




SPIS TREŚCI NUMERU 11 (486)

Gdzie jesteś, HAL? <i>Jarek Gryz</i>	str. 1
Informatyczny kącik olimpijski (77): Wybrakowany ciąg <i>Tomasz Idziaszek</i>	str. 5
Wartość nieoczekiwana <i>Piotr Chrząstowski-Wachtel</i>	str. 6
Czy potrafisz?	str. 7
Zadania z indywidualnością <i>Wiktor Bartol</i>	str. 8
O modelowaniu przydziału częstotliwości za pomocą kolorowania grafów <i>Krzysztof Węsek</i>	str.11
O wyjątkowych zaćmieniach gwiazd kataklizmicznych <i>Karolina Bąkowska</i>	str.14
 Zadania	str.17
 W krainie snów <i>Magdalena Fikus</i>	str.18
Na łowy! <i>Jarosław Górnicki</i>	str.19
XXXI Ogólnopolski Sejmik Matematyków	str.22
XXXVI Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	str.22
Klub 44	str.23
Prosto z nieba: Poświata po błysku	str.24
Niebo w listopadzie	str.24
 Droga, prędkość, czas <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

W następnym numerze przekonamy, że



z kranu może skapnąć milion dolarów

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

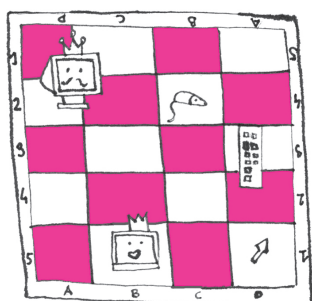
Cena 1 egzemplarza 4 zł

Jest to skrót artykułu opublikowanego w *Przeglądzie Filozoficznym* 22 (2013), nr 2, 167–184.

Termin „sztuczna inteligencja” jest dwuznaczny, bo używa się go zarówno do określania dziedziny badawczej, jak i jej potencjalnego produktu. Aby tej dwuznaczności uniknąć, będziemy używać tego terminu tylko w pierwszym znaczeniu, rezerwując dla drugiego pojęcia określenie „maszyna myśląca”.



Zwycięstwo *Deep Blue* nad szachistą Kasparowem w 1997 roku było możliwe między innymi dlatego, że uniknięto tam prostego przeszukiwania przestrzeni możliwych ruchów.



Gdzie jesteś, HAL?

Jarek GRYZ*

Umysł to komputer. Teza ta, która nawet w tak niedoprecyzowanej formie jest dla wielu z nas nie do przyjęcia, legła u podstaw sztucznej inteligencji, jednej z najbardziej fascynujących i kontrowersyjnych dziedzin nauki zapoczątkowanych w ubiegłym stuleciu. Była to dziedzina, która bodaj jako pierwsza wyodrębniła się z informatyki jako osobna poddziedzina, ale miała ambicje daleko poza informatykę wykraczające. Przyciągnęła ona najtęższe umysły matematyki, ekonomii, psychologii i filozofii, ale skonsumowała też ogromne (prawdopodobnie największe w informatyce) fundusze badawcze. Jej zadufanie i bombastyczne obietnice z pierwszych lat istnienia z czasem ustąpiły przesadnej wręcz skromności i chęci zdegradowania dziedziny przez nazywanie jej racjonalnością obliczeniową zamiast sztuczną inteligencją.

Początki. Pierwszy amerykański komputer, ENIAC, został uruchomiony w 1945 roku. Jego zastosowania były czysto wojskowe i dotyczyły symulacji wybuchu i potencjalnych zniszczeń spowodowanych przez projektowaną wówczas bombę wodorową. W powszechnym mniemaniu komputer to było po prostu szybkie liczydło. Warto o tym pamiętać, bo trzeba było nie lada geniuszu, by wyobrazić sobie inne zastosowania dla owego „liczydła”. Geniuszem tym wykazał się Herbert Simon, który pracował wówczas nad komputerową symulacją obrony powietrznej. Tak oto narodził się paradygmat komputera jako maszyny do przetwarzania informacji: komputer operuje na symbolach odnoszących się do obiektów istniejących realnie. Stąd był już tylko krok do funkcjonalnego zidentyfikowania komputera i ludzkiego umysłu.

