983929373835070160 \\ 456915245509527032465634911491404779725578425599190252059531 \\ 236220647978264714330381942130166515018490948673294755506983 \\ 6010258379841748909914188149028725759669801930,$$

$$c_{208} = 606390531917155388638659541205594709872002372899953774685779 \\ 132318477871720723344069954785179879991382257774972929493109 \\ 088401396406576820414785954097915904743731483512534464549112 \\ 457438179568399783955501282839841176163110541645599079981093 \\ 49296470060622232450152310425551499093489341202.$$

Zadanie 678 [Czy istnieją różne liczby pierwsze p, q, r : $p \mid 2^{q-1} - 1, q \mid 2^{r-1} - 1, r \mid 2^{p-1} - 1$?] ($WT = 2,13$; $LPR = 10$). Tu redaktor ligi ewidentnie zawinił niefrasobliwością – zadanie poznał był wraz z rozwiązaniem (które podał jako firmowe) – był wszelako zbyt leniwy, żeby samemu, prościutkim programem, poszukać takich trójek. A istnieje ich mnóstwo (i znajduje się je bez problemu); **Michał Miodek** wydrukował przeszło sto trójek! Wśród przykładów podawanych przez uczestników najczęściej powtarzała się trójka (19, 37, 73), jedyna składająca się z samych liczb dwucyfrowych (oraz realizująca $\min(p+q+r)$).

Przypomnijmy, że w rozwiązaniu firmowym (autor zadania: **Witold Bednarek**) zostało wykazane, że jeśli s jest liczbą pierwszą, dla której $2^s - 1$ ma co najmniej trzy różne dzielniki pierwsze $p < q < r$, to trójka (p, q, r) spełnia wymagane warunki, bowiem każda z liczb $2^{t-1} - 1$ ($t = p, q, r$) dzieli się przez pqr ; wykładnik $s = 29$ generuje w ten sposób trójkę „firmową”, złożoną z liczb 3- i 4-cyfrowych. Uzyskana teza (pqr – wspólny dzielnik trzech liczb) jest o wiele mocniejsza niż własność postulowana w zadaniu.

Dokładnie to samo rozumowanie, z tak wzmocnioną tezą (i z tym samym przykładem liczbowym) przedstawił jeden uczestnik: **Jędrzej Garnek**. Teraz, po refleksji, widać, że w tej ambitniejszej wersji zadanie byłoby znacznie lepsze; i zostałyby zrobione przez co najmniej jednego uczestnika; ciekawe, przez ilu...

Zadanie 682 [$x_1, \dots, x_n > 0$; $\sum 1/(1+x_i) = 1$ $\Rightarrow \sum \sqrt{x_i} \geq (n-1) \sum \sqrt{1/x_i}$] ($WT = 2,29$; $LPR = 11$). Niestety, zadanie okazało się znane. Pojawiło się (m.in.) na konkursie: V. Jarník Intl. Math. Competition (2002), z oficjalnym rozwiązaniem (jak nasze firmowe)

przez nierówność Czebyszewa dla ciągów przeciwnie monotonicznych; część uczestników powołała się na to źródło. Rozwiązanie oparte na tym samym pomysśle znaleźli niezależnie: **S. Bednarek**, **J. Garnek**, **P. Duch**.

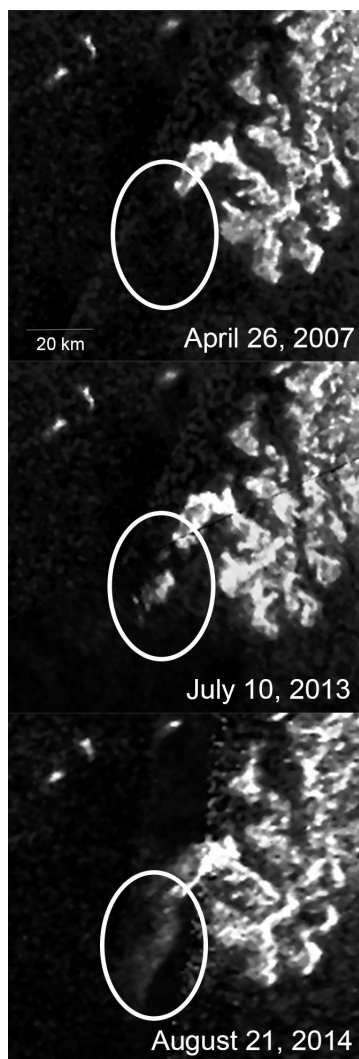
Przyjmując liczby $a_i = 1/(1+x_i)$ jako nowe zmienne można było przemodelować zadaną nierówność do postaci

$$(3) \quad \sum \sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} \geq (n-1) \sum \sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}} \\ \text{gdzie } a_i > 0, \sum a_i = 1.$$

Janusz Olszewski pokazał, że pomiędzy lewą i prawą stroną (3) można włożyć wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{i \neq j} \sqrt{a_i/a_j}$: dwie części tak powstałej tezy okazują się być konsekwencją nierówności, wiążących średnie: kwadratową, arytmetyczną i harmoniczną liczb $\sqrt{a_i}$.

Jeszcze bardziej zmyślnie, bez wprowadzania zmiennych a_i , postąpił **Grzegorz Więch**. Oznaczając przez Q, A, H średnie (kwadratową, arytmetyczną, harmoniczną) liczb $\sqrt{1/x_i}$, zapisujemy tezę zadania w formie $(n-1)AH \leq 1$; skoro $A \leq Q, H \leq Q$, wystarczy wykazać, że $Q^{-2} \geq n-1$. Ale Q^{-2} to po prostu średnia harmoniczna liczb x_i ; jej dolne ograniczenie przez $n-1$ łatwo uzyskać z warunku $\sum 1/(1+x_i) = 1$.

Jerzy Cisło przekształcił (3) do postaci $\sum f(a_i) \geq 0$, gdzie $f(t) = (1-nt)/\sqrt{t(1-t)}$ ($a_i > 0, \sum a_i = 1$) i udowodnił tę tezę, szacując oddzielnie dwa fragmenty badanej sumy – w przedziałach, gdzie funkcja f jest wypukła bądź wklęsła. Najprościej zaś poradził sobie z nierównością (3) **Tomasz Wietecha**, odsyłając do książki: L. Kourliandtchik *Powrót do krainy nierówności*, gdzie na stronach 53–55 twierdzenie (3) jest udowodnione. No cóż...



Prosto z nieba: Tajemnice oceanów Tytana

Sonda Cassini, która została wysłana w kierunku Saturna w 1997 r. (pierwsze spotkanie z planetą w 2004 r.) jest wciąż w doskonałej formie. Niedawno wykonała zdjęcie pierścieni Saturna z Ziemią i Księżycem w tle, nawiązując w ten sposób do zdjęcia pt. Błękitna Kropka Voyagera 1 (ang. *Pale Blue Dot* – pomysł legendarnego Carla Sagana, skłaniający do refleksji nad wyjątkowością życia na Ziemi w bezmiarze kosmicznej pustki). Dostarczyła też informacji o wodnym oceanie znajdującym się pod powierzchnią Enceladusa. Ostatnie obserwacje również odnoszą się do oceanu, znajdującego się na drugim co do wielkości (po Ganimedesie) księżycu Układu Słonecznego, Tytanie. Powierzchnię Tytana okrywa płaszcz ciekłych węglowodorów, głównie metanu. Regularne przeloty Cassiniego w pobliżu Tytana umożliwiają dokładne mapowanie księżyca, w szczególności porównywanie zmian zachodzących na powierzchni.

Umieszczone obok zdjęcie radarowe przedstawia ewolucję fragmentu oceanu o rozmiarze ok. 100 km². Po wykluczeniu błędów aparaturowych badacze Cassiniego zaproponowali kilka możliwości wyjaśnienia tajemniczej obserwacji: zjawisko może być falą na powierzchni metanowego oceanu, czasowym skupiskiem bąbelków, „krą” pływającą po lub pod powierzchnią, lub – oczywiście – czymś jeszcze bardziej egzotycznym (fascynujące, że żyjemy w czasach, w których możliwe jest podglądanie zmian zachodzących na powierzchniach odległych globów!). Ewolucja powierzchni Tytana jest najprawdopodobniej związana z sezonowymi zmianami pogody i nadchodzącym na północnej półkuli księżyca latem. Właśnie tą tematyką, prognozowaniem i monitorowaniem pogody Tytana, zajmie się w przyszłości Cassini, którego misja została przedłużona do września 2017, gdy w systemie Saturna dojdzie do letniego przesilenia.

Michał BEJGER

Niebo w lutym

Początek lutego będzie należał do naszego naturalnego satelity, który swoim blaskiem zdominuje nocne niebo, ponieważ 4 II przypada druga tej zimy pełni. Za każdym razem w czasie pełni Księżyc, oprócz tego, że świeci wtedy najjaśniejszemu w ciągu miesiąca, widoczny jest też przez znaczną część nocy, ponieważ znajduje się niemal naprzeciw Słońca. W momencie pełni Księżyc będzie w konstelacji Raka, przez co znajdzie się wysoko na sferze niebieskiej. Podczas kolejnych nocy będzie on wschodził coraz później – o około godzinę każdego dnia – ale też widoczny będzie dłużej, aż w końcu pojawiać się będzie dopiero przed świtem oraz wczesnym rankiem. Do czasu, kiedy osiągnie ostatnią kwadrę, czyli około tygodnia po pełni, wschodzić będzie w okolicach północy, a zachodzić około południa. Będzie więc doskonałym obiektem do obserwacji tuż przed świtem. Księżyc w ostatniej kwadrze, która przypada na 12 II, jest idealny do obserwacji przez lornetkę lub mały teleskop, ponieważ góry i kraterzyki na jego powierzchni prezentują się wtedy bardzo wyraźnie. Terminator – linia, która dzieli oświetloną i nieoświetloną część tarczy Księżycy – jest wtedy najwyraźniej widoczna. Znajdując się na terminatorze, widzielibyśmy Słońce tuż nad horyzontem, oświetlające księżycowy krajobraz pod bardzo niskim kątem, dzięki czemu obręcze kraterów i góry rzucają długie, efektowne cienie. Nów Księżycy wypada 19 II, natomiast jego pierwsza kwadra 25 II. W okolicach tej daty nasz naturalny satelita będzie doskonałym obiektem tym razem wieczornych obserwacji. Podobnie jak w ostatniej kwadrze, również teraz warto będzie użyć lornetki lub małego teleskopu do obserwacji księżycowych kraterów.

Miłośnicy Jowisza przez cały miesiąc będą mieć bardzo dobre warunki do jego obserwacji. 6 II to dzień, w którym planeta osiągnie, około północy, najwyższy punkt na niebie: będą to jednocześnie najbardziej korzystne warunki do obserwacji Jowisza oraz jego księżyców. Dokładnie w tym czasie Słońce schowa się bowiem najniżej pod horyzontem, dzięki czemu oświetli obiekty Układu Słonecznego znajdujące się po przeciwnej stronie, czyli najwyżej na naszym niebie. Jowisz znajdzie się wtedy w opozycji oraz w najmniejszej odległości do Ziemi, przez co osiągnie największą z możliwych jasności.

Magda OTULAKOWSKA-HYPKA



Oszacujmy pole

Joanna JASZUŃSKA

Korzystając z tytułowego pomysłu oraz z rysunku 1 lub drobnych jego modyfikacji, można udowodnić szereg twierdzeń z różnych działów matematyki.

Zauważmy, że pole całego kwadratu jest nie mniejsze od sumy pól czterech zawartych w nim białych prostokątów. Stąd $(a + b)^2 \geq 4ab$, uzyskujemy więc $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, czyli **nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną**.

Dla $b = \frac{1}{a}$, każdy z prostokątów ma pole równe 1, zatem $(a + \frac{1}{a})^2 \geq 4$. Stąd **liczba dodatnia i jej odwrotność zawsze dają w sumie co najmniej 2**.

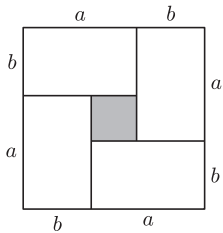
Zamiast kwadratu o boku $a + b$, rozważmy kwadrat o boku $\frac{a\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{b\sqrt{ab}}{a+b} = \sqrt{ab}$, przedstawiony na rysunku 2. Analogiczna jak dotychczas analiza pól pozwala udowodnić **nierówność pomiędzy średnią geometryczną a harmoniczną**:

$$\sqrt{ab}^2 \geq 4 \cdot \frac{a\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \frac{b\sqrt{ab}}{a+b}, \quad \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}, \quad \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

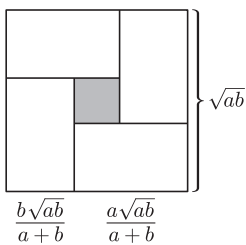
Ciąg Fibonacciego definiujemy tak: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n \geq 2$. Rozumowanie podobne do powyższych pozwala dowieść następującej tożsamości:

$$F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2 \quad \text{dla } n \geq 3.$$

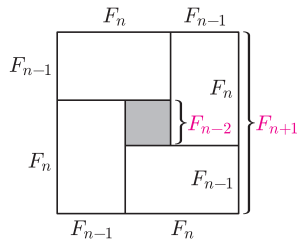
Rozważmy w tym celu kwadrat o boku $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ (rys. 3). Zauważmy, że mały szary kwadracik pośrodku ma wówczas bok długości $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$. Wobec tego powyższa tożsamość opisuje pole całego dużego kwadratu.



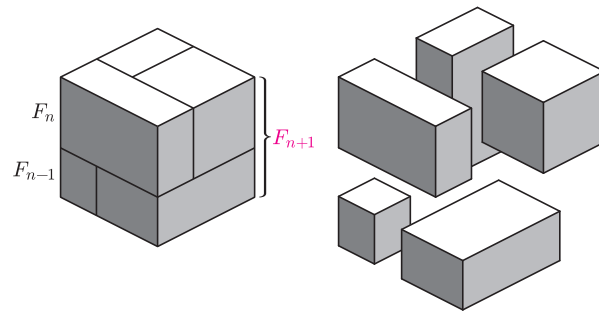
Rys. 1. $a, b > 0$.



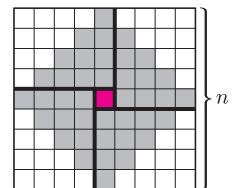
Rys. 2. $a, b > 0$.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Podobnie, analiza objętości sześcianu o krawędzi $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ podzielonego na kilka części tak, jak na rysunku 4, pozwala dowieść tożsamości

$$F_{n+1}^3 = F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_{n-1}F_nF_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

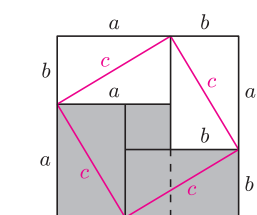
Z rysunku 5 można dla odmiany odczytać, że **dla nieparzystych liczb naturalnych n , liczba n^2 daje przy dzieleniu przez 8 resztę 1**.

Oznaczmy przekątne prostokątów z rysunku 1 przez c (rys. 6). Usuwaając cztery „zewnątrzne” trójkąty, otrzymujemy kolorowy kwadrat o boku c . Z kolei usuwając cztery „górne” trójkąty, uzyskujemy szarą figurę złożoną z kwadratów o bokach a i b . Równość pól prowadzi do **twierdzenia Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$** .

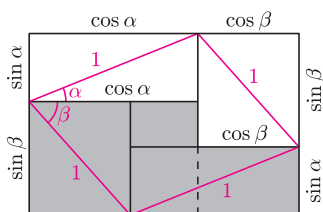
Ponadto, co najmniej połowa kwadratu jest szara, czyli $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2$. Stąd **nierówność pomiędzy średnią kwadratową a arytmetyczną: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$** .

Przekątne prostokątów z rysunku 7 mają długości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ oraz $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$. Dwukrotnie usuwając po cztery trójkąty prostokątne, podobnie jak powyżej, uzyskujemy z jednej strony kolorowy romb o boku 1 i kącie $\alpha + \beta$, z drugiej zaś strony szarą figurę złożoną z dwóch prostokątów. Stąd równość pól: **$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$** .

Warto poszukać na rysunku 1 dowodów innych ciekawych faktów oraz odpowiedzi na pytanie, kiedy w opisanych powyżej nierównościach zachodzą równości.



Rys. 6. $a, b > 0$.



Rys. 7. $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$.

Część przykładów pochodzi z wielu książek C. Alsiny i R. Nelsena.