




SPIS TREŚCI NUMERU 12 (487)

Równanie Naviera–Stokesa <i>Witold Sadowski</i>	str. 1
ATHENA – nowy teleskop rentgenowski ESA <i>Agata Różańska</i>	str. 6
 Zadania	str. 8
 Zamrożone arki przetwarzania <i>Magdalena Fikus</i>	str. 9
Myśl logarytmicznie! <i>Maciej M. Sysło, Anna Beata Kwiatkowska</i>	str.10
W krainie średnich <i>Przemysław Grzegorzewski</i>	str.14
Polszczyzna z włoszczyzną <i>Andreas Bartz</i>	str.16
Zbiór sam w sobie <i>Piotr Chrzastowski-Wachtel</i>	str.18
Jak było na LXV OM <i>Michał Krych</i>	str.20
Aktualności	str.22
Klub 44	str.23
Prosto z nieba: Superszybkie gwiazdy	str.24
Niebo w grudniu	str.24
 Każdy trójkąt jest równoboczny <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

W następnym numerze



obliczamy Koniec Świata

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

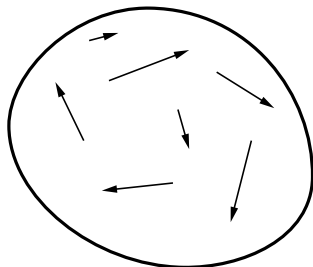
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Równanie Naviera–Stokesa

Witold SADOWSKI*

Rozważmy przepływ nieściśliwego płynu w pewnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Załóżmy, że wiemy, jaka jest prędkość płynu w każdym punkcie obszaru, to znaczy że znamy pole prędkości, oznaczone u_0 , w chwili początkowej $t = 0$ (rys. 1). Jak będzie wyglądało pole prędkości płynu $u(t)$ w dowolnym momencie $t > 0$?



Rys. 1. Schematyczny obraz pola prędkości w chwili $t = 0$. Na podstawie znajomości prędkości w chwili początkowej powinniśmy – z wykorzystaniem równania Naviera–Stokesa – przewidywać, jaki będzie wektor prędkości w każdym punkcie obszaru Ω dla wszystkich czasów dodatnich.

Odpowiedzi na to pytanie szuka się w oparciu o równanie Naviera–Stokesa. Jest ono zapisaną formalnie regułą, która mówi, jak zmienia się w czasie prędkość płynu. Oczywiście, wektor prędkości u zależy od zmiennej przestrzennej $x \in \Omega$ oraz od czasu $t \geq 0$. Rozwiązanie równania Naviera–Stokesa z warunkiem początkowym u_0 to funkcja u , która spełnia to równanie dla czasów dodatnich i w sposób ciągły osiąga warunek początkowy dla $t = 0$.

Kłopot w tym, że do dziś nie wiemy, czy równanie Naviera–Stokesa można jednoznacznie rozwiązać dla każdego sensownego (to znaczy takiego, który ma skończoną energię) warunku początkowego u_0 . Pomimo niemal stu lat intensywnych badań tego zagadnienia nadal nie wiemy, czy rzeczywiście potrafimy przewidywać przepływ cieczy. Nie wiemy bowiem, czy początkowo ograniczone i gładkie pole prędkości może w pewnej chwili wybuchnąć, czyli osiągnąć w pewnym punkcie x obszaru Ω nieskończoną wartość, jednocześnie cały czas ewoluując do tego momentu zgodnie z równaniem Naviera–Stokesa. Jest to sytuacja krępująca: ciężko bowiem się przyznać, że nie potrafimy rozstrzygnąć, czy podstawowy model w hydrodynamice ma sens...

Składniki równania. Równanie Naviera–Stokesa to w zasadzie II zasada dynamiki Newtona ($F = ma$) zastosowana do płynu. Mówi ono, że wpływ na tempo T , w jakim w danym punkcie zmienia się prędkość płynu, mają cztery składniki:

- A – „dyfuzja” prędkości, czyli swego rodzaju uśrednianie prędkości (proces podobny do tego, gdy barwnik dyfunduje w wodzie i ostatecznie jednorodnie zabarwia szklanke);
- B – „unoszenie” prędkości płynu, czyli konwekcja (tzw. składnik nieliniowy);
- C – siły związane z ciśnieniem (tzw. gradient ciśnienia);
- D – siły zewnętrzne (np. grawitacja).

W dalszym ciągu pominiemy siły zewnętrzne, przyjmując $D = 0$. Równanie Naviera–Stokesa można więc wtedy zapisać w nieco naiwny sposób jako

$$T + A + B + C = 0,$$

lub bardziej konkretnie, z użyciem odpowiednich symboli:

$$(1) \quad u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0.$$

W powyższym wzorze liczba ν mierzy lepkość płynu (tzn. to, czy jest on bardziej podobny do miodu czy do wody), a pozostałe symbole związane są z różniczkowaniem. W związku z tym konieczna jest pewna uwaga.

Do zrozumienia tego tekstu nie jest konieczne rozumienie powyższych symboli. Czytelnicy, którzy z pochodnymi cząstkowymi nie mieli dotąd do czynienia, mogą spokojnie ignorować zapis formalny i czytać sam tekst, spoglądając na symbole jak na graficzne identyfikatory pojęć, których sens zostanie wyjaśniony poniżej bez technicznych zawiłości.

Równanie (1) uzupełniane jest pewnymi dodatkowymi założeniami:

- w chwili $t = 0$ pole prędkości jest równe $u_0(x)$,
- prędkość u jest równa zeru na brzegu obszaru Ω ,

Gradient ciśnienia to wektor wskazujący, w którym kierunku ciśnienie wzrasta najszybciej i którego długość jest proporcjonalna do tempa zmiany ciśnienia.

Dla Czytelników, którzy pochodne cząstkowe znają: u_t oznacza pochodną względem czasu, przez Δu oznaczamy wektor $(\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$, gdzie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

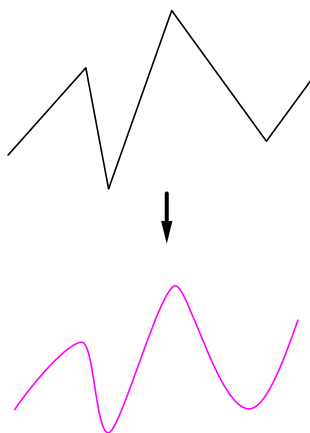
Ponadto przez $(u \cdot \nabla)u$ oznaczamy wektor, którego i -ta współrzędna jest równa sumie

$$u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3}.$$

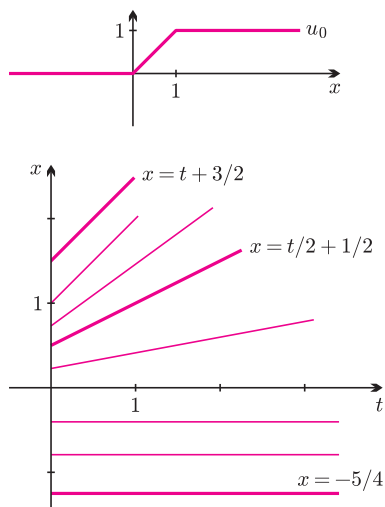
*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Formalnie nieściśliwość oznacza, że dywergencja prędkości u jest równa zeru:

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0.$$



Rys. 2. Schematyczny obraz działania laplasjanu: wygładzanie rozwiązań z upływem czasu.



Rys. 3. Rozwiązujemy równanie Burgersa.

- Startujemy z punktu $(0, -5/4)$. Mamy $u_0(-5/4) = 0$, więc rysujemy z punktu $(0, -5/4)$ prostą o współczynniku kierunkowym zero. Na tej prostej wartość u jest równa zeru.
- Startujemy z punktu $(0, 1/2)$. Mamy $u_0(1/2) = 1/2$, więc rysujemy z punktu $(0, 1/2)$ prostą o współczynniku kierunkowym $1/2$. Na tej prostej wartość u jest równa $1/2$.
- Startujemy z punktu $(0, 3/2)$. Mamy $u_0(3/2) = 1$, więc rysujemy prostą z punktu $(0, 3/2)$ o współczynniku kierunkowym równym 1 . Na tej prostej wartość u jest równa 1 .

– płyn jest nieściśliwy; oznacza to, że do dowolnej kulki w Ω tyle samo płynu wpływa, co wypływa. Pole prędkości zwane jest wtedy bezźródłowym (bezdwywergentnym).

Trzech bohaterów. Na równanie Naviera–Stokesa można patrzeć jak na bitwę, w której chodzi o to, czy pierwszy składnik równania (pochodna czasowa u_t), a wraz z nią sama prędkość u , ucieknie czy też nie ucieknie do nieskończoności. Walka ta rozgrywa się między trzema pozostałymi „osobami”:

- bohaterem pozytywnym (czyli laplasjanem: $-\Delta u$),
- nieliniowym złoczyńcą: $(u \cdot \nabla)u$ oraz
- „niewidzialnym rozgrywającym” (gradientem ciśnienia: ∇p).

Żeby zatem głębiej zrozumieć, co się dzieje w tym równaniu, dlaczego jest ono tak kłopotliwe i dlaczego kolejne składniki zostały tak a nie inaczej nazwane, spróbujmy lepiej zrozumieć charakterystyki głównych postaci.

Bohater pozytywny. Aby wyjaśnić, dlaczego większość matematyków sądzi, że laplasjan poprawia regularność rozwiązań równania Naviera–Stokesa, przyjrzyjmy się równaniu, w którym występuje tylko pochodna względem czasu i sam laplasjan (przyjmujemy $\nu = 1$):

$$u_t - \Delta u = 0$$

z warunkiem początkowym $u(0, x) = u_0(x)$. Jest to tzw. równanie przepływu ciepła (tym razem u oznacza zwykłą funkcję o wartościach rzeczywistych, a nie pole wektorowe), które opisuje, jak zmienia się w czasie temperatura w obszarze, w którym początkowy rozkład temperatury jest dany przez funkcję u_0 . Okazuje się, że nawet gdy funkcja u_0 nie jest zbyt gładka, to funkcje $u(t)$, opisujące rozkład temperatury w czasie $t > 0$, natychmiast stają się niezwykle regularne i gładkie. Ma to związek z efektem uśredniania (charakterystycznym dla dyfuzji), który ostatecznie prowadzi do tego, że rozwiązania $u(t)$ z upływem czasu coraz bardziej upodobniają się do funkcji harmonicznej, to znaczy takiej, która jest ciągła (tak naprawdę gładka) i ma własność wartości średniej: jej średnia wartość w dowolnej kulce jest równa jej wartości w środku kulki. Bliższa analiza pokazuje też, że laplasjan wypompuje energię z układu tym szybciej, im większe są różnice temperatury (w przypadku równania Naviera–Stokesa: różnice prędkości) i co więcej, dużo szybciej pozbywa się energii ze skal mikroskopijnych niż z tych dużo większych. To przeciwdziała dzikim oscylacjom w małych skalach i wygładza rozwiązanie.

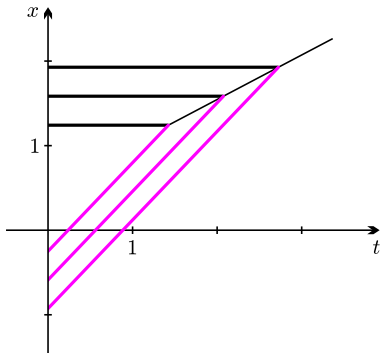
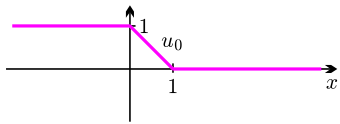
Nieliniowy złoczyńca. W przeciwieństwie do laplasjanu składnik nieliniowy $(u \cdot \nabla)u$ podejrzewany jest przynajmniej o próby (być może nieskuteczne) doprowadzenia prędkości do wartości nieskończonej. Jak się to dzieje? Spójrzmy na równanie, jakie otrzymujemy z równania Naviera–Stokesa po wyrzuceniu laplasjanu

$$u_t + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0,$$

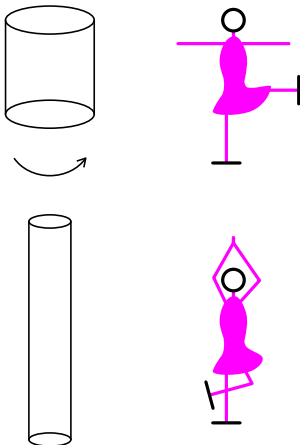
przyjmując warunek początkowy $u(0, x) = u_0(x)$. Ponieważ nadal wymagamy, by u opisywało przepływ nieściśliwy ($\operatorname{div} u = 0$), to powyższe równanie (zwane równaniem Eulera) jest, z grubsza biorąc, tak samo słabo poznane jak równanie Naviera–Stokesa. Dokonajmy jednak kolejnego uproszczenia: zapomnijmy o warunku przepływu bezźródłowego, a ponadto dla pełnego uproszczenia rozpatrzmy przypadek jednowymiarowy (dla zmiennej przestrzennej). Wówczas $(u \cdot \nabla)u$ to po prostu uu_x i dostajemy:

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Takie równanie (zwane równaniem Burgersa) ma dość niepokojące własności. Jakiego rodzaju są to kłopoty, można zrozumieć nawet bez znajomości pochodnych cząstkowych. Istnieje bowiem prosty algorytm rozwiązywania równania Burgersa, gdy tylko ma ono gładkie, regularne rozwiązanie. Robi się to tak. Bierzymy jakikolwiek punkt $(0, b)$ na osi $t = 0$. Patrzymy teraz, jaka jest wartość funkcji u_0 dla $x = b$. Jeśli jest ona równa a ,



Rys. 4. Dla innego warunku początkowego dochodzimy do sprzeczności: na liniach ukośnych wartość funkcji musi być równa 1, a na poziomych – zero. Niestety, linie się zderzają i nawet wygładzenie warunku początkowego nic na to pomóc nie może. . . Jak zatem określać rozwiązanie w spornych punktach? Gdzie ma przebiegać linia skoku (fala uderzeniowa)? I czy takie nieciągłe rozwiązania mają w ogóle sens?



Rys. 5. Zwężanie wiru.

Na przykład sinus i kosinus są do siebie prostopadłe na odcinku $(0, \pi)$, bowiem ich iloczyn jest równy $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$, a średnia $\sin 2x$ na $(0, \pi)$ jest równa zero.

to kreślimy prostą wychodzącą z punktu $(0, b)$, która ma współczynnik kierunkowy a , czyli równanie $x = at + b$. Na wykreślonej prostej definiujemy wartość funkcji u jako liczbę a . Jeśli teraz pokryjemy takimi prostymi całą półpłaszczyznę $t \geq 0$, to problem jest rozwiązany, bo każdy punkt (x, t) dla $t \geq 0$ ma określoną wartość funkcji u . Jak to działa na konkretnym przykładzie, można zobaczyć na marginesie (rys. 3). Okazuje się jednak, że dla bardzo wielu warunków początkowych (nawet zupełnie gładkich) nie da się znaleźć rozwiązania ciągłego u określonego dla wszystkich czasów $t > 0$. Tworzą się bowiem tzw. fale uderzeniowe jak na rysunku 4. W ten sposób widzimy, że spokrewnione z równaniem Naviera–Stokesa równanie, które zawiera podobny składnik nieliniowy, dla niektórych warunków początkowych zachowuje się dobrze, a dla innych warunków początkowych na pewno nie daje globalnych w czasie i gładkich rozwiązań (bez względu na to, czy u dla $t = 0$ jest gładkie).

Są też inne przyczyny, dla których składnik nieliniowy ma złą sławę: odwrotnie niż laplasjan pompuje energię ze skal większych do mniejszych, a ponadto z fizycznego punktu widzenia jest on związany z efektem zwężania wiru. Efekt ten polega na tym, że jeśli walec wodny wiruje wokół osi i jego promień ulega zmniejszeniu, to prędkość wirowania silnie wzrasta, tak jak w przypadku łyżwiarki robiącej piruet z otwartymi ramionami, która nagle ramiona zbliża do siebie (rys. 5). Czy podobnie może dojść do wybuchu prędkości w przepływie płynu?

Niewidzialny rozgrywający. Wielu osobom wydaje się, że cały kłopot z równaniem Naviera–Stokesa polega właśnie na starciu składnika nieliniowego z laplasjanem. Część fizyków podejrzewa, że zmniejszając lepkość ν , czyli osłabiając laplasjan względem składnika nieliniowego, można doprowadzić do wybuchów rozwiązań. Czy jednak tylko o starciu laplasjanu ze składnikiem nieliniowym tu chodzi?

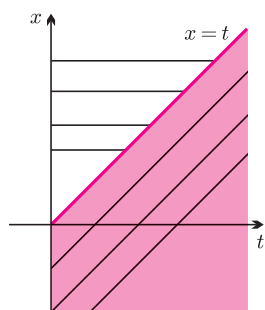
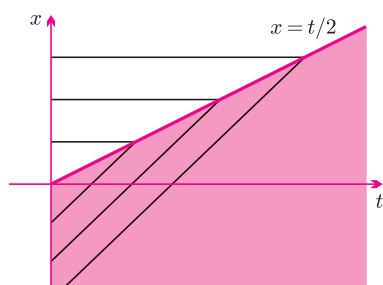
Problem w tym, że równanie z pominiętym gradientem ciśnienia:

$$u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u = f,$$

i w konsekwencji z jednocześnie *pominiętym* warunkiem bezdywergencyjności pola u , ma zupełnie dobre własności: rozwiązania są ograniczone, o ile tylko f jest ograniczona! Wykazali to Andriej Kisieliov oraz Olga Ładyżeńska w 1957 r. W przypadku równania Naviera–Stokesa gradient ciśnienia pełni niejako rolę funkcji f z równania badanego przez Kisieliova i Ładyżeńską. Gdybyśmy zatem wiedzieli, że gradient ciśnienia nie wybucha, to moglibyśmy wnioskować, że u też nie. . . Niestety, nic takiego o ciśnieniu nie wiemy. Widać zatem, że o składniku ∇p można mówić jak o kluczowej postaci równania Naviera–Stokesa. *It is all about pressure. . .* – jak mawia wielu matematyków zajmujących się tym tematem.

Dlaczego jednak ciśnienie nazwaliśmy postacią niewidzialną? Otóż gradient ciśnienia i prędkość u należą do wzajemnie prostopadłych przestrzeni funkcyjnych. Dla części Czytelników może to brzmieć dziwnie, że dwie funkcje są do siebie prostopadłe, ale jest to zupełnie sensowne uogólnienie pojęcia zwykłej prostopadłości wektorów: dwa wektory są prostopadłe, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zero, dwie funkcje są prostopadłe, gdy średnia ich iloczynu w przestrzeni jest równa zero. To właśnie z powodu owej ortogonalności (prostopadłości) gradientu i funkcji z zerową dywergencyją (tzn. pola bezźródłowego) w większości sformułowań równania Naviera–Stokesa spotykanych w fachowych artykułach ciśnienie po prostu znika, bo równanie rzutuje się od razu tylko na tę podprzestrzeń, w której „żyje” rozwiązanie u .

Słabe rozwiązania. W badaniach nad równaniem Naviera–Stokesa przełomowe znaczenie miała praca francuskiego matematyka Jeana Leraya z 1934 r. Leray pokazał, że dla każdego sensownego warunku początkowego u_0 można skonstruować tzw. „słabe” rozwiązania u dla wszystkich czasów $t > 0$. Co to znaczy, że rozwiązanie jest „w słabym sensie”? Mówiąc swobodnie, znaczy



Rys. 6. Rozważmy równanie Burgersa z warunkiem początkowym u_0 równym 1 dla x ujemnych i 0 dla x dodatnich. Linie, na których określamy wartość funkcji (zero lub jeden), przecinają się. Ale można zdefiniować słabe rozwiązanie – także za pomocą funkcji testowych. Okazuje się, że u zdefiniowane jak na górnym rysunku (obszar zacieniowany to wartość u równa 1) wszystkie testy przechodzi, a to na rysunku dolnym – nie. Górne jest zatem słabym rozwiązaniem, a dolne nie jest. Widzimy też, że definicja słabego rozwiązania wyznacza w tym przypadku, jak porusza się fala uderzeniowa.

Żeby uniknąć mówienia o całkach, opowiadamy w tym artykule o średnich wartościach. Dlatego o obszarze Ω zakładamy tu, że jest ograniczony i ma objętość 1.

to, że spełnia ono pewną nieskończoną serię testów, które każde „prawdziwe”, regularne rozwiązanie by spełniało. Może się jednak zdarzyć, że pewna funkcja wszystkie te testy przechodzi, a jednak nie spełnia równania w sensie zwykłym. Jest to sytuacja trochę podobna do zdawania matury: każdy w pełni dojrzały matematyk zaliczy serię wymaganych przez nią testów, ale nie jest prawdą, że każdy, kto maturę zaliczy, jest od razu dojrzałym matematykiem.

Spróbujmy dokładniej wytłumaczyć, jakie testy przechodzi słabe rozwiązanie określone na odcinku czasu $[0, T]$. Standardowy test wygląda następująco. Bierzemy dowolną, ale bardzo gładką funkcję wektorową $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, która znika przy brzegu Ω oraz znika dla czasów bliskich $t = 0$ i $t = T$, a także ma zerową dywergencję. Następnie mnożymy przez nią równanie (1), otrzymując:

$$u_t \cdot \varphi - \Delta u \cdot \varphi + (u \cdot \nabla)u \cdot \varphi + \nabla p \cdot \varphi = 0.$$

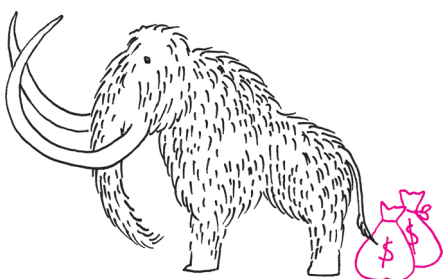
Dla każdego z czterech składników liczymy teraz jego średnią po całej czasoprzestrzeni. Suma tych czterech średnich też, oczywiście, musi być równa zero. Kiedy jednak liczymy średnie, to pewne prawa rachunku całkowego (całkowanie przez części) pozwalają nam przetrzucić pochodne na gładką funkcję testującą. To znaczy: gdyby u było prawdziwym gładkim rozwiązaniem, to obliczenie np. średniej iloczynu $u_t \cdot \varphi$ byłoby tym samym, co obliczenie średniej iloczynu $-\varphi_t \cdot u$. Ta ostatnia średnia istnieje może nawet wtedy, gdy samej funkcji u różniczkować się nie da. I na tym właśnie polega pomysł nieskończonej serii testów: pochodne zostają przetrzucone na funkcję próbną, która jest na tyle gładka, że takie różniczkowania zniesie bez problemu, nawet gdyby nasze „słabe rozwiązanie” udźwignąć ich nijak nie mogło. Następnie sprawdzamy, czy suma średnich (obliczonych po odpowiednim przetrzuceniu pochodnych na φ) nadal jest równa zero. Jeśli tak, to test jest zaliczony. Słabe rozwiązanie u spełnia *każdy* taki test. Czy jednak można na nie z powrotem przetrzucać pochodne? Gdyby tak było, to w konsekwencji u musiałoby być też rozwiązaniem klasycznym. Ale czy tak jest, nie wie nikt.

Trzy klasyczne wyniki. Skoro zapoznaliśmy się z grubsza z pojęciem słabego rozwiązania, to możemy teraz podać trzy najbardziej fundamentalne wyniki dotyczące równania Naviera–Stokesa. Obecnie wiemy, że:

- rozwiązania słabe istnieją globalnie w czasie, tzn. są określone dla wszystkich $t \geq 0$; można je też tak skonstruować, że ich energia (czyli, z grubsza biorąc, średnia $\frac{1}{2}|u|^2$) maleje w czasie, a warunek początkowy jest przyjmowany w tym sensie, że energia pola $u(t) - u_0$ dąży do zera, gdy $t \rightarrow 0^+$; nie jest jednak obecnie wykluczone, że różne metody konstrukcji słabych rozwiązań prowadzą do różnych słabych rozwiązań dla tego samego $u_0 \dots$;
- rozwiązania klasyczne (czyli takie, które po prostu w zwykły sposób spełniają równanie) istnieją lokalnie w czasie: jeśli tylko warunek początkowy nie jest zbyt „dziki” (tzn. gdy średnia $|\nabla u|^2$ jest skończona), to przynajmniej na pewnym odcinku czasu $[0, T)$ można skonstruować gładkie rozwiązanie;
- jeśli warunek początkowy jest bardzo mały (np. w tym sensie, że średnia $|\nabla u|^2$ jest odpowiednio mała), to rozwiązania klasyczne istnieją globalnie w czasie (czyli dla każdego $t > 0$).

Wiemy też, że rozwiązania klasyczne są zawsze jednoznaczne (nie można mieć dwóch różnych rozwiązań klasycznych dla tego samego u_0).

Słoń Edrissa Titiego. Edriss Titi, jeden z bardziej znanych badaczy równania Naviera–Stokesa, zwykł mawiać, że równanie to jest jak słoń czy też mamut, którego ludzie chcą pokonać, ale wciąż nie potrafią. Zamiast więc mamuta w pełni zwyciężyć, dokonują różnych sztuczek: a to złapią go za ucho, a to pobują się na ogonie, to znów ugoda go w nogę. Metaforę Titiego należy, oczywiście, traktować z pewnym dystansem, ale faktem jednak jest, że w ciągu wielu lat badań udało się dokonać wielu matematycznych „sztuczek”. Wykazano na przykład, że:



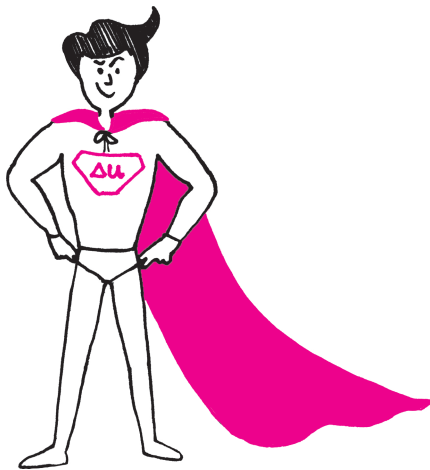
- jeśli dochodzi do wybuchu, to i tak zbiór czasów, w jakim słabe rozwiązanie wybucha, jest mały: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można go przykryć serią odcinków o długościach $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ o tej własności, że $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^{1/2} < \varepsilon$ (czyli tzw. wymiar Hausdorffa zbioru czasów osobliwych nie jest większy od $1/2$); wiedział to już w pewnej formie Leray w 1934 r.;
- zbiór punktów w czasoprzestrzeni, w których być może dochodzi do wybuchu, też jest mały (jego wymiar Hausdorffa nie jest większy niż 1 – to wynik Caffarelliego, Kohna i Nirenberga z 1982 r. w oparciu o wcześniejsze pomysły Scheffera z lat 70.);
- danemu słabemu rozwiązaniu odpowiada sensowny zespół trajektorii cząstek (trajektorii Lagrange’a); to wynika z pracy Foiasa, Guillope i Temama z 1985 r.

Faktów podobnej wagi można podać jeszcze co najmniej kilkanaście. A jednak problem główny pozostaje otwarty i nie bardzo wiadomo, jak te częściowe wyniki nas do jego pokonania zbliżają...

Milion dolarów. Równanie Naviera–Stokesa opisujące przepływ w obszarze trójwymiarowym stało się w ostatnich latach dodatkowo sławne, bowiem zawarto je na liście tzw. siedmiu problemów milenijnych (wytypowanych jako najważniejsze problemy otwarte w matematyce). Żeby przemówić do wyobraźni osób spoza branży, ufundowano konkretną i łatwą do zrozumienia nagrodę w wysokości miliona dolarów za rozwiązanie któregośkolwiek z tych siedmiu problemów. W ten sposób równanie Naviera–Stokesa stało się obecne w tzw. kulturze masowej, co prowadzi czasami do nieoczekiwanych efektów. Na przykład niedawno „eksperti” rozmaitych portali poinformowali opinię publiczną o „geniuszu z Kazachstanu”, który „rozwiązał zagadkę za milion dolarów”. Niestety, w dowodzie Mukhatarbaja Otelbajewa po kilku tygodniach znaleziono błąd. Było jednak dość emocjonująco: w poszukiwaniu pomyłki brało udział wielu matematyków, ostatecznie kontrprzykład (ulepszony potem przez Terrence’a Tao) został podany przez użytkownika o nicku „sup” na jednym z rosyjskojęzycznych portali matematycznych. Wydaje się obecnie, że dowodu Otelbajewa nie da się uratować. Tego rodzaju zdarzenia trafiają się od czasu do czasu, np. w roku 2006 Penny Smith ogłosiła, że ma dowód i nieostrożnie udzieliła na ten temat wywiadu dziennikarce *Nature*. Potem okazało się, że choć sama praca poświęcona równaniu Naviera–Stokesa nie zawierała bezpośrednio błędu, to jednak opierała się na poprzedniej błędnej pracy autorki.

Pomimo zatem tysięcy prac na ten temat, pomimo wysiłków setek matematyków problem regularności rozwiązań Naviera–Stokesa wciąż czeka na ostateczne rozstrzygnięcie. A przecież od momentu podania tych równań przez francuskiego inżyniera Claude-Louisa Naviera w 1822 roku i ich bardziej ścisłego wyprowadzenia przez George’a Gabriela Stokesa w 1845 roku minęło już całkiem dużo czasu...

Sformułowanie problemu milenijnego zostało podane przez Charlesa Feffermana dla przypadku przepływu w obszarze Ω bez brzegu, to jest w całej przestrzeni lub na kostce z okresowymi warunkami brzegowymi. Oczywiście problem dotyczył przepływu w obszarze trójwymiarowym, bo problem przepływu w obszarze dwuwymiarowym został dawno już rozwiązany (nie ma wybuchów w wymiarze 2) przez Olgę Ladyżeńską.



Rozwiązanie zadania M 1442.

Udowodnimy indukcyjnie, że dla $n \geq 3$

$$\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Dla $n = 3$ nasza nierówność przyjmuje postać $\frac{1}{27} < \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$. Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla $n - 1$, gdzie $n \geq 4$. Wówczas

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{(n-1)^3} \right) + \frac{1}{n^3} &< \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n-1)n} \right) + \frac{1}{n^3} = \\ &= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)} \right) + \frac{1}{n^3} - \left(\frac{1}{2n(n-1)} - \frac{1}{2n(n+1)} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)} \right) + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n(n-1)(n+1)} < \\ &< \frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)}, \end{aligned}$$

co dowodzi prawdziwości nierówności dla n . W takim razie nierówność jest spełniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$.

ATHENA – nowy teleskop rentgenowski Europejskiej Agencji Kosmicznej

Agata RÓŻAŃSKA*



ATHENA – wizja artystyczna (Javier Garcia Nombela-art-eres.net/Volker Springel(MPA)/IRAP)

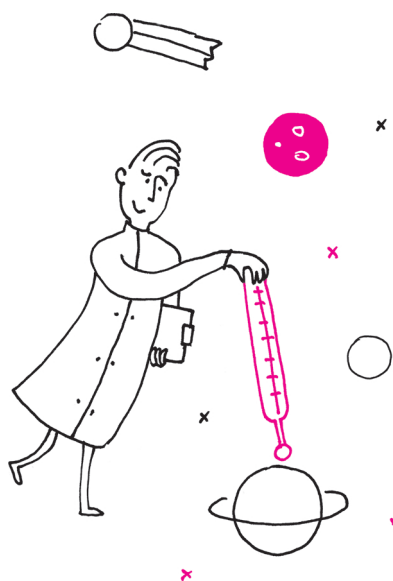
Obserwacje Kosmosu w dziedzinie rentgenowskiej to najbardziej kosztowna działka współczesnej astrofizyki. Fotony w zakresie widma od 0,1 do 100 keV są całkowicie pochłaniane przez atmosferę, więc aby spojrzeć na niebo w promieniach Roentgena, musimy zbudować teleskop satelitarny i wystrzelić go w przestrzeń kosmiczną. Z tego właśnie powodu astronomia rentgenowska miała szanse rozwinąć się dopiero w drugiej połowie XX wieku, kiedy nauczyliśmy się wynosić detektory promieni wysokich energii ponad przeszkadzające nauce warstwy atmosfery. W praktyce budowa teleskopu rentgenowskiego od momentu zaproponowania koncepcji naukowej do startu rakiety trwa około 15 lat.

Najpierw naukowcy zastanawiają się, co chcą zbadać, potem długo dyskutują z agencjami kosmicznymi, w jaki sposób zbudować urządzenie, które wykona pomiary najdokładniej (za jak najmniejsze pieniądze). Nie dość, że wysokoenergetyczne promieniowanie ciężko skupić, to chcemy je obserwować z coraz większą dokładnością, dlatego nieustannie ulepsza się technologie detekcji promieni rentgenowskich, aby zrozumieć, jak powstają i jak oddziałują one z kosmiczną materią.

Przy obecnym rozwoju technologii najlepiej radzimy sobie z promieniowaniem z bardzo wąskiego przedziału od 0,1 do 10 keV – dla fotonów z tego przedziału z największą dokładnością potrafimy określić kierunek, z jakiego do nas dochodzą i moment nadejścia (obecne detektory pozwalają rozdzielić obiekty oddalone o 1 sekundę łuku na niebie, a sygnał potrafimy rejestrować co 10 μ s).

W listopadzie 2013 roku projekt nowego teleskopu rentgenowskiego ATHENA (z ang. *the Advanced Telescope for High ENergy Astrophysics*) uzyskał poparcie Europejskiej Agencji Kosmicznej z planowaną datą wyniesienia w 2028 roku. W projektowaniu i budowie teleskopu biorą udział polscy naukowcy i instytuty badawcze. ATHENA wygrała z kosmicznym interferometrem – detektorem fal grawitacyjnych eLISA, który miałby mieć konstrukcję słabo jeszcze przetestowanej formacji latającej. Technologie zaproponowane do skonstruowania ATHENY są bardzo nowoczesne, ale mniej ryzykowne niż zgranie trzech oddalonych o milion kilometrów satelitów eLISY. Teleskop ATHENA będzie wyposażony w najnowocześniejsze lustra rentgenowskie nachylone w taki sposób, by fotony rentgenowskie „ślizgały się” (odbijały pod małym kątem) po ich powierzchni. Dodatkowo, jak nigdy wcześniej, lustra te będą wyposażone w mikroskopijne kanaliki, które podziałają jak kolimatory (technologia SPO – z ang. *Silicon Pore Optic*). Po dwukrotnym precyzyjnym odbiciu pod małym kątem fotony skupia się i za pomocą odpowiednio przystosowanych kamer rejestruje się ich energię, kierunek i czas nadejścia.

ATHENA będzie miała dwa detektory, które w zależności od potrzeb obserwacyjnych będą umieszczane w ognisku teleskopu. Każdy z nich to w zasadzie odpowiednik matrycy CCD znanej z aparatów fotograficznych, złożony z wielu miniaturowych pikseli, przy czym w przypadku promieniowania rentgenowskiego idealna detekcja następuje wtedy, gdy poszczególne piksele rejestrują pojedyncze fotony. Większa liczba fotonów jednocześnie w pojedynczym pikselu uniemożliwia zmierzenie ich energii i taki pomiar jest



*Centrum Astronomiczne
im. M. Kopernika PAN w Warszawie

**Rozwiązanie zadania M 1443.**

Niech a_{ij} oznacza liczbę w i -tym wierszu i j -tej kolumnie naszej tablicy,

$$a_{ij} = n(i-1) + j.$$

Wybrane liczby można zapisać jako $a_{1\sigma(1)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$, gdzie σ to pewna permutacja zbioru $\{1, \dots, n\}$. Suma wybranych liczb wynosi w takim razie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} &= \sum_{i=1}^n (n(i-1) + \sigma(i)) = \\ &= n \sum_{i=1}^n (i-1) + \sum_{i=1}^n i = \\ &= \frac{n^2(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{n(n^2+1)}{2}. \end{aligned}$$

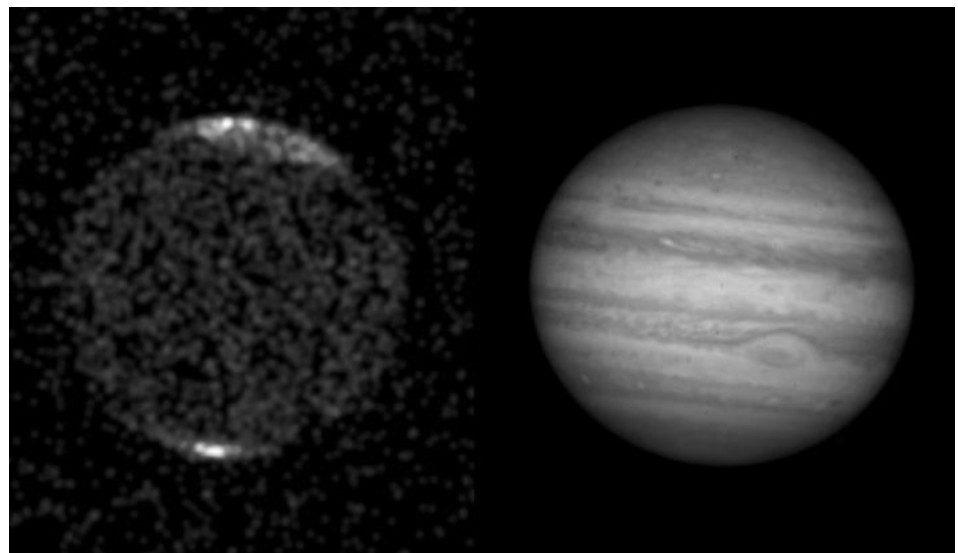
automatycznie odrzucany. X-IFU (z ang. *X-ray Integral Field Unit*) to bardzo nowatorski detektor, w którym pojedynczy piksel działa jak mikrokalorymetr.

Prosto rzecz ujmując, każdy piksel matrycy mierzy niesłychanie małą, rzędu milikelwinów, różnicę temperatur wywołaną wysokoenergetycznym fotonem rentgenowskim, który do niego wpada. Takie urządzenie nigdy jeszcze nie zostało użyte przy budowie satelitów rentgenowskich. Detektor musi być utrzymywany w niskiej temperaturze, co wymaga umieszczenia go w specjalnym kriogenicznym termosie. Mikrokalorymetry zapewnią ATHENIE znakomitą rozdzielczość energetyczną – pozwolą na mierzenie energii fotonów z dokładnością do 2,5 eV! Niemniej coś za coś – detektor będzie miał niewielkie pole widzenia: 5×5 minut łuku.

Sześćdziesiąt razy większe pole widzenia zapewni ATHENIE drugi detektor, WFI (z ang. *Wide Field Imager*) zbudowany z konwencjonalnych krzemowych pikseli, ale za to z nowoczesną elektroniką zapewniającą błyskawiczny odczyt. Dzięki technice zwanej APS (z ang. *Active Pixel Sensor*) czas nadejścia fotonu będzie mierzony z dokładnością do 7 μ s. Taka czasowa rozdzielczość pozwoli zbadać jasne i szybko zmienne obiekty rentgenowskie, których jest bardzo dużo w naszej Galaktyce. Wszystkie pulsary, układy podwójne z czarnymi dziurami lub gwiazdami neutronowymi wykazują zmienność w skali milisekund i taką właśnie zmienność będziemy mogli pomierzyć z dużą precyzją.

Opisana powyżej kombinacja instrumentów pozwala na sformułowanie zadań badawczych, które według ekspertów Europejskiej Agencji Kosmicznej są istotniejsze od detekcji fal grawitacyjnych. Prawie połowa obserwowanej przez nas materii kosmicznej jest w formie rozgrzanego, rzadkiego gazu zwanego w żargonie „fazą gorącą” (z ang. *hot phase*). Ów gorący gaz ma temperaturę rzędu 10^6 – 10^7 K i promieniuje wyłącznie niewidzialne gołym okiem fotony X. Nadal nie wiemy, w jaki sposób tak duża ilość gazu nagromadziła tyle energii. Gorący gaz znajduje się w centrach aktywnych galaktyk, związany jest wiralnie w gromadach galaktyk, oraz jest nieustannie wywiewany z odległych kwazarów. I właśnie ten „Gorący Niewidzialny Wszechświat” stał się głównym tematem naukowym ATHENY.

Dzięki obserwacjom rentgenowskim uczeni potrafią ocenić temperaturę, gęstość oraz masę gorącego gazu w danym obszarze nieba. Czasami udaje się wyznaczyć prędkość, z jaką się on porusza oraz jego odległość od obserwatora. Te parametry fizyczne powiązane z czasem obserwacji dostarczają podstawowych informacji o morfologii i ewolucji obserwowanych obiektów, a co za tym idzie, związanej z nimi chłodniejszej, widzialnej części gazu.



Jowisz, po lewej w promieniach rentgenowskich zaobserwowany przez satelitę Chandra, po prawej stronie w świetle optycznym.

X-ray Image: R. Gladstone (SwRI), et al., Optical Image: Cassini Imaging Team, NASA.



Praca powstała dzięki funduszom Siódmego Programu Ramowego Unii Europejskiej (FP7/2007–2013), numer grantu No.312789.

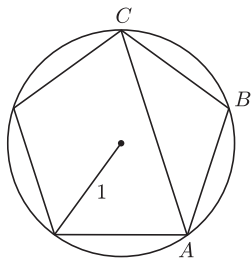
Dzięki przyszłym obserwacjom ATHENY dowiemy się więcej o dynamice i rozkładzie materii we Wszechświecie, zrozumiemy, jak rosną supermasywne czarne dziury i jak gorący gaz stabilizuje gromady galaktyk. ATHENA pozwoli nam zajrzeć głębiej w przestrzeń kosmiczną, aż do przesunięć ku czerwieni nawet $z = 3$ dla najjaśniejszych obiektów. Promieniowanie rentgenowskie o energiach 0,1–9 keV w oddziaływaniu z materią produkuje linie emisyjne lub absorpcyjne pochodzące z jonizacji pierwiastków ciężkich. Dzięki temu możemy precyzyjnie zbadać zawartość pierwiastków ciężkich oraz ich chemiczną ewolucję w obiektach astrofizycznych. ATHENA będzie obserwować linie wielokrotnie zjonizowanego tlenu, węgla, magnezu i innych „metali” aż do żelaza z największą jak dotąd precyzją. Zbadamy również dokładniej, bardzo istotny z astrofizycznego punktu widzenia, proces opadania materii na supermasywne czarne dziury, a w szczególności jego związek z procesem wypływu gorącego gazu z aktywnych jąder galaktyk (z ang. *galaxy feedback*).

Oprócz możliwości obserwacji dalekiego Wszechświata ATHENA znakomicie będzie się nadawać do badań obiektów bliższych. Planuje się zatem „zdjęcia rentgenowskie” centrum naszej Galaktyki, pozostałości po wybuchach supernowych, rentgenowskich układów podwójnych oraz zjonizowanych wiatrów w koronach gorących gwiazd. Nawet obiekty chłodne, takie jak planety i komety w naszym Układzie Słonecznym, nie pozostają obojętne na energetyczne promieniowanie. Już od 60 lat wiemy, że korona Słońca jest silnym źródłem promieniowania X. Te krótkie fale w dużych ilościach przemierzają nasz układ planetarny i znakomicie wnikają w chłodną materię atmosfer planet. Wzbudzone elektrony atmosferycznych gazów, wracając do stanu równowagi, wyświecają wtórne promieniowanie rentgenowskie. Powyższe zjawisko, zwane fluorescencją, jest obserwowane w kosmosie zawsze, gdy mamy do czynienia z silnym źródłem wysokoenergetycznych fotonów. Planety działają jak lustra dla promieni X i je również będzie obserwować przyszły teleskop rentgenowski ATHENA.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1441. Punkty A, B, C są trzema kolejnymi wierzchołkami pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1. Obliczyć $(AB \cdot AC)^2$.

Rozwiązanie na str. 12

M 1442. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}.$$

Rozwiązanie na str. 5

M 1443. W kolejne wiersze tablicy $n \times n$ wpisano po kolei liczby $1, 2, \dots, n^2$.

Następnie wybrano z niej n liczb tak, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się dokładnie jedna z wybranych liczb. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy wybranych liczb.

Rozwiązanie na str. 7

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 869. Jedną z „atrakcji” wesołego miasteczka jest duża, pozioma tarcza o promieniu R wirująca z prędkością kątową ω . Pracownik wesołego miasteczka założył się z kolegami, że startując ze środka tarczy i idąc ze stałą prędkością wzdłuż wymalowanego na tarczy promienia dotrze do brzegu tarczy w chwili, gdy wykona ona połowę obrotu. Czy wygra zakład, jeśli współczynnik tarcia między powierzchnią tarczy i podeszwami butów pracownika wynosi f ?

Wskazówka: Siła odśrodkowa nie jest jedyną siłą bezwładności występującą w obracającym się układzie.

Rozwiązanie na str. 15

F 870. Oszacuj wartość energii potencjalnej uwalnianej w Polsce przez spadające jesienią liście. Powierzchnia Polski to około $310\,000 \text{ km}^2$, z czego około 30% to lasy, ale tylko 20% z nich to lasy liściaste. Najwyższy wiąz w Polsce ma 36 m wysokości (Komorów k. Gubina), najwyższa lipa 35 m (Cieleńniki k. Częstochowy).

Rozwiązanie na str. 19

Zamrożone arki przetrwania

To dziwny i niezwykle bank, bank nasion roślin spożywczych, uprawianych na całym świecie. Stanowi gwarancję dla życia, ponad katastrofami i nieprzewidywanymi kataklizmami. Jest też podwójnym zabezpieczeniem dla ponad 1400 tego typu placówek na całym świecie. Zbudowano go w zboczu góry z piaskowca, 130 m ponad poziomem morza, na archipelagu Svalbard, w miejscowości Longyearbyen, kilometr od lotniska, ponad 1000 km od bieguna północnego, lotniska otwartego na loty regularne tylko w czasie polarnego lata. Wciąż wydobywany lokalnie węgiel to źródło energii do zasilania chłodzących agregatów.



Archipelag uznano za idealną lokalizację: brak tu aktywności sejsmicznej, znajduje się w strefie wiecznej zmarzliny. Bank (kamień węgielny w 2006, pierwsze depozyty w 2008), powstał w wyniku trójporozumienia między rządem norweskim, centrum zasobów genetycznych (NordGen) i Fundacją Globalnej Różnorodności Nasion (GCDT). Budowa kosztowała podatników norweskich 9 mln dolarów, depozyty są bezpłatne. Koszty operacyjne pokrywane są z GCDT oraz licznych wpłat rządów i fundacji (np. Billa i Melindy Gates). Badacze, pragnący uzyskać określone nasiona, muszą to robić przez pierwotne banki genów – instalacja na Spitsbergenie stanowi zabezpieczenie, a nie źródło próbek. Bank jest własnością rządu norweskiego, depozyty – depozytariuszy i tylko oni mają dostęp do próbek.

Nasiona spoczywają w stałej temperaturze -18° , przy ograniczonym dostępie tlenu i wilgoci. Nasiona są własnością tych, którzy je tu przywieźli i którzy przystąpili do międzynarodowej umowy. Wewnątrz góry panuje stała temperatura około 4° . Doprowadza się ją do wymaganych -18° , co zapewnia kilkanaście tygodni bezpieczeństwa termicznego nawet po wyłączeniu zasilania. Do głowy przychodzi mi jakieś straszliwe ocieplenie klimatu – wyliczono jednak, że nawet stopienie całej arktycznej czapy nie podniesie poziomu wody do granicy obecnych 130 m nad poziomem morza. Obliczono, że nasiona w tych warunkach przetrwają setki, a najważniejszych zbóż – nawet tysiące lat. Aha, Svalbard jest zdemilitaryzowany...

Samochód z lotniska może dowieźć tylko do metalowych wrót. Do środka nie wchodzi ani turyści, ani dziennikarze. Czasem wpuszczają wielkich celebrytów: Jimmy Cartera, Teda Turnera. Głowy koronowane czasem przywożą depozyty ze swoich krajów. Wzdłuż dachu i nad wejściem znajduje się świetlna artystyczna instalacja symbolizująca polarne światło w trakcie polarnych dni i nocy. Powstała, gdyż prawo norweskie nakazuje (!) wzbogacanie kosztownych budowli finansowanych przez rząd w dzieła artystyczne. Za wejściem zaczyna się stumetrowy tunel, ma ściany wykute w skale. Tunelem dochodzi się do hali, z której są wejścia do trzech innych sal, każda pomieścić może milion próbek, cały bank w przyszłości będzie mógł chronić 4,5 mln próbek. Dziś sądzi się, że na Ziemi istnieje około 1,5 mln różnych próbek nasion roślin o znaczeniu rolniczym. W 2012 roku jeden z syryjskich banków nasion znalazł się w bezpośrednim sąsiedztwie strefy walk. Nasiona przesłano do Svalbardu i dziś stanowią tu największy depozyt.

W San Diego (USA) realizowany jest także od 1976 roku projekt „Zamrożonego ZOO”. Obecnie chronią tam 8400 próbek z ponad 800 gatunków i podgatunków zwierząt: komórek rozrodczych i zarodków. Takich instytucji jest na świecie zaledwie około tuzina, w niektórych przechowuje się jedynie próbki gatunków zagrożonych wymarciem.

Magdalena FIKUS

Bankiem nasion zainteresowałam się przy lekturze książki-reportażu Ilony Wiśniewskiej *Białe* (wyd. Czarne, 2014). Reporterka napisała: *Nie pozostaje nic innego, jak mieć nadzieję, że do nasion dołączono instrukcję obsługi i w obliczu (totalnej) zagłady ocaleje ktoś, kto będzie je umiał na nowo zasiać.*

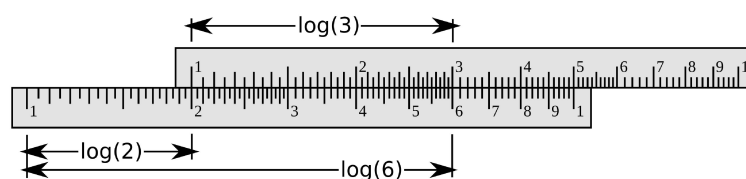
Ten artykuł dedykujemy
Johnowi Napierowi (1550–1617) z okazji
400-lecia odkrycia logarytmu ogłoszonego
w książce *Mirifici Logarithmorum
Canonis Descriptio*

Myśl logarytmicznie!

Maciej M. SYSŁO*, Anna Beata KWIATKOWSKA*

W tym artykule ilustrujemy potęgę logarytmów w projektowaniu efektywnych algorytmów i obliczeń. Myślenie, w tle którego stoi logarytm, ukryty lub widoczny, nazwaliśmy *myśleniem logarytmicznym*. Stanowi ono jedną z podstawowych kompetencji niezbędnych przy efektywnym rozwiązywaniu rzeczywistych problemów informatycznych. Pokazujemy również – co może być ciekawe dla nauczycieli matematyki – jak wprowadzić pojęcie logarytmu, nie odwołując się do matematycznego formalizmu, a posługując się koncepcyjnym modelem redukcji rozmiaru problemu w każdym (lub w co drugim) kroku co najmniej o połowę. Może Cię zdziwić, że ta idea prowadząca do logarytmu występuje w algorytmie Euklidesa, który został opisany niemal 2000 lat przed wynalezieniem logarytmu przez Napiera.

Krótko po wynalezieniu logarytmu Edmund Gunter w 1620 roku utworzył skalę logarytmiczną, a z połączenia dwóch takich skal William Oughtred w 1622 roku zbudował *suwak logarytmiczny*. Oryginalnie, suwaki służyły do wykonywania mnożenia (patrz rys. 1) i dzielenia, inne skale na suwakach służą do podnoszenia do kwadratu



Rys. 1. Sposób obliczania iloczynu $2 \cdot 3 = 6$ za pomocą suwaka logarytmicznego.

i do wyciągania pierwiastków kwadratowych, do obliczania trzecich potęg i pierwiastków trzeciego stopnia, do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych i do wielu innych obliczeń. Jeden z najbogatszych suwaków, Faber Castell 2/83N, zawiera aż 21 skal. Budowano suwaki podłużne, okrągłe i ze skalami nawiniętymi na cylindry, by móc wydłużyć ich długości dla osiągnięcia dokładniejszych wyników – skala na cylindrycznym suwaku Fullera ma długość 12 metrów.

Dodajmy tutaj, że Napier wynalazł również tak zwane *pateczki Napiera*, które służą do mnożenia liczb, nie mają one jednak nic wspólnego z logarytmami. Posłużyły natomiast Wilhelmowi Schickardowi do zbudowania w 1624 roku pierwszego kalkulatora mechanicznego.

Rok 1972 to początek agonii suwaków – zaczęły je wypierać stworzone z ich pomocą kalkulatory elektroniczne. Ponad 40 milionów wcześniej wyprodukowanych suwaków stało się nagle bezużytecznych i obecnie stanowi głównie eksponaty kolekcjonerskie. Dzisiaj jednak nie można wyobrazić sobie zajmowania się informatyką, bez przynajmniej „otarcia” się o logarytmy, co ilustrujemy w tym artykule.

* * *

Funkcje nie są obiektami matematycznymi lubianymi przez uczniów, zwłaszcza gdy są wprowadzane w sposób formalny jako przekształcenia (odzworowania). Wśród nich „najgorszą sławą” cieszy się *logarytm*, bo nie dość, że jest to funkcja, to na dodatek jest to funkcja odwrotna. Jednakże do zrozumienia tego, o czym tutaj piszemy, nie będzie potrzebna znajomość pojęcia logarytmu.

W przeszłości uzasadnieniem dla posługiwania się logarytmami, były właściwości, które legły u podstaw jego wprowadzenia do obliczeń. Logarytm ułatwia wykonywanie złożonych obliczeń dzięki zastąpieniu działań multiplikatywnych (takich jak mnożenie i dzielenie) przez działania addytywne (dodawanie i odejmowanie). Nie tak dawno jeszcze, w szkołach posługiwano się tablicami logarytmicznymi, a na uczelniach i w zakładach pracy przyszli i zawodowi inżynierowie korzystali z suwaków logarytmicznych. Obecnie logarytm pełni rolę tzw. *mental tool* – narzędzia myślowego, sposobu rozumowania.

Rozważmy pięć następujących pytań:

- Ile należy przejrzeć kartek w słowniku, aby znaleźć poszukiwane hasło?
- Ile miejsca w komputerze (a dokładniej ile bitów) zajmuje liczba naturalna?
- Jak szybko można wykonywać potęgowanie dla dużych wykładników potęg?
- Ile trwa obliczanie największego wspólnego dzielnika dwóch liczb za pomocą algorytmu Euklidesa?
- Ile kroków wykonuje algorytm typu *dziel i zwyciężaj* uruchomiony na danych o n elementach?



*Uniwersytet Mikołaja Kopernika
w Toruniu

Wspólną cechą odpowiedzi na te pytania jest to, że nie można ich udzielić, nie dotykając logarytmu, pośrednio lub bezpośrednio, a ponadto wyjaśnienie tych odpowiedzi służy lepszemu zrozumieniu pojęcia logarytmu i jego roli w projektowaniu efektywnych algorytmów.

Znajdź szybko hasło w słowniku, odgadnij ukrytą liczbę. Papierowa książka telefoniczna ma 1000 stron. Jak znaleźć numer telefonu do pana Skarbka, aby przeglądając możliwie najmniejszą liczbę stron w tej książce? Zapewne szybko wpadniesz na pomysł, że najlepszą metodą jest podział pliku stron, na których może być numer telefonu pana Skarbka, na połowę i odrzucenie tej połowy, w której na pewno nie ma informacji o panu Skarbku. Ten podział jest kontynuowany, aż pozostanie tylko jedna strona, na której może się znaleźć numer telefonu pana Skarbka. Jest to tak zwane *poszukiwanie binarne* lub *przez połowienie*.

W dwuosobowej grze w odgadywanie liczby z podanego przedziału, pomyślanej przez jedną z osób, w której druga osoba może zadawać pytania „czy pomyślana liczba jest większa czy mniejsza niż x ” również możemy zastosować podobną strategię. Jeśli każde pytanie będzie dotyczyło wartości x leżącej w połowie aktualnego przedziału, w którym znajduje się poszukiwana liczba, to liczba pytań niezbędna do odgadnięcia pomyślanej liczby będzie równa liczbie połowień oryginalnego przedziału.

Przy okazji warto zwrócić uwagę na następujące kwestie:

- Bardzo ważny jest alfabetyczny porządek nazwisk w książce telefonicznej i liczb w przedziale. Jak ci się wydaje, ile stron należałoby przejrzeć w 1000-stronicowej książce telefonicznej, by znaleźć nazwisko właściciela telefonu o numerze 1234567?
- W przypadku słownika, w którym chcemy znaleźć hasło zaczynające się początkową literą alfabetu, na ogół próbujemy znaleźć poszukiwane hasło na początkowych stronach słownika. Taka metoda nazywa się *interpolacyjnym poszukiwaniem* – na ogół działa szybciej, niż binarne poszukiwanie (więcej na ten temat znajdziesz w książce M.M. Sysło, *Algorytmy*, WSiP 1997; Helion 2014).

Binarna reprezentacja liczb i rozmiar liczby w komputerze. Zapewne wiesz, jak otrzymać *binarną reprezentację* liczby naturalnej n . Taka reprezentacja jest generowana w trakcie podziału liczby n i otrzymywanych ilorazów przez 2. Rozpoczynamy od podzielenia n przez 2 i resztę z tego dzielenia r (0 lub 1) przyjmujemy za najmniej znaczący bit w reprezentacji. Następnie powtarzamy tę procedurę dla ilorazu q tak długo, jak długo iloraz q jest większy od 0. Na przykład, dla $n = 23$ otrzymujemy 10111₂ jak w tabeli 2.

n	q	r
23	11	1
11	5	1
5	2	1
2	1	0
1	0	1

Tabela 2: Tworzenie reprezentacji binarnej

Czy zastanawiałeś się, z ilu bitów składa się binarna reprezentacja dziesiętnej liczby naturalnej n , lub inaczej, jak dużą pamięć w komputerze zajmuje liczba n ?

By odpowiedzieć na to pytanie, założmy, że n zajmuje k bitów i określmy, jaka jest najmniejsza i największa liczba zajmująca dokładnie k bitów. Największa taka liczba składa się z k bitów równych 1, czyli

$$(111 \dots 1)_2 = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^k - 1.$$

Z drugiej strony, najmniejsza liczba reprezentowana dokładnie na k bitach ma tylko jedną jedynekę na najbardziej znaczącej pozycji. Stąd otrzymujemy następujące nierówności:

$$2^{k-1} - 1 < n \leq 2^k - 1.$$

Dodajmy 1 do wszystkich stron tych nierówności i weźmy logarytm \log_2 . Otrzymamy:

$$k - 1 < \log_2(n + 1) \leq k.$$

Ponieważ liczba bitów k jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią), mamy:

$$k = \lceil \log_2(n + 1) \rceil,$$

gdzie $\lceil x \rceil$ jest sufitem liczby x , czyli równa się najmniejszej liczbie naturalnej większej lub równej x . Z tej części rozważań możemy wyciągnąć wniosek, że naturalna liczba n zajmuje w pamięci komputera około $\log_2 n$ bitów – ta liczba jest często przyjmowana za *komputerowy rozmiar liczby* n . Zauważmy, że poszukiwanie binarne w przedziale zawierającym n liczb odpowiada tworzeniu binarnej reprezentacji liczby n , liczba kroków w takim poszukiwaniu wynosi około $\log_2 n$.

Możemy teraz algorytmicznie zdefiniować $\log_2 n$ jako:

Logarytm $\log_2 n$ jest równy liczbie kroków, jakie potrzebujemy by zmniejszyć n do 1, dzieląc sukcesywnie przez 2.

n	$\lceil \log_2 n \rceil$
128	7
1024	10
65 536	16
1 048 576	20
10^{10}	34
10^{50}	167
10^{100}	333
10^{200}	665
10^{300}	997
10^{500}	1661

Tabela 3: Liniowy i logarytmiczny wzrost wartości

O znaczeniu i „potędze” logarytmów i funkcji logarytmicznej w informatyce, a ogólniej – w obliczeniach decyduje szybkość wzrostu jej wartości, nieporównywalnie mała względem szybkości wzrostu jej argumentu, co ilustrujemy w tabeli 3. A zatem dla liczb, które mają około stu cyfr, wartość logarytmu wynosi tylko około 333.

Szybkie podnoszenie do potęgi. Podnoszenie do potęgi jest bardzo prostym, szkolnym zadaniem. Na przykład, aby obliczyć 3^4 , wykonujemy trzy mnożenia $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. A zatem w ogólności, aby w ten sposób obliczyć wartość potęgi x^n , należy wykonać $n - 1$ mnożeń: o jedno mniej niż wynosi wykładnik potęgi. Czy ten „szkolny” algorytm jest na tyle szybki, by obliczyć na przykład wartość potęgi:

$$x^{12345678912345678912345678912345}$$

która może pojawić się przy szyfrowaniu metodą RSA informacji przesyłanych w Internecie?

Oszacujmy, ile czasu będzie trwało obliczanie tej potęgi, jeśli zastosujemy szkolny algorytm, czyli ile czasu zabierze wykonanie 12 345 678 912 345 678 912 345 678 912 344 mnożeń. Przypuśćmy, że dysponujemy superkomputerem, który działa z szybkością jednego petafropa, zatem wykonuje około 10^{15} operacji na sekundę. Obliczenie powyższej potęgi będzie trwało

$$12\,345\,678\,912\,345\,678\,912\,345\,678\,912\,344/10^{15} \text{ s} \approx 391\,478\,910 \text{ lat} \approx 4 \cdot 10^8 \text{ lat.}$$

Jeśli taki algorytm byłby stosowany do szyfrowania naszej poczty w Internecie, to nigdy nie otrzymalibyśmy żadnego listu. Dodajmy, że w praktycznych sytuacjach konieczne jest obliczanie potęg o wykładnikach, które mają kilkaset cyfr.

Postaramy się teraz tak wykonywać potęgowanie, aby w każdym kroku wykładnik zmniejszył się około o połowę. W tym celu zauważmy, że jeżeli n jest liczbą parzystą, czyli na przykład $n = 2k$, to $x^{2k} = (x^k)^2$, a gdy n jest liczbą nieparzystą, czyli $n = 2k + 1$, to $x^{2k+1} = (x^{2k}) \cdot x$. Na przykład, by obliczyć wartość x^{23} , postępujemy następująco:

$$\begin{aligned} x^{23} &= (x^{22}) \cdot x = ((x^{11})^2) \cdot x = (((x^5)^2) \cdot x) \cdot x = (((x^5)^2) \cdot x)^2 \cdot x = \\ &= (((((x^4) \cdot x)^2) \cdot x)^2) \cdot x = ((((((x^2)^2) \cdot x)^2) \cdot x)^2) \cdot x. \end{aligned}$$

Zatem wartość potęgi x^{23} może być obliczona przy użyciu 7 mnożeń (podnoszenie do kwadratu to jedno mnożenie).

Oszacujmy, ile mnożeń jest wykonywanych w takim algorytmie dla dowolnego n . W tym celu porównajmy binarną reprezentację liczby $n = 23 = 10111_2$ z kolejnością wykonywania mnożeń w tym algorytmie, patrząc od prawej do lewej. Nietrudno się przekonać, że z wyjątkiem najbardziej znaczącej pozycji w reprezentacji binarnej wykładnika n , każdemu bitowi o wartości 1 odpowiada mnożenie przez x , a każdej pozycji odpowiada podniesienie do kwadratu. A zatem, liczba mnożeń potrzebnych do obliczenia wartości x^n za pomocą powyższego algorytmu jest równa liczbie pozycji w binarnej reprezentacji liczby n minus 1 plus liczba bitów równych 1 w tej reprezentacji także minus 1. Ponieważ, jak wiemy, długość reprezentacji binarnej liczby n wynosi około $\log_2 n$, liczba mnożeń potrzebnych do obliczenia wartości x^n wynosi około $2 \log_2 n$.

Sprawdźmy, jaki to da efekt, gdy $n = 12\,345\,678\,912\,345\,678\,912\,345\,678\,912\,345$. W tym przypadku $2 \log_2 n < 207$. Zatem zamiast czekać $4 \cdot 10^8$ lat, wynik możemy otrzymać wykonując nie więcej niż 207 mnożeń! To szokujące osiągnięcie naszego algorytmu! Na podstawie tabeli 3 widać, że obliczenie wartości x^n dla n z setkami cyfr wymaga wykonania kilka tysięcy mnożeń, co na zwykłym komputerze trwa ułamek sekundy.

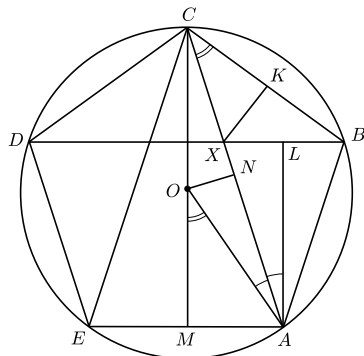
Przedstawiony algorytm można zapisać w postaci rekurencyjnej:

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, \\ (x^{n/2})^2 & \text{dla parzystego } n, \\ (x^{n-1}) \cdot x & \text{dla nieparzystego } n. \end{cases}$$

Algorytmy potęgowania są dobitną ilustracją słów Ralpa Gomory’ego, naukowego szefa firmy IBM: *Najlepszym sposobem przyspieszania pracy komputerów jest obarczanie ich mniejszą liczbą działań.* Czyli prawdziwe przyspieszanie obliczeń osiągamy dzięki efektywnym algorytmom, a nie szybszym komputerom, a w tym konkretnym przypadku, dzięki zastąpieniu algorytmu liniowego przez algorytm o złożoności logarytmicznej.



Rozwiązanie zadania M 1441. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku (K, L, M, N to środki odcinków).



Niech a oznacza długość boku pięciokąta oraz d – długość przekątnej. Z podobieństwa trójkątów ABC i BXC mamy $a/d = (d - a)/a$, skąd $ad = d^2 - a^2$. Z podobieństwa trójkątów ANO i ALX otrzymujemy

$$(*) \quad \frac{\sqrt{1 - (d/2)^2}}{1} = \frac{(d - a)/2}{a},$$

skąd $a^2(4 - d^2) = (d - a)^2 = d^2 + a^2 - 2ad = d^2 + a^2 - 2(d^2 - a^2)$. W takim razie $(ad)^2 = a^2 + d^2$. Wreszcie z podobieństwa trójkątów AMO i XKC i (*) mamy

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (a/2)^2}} = \frac{d - a}{a/2} = 4\sqrt{1 - (d/2)^2},$$

skąd $1 = 16 - 4a^2 - 4d^2 + a^2d^2 = 16 - 3a^2d^2$, więc $(ad)^2 = 5$.

Algorytm Euklidesa a metoda połowienia. Okazuje się, że Euklides był bliski wynalezienia logarytmu, niemal 2000 lat przed tym, jak zrobił to John Napier. Algorytm Euklidesa jest jednym z najstarszych znanych algorytmów. Służy do znajdowania największego wspólnego dzielnika (w skrócie NWD) dwóch liczb. W tabeli 4 są zamieszczone wyniki obliczeń tego algorytmu w trakcie znajdowania NWD(34, 21). W ogólności, algorytm Euklidesa generuje następujący ciąg reszt (trzecia kolumna w tabeli 4):

$$r_{-1} = n, \quad r_0 = m, \quad r_1, \quad r_2, \quad \dots, \quad r_k = 0,$$

Te reszty są generowane zgodnie z następującym ciągiem równości:

$$\begin{aligned} r_{-1} &= q_1 r_0 + r_1, & \text{gdzie } 0 \leq r_1 < r_0, \\ r_0 &= q_2 r_1 + r_2, & \text{gdzie } 0 \leq r_2 < r_1, \\ & \vdots \\ r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k, & \text{gdzie } 0 \leq r_k < r_{k-1}, \end{aligned}$$

i ostatecznie $\text{NWD}(n, m) = r_{k-1}$. Pierwsza równość odpowiada pierwszemu wierszowi w tabeli 4, a ostatnia – ostatniemu wierszowi. Ilorazy q_i i reszty r_i w tych równościach spełniają równości:

$$q_i = r_{i-2} \text{ div } r_{i-1}, \quad r_i = r_{i-2} \text{ mod } r_{i-1}.$$

n	m	r_i
34	21	13
21	13	8
13	8	5
8	5	3
5	3	2
3	2	1
2	1	0

Tabela 4. Obliczanie wartości NWD(34, 21)

Powstaje teraz pytanie, ile kroków wykonuje algorytm Euklidesa, by obliczyć wartość $\text{NWD}(n, m)$. Pewna sugestia może wyniknąć z porównania liczb w pierwszej i trzeciej kolumnie w tabeli 4. Można zauważyć, że w każdym wierszu liczba w trzeciej kolumnie jest co najmniej dwa razy mniejsza niż liczba w pierwszej kolumnie, a zatem reszta r_i w równaniu $r_i = r_{i-2} \text{ mod } r_{i-1}$, jest co najmniej dwa razy mniejsza niż r_{i-2} .

Uzasadnienie tego faktu jest bardzo proste, jeśli posłużymy się rozumowaniem geometrycznym (rys. 5). A zatem, chcemy pokazać, że reszta r z dzielenia n przez m nie jest większa niż $n/2$. Rozważmy dwa przypadki:

- (a) $m \leq n/2$ – ponieważ reszta nie jest większa niż m , więc wynosi co najwyżej $n/2$;
- (b) $m > n/2$ – reszta wynosi $n - m$, a $n - m$ nie jest większe niż $n/2$.

A zatem, w ciągu reszt generowanym w algorytmie Euklidesa każda reszta jest co najmniej dwa razy mniejsza niż reszta, która występuje w tym ciągu o dwie pozycje wcześniej. Przypomina to ciąg liczb generowany przez algorytm poszukiwania binarnego, z wyjątkiem tego, że generowany ciąg może być w najgorszym przypadku dwa razy dłuższy. Ważnym wnioskiem jest więc stwierdzenie, że:

Algorytm Euklidesa oblicza NWD(n, m) dla $n \geq m$ w co najwyżej $2 \log_2 n$ krokach.

Pewnym wyzwaniem jest pytanie dla jakich liczb n i m algorytm Euklidesa wykonuje największą możliwą liczbę kroków (dwie takie liczby zostały użyte w naszym przykładzie). Odpowiedź może być zaskakująca.

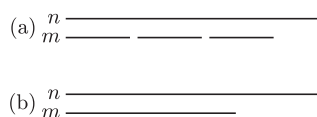
Liczby Fibonacciego. Tendencja do zastępowania algorytmów o złożoności liniowej przez algorytmy o złożoności logarytmicznej, zilustrowana algorytmem szybkiego potęgowaniem, występuje w wielu innych problemach algorytmicznych, np. przy wyznaczaniu wartości liczb Fibonacciego. Klasyczna zależność rekurencyjna, definiująca liczby Fibonacciego, może być wykorzystana do podania algorytmu liniowego, który dodatkowo unika wielokrotnych, takich samych odwołań rekurencyjnych.

Aby otrzymać w tym przypadku algorytm o złożoności logarytmicznej, należy posłużyć się układem dwóch zależności rekurencyjnych, w których indeksy liczb Fibonacciego po prawej stronie są zredukowane o około połowę. I ponownie, jak powyżej, by uniknąć wielokrotnych takich samych wywołań rekurencyjnych, należy rekurencję zrealizować jako iterację.

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{2n-1} = F_{n-1}^2 + F_n^2, \quad F_{2n} = 2F_{n-1}F_n + F_n^2.$$

Więcej na ten temat można znaleźć w książce M.M. Sysło, *Piramidy, szyszki i inne konstrukcje algorytmiczne*, WSiP 1998; Helion 2015.

Metody podziału i ograniczeń. Wszystkie algorytmy zaprezentowane w tej pracy bazują na idei metody *dziel i zwyciężaj*. W informatyce istnieje bardzo wiele algorytmów będących realizacją tej idei. We wszystkich przypadkach to podejście algorytmiczne wprowadza do ogólnego wyrażenia na złożoność obliczeniową rozwiązywanego problemu jedynie logarytmiczny czynnik. Tak jest na przykład w przypadku sortowania przez binarne umieszczanie czy sortowanie przez scalanie.

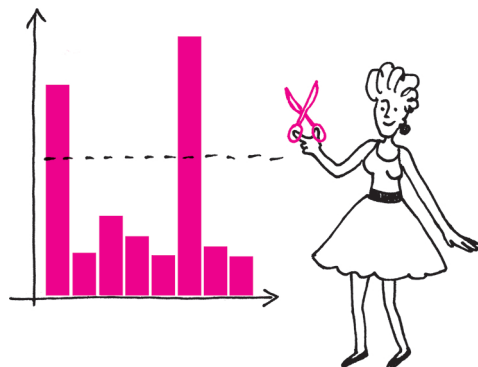


Rys. 5. Geometryczne uzasadnienie faktu, że reszta z dzielenia n przez m jest nie większa niż $n/2$.



W krainie średnich

Przemysław GRZEGORZEWSKI*



Zdarza się czasami, że kiedy po przeprowadzeniu doświadczenia analizujemy dane, niektóre liczby wyglądają dziwnie – to znaczy inaczej, niż byśmy się spodziewali. W statystyce takie obserwacje, które są zdecydowanie większe lub zdecydowanie mniejsze od ogółu obserwacji nazywa się *obserwacjami odstającymi* (ang. *outliers*). Bardzo często pojawiają się one w próbie w wyniku błędów popełnionych w trakcie dokonywania obserwacji lub podczas późniejszego przetwarzania danych, na przykład przy wpisywaniu danych (przykładowo, wpisanie liczby 98 bądź 0,98 zamiast 9,8). Obecność takich błędnych wartości w próbie może wpływać niekorzystnie na wyniki obliczeń. W tym miejscu nasuwa się pytanie, czy nie należałoby usuwać ze zbioru danych „podejrzanych” wyników. Jeśli jesteśmy przekonani, że mamy faktycznie do czynienia z błędem, możemy to uczynić. Jednakże nie należy tego czynić pochopnie, bowiem obserwacje odstające nie zawsze są efektami błędów. Czasem są to wartości jak najbardziej prawidłowe, tyle że pojawiające się w danym doświadczeniu stosunkowo rzadko.

Mamy, na szczęście, do dyspozycji kilka prostych narzędzi statystycznych pozwalających poradzić sobie ze zniekształcaniem wyników pomiarów przez obserwacje odstające. Dla n -elementowego ciągu obserwacji x_1, \dots, x_n możemy obliczyć *średnią ważoną*, zdefiniowaną wzorem

$$(1) \quad \bar{x}_w = \sum_{i=1}^n w_i x_i,$$

gdzie ciąg nieujemnych wag w_i ($i = 1, \dots, n$) spełnia $w_1 + \dots + w_n = 1$. Średnie ważone mogą różnić się nie tylko wartościami wag, ale i sposobem, w jaki wagi przypisywane są obserwacjom. W tradycyjnej średniej ważonej (1) i -ta waga w_i mnożona jest przez i -tą obserwację x_i , bez względu na to, jaką wartość przyjmuje x_i . W wielu sytuacjach wielce użyteczne bywają jednak takie średnie, dla których przydział wag jest uzależniony od uporządkowania obserwacji.

Uporządkowaną średnią ważoną, czyli w skrócie OWA (ang. *Ordered Weighted Average*), nazywamy średnią, w której i -ta waga w_i mnożona jest przez i -tą co do wielkości obserwację $x_{(i)}$, co możemy zapisać jako

$$(2) \quad \text{OWA}(x, w) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)}.$$

W statystyce wyrażenie (2) bywa nazywane L-statystyką. Szczególnym przypadkiem OWA jest tzw. *średnia ucięta*, której krańcowe pod względem wielkości obserwacje otrzymują wagę równą zero. Średnią uciętą definiujemy więc jako

$$(3) \quad \bar{x}_{t,\alpha} = \frac{1}{n - 2\lfloor n\alpha \rfloor} \sum_{i=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{n - \lfloor n\alpha \rfloor} w_i x_{(i)},$$

gdzie $\alpha \geq 0$ jest tzw. wskaźnikiem ucięcia. Aby wzór (3) miał sens, wskaźnik ucięcia nie może być zbyt duży, a konkretnie, musi spełniać ograniczenie $\lfloor n\alpha \rfloor < n/2$. Indeks t występujący w symbolu średniej uciętej (2) pochodzi od angielskiej nazwy tej średniej, *trimmed mean*. To właśnie średnią uciętą stosuje się w praktyce po to, by wyeliminować wpływ ekstremalnych obserwacji.

W tym kontekście średnia ucięta może być postrzegana jako narzędzie pozwalające wyznaczyć przeciętną wartość badanej cechy w taki sposób, by nie tracąc z oczu obserwacji odstających, ignorować ich wpływ na dokonywane obliczenia. O średniej uciętej mówi się, iż jest ona odporna

*Wydział Matematyki
i Nauk Informatycznych,
Politechnika Warszawska



Rozwiązanie zadania F 869.

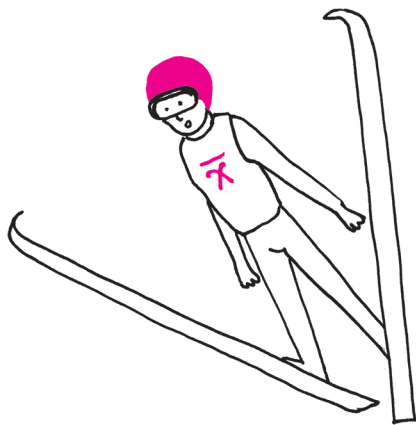
Zadanie najwygodniej rozwiązywać w układzie związanym z obracającą się tarczą. Siła tarcia równa mgf , gdzie m jest masą pracownika, a g przyspieszeniem ziemskim, musi być przez cały czas ruchu nie mniejsza od wartości wypadkowej sumy sił: odśrodkowej i Coriolisa. Siła odśrodkowa i siła Coriolisa są do siebie prostopadłe i co do wartości odpowiednio równe $m\omega^2 r$ oraz $2m\omega v$. Prędkość pracownika (zgodna z warunkami zadania) to $v = R\omega/\pi$.

Stąd warunek powodzenia zamiaru pracownika to:

$$g^2 f^2 \geq \omega^4 \left(r^2 + 4 \frac{R^2}{\pi^2} \right)$$

dla każdej odległości r pracownika od środka tarczy. Ostatecznie:

$$g^2 f^2 \geq \omega^4 R^2 \left(1 + \frac{4}{\pi^2} \right).$$



na obecność obserwacji odstających w próbie. Tej własności nie ma natomiast zwykła średnia arytmetyczna, która przykłada taką samą wagę do wszystkich obserwacji, w tym także odstających.

Ilustracją stosowania średniej uciętej w życiu codziennym może być sposób oceny skoczków narciarskich. Jak wiadomo, skok oceniany jest przez pięciu sędziów, przy czym faktyczna ocena skoku dokonywana jest na podstawie trzech ocen pozostałych po wyeliminowaniu dwóch ocen ekstremalnych – minimalnej i maksymalnej. Celem takiego postępowania jest uniknięcie sytuacji, w której sędzia miałby faworyzować skoczka wystawiając mu notę dużo wyższą niż pozostali sędziowie, bądź też chciałby ocenić skok dużo gorzej niż inni jurorzy.

Dopuszczając maksymalny stopień ucięcia otrzymujemy średnią uciętą postaci

$$(4) \quad \text{med} = \begin{cases} x_{((n+1)/2)} & \text{dla } n \text{ nieparzystego,} \\ \frac{1}{2}(x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}) & \text{dla } n \text{ parzystego.} \end{cases}$$

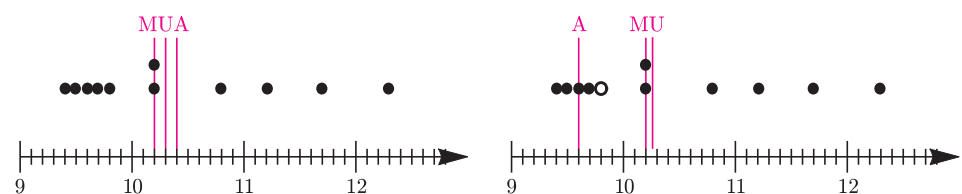
Ten szczególny przypadek średniej uciętej nazywamy *medianą*.

Mediana w sposób oczywisty jest odporna na wartość obserwacji odstających, bowiem, jak widać ze wzoru (4), bazuje wyłącznie na obserwacjach położonych w samym środku uporządkowanej niemalejąco próbki. W pewnych sytuacjach bywa to zaletą, ale trzeba pamiętać, że stosując zbyt duże ucięcie pozbywamy się nie tylko obserwacji odstających, ale i wielu cennych informacji zawartych w próbie. Tak więc w przypadku średniej uciętej, podobnie jak w życiu codziennym, trzeba postępować rozważnie i nie popadać w skrajności.

Jeszcze innym rodzajem średniej, używanej w statystyce i odpornej na obecność obserwacji odstających, jest tzw. *średnia winsorowska*.

Wyznacza się ją w sposób podobny do średniej uciętej, tyle że zamiast eliminowania krańcowych obserwacji z uporządkowanego ciągu, zastępuje się je odpowiednio dobranymi wartościami. Dokładniej, po uporządkowaniu zbioru obserwacji w sposób niemalejący, ucinamy ustaloną liczbę krańcowych obserwacji (od dołu i od góry), a następnie dopisujemy tyle obserwacji, ile łącznie ucieliśmy, przy czym połowa spośród dopisanych obserwacji ma być równa pierwszej, a połowa ostatniej obserwacji z podzbioru, który pozostał po ucięciu. W przypadku średniej winsorowskiej, w przeciwieństwie do średniej uciętej, mamy do czynienia nie tyle z eliminacją obserwacji odstających, co raczej z ograniczeniem ich wpływu na wyznaczaną wartość przeciętną.

Jak widać, pojęcie wartości przeciętnej, czy też średniej, mimo iż tak intuicyjne, niekoniecznie musi prowadzić do średniej arytmetycznej. Jakkolwiek jest ona powszechnie i często z powodzeniem stosowana w praktyce, zdarzają się i takie sytuacje, w których jej użycie może przynieść niepożądane efekty. Pamiętajmy, że w wielu sytuacjach dobór właściwej średniej może się okazać decydujący dla poprawności uzyskiwanych wniosków.



Przykładowe 11 wartości wyników pomiarów oraz ich średnia arytmetyczna (A), mediana (M) i średnia ucięta z parametrem ucięcia $\alpha = 0,1$ (U). Zestaw danych na rysunku po prawej stronie różni się od tego po lewej tym, że wartość pomiaru zaznaczonego pustym kółkiem została (przypadkowo?) zmniejszona dziesięciokrotnie.

Polszczyzna z włoszczyzną

Andreas BARTZ

Alfametyk to formalny rachunek na literach, dla którego można znaleźć taką odpowiedniość między literami a cyframi, że – po podstawieniu – otrzymamy poprawny rachunek arytmetyczny. Alfametyk jest podwójnie prawdziwy, gdy początkowy napis był zdaniem prawdziwym.

Więcej o alfametykach można znaleźć w *Delcie* 8/2011.

Pierwsze alfametyki ukazały się drukiem zaledwie 11 lat po pojawieniu się w *New York World* (21.12.1913) pierwszej krzyżówki i na wiele lat przed erą komputerów. Miały przeważnie postać pisemnego dodawania pewnej niewielkiej liczby słów (alfametyki addytywne). Nic dziwnego – musiały być rozwiązywalne bez pomocy obliczeniowych środków technicznych.

Współcześnie alfametyk pojmuje się nieco ogólniej jako relację równości, dającą się przedstawić w postaci $W = 0$, gdzie W jest wielomianem słów. Stopniem alfametyku jest stopień tegoż wielomianu.

Coraz częściej też publikowane są zadania niezwykle efektowne i niesłychanie trudne, prezentujące ekstremalne właściwości połączenia języka naturalnego i arytmetyki. Są one często adresowane nie do specjalistów łamania głowy, lecz do mistrzów sztuki programowania.

Polskie czasopisma publikują niemal wyłącznie alfametyki w systemie dziesiętnym i na ogół stopnia pierwszego. A szkoda. Polszczyzna daje niekiedy szanse unikalne lub rzadko spotykane w innych językach, szanse, których inne języki mogą nam pozazdrościć. Jako przykład może posłużyć proporcja z porami roku w systemie trzynastkowym:

JESIŃLATOWNZM
534A76B0829C1

$$\frac{\text{WIOSNA}}{\text{LATO}} = \frac{\text{JESIEŃ}}{\text{ZIMA}}$$

Wyprawa w systemy pozycyjne o wyższych podstawach nie jest pozbawiona niebezpieczeństwa konfrontacji z poważnymi błędami – na przykład

$$(\text{BŁĄD})^2 = \text{WIELBŁĄD}$$

ma inne rozwiązanie w systemie o podstawie 14, a inne w systemie o podstawie 15.

WIELBŁĄD
C43BD1A8

WIELBŁĄD
C7BEDA86

Ograniczmy się w dalszych rozważaniach do alfametyków podwójnie prawdziwych. W polszczyźnie możliwości ich konstruowania są znacznie gorsze niż w wielu innych językach. Do takiego wniosku nietrudno dojść, przyglądając się statystyce liczebników głównych z zakresu od 1 do 10 w dziesięciu wybranych językach europejskich.

Nasza mowa ojczysta prowadzi, jak widać (patrz tabelka na marginesie), suwerennie w obu kategoriach. Jak nietrudno się domyślić, im większe m i n , tym trudniej o efektowne alfametyki. Gdyby uwzględnić nasze kilometrowej długości liczebniki główne z grup *naście, *dzieści i *dziesiąt, to rezultaty porównania byłyby dla polszczyzny katastrofalne. Inaczej ma się sprawa dla przykładu z językiem włoskim. Choć włoszczyzna kojarzy się najczęściej z zupą, świetnie nadaje się także do konstruowania alfametyków podwójnie prawdziwych. Aby nie być gołosłownym – kilka przykładów, które podobnie jak wszystkie inne alfametyki w tym artykule, są mego autorstwa, nie były dotąd publikowane i mają dokładnie jedno rozwiązanie.

n	m	język
17	4,3	niemiecki
14	3,9	angielski
16	3,2	szwedzki
12	2,9	duński
16	4,2	grecki
19	5,4	polski
18	4,7	rosyjski
13	4,3	włoski
14	4,3	hiszpański
16	3,9	francuski

n to liczba różnych liter występujących w liczebnikach,
 m to średnia długość liczebnika.

Dwa „niepowtarzalne” (każdy liczebnik występuje tylko jednokrotnie):

DUECNTOSVI
2486359710

$$\text{DUECENTO} + \text{CENTOOTTO} + \text{CENTOSETTE} + \text{CENTODUE} + \text{VENTINOVE} + \text{VENTOTTO} + \text{VENTIDUE} + \text{VENTUNO} + \text{VENTI} + \text{DICIOOTTO} + \text{DODICI} + \text{NOVE} + \text{OTTO} + \text{SETTE} + \text{SEI} + \text{DUE} + \text{UNO} = \text{SETTECENTO}$$

$$(200 + 108 + 107 + 102 + 29 + 28 + 22 + 21 + 20 + 18 + 12 + 9 + 8 + 7 + 6 + 2 + 1 = 700)$$

SEICNTODUV
9605213847

$$\text{SEICENTO} + \text{CENTODUE} + \text{CENTO} + \text{VENTISEI} + \text{VENTUNO} + \text{SEDICI} + \text{UNDICI} + \text{OTTO} + \text{SETTE} + \text{SEI} + \text{DUE} + \text{UNO} = \text{NOVECENTO}$$

$$(600 + 102 + 100 + 26 + 21 + 16 + 11 + 8 + 7 + 6 + 2 + 1 = 900)$$

Duet:

UNODETAVIC
9267130485

$$2 \times \text{DODICI} + \text{UNDICI} + 2 \times \text{DIECI} + \text{NOVE} + \text{OTTO} + 5 \times \text{DUE} + 8 \times \text{UNO} = \text{NOVANTA}$$
$$\text{DICIoTTO} + 6 \times \text{DIECI} + 4 \times \text{OTTO} + 12 \times \text{DUE} + 66 \times \text{UNO} = \text{DUECENTO}$$

$$(2 \cdot 12 + 11 + 2 \cdot 10 + 9 + 8 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 90)$$
$$18 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 8 + 12 \cdot 2 + 66 \cdot 1 = 200)$$

Trio:

$$\text{OTTOCENTO} + \text{VENTOTTO} + \text{VENTUNO} + 2 \times \text{DODICI} + 2 \times \text{NOVE} + \text{TRE} + 3 \times \text{DUE} = \text{NOVECENTO}$$
$$\text{TRENTUNO} + 11 \times \text{NOVE} + 17 \times \text{OTTO} + 7 \times \text{TRE} + 13 \times \text{UNO} = \text{TRECENTO}$$
$$\text{VENTI} + 3 \times \text{NOVE} + 4 \times \text{OTTO} + 3 \times \text{TRE} + 2 \times \text{DUE} + 8 \times \text{UNO} = \text{CENTO}$$

UNODETRVIC
7213540698

$$(800 + 28 + 21 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 9 + 3 + 3 \cdot 2 = 900)$$
$$31 + 11 \cdot 9 + 17 \cdot 8 + 7 \cdot 3 + 13 \cdot 1 = 300$$
$$20 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 100)$$

Dwa tautogramowe (wszystkie słowa zaczynają się taką samą literą):

DICOTEUN
53901764

$$\text{DICIoTTO} + 5 \times \text{DODICI} + 6 \times \text{DIECI} + 31 \times \text{DUE} = \text{DUECENTO}$$

$$(18 + 5 \cdot 12 + 6 \cdot 10 + 31 \cdot 2 = 200)$$

DICOTEUN
80934127

$$\text{DICIoTTO} + \text{DODICI} + 5 \times \text{DIECI} + 60 \times \text{DUE} = \text{DUECENTO}$$

$$(18 + 12 + 5 \cdot 10 + 60 \cdot 2 = 200)$$

* * *

Skonstruowanie polskiego układu alfametyków w systemie dziesiętnym to marzenie ściętej głowy. Marzenie to oraz chęć „zatrudnienia” polskich liczebników dłuższych i przez to mniej przydatnych do budowania alfametyków skłoniła mnie do prób konstruowania przykładów bardziej wyrafinowanych:

- niekoniecznie liniowych,
- o dowolnych podstawach.

JEDEN
JEDEN
JEDEN
JEDEN
JEDEN
+ JEDEN

SZEŚĆ

$$(\text{DWA})^2 = \text{CZTERY}$$

w systemie o podstawie 9

DWACZTERY
615420837

$$\text{DWA} \times (\text{DWA} + \text{JEDEN}) + \text{DWA} + \text{JEDEN} = \text{DZIEWIĘĆ}$$

o podstawie 11

DWAJENZIĘĆ
496A718235

w systemie o podstawie 8

ĆDEJNSŚZ
24017653

$$(\text{PIĘĆ})^2 = \text{DZIESIĘĆ} + \text{DZIEWIĘĆ} + \text{SZEŚĆ}$$

w systemie o podstawie 11

DZIESEĆWPŚ
438716059A

(w systemie dziesiętnym trzy rozwiązania!)

$$(\text{DWA})^3 + \text{DWA} = \text{DZIESIĘĆ}$$

w systemie o podstawie 11

DWAZIESEĆ
32A187409

JEDEN
JEDEN
JEDEN
DWA
+ DWA

SIEDEM

$$(\text{TRZY})^2 = \text{DZIEWIĘĆ}$$

w systemie o podstawie 13

TRZYDIEWIĘĆ
8C196A52B3

$$\text{TRZY} \times \text{CZTERY} + \text{TRZY} - \text{CZTERY} = \text{JEDENAŚCIE}$$

w systemie o podstawie 15

CZTERYJDNAŚI
C1B4789053A2

w systemie o podstawie 9

JEDNWAŚIM
784013256

$$(\text{TRZY})^2 + (\text{DWA} + \text{DWA})^2 = (\text{PIĘĆ})^2$$

w systemie o podstawie 12

TRZYDWAPIĘĆ
7BA39028165

$$\text{TRZY} \times \text{CZTERY} = \text{DWANAŚCIE}$$

w systemie o podstawie 16

CZTERYDWAŚI
18209C3EA6D5

$$(\text{PIĘĆ} - \text{TRZY})^2 = \text{CZTERY}$$

w systemie o podstawie 11

TRZYPIĘĆCE
37492A8156

$$\text{TRZY} \times \text{CZTERY} + \text{TRZY} = \text{PIĘTNAŚCIE}$$

w systemie o podstawie 16

CZTERYPIĘNAŚ
CFB281960D47

$$\text{TRZY} \times \text{CZTERY} + \text{CZTERY} = \text{SZESNAŚCIE}$$

w systemie o podstawie 13

$$\begin{array}{r} \text{CZTERYSNAŚI} \\ 72509C3468A \end{array}$$

$$\text{TRZY} \times \text{CZTERY} + \text{CZTERY} = \text{SZESNAŚCIE}$$

w systemie o podstawie 16

$$\begin{array}{r} \text{CZTERYSNAŚI} \\ 9754DB320A1 \end{array}$$

$$\text{TRZYDZIEŚCI} + \text{TRZYSTA} = \text{TRZYSTATRZY} + 5 \times \text{TRZY} + 3 \times \text{CZTERY}$$

w systemie o podstawie 11

$$\begin{array}{r} \text{TRZYDZIEŚCSA} \\ 261790345A8 \end{array}$$

$$(\text{TRZY})^2 + \text{TRZY} = (\text{CZTERY} + \text{DWA}) \times \text{DWA}$$

w systemie o podstawie 10

$$\begin{array}{r} \text{CZTERYDWA*} \\ 3690712584 \end{array}$$

Przy podstawach większych od 10 istnieją nawet układy polskich alfametyków podwójnie prawdziwych:

$$\text{TRZY} + \text{DWA} = \text{PIĘĆ}$$

$$\text{DWA} \times \text{DWA} + \text{DWA} = \text{SZEŚĆ}$$

w systemie szesnastkowym

$$\begin{array}{r} \text{TRZYDWA PIĘĆSEŚ} \\ 9ED318FA0624BC \end{array}$$

$$\text{TRZY} + \text{DWA} = \text{PIĘĆ}$$

$$\text{JEDEN} + \text{JEDEN} + \text{JEDEN} + \text{JEDEN} = \text{CZTERY}$$

w systemie szesnastkowym

$$\begin{array}{r} \text{TRZYDWA PIĘĆEJNC} \\ B928E0DC735A461 \end{array}$$

$$4 \times \text{JEDEN} + \text{DWA} = \text{SZEŚĆ}$$

$$6 \times \text{JEDEN} + \text{DWA} = \text{OSIEM}$$

w systemie szesnastkowym

$$\begin{array}{r} \text{JEDN WASZŚĆOIM} \\ 18ED3C647095A \end{array}$$

$$2 \times \text{JEDEN} + 2 \times \text{DWA} = \text{SZEŚĆ}$$

$$4 \times \text{JEDEN} + 2 \times \text{DWA} = \text{OSIEM}$$

w systemie czternastkowym

$$\begin{array}{r} \text{JEDN WASZŚĆOIM} \\ 13B48D29A65C0 \end{array}$$

Więcej podobnych problemów można znaleźć w *Delcie* 8/2011.

Zbiór sam w sobie

Piotr CHRZAŚTOWSKI-WACHTEL*

Wiadomo, że elementami zbiorów mogą być inne zbiory. Ale czy zbiór może sam być swoim elementem? Czy może się zdarzyć, że $A \in A$? Można spróbować wyobrazić sobie podjęcie próby zdefiniowania czegoś w rodzaju granicy ciągu jednoelementowych zbiorów $A, \{A\}, \{\{A\}\}, \dots$, ale w ramach teorii zbiorów trudno sobie wyobrazić, jak można by, na przykład, zinterpretować napis zaczynający się i kończący nieskończoną liczbą kropek $A = \dots \{\{\dots \{\{A\}\} \dots\}\} \dots$ wyrażający próbę zapisania takiego zbioru, w dodatku jednoelementowego! Porzućmy ten trop.

Czy jest w ogóle możliwe, żeby było $A = \{A, \dots\}$, czyli żeby zbiór A miał jako element siebie i oprócz tego być może jeszcze coś? Nazwijmy zbiory, które spełniają taki warunek *samowsobnymi*. Istnienie takiego fenomenu, jak zbiór mający samego siebie wśród swoich elementów doprowadziło do słynnego paradoksalnego odkrycia Georga Cantora, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów. Bo gdybyśmy założyli jego istnienie, to dałoby się go podzielić na dwa podzbiory: zbiorów takich, które należą do siebie, czyli są samowsobne, i pozostałych, czyli w miarę normalnych. Zatem istniałby zbiór \mathcal{A} złożony z wszystkich zbiorów normalnych, a próba odpowiedzi na pytanie, czy taki zbiór \mathcal{A} należy do siebie, czy też nie, prowadzi do nieuchronnej sprzeczności. Przyjęcie założenia, że $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$, oznacza, że $\mathcal{A} \notin \mathcal{A}$, bo przecież \mathcal{A} składa się właśnie z takich zbiorów, które do siebie nie należą. Zaś przyjęcie założenia, że $\mathcal{A} \notin \mathcal{A}$, oznacza, że $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$, bo przecież w \mathcal{A} są wszystkie zbiory normalne. Otrzymana sprzeczność dowodzi tego, że przyjęte założenie o istnieniu zbioru wszystkich zbiorów jest fałszywe, więc taki zbiór nie może istnieć.

Zauważmy, że w powyższym rozumowaniu w ogóle nie jest istotne, czy istnieje choć jeden taki zbiór samowsobny. Mogłoby się wydawać, że zbiór samowsobny

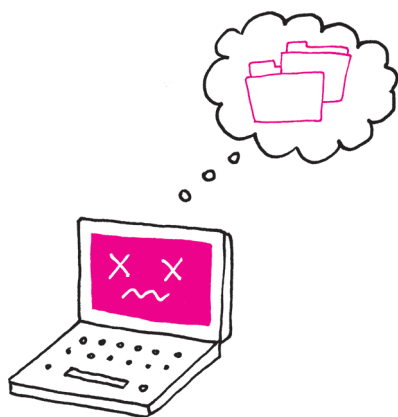
*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Na ogół, aksjomatyzując zbiory, eliminuje się zbiory samowsobne.

jest jakimś dziwactwem i nikt poważny takiego zbioru zapewne nigdy nie widział. Nic bardziej mylnego! Ja sam nie tylko taki zbiór widziałem, ale go kiedyś wręcz zrobiłem. No, może przesadziłem, nie sam zbiór, ale jego fizyczny model, niemniej jednak mogłem się na własne oczy przekonać o jego istnieniu i zobaczyć, jak funkcjonuje.

Jestem przekonany, że wielu Czytelników po przeczytaniu poniższej recepty zechce sobie przetestować i powtórzyć mój eksperyment sprzed lat. Wystarczy do tego mieć komputer i system operacyjny, który organizuje pliki w katalogi. No właśnie: co to są katalogi? Wszyscy wiedzą, że to są kolekcje plików i innych katalogów. Innych? A czemu innych? Co by się stało, gdyby w katalogu o nazwie, powiedzmy, A umieścić jako podkatalog właśnie to A? Jak to zrobić? Tak normalnie to się nie da. Żeby podołać temu zadaniu, trzeba dokonać pewnej sztuczki hakerskiej.

Najpierw jednak trzeba zrozumieć, jak komputer definiuje strukturę katalogów i plików. W większości systemów operacyjnych jest tabela adresów, pod którymi znajdują się opisy poszczególnych podkatalogów oraz plików, które w danym katalogu występują. Pod takim typowym adresem będziemy więc mieli nazwę naszego katalogu oraz listę występujących w nim elementów: nadkatalogu, oznaczanego graficznie przez dwie kropki, jego podkatalogów oraz plików. Pliki już takiej listy nie będą zawierały, tylko opis rozmieszczenia kolejnych fragmentów w sektorach dyskowych. Jeśli chcemy wejść do podkatalogu, to pobieramy z listy adres odpowiadający jego nazwie, a następnie pod tym adresem szukamy opisu podanego według tego samego schematu i w odpowiedni sposób uzyskaną informację wyświetlamy. Z tej możliwości korzysta np. system operacyjny, wyświetlając nam zawartość aktualnego katalogu, czy wręcz pokazując od razu całe drzewo katalogów.



Jeśli, znajdując się w jakimś katalogu, chcemy stworzyć jego podkatalog, to nasza lista ulegnie wydłużeniu o nowy element: właśnie wygenerowany przez system operacyjny adres powstającego w tym momencie podkatalogu. Nie wiem, czy już widać, co trzeba zrobić, żeby było śmiesznie. Wystarczy dobrać się do tej listy i podmienić istniejący poprawny adres jednego ze swoich podkatalogów na własny adres katalogu, w którym właśnie przebywamy. Od tego system operacyjny zgłupieje. Nie będzie problemów z dodawaniem nowych plików, czy podkatalogów oraz ich usuwaniem. Jeśli dodamy nowy plik, powiedzmy `dane.dat`, to zobaczymy go pośród dostępnych elementów, wśród których będzie w szczególności nasz katalog A. Gdy wejdziemy do tego katalogu, wówczas wydłuży się ścieżka o kolejne A, a poza tym będziemy widzieli dokładnie taką samą zawartość, w szczególności dodany przed chwilą plik `dane.dat`: A stał się **elementem** samego siebie!

Kłopot się zacznie z chwilą, gdy będziemy próbowali usunąć katalog A. Reakcja komputera zależy tu od tego, jakiego systemu operacyjnego używamy. Zazwyczaj, aby nie zaśmiecać pamięci, systemy operacyjne zanim usuną katalog, usuwają jego zawartość. Niektóre systemy po prostu odmawiają usunięcia nie pustego katalogu i każą użytkownikowi samemu o to zadbać, pisząc coś w rodzaju „nie można usunąć katalogu, gdyż nie jest pusty”. Pewnie że nie jest, skoro sam do siebie należy! Inne systemy mogą się wręcz zawiesić przy tej akcji, gdyż zgodnie z regułami sztuki próbują przed usunięciem katalogu same usunąć jego zawartość. Orientują się, że katalog nie jest pusty i – co gorsza – zawiera podkatalog, więc najpierw trzeba zapewnić jego opróżnienie. Wchodzą więc pod wskazany adres, a tam widzą, że znowu jest jakiś podkatalog (oczywiście wciąż ten sam!) do usunięcia. . . I tak bez końca.

Właściwie trudno jest dokładnie opisać matematycznie, co się nam udało zrobić, ale przynajmniej widać, jak to działa! Rzadka sytuacja. Zazwyczaj jest na odwrót. Potrafimy coś wyrazić matematycznie, ale nie wiemy, jak to działa i wygląda!

Pozostaje pytanie, jak dokonać tej sztuczki z podmianą adresów. Pozostaje! Ja tego nie ujawnię.



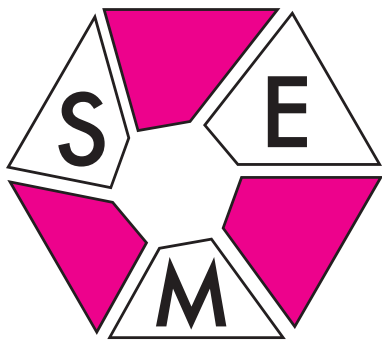
Rozwiązanie zadania F 870.

Powierzchnia lasów liściastych w Polsce to $3,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,3 \cdot 0,2 \text{ m}^2 = 1,86 \cdot 10^{10} \text{ m}^2$, warstwa opadłych liści pod drzewami ma grubość od 1 mm do 1 cm – przyjmijmy 0,5 cm. Gęstość liści jest bliska gęstości wody – przyjmijmy, że wynosi 1000 kg/m^3 . Jeśli najwyższe drzewa liściaste w Polsce osiągają wysokość około 35 m, to liście spadają z wysokości od 1 do 30 m – przyjmijmy średnio 10 m. Przyspieszenie ziemskie wynosi około 10 m/s^2 . Ostatecznie otrzymujemy zmianę energii potencjalnej liści równą w przybliżeniu

$$9,3 \cdot 10^{12} \text{ J} = 2,58 \cdot 10^6 \text{ kWh}.$$

Dla porównania – produkcja energii elektrycznej w Polsce w roku 2011 wyniosła

$$163,5 \text{ TWh} = 1,635 \cdot 10^{11} \text{ kWh}.$$



Wszystkie zadania wraz z rozwiązaniami są dostępne na stronie internetowej Olimpiady www.om.edu.pl.

Jak było na LXV OM

W LXV Olimpiadzie Matematycznej wzięło udział 1167 uczniów. Do zawodów drugiego stopnia zakwalifikowano 507 osób, a do finału, zorganizowanego przez Zespół Szkół Ogólnokształcących im. Stefana Żeromskiego przy ul. Sienkiewicza 1 w Ilawie, zaproszono 138 młodych ludzi.

W zawodach pierwszego stopnia najtrudniejsze było zadanie jedenaste, które rozwiązało poprawnie tylko 65 osób, w tym 39 bez zarzutu. W ogóle zawody pierwszego stopnia były trudne i to chyba było przyczyną zmniejszenia się liczby uczestników.

W zawodach okręgowych (które nie były bardzo trudne) najtrudniejsze było zadanie szóste.

Liczbę naturalną n nazwiemy dobrą, jeżeli istnieje taka liczba pierwsza p , że liczba n jest podzielna przez p , ale nie przez p^2 . Wykazać, że wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{12}$ liczby dobre stanowią co najmniej 99%.

Rozwiązało je poprawnie lub z drobnymi zastrzeżeniami 3^4 zawodników. Niektórzy zauważyli, że liczba niedobra może być zapisana w postaci a^2b^3 , przy czym, oczywiście, $a \leq \sqrt{10^{12}} = 10^6$ i $b \leq \sqrt[3]{10^{12}} = 10^4$ – jest tak ponieważ jeśli $n > 1$ jest liczbą parzystą, to $p^n = (p^{n/2})^2$, a jeśli $n > 1$ jest liczbą nieparzystą, to $p^n = (p^{(n-3)/2})^2 \cdot p^3$, więc jest ich mniej niż $10^6 \cdot 10^4 = 10^{10} = 0,01 \cdot 10^{12}$.

Łatwiejsze były zadania drugie i piąte, oba z planimetrii, każde rozwiązał poprawnie mniej więcej co czwarty uczestnik zawodów.

W finale tej OM najtrudniejsze okazało się zadanie drugie.

Dane są takie liczby całkowite $k \geq 2, n \geq 1$ oraz a_1, a_2, \dots, a_k i b_1, b_2, \dots, b_n , że $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_k < b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Wykazać, że jeżeli $a_1 + a_2 + \dots + a_k > b_1 + b_2 + \dots + b_n$, to $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k > b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n$, które rozwiązało jedynie 8 finalistów.

Najłatwiejsze było zadanie pierwsze.

Dane są względnie pierwsze liczby całkowite $k, n \geq 1$. Na tablicy napisano w pewnej kolejności wszystkie dodatnie liczby całkowite nieprzekraczające $k + n$. Ruch polega na zamianie miejscami dwóch liczb różniących się o k albo o n . Dowiedzieć, że można wykonać ciąg ruchów, który doprowadzi liczby na tablicy do kolejności $1, 2, \dots, k + n - 1, k + n$.

Z nim sprawdzający mieli największe problemy. A oto nieco przeredagowane rozwiązanie Adama Klukowskiego (Liceum im. S. Staszica w Warszawie). Niech a_1, a_2, \dots, a_{k+n} oznacza dany ciąg. Niech $a_{b_j} = j$ dla $j = 1, 2, \dots, k + n$ – ta równość definiuje jednoznacznie liczbę b_j . Dla ciągu (b_j) ruch polega na zamianie jego dwóch wyrazów znajdujących się w odległości k lub n . Jeśli umiemy posortować drugi ciąg, to pierwszy też. Definiujemy ciąg (c_j) , przyjmując, że $c_i = b_{m_i}$, gdzie m_i oznacza tę liczbę spośród $1, 2, \dots, k + n$, dla której różnica $ki - m_i$ jest podzielna przez $k + n$. Ponieważ $\text{NWD}(k, k + n) = 1$, więc ciąg (c_j) to permutacja ciągu (b_j) . Ruchy w ciągu (b_j) odpowiadają zamianie kolejnych wyrazów ciągu (c_j) . Do ciągu (c_j) można zastosować sortowanie bąbelkowe pozwalające ustawić jego wyrazy w dowolnej kolejności.

Najważniejszym i najsmutniejszym wydarzeniem w roku szkolnym 2013/14 był fakt, iż 23 lipca 2014 r. odszedł od nas Kamil Duszenko znany wielu uczestnikom Olimpiad.

Przez ostatnich sześć lat Kamil redagował zadania na zawody, ich firmowe rozwiązania, pisał broszury – sprawozdania z kolejnych Olimpiad. Dostarczał wiele zadań na zawody w Polsce i nie tylko. Uczestniczył w obozach naukowych olimpiady, wyjeżdżał na zawody bałtyckie, na zawody do Rumunii. Finaliści kilku olimpiad pamiętają, jak prowadził omówienia zadań po zawodach finałowych. Niestety, nie było Go z nami na finale LXIV ani na finale LXV OM. Walczył wtedy z chorobą, która w końcu go pokonała. Piszącemu te słowa trudno pogodzić się ze śmiercią 28-letniego Kamila, człowieka pełnego życia, miłośnika matematyki.



Nieco więcej o Kamilu można przeczytać na stronie olimpijskiej. Tu chciałbym napisać kilka słów o Jego podejściu do zadań olimpijskich. Olimpiadą zajmował się do ostatnich chwil swego życia. W bieżącej Olimpiadzie wśród 12 zadań z zawodów pierwszego stopnia cztery są Jego: 1, 3, 8 i 12. Rozwiązania wszystkich dwunastu zadań, które będą pojawiać się na stronie OM, większości napisał, a wszystkie zredagował, pracując nad tym jeszcze w lipcu.

Oto rozwiązanie cytowanego wyżej zadania drugiego z finału LXV OM.

Niech $f(u) = \sqrt[u]{u}$ dla $u = 2, 3, 4, \dots$. Udowodnimy, że $f(w) > f(w+1)$ dla każdego $w \geq 3$. Bezpośrednie wymnożenie wskazuje, że $\frac{w+1}{w} < \frac{t+1}{t}$ dla $0 < t < w$. Zatem

$$\left(\frac{w+1}{w}\right)^w < \frac{w+1}{w} \cdot \left(\frac{w+1}{w} \cdot \frac{w}{w-1} \cdot \frac{w-1}{w-2} \cdot \frac{w-2}{w-3} \cdot \dots \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{(w+1)^2}{2w}.$$

Ponieważ $(r+1)^2 < 2r^2$ dla $r > 1 + \sqrt{2}$, więc $\frac{(w+1)^2}{2w} < w$. W efekcie $\left(\frac{w+1}{w}\right)^w < w$, co jest równoważne nierówności $f(w) > f(w+1)$. Ponieważ $b_1 \geq 4$, więc z zależności $f(w) > f(w+1)$ i związku $f(2) = f(4)$ otrzymujemy $f(a_i) \geq f(b_1)$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ oraz $f(b_1) \geq f(b_j)$ dla $j = 1, 2, \dots, n$.

W myśl określenia funkcji f powyższe nierówności można zapisać w postaci $a_i \geq f(b_1)^{a_i}$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ oraz $f(b_1)^{b_j} \geq b_j$ dla $j = 1, 2, \dots, n$.

Stąd zaś, po wymnożeniu stronami i skorzystaniu z warunku (1), uzyskujemy $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \geq f(b_1)^{a_1+a_2+\dots+a_k} > f(b_1)^{b_1+b_2+\dots+b_n} \geq b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n$.

W zawodach II stopnia LXIII OM pojawiły się dwa zadania Kamila, raczej trudne.

Zadanie 3. Niech m, n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że w zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$ znajduje się dokładnie m liczb pierwszych. Dowieść, że wśród dowolnych $m+1$ różnych liczb z tego zbioru można znaleźć liczbę, która jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m liczb.

Zadanie 6. Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej k w zapisie dziesiętnym. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n , że $S(2^n + n) < S(2^n)$.

Autorem zadania 12. z pierwszego stopnia LXV OM też był Kamil:

W prostokącie P zaznaczono n^2 różnych punktów. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ znaleźć największą możliwą liczbę prostokątów, w których każdy wierzchołek jest jednym z zaznaczonych punktów, a boki są równoległe do boków prostokąta P .

– to zadanie rozwiązał tylko co dziesiąty uczestnik zawodów, więc okazało się dosyć trudne.

A oto Jego zadanie 2. z drugiego stopnia LXIV OM.

Okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio O_1 i O_2 przecinają się w dwóch różnych punktach A i B , przy czym kąt O_1AO_2 jest rozwarty. Prosta O_1B przecina okrąg o_2 w punkcie C różnym od B , a prosta O_2B przecina okrąg o_1 w punkcie D różnym od B . Wykazać, że punkt B jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD .

– to było zadanie nietrudne.

Zawody trzeciego stopnia LXIII OM otwierało łatwe, ale bardzo zgrabne zadanie.

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba wymierna w , niebędąca liczbą całkowitą, że potęga w^w jest liczbą wymierną.

Przypomnę jeszcze zadanie szóste z finału LXI OM.

Dana jest liczba rzeczywista $C > 1$. Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, \dots , w którym $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$, spełnia warunki $a_{mn} = a_m a_n$ oraz $a_{m+n} \leq C(a_m + a_n)$ dla $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Dowieść, że $a_n = n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$.

To zadanie okazało się bardzo trudne, zresztą zgodnie z przewidywaniami. Bez błędnie rozwiązał je tylko jeden uczestnik finału, a drugi był w pierwszej części drogi prowadzącej do szczęścia, za co otrzymał dwa punkty.

Mój wybór jest oczywiście całkowicie subiektywny. Wybierałem zadania tylko spośród tych, które pojawiły się na zawodach OM. Chciałem pokazać ich różnorodność: są tu trudne, łatwe, geometryczne, kombinatoryczne, algebraiczne i teoriolizbowe. Jest wiele, których z różnych przyczyn nie zaproponowano olimpijczykom. Nie widać wspaniale zrobionych rysunków, zawsze jednobarwnych, często skomplikowanych, ale jednak czytelnych i jakże różnych od pojawiających się w większości podręczników szkolnych. Gdy patrzymy na rozwiązania zadań, nie uświadamiamy sobie ogromnego wkładu pracy, dzięki któremu są one zawsze napisane możliwie elementarnie, tak by uczniowie i ich nauczyciele łatwiej mogli je zrozumieć. W broszurach wiele zadań jest rozwiązanych więcej niż jednym sposobem.

Warto pamiętać, że Kamil poza Olimpiadą zajmował się aktywnie innymi rzeczami, w szczególności był twórczym matematykiem – napisał pracę doktorską, której obronę uniemożliwiła śmiertelna choroba.

Michał KRYCH

Nobel 2014

Mniej więcej co piąta Nagroda Nobla z Fizyki jest przyznawana bardziej za wynalazek niż za odkrycie. W zgodzie z ostatnią wolą fundatora proporcja ta mogłaby (powinna?) być nawet większa, a tym samym stać w sprzeczności z powszechnym odbiorem nagrody jako najbardziej prestiżowego wyróżnienia naukowego. Z dzisiejszego punktu widzenia chyba najbardziej zaskakujący pozostaje werdykt z 1912 roku. Nagrodę przyznano wtedy Nilsowi Gustawowi Dalénowi za „wynalezienie automatycznych regulatorów używanych wraz ze zbiornikami gazowymi do oświetlania latarni i pław”. Należy tylko dodać, że sposób przechowywania acetyleny (bo to o ten bardzo wybuchowy, ale też bardzo jasno palący się gaz chodziło) też został przez laureata wynaleziony (i jest nadal stosowany), a regulatory były mechanicznymi zaworami blokującymi dopływ gazu przy dziennym świetle (mechaniczne wyłączniki zmiernikowe) [1]. Tym samym laureat przyczynił się znacząco do bezpieczeństwa żeglugi poprzez obniżenie kosztów utrzymywania systemu światła o ponad rząd wielkości.

Jakże podobnie brzmi tegoroczna sentencja. Laureatami Nagrody Nobla z Fizyki w roku 2014 zostali Isamu Akasaki, Hiroshi Amano i Shuji Nakamura „za wynalezienie wydajnej niebiesko świecącej diody, umożliwiającej uzyskanie jasnych i energooszczędnych źródeł światła białego”.

Pomysł na niebieską diodę był gotowy już na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych. Należało wykorzystać azotek galu (GaN), który ma przerwę energetyczną odpowiedniej wielkości. Trzeba było jednak poczekać dwie dekady na jego realizację wymagającą całego szeregu innowacyjnych pomysłów. Jednym z problemów było uzyskanie samych kryształów GaN odpowiedniej jakości. Choć obecnie najlepsze kryształy są wytwarzane w Polsce [2], to, niestety, nie one pozwoliły na zbudowanie pierwszej niebieskiej diody (warto nadmienić, że jeden z noblistów przez kilka lat regularnie przyjeżdżał do Polski). Z kryształami GaN problem jest taki, że nie tylko ich w naturze nie ma, ale nie ma nawet podłoża krystalicznego o odpowiednim skoku siatki krystalicznej. W dodatku potrzebne są (standardowo) bardzo wysokie temperatury i olbrzymie ciśnienia. Sam kryształ jest typu n, potrzebne jest domieszkowanie w celu uzyskania typu p, co znów okazało się drogą pod górkę. W końcu uzyskanie wysokiej wydajności wymagało wytworzenia odpowiednich tzw. heterostruktur, w których dostępne stany elektronowe (i dziurowe) są skwantowane (ze względu na dwuwymiarowość warstw, tzw. studnie kwantowe). Sukces wyglądał na gwarantowany, ale droga okazała się długa i wyboista. Za jej zwieńczenie można uznać skonstruowanie pierwszej niebieskiej diody laserowej [3, 4].

Zupełnie inaczej, jeżeli chodzi o początkową perspektywę, wyglądała historia serii innowacji, które przyniosły tegoroczną Nagrodę Nobla z Chemii. Dostali ją Eric Betzig, Stefan W. Hell i William E. Moerner

„za rozwinięcie wysoko-rozdzielczej mikroskopii fluorescencyjnej”.

Było to dążenie do czegoś, co było uznawane za niemożliwe – dążenie do uzyskania rozdzielczości (mikroskopu optycznego) lepszej niż granica dyfrakcyjna (która jest rzędu połowy długości fali). To naturalne ograniczenie nie pozwala np. na dostrzeżenie szczegółów budowy organelli żywych komórek, wirusów, białek.

Mikroskopia fluorescencyjna polega na rejestrowaniu świecenia znaczników (fluoroforów), które wcześniej trzeba do badanej próbki wprowadzić oraz wzbudzić. Niestety, samo to nie poprawia rozdzielczości, bo nawet jeżeli wiemy, gdzie znajduje się dany fluorofor, to jego obraz i tak podlega dyfrakcyjnemu ograniczeniu.

Pomysł Hella polegał na wyciszeniu prawie wszystkich uprzednio wzbudzonych fluoroforów poprzez wymuszoną emisję za pomocą fali o radialnie rosnącym natężeniu (STED ang. *stimulated emission depletion*). W ten sposób uzyskuje się dowolnie wąski gaussowski rozkład tych, które nie zostały wygaszone. Należy go przeskanować za pomocą mikroskopu (nanoskopu) o dokładnie rejestrowanym położeniu. W ten sposób uzyskano [5] (2000) obraz o rozdzielczości o rząd wielkości lepszej od granicy dyfrakcyjnej.

Innym pomysłem jest obserwowanie pojedynczych fluoroforów. Pierwszy sukces na tym polu odniósł Moerner [5] (1989), w jego laboratorium odkryto również istnienie fluoroforów, które można aktywować, dezaktywować oraz całkowicie wyłączyć [5] (1997). Jak z tego zrobić – mówiąc w dużym uproszczeniu – użytek, Betzing najpierw wymyślił [5] (1995), a następnie pomysł zrealizował [5] (2006). Metoda PALM (ang. *photoactivated localization microscopy*) polega na użyciu gęsto rozmieszczonych fluoroforów, których małą część się aktywuje (za pomocą światła o odpowiednio dostrojonej energii i niskiej intensywności), a następnie rejestruje około tysiąca cykli ich fluorescencji, po których stają się one już do niej niezdołne („wyblaknięte”). Ponieważ odległości między aktywnymi znacznikami są większe od długości fali, to fotony przez nie wyemitowane można rozróżnić, a dzięki temu pomiar pozycji poprawić o czynnik równy pierwiastkowi z liczby fotonów (wysłanych przez pojedynczy fluorofor). Cykl powtarza się wielokrotnie i uzyskuje się obraz o rozdzielczości blisko dwa rzędy wielkości lepszej niż granica dyfrakcyjna.

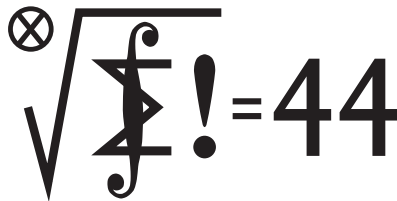
Warto tylko zauważyć, że jest to kolejna nagroda z chemii, przyznana za coś bardzo bliskiego fizyce (oraz biologii).

Piotr ZALEWSKI

- [1] www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1912/press.html.
- [2] R. Stevenson, *The World's Best Gallium Nitride*, IEEE 2010, spectrum.ieee.org/semiconductors/materials/the-worlds-best-gallium-nitride.
- [3] I. Akasaki, H. Amano i inni, *Stimulated Emission By Current Injection from AlGaIn/GaN/GaInN Quantum Well Device*, Jpn. J. Appl. Phys. **34** (1995) 1517.
- [4] S. Nakamura i inni, *InGaIn-Based Multi-Quantum-Well-Structure Laser Diode*, Jpn. J. Appl. Phys. **35** (1996) 74.
- [5] referencje można łatwo odnaleźć tu: www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/2014/advanced-chemistryprize2014.pdf.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

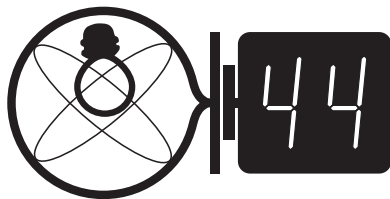


Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
681 ($WT = 1,71$) i 682 ($WT = 2,29$)
z numeru 5/2014

Stanisław Bednarek	Łódź	47,15
Tomasz Wietecha	Tarnów	42,14
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Jerzy Cisło	Wrocław	39,44
Michał Miodek	Zawiercie	38,82
Wojciech Tobiś	Praszka	34,67
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75
Piotr Kumor	Olsztyn	31,42

Teraz, gdy szeregi Klubu 44 M zasilili
Stanisław Bednarek, liczność naszego
klubu wzrosła do 124.



Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
574 ($WT = 1,64$), 575 ($WT = 2,97$),
576 ($WT = 2,50$), 577 ($WT = 3,22$),
578 ($WT = 3,17$), 579 ($WT = 2,20$),
580 ($WT = 3,60$) i 581 ($WT = 1,00$)
z numerów 3-6/2014

Tomasz Wietecha	Tarnów	43,56
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Andrzej Idzik	Bolesławiec	31,77
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Marian Łupieżowicz	Gliwice	20,47

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z matematyki nr 691, 692

Redaguje Marcin E. KUCZMA

691. Mamy skończoną liczbę koszyków, w każdym z nich skończoną liczbę kamieni; znamy wagę każdego kamienia. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu przekładamy jeden kamień z jakiegoś koszyka K do innego koszyka K' ; musi być przy tym spełniony warunek, że łączna waga kamieni w koszyku K' po wykonaniu ruchu jest mniejsza niż łączna waga kamieni w koszyku K przed wykonaniem ruchu. Czy ciąg ruchów może być nieskończony?

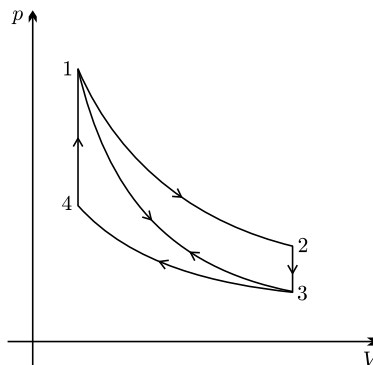
692. Dany jest trójkąt ABC . Rozważamy trzy elipsy: każda z nich ma ogniska w dwóch wierzchołkach tego trójkąta i przechodzi przez trzeci wierzchołek. Pokazać, że te trzy elipsy mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest prostokątny.

Zadanie 692 zaproponował pan Adam Dzedzej z Gdańska.

Zadania z fizyki nr 588, 589

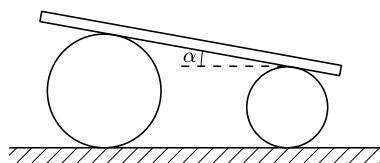
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

588. Procesy 1–2 oraz 3–4 na wykresie p - V (rys. 1) są przemianami izotermicznymi. Proces 1–3 jest przemianą adiabatyczną. Procesy 2–3 oraz 4–1 to izochory. Sprawność cyklu 1–2–3–1 wynosi η_1 , sprawność cyklu 1–3–4–1 wynosi η_2 . Oblicz sprawność cyklu 1–2–3–4–1.



Rys. 1

589. Na poziomej podłodze leżą dwa równoległe walce o różnych promieniach. Na walcach położono ciężką deskę, która tworzy z poziomem kąt α (rys. 2). Znaleźć przyspieszenie deski. Nie ma poślizgu między walcami i deską oraz między walcami i podłogą. Masy walców są zaniedbywalnie małe w porównaniu z masą deski.



Rys. 2

Prosto z nieba: Superszybkie gwiazdy

Gwiazdy, a w ogólności wszelkie obiekty kosmiczne, poruszają się względem układu odniesienia związanego ze Słońcem. W porównaniu do prędkości znanych z życia codziennego (około 6 km/h na piechotę, 140 km/h samochodem na autostradzie, 900 km/h w trakcie podróży samolotem odrzutowym) tempo orbitowania naszego globu wokół Słońca jest o rzędy wielkości większe i wynosi nieco ponad 100 tys. km/h! Układ Słoneczny jako część ramienia spiralnego Galaktyki obraca się wokół jej centrum z okresem 240 mln lat i prędkością 720 tys. km/h. Oczywiście, oddziaływania pomiędzy obiektami galaktycznymi mogą sprawić, że ich tzw. *ruch własny* jest znacznie szybszy niż przeciętny w danym rejonie. Do takich obiektów należą na przykład pulsary, z których wiele otrzymało podczas eksplozji supernowej „narodzinowy kopniak” nadający im prędkości rzędu miliona km/h. Obserwacje ekstremalnych przypadków bardzo szybko poruszających się gwiazd (ang. *hypervelocity stars*) mogą, jak w przypadku pulsarów, prowadzić do zrozumienia procesów zachodzących podczas ich gwałtownych narodzin, albo, jak w przypadku „zwykłych” gwiazd, do analizy pola grawitacyjnego, w którym się one poruszają. Badania tego rodzaju prowadzi się m.in. za pomocą oddanego niedawno do użytku chińskiego teleskopu LAMOST (ang. *Large sky Area Multi-Object fiber Spectroscopic Telescope*). Spośród około 20 znanych gwiazd o tak dużej prędkości stosunkowo jasny i masywny olbrzym typu B nazwany LAMOST-HVS1 jest położony najbliżej nas. Jego prędkość względem Słońca wynosi 2,2 mln km/h, a znajduje się on w odległości około 13 kpc. Wiele wskazuje na to, że LAMOST-HVS1 i inne szybko poruszające się gwiazdy pochodzą z otoczenia centrum Galaktyki – tak duża prędkość jest najprawdopodobniej wynikiem oddziaływania grawitacyjnego w centralnych częściach zgrubienia galaktycznego bądź wprost z galaktyczną czarną dziurą, Sgr A*.

Obserwacje gwiazd o dużej prędkości mogą na pierwszy rzut oka wydawać się frywolne, służą jednak poważnym badaniom oddziaływań gwiazd z masywnymi czarnymi dziurami (pozwalają np. oszacować, jak szybko Sgr A* przybiera na wadze), a także dostarczyć informacji potrzebnych do oszacowania potencjału grawitacyjnego wytwarzanego przez halo tajemniczej galaktycznej ciemnej materii.

Michał BEJGER

Niebo w grudniu

22 XII oficjalnie rozpocznie się astronomiczna zima. Tego dnia wypada przesilenie zimowe na północnej półkuli Ziemi, a przesilenie letnie na półkuli południowej. Słońce osiągnie wtedy najbardziej południowe położenie na niebie w czasie swojej pozornej wędrówki rocznej na tle gwiazdozbiorów. W konsekwencji długość dnia na północnej półkuli będzie najkrótsza, a nocy najdłuższa w roku. Na szczęście długie noce są tym, co astronomowie lubią najbardziej!

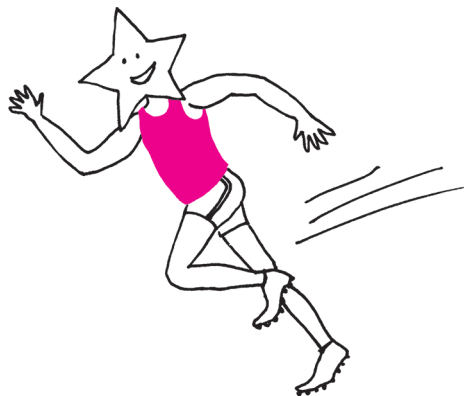
Miłośnicy „spadających gwiazd” mogą zapolować na meteory z roju Geminidów. Jest to jeden z najbardziej aktywnych i regularnych rojów meteorów na naszym niebie. Meteory te będą widoczne od około 7 do 16 XII, jednak maksimum ich aktywności wypadnie na 14 dzień miesiąca. Szacuje się, że z daleka od światel miasta będzie można zaobserwować około 100 obiektów na godzinę. Wiek Księżyca w momencie największej aktywności będzie wynosił 22 dni, zatem jego blask prawie w ogóle nie będzie przeszkadzał w obserwacjach. Wszystkie meteory tego roju wylatywać będą z radiantu położonego w konstelacji Bliźniąt, w punkcie o współrzędnych: rektascensja 06h30m, deklinacja +33°00'. Jednak wbrew pozorom, nie tam powinniśmy

skierować swój wzrok. Najwięcej meteorów będzie można zauważyć w odległości około 90° od położenia radiantu – tam ich jasność osiągnie największe wartości.

Znacznie mniej aktywny będzie rój Ursydów, który również zagóści na grudniowym niebie. W czasie jego maksimum przypadającego na 22 XII można zaobserwować przeważnie około 10–15 „spadających gwiazd” na godzinę. Tego dnia wiek Księżyca będzie wynosił 2 dni, więc warunki do obserwacji będą doskonałe. Radiant tego roju znajduje się niedaleko Gwiazdy Polarnej.

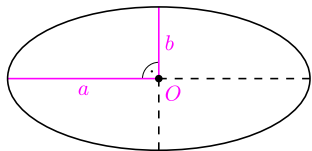
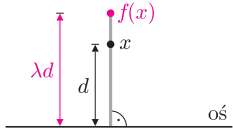
Grudzień jest także znakomity do obserwacji konstelacji Oriona oraz ciekawych obiektów w jego sąsiedztwie. Na przykład gromada otwarta NGC 1981 jest pięknym obiektem położonym na mieczu Oriona. Nieco dalej, w konstelacji Jednorozca, znajdują się kolejne ciekawe gromady otwarte, NGC 2232 oraz NGC 2244. Wszystkie trzy obiekty pod koniec miesiąca osiągną najwyższy punkt na niebie w okolicach godziny dwunastej w nocy naszego czasu. Niestety, świecą one zbyt słabo, żeby można było je dostrzec nieuzbrojonym okiem, są za to w zasięgu lornetki lub niewielkiego teleskopu.

Magda OTULAKOWSKA-HYPKA

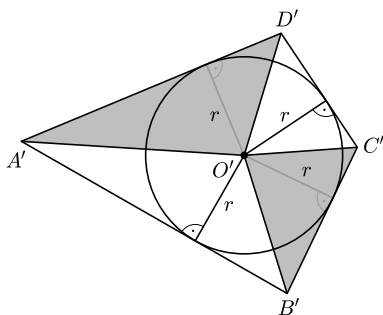




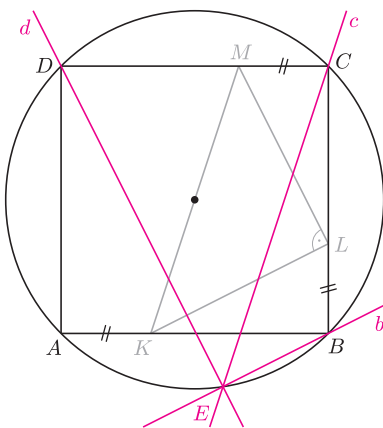
Każde przekształcenie afiniczne jest złożeniem pewnego podobieństwa i pewnego powinowactwa prostokątnego o skali $\lambda \geq 1$. Takie powinowactwo f każdy punkt X odsuwa λ razy dalej od pewnej ustalonej prostej (osi):



Rys. 1. a – duża półoś, b – mała półoś.



Rys. 2. X' oznacza obraz punktu X .



Rys. 3. $AK = BL = CM$.

Literatura

J. Bednarczuk, *Urok przekształceń afinicznych*, WSiP, 1978.

Każdy trójkąt jest równoboczny

Joanna JASZUŃSKA

Przekształcenie afiniczne płaszczyzny to takie różnowartościowe przekształcenie płaszczyzny w siebie, przy którym obrazem każdej prostej jest prosta. Wszystkie podobieństwa spełniają te warunki, ale nie tylko one (więcej na marginesie). Niektóre własności przekształceń afinicznych:

- (a) Zachowują: równoległość prostych, stosunek długości odcinków równoległych, stosunek pól.
- (b) Są odwracalne i przekształcenia odwrotne do nich również są afiniczne.
- (c) Każdy trójkąt można przeprowadzić afinicznie na dowolny inny; co więcej, obrazy wierzchołków trójkąta jednoznacznie definiują przekształcenie afiniczne.

Wynika z tego, że dowolny równoległobok można przekształcić afinicznie na dowolny inny (wystarczy przekształcić trzy jego wierzchołki, obraz czwartego zadany jest jednoznacznie przez równoległości podstaw).

(d) Każdą elipsę można przekształcić na okrąg, zatem też na dowolną inną elipsę.

Zamiast więc rozważać dany trójkąt, równoległobok czy elipsę, często wystarczy rozważyć odpowiednio trójkąt równoboczny, kwadrat lub okrąg, o ile inne interesujące nas własności są niezmiennikami przekształceń afinicznych (punkt (a)).

1. Udowodnij, że w dowolnym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie i dzielą w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka.

2. Wykaż, że w każdym trapezie o nierównoległych ramionach punkt przecięcia ich przedłużeń, punkt przecięcia przekątnych i środki podstaw leżą na jednej prostej.

3. Wykaż, że jeżeli punkt O jest środkiem elipsy wpisanej w czworokąt $ABCD$, to $[OAB] + [OCD] = [OBC] + [ODA]$, gdzie $[F]$ oznacza pole figury F .

4. Wyznacz pole elipsy, znając długości jej półosi (rys. 1).

5. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $\frac{AK}{KB} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MD}$. Proste b, c, d przechodzą odpowiednio przez punkty B, C, D oraz są równoległe odpowiednio do prostych KL, KM, LM . Udowodnij, że proste b, c, d przecinają się w jednym punkcie.

6. Każda z przekątnych czworokąta wypukłego dzieli go na trójkąty o równych polach. Wykaż, że ten czworokąt jest równoległobokiem.

Rozwiązania niektórych zadań

R1. Trójkąt równoboczny ma żądane własności. Dowolny inny trójkąt jest jego obrazem przy pewnym przekształceniu afinicznym, które zachowuje środki boków, a więc także środkowe, ich współpękowość oraz stosunek podziału. \square

R3. Przeprowadźmy daną elipsę afinicznie na okrąg o promieniu r , obrazem punktu O jest środek okręgu O' (rys. 2). Czworokąt $A'B'C'D'$ jest opisany na okręgu, zachodzi więc równość $A'B' + C'D' = B'C' + D'A'$. Mnożąc obie strony przez $r/2$, uzyskujemy tezę dla okręgu. Przekształcenia afiniczne zachowują równość pól, zatem teza zachodzi także dla wyjściowej elipsy. \square

R4. Opiszmy na elipsie prostokąt o bokach długości $2a$ i $2b$, równoległych do jej półosi. Powinowactwo prostokątne o skali a/b i o osi zawierającej dużą półoś elipsy przekształca nasz prostokąt na kwadrat, a elipsę na koło weń wpisane. Stąd stosunek pola P elipsy do pola $4ab$ prostokąta równy jest stosunkowi pola koła do pola kwadratu na nim opisanego, czyli $\pi/4$. Wobec tego $P = \pi ab$. \square

R5. W myśl uwagi poprzedzającej zadania, wystarczy rozważyć kwadrat (rys. 3). Odcinek LM powstaje z odcinka KL przez obrót o 90° wokół środka kwadratu, zatem $KL \perp LM$, więc także $b \perp d$. Stąd punkt E przecięcia prostych b i d leży na okręgu opisanym na kwadracie. Ponadto skoro $DE \parallel LM$, to punkt E musi należeć do tego łuku AC okręgu, który zawiera B . Wobec tego $\sphericalangle CED = \sphericalangle CBD = 45^\circ = \sphericalangle KML$. Na mocy $DE \parallel LM$ wynika stąd, iż $CE \parallel KM$, czyli $CE = c$. Zatem proste b, c, d przecinają się w jednym punkcie E . \square