Niemal od pierwszej chwili, kiedy odkryto, że komputer może przetwarzać dowolne symbole (a nie tylko liczby), usiłowano stworzyć program, który pokazałby możliwości maszyny w tej dziedzinie. Oczywiście zastosowaniem były szachy: gra, której reguły łatwo jest opisać w języku symbolicznym, a w której – jak się początkowo wydawało – szybkość przetwarzania symboli (pozycji na szachownicy i ich „wartości”) miała kluczowe znaczenie dla pokazania przewagi maszyny nad człowiekiem. Wnet jednak okazało się, że „bezmyślne” przeszukiwanie wszystkich sekwencji ruchów na szachownicy dla znalezienia takiej, która prowadziłaby nieodzwrotnie do wygranej, jest nierealne. Claude Shannon oszacował liczbę możliwych posunięć na 10^{120} , co znaczy, że przy weryfikacji jednej sekwencji w ciągu jednej milionowej sekundy pierwszy ruch na szachownicy wykonany byłby po 10^{95} latach. Herbert Simon i współpracujący z nim wówczas Allen Newell nie zamierzali oczywiście tak długo czekać. Zmienili więc dziedzinę i postanowili napisać program, który dowodziłby twierdzeń logiki. Choć złożoność obliczeniowa takiego programu jest dużo mniejsza niż gry w szachy, to i w tym przypadku konieczne było sformułowanie reguł i metod efektywnego poszukiwania dowodu, a nie proste weryfikowanie, czy dowolnie wygenerowany ciąg znaków spełnia wymogi dowodu w sensie logicznym. Program, który w ten sposób powstał, *Logic Theorist*, był więc w pewnym sensie „kreatywny”, bo generował dowody, których jego autorzy się nie spodziewali. Innymi słowy, choć program spełniał wymagania postawione przez jego autorów, jego zachowania nie można było (przynajmniej w łatwy sposób) przewidzieć. Sukces programu był spektakularny: dowiódł on 38 z 52 twierdzeń drugiego rozdziału *Principia Mathematica* Russella i Whiteheada. Co więcej, dowód twierdzenia 2.85 sformułowany przez *Logic Theorist* okazał się bardziej elegancki niż ten z *Principiów*. Russell był pod wielkim wrażeniem owego sukcesu, ale już „The Journal of Symbolic Logic” odmówił publikacji dowodu, którego autorem była maszyna. Te wczesne, niewątpliwe sukcesy sztucznej inteligencji skłoniły wielu ówczesnych naukowców zarówno do przeceniania własnych osiągnięć, jak i do stawiania hurraoptymistycznych prognoz na przyszłość.

Oczywiście, badacze sztucznej inteligencji zdawali sobie sprawę, że z faktu, iż pewne elementy ludzkiego myślenia mogą być imitowane czy realizowane przez komputer, nie wynika, że dotyczy to wszystkich elementów. Potrzebny był więc argument pokazujący, co dla myślenia jest istotne, a co jest tylko przypadkowe. Przypadkowe byłoby więc, na przykład, fizyczne umiejscowienie procesów

*York University, Toronto, Kanada



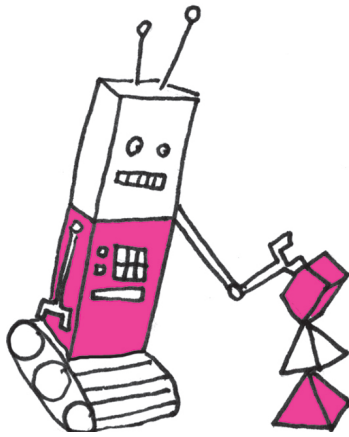
Rozwiązanie zadania M 1439.

Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$. Mamy

$$5 \mid f(0) = c. \text{ Następnie}$$

$$5 \mid f(1) - f(-1) = 2b, \text{ więc } 5 \mid b. \text{ Ponadto,}$$

$$5 \mid f(1) = a + b + c, \text{ zatem również } 5 \mid a.$$



Projekt SHRDLU

Celem SHRDLU było zbudowanie robota, który potrafiłby porozumiewać się z człowiekiem, rozumować i przeprowadzać proste działania. I tak SHRDLU dysponował chwytakiem, za pomocą którego mógł manipulować rozrzuconymi na stole klockami o różnych kolorach i kształtach. Komunikacja między takim „robotem” a człowiekiem odbywała się za pomocą klawiatury oraz monitora, na którym pokazany był stół z klockami i odpowiedzi robota. Kiedy wydawano robotowi polecenie ułożenia klocków w jakiejś konfiguracji, SHRDLU wymyślał plan działania i wirtualnie go wykonywał. SHRDLU potrafił zrozumieć język potoczny i do pewnego stopnia rozumiał swoje motywy. Oto przykład interakcji między SHRDLU a człowiekiem:

- Podnieś czerwony klocek.
 - OK. [SHRDLU podnosi klocek]
 - Znajdź klocek wyższy niż ten, który trzymasz, i włóż go do pudełka.
 - Zakładam, że przez „go” rozumiesz klocek, który trzymam. [SHRDLU wkłada właściwy klocek do pudełka]
 - Co jest w pudełku?
 - Niebieska piramida i niebieski klocek.
 - Czy stół może podnosić klocki?
 - Nie.
 - Czy można postawić piramidę na piramidzie?
 - Nie wiem.
 - Postaw piramidę na piramidzie.
 - Nie mogę. [SHRDLU próbuje, ale mu się nie udaje]
 - Niebieska piramida jest moja.
 - Rozumiem.
 - Czy jest w pudełku coś, co jest moje?
 - Tak, niebieska piramida.
- Na pierwszy rzut oka dialog ten sprawia wrażenie, jakby rzeczywiście rozmawiało się z maszyną myślącą, która rozumie, co się do niej mówi. Czytelnik Elokwentny wymyśli jednak zapewne bez trudu sekwencję pytań prowadzącą do udzielenia przez maszynę odpowiedzi absurdalnie bezsensownych.

myślowych w mózgu; zastąpienie jednego czy wręcz wszystkich neuronów przez elementy mechaniczne (takie jak obwody elektryczne) o tej samej funkcji nie powinno mieć wpływu na procesy myślowe.

Co zatem stanowi o istocie myślenia i co pozwala nam ignorować konkretną realizację procesów myślowych? Newell i Simon sformułowali to w postaci słynnej hipotezy systemu symboli jako warunku koniecznego i wystarczającego dla inteligentnego działania. Manipulacja czy też obliczanie przy użyciu tych symboli to właśnie myślenie.

Warto zauważyć, że w powyższej wersji hipotezy (tzw. wersji silnej) ludzki umysł musi być takim systemem symboli (w przeciwnym razie należałoby mu bowiem odmówić możliwości myślenia). W takiej wersji zbudowanie maszyny myślącej przy użyciu komputera jest, oczywiście, teoretycznie wykonalne, z tej prostej przyczyny, że ludzki umysł to po prostu komputer. Wersja silna hipotezy ma jeszcze jedną istotną konsekwencję, a mianowicie, że badając działania komputera (czy, ściślej rzecz biorąc, zainstalowanego w nim programu), możemy dowiedzieć się czegoś nowego na temat działania mózgu. Na założeniu tym ufundowana została kognitywistyka. Zauważmy na koniec, że dla uzasadnienia celów sztucznej inteligencji wystarczy słaba wersja hipotezy, mianowicie, że manipulacja symbolami jest wystarczająca, ale niekonieczna dla myślenia.

Rozwój. Lata sześćdziesiąte i siedemdziesiąte XX wieku to złoty wiek sztucznej inteligencji. Gwałtownie wzrosła ilość badaczy zajmujących się tą dziedziną, a także funduszy przeznaczonych na badania. Większość rozwiązań algorytmicznych i systemowych, które weszły do kanonu dziedziny, pochodzi właśnie z tamtych czasów. Co więcej, sukcesy sztucznej inteligencji przestały już być tylko wewnętrzną sprawą naukowców. Media zapowiadały cywilizacyjną rewolucję, która lada dzień dokonać się miała za sprawą budowanych właśnie maszyn myślących. Ale za tą efektowną fasadą pojawiły się też pierwsze pęknięcia. Zdawano sobie już wcześniej sprawę z ułomności i ograniczeń budowanych systemów, ale dopiero teraz zaczęto wyraźnie rozpoznawać problemy. Jak się później okazało, wielu z nich nie dawało się rozwiązać za pomocą usprawnień technologicznych, bo wynikały one z dokonanych wcześniej założeń metodologicznych czy też filozoficznych, na których opierała się sztuczna inteligencja.

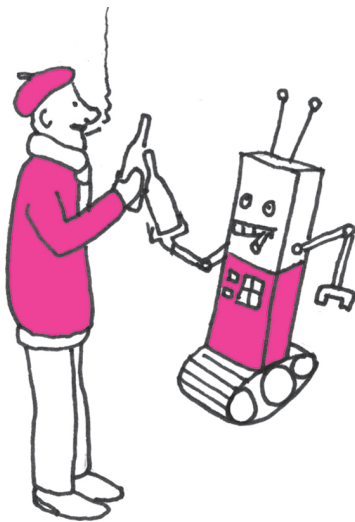
Na czym polegał problem? Otóż wszystkie programy stworzone do tej pory w sztucznej inteligencji stosowały się do tzw. mikroświatów, a więc ściśle zdefiniowanych i dokładnie opisanych wycinków rzeczywistości. Tak więc *Logic Theorist* dowodził tylko twierdzeń logiki, a SHRDLU (patrz obok) manipulował tylko klockami na stole. Wszelkie próby rozciągnięcia zastosowań tych programów na szersze dziedziny, zdefiniowane nie tak ściśle jak logika czy gra w warcaby, kończyły się fiaskiem. Bariery były dwojakiego rodzaju: pierwsza dotyczyła złożoności obliczeniowej, druga – wiedzy potocznej. Warto od razu podkreślić, że żadnej z tych barier nie udaje się pokonać za pomocą doskonalszych algorytmów, bardziej skomplikowanych programów czy szybszych komputerów. Zmiany wymaga – jak się wydaje – sam paradygmat sztucznej inteligencji. Przyjrzyjmy się zatem bliżej każdej z wymienionych barier.

Problemy. Zadania, jakie wykonać ma program komputerowy, są zaimplementowane w postaci algorytmów. Efektywność programu zależy zarówno od fizycznych własności komputera (wielkości pamięci, szybkości CPU itd.), jak i ilości operacji, jakie wykonać musi algorytm. Ten drugi czynnik zależy z kolei od ilości danych na wejściu (łatwiej znaleźć maksimum z 10 liczb niż z 1000 liczb) oraz od skomplikowania samego algorytmu (łatwiej znaleźć maksimum z 10 liczb, niż je posortować). Złożoność obliczeniowa to właśnie miara tego skomplikowania, a definiuje się ją po prostu jako funkcję $f(n)$, gdzie n jest ilością danych na wejściu. Algorytmy o złożoności wykładniczej są w praktyce nieobliczalne; mogą one być wykorzystywane wyłącznie do rozwiązywania problemów o małej skali (tzn. dla niewielkiego n). Takie właśnie problemy rozwiązywano w mikroświatach: na przykład SHRDLU manipulował tylko kilkoma klockami. Wykorzystanie tych samych



Rozwiązanie zadania F 868.

Przed umieszczeniem na kuli ładunku przyciąga się ona z cząstką w wyniku wyindukowania ładunku na jej powierzchni. Niech siła ta wynosi F_{IND} . Jeżeli ładujemy kulę kolejno ładunkiem $q, 2q, 3q$, to pojawia się dodatkowa siła odpychania odpowiednio $F, 2F, 3F$. Znajdując wypadkową siłę działającą pomiędzy kulą i cząstką, w każdym z tych przypadków, dostajemy $F_1 = F_{IND} - F$, $F_2 = F_{IND} - 2F$ i $F_3 = F_{IND} - 3F$. Stąd ostatecznie $F_3 = 2F_2 - F_1$. Zauważmy, że siła ta może być siłą przyciągania albo odpychania.



programów, czy też, ściślej mówiąc, tych samych algorytmów, do rozwiązywania realistycznych problemów jest po prostu niemożliwe. Wydawać by się mogło, że tego dylematu można jednak uniknąć: skoro barierą są algorytmy o złożoności wykładniczej, dlaczego nie zastosować innych, szybszych algorytmów dla rozwiązywania tych samych problemów? Otóż, jednym z największych osiągnięć teorii informatyki ostatniego wieku była obserwacja, że szybszych algorytmów dla większości problemów sztucznej inteligencji najprawdopodobniej nie ma! Udało się do dziś zidentyfikować kilkaset problemów, które określa się mianem NP-zupełnych, a które mają dwie wspólne im własności. Po pierwsze, dla żadnego z tych problemów nie udało się do tej pory znaleźć rozwiązania o mniejszej niż wykładnicza złożoności. Po drugie, znalezienie szybkiego, a więc wielomianowego rozwiązania dla jednego z nich rozwiązuje w ten sam sposób je wszystkie. Dla sztucznej inteligencji był to wynik szczególnie dotkliwy, bo większość problemów, które usiłowano w sztucznej inteligencji rozwiązać, należy właśnie do klasy NP-zupełnych lub jeszcze trudniejszych. Dla wielu krytyków był to argument za tym, że sztuczna inteligencja oparta na rozwiązaniach algorytmicznych, czyli obliczeniowych, jest niemożliwa.

Drugi poważny problem, który napotkano w sztucznej inteligencji, dotyczył opisu wiedzy potocznej. Jeśli maszyna myśląca ma wchodzić w interakcje z ludźmi i funkcjonować w ich środowisku, musi – choćby częściowo – podzielać ich obraz świata. Wiedza potoczna, która ten obraz świata opisuje, musi być zatem w jakiś sposób reprezentowana w języku maszyny.

Prawdopodobnie nikt nie zdawał sobie sprawy, jak trudny to może być problem, aż do czasu publikacji artykułu, w którym McCarthy i Hayes zdefiniowali tzw. problem ramy. Autorów interesowało sformalizowanie myślenia zdroworozsądkowego na użytek planowania działań przez robota. Skonstruowany w tym celu tzw. rachunek sytuacji pozwalał opisywać rezultaty działań i przeprowadzać stosowne wnioski. Rozważmy następujący problem. Jeśli w sytuacji S obiekt x jest na obiekcie y i x jest pusty (tzn. nic na nim nie ma), to w rezultacie zdjęcia obiektu x z obiektu y w sytuacji S obiekt y również będzie pusty. A co z kolorem obiektu y ? Czy zmieni się on w wyniku zdjęcia z niego obiektu x ? Dla nas odpowiedź jest jasna: nie. Ale odpowiedź ta nie jest wcale oczywista z punktu widzenia opisywanej teorii. Sytuacja, która powstała w wyniku zdjęcia obiektu x z obiektu y , jest inną sytuacją niż sytuacja S . Dopóty, dopóki nie stwierdzimy *explicite*, że kolor obiektów nie zmienia się w wyniku ich przenoszenia, nie wiemy, czy obiekt zachował swój kolor. Problem wydaje się trywialny, ale bynajmniej nie ma trywialnego rozwiązania na gruncie formalizmu logicznego. Dodanie tzw. aksjomatów ramy, a więc twierdzeń typu „obiekt nie zmienia swego koloru w wyniku jego przenoszenia” jest nie do przyjęcia z trzech powodów. Po pierwsze, w warunkach realnego świata takich aksjomatów byłoby nieprzewidywalnie wiele, a mianowicie tyle, ile jest różnych par działanie-własność. Dodawanie nowych własności i nowych działań do opisu świata wymagałoby nieustannego dodawania takich aksjomatów. Po drugie, prawdziwość takich aksjomatów zależy od kontekstu. Jeśli jeden robot przenosi klocki, a drugi je maluje, to powyższy aksjomat jest fałszywy. Wreszcie, jeśli aksjomaty ramy miałyby opisywać sposób myślenia człowieka w sytuacjach takich, jak opisana powyżej, to na pewno opisują ją fałszywie.

Kolejny problem jest dość oczywisty i dotyczy trudności, a właściwie niemożliwości wyliczenia wszystkich skutków naszych działań. Problem ten nazywamy problemem rozgałęzionych efektów. Okazuje się jednak, że nie tylko skutków, ale również warunków naszych działań nie jesteśmy w stanie wyliczyć. Klasyczny przykład to próba uruchomienia samochodu. Spodziewamy się, że wystarczy do tego przekręcić kluczyk w stacyjce. Okazuje się, że to nieprawda: akumulator musi być naładowany, w baku musi być benzyna, rura wydechowa nie może być zatkana kartoflem, nikt w nocy nie ukradł nam silnika itp. Trudno oczekiwać, że bylibyśmy w stanie podać wszystkie warunki niezbędne do podjęcia jakiegokolwiek działania. Które z nich powinniśmy zatem wyspecyfikować dla zdefiniowania działań dostępnych dla robota? To tzw. problem uszczegółowienia warunków.



Rozwiązanie zadania M 1440.

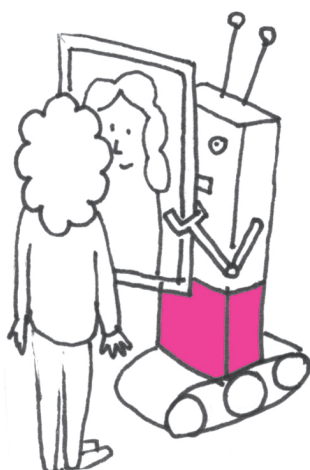
Odp. Jest $2^{(m-1)(n-1)}$ takich macierzy.

Zauważmy, że podmacierz złożona z pierwszych $m - 1$ wierszy (o parzystej liczbie jedynek) wyznacza jednoznacznie ostatni wiersz macierzy (macierz należy uzupełnić, wstawiając 1 do kolumn z nieparzystą liczbą 1 w pierwszych $m - 1$ wierszach i 0 w pozostałych kolumnach). Zauważmy, że tak dodany wiersz zawiera parzystą liczbę jedynek – w przeciwnym przypadku łączna liczba jedynek w pierwszych $m - 1$ wierszach byłaby nieparzysta.

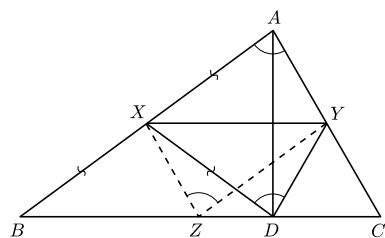
Pojedynczy wiersz o parzystej liczbie jedynek można wybrać na 2^{n-1} sposobów – jest to liczba podzbiorów zbioru n -elementowego o parzystej liczbie elementów. Zatem $m - 1$ wierszy można wybrać na $(2^{n-1})^{m-1} = 2^{(n-1)(m-1)}$ sposobów, co jest równie liczbie interesujących nas macierzy.



Wydaje się, że trudno byłoby dziś znaleźć badaczy, którzy zgadzaliby się z założeniem biologicznym. Natomiast bez założenia ontologicznego opis świata za pomocą języka byłby chyba niemożliwy.



Rozwiązanie zadania M 1438.
Niech Z będzie środkiem boku BC .



Ponieważ trójkąty AXY i ZYX są przystające, to $\sphericalangle XZY = \sphericalangle XAY = \sphericalangle XDY$. W takim razie punkty X, Y, D, Z leżą na jednym okręgu. Stąd trapez $XYZD$ jest równoramienny, w szczególności $XD = ZY = \frac{1}{2}AB = XB = XA$. Punkty A, B, D leżą więc na okręgu o środku X i promieniu $\frac{1}{2}AB$. Innymi słowy, punkt X jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD i jednocześnie jest środkiem boku AB tego trójkąta. Ten trójkąt musi zatem mieć kąt prosty przy wierzchołku D .

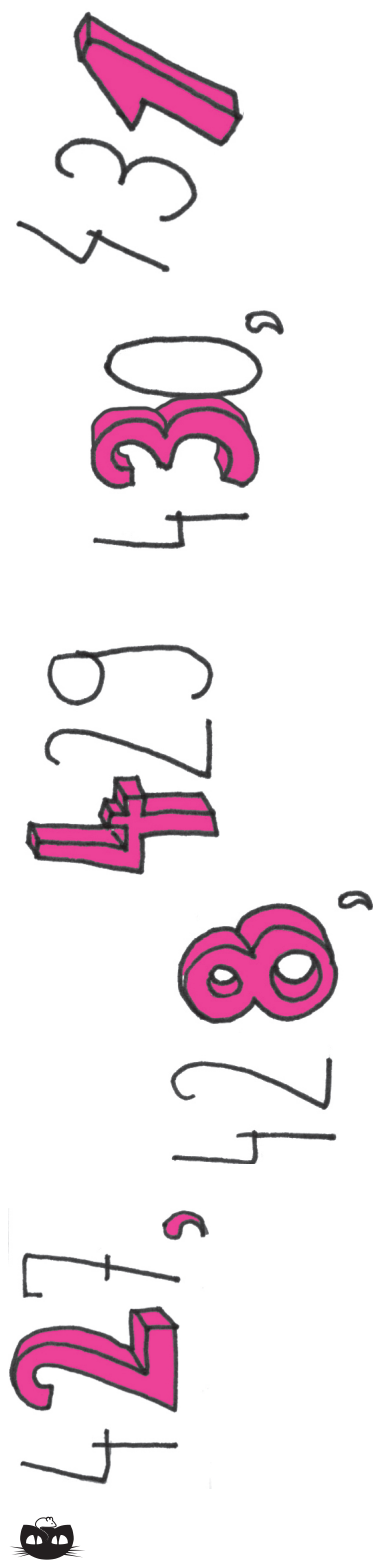
Rozpad. Najsurowsza krytyka sztucznej inteligencji nadeszła ze strony filozofii, głównie za sprawą Johna Searle'a i Huberta Lederera Dreyfusa. Słynny argument „chińskiego pokoju” Searle'a zdawał się pokazywać, że niemożliwe jest, aby program komputerowy cokolwiek „rozumiał” czy też miał „świadomość”. Tym samym program budowy maszyny *myślącej* przy użyciu programów komputerowych jest skazany na niepowodzenie. Tymczasem krytyka Dreyfusa skierowana jest wprost przeciwko sztucznej inteligencji i podważa jej pozostałe, być może nawet istotniejsze, założenia. Tezy, przeciwko którym występuje Dreyfus, to, po pierwsze, *założenie biologiczne*: mózg to mechanizm manipulujący symbolami, podobnie jak komputer, po drugie, *założenie psychologiczne*: umysł to mechanizm manipulujący symbolami, podobnie jak komputer, po trzecie, *założenie epistemologiczne*: inteligentne zachowanie można sformalizować i tym samym skopiować przy użyciu maszyny, i wreszcie *założenie ontologiczne*: świat składa się z niezależnych, nieciągłych faktów.

Komercyjne systemy eksperckie budowane w latach osiemdziesiątych XX wieku nie okazały się wielkimi sukcesami. Zdobycie, sformalizowanie, a następnie właściwe wykorzystanie specjalistycznej wiedzy w jakiejś dziedzinie było problemem nie tylko technicznym, ale dotyczyło znowu problemu wiedzy potocznej. Po raz kolejny obietnice dokonywane w sztucznej inteligencji, tym razem w wydaniu komercyjnym, nie sprawdziły się. Dla większości badaczy stało się oczywiste, że postęp, jaki dokonał się w ciągu 40 lat przy projekcie zbudowania maszyny myślącej, a więc takiej, która przeszłaby test Turinga, był znikomy. Ogrom pracy, funduszy i ludzkich talentów zaangażowanych w tę dziedzinę był niewspółmierny do osiągniętych efektów. Co więcej, wielu badaczy miało poczucie, że droga, którą obrano, prowadzi donikąd. Z drugiej strony, nawet najzagorzalsi krytycy programu sztucznej inteligencji musieli przyznać, że w niemal każdej z jej poddziedzin dokonania były znaczące. Nic zatem dziwnego, że to właśnie w tych poddziedzinach koncentruje się dziś wysiłek badaczy. Począwszy od lat dziewięćdziesiątych, ze sztucznej inteligencji wyodrębniła się robotyka, przetwarzanie języka naturalnego, teoria decyzji i wiele innych. Każda z tych dziedzin organizuje swoje własne konferencje i wydaje pisma naukowe, w niewielkim tylko stopniu wchodząc w interakcje z innymi dziedzinami. Tak oto, dla większości badaczy, podniosły cel zbudowania maszyny myślącej stał się celem ulotnym czy wręcz nieistotnym.

Czy jest zatem coś, co spaja dziedzinę nazywaną wciąż jeszcze sztuczną inteligencją? Jaki cel przyświeca tym wszystkim, którzy usiłują zbudować systemy percepcji, podejmowania decyzji, wnioskowania czy uczenia się? Wydaje się, że wyróżnić można co najmniej trzy stanowiska w tej sprawie. Pierwszą – stanowiącą dziś mniejszość – postawę reprezentują ci, którzy nadal uważają, że celem sztucznej inteligencji jest zbudowanie maszyny imitującej zachowanie (a więc i myślenie) człowieka. Druga postawa apeluje o odrzucenie ludzkiego zachowania i myślenia jako wzorca dla sztucznej inteligencji i uważają, że najważniejsze jest budowanie maszyn, które przewyższają ludzkie zdolności umysłowe w jakiś użyteczny sposób. Dla uzasadnienia skuteczności tej metody badacze przywołują przykład aeronautyki, która odniosła sukces dopiero wówczas, gdy przestała w konstrukcji samolotów imitować ptaki. Trzecia wreszcie postawa, najbardziej, jak się wydaje, powszechna, to całkowite porzucenie idei budowy maszyny myślącej. Zamiast tego proponuje skoncentrowanie na budowie urządzeń i systemów, które maksymalizują zadaną miarę wydajności.

Druga z opisanych wyżej postaw jest najbliższa programowi kognitywistyki. Badamy procesy poznawcze – ludzkie, zwierzęce czy maszynowe – nie po to, by zbudować imitację człowieka, ale po to, by go zrozumieć. Wykorzystujemy w tym celu dane z każdej nauki, która nam na ten temat coś może powiedzieć: psychologii, neurofizjologii, lingwistyki czy właśnie sztucznej inteligencji w ostatnim rozumieniu. Projektowanie robotów nie musi być już celem samym w sobie, ale środkiem do zrozumienia zachowań i procesów myślowych ludzi i zwierząt. Wielu badaczy obarcza test Turinga odpowiedzialnością za wyznaczenie nieosiągalnego, niepotrzebnego i niewiele znaczącego wzorca dla sztucznej inteligencji.

Wydaje się więc, że HAL 9000 na długo pozostanie tylko filmową fantazją.



Informatyczny kącik olimpijski (77): Wybrakowany ciąg

W tym miesiącu omówimy zadanie *Sequence*, które pojawiło się na tegorocznej edycji Bałtyckiej Olimpiady Informatycznej. Na tablicy napisano n kolejnych liczb całkowitych $p, p + 1, \dots, p + n - 1$. Następnie z każdej liczby usunięto wszystkie cyfry oprócz jednej. Znając ciąg n cyfr d_0, d_1, \dots, d_{n-1} , które pozostały na tablicy, należy wyznaczyć minimalną wartość p , od której mógł zaczynać się pierwotny ciąg.

Przykładowo, ciąg cyfr 2, 8, 4, 3, 1 mógł powstać z pięciu kolejnych liczb naturalnych w następujący sposób: 427, 428, 429, 430, 431.

Zacznijmy od prostej obserwacji, że dla każdego ciągu cyfr szukana liczba p istnieje. Wystarczy zauważyć, że dla $p = 1234567890 \cdot 10^{\lceil \log_{10} n \rceil}$ wszystkie liczby z ciągu $p, p + 1, \dots, p + n - 1$ zaczynają się od prefiksu zawierającego wszystkie możliwe cyfry.

Zadanie jest niełatwe i tylko jeden z uczestników olimpiady zdobył za nie maksymalną liczbę punktów. Kluczowe dla rozwiązania jest przyjrzenie się cyfrze jedności liczby p ; oznaczmy ją przez x . Wyznacza ona jednoznacznie cyfry jedności pozostałych liczb pierwotnego ciągu – będą to kolejno

$$x_0 = x, \quad x_1 = (x + 1) \bmod 10, \quad \dots, \quad x_{n-1} = (x + n - 1) \bmod 10.$$

Jeśli $x_i = d_i$, to pozostałe cyfry i -tej liczby mogą być dowolne. W przeciwnym przypadku cyfra d_i musi się pojawić na dalszej pozycji w i -tej liczbie. Podzielmy teraz poszukiwany ciąg na bloki zaczynające się na takich pozycjach, że $i = 0$ lub $x_i = 0$. Każdy blok (oprócz pierwszego i ostatniego, które mogą być krótsze) zawiera 10 liczb, które w pierwotnym ciągu będą się różnić jedynie na cyfrze jedności. Zatem ich wspólny prefiks będzie musiał zawierać wszystkie cyfry ze zbioru $\{d_j \mid i \leq j < i + 10, x_j \neq d_j\}$, gdzie i jest początkową pozycją bloku. Możemy więc rozważyć 10 razy krótszy ciąg – jego elementy będą zbiorami cyfr, które muszą wystąpić w kolejnych blokach, i powtórzyć powyższe rozumowanie.

Zatem zadanie rozwiązujemy rekurencyjnie: dla danego n -elementowego ciągu D_0, \dots, D_{n-1} , zawierającego zbiory cyfr, które mają wystąpić w kolejnych liczbach, należy wyznaczyć minimalne p . Jeśli $n = 1$, to odpowiedzią jest liczba zawierająca wszystkie cyfry ze zbioru D_0 (w kolejności rosnącej). Dla $n = 2$ mamy dwa przypadki: albo $x \neq 9$ i wtedy liczby mają ten sam prefiks, więc rekurencyjnie znajdujemy rozwiązanie dla zbioru cyfr $(D_0 - \{x\}) \cup (D_1 - \{x + 1\})$, albo $x = 9$ i rekurencyjnie rozpatrujemy ciąg $D_0 - \{9\}, D_1 - \{0\}$, wiedząc, że nie oplaca nam się więcej rozpatrywać drugiego przypadku. Zatem rozwiązanie dla ciągów długości $n \leq 2$ znajdujemy w czasie stałym.

W końcu dla $n \geq 3$ przeglądamy wszystkich 10 kandydatów x na cyfrę jedności p . Dla każdego z nich budujemy ciąg o długości $n' \leq \lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 2 < n$, zawierający sumy zbiorów dla kolejnych bloków, i rekurencyjnie wyznaczamy dla niego wartość $p'(x)$. Szukane p to minimum ze zbioru $\{10 \cdot p'(x) + x \mid 0 \leq x \leq 9\}$.

Złożoność czasowa algorytmu wyraża się wzorem rekurencyjnym

$$T(1) = T(2) = O(1), \quad T(n) = 10 \cdot (T(\lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 2) + O(n)),$$

którego rozwiązaniem jest $T(n) = O(n \log n)$.

Niestety, powyższy algorytm ma dość istotny feler – działa przy założeniu, że liczby w pierwotnym ciągu mogą mieć zera wiodące (np. dla $n = 1$ i zbioru $D_0 = \{0, 1, 3, 7\}$ konstruujemy $p = 0137$ zamiast poprawnego $p = 1037$). I, jak to zwykle bywa w zadaniach tego typu, naprawienie tej usterki wymaga dość żmudnego przyjrzenia się poszczególnym przypadkom, w którym takie zero może się pojawić. W szczególności, gdy cyfra jedności jednej z liczb należącej do bloku jest „istotnym” zerem (czyli $x_i = 0$ oraz $0 \in D_0$), wygodnie jest dorzucić do zbioru D odpowiadającego temu blokowi dodatkowy element sygnalizujący, że w p musi wystąpić jakaś niezerowa cyfra. Szczegóły techniczne pozostawiamy do dopracowania Czytelnikom.

Tomasz IDZIASZEK

Rozwiązanie zadania F 867.

W warunkach zadania masa wody dm parująca w bardzo krótkim czasie dt jest proporcjonalna do pola powierzchni wody S , czyli $dm = \alpha \cdot S dt$, gdzie α jest współczynnikiem proporcjonalności. Zmiana poziomu wody w akwarium dh wiąże się ze zmianą jej masy zależnością $dm = \rho \cdot S dh$, gdzie ρ – gęstość wody. Stąd $dh = (\alpha/\rho) \cdot dt$. Tak więc w stałych warunkach parowania zmiana poziomu wody jest proporcjonalna do czasu. Jeżeli więc przez dwie doby poziom wody obniżył się o 1 centymetr, to cała woda, przy głębokości akwarium równej 15 cm, wyparuje po 30 dobach.

Wartość nieoczekiwana

Piotr CHRZĄSTOWSKI-WACHTEL*



W artykule „Gra, w którą można naprawdę dużo wygrać” z *Delty* 9/2014 zajęliśmy się tzw. paradoksem petersburskim, w którym wartość oczekiwana zmiennej losowej jest nieskończona. Paradoks ten można wyjaśnić, odwołując się do intuicji z teorii gier. Przy grze dwuosobowej, w której gramy na pