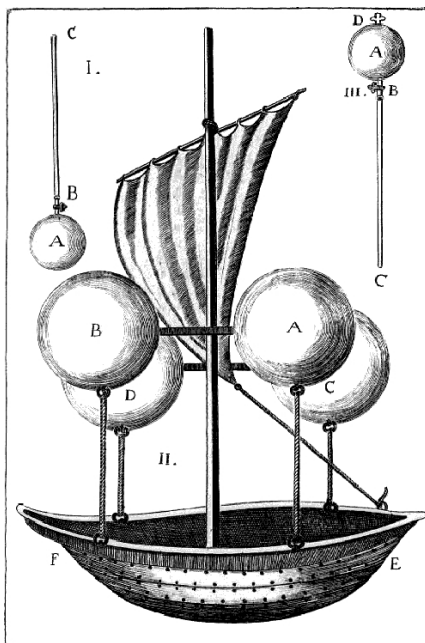


SPIS TREŚCI NUMERU 1 (488)

Artykuł o Końcu Świata <i>Łukasz Rajkowski</i>	str. 1
Próżny trud <i>Marek Kordos</i>	str. 3
Jak opisać kryształ? <i>Klaudia Jędrzejek</i>	str. 6
 O dialogach pokoleń <i>Magdalena Fikus</i>	str. 8
O rozkładzie słów na słowa Lyndona <i>Łukasz Grządko</i>	str. 9
 Sferostożki i inne cudaki <i>Kamila Łyczek</i>	str.12
Butelka Kleista <i>Krzysztof Rejmer</i>	str.14
Perowskity – przyszłość fotowoltaiki <i>Magdalena Woźniak, Michał Dusza, Olga Malinkiewicz</i>	str.16
Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	str.18
 Zadania	str.19
Informatyczny kącik olimpijski (78): Fotoradary <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.20
Gdzie tam znaczy też z powrotem <i>Marek Kordos</i>	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Jeszcze więcej neutrin słonecznych	str.24
Niebo w styczniu	str.24
 Wzdłuż czy w poprzek? <i>Joanna Jaszuńska</i>	str.25

W następnym numerze polecamy



latanie na niczym

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem T_EX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

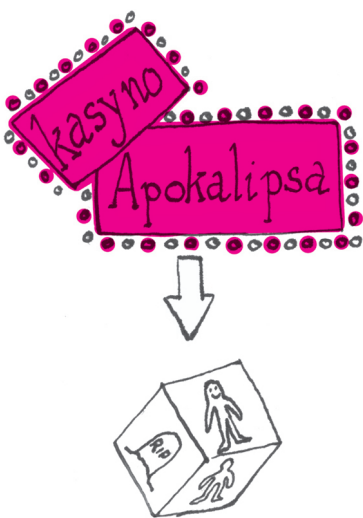
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł



Zakładamy – wbrew wierszowi Czesława Miłosza *Piosenka o końcu świata* – że gdyby Koniec Świata nastąpił, nie umknąłby naszej uwagi.

$\operatorname{argmax}_k(f(k))$ oznacza taką wartość k , dla której f przyjmuje największą wartość.



*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Artykuł o Końcu Świata

Łukasz RAJKOWSKI*

Zderzenie z asteroidą, wojna nuklearna, globalny potop, przebiegunowanie Ziemi... liczba katastrof oznaczających koniec ziemskiej cywilizacji powinna skłonić nas do traktowania każdego spokojnego poranka, kiedy przewracamy się leniwie z boku na bok zamiast skwierczeć w ogniu Apokalipsy, jako prawdziwego cudu. Mnogość śmiercionośnych zagrożeń sprawia, że ludzkość od zamierzchłych czasów stara się przewidzieć datę (choćby przybliżoną) własnego końca, nie przejmując się zbytnio kolejnymi niepowodzeniami w tej materii. Większość z proponowanych terminów pochodziła od astrologów, numerologów lub przywódców religijnych. Zgodnie z powiedzeniem Hugo Steinhausa „Matematyk zrobi to lepiej” spróbujemy zastanowić się, co ma do powiedzenia w kwestii terminu Końca Świata Królowa Nauk.

Podobno Bóg nie gra z wszechświatem w kości, na potrzeby naszych rozważań wyobraźmy sobie jednak, że codziennie o świecie bierze On do Ręki symetryczną kość do gry o n przystających, foremnych ścianach. Ze względu na swoją Wszechmocność Bóg nie jest ograniczony wynikami Platona dotyczącymi liczby takich wielościanów, nie czynimy więc w tym momencie żadnych założeń dotyczących n . Następnie kość jest rzucona i jeśli liczba wyrzuconych oczek przekroczy k , to... cóż, jako ludzkość kibicujemy wartościom nie większym od k . Postaramy się teraz zaproponować rozsądną wartość parametru k , posługując się wiedzą, że przy dotychczasowej liczbie N rzutów (którą możemy przybliżyć przez $365 \cdot 4,467 \cdot 10^9$) nie zaobserwowaliśmy jeszcze żadnej Apokalipsy. Zauważmy, że w zależności od k prawdopodobieństwo sukcesu (traktowanego jako kolejny dzień w historii ludzkości) wynosi

$$\mathcal{L}(k) = \left(\frac{k}{n}\right)^N.$$

Dość przekonująco wygląda teraz pomysł wyboru takiego k , które będzie maksymalizowało powyższą funkcję \mathcal{L} , zwaną w statystycznym żargonie *funkcją wiarogodności*. W pewnym sensie ustanowilibyśmy w ten sposób obserwowaną sytuację „najbardziej prawdopodobną”, co wydaje się rozsądnym podejściem. Tak otrzymany *estymator* wartości k , zwany *estymatorem największej wiarogodności*, wynosi

$$\hat{k} = \operatorname{argmax}_k \left(\frac{k}{n}\right)^N = n.$$

Jest to jednak mało emocjonujący wynik – oznaczałby przecież, że szansa na kolejny świt bez globalnej katastrofy wynosi 1, co stawiałoby pod znakiem zapytania przyszłość szeregu hollywoodzkich superprodukcji. Przeprowadźmy więc inną analizę – rozpocznijmy od założenia, że gdybyśmy nie byli świadkami N dni bez Apokalipsy, traktowalibyśmy każdą z wartości k jako równie prawdopodobną. Jest to nasze założenie *a priori* odnośnie prawdopodobieństwa poszczególnych wartości k , ilustrujące stan naszej wiedzy (tudzież niewiedzy) dotyczącej tego parametru. Zobaczmy teraz, w jaki sposób wiedza o naszym istnieniu rzutuje na wspomniane założenie – w tym celu posłużymy się wzorem Bayesa, pozwalającym na „odwracanie warunkowania” przy obliczaniu prawdopodobieństw warunkowych

$$(1) \quad \mathbb{P}(\text{parametr} = k \mid N \text{ dni bez KŚ}) = \frac{\mathbb{P}(N \text{ dni bez KŚ} \mid \text{parametr} = k) \cdot \mathbb{P}(\text{parametr} = k)}{\mathbb{P}(N \text{ dni bez KŚ})}.$$

Z założenia o jednostajności rozkładu parametru bez uwzględniania obserwacji stwierdzamy, że $\mathbb{P}(\text{parametr} = k) = \frac{1}{n}$, ponadto oczywiście

$$\mathbb{P}(N \text{ dni bez KŚ} \mid \text{parametr} = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^N.$$

Mogliśmy teraz, korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, pracowicie obliczyć mianownik prawej strony równości (1), zamiast tego posłużymy się jednak popularnym w podobnych wnioskowaniach fortelem. Zauważmy bowiem, że lewa strona równości (1) jest funkcją k , której wartości na argumentach ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ sumują się do 1 (gdyż stanowi ona rozkład prawdopodobieństwa na tym zbiorze). Z wcześniejszych obliczeń wynika, że z dokładnością do proporcjonalności ta funkcja wynosi k^N (wartość $\mathbb{P}(N \text{ dni bez KŚ})$ nie zależy od k), w związku z czym,

aby spełniony był warunek sumowania się do 1 na zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$, musi być

$$\mathbb{P}(\text{parametr} = k \mid N \text{ dni bez KŚ}) = \frac{k^N}{\sum_{i=1}^n i^N}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób rozkład *a posteriori* badanego parametru, czyli „zweryfikowany” przez nasze obserwacje rozkład *a priori*.

Wszystko pięknie – zwróci uwagę Czytelnik Niecierplivy – *ale ja ciągle nie wiem, jaka jest szansa na jutrzejszy koniec świata*. Istotnie, żadna propozycja estymatora wartości parametru nie została jeszcze przedstawiona. Dysponujemy jednak odpowiednim rozkładem prawdopodobieństwa, co wydaje się nieść więcej informacji niż przedstawienie jednej liczby. Jeśli jednak komuś zależy na konkretnym wyniku, może posłużyć się wartością oczekiwaną otrzymanego rozkładu, która wynosi

$$\mathbb{E}(\text{parametr} \mid N \text{ dni bez KŚ}) = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{k^N}{\sum_{i=1}^n i^N} = \frac{\sum_{i=1}^n i^N}{\sum_{i=1}^n i^{N+1}}.$$

Wobec tego za prawdopodobieństwo uniknięcia Apokalipsy możemy przyjąć

$$\frac{\mathbb{E}(\text{parametr} \mid N \text{ dni bez KŚ})}{n} = \frac{S_n^{N+1}}{nS_n^N},$$

gdzie przez S_n^N oznaczyliśmy sumę N -tych potęg n kolejnych liczb naturalnych. W tym momencie przypominamy sobie pewien kłopotliwy szkopol – nie znamy wartości n . Możemy jednak przypuszczać, że Bóg nie zadowoliliby się ordynarną kostką sześcienną; intuicja podpowiada, że w grę wchodzi kości o liczbie ścian przekraczającej liczbę ziaren piasku na Ziemi lub gwiazd na niebie. W tej sytuacji rozsądne wydaje się zbadanie, w jaki sposób powyższe wyrażenie zachowuje się przy n zbiegającym do nieskończoności. W tym celu zauważmy, że

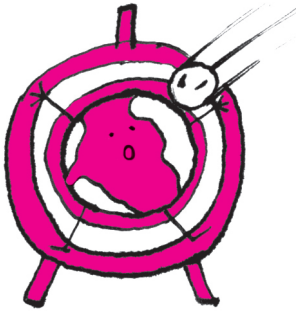
$$\begin{aligned} S_{n+1}^{N+2} &= \sum_{i=0}^n (i+1)^{N+2} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{N+2} \binom{N+2}{j} i^j \right) = \sum_{j=0}^{N+2} \left(\sum_{i=0}^n \binom{N+2}{j} i^j \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{N+2} \binom{N+2}{j} \left(\sum_{i=0}^n i^j \right) = \sum_{j=0}^{N+2} \binom{N+2}{j} S_n^j, \end{aligned}$$

co po odjęciu obustronnie $S_n^{N+2} + \sum_{j=0}^N \binom{N+2}{j} S_n^j$ i podzieleniu przez $N+2$ prowadzi do rekurencyjnego wzoru

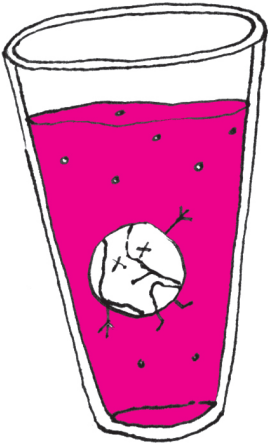
$$S_n^{N+1} = \frac{1}{N+2} \left((n+1)^{N+2} - \sum_{j=0}^N \binom{N+2}{j} S_n^j \right).$$

Możemy stąd za pomocą prostej indukcji wywnioskować, że S_n^N jest wielomianem od n stopnia $N+1$, o współczynniku przy najwyższej potędze równym $\frac{1}{N+1}$. W tej sytuacji S_n^{N+1} oraz nS_n^N są wielomianami od n o równym stopniu, zatem granica ich ilorazu, przy n zbiegającym do nieskończoności, jest ilorazem ich współczynników przy najwyższej potędze, czyli $\frac{N+1}{N+2}$. Jeśli zaś estymujemy prawdopodobieństwo Zniszczenia Świata przez $\frac{1}{N+2}$, to wartość oczekiwana liczby dni, jaka nam została do tego zdarzenia, wynosi $N+2$, czyli drugie tyle, co już było i jeszcze dwa dni (trzeciego skończy grać Wielka Orkiestra Świątecznej Pomocy).

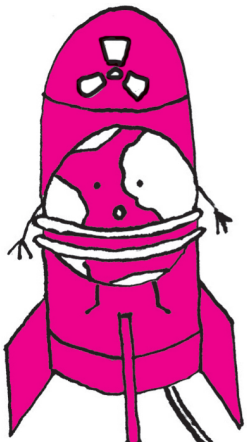
Oczywiście, powyższe rozważania nie mogą być traktowane poważnie, ilustrują jednak dwie poważne koncepcje wnioskowania statystycznego – *klasyczną* oraz *bayesowską*. Fundamentalną różnicą między nimi jest dopuszczenie przez podejście bayesowskie rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze możliwych parametrów. Zasadność takiej operacji może budzić wątpliwości – tworzymy wówczas w naszym wnioskowaniu kolejne (po wyborze rodziny rozkładów rządzących doświadczeniem) czysto uznaniowe ogniwo, jakim jest wybór rozkładu *a priori* na zbiorze parametrów. Z drugiej strony jednak ta uznaniowość zwiększa elastyczność naszego modelu, gdyż pozwala uwzględnić eksperckie „widzimisię” dotyczące parametrów; ponadto, kiedy już ów rozkład zostanie przyjęty, cała reszta naszej dedukcji to czysto probabilistyczne obliczenia, co niekoniecznie jest prawdą w przypadku podejścia klasycznego. Spór między zwolennikami tych metodologii trwa, a na jego rozwiązanie nie pozostało wiele czasu – zgodnie z informacjami zamieszczonymi w angielskiej Wikipedii najbliższy Koniec Świata już w marcu.



Tak naprawdę w tym miejscu statystyk wprowadziłby funkcję straty L , która parze (parametr, estymator) przyporządkowuje karę ($\in \mathbb{R}^+$) za błędną estymację, a następnie wybrałby taki estymator, który minimalizuje wartość oczekiwaną *a posteriori* funkcji straty. Szczęśliwie, dla popularnej funkcji straty $L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$ jest to właśnie wartość oczekiwana *a posteriori* parametru.

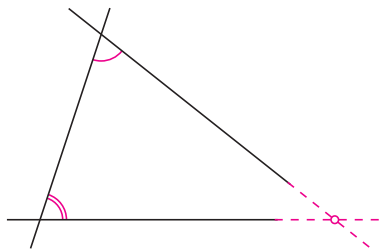


Czytelnik Całkujący mógłby otrzymać ten wynik o wiele szybciej poprzez założenie, że prawdopodobieństwo *a priori* Końca Świata jest jednostajnie rozłożone na odcinku $[0, 1]$. Tak też uczynił Laplace, od którego pochodzi rozważany problem.



Jak wszystkim wiadomo, około –300 roku dyrektor Biblioteki Aleksandryjskiej imieniem Euklides napisał dzieło, które jest znane pod późniejszym łacińskim tytułem *Elementy*. W dziele tym z następujących pięciu postulatów wyprowadził całą geometrię (tę nauczaną w szkole i zwaną euklidesową) i całą arytmetykę.

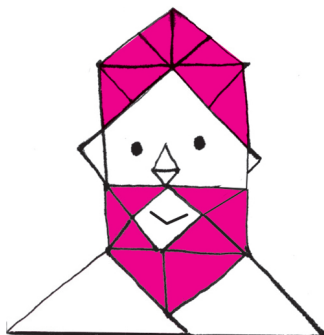
- I. Od dowolnego punktu do dowolnego innego można poprowadzić prostą.
- II. Ograniczoną prostą można dowolnie przedłużyć.
- III. Z dowolnego środka dowolnym promieniem można opisać okrąg.
- IV. Wszystkie kąty proste są równe.
- V. Jeśli dwie proste na płaszczyźnie tworzą z trzecią kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych (rys. 1), to proste te, po przedłużeniu, przetną się i to z tej właśnie strony.



Rys. 1

M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 1882.

D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1899.



A. Tarski, *What is elementary geometry?*, praca napisana w latach 40. XX wieku, wielokrotnie ulepszana, cytowana przed opublikowaniem i ostatecznie opublikowana w 1959 roku.

Mający styczność z podstawami geometrii zdziwią się zapewne, że oznaczam tu punkty wielkimi literami, choć praktyka i prace z tej dyscypliny każą oznaczać je – jako elementy uniwersum – literami małymi. Czynię tak ze względu na tradycję nauczania szkolnego, gdzie małymi literami oznacza się proste.

Oczywiście w definicji przystawiania kątów można zamiast małego kwantyfikatora napisać duży, zamieniając równocześnie ostatnią koniunkcję na implikację.

Dzieło to było przez tysiąclecia uznawane za wzór ścisłości rozumowania dla wszystkich dyscyplin naukowych. Aż przyszły czas, gdy matematycy tak dokładnie zaczęli przyglądać się swojej dyscyplinie i tak ostre kryteria narzucili rozumowaniom, że trzeba było uznać, iż postulaty Euklidesa można jedynie traktować jako wzorowy zapis intuicji tego, co być powinno. Ale tylko intuicji.

Jako pierwszy nowoczesną aksjomatykę geometrii euklidesowej, spełniającą wszelkie wymogi logiki matematycznej, podał w 1882 roku Moritz Pasch, ale za naprawdę dobrą uznano dopiero aksjomatykę, którą zawarł David Hilbert w dziele *Podstawy geometrii*, którego tytuł stał się nazwą dyscypliny matematycznej badającej aksjomatyczne ujęcia geometrii.

Dobra to ta aksjomatyka była, ale, niestety, nie okazała się prosta i w żadnym razie nie nadawała się do tego, by np. uczyć według niej w szkole. Jej pojęciami pierwotnymi (czyli pojęciami, o których traktowały aksjomaty) były trzy rodzaje zmiennych (punkty, proste i płaszczyzny) oraz cztery relacje (leżenie na, leżenie między, przystawanie odcinków i przystawanie kątów). A aksjomatów było 20, z czego co najmniej jedna trzecia o stopniu komplikacji większym niż V postulat Euklidesa.

Powstało pytanie, czy dla geometrii euklidesowej istnieje aksjomatyka prosta i zrozumiała nie tylko dla profesjonalistów. Przede wszystkim zastanowiono się nad doбором pojęć pierwotnych.

Korekta pojęć pierwotnych

1. Tu najpopularniejsza okazała się propozycja Alfreda Tarskiego zawierająca jeden zbiór zmiennych (*uniwersum*) – to punkty – i dwie relacje – leżenia między i przystawania:

$$\langle \mathcal{S}; \mathcal{B}, \equiv \rangle,$$

gdzie napis $\mathcal{B}(ABC)$ oznacza, że punkt B należy do odcinka AC , a napis $AB \equiv CD$ – że odcinki AB i CD są przystające.

Za pomocą tych pojęć można zdefiniować wszystkie pojęcia pierwotne Hilberta. Definiujemy kolejno współliniowość

$$\mathcal{L}_T(ABC) \iff \mathcal{B}(ABC) \vee \mathcal{B}(BCA) \vee \mathcal{B}(CAB),$$

co nie budzi wątpliwości, i mamy prostą, i zbiór prostych

$$\mathcal{L}_T(AB) := \{C : \mathcal{L}_T(ABC)\} \quad \mathcal{L}_T := \{\mathcal{L}_T(AB) : A \neq B\}.$$

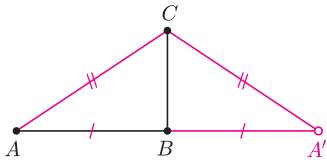
Płaszczyzna to przecież symetralna odcinka, więc definiujemy

$$\mathcal{P}_T(AB) := \{C : AC \equiv CB\} \quad \mathcal{P}_T := \{\mathcal{P}_T(AB) : A \neq B\}.$$

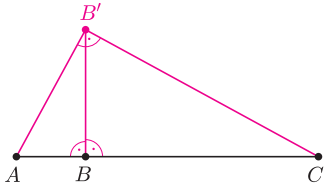
Hilbertowskie *leżenie na* to teraz zwykle należenie i do zdefiniowania pozostaje tylko przystawanie kątów (k, l, m, n to proste) – wykorzystujemy tu II cechę przystawiania trójkątów:

$$kl \equiv_T mn \iff \exists ABCA'B'C' : (A \neq B \neq C \wedge A, B \in k \wedge B, C \in l \wedge A \wedge A' \neq B' \neq C' \wedge A', B' \in m \wedge B', C' \in n \wedge ABC \equiv A'B'C'),$$

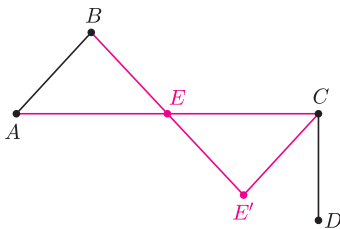
gdzie $ABC \equiv A'B'C'$ to $AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \wedge CA \equiv C'A'$.



Rys. 2

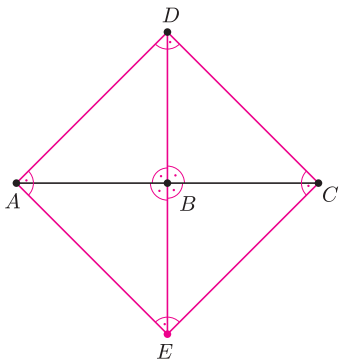


Rys. 3

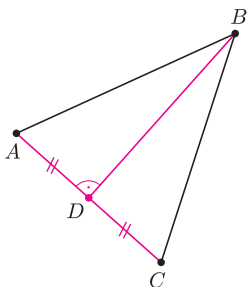


Rys. 4

W przestrzeni trójwymiarowej relację Pieriego można zdefiniować za pomocą relacji trójkąta równobocznego, co na płaszczyźnie jest niemożliwe.



Rys. 5



Rys. 6

Różnica między pomysłem Tarskiego a realizacją Jaśkowskiego polega na tym, że Jaśkowski rozważa kule z brzegiem, a Tarski bez brzegu (co komplikuje definicję punktów).

2. Z układu pojęć pierwotnych Tarskiego można usunąć leżenie między, otrzymując system

$$\langle \mathbb{S}; \equiv \rangle,$$

poprzez następujące trzy definicje:

– współliniowości

$$L_{\equiv}(ABC) \iff A = B \vee \forall DD' : (DA \equiv AD' \wedge DB \equiv BD' \implies DC \equiv CD')$$

(C leży na każdej płaszczyźnie przechodzącej przez A i B – porównaj definicję płaszczyzny w systemie Tarskiego);

– kąta prostego (rys. 2)

$$J_{\equiv}(ABC) \iff A = B \vee \exists A' : (A \neq A' \wedge AB \equiv BA' \wedge AC \equiv CA' \wedge L_{\equiv}(ABA'));$$

– no i leżenia między (rys. 3)

$$B_{\equiv}(ABC) \iff L_{\equiv}(ABC) \wedge \exists B' : (J_{\equiv}(ABB') \wedge J_{\equiv}(B'BC) \wedge J_{\equiv}(AB'C)).$$

3. Mario Pieri już w 1903 roku zauważył, że relacja przystawania może być zubożona – jego relacja $P(ABC)$ oznaczała, że trójkąt ABC jest równoramienny ($AB \equiv BC$). Dowód wystarczalności systemu

$$\langle \mathbb{S}; P \rangle,$$

jest prosty, bo – jak łatwo sprawdzić – poprzednio relacje L, J i B zdefiniowaliśmy *de facto* za pomocą relacji P. Pozostaje do zdefiniowania pełne przystawanie, co można zrobić w dwóch krokach:

najpierw środek odcinka

$$M_P(ABC) \iff B(ABC) \wedge P(ABC),$$

i już (rys. 4)

$$AB \equiv CD \iff \exists EE' : (M_P(AEC) \wedge M_P(BEE') \wedge P(E'CD)).$$

4. W latach 40. Frederick Jenks (i dziesięć lat później Dana Scott) zajął się wymienioną już relacją kąta prostego, J. Okazuje się, że system

$$\langle \mathbb{S}; J \rangle$$

też wystarcza do opisu geometrii – przejście do systemu Pieriego to najpierw definicja środka (rys. 5)

$$M_J(ABC) \iff \exists DE : (J(ABD) \wedge J(ABE) \wedge J(CBD) \wedge J(CBE) \wedge J(ADC) \wedge J(DCE) \wedge J(CEA) \wedge J(EAD)),$$

skąd od razu (rys. 6)

$$P_J(ABC) \iff \exists D : (M_J(ADC) \wedge J(ADB)).$$

Każdy z wymienionych (i wiele innych) układów pojęć pierwotnych został wyposażony w układ aksjomatów prowadzący do geometrii euklidesowej. Wszystkie one są dość okropne (do czego jeszcze wrócę), a w każdym razie żaden nie został zaakceptowany do użytku powszechnego, a wspomniana popularność systemu Tarskiego ma swoje źródło w tym, że najłatwiej przed sądem udowodnić, że jest zrozumiały i poprawny pod każdym względem (daje nawet teorię rozstrzygalną, ale to już zaleta wyłącznie dla zawodowców).

Fakt, że najstarsza z teorii matematycznych, powszechnie nauczana w szkole, nie ma zadowalającej aksjomatyki, podczas gdy inne teorie mają (i to piękne, jak teoria grup czy geometria rzutowa), budził wiele emocji. Byli i tacy, którzy sądzili, iż jesteśmy ofiarami zaproponowanego przez Greków zestawu pojęć opartego o wydumany i nierealizowalny obiekt, jakim jest punkt.

Młody Tarski w 1929 roku zaproponował, by geometrię opisać jako zbiór kul z jedną tylko relacją zawierania (nazwał to geometrią naturalną). Przedstawiam ten pomysł w wersji Stanisława Jaśkowskiego z 1949 roku. Kule oznaczane będą literami gotyckimi.

Punkty zdefiniować bardzo łatwo – to najmniejsze kule:

$$\mathbb{S} := \{a : \forall b (b \subset a \implies b = a)\}.$$

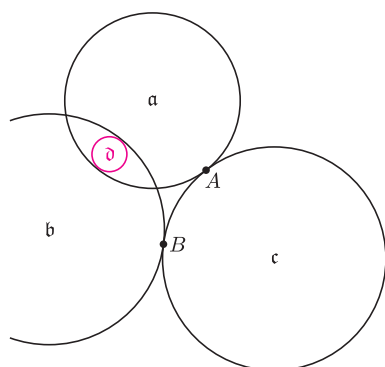
Dalej punkty w tym systemie będą oznaczał dużymi literami łacińskimi, jak poprzednio. Definiujemy kolejno styczność kul

$$a \circ \circ b \iff \exists! c (c \subset a, b),$$

fakt, że punkt leży na powierzchni kuli

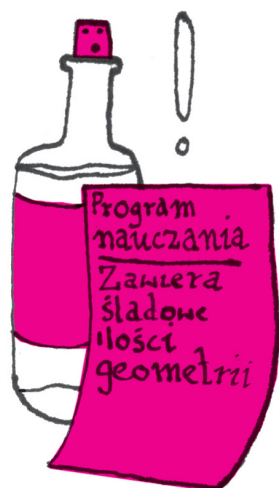
$$A \circ a \iff A \circ \circ a \wedge \exists b (A \circ \circ b \circ \circ a \wedge b \neq A)$$

(a więc jest punktem styczności dwóch kul),



Rys. 7

F. Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, 1959.



Rozwiązanie zadania F 871. Granicę wysokości góry wyznacza wytrzymałość jej dolnych warstw. Jeżeli ciśnienie górnych warstw wystarczy do zerwania sztywności wiązań, to dolne warstwy zaczną się „ropływać”, co spowoduje „opadanie” wierzchołka góry. Oszacujmy, przy jakiej wysokości h zmniejszenie energii potencjalnej skał na skutek obniżenia środka ciężkości o Δh przewyższy energię potrzebną do stopienia dolnej warstwy skał o gęstości ρ , grubości Δh i polu powierzchni S . Zmiana energii potencjalnej wyniesie $hSg\rho\Delta h$. Energia potrzebna do stopienia warstwy wynosi $LS\rho\Delta h$. Otrzymujemy stąd warunek „stopienia podstawy”:

$$hSg\rho\Delta h > LS\rho\Delta h,$$

a więc największą możliwą wysokością jest $h = L/g$, co dla podanych wartości L daje wartość w granicach od 12,8 km do 23,6 km.

wskazujemy kulę o danej średnicy

$$A \odot B = c \iff A, B \odot c \wedge \neg(\exists ab\delta (A \subset a \wedge B \subset b \wedge a \circ \circ c \circ \circ b \wedge \delta \subset a \wedge \delta \subset b))$$

(to, czego zabrania zanegowany nawias, jest przedstawione na rysunku 7), a stąd już blisko do definicji kąta prostego

$$\perp(ABC) \iff B \odot (A \odot C),$$

jako kąta wpisanego opartego na średnicy.

Ale i ten pomysł, mimo oczywistej prostoty i naturalności, rozsądną aksjomatyką nie zaowocował.

Inne drogi

Wspomniany już Frederick Jenks miał też inny pomysł, by aksjomatyzować nie obiekty, lecz ruch. Jeśli to skrzyżować ze starym hasłem Leibniza, by w geometrii rachować na obiektach geometrycznych, i z koncepcją Juhassona Hjelmsleva, by był to rachunek symetrii, to otrzymamy konsekwentnie doprowadzoną do końca pracę Friedricha Bachmanna, którą opisałem w *Delcie* 6/2013. Ta propozycja, nieco „złagodzona”, jest obecna w szkołach niemieckich, a polski czytelnik może to obejrzeć, oglądając dział geometrii w wydany przez Prószyńskiego *Atlasie matematyki*.

No właśnie, co z tą szkołą? Kiedy wraz z kolegami uruchomiliśmy w 1967 roku klasy matematyczne w warszawskim ówczesnym liceum Gottwalda (dziś Staszica), uczyliśmy geometrii na podstawie aksjomatyki Tarskiego. Cóż, młodzi przeżyli (sam uczyłem tak geometrii jeszcze w dwóch „normalnych” szkołach) i dzisiaj wielu z nich jest zawodowymi matematykami i nosi tytuły profesorskie. Więc można, ale my oceniamy ten eksperyment jako znęcanie się nad nieletnimi.

Usprawiedliwia nas fakt, że akurat wtedy weszła w życie ósmioletnia szkoła podstawowa, a młodzież w nowym liceum dostała do ręki podręczniki geometrii oparte o mało udaną modyfikację systemu niemieckiego. Zdrowy organizm polskiej szkoły tę propozycję dość szybko odrzucił.

Efekt tych eksperymentów był taki, że dziś uczy się geometrii śladowo.

Odwolując się do poważniejszych problemów, wypada przypomnieć, że w latach sześćdziesiątych w polskiej matematyce odbyła się rewolucja bourbakistowska, czyli zmiana generalnego nurtu z opartego na aksjomatach i analogiach z fizyką na oparty o teorię kategorii, a więc traktujący matematykę jako naukę o obiektach i ich przekształceniach. To też zaowocowało propozycjami dla szkoły, z czym zetknąłem się osobiście, mając za temat pracy magisterskiej adaptowanie na polski grunt koncepcji nauczania geometrii Gustave’a Choqueta. Koledzy z Krakowa w swoich klasach matematycznych nauczali po bourbakistowsku (co zresztą – jak wspominają – wywołało zgrozę wizytujących ich Francuzów-bourbakistów) – młodzież przeżyła i to.

* * *

Rozsądnej odpowiedzi na pytanie, dlaczego geometria euklidesowa, przecież tak nam bliska, której zawdzięczamy – przez fakt, że jako jedyna dopuszcza zmieniającą skalę podobieństwa – rozkwit naszej cywilizacji, nie ma prostej, nadającej się do nauczania aksjomatyki, nie potrafimy udzielić. Co więcej, po dwudziestowiecznym wzmożeniu badań nad tą kwestią dziś pogodziliśmy się z tak wyglądającą rzeczywistością.

Dzisiaj dla większości (również dla zawodowych matematyków) geometria euklidesowa to badanie zbioru \mathbb{R}^n , w którym odległość dana jest wzorem

$$|PQ| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2}.$$

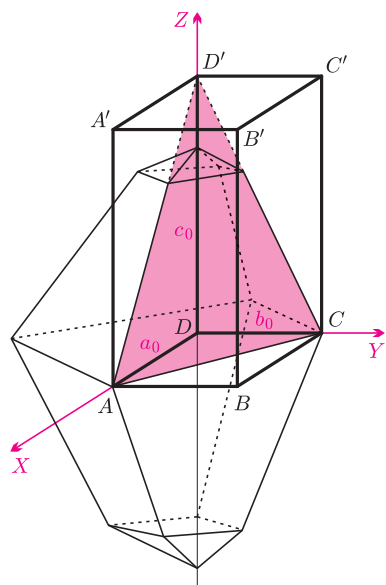
Podobnie opisuje się też inne geometrie.

A ta geometria, którą wszyscy podziwiali jeszcze pięćdziesiąt lat temu, staje się dyscypliną, której percepcja podobna jest do sposobu, w jaki oglądają dzieła plastyczne historycy sztuki. I która przez swoich artystów jest ciągle jeszcze tu i ówdzie uprawiana.

Jak opisać kryształ?

Klaudia JĘDRZEJEK

Autorka jest uczennicą I LO w Pszczynie. Artykuł stanowi skrót jej odczytu na XXXI Ogólnopolskim Sejmiku Matematyków (Szczyrk, 2014), który poprowadziła, demonstrując najrozmaitsze kryształy i ruchome modele ilustrujące ich budowę.



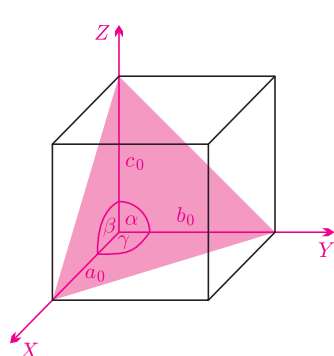
X, Y, Z – osie krystalograficzne,
 a_0, b_0, c_0 – jednostki osiowe,
 $ACDD'$ – czworościan zasadniczy,
 $ABCD A' B' C' D'$ – komórka elementarna (równoległoscian).

Kryształy to jedne z najbardziej osobliwych elementów świata przyrody. Materiały krystaliczne wykazują niemal niespotykaną naturalną tendencję do tworzenia wielościanów. Piętnastometrowe kryształy w Meksyku czy dwumilimetrowe kryształki soli w naszej kuchni – wszystkie swą szczególną postać zawdzięczają uporządkowanemu rozmieszczeniu atomów, jonów lub cząsteczek. Krystalografia, czyli nauka o wewnętrznej i zewnętrznej budowie oraz fizycznych i fizykochemicznych właściwościach ciał krystalicznych, zawiera wiele mniejszych działów badających przeróżne cechy kryształów z wykorzystaniem zaawansowanych technik współczesnej nauki. A cóż my, prości zjadacze chleba, o nieuzbrojonym oku, jesteśmy w stanie powiedzieć o „kamyku” przywiezionym jako pamiątka z kopalni? Gdy chodzi o monokryształ, możemy dokonać prawie pełnego opisu jego struktury zewnętrznej, tym samym zamieniając się w początkujących znawców krystalografii strukturalnej.

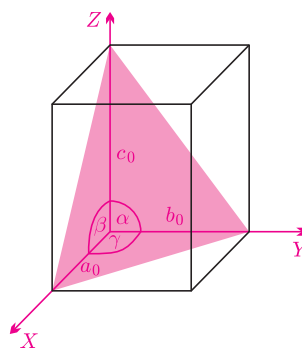
Na przełomie lat 1890 i 1891 Artur Schönflies i Jewgraf Fiodorow, analizując budowę zewnętrzną i wewnętrzną kryształów, niezależnie stwierdzili, że istnieje 230 możliwych krystalograficznych grup przestrzennych (czyli sposobów rytmicznego wypełnienia przestrzeni przez jednakowe monokryształy) oraz że istnieją 32 klasy krystalograficznych monokryształów (dwa monokryształy należą do tej samej klasy, gdy mają takie same izometrie własne, czyli przekształcenia, które nakładają je same na siebie).

Jak możemy sklasyfikować nasz kryształ? Umieścimy go w przestrzennym układzie współrzędnych tworzonym zwykle przez trzy osie krystalograficzne, w sposób przedstawiony na rysunku obok.

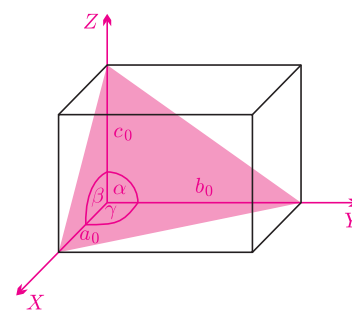
Przystępujemy do badania. Pierwszym krokiem będzie określenie rodziny, do której należy nasz kryształ. Czym jest rodzina krystalograficzna? Jest to zbiór ciał krystalicznych o takim samym czworościanie zasadniczym. Na kształt czworościanu wpływają długości jednostek osiowych i miary kątów między osiami. Istnieje sześć różnych rodzin krystalograficznych:



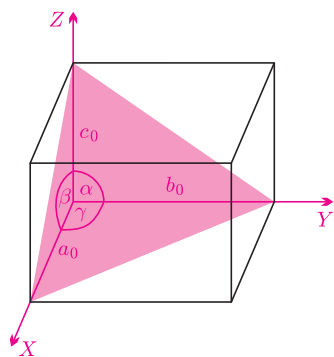
regularna
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
 $a_0 = b_0 = c_0$



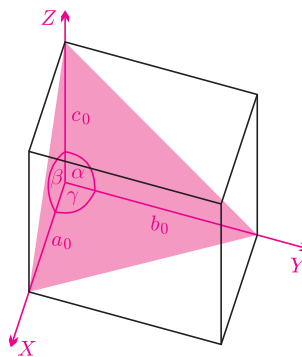
tetragonalna
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
 $a_0 = b_0 \neq c_0$



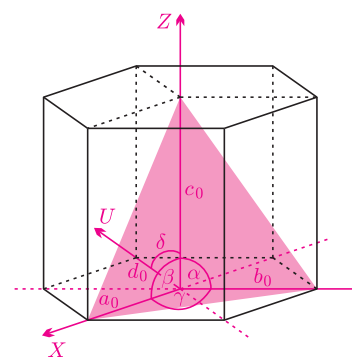
rombowa
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
 $a_0 \neq b_0 \neq c_0 \neq a_0$



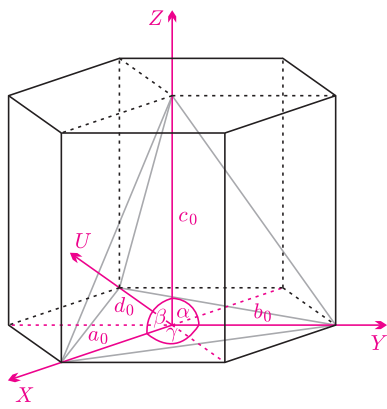
jednoskośna
 $\alpha = \gamma = 90^\circ, \beta \neq 90^\circ$
 $a_0 \neq b_0 \neq c_0 \neq a_0$



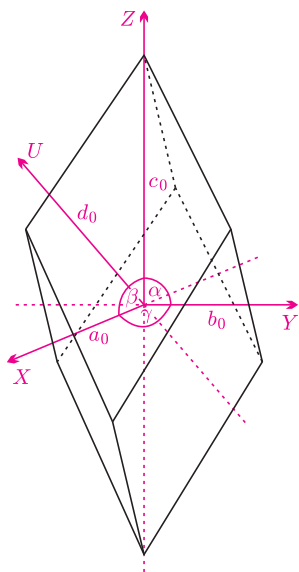
trójskośna
 $\alpha \neq 90^\circ \neq \beta, \gamma \neq 90^\circ$
 $a_0 \neq b_0 \neq c_0 \neq a_0$



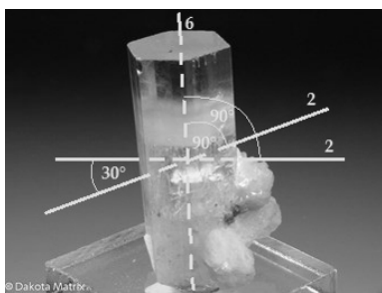
heksagonalna
 $\alpha = \beta = \delta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$
 $a_0 = b_0 = d_0 \neq c_0$



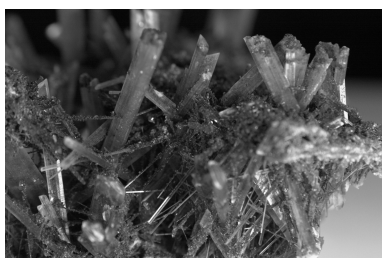
układ heksagonalny



układ trygonalny



Beryl – zaznaczone osie symetrii (fot. Tom Loomis).



Gips (fot. Katarzyna Wyrobek).

Kolejnym etapem jest wybór układu krystalograficznego. Układy krystalograficzne zostały wyróżnione ze względu na kształt komórki elementarnej. Każdej z rodzin odpowiada jeden rodzaj komórki elementarnej (zaznaczone na rysunkach), a więc jeden analogiczny rodzaj układu. Wyjątkiem jest rodzina heksagonalna, dla której możliwe są aż dwie kombinacje: układ heksagonalny i układ trygonalny (patrz rysunki na marginesie).

Który wybrać w naszym przypadku? Układ heksagonalny cechuje się 6-krotną osią symetrii, trygonalny zaś jedynie 3-krotną. Wybieramy tę odpowiadającą naszemu kryształowi i problem rozwiązany. Przykładowo kwarc (patrz tylna strona okładki) i kalcyt należą do rodziny heksagonalnej, układu trygonalnego.

Ostatnią czynnością w opisie struktury zewnętrznej kryształu jest dobór jednej z 32 klas krystalograficznych. Klasy krystalograficzne są przyporządkowaniem ze względu na symetrię bryły, zatem będziemy szczegółowo rozpatrywać makroskopowe elementy symetrii naszego kryształu, a więc osie symetrii, osie inwersyjne, środek symetrii, płaszczyzny symetrii.

Dla jednego układu krystalograficznego występuje maksymalnie 7 klas, co ułatwi nam znalezienie tej właściwej. Abyśmy mogli lepiej zrozumieć ten problem, pokażę go na przykładzie. Rozpocznijmy analizę.

Podstawową sprawą jest dostrzeżenie osi symetrii, ich liczby i krotności.

W krystalografii oznacza się je za pomocą n , gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ i wskazuje na ich krotność. Przy poszukiwaniu osi symetrii nie powinniśmy ograniczać się tylko do kierunków wyznaczanych przez osie krystalograficzne. Możemy znaleźć jedną, trzy lub nie dostrzec żadnej osi. W przypadku braku osi symetrii bryła może mieć oś inwersyjną – inwersją nazywane jest tu złożenie obrotu względem osi z symetrią względem leżącego na niej punktu, w tym przypadku środka symetrii komórki. Osie inwersyjne oznacza się symbolami $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ lub $\bar{6}$ w zależności od ich krotności. Przykładem minerału z rodziny jednoskośnej o jednokrotnej osi inwersyjnej jest gips.

Jeżeli bryła ma jedną oś symetrii, może też mieć środek symetrii. Dla osi nieparzystokrotnych równoznaczne jest to z przekształceniem osi inwersyjnej, dlatego nie wyróżnia się w tym przypadku nowych klas. Dla osi parzystokrotnych środek symetrii warunkuje występowanie płaszczyzny symetrii. Możliwa jest również sytuacja, kiedy kryształ nie ma środka symetrii, a mimo to ma płaszczyzny symetrii, w dodatku (z wyjątkiem klasy $\bar{4}3m$) przecinające się wzdłuż jednej osi. Jest to warunkowane występowaniem dodatkowo dwóch inwersyjnych osi parzystokrotnych.

Jeżeli mamy do czynienia z trzema osiami symetrii, to dodatkowo dla poszczególnych układów wyznaczono miary kątów między nimi. Przykładowo heksagonalny kryształ berylu ma aż trzy osie symetrii: 6-krotną i dwie 2-krotne prostopadłe do niej i tworzące kąt 30° . W przypadku trzech osi możliwe jest również istnienie środka symetrii na przecięciu tych osi i tak też jest w tej sytuacji. Sprawia to, że można zauważyć płaszczyzny prostopadłe do osi parzystokrotnych. Gdybyśmy w takich okolicznościach spotkali się z 3-krotną osią symetrii, to okazałoby się, że jest ona osią inwersyjną.

Wszystkie nasze poczynania zmierzają do zaklasyfikowania kryształu do jednej z 230 grup krystalograficznych. W tym momencie niezbędna jest już analiza struktury wewnętrznej, a tego tzw. gołym okiem nie zrobimy. Kierując się jednak słowami Alberta Einsteina „Spójrz głęboko w przyrodę, a wtedy wszystko lepiej zrozumiesz”, zgłębiajmy niezgłębione, szukajmy inspiracji w otoczeniu i dajmy się czasem zaskoczyć.

Krystalografowie-matematycy zamiast komórkami elementarnymi wolą się zajmować grupami ich izometrii własnych (przez geologów i fizyków nazywanych symetriami). Takie grupy noszą nazwę skończonych grup punktowych. Artykuł o nich zamieścimy w jednym z następných numerów.

Redakcja

O dialogach pokoleń

Mam swoje lata, dzieci i wnuki i sędzę, że mogę się na ten temat wypowiadać. Ostatnio bardzo dobitnie doświadczyłam zjawisk trudności w porozumiewaniu się pokoleń i prób pokonania takich szpar, przepaści. . .

Zaczęło się od „małej” rozmowy w samochodzie z pokoleniem moich dzieci. Opowiadałam o spektaklu operowym, na którym byłam dzień przedtem. Mówiłam o współczesnym tej opery kompozytorze, o którym coś (nie całkiem precyzyjnie) wiedziałam i o trudnościach, które napotkałam w zrozumieniu jego utworu. W trakcie rozmowy włączyła się uczestniczka „z tylnego siedzenia” i zaczęła odczytywać z Internetu pełną informację o kompozytorze i jego dziele. Wysłuchaliśmy konkretów, rozmowa się skończyła.

W barze, do którego udaliśmy się na małą przekąskę, brzmiała muzyka. Telefon mojego syna zidentyfikował wykonawcę, rodzaj utworu, innych wykonawców tego samego utworu, inne utwory wykonywane przez tę osobę i utwory w charakterze pokrewne do tego, którego słuchamy. Mój telefon jeszcze by tego nie umiał, ale jego synek odbierał to jako całkowicie normalne zjawisko.

Zdaję sobie sprawę, że dla wielu Czytelników *Delty* te sytuacje są zupełnie naturalne. Dla mnie nie są. Rozmowy o obejrzanych spektaklach, przeczytanych książkach, filmach, były rozmowami z przyjaciółmi przez lata – dzieliłiśmy się wrażeniami, opiniami. Czasem ktoś się mylił – ja np. uważałam, że kompozytor opery wyjechał z Polski w 1968 roku – telefon syna poprawił mnie, że w 1958. Rozmowy takie rozwijały nasze horyzonty, zbliżały z rozmówcami. O czym warto rozmawiać teraz, skoro telefon i Internet i tak wiedzą lepiej i dokładniej?

Niedzielny wieczór spędziłam na spektaklu Instytutu Teatralnego im. Zbigniewa Raszewskiego zatytułowanym *Kryjówka*. Nastroje tego typu pamiętam ze spotkań w mieszkaniu Białoszewskiego. Całość rozgrywana w dwu prywatnych mieszkaniach. Siedzimy na podłodze. To, co mną wstrząsnęło, to narracja trzech osób (znowu pokolenie moich dzieci), które zbierały, długo i konsekwentnie, relacje ludzi ocalałych z Holocaustu. Ci, co zbierali, często dowiadywali się jako dorośli, co ich z pokoleniem Holocaustu łączy. I poczuli potrzebę, konieczność zachowania tych wspomnień, którymi zresztą ocaleni, z różnych powodów, nie zawsze chcą się dzielić. Wspomnienia wypowiedane bardzo spokojnie, „normalni” o sprawach daleko nie „normalnych”. Do tego spektakl, częściowo osnuty na tekstach z *Wesela*, częściowo na wspomnieniach o Irenie Solskiej. Porażający.

Ci z pokolenia moich dzieci zobaczyli konieczność zapamiętania. Łączenia się w pamięci i zrozumieniu z poprzednimi pokoleniami. Dawania świadectwa.

A ja piszę o tym dlatego, że jestem z pokolenia odchodzącego. I chciałabym, by trwał nasz kontakt z tymi, którzy zostają. Mimo i dzięki elektronom wędrującym w naszej życiowej przestrzeni.

Witajcie w Nowym Roku.

Magdalena FIKUS

O rozkładzie słów na słowa Lyndona

Łukasz GRZĄDKO*



Niech s będzie tablicą, w której zapiszemy badane słowo. Każda kolejna komórka s będzie zawierać kolejną literkę tego słowa. Np. dla $s = abaabab$, $s[0] = a$, $s[6] = b$. Definiujemy również długość słowa s jako $|s|$. Dla powyższego słowa $|s| = 7$.

Przez $s[i..j]$ oznaczmy podśłowo, czyli spójny fragment słowa zawierający litery występujące od pozycji i do pozycji j . Dla przykładu $s[1..3] = baa$.

Jeśli $i = 0$, to podśłowo nazwiemy prefiksem słowa s , a jeśli $j = |s| - 1$, to nazwiemy je sufiksem. Jeśli nie zachodzi jednocześnie $i = 0$ i $j = |s| - 1$, to dany prefiks (sufiks) nazwiemy właściwym.

Dla dwóch słów s i t powiemy, że s jest wcześniejsze niż t w porządku leksykograficznym (co oznaczmy przez $s < t$), jeśli s jest prefiksem właściwym t lub dla pewnego i jest $s[i] < t[i]$ oraz dla wszystkich $j < i$ zachodzi $s[j] = t[j]$. Dla przykładu $ab < abc$, $abc < ac$, $ac < b$.

Obrotem cyklicznym słowa s długości n jest każde słowo postaci $s(k) = s[k..n-1]s[0..k-1]$. Słowo s jest słowem Lyndona, jeśli $s < s(k)$ dla wszystkich $1 \leq k < n$.

W tym artykule rozwiążemy problem rozkładu słowa na najmniejszą liczbę słów Lyndona (zwanym też słowami pierwszymi). Problem ten jest inspirowany zadaniem *Jan* z pierwszej edycji Potyczek Algorytmicznych, która odbyła się w roku 2005. Jakub Radoszewski w artykule *Słowa pierwsze*, *Delta* 12/2010, podał kluczowe własności słów Lyndona, które wykorzystamy podczas konstrukcji algorytmu. Przypomnijmy, że słowo Lyndona to takie słowo, że przy dowolnym jego obrocie cyklicznym zawsze otrzymuje się słowo późniejsze od niego leksykograficznie. Obrót cykliczny polega na przeniesieniu początkowego fragmentu słowa na jego koniec, np. dla słowa *baca* mamy następujące obroty: *acab*, *caba*, *abac*. Oczywiście słowo *baca* nie jest słowem Lyndona, gdyż *acab* występuje wcześniej w słowniku. Słowo *abac* jest już słowem Lyndona.

Słowo *abaabab* również nie jest słowem Lyndona, ale można je rozłożyć na słowa Lyndona. Trywialny jest rozkład na słowa jednoliterowe $a \cdot b \cdot a \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b$ (przy czym \cdot oznacza sklejenie słów), ale istnieją też bardziej oszczędne rozkłady, np. $ab \cdot aab \cdot ab$ lub $ab \cdot aabab$.

Dalej skorzystamy z trzech twierdzeń. Opisują one znane własności słów Lyndona. Dowody tych twierdzeń można znaleźć w przywołanym artykule z *Delty* 12/2010.

Twierdzenie 1. Słowo s jest słowem Lyndona wtedy i tylko wtedy, gdy jest leksykograficznie wcześniejsze niż dowolny właściwy sufiks s .

Twierdzenie 2. Słowo s jest słowem Lyndona wtedy i tylko wtedy, gdy s jest jednoliterowe lub istnieją słowa Lyndona s_1 oraz s_2 , takie że $s = s_1s_2$ oraz $s_1 < s_2$.

Twierdzenie 3. Dowolne słowo s przedstawia się jednoznacznie jako sklejenie pewnej liczby słów Lyndona $s = l_1l_2 \dots l_k$, takich że $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_k$. Będziemy też pisać, że rozkład ten spełnia warunek monotoniczności.

Zauważmy, że w naszym problemie nie ma wymagania, że słowa Lyndona w rozkładzie mają spełniać warunek monotoniczności $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_k$, tylko że ich liczba k ma być jak najmniejsza. Okazuje się jednak, że jeśli znajdziemy rozkład spełniający warunek monotoniczności, to k będzie najmniejsze i *vice versa*:

Dowód. (\Rightarrow) Przypuśćmy, że mamy rozkład $s = l_1l_2 \dots l_k$ długości k spełniający warunek monotoniczności $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_k$, ale k nie jest najmniejsze. Wtedy istnieje optymalny rozkład $s = l'_1l'_2 \dots l'_m$ długości $m < k$. Rozkład długości m nie może spełniać warunku $l'_1 \geq l'_2 \geq \dots \geq l'_m$, gdyż z jednoznaczności (twierdzenie 3) jest tylko jeden taki rozkład. Stąd dla pewnego $i < m$ mamy $l'_i < l'_{i+1}$. Ale wtedy można takie słowa skleić w jedno słowo Lyndona l'' (twierdzenie 2) i otrzymamy rozkład $s = l'_1l'_2 \dots l'_{i-1}l''l'_{i+2} \dots l'_m$ o długości $m - 1$, co jest sprzeczne z minimalnością m . Uzyskaliśmy sprzeczność, skąd wynika, że k jest najmniejsze.

(\Leftarrow) Chcemy wykazać, że jeśli k jest najmniejsze oraz $s = l_1l_2 \dots l_k$ jest rozkładem słowa s na słowa Lyndona, to $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_k$. Przypuśćmy, że k jest najmniejsze, lecz rozkład ten nie spełnia warunku monotoniczności, czyli dla pewnego i mamy $l_i < l_{i+1}$. Z twierdzenia 2 możemy otrzymać krótszy rozkład, długości mniejszej niż k . Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy. Δ

Rozwiązując zatem nasz problem, będziemy konstruować rozkład $s = l_1l_2 \dots l_k$ spełniający warunek monotoniczności $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_k$.

Jak znaleźć słowo l_i ? Bez straty ogólności możemy się skupić na wyznaczeniu słowa l_1 . Jeśli s jest słowem Lyndona, to wystarczy przyjąć $l_1 = s$.

W przeciwnym przypadku rozważamy kolejne prefiksy s w kolejności malejących długości. Kiedy pewien prefiks s jest słowem Lyndona, znaleźliśmy l_1



*pracownik firmy Nokia



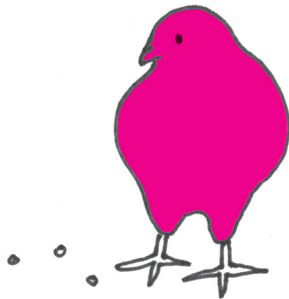
Rozwiązanie zadania F 872.

Energia wiązania sześcianu o boku o długości L zawierającym N cząsteczek wynosi $3\epsilon N^3$, bo każda cząsteczka ma 6 najbliższych sąsiadów i z każdym dzieli jedno wiązanie. Do oddzielenia dwóch sąsiednich warstw cząsteczek potrzebna jest energia ϵN^2 , ale po rozdzieleniu powstają dwie kwadratowe powierzchnie swobodne cieczy o boku o długości L każda. Mamy więc $\rho L_p L^3 = 3\epsilon N^3$ oraz $2\gamma L^2 = \epsilon N^2$. Stąd już łatwo wyznaczamy:

$$\frac{N}{L} = \frac{\rho L_p}{6\gamma}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $(N/L)^3 \approx (6,4 \cdot 10^7 / \text{cm})^3 \approx 2,6 \cdot 10^{23}$ cząsteczek w cm^3 . Dokładna wartość to 1/18 liczby Avogadro, czyli $3,345 \cdot 10^{22}$ cząsteczek w cm^3 , a więc otrzymaliśmy niezły wynik.

Najslabszym ogniwem naszego rozumowania jest założenie o charakterze wiązań (więcej w artykule K. Rejmera „Wiązania wodorowe” w *Delcie* 5/2014). Lepsze oszacowanie otrzymujemy dla substancji tworzącej kryształ o wiązaniach kowalencyjnych, jak np. krzem (Si) o $L_p = 13,7 \text{ J/g}$, $\gamma = 1,41 \text{ N/m}$ – dla powierzchni (w 100°C) – oraz $\rho = 2,32 \text{ g/cm}^3$, dla którego otrzymujemy wartość $5,3 \cdot 10^{22}$ atomów w cm^3 wobec dokładnej wartości $2,151 \cdot 10^{22}$ – tu rozbieżność wynika z nieco bardziej skomplikowanej postaci sieci krystalicznej niż przyjęta w naszych obliczeniach.



```

p := 0;
j := 1;
while p < n do
  if s[j] > s[p] then
    j := j + 1
  else if s[j] = s[p] then
    i := p;
    while s[j] = s[i] do
      i := i + 1;
      j := j + 1;
    if s[j] < s[i] then
      m := (j - p) div (j - i);
      wypisz m razy pod słowo
        s[p..p + j - i - 1];
      p := p + (j - i) · m;
      j := p + 1;
    else
      j := j + 1;
  else
    wypisz pod słowo s[p..j - 1];
    p := j;
    j := j + 1;

```

i dostajemy rozkład $s = l_1 t$. Zauważmy, że prefiks jednoliterowy jest zawsze słowem Lyndona, więc ten proces na pewno zakończy się powodzeniem.

Powtarzając powyższe rozumowanie dla słowa t , wyznaczamy l_2 itd.

Opisany proces wyznacza nam rozkład słowa s na słowa Lyndona $s = l_1 l_2 \dots l_k$.

A co z warunkiem monotoniczności? Przypuśćmy, że dla pewnego i jest $l_i < l_{i+1}$. Skoro algorytm znalazł słowo l_i , szukając od „końca”, nie mógłby pominąć słowa $l_i l_{i+1}$, które (z twierdzenia 2) jest dłuższym słowem Lyndona. Dlatego dla każdego i mamy $l_i \geq l_{i+1}$.

Otrzymany proces podziału na słowa Lyndona jest jednakże nieefektywny.

Sprawdzenie „siłowe”, czy pod słowo długości m jest słowem Lyndona, zajmuje czas z grubsza $O(m^2)$. Wyznaczenie wszystkich słów l_i będzie wymagać n takich sprawdzeń, zatem powyższy algorytm działa w czasie $O(n^3)$. Pokażemy, że nasz problem można rozwiązać w istotnie lepszej złożoności czasowej.

Wprowadzimy w tym celu trzy lematy pomocnicze.

Lemat pomarańczowy. *Jeśli $s[i..j]$ jest słowem Lyndona dla pewnych $i \leq j$ oraz $s[j+1] > s[i]$, to $s[i..j+1]$ jest słowem Lyndona.*

Dowód. Z tego że $s[i] < s[j+1]$ oraz z definicji porządku leksykograficznego wynika, że $s[i..j] < s[j+1]$. Dalej to i twierdzenie 2 implikują, że $s[i..j+1]$ jest słowem Lyndona. \triangle

Lemat kurczaczkowy. *Niech $s = pay$, $t = pb$, gdzie p jest wspólnym prefiksem słów s i t , natomiast a i b są pojedynczymi literami spełniającymi $a < b$. Jeśli s jest słowem Lyndona, to również t jest słowem Lyndona.*

Dowód. Przypuśćmy, że t nie jest słowem Lyndona. Wtedy na podstawie twierdzenia 1 mamy dla pewnego $0 < i \leq |p|$, że $p[0..|p| - 1]b \geq p[i..|p| - 1]b$ (jeśli $i = |p|$, to słowo $p[i..|p| - 1]$ jest puste). Weźmy najmniejszy indeks $k < |p| - i$ taki, że $p[k] > p[i+k]$. Wtedy dla $j < k$ zachodzi $p[j] = p[i+j]$. Ale to przeczy temu, że s jest słowem Lyndona. W przypadku gdy nie ma takiego k , wtedy $p[|p| - i] > b > a$ oraz $p[j] = p[i+j]$ dla $j < |p| - i$. To również przeczy temu, że s jest słowem Lyndona.

Otrzymane sprzeczności dowodzą, że t jest słowem Lyndona. \triangle

Lemat winogronowy. *Jeśli $s[i..j]$ jest słowem Lyndona oraz $s[i] > t$ dla pewnego niepustego słowa t , to $s[i..j]t$ nie jest słowem Lyndona.*

Dowód. Ponieważ $s[i..j]t > s[i]$ oraz $s[i] > t$, więc $s[i..j]t > t$. Z twierdzenia 1 wynika, że $s[i..j]t$ nie jest słowem Lyndona. \triangle

Jesteśmy już gotowi do przedstawienia lepszego algorytmu podziału słowa s na minimalną liczbę słów Lyndona. Na marginesie przedstawiliśmy jego zapis w pseudokodzie. Dla uproszczenia załóżmy, że słowo s kończy się dodatkową literą (strażnikiem) mniejszą leksykograficznie od pozostałych liter słowa s .

Zmienna p używana w algorytmie oznacza początek aktualnie przetwarzanego słowa (i jednocześnie początek kolejnego słowa Lyndona w rozkładzie). Przed każdym obrotem zewnętrznej pętli będzie spełniony następujący niezmiennik pętli: słowo $s[p..j - 1]$ jest słowem Lyndona.

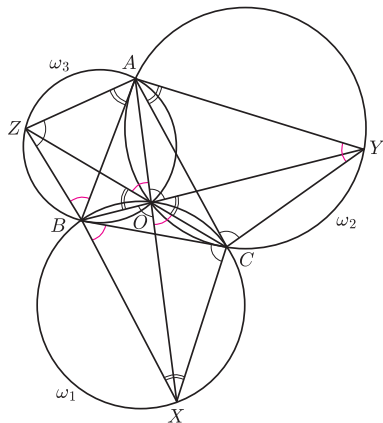
Oczywiście dla $p = 0$, $j = 1$ słowo $s[0]$ jest słowem jednoliterowym i tym samym również słowem Lyndona. Niezmiennik przed pierwszym wejściem do pętli jest prawdziwy. Omówimy teraz trzy przypadki, które mogą wystąpić w pętli, w zależności od tego, która z liter $s[j]$, $s[p]$ jest mniejsza.

Przypadek 1. $s[j] > s[p]$

Niezmiennik pętli gwarantuje, że słowo $s[p..j - 1]$ jest słowem Lyndona. Zatem z lematu pomarańczowego wynika, że słowo $s[p..j]$ też jest słowem Lyndona i po prostu zwiększamy j o jeden.



Rozwiązanie zadania M 1444.
Oznaczmy kąty przy wierzchołku O jak następuje: $\sphericalangle AOZ = \sphericalangle COX = \alpha$,
 $\sphericalangle AOY = \sphericalangle BOX = \beta$,
 $\sphericalangle COY = \sphericalangle BOZ = \gamma$.



Zauważmy, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ oraz na mocy tw. o kątach wpisanych, $\sphericalangle CBX = \alpha$, $\sphericalangle BCX = \beta$, więc kąty w trójkącie BCX wynoszą α, β, γ . Analogicznie jest dla trójkątów BZA i YCA . Zatem są to trójkąty podobne do trójkąta XCB , w szczególności

$$\frac{AY}{CY} = \frac{BX}{BC} \quad \text{i} \quad \frac{BZ}{AZ} = \frac{BC}{CX}.$$

Mnożąc te równania stronami, dostajemy

$$\frac{AY}{CY} \cdot \frac{BZ}{AZ} = \frac{BX}{CX},$$

co daje tezę.



W trakcie pisania tego artykułu autor przypadkowo odnalazł w literaturze bardzo podobny algorytm, który w 1983 roku opublikował Jean-Pierre Duval (*Factorizing words over an ordered alphabet*, J. Algorithms 4, no. 4, 363–381).

Przypadek 2. $s[j] = s[p]$

Dopóki $s[i] = s[j]$, zwiększamy $i = i + 1$ oraz $j = j + 1$. Zauważmy, że po wykonaniu tej pętli słowo $s[p..p + j - i - 1]$ o długości $j - i$ powtarza się jako spójny fragment pewną liczbę razy, dając słowo okresowe.

Z niezmiennika pętli wynika, że słowo $s[p..p + j - i - 1]$ jest słowem Lyndona. Kolejne spójne fragmenty długości $j - i$ są również słowami Lyndona.

Rozkład podsłowa $s[p..j - 1]$ przedstawia się następująco: $x_1 x_2 \dots x_m x_{m+1}$, gdzie $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_m$; dla $k \leq m$ słowo x_k ma długość $j - i$ oraz $x_k = s[p..p + j - i - 1]$. Słowo $t = x_{m+1}$ jest słowem $s[p + (j - i) \cdot m..j - 1]$, gdzie $m = \lfloor (j - p) / (j - i) \rfloor$. Słowo t jest prefiksem właściwym słowa x_m . Może się zdarzyć, że t jest puste. Słowo t również nie musi być słowem Lyndona.

Mamy teraz dwie możliwości: (a) $s[j] < s[i]$, (b) $s[j] > s[i]$.

Dla (a) wypisujemy rozkład $x_1 x_2 \dots x_m$. Rozkład ten spełnia warunek monotoniczności, czyli $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_m$ i jest to najkrótszy rozkład słowa $s[p..p + (j - i) \cdot m - 1]$ na słowa Lyndona. Mamy też $x_m = t s[i] y$. Zauważmy, że t jest prefiksem x_m . Kolejne słowo Lyndona P jest prefiksem słowa t albo słowo $t s[j]$ jest prefiksem P . W pierwszym przypadku zachodzi $P \leq t < x_m$. Widać więc, że kolejne słowo P spełnia warunek monotoniczności. Rozważmy teraz drugi przypadek. Łatwo zauważyć, że $t s[j] < t s[i] y$. Z definicji porządku leksykograficznego wynika dalej, że $P < t s[i] y = x_m$. Również tutaj P spełnia warunek l . Słowo to będzie znalezione w następnej fazie. Kładziemy zatem $p = p + (j - i) \cdot m$, $j = p + 1$.

Dla (b) wykazemy, że słowo $s[p..j]$ jest słowem Lyndona.

Mamy tutaj taki rozkład jak w poprzednim przypadku, tj. $x_1 = x_2 = \dots = x_m$ oraz x_{m+1} , przy czym $x_{m+1} = t s[j]$ oraz $x_1 = t s[i] y$, gdzie t jest wspólnym prefiksem, być może pustym. Z niezmiennika pętli wiemy, że x_1, x_2, \dots, x_m są słowami Lyndona. Przypuśćmy, że t jest niepuste.

Ponieważ $t s[i] y$ jest słowem Lyndona, to również $t s[j]$ jest słowem Lyndona, co wynika z lematu kurczaczkowego. Mamy również $t s[i] y < t s[j]$. Stąd $t s[i] y t s[j]$ jest słowem Lyndona na podstawie twierdzenia 2. Doklejając kolejne słowa, dostajemy, że $s[p..j] = (t s[i] y)^m t s[j]$ jest słowem Lyndona. Zwiększamy zatem j o jeden.

Przypadek 3. $s[j] < s[p]$

Z lematu winogronowego wynika, że słowo $s[p..j]$ nie jest słowem Lyndona.

Łatwo też zauważyć, że słowo $s[p..k]$ dla $k > j$ nigdy nie będzie słowem Lyndona. Wypisujemy zatem $s[p..j - 1]$ i ustawiamy $p = j$ oraz $j = j + 1$.

Twierdzenie 4. Rozkład uzyskany w powyższym algorytmie spełnia warunek monotoniczności.

Dowód. Przed każdym wejściem do pętli słowo $s[p..j - 1]$ jest słowem Lyndona. Jedyne momentami algorytmu, w których wypisywane są słowa rozkładu, są przypadki (2a) i (3). W przypadku (2a) rozkład $x_1 = \dots = x_m$ spełnia warunek monotoniczności.

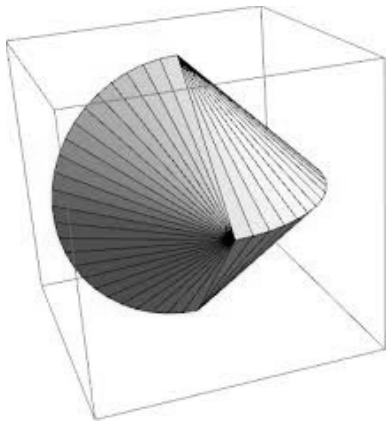
Analizując przypadek (2a), można zaobserwować, że dowolny prefiks P słowa $s[j..n]$ będący słowem Lyndona spełnia $x_m > P$. W przypadku (3) mamy $s[p..j - 1] > s[j..n]$, więc kolejne słowo Lyndona x (prefiks $s[j..n]$) będzie spełniać $x < s[p..j - 1]$. \triangle

Twierdzenie 5. Złożoność czasowa powyższego algorytmu to $O(n)$.

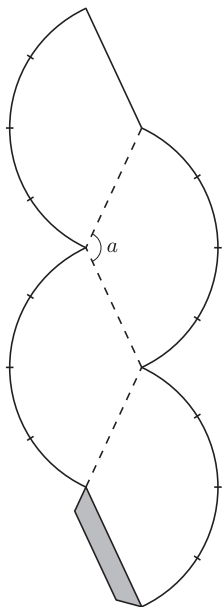
Dowód. Liczba przebiegów pętli wynosi co najwyżej n . Wypisanie słów rozkładu jest liniowe względem n , wynika to wprost z algorytmu. Pozostałe operacje powodują, że wskaźnik j zwiększa się o jeden, oprócz przypadku (2a), w którym „cofa” się on o co najwyżej $j - i$ pozycji. Jednak sumaryczny koszt „cofnieć” jest nie większy niż suma długości słów Lyndona z rozkładu, a więc również liniowy względem n . \triangle

5

mała delta



Powierzchnie, które tocząc się po płaszczyźnie, każdym punktem dotykają tej płaszczyzny, nazywamy *rozwijalnymi* (ang. *developable surface*). Innymi słowy są to zakrzywione powierzchnie, które możemy złożyć z płaskiej kartki papieru. Taka jest np. boczna powierzchnia walca czy stożka, a nie jest taka np. powierzchnia kuli czy siodła.



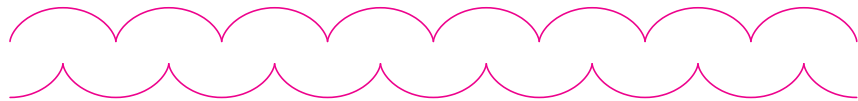
Zanim narysujesz swoją siatkę sferostożka, wyznacz miarę kąta a . Bez składania modelu policz liczbę jego krawędzi oraz wierzchołków.

Sferostożki i inne cudaki

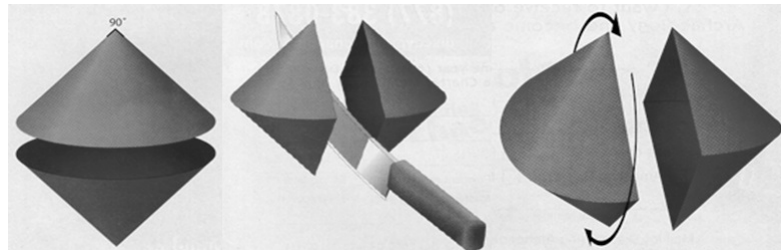
Bryła to stworzenie, z którym większość z nas poznała się w szkole podstawowej i które było przez nas osvajane przez kolejne lata edukacji. Znamy bliżej różne rodziny brył, takie jak wielościany, graniastosłupy, bryły obrotowe, foremne, platońskie. Oczywiście, można produkować nowe stworzenia, łącząc czy tnąc „podstawowe” gatunki, a jedynym ograniczeniem jest nasza wyobraźnia.

Oto kolejna rodzina ciekawych stworzeń, odkryta stosunkowo niedawno (jak na odkrycia z dziedziny stereometrii), bo przed pięćdziesięciu laty. . .

Sferostożek (ang. *sphericon*), bo o tej rodzinie mowa, to bryła, która tocząc się po pochylonej płaszczyźnie, dotyka jej każdym punktem znajdującym się na jej powierzchni i zostawia taki ślad



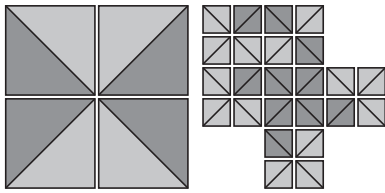
Opis ten jest wystarczający do jednoznacznego zdefiniowania sferostożka, jednak wyobrażenie sobie na tej podstawie jego kształtu nie jest rzeczą prostą. Zdecydowanie łatwiej „zobaczyć” go, śledząc poniższą instrukcję:



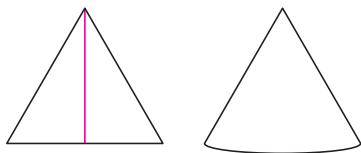
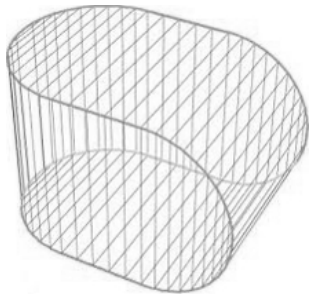
Utwórz bryłę obrotową poprzez obrót kwadratu wokół jego przekątnej (inaczej: połącz podstawami dwa identyczne stożki, których wysokość jest równa promieniowi podstawy). Następnie bryłę tę przetnij na pół wzdłuż przekroju osiowego (który jest kwadratem), jedną z powstałych połówek obróć o 90° i sklej.

Aby wykonać papierowy model powierzchni tej bryły, wystarczy skleić siatkę znajdującą się na marginesie.

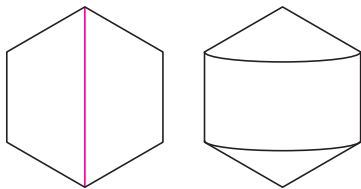
Historia sferostożka rozpoczęła się w Baldock w Anglii. Uczeń stolarza, Colin J. Roberts, miłośnik matematyki, szukał bryły, która byłaby odpowiednikiem wstęgi Möbiusa. Zwrócił uwagę, że wstęga Möbiusa – długi prostokątny pasek papieru, którego końce sklejemy w „obręcz”, przekreślając uprzednio jeden z brzegów o 180° – ma tę własność, że rysując linię wzdłuż środka wstęgi, otrzymamy zamkniętą pętlę, która znajdzie się z jednej i drugiej strony wstęgi (a właściwie tylko z jednej, bo – jak każdy wie – drugiej strony nie ma). Naśladowując tę własność, odkrył sferostożek – nic dziwnego, że drewniany. Rysując linię wzdłuż środka powierzchni jego ściany (tak, sferostożek ma tylko jedną ścianę – każde dwa punkty można połączyć linią nieprzecinającą krawędzi), otrzymamy zamkniętą pętlę. Na dodatek, jeżeli w sferostożek wpisemy kulę, to miejsca styku kuli i sferostożka utworzą zamkniętą pętlę. Stolarskie odkrycie przez trzydzieści lat niewiele wyszło poza warsztat: drewniany model otrzymała młodsza siostra Roberts'a i sferostożek został zapomniany, aż do roku 1999. Wtedy to odkrywca, czytając rubrykę *Mathematical*



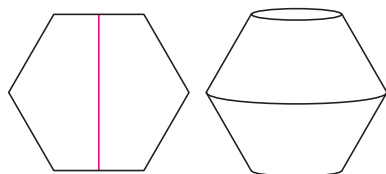
Ustawienie sferostożków obracających się dookoła siebie. W sześciu grupach sferostożków (po cztery każda) kolorem ciemnoszarym zaznaczono te sferostożki, które obracają się dookoła bryły z sąsiadującej grupy.



Nieparzysty 3-sferostożek



Parzysty 6-sferostożek



Dualny 6-sferostożek

Recreation w *Scientific American*, przypomniał sobie o swoim sferostożku. Napisał do Iana Stewarta, wieloletniego autora rubryki, który obwieścił światu istnienie tego zwierzaka.

Serdecznie zachęcamy wszystkich, którzy skleją papierową siatkę tej bryły, do toczenia otrzymanego modelu, gdyż jest to rzecz niezwykle przyjemna dla oka (o czym przekonał się zespół Iana Stewarta, który – otrzymawszy od Roberta pudło pełne sferostożków – przez parę godzin nie mógł oderwać się od ich toczenia).

Niezwykle efektownie prezentują się cztery sferostożki, które umieszczone w sposób opisany na marginesie, będą obracać się dookoła siebie wzajemnie. Ustawiając sześć grup, każda po cztery sferostożki, w taki sposób jak na rysunku z prawej, otrzymamy jeszcze ciekawsze obroty (do wykonania doświadczenia potrzebnych będzie wiele rąk do pomocy). W każdej grupie cztery sferostożki obracają się dookoła siebie, dodatkowo sześć grup obraca się w taki sposób, że po całkowitym obrocie otrzymamy konstrukcję mającą wiele wspólnego z ośmiościanem.

Wróćmy do instrukcji wykonania sferostożka. Gdyby tak zmienić pierwszy krok i kwadrat obrócić nie wokół przekątnej, lecz wzdłuż osi symetrii przechodzącej przez środki boków kwadratu, powstałby oczywiście walec. Resztę kroków zostawmy bez zmian, a wtedy otrzymamy kolejnego stwora – sferowalec (ang. *squiracle*). Bryła mająca dwie ściany, zero wierzchołków i jedną krawędź.

Sferostożek i sferowalec to tylko dwójka reprezentantów całkiem pokaźnej rodziny sferostożków. Żeby utworzyć resztę jej reprezentantów, w pierwszym kroku instrukcji obracamy inne wielokąty foremne niż kwadrat. Rozpatruje się trzy rodzaje brył w tej rodzinie. *Nieparzysty n-sferostożek* to bryła powstała według wcześniejszej instrukcji, gdzie w pierwszym kroku dana jest figura foremna o nieparzystej liczbie kątów. *Parzysty n-sferostożek* powstaje z obrotu figury foremnej o parzystej liczbie kątów względem osi symetrii przechodzącej przez wierzchołki figury, a *dualny n-sferostożek* – z obrotu tejże figury względem osi symetrii przechodzącej przez środki przeciwległych boków.

Wybór figury foremnej i osi symetrii nie zawsze determinuje jednoznacznie końcowy efekt. Również wybór kąta, o jaki będziemy obracać jedną z połówek bryły, może mieć wpływ na wynik.

Niech k będzie liczbą obrotów połowy bryły o taki najmniejszy możliwy kąt $0 < \alpha \leq 180^\circ$, że po jego obrocie wierzchołki obu połówek bryły „spotkają się”. Dla n -kąta foremnego $k = 1$ oznacza obrót prawej połowy o $\alpha = 360^\circ/n$ w kierunku zgodnym z ruchem zegara, $k = 2$ oznacza obrót o 2α itd. W przypadku parzystego 6-sferostożka, dla $k = 1$ otrzymamy inną orientację niż dla $k = 2$. „Ślady” pozostawione przez te toczące się bryły będą wzajemnie lustrzanymi odbiciami. Podobnie dla innych n możemy uzyskać różne wariacje o wiele ciekawsze niż tylko prawo i lewoskrętność. Zachęcamy do zgłębienia tego tematu.

W przypadku sferostożka i sferowalca jedynym „ciekawym” kątem obrotu jest 90° .

Znana jest ogólna zasada na wyznaczenie liczby ścian oraz krawędzi brył z rodziny sferostożków w zależności od n i k , gdzie $x = \text{NWD}(n, k)$, $y = \text{NWD}(n/2, k)$.

	parzysty n -sferostożek	dualny n -sferostożek	nieparzysty n -sferostożek
liczba ścian	$(x + 1)/2$	$y + 1$	y
liczba krawędzi	$(x + 1)/2$	y	$y + 1$

Czytelnik Uważny na podstawie powyższych informacji znajdzie zależność między n , k i liczbą wierzchołków bryły.

Dodajmy jeszcze, że sferostożek i jego rodzina inspirują artystów. Jednym z pokazowych numerów austriackiego Zirkus Meer jest obracanie się pary ekwilibrystów wewnątrz sferostożka.

Małą Deltę przygotowała Kamila ŁYCZEK

Butelka Kleista

Krzysztof REJMER

Nie, to bynajmniej nie jest pomyłka! Nie będziemy tu mówić o butelce Kleina (*die Kleinische Flasche*), ale o butelce Kleista (*die Kleistische Flasche*), czyli inaczej butelce lejdejskiej, a zatem o pierwszym kondensatorze. Za wynalazcę tego urządzenia powszechnie uchodzi Pieter van Musschenbroek (1692–1761), profesor uniwersytetu w Lejdzie, który w 1746 roku swoje urządzenie opisał w liście adresowanym do badaczy francuskich, René de Réaumura i Jean-Antoine Nolleta. Jednak w rzeczywistości było to odkrycie równoczesne. Drugim wynalazcą, a chronologicznie nawet pierwszym (1745), był Ewald Jürgen Georg von Kleist (1700–1748).

Kleist pochodził z prastarego pomorskiego rodu (Kleszczów) o słowiańskich korzeniach, związanego z dworami Gryfitów oraz, wywodzących się jeszcze od obodryckich władców, książąt Meklemburgii. Pamięć tego faktu długo musiały być żywa, jako że jeszcze w XVIII w. wśród Kleistów można spotkać imiona Bogislaff, Primislaff i Kazimir. Kleistowie najczęściej wybierali karierę wojskową. Najczęściej, ale jednak nie wyłącznie; jednym z nich był wybitny dramaturg (i równie słynny samobójca) Heinrich von Kleist (1777–1811). Ciekawostką niech będzie, że Heinrich von Kleist studiował również (co prawda niedługo) matematykę oraz fizykę na uniwersytecie Viadrina we Frankfurcie nad Odrą. Z kolei Paul Ludwig Ewald von Kleist (1881–1954), niemiecki feldmarszałek, brał udział m.in. w inwazji na Polskę w 1939 roku, zmarł potem w radzieckiej niewoli, odsiadując wyrok 25 lat więzienia. Natomiast Ewald von Kleist-Schmenzin (1890–1945) monarchista, działacz chrześcijański i antysemita, konserwatywny prawnik, przeciwnik nazizmu i propagator (co jednakowoż zdumiewa) idei francuskiej rewolucji, został stracony za udział w zamachu na Hitlera.

Po ukończeniu gimnazjum akademickiego w Gdańsku i dwuletnich studiach prawniczych w Lejdzie, odziedziczywszy po wuju majątek w Kamieniu Pomorskim, Ewald von Kleist został dziekanem kapituły przy katedrze w Kamieniu.

Jedynym jego stałym obowiązkiem było sprawowanie opieki nad szkołą katedralną. Mieszkając na prowincji (co, niestety, oznaczało również zabójczą izolację), z dala od zgiełku wojny, która wówczas toczyła się w południowych i środkowych Niemczech, mógł poświęcić swój wolny czas na badanie zjawisk „elektryzujących” wówczas wiele wybitnych europejskich umysłów.

W dniu 11 października 1745 roku po wielu próbach dokonał dzieła swego życia – przeprowadził wreszcie udaną próbę z kondensatorem elektrycznym. Było to naczynie ze szkła wypełnione wodą i zatkane korkiem, który był przebity na wylot miedzianym drutem. Butelkę można było naładować elektrycznie, pocierając pręt, na przykład, jedwabiem. Poprzez drut i wodę ładunek dostawał się do środka naczynia i gromadził się na jego wewnętrznych ściankach. Pojemność elektryczną można było znacznie zwiększyć, pokrywając szkło od zewnątrz i wewnątrz folią (staniolem) przewodzącą prąd.

Na pomysł, w jaki sposób można zmagazynować energię elektryczną, Ewald von Kleist wpadł nieco przypadkiem: otóż po postawieniu na cynowym talerzu naelektryzowanej szklanki wody i dotknięciu talerza doznał silnego uderzenia, co zaraz nasunęło mu myśl o kondensowaniu ładunku. W liście, wysłanym w dniu 19 grudnia 1745 roku do profesora Johanna Gottloba Krügera z Halle, który zamieścił go później w swoim dziele *Historia Ziemi*, von Kleist opisał doświadczenia, jakie przeprowadził. Oto jeden z tych opisów.

Eksperyment 3. *Jeśli włoży się gruby drut, gwóźdź itp. do wąskiego szklanego naczynia lekarskiego i naelektryzuje, wówczas następują szczególnie silne działania; naczynie powinno być suche i ciepłe. Dodanie do środka rtęci lub spirytusu polepsza efekty. Po wyjęciu naczynia z maszyny elektryzującej pojawił się na nim płonący pencillus [świecenie elektryczne], tak, że mogłem przejść 60 kroków i w pokoju było jasno.*

O dokonanym odkryciu Ewald von Kleist poinformował listem z dnia 4 listopada 1745 również Johanna Lieberkühna, członka Berlińskiej Akademii Nauk i zarazem sekretarza sekcji fizyki Akademii, a następnie swojego kolegę z czasów gimnazjum w Gdańsku, Pawła Swietlickiego (1699–1756), który wówczas





Rozwiązanie zadania M 1446.

Kluczem do rozwiązania zadania jest zrobienie tabeli *кто wygrywa* dla początkowych wartości k . Niech R oznacza gracza rozpoczynającego, zaś P jego przeciwnika.

k	кто wygrywa?
0	P
1	R
2	P
3, 4, 5, 6, 7	R
8	P
9	R
10	P
11, 12, 13, 14, 15	R

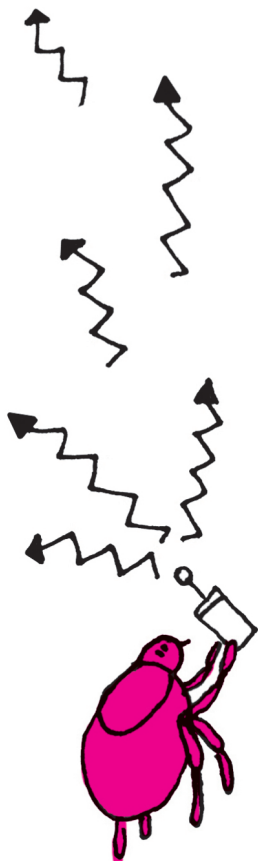
Gdy $k = 0$, gracz rozpoczynający R nie może wykonać ruchu, więc wygrywa jego przeciwnik – gracz P .

Gdy $k = 1$, to R zabiera 1 monetę i P dostaje pusty stos i przegrywa.

Gdy $k = 2$, to R musi zabrać 1 monetę i przeciwnik jest w przed chwilą przeanalizowanej wygrywającej sytuacji.

Gdy $k = 3, 4, 5, 6, 7$, to R zabiera odpowiednio 1, 4, 5, 4, 5 monet, zostawiając przeciwnika z 2, 0, 0, 2, 2 monetami, czyli P jest w przed chwilą przeanalizowanych pozycjach przegrywających.

Nietrudno jest w podobny sposób przeanalizować dalszy przebieg tabeli i zauważyć, że P wygrywa wtedy i tylko wtedy, gdy k przystaje modulo 8 do 0 lub 2. Skoro $2015 \equiv 15 \pmod{8}$, to R ma strategię wygrywającą.



sprawował obowiązki diakona w gdańskim kościele św. Jana; był też członkiem Towarzystwa Przyrodniczego w Gdańsku. Z kolei Paweł Swietlicki zainteresował wynalazkiem innego gdańszczanina, Daniela Gralatha (1708–1767), również członka Towarzystwa Przyrodniczego i późniejszego burmistrza miasta.

Daniel Gralath po ukończeniu Gdańskiego Gimnazjum Akademickiego studiował w Halle, Lejdzie oraz w Marburgu. Już w trakcie gimnazjalnej nauki zaczął prowadzić własne badania, zebrane w krótkich łacińskich rozprawach o meteorach wodnych, o pochodzeniu źródeł i o magnetyzmie. Zbudował pierwszą w świecie baterię butelek lejdejskich (czyli inaczej butelek Kleista) i wyjaśnił jej działanie. Zmierzył również siłę działającą między naładowanymi okładkami butelki. Napisał pierwszą w historii księgę dotyczącą elektrostatyki (jest to 3-tomowa *Historia Elektryczności* opublikowana w latach 1747, 1754 i 1756) oraz bibliografię wszystkich dzieł poświęconych elektrostatyce (*Biblioteka elektryczna*). W uznaniu jego naukowych dokonań Towarzystwo Naukowe w Getyndze (*Königliche Societät der Wissenschaften zu Göttingen*) powołało go na członka. W 1742 roku założył Towarzystwo Przyrodnicze w Gdańsku, *Societas physicae experimentalis*, działające do 1936 roku. Z prezesowania tej organizacji wycofał się zniechęcony uwikłaniem Towarzystwa w intrygi na polskim dworze królewskim. Wśród jego publikacji znajdują się opisy porażenia prądem owada, zapalania spirytusu iskrą elektryczną czy wstrząsów wywoływanych przez elektryczność w łańcuchu ludzi trzymających się za ręce (była to bardzo popularna w owych czasach prezentacja zjawisk elektrycznych). Niestety, Gralath zbyt często ograniczał się do jakościowego opisu zjawisk, pomijając ich opis ilościowy. Po prostu nie potrafił opisywać swoich wyników za pomocą matematycznego wzoru. A szkoda, bo pomiarów siły działających pomiędzy okładkami butelki dokonał na 40 lat przed badaniami Coulomba.

Gralath nawiązał kontakt z Ewaldem von Kleistem i rozpoczął podobne eksperymenty. Uczni z Berlina i Halle odpowiedzieli po kilku miesiącach, że nie udało im się powtórzyć opisanego eksperymentu i pewnie dlatego Kleist pozostał mało znany. Jedynie Gralath dokonał tego z sukcesem dnia 5 marca 1746 roku. Badania przeprowadził w Gdańsku, w siedzibie Towarzystwa, w Zielonej Bramie.

Naukowa przygoda Kleista wkrótce się zakończyła. W sierpniu 1747 roku Ewald Georg von Kleist został powołany przez króla pruskiego Fryderyka II Wielkiego na stanowisko prezesa Sądu Królewskiego w Koszalinie, które piastował niedługo, zmarł 10 grudnia 1748 roku. W 1898 roku, w 150-tą rocznicę jego śmierci, starosta powiatowy w Kamieniu, Ewald von Massow, wmurował w ścianę domu Ewalda von Kleista przy Placu Katedralnym tablicę pamiątkową z następującą dedykacją.

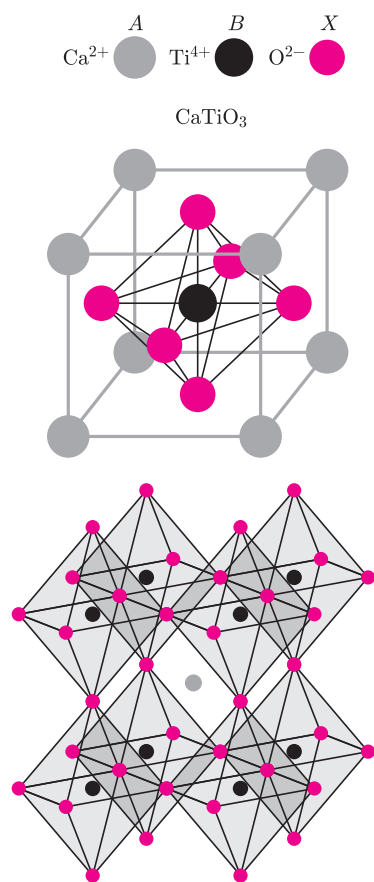
Ku światłej pamięci Dziekana Katedry, Prezydenta Sądu Królewskiego Ewalda Jürgena von Kleista, ur. 10 czerwca 1700, zm. 10 grudnia 1748, który mieszkał 25 lat w tym domu (dawna kuria dziekańska) i w październiku 1745 roku wynalazł butelkę wzmacniającą prąd elektryczny (butelkę Kleista). Ufundowano w Kamieniu 10 grudnia 1898 roku przez wdzięcznych mieszkańców miasta.

Biograf Kleista, pastor Kypke (*Gesichte des Geschlechts von Kleist*) napisał: „był on – von Kleist – ojcem nowoczesnej (Marconiego) telegrafii”. Pierwsza depesza nadana przez Towarzystwo Telegraficzne Marconiego brzmiała: „Ewald Jürgen von Kleist”. Po 1945 roku los (czyli eufemistyczna nazwa ludzkiej głupoty) znów okrutnie potraktował pomorskiego wynalazcę – usunięto tablicę pamiątkową; jej dalsze losy nie są znane. Jeszcze na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych XX wieku w zbiorach muzeum katedralnego w Kamieniu znajdowała się oryginalna butelka Kleista i inne wykonane przez pomorskiego uczonego urządzenia, między innymi pierwszy kondensator o zmiennej pojemności. Do 1945 roku stanowiły one część ekspozycji udostępnionej publiczności, potem chyba trafiły do magazynów. Dzisiaj po nich już śladu nie ma i nikt nie wie, co się z tymi cennymi zabytkami stało. Można obawiać się, że jako przedmioty niesakralne zostały uznane za bezwartościowe i wyrzucone, a kto wie, czy nawet nie zniszczone.

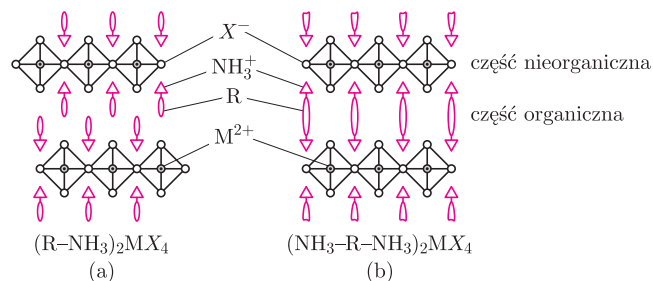
Perowskity – przyszłość fotowoltaiki

Magdalena WOŹNIAK*, Michał DUSZA*, Olga MALINKIEWICZ**

Fotowoltaika to dziedzina nauki badająca zjawisko zamiany energii światła słonecznego na energię elektryczną.



Rys. 1. Struktura krystaliczna pierwszego perowskitu – tytanianu wapnia CaTiO_3 .



Rys. 2. Struktura 2D organiczno-nieorganicznych perowskitów z dwiema (a) i jedną (b) warstwą organicznych komponentów.

Czym jest perowskit? Pierwszym sklasyfikowanym perowskitem był tytanian wapnia CaTiO_3 , odkryty w 1839 roku w skałach Uralu przez Gustava Rosego. Niemiecki geolog kurtuazyjnie nadał mu nazwę nawiązującą do nazwiska rosyjskiego mineraloga Lwa hrabiego Perowskiego. Cechą charakterystyczną perowskitu jest specyficzna struktura krystaliczna (rys. 1). Idealna struktura perowskitu, oznaczana ogólnym wzorem ABX_3 , zawiera kation metalu B^{4+} otoczony sześcioma anionami X (O^{2-} , Cl^- , Br^- , I^-) w taki sposób, że razem tworzą one ośmiościan foremny (oktaedr) BX_6 . A jest kationem metalu (Ca^{2+} , K^+ , Na^+ , Sn^{2+} , Pb^{2+}) znajdującym się między kolejnymi ośmiościanami oraz równoważącym ładunek sieci. Wszystkie związki, które mają taką samą strukturę krystaliczną jak tytanian wapnia, nazywane są obecnie perowskitami.

Perowskity nie tylko występują naturalnie w środowisku, jak choćby wspomniany CaTiO_3 , ale można je też wytwarzać w wyniku syntezy chemicznej, wymieniając w miarę dowolnie występujące w nich pierwiastki lub grupy chemiczne przy zachowaniu specyficznej struktury krystalicznej.

W organiczno-nieorganicznych hybrydach perowskitowych jon metalu A jest zastąpiony przez organiczny kation, którego obecność decyduje o rozpuszczalności perowskitu i możliwości wykorzystania szerokiej gamy technik nanoszenia warstw. W ogólności kation ten może zawierać do trzech wiązań —C—C— lub —C—N— , najczęściej jest to kation metyloamoniowy lub formamidowy. W większości organiczno-nieorganicznych kompozytów składniki połączone są losowo lub mają uporządkowanie bliskiego zasięgu. To, co wyróżnia hybrydy perowskitowe, czyli np. $\text{CH}_3\text{NH}_3\text{PbI}_3$, to fakt, że organiczne i nieorganiczne fragmenty mają uporządkowanie dalekiego zasięgu (rys. 2), dzięki czemu zyskują one niezwykle właściwości optoelektroniczne.

Perowskity w ogniwach słonecznych. Ogniwa perowskitowe ze względu na swoje unikatowe właściwości mogą stać się niebawem jedną z istotnych technologii na rynku fotowoltaicznym, a nawet konkurować z aktualnie dominującym krzemem. Wysoka wydajność, dowolne podłoże, na którym wytwarzane mogą być moduły perowskitowe, niski koszt oraz skalowalność procesów produkcji to tylko niektóre z ich zalet. Obecnie trwają intensywne prace nad zwiększeniem stabilności tych ogniw oraz wyeliminowaniem obecnego w nich ołowiu.

Jeszcze kilka lat temu z perowskitami nie wiązano wielkich oczekiwań, natomiast dziś są one niewątpliwie nadzieją fotowoltaiki. Już po trzech latach od wytworzenia pierwszego ogniwa perowskitowego osiągnięto – w skali laboratoryjnej – sprawność rzędu 20%. Jest to najszybciej rozwijająca się technologia w historii fotowoltaiki. Przypomnijmy, że najczęściej stosowane obecnie ogniwa krzemowe, budowane w technologii już dojrzałej, udoskonalanej od wielu lat, osiągają sprawność nieco przekraczającą 20% i nie wiąże się już nadziei, że na tym polu nastąpi przełom istotnie zmieniający *status quo*. Dalsze usprawnienie ogniw perowskitowych (mówi się o możliwym osiągnięciu sprawności na poziomie około 30%) to wystarczająco wiele, aby usprawiedliwić związane z nimi oczekiwania. To tylko jedna z przewag tej technologii nad wykorzystywanymi obecnie i bynajmniej nie najważniejsza.

Już ponad dwie dekady temu prace nad perowskitami prowadzono w laboratoriach IBM. Badano je jednak pod kątem potencjalnego zastosowania w technologii diod i tranzystorów, jednakże nie uzyskano na tyle zadowalających wyników, aby kontynuować dalsze badania w tej dziedzinie. Pierwsze prace nad wykorzystaniem perowskitów w strukturze ogniw słonecznych rozpoczęły się dopiero w 2009 roku, kiedy to do zespołu Tsutomu Miyasakiego z Japonii dołączył student Akihiro Kojima. Miyasaka prowadził wtedy prace nad ogniwami barwnikowymi

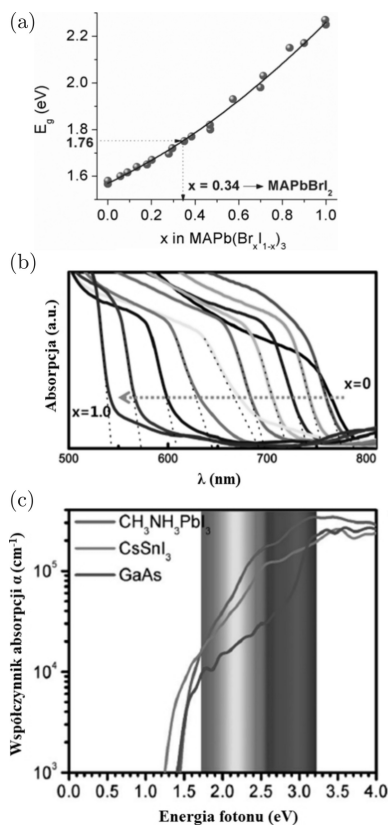
*Wrocławskie Centrum Badań EIT+
**Saule Technologies

z płynnym elektrolitem. Kojima zasugerował, by barwniki zastąpić perowskitem, jednak nie uzyskano oczekiwanych rezultatów w postaci zwiększenia sprawności. Przełom nastąpił dopiero w maju, kiedy naukowcy Uniwersytetu w Oksfordzie pod kierownictwem Henry'ego Snaitha wprowadzili w miejsce płynnego elektrolitu polimer, uzyskując sprawność ogniwa na bardzo dobrze już rokującym poziomie 10%. Równoległe pojawiły się wyniki badań zespołu Michaela Grätzela z Lozanny potwierdzające atrakcyjność perowskitu w zastosowaniach fotowoltaicznych.

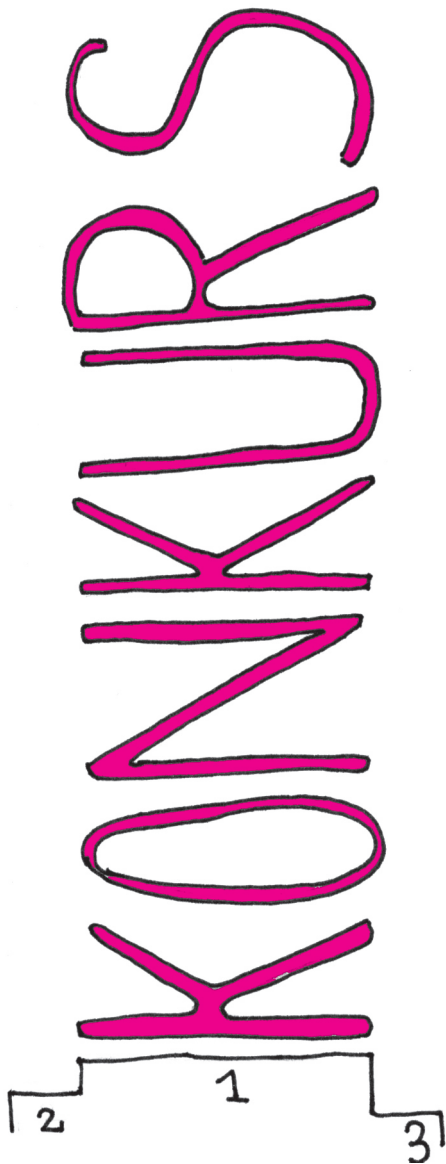
Zalety. Możliwość doboru składu perowskitu z szerokiej gamy materiałów organicznych i nieorganicznych pozwala na uzyskanie zróżnicowanych właściwości. Przykładem może być tu modulacja progowej długości fali absorbowanego światła, co umożliwia wytwarzanie ogniw słonecznych o różnych barwach. Mogą one zatem być nie tylko przyrządem generującym energię elektryczną, ale także służyć jako elementy dekoracyjne np. w fotowoltaice zintegrowanej z budynkiem. Dzięki zawartości części organicznej zyskujemy możliwość produkcji elastycznych ogniw cienkowarstwowych, co znacząco rozszerza wachlarz potencjalnych zastosowań (ogniwa z krzemu krystalicznego są bardzo kruche i wymagają grubych szyb zabezpieczających). Dostosowując grubość materiału aktywnego w ogniwie perowskitowym, możemy wytworzyć moduły o różnym poziomie przezroczystości. Dodatkowo atutem perowskitów jest bardzo duży współczynnik absorpcji (czyli pochłaniania światła), przewyższający nawet absorpcję arsenku galu GaAs (rys. 3c). Pozwala to na wytwarzanie ogniw niezwykle cienkich, o grubości rzędu zaledwie kilkuset nanometrów. Dzięki temu wytworzone w ogniwie ładunki nie muszą przemierzać dużych odległości, co minimalizuje straty (np. z powodu rekombinacji). Już teraz, na wczesnym etapie rozwoju tej technologii, ogniwa perowskitowe mogą wytwarzać bardzo wysokie napięcia: rzędu 1 V, czyli prawie równe napięciu wytwarzanemu przez ogniwa na bazie GaAs.

Atrakcyjność perowskitów podnoszą również aspekty technologiczne, takie jak niska temperatura procesu wytwarzania warstwy aktywnej. Mimo iż sama produkcja perowskitu nie wymaga wysokich temperatur, większość ogniw stosowanych wykorzystuje podłoża szklane. Wynika to z faktu, iż perowskit nakłada się na cienką warstwę tlenku tytanu TiO_2 , która wymaga wygrzewania aż w 500°C . Zastąpienie tej warstwy materiałem organicznym wyeliminuje konieczność stosowania wysokich temperatur. Podłożem może zatem być plastik, tekstylia, a nawet papier, co pozwala na nowe możliwości zastosowania elastycznych perowskitowych modułów słonecznych. Brak konieczności stosowania wysokich temperatur oraz energochłonnych procesów próżniowych pozwala na wytworzenie modułów fotowoltaicznych o bardzo krótkim czasie zwrotu energetycznego, czyli czasu, po jakim moduł wygeneruje energię równą energii, jaką wykorzystano do jego produkcji. Wykorzystanie metod mokrej chemii do nanoszenia cienkich warstw zapewnia technologii perowskitowej wysoki stopień skalowalności i przepustowości produkcji. To wszystko przekładać się będzie na niskie koszty perowskitowych modułów fotowoltaicznych. Powyższe atuty wystarczają, by usprawiedliwić duże i wciąż rosnące zainteresowanie tą technologią przedstawicieli świata biznesu.

Przeszkody. Problemem ograniczającym możliwość masowej produkcji modułów perowskitowych jest ich niska stabilność. Stosowane perowskity rozkładają się pod wpływem wilgoci, dlatego niezbędne jest zastąpienie ich perowskitami bardziej odpornymi na czynniki zewnętrzne lub zapewnienie odpowiedniej izolacji, która nie wpłynie znacząco na wydajność, jak i cenę ogniw. Drugą słabością technologii perowskitowej jest obecność ołowiu w warstwie aktywnej. Mimo że nie są to ilości na tyle znaczące, aby przekreślić tę technologię, nawet gdyby ołowiu nie dało się zastąpić, to poszukuje się perowskitów wolnych od tego pierwiastka, np. $\text{CH}_3\text{NH}_3\text{SnI}_3$, aby uniknąć negatywnych dla zdrowia ludzi i środowiska konsekwencji. Ogniwa perowskitowe nie tylko będą mogły konkurować z krzemem jako technologia wykorzystywana na dużą skalę w elektrowniach fotowoltaicznych, ale mają także potencjał do zdominowania rynku ogniw cienkowarstwowych. Elastyczne, lekkie, tanie i wydajne ogniwa mogą znaleźć zastosowanie w urządzeniach powszechnego użytku, takich jak smartfony, tablety czy notebooki. Odzież generująca energię, elewacje budynków z baterii słonecznych czy samochody elektryczne zasilane bądź wspomagane przez energię słoneczną to zbliżająca się przyszłość, którą mogą zdominować właśnie ogniwa perowskitowe.



Rys. 3. Przerwa energetyczna perowskitu $\text{MAPb}(\text{Br}_x\text{I}_{1-x})_3$ w funkcji składu (a) i absorpcja tych związków (b) oraz porównanie współczynnika absorpcji $\text{CH}_3\text{NH}_3\text{PbI}_3$ z innymi półprzewodnikami (c).



Przypominamy: termin nadsyłania prac w tym roku to 1 maja.

Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki

Zawód matematyka, jak powiada jeden z uprawiających go kolegów, polega na rozwiązywaniu zadań z treścią. Takich zadań pełne są podręczniki do nauczania matematyki na różnych poziomach edukacji. Zazwyczaj jednak matematyk zajmuje się zadaniami, których do tej pory nikt nie rozwiązał; najczęściej zaczynają się one od „wykaż, że”. Skąd się biorą? Z zadziwienia, z zachwytu, wreszcie z ciekawości, która rodzi pytania: „jak?”, „dlaczego?”. Takie zadziwienie, taki zachwyt czy taka ciekawość pojawiają się w każdym wieku, wystarczy mieć otwarte oczy i otwarty umysł, wsparte zainteresowaniem popychającym do dążenia tropem zauważonych śladów.

Organizowany przez Polskie Towarzystwo Matematyczne i redakcję *Delty* Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki jest dla takich młodych ludzi: ciekawych i zainteresowanych, doznających zachwytu lub zadziwienia, gotowych poświęcić czas i myśli na zbliżenie się do obiektu owego zachwytu, zadziwienia czy ciekawości. Wbrew pozorom, w matematyce jest mnóstwo miejsca na oryginalne obserwacje, nowe pytania czy nowe odkrycia – niekoniecznie na miarę Wielkiego Twierdzenia Fermata, ale wystarczające, by dostarczyć autorowi intelektualnej satysfakcji. Od pierwszej edycji Konkursu w 1978 roku doznało jej paruset młodych ludzi, z których znacząca część została przy matematyce także w życiu zawodowym. Praca nadesłana na Konkurs bywała dla większości uczestników pierwszą próbą zmierzenia się z pracą badawczą, pierwszą próbą zapisania jej efektów. Niekiedy były to próby bardzo udane; bywało, że finaliści Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki trafiali do Konkursu Młodych Naukowców Unii Europejskiej (EUCYS), odnosząc w nim niemałe sukcesy, włącznie z I nagrodami dla Michała Marcinkowskiego w 2006 roku za pracę o geometrycznych przekształceniach wiążących proste Eulera i Nagela (złoty medal w KUPzM w 2005) oraz dla Magdy Bojarskiej w 2008 roku za pracę o cyklach Hamiltona w uogólnionych grafach Halina (srebrny medal w KUPzM w 2007 roku).

Spośród nadesłanych do redakcji *Delty* prac wybierane są najlepsze, uznane za warte prezentacji w finale, gdzie są oceniane przez jury złożone z zawodowych matematyków, najczęściej zajmujących się także popularyzacją matematyki. Jury może przyznać medale złote, srebrne i brązowe; wiążą się z nimi nagrody pieniężne. Pięciokrotnie jury miało satysfakcję przyznania dwóch medali złotych (1979, 1997, 2003, 2012, 2014), choć zdarzało się, że złotego medalu nie przyznawano wcale (także pięciokrotnie).

W 36 dotychczasowych edycjach Konkursu przewijała się bardzo różnorodna tematyka, zahaczająca o niemal wszystkie dziedziny matematyki: geometrię, algebrę, analizę matematyczną, rachunek prawdopodobieństwa, teorię grafów, logikę, teorię mnogości i jeszcze kilka innych. Nie narzuca tu żadnych ograniczeń ani regulamin, ani jury, albowiem na każdy temat można napisać ciekawą pracę. Temat może być efektem sugestii nauczyciela matematyki, można też takie sugestie odczytać w licznych artykułach *Delty*, można wreszcie wybrać temat wynikający z własnych zainteresowań. Warto spróbować!

W.B.

Polscy matematycy, laureaci European Union Contest for Young Scientists

1995, Newcastle

III nagroda: Marcin Kowalczyk i Marcin Sawicki
The force of a set and the Euler characteristics

1996, Helsinki

II nagroda: Maciej Kurowski i Tomasz Osman
Common solution sets of real polynomials

1998, Porto

III nagroda: Grzegorz Kapustka i Michał Kapustka
Some properties of polygons

2000, Amsterdam

wyróżnienie: Jakub Onufry Wojtaszczyk
Divisions of a convex polygon into parallelograms

2004, Dublin

II nagroda: Marcel Kołodziejczyk
The generalized counterfeit coin problem

2006, Sztokholm

I nagroda: Michał Marcinkowski
On a geometric transformation relating the Euler and Nagel lines

2008, Kopenhaga

I nagroda: Magdalena Bojarska
Hamiltonian cycles in generalized Halin graphs

2011, Helsinki

III nagroda: Michał Miśkiewicz
The charm of the μ set

2013, Praga

nagroda specjalna: Aleksander Horawa
Invariants of finite metric spaces

Laureaci Konkursu Uczniowskich prac z Matematyki

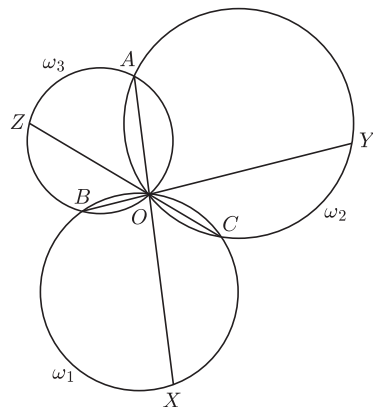
(Z) złoci, (S) srebrni i (B) brązowi

1978 (Z) Paweł Domański (S) Urszula Lach (B) Bogusława Grzywacz	1984 (Z) Michał Wojciechowski (S) Bogdan Pelc (B) Joanna Karwowska	1992 (Z) Marek Pycia (B) Krystian Witkowski	1999 (Z) Jakub Onufry Wojtaszczyk (S) Łukasz Kamiński (S) i Paweł Rochman	2005 (Z) Michał Marcinkowski (S) Paweł Janic (S) Tomasz Warszawski (B) Arkadiusz Męcel (B) Marcin Pitera (B) Jan Szejko	2010 (Z) Michał Miśkiewicz (S) Tomasz Pelka (S) Mateusz Wróbel (B) Bartosz Górecki
1979 (Z) Dorota Kuchta (Z) i Paweł Ponikowski (S) Marek Kubowicz (B) Anna Brzezińska	1985 (Z) Piotr Hajłasz (S) Bogdan Pelc	1993 (S) Ilona Królak (B) Roman Wencel	2000 (S) Piotr Sulich (S) Mirosław Żwiryn	2006 (Z) Jan Szejko (S) Krzysztof Dorobisz (S) Tomasz Tkocz (B) Aleksander Kubica	2011 (Z) Wojciech Nadara (S) Aleksander Czarnecki (S) Anna Dymek (B) Adam Baranowski
1980 (Z) Zbigniew Jelonek (S) Robert Cozaś (B) Waldemar Holubowski	1986 (Z) Piotr Jędrzejewicz	1994 (S) Piotr Śniady (B) Piotr Matusiewicz	2001 (Z) Juliusz Jabłecki (S) Piotr Sulich (B) Łukasz Brzyski (B) Jan Kowal	2007 (Z) Tomasz Kobos (S) Magdalena Bojarska (S) Mateusz Pluta (B) Mikołaj Bińkowski (B) Przemysław Mazur	2012 (Z) Wojciech Nadara (Z) Bartłomiej Zawalski (S) Dominik Burek (S) Aleksander Horawa (B) Anna Szczepańska
1981 (Z) Jarosław Wróblewski (S) Jacek Rzeźnikowski (B) Elżbieta Ziarko	1988 (Z) Andrzej Daniluk (S) Adam Czornik	1996 (Z) Michał Stukow (S) Adam Osękowski (B) Tomasz Kowalski (B) i Artur Wirowski	2002 (Z) Wiesław Zajiczek (B) Łukasz Lach (B) Krzysztof Rutczyński	2008 (Z) Joachim Jelisiejew (S) Martha Ubik (S) Adam Wyrzykowski (B) Mikołaj Bińkowski (B) Jacek Rzeniewicz	2013 (Z) Kamil Rychlewicz (S) Samuel Kozłowski (B) Bartłomiej Grochal (B) Rafał Żelazko
1982 (Z) Mariusz Skalba (S) Janusz Kalinowski (B) Mirosław Matłęga	1989 (Z) Krzysztof Oleszkiewicz (S) Rafał Kapelko (B) Katarzyna Trójca	1997 (Z) Grzegorz Kapustka (Z) i Michał Kapustka (B) Maciej Mostowski	2003 (Z) Marcel Kołodziejczyk (Z) Aleksandra Kwiatkowska (S) Juliusz Jabłecki (B) Krzysztof Mroczek (B) Piotr Szafruga	2009 (S) Martha Ubik (B) Michał Zajac	2014 (Z) Paweł Piwek (Z) Artur Zubilewicz (S) Michał Baran (S) Kamil Klimkowski
1983 (Z) Jacek Kaleta (S) Wojciech Walecki (B) Henryk Łukomski	1991 (Z) Marcin Kasperski (S) Grzegorz Zwara (B) Małgorzata Sęk	1998 (S) Michał Ślęzak (S) i Michał Tkacz (B) Jakub Gismatullin	2004 (Z) Marcin Pitera (S) Agnieszka Kałużna (B) Lech Stawikowski		



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1444. Okręgi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ mają wspólny punkt O , a ponadto ω_2, ω_3 przecinają się jeszcze w punkcie A i podobnie ω_3, ω_1 i ω_1, ω_2 – w punkcie B, C odpowiednio. Prosta AO przecina ω_1 ponadto w punkcie X i podobnie BO przecina ω_2 w Y , a CO przecina ω_3 w Z (rysunek). Udowodnić, że

$$\frac{AY}{AZ} \cdot \frac{BZ}{BX} \cdot \frac{CX}{CY} = 1.$$

Rozwiązanie na str. 11

M 1445. Niech funkcja $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ spełnia dla dowolnych liczb dodatnich x, y równość

$$f(x) \cdot f(y) \cdot f(x+y) = f(x+y).$$

Udowodnić, że f jest nierosnąca.

Rozwiązanie na str. 23

M 1446. Rozpatrzmy następującą grę. Przed rozpoczęciem dany jest stos z k monetami. Gracz wykonujący ruch musi usunąć 1, 4 lub 5 monet ze stosu. Gracze wykonują ruchy na przemian. Jeśli któryś *nie* może wykonać ruchu, to *przegrywa*. Rozstrzygnąć, kto ma strategię wygrywającą, gdy $k = 2015$.

Rozwiązanie na str. 15

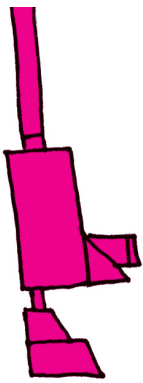
Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 871. Oszacuj, jaka jest największa możliwa wysokość h gór na Ziemi. Przyjmij, że typowym składnikiem skał magmowych jest dwutlenek krzemu (SiO_2), przyspieszenie ziemskie $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ nie zależy od wysokości, a górę można wyobrazić sobie jako duży prostopadłościan. Ciepło topnienia L różnych postaci krystalicznych dwutlenku krzemu mieści się w granicach od $L = 237 \text{ J/g}$ (kwarc) do $L = 128 \text{ J/g}$ (krystobalit).
Rozwiązanie na str. 5

F 872. Na podstawie łatwych do zmierzenia w pracowni szkolnej wielkości: energii parowania wody $L_p = 2260 \text{ J/g}$

i napięcia powierzchniowego woda-powietrze (energia jednostki powierzchni swobodnej wody) $\gamma = 58,9 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ (w 100°C) oszacuj liczbę cząsteczek wody w 1 cm^3 . Gęstość wody $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$.

Wskazówka: Możesz przyjąć, że upakowania cząsteczek kryształu (lod) i cieczy (wody) są w grubym przybliżeniu podobne oraz że cząsteczki tworzą sześcienną sieć, a każda para najbliższych sąsiadów połączona jest takim samym wiązaniem o energii ϵ .
Rozwiązanie na str. 10



Informatyczny kącik olimpijski (78): Fotoradary

W tym kąciku omówimy zadanie *Fotoradary*, które pojawiło się w 2013 roku na Akademickich Mistrzostwach Polski w Programowaniu Zespołowym:

W Bajtogradzie jest n skrzyżowań, połączonych $n - 1$ dwukierunkowymi odcinkami dróg, które umożliwiają dotarcie z każdego skrzyżowania do wszystkich pozostałych. Burmistrz Bajtogradu zamierza postawić na skrzyżowaniach jak najwięcej fotoradarów (na każdym co najwyżej jeden). Aby nie denerwować zbyt wielu bajtogradzkich kierowców, przyjął on, że na każdej trasie może stać co najwyżej k fotoradarów.

Innymi słowy, w zadaniu mamy dane drzewo o n wierzchołkach i mamy zaznaczyć w nim jak najwięcej wierzchołków tak, by na każdej ścieżce prostej było zaznaczonych co najwyżej k wierzchołków.

Zadanie ma całkiem proste rozwiązanie zachłanne. Podzielmy wierzchołki na warstwy (rys. 1). W i -tej warstwie (licząc od 1) będą znajdować się wierzchołki, które zostają liśćmi po usunięciu warstw o numerach $1, \dots, i - 1$. Jeśli k jest parzyste, to zaznaczamy wierzchołki na pierwszych $k/2$ warstwach (oczywiście, jeśli jest mniej niż $k/2$ warstw, to bierzemy wszystko). Jeśli k jest nieparzyste, to zaznaczamy $\lfloor k/2 \rfloor$ warstw oraz dowolny inny wierzchołek (jeśli jakiś pozostał).

Powyższy pomysł można zrealizować w czasie $O(n)$: utrzymujemy kolejkę wierzchołków o stopniu 1 i usuwamy kolejne warstwy, uaktualniając stopnie wierzchołków.

Alternatywne rozwiązanie wyznacza numery warstw dla wierzchołków, korzystając z metody programowania dynamicznego. Numer warstwy dla wierzchołka v jest to druga co do wielkości wysokość poddrzewa zaczepionego w dziecku v plus 1.

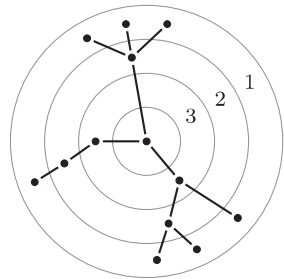
Pozostaje nam pokazać poprawność algorytmu zachłannego. Zauważmy, że wystarczy badać, czy warunek poprawności (nie więcej niż k zaznaczonych wierzchołków na ścieżce) jest spełniony na każdej ścieżce prostej *od liścia do liścia*. Oczywiście jest, że nasz algorytm znajduje poprawny podzbiór wierzchołków, i należy wykazać, że jest on optymalny (najliczniejszy). Ponadto widać, że dołożenie dowolnego wierzchołka do znalezionej podzbioru powoduje, że podzbiór staje się niepoprawny.

Ustalmy k parzyste i oznaczmy przez K zbiór wierzchołków z pierwszych $k/2$ warstw. Weźmy dowolne rozwiązanie optymalne i założmy, że pewien wierzchołek $v \in K$ nie został w tym rozwiązaniu zaznaczony (rys. 2). Jeśli jest więcej takich wierzchołków, to weźmy ten z warstwy o najmniejszym numerze (i oznaczmy numer tej warstwy przez ℓ). Rozważmy pewien zaznaczony wierzchołek u , który jest na warstwie wyższej niż ℓ i taki, że pomiędzy v i u nie ma zaznaczonych wierzchołków (gdyby wierzchołek u nie istniał, to by znaczyło, że rozwiązanie ma za mało zaznaczonych wierzchołków, aby być optymalne). Pokażemy teraz, że usuwając ze zbioru zaznaczonych wierzchołków u i dodając v , dostaniemy poprawne rozwiązanie.

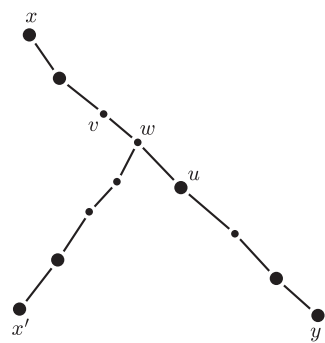
Rozważmy zatem dowolną ścieżkę p od liścia x do liścia x' i pokażmy, że po zamianie zawiera ona nadal nie więcej niż k zaznaczonych wierzchołków. Podejrzana ścieżka p musi zawierać wierzchołek v . Jeśli zawiera również wierzchołek u , to po zamianie liczba zaznaczonych wierzchołków w p nie zmieni się. Załóżmy zatem, że p nie zawiera u i rozważmy dowolną ścieżkę od liścia x do liścia y , która zawiera oba wierzchołki u i v . Niech w będzie wierzchołkiem pomiędzy v a u , który rozdziela te ścieżki. Ścieżka z y do w zawierała przed zamianą co najmniej $\ell - 1$ zaznaczonych wierzchołków na jej końcu (bo założyliśmy, że najmniejsza warstwa z niezaznaczonym wierzchołkiem to ℓ) plus dodatkowo wierzchołek u . Z kolei ścieżka z x do w po zamianie zawiera dokładnie ℓ wierzchołków (pamiętamy, że pomiędzy v a u nie ma zaznaczonych wierzchołków). Zatem poprawna przed zamianą ścieżka z x' do y zawierała co najmniej tyle zaznaczonych wierzchołków, co ścieżka p po zamianie. To dowodzi poprawności ścieżki p .

Tak więc, korzystając wielokrotnie z udowodnionego faktu, stwierdzamy, że istnieje rozwiązanie optymalne, które zaznacza wszystkie wierzchołki z K , zatem zbiór wierzchołków generowany przez nasz algorytm jest najliczniejszy. Dowód dla k nieparzystego zostawiamy jako ćwiczenie dla Czytelnika.

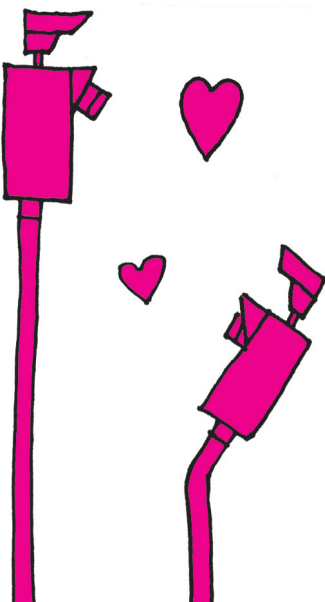
Tomasz IDZIASZEK



Rys. 1. Podział wierzchołków drzewa na warstwy.



Rys. 2. Ilustracja dowodu poprawności; zaznaczone wierzchołki są pogrubione.



Gdzie tam znaczy też z powrotem

Każda ptaszyna swym własnym głosem Pana Boga chwali.

Tym przysłowiem odpowiedziałem podczas obrony pracy doktorskiej na pytanie Profesora Andrzeja Mostowskiego, czemu zbudowałem aksjomatykę geometrii eliptycznej, podczas gdy można tę geometrię uprawiać analitycznie (czyli rachunkowo). A przypominałem to sobie z okazji pytania, jakie przyszło mi do głowy właśnie na rachunkowym gruncie: jakie funkcje wymierne (poza tożsamością) są odwrotne same do siebie? Gdy przyszło, to ponieważ nie czuję się w środowisku algebraicznym u siebie, zadałem je Wybitnym Algebraikom. Wbrew moim oczekiwaniom odpowiedź nie wskazała tylko funkcji $-x$, $1/x$ i $-1/x$, lecz dwie szerokie klasy

$$\frac{c}{x} \quad \text{dla } c \neq 0 \quad \text{i} \quad \frac{x+a}{bx-1} \quad \text{dla } ab+1 \neq 0.$$

Natychmiast wobec tego zamieściłem w *Delcie* notkę, dzieląc się tą informacją z Czytelnikami (bo skoro ja nie wiedziałem, to zapewne nie wszyscy Czytelnicy o tym wiedzą) – jest w numerze 10/2010.

Ale pozostawało pytanie, dlaczego tak jest. Bo sprawdzenie, że to prawda, na pytanie *dlaczego?* nie odpowiada. I choć do dziś nie wiem, jak tę odpowiedź uzyskują algebraicy, gdy przetłumaczyłem problem na swój język, czyli geometrię, wszystko stało się zrozumiałe.

Przecież w geometrii funkcje odwrotne same do siebie (uczenie: *inwolucje*) to symetrie. Liczby zaś tworzą (już w podstawówce) prostą, zwaną osią, gdy nada się jej orientację. A *symetrie na prostej to symetrie środkowe* – jak łatwo zauważyć, symetria względem p dana jest rachunkowym wzorem $2p - x$, bo środek punktów $2p - x$ i x , czyli ich średnia arytmetyczna, to p . Mieści się to wśród przytoczonych funkcji ($a = -2p$, $b = 0$), ale ich nie wyczerpuje.

Wypada spojrzeć szerzej, czyli umieścić oś liczbową na płaszczyźnie. Na płaszczyźnie zachowują tę oś również symetrie względem prostopadłych do niej prostych – ale one nic nowego nie wnoszą: ograniczone do osi liczbowej są symetriasiami środkowymi.

Są jednak i *inne symetrie: inwersje* (symetrie względem okręgów) i *antyinwersje* – jeśli środek okręgu umieścimy na osi liczbowej, również one dostarczą nam poszukiwanych inwolucji. Sprawdźmy.

Zgodnie z przypominaną na marginesie definicją inwersja względem okręgu o środku p i promieniu $r > 0$ przekształca na osi punkt x na taki punkt x' , że

$$(x-p) \cdot (x'-p) = r^2, \quad \text{czyli} \quad x' = \frac{r^2}{x-p} + p = \frac{px + (r^2 - p^2)}{x-p}.$$

Zauważmy, że uzyskane tym sposobem funkcje prawie wyczerpują obie wymienione na początku klasy funkcji: podstawiając $p = 0$, uzyskujemy wszystkie funkcje pierwszej z klas dla $c = r^2 > 0$, a dzieląc przez p w pozostałych przypadkach – wszystkie funkcje drugiej z klas dla $ab + 1 = (r^2/p^2) > 0$. Pozostałe funkcje uzyskujemy z antyinwersji, bo dla niej

$$(x-p) \cdot (x'-p) = -r^2.$$

Wystarczyło, że przetłumaczyłem sobie algebrę na geometrię i wszystko stało się dla mnie jasne.

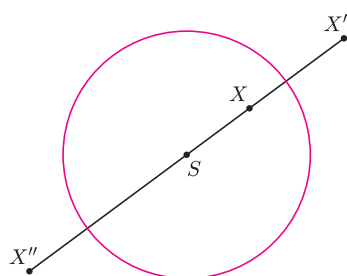
* * *

Ogólny morał z tego taki, że każdy problem, nie tylko matematyczny, należy sobie przetłumaczyć na język nam bliski, a wtedy wiele trudności zniknie.

Ba, mało: pojawi się wiele kwestii w mało używanej przez nas terminologii ukrywających się przed nami. W tym przypadku np. fakt, iż skoro jesteśmy na płaszczyźnie, to nie ma powodu, by ograniczać się do prostej – uzyskane wzory będą funkcjonowały dla wszystkich punktów płaszczyzny traktowanych jako liczby zespolone (algebraicy w swoim języku bez problemów widzą, że wzory te odpowiadają na pytanie, jak wyglądają wymierne inwolucje w dowolnym ciele). Możemy jednak pójść dalej: nasze wzory pracują w dowolnym (naturalnym) wymiarze, opisując nam geometrycznie inwolucje – czy znaczy to, że wzory te są poprawne również wśród kwaternionów, realizujących się jako punkty przestrzeni czterowymiarowej? A co znaczą dla innych wymiarów, w których punkty nie tworzą ciał?

I to jest drugi morał: z problemami jest jak z hydrą – gdy utniemy jej jedną głowę, w jej miejsce wyrasta kilka nowych.

Marek KORDOS



Na płaszczyźnie inwersja względem okręgu o środku S i promieniu r to przekształcenie, które punktowi X przyporządkowuje taki punkt X' , leżący na prostej SX , że

$$\overline{SX} \cdot \overline{SX'} = r^2.$$

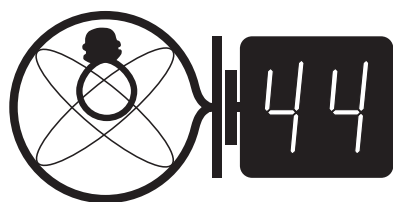
Z kolei antyinwersja przyporządkowuje punktowi X taki punkt X'' , leżący na prostej SX , że

$$\overline{SX} \cdot \overline{SX''} = -r^2.$$

Jak łatwo zauważyć, i inwersje, i antyinwersje są inwolucjami (czyli są odwrotne do samych siebie).

Zarówno inwersje, jak antyinwersje mogą być zdefiniowane w dowolnym (naturalnym) wymiarze dokładnie w ten sam sposób – rolę okręgu przejmują wtedy sfery (powierzchnie kuli) odpowiedniego wymiaru.

O inwersjach pisaliśmy ostatnio w *Delcie* 7/2014.



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2015

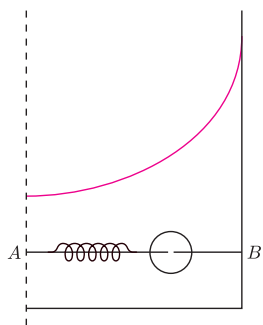
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 590, 591

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

590. W naczyniu w kształcie walca znajduje się ciecz o gęstości ρ . Walec obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół własnej osi. Wewnątrz walca, wzdłuż jego promienia, umocowany jest cienki pręt AB . Po pręcie może ślizgać się bez tarcia koralik w kształcie kuli o masie m i promieniu r (rys. 1). Kula połączona jest z końcem A pręta za pomocą sprężyny o współczynniku sprężystości k . Długość nieodkształconej sprężyny wynosi l_0 . Znaleźć odległość środka kuli od osi obrotu.



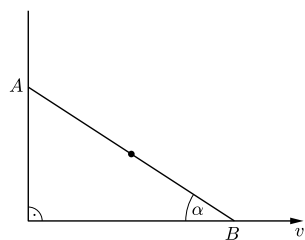
Rys. 1

591. Na sferze o promieniu R , złożonej z dwóch półsfery, równomiernie rozłożony jest ładunek Q . Jaką siłą trzeba działać na każdą półsferę, aby nie rozsuwały się one pod wpływem oddziaływania ładunków?

Rozwiązania zadań z numeru 9/2014

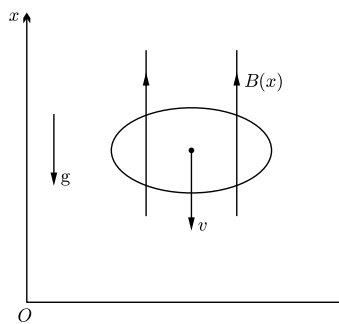
Przypominamy treść zadań:

582. W środku nieważkiego pręta o długości $2l$ przyczepiona jest mała kulka o masie m . Pręt porusza się jak na rysunku 2. Koniec B pręta porusza się w kierunku poziomym ze stałą prędkością v , koniec A porusza się wzdłuż pionowej ściany. Jaką siłą reakcji wywiera pręt na kulkę, gdy tworzy z poziomem kąt $\alpha = \frac{\pi}{4}$?



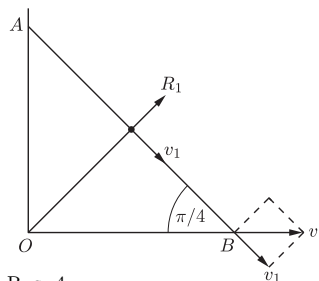
Rys. 2

583. Metalowy pierścień o promieniu l i oporze R spada pod działaniem siły ciężkości w polu magnetycznym. Wartość wektora indukcji magnetycznej w kierunku pionowym zmienia się z wysokością zgodnie ze wzorem $B(x) = B_0(1 - \alpha x)$, gdzie stała α jest dodatnia (rys. 3). Znaleźć zależność siły hamującej ruch pierścienia od jego prędkości. Płaszczyzna pierścienia pozostaje prostopadła do linii pola magnetycznego.



Rys. 3

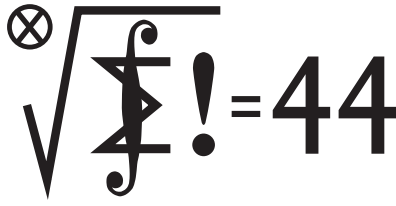
582. Kulka porusza się po okręgu o środku w punkcie O (rys. 4), bo znajduje się w połowie przeciwprostokątnej trójkąta AOB . Gdy $\alpha = \frac{\pi}{4}$, prędkość kulki jest skierowana wzdłuż pręta i ma wartość $v_1 = \frac{v\sqrt{2}}{2}$, bo wszystkie punkty sztywnego pręta mają taką samą składową prędkości wzdłuż pręta. Oznaczając przez R_1 składową siły reakcji prostopadłą do pręta i przyjmując, że ma ona zwrot jak na rysunku, możemy napisać wzór na siłę dośrodkową: $\frac{mv_1^2}{l} = \frac{mg\sqrt{2}}{2} - R_1$. W kierunku poziomym kulka porusza się ze stałą prędkością $\frac{v}{2}$, bo przebywa drogę dwukrotnie mniejszą niż koniec pręta B . Zatem przyspieszenie kulki oraz wypadkowa siła reakcji mają kierunek pionowy. Wartość siły reakcji wynosi: $R = R_1\sqrt{2} = m(g - \frac{v^2\sqrt{2}}{2l})$. Gdy $v^2 < \sqrt{2}gl$, siła ta zwrócona jest do góry.



Rys. 4

583. Podczas spadania zmienia się strumień pola magnetycznego przez powierzchnię pierścienia i powstaje siła elektromotoryczna indukcji $\mathcal{E} = \left| \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} \right| = \pi l^2 B_0 \alpha v$. Energia potencjalna ciężkości zamienia się na ciepło wydzielone w pierścieniu oraz energię kinetyczną pierścienia: $mg\Delta x = \frac{\mathcal{E}^2 \Delta t}{R} + \frac{m\Delta v^2}{2}$. Dla małych przedziałów czasowych Δt mamy: $mgv = \frac{\mathcal{E}^2}{R} + mva$, gdzie a jest przyspieszeniem pierścienia. Równanie ruchu pierścienia ma postać: $ma = mg - F$, gdzie $F = \frac{\pi^2 l^4 B_0^2 \alpha^2 v}{R}$ jest szukaną siłą hamującą. Jakie jest pochodzenie tej siły? Siła elektrodynamiczna, działająca na pierścień w polu magnetycznym o liniach pionowych, działa w płaszczyźnie pierścienia i nie wpływa na jego ruch. Jednak w sytuacji opisanej w zadaniu pole magnetyczne musi mieć składową leżącą w płaszczyźnie pierścienia i prostopadłą do pierścienia. W przeciwnym przypadku strumień pola magnetycznego przez powierzchnię walcową o osi pionowej byłby różny od zera. Ponieważ płaszczyzna pierścienia pozostaje pionowa, pole musi być symetryczne względem osi pierścienia. Zgodnie z prawem Gaussa $\pi l^2 B_0 \alpha \Delta x = 2\pi l B_1 \Delta x$, gdzie B_1 jest poziomą składową pola magnetycznego, prostopadłą do pierścienia. Siła elektrodynamiczna hamująca pierścień to $F = \frac{2\pi l B_1 \mathcal{E}}{R}$. Ten sam wynik otrzymamy, traktując pierścień z prądem jako dipol o momencie magnetycznym $\mu = \frac{\pi l^2 \mathcal{E}}{R} = q_m \Delta x$, gdzie q_m jest ładunkiem magnetycznym dipola. Siła hamująca wynosi $F = q_m B_0 \alpha \Delta x$.

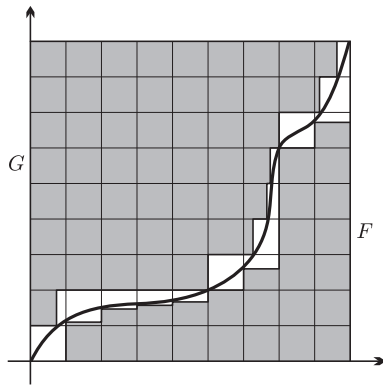
Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 683 ($WT = 2,48$) i 684 ($WT = 1,67$) z numeru 6/2014

Jerzy Cisło	Wrocław	43,59
Tomasz Wietecha	Tarnów	42,14
Michał Miodek	Zawiercie	40,49
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Wojciech Tobiś	Praszka	34,67
Piotr Kumor	Olsztyn	33,09
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75



Rozwiązanie zadania M 1445.
Gdyby było $f(x) > 1$ dla pewnego x , to wstawiając $y = \frac{x}{f(x) - 1}$, mielibyśmy

$$f(x) \cdot f\left(\frac{x \cdot f(x)}{f(x) - 1}\right) = f\left(x \cdot \frac{f(x)}{f(x) - 1}\right),$$

skąd $f(x) = 1$ – sprzeczność. Zatem $f(x) \leq 1$ dla każdego x , więc

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y \cdot f(x)) \leq f(x),$$

co oznacza, że f jest nierosnąca.

Zadania z matematyki nr 693, 694

Redaguje Marcin E. KUCZMA

693. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste niewymierne x , dla których każda z liczb $x^2 - 44x$ oraz $x^3 - 2015x$ jest wymierna.

694. Niech $a(n)$ oznacza odległość liczby naturalnej n od najbliższej liczby, będącej pełnym kwadratem: $a(n) = \min\{|n - k^2| : k \in \mathbb{N}\}$, i niech $S(n) = a(1) + \dots + a(n)$ oraz $f(n) = \frac{1}{n}S(n)$. Udowodnić, że każda dodatnia liczba całkowita występuje w ciągu $f(1), f(2), f(3), \dots$ dokładnie trzykrotnie.

Zadanie 694 zaproponował pan Przemysław Grabowski z Goworowa

Rozwiązania zadań z numeru 9/2014

Przypominamy treść zadań:

685. Niech $I = (0; 1)$. Funkcje $f, g : I \rightarrow I$ spełniają warunki: f jest ściśle rosnąca, $f(g(x)) = x$ dla $x \in I$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right) \right) < n - \frac{1}{n}.$$

686. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n , dla których równanie $x^2 + y^2 = n$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych x, y , różnych od zera, ale ma rozwiązania w liczbach wymiernych x, y , różnych od zera.

685. Z podanych warunków wynika od razu, że f jest różnowartościowym odwzorowaniem przedziału I na cały ten sam przedział. Ma więc funkcję odwrotną; a skoro $f(g(x)) = x$, zatem funkcja g jest tą odwrotną do f . (Łatwo uzasadnić ciągłość obu funkcji – ale ta wiedza nie będzie tu potrzebna).

Dalszy ciąg rozumowania to starogreckie „patrz(!)”. Rysunek przedstawia wykres (przykładowej) funkcji f , leżący w kwadracie K , którego dwoma bokami są odcinki $\langle 0; 1 \rangle$ na poziomej i pionowej osi układu współrzędnych. Ta sama krzywa jest też wykresem funkcji g , gdy przyjmiemy, że (rozważając g) odkładamy zmienną niezależną na osi pionowej, a zależną na poziomej.

Niech F będzie wielokątem powstałym z połączenia $n - 1$ prostokątów, których podstawami są odcinki $\langle \frac{k}{n}; \frac{k+1}{n} \rangle$ osi poziomej ($k = 1, \dots, n - 1$), a wysokości wynoszą kolejno $f\left(\frac{1}{n}\right), \dots, f\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Analogicznie tworzymy wielokąt G , rozważając funkcję g i zamieniając role osi współrzędnych.

Wielokąty F i G są (prawie) rozłączne – mogą mieć wspólne jedynie niektóre wierzchołki. Uzasadnienie: jeśli punkt (a, b) należy do F , to znaczy, że dla pewnego k zachodzą nierówności $\frac{k}{n} \leq a \leq \frac{k+1}{n}, b \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$; jeżeli ten sam punkt należy do G , to dla pewnego l mamy $\frac{l}{n} \leq b \leq \frac{l+1}{n}, a \leq g\left(\frac{l}{n}\right)$; stąd

$$b \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(a) \leq f\left(g\left(\frac{l}{n}\right)\right) = \frac{l}{n} \leq b, \quad \text{więc} \quad a = \frac{k}{n}, \quad b = \frac{l}{n}.$$

Zauważmy wreszcie, że kwadracik o boku $1/n$, mający wierzchołek w punkcie $(0, 0)$, nie ma punktów wspólnych ani z wielokątem F , ani z G . Po jego usunięciu z kwadratu K pozostaje figura o polu $1 - 1/n^2$; figury F i G są w niej zawarte, ale nie wypełniają jej szczelnie, skoro nie mają wspólnych fragmentów boków (poza wierzchołkami).

Pole wielokąta F wynosi $\frac{1}{n} \sum_{k < n} f\left(\frac{k}{n}\right)$; pole G wynosi $\frac{1}{n} \sum_{k < n} g\left(\frac{k}{n}\right)$. Suma tych pól jest mniejsza niż $1 - 1/n^2$. Mnożymy uzyskaną nierówność przez n i mamy tezę zadania.

(Stała $1 - 1/n^2$ jest optymalna; nierówność staje się bliska równości, gdy wykres funkcji f zbliża się do odpowiednio dobranej linii łamanej, utworzonej z odcinków poziomych i pionowych).

686. Postulowaną własność mają na przykład wszystkie liczby postaci $n = 4^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Żadna z nich nie jest sumą dwóch niezerowych kwadratów; przypuśćmy bowiem, że $4^k = x^2 + y^2$ ($xy \neq 0$); liczby x, y nie mogą być obie nieparzyste (bo wówczas $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$); muszą więc być parzyste, co daje przedstawienie liczby 4^{k-1} w postaci sumy dwóch niezerowych kwadratów. Dalsze zstępowanie prowadzi do konkluzji, że 4 jest sumą dwóch niezerowych kwadratów – a to absurd.

Natomiast niezerowe wymierne rozwiązanie równania $x^2 + y^2 = 4^k$ łatwo uzyskamy, biorąc dowolną trójkę pitagorejską liczb naturalnych a, b, c ($a^2 + b^2 = c^2$) i przyjmując $x = 2^k a/c, y = 2^k b/c$.

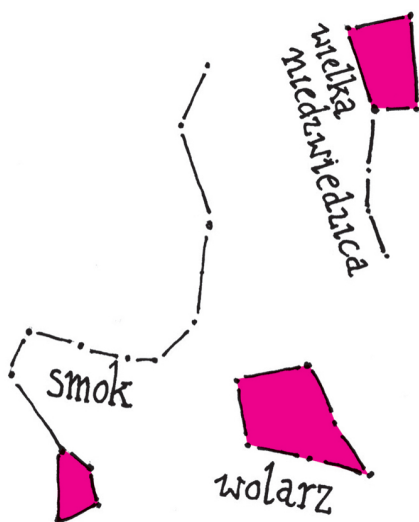
Prosto z nieba: Jeszcze więcej neutrin słonecznych

Energia słoneczna, której wywołujące depresję niedobory możemy obecnie odczuwać na własnej skórze (mimo że, o ironio, w styczniu Ziemia znajduje się najbliżej Słońca!), produkowana jest w centrum Słońca w procesie reakcji jądrowych zamieniających wodór w hel. Główną reakcją jest połączenie się dwóch jąder wodoru związane z emisją niskoenergetycznego (< 1 MeV) neutrina. Reakcja ta ($p + p \rightarrow {}^2\text{He} + e^+ + \nu_e$) to część cyklu *pp* (proton-proton). W trakcie całego cyklu produkowane jest 26,73 MeV energii i neutrina elektronowe, cykl można zaś sumarycznie zapisać jako $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e$. W gwiazdach masywniejszych i gorętszych od Słońca zachodzi nieco bardziej skomplikowany cykl CNO, wykorzystujący węgiel, azot i tlen (ang. *carbon, nitrogen, oxygen*) jako katalizatory. Reakcja $p + p$ odpowiada, według teorii, za produkcję 99% energii słonecznej, a mimo to do niedawna nie zaobserwowano pochodzących z niej neutrin, gdyż wykrywanie neutrin o tak małej energii jest przedsięwzięciem niesłychanie trudnym.

Sytuację zmienił eksperyment *Borexino*. Wykrywa on neutrina oddające część swojej energii elektronom płynnego scyntylatora w trakcie elastycznego zderzenia, $\nu_x + e \rightarrow \nu_x + e$, gdzie x oznacza jeden z trzech rodzajów neutrin (elektronowe, mionowe bądź taonowe). Aktywnym składnikiem scyntylatora jest C_9H_{12} (kumen) oraz 2,5-difenylooksazol. Całe urządzenie, ogromny scyntylator-kalorymetr umieszczony w stalowej kuli otoczonej izolującą warstwą wody, znajduje się w laboratorium Gran Sasso we Włoszech. Zmierzony strumień neutrin, $(6,6 \pm 0,7) \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, jest zgodny z przewidywanym przez Standardowy Model Słońca, $5,98 \cdot (1 \pm 0,006) \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Wynik może też być użyty do obliczenia całkowitej generowanej przez Słońce mocy: $3,48 \cdot 10^{26} \text{ W}$, i daje nadzieję na rozwój doświadczalnych metod studiowania procesów zachodzących w jego wnętrzu, a więc także badania struktury podobnych gwiazd.

Michał BEJGER

Pomysł produkcji energii w reakcjach łączenia protonów był proponowany przez A. Eddingtona już w latach 20., a „dopracowany” w 1939 r. przez H. Bethego.



Niebo w styczniu

Styczeń, mimo niskich temperatur, może być doskonały do obserwacji astronomicznych, które można zacząć już późnym popołudniem. Warto więc, przynajmniej częściowo, dobrze wykorzystać jedne z najdłuższych nocy w roku. Dla tych, którym mrozy nie są straszne, gwiazdnych atrakcji w tym czasie nie zabraknie!

Miłośnicy meteorów będą mogli polować przede wszystkim na te z bardzo aktywnego roju Kwadrantydów, który jest widoczny na samym początku miesiąca – od 1 do 7 I. Nazwa roju pochodzi od historycznej konstelacji Kwadrantu, która została rozdzielona pomiędzy gwiazdozbiory Wolarza, Herkulesa i Smoka na początku XX wieku. Rój ów charakteryzuje się ponadprzeciętną aktywnością sięgającą nawet około 100 meteorów na godzinę. Jego maksimum w tym roku przypada na noc z 3 na 4 I. Radiant Kwadrantydów znajduje się w gwiazdozbiory Wolarza, który około północy znajdzie się 20° ponad południowo-wschodnim horyzontem, i będzie dobrze widoczny w drugiej połowie nocy. Leży on w sąsiedztwie Wielkiej Niedźwiedzicy, więc bardzo łatwo można go odnaleźć. Meteory z tego roju pojawiać się będą jednak na całym niebie, więc nie musimy kierować wzroku w żadne określone miejsce.

Niestety, faza Księżyca – tuż przed pełnią – nie jest w tym roku sprzyjająca. Księżyc będzie przeszkadzał swoim blaskiem i pozwoli na obserwacje tylko najjaśniejszych spośród tegorocznych Kwadrantydów.

W styczniu będziemy mogli zaobserwować też koniunkcje, czyli sytuacje, w których dwa ciała niebieskie zbliżają się na niewielkie odległości na tle nieba. 8 I spotkają się Księżyc z Jowiszem. Około 19:30 pojawią się 7° nad wschodnim horyzontem, o 02:01 osiągną najwyższy punkt na niebie, 53° nad południowym horyzontem, a następnie o 07:16 znikną na wysokości 19° nad zachodnim horyzontem w świetle wschodzącego Słońca. Kolejna para, Księżyc i Saturn, spotka się 16 I, cztery godziny przed wschodem Słońca, nisko nad południowym horyzontem, natomiast Księżyc z Marsem 23 I około godziny 17:30, 20° nad południowo-zachodnim horyzontem. Wszystkie te zjawiska możemy obserwować nieuzbrojonym okiem.

Czytelnik Wyposażony W Lornetkę powinien koniecznie zwrócić uwagę na kometę C/2014 Q2 (Lovejoy), która 10 I osiągnie jasność około 4,3 wielkości gwiazdowej (w gwiazdozbiory Byka). Tego dnia warunki do jej obserwacji będą najbardziej korzystne.

Magda OTULAKOWSKA-HYPKA



Wzdłuż czy w poprzek?

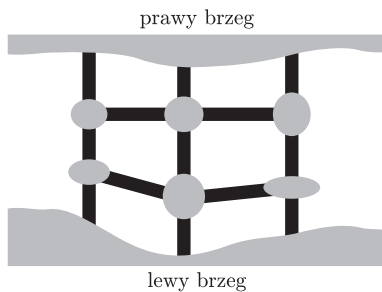
Joanna JASZUŃSKA

Oto dwa zupełnie niepodobne zadania, które można rozwiązać w zaskakująco podobny sposób. W obydwu przypadkach rozwiązanie okazuje się znacznie prostsze, niż można by się w pierwszej chwili spodziewać.

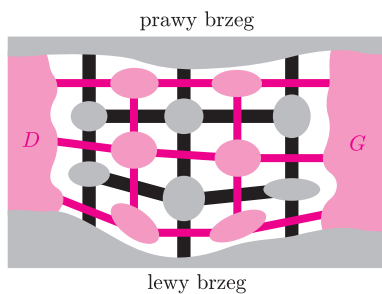
1. Na pewnej rzece jest 6 wysp i 13 mostów zwodzonych, jak na rysunku 1. Każdy z mostów jest podniesiony z prawdopodobieństwem $1/2$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że da się przejść z jednego brzegu rzeki na drugi?

2. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (0, 1)$ oraz dowolnych dodatnich liczb całkowitych n, k zachodzi nierówność

$$(1 - x^k)^n + (1 - (1 - x)^n)^k \geq 1.$$



Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązania

R1. Niech C oznacza zdarzenie: *da się przejść pomiędzy brzegami rzeki*. Poszukujemy $\mathbb{P}(C)$, czyli prawdopodobieństwa tego zdarzenia.

Wyobraźmy sobie, że rzeką płynie statek o wysokim maszcie, który nie zmieści się pod opuszczonymi mostami. Na rysunku 2 kolorem oznaczono „obszary” wodne i połączenia pomiędzy nimi. Zauważmy, że ta część rysunku obrócona o 90° wygląda tak samo, jak część czarno-szara (ilustrująca potencjalne drogi pieszej). Co więcej, w obu przypadkach każdy most jest w „sprzyjającej” pozycji z takim samym prawdopodobieństwem, równym $1/2$.

Niech S oznacza zdarzenie: *statek może przepłynąć pomiędzy punktami D i G*. Wobec powyższej obserwacji, $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(C)$.

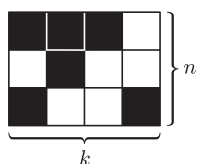
Jeśli człowiek może przejść pomiędzy brzegami rzeki, czyli są one połączone pewną drogą prowadzącą przez mosty i wyspy, to statek nie może przepłynąć wzdłuż rzeki. Analogicznie, jeśli człowiek nie może przejść, to brzegi nie są połączone, co oznacza, że istnieje linia, która je rozdziela i statek może taką właśnie trasą przepłynąć.

Stąd wniosek, że zawsze zachodzi dokładnie jedno spośród zdarzeń C i S , czyli są to zdarzenia przeciwne. Zatem $\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(S) = 1$, więc wobec wcześniejszej obserwacji, że $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(C)$, uzyskujemy wynik $\mathbb{P}(C) = 1/2$. \square

R2. Rozważmy szachownicę o n wierszach i k kolumnach, której każde pole pomalowano na czarno z prawdopodobieństwem x , a z prawdopodobieństwem $1 - x$ pozostawiono białe (rys. 3). Prawdopodobieństwo, że wybrany wiersz jest cały czarny jest wówczas równe x^k (bo każde z k pól musi być czarne), więc prawdopodobieństwo, że istnieje w nim białe pole wynosi $1 - x^k$.

Niech B oznacza zdarzenie: *w każdym wierszu jest co najmniej jedno białe pole*. Wierszy jest n ; wobec powyższej obserwacji $\mathbb{P}(B) = (1 - x^k)^n$. Analogicznie niech C oznacza zdarzenie: *w każdej kolumnie istnieje pole czarne*, wówczas $\mathbb{P}(C) = (1 - (1 - x)^n)^k$.

Jeśli nie zachodzi zdarzenie B , czyli nie jest prawdą, że w każdym wierszu jest białe pole, to istnieje wiersz o wszystkich polach czarnych. Wtedy na pewno w każdej kolumnie jest czarne pole (choćby z tego właśnie wiersza), czyli zachodzi zdarzenie C . Wobec tego zawsze zachodzi co najmniej jedno spośród zdarzeń B i C , stąd $\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \geq 1$, czyli $(1 - x^k)^n + (1 - (1 - x)^n)^k \geq 1$. \square



Rys. 3. Przykład dla $n = 3, k = 4$.

Jak widać na rysunku 3, zdarzenia B i C mogą zachodzić jednocześnie.

Zadanie domowe

3. Dane są dodatnie liczby całkowite n, k oraz takie nieujemne liczby rzeczywiste x_i, y_i , że $x_i + y_i = 1$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$(1 - x_1 x_2 \dots x_k)^n + (1 - y_1^n)(1 - y_2^n) \dots (1 - y_k^n) \geq 1.$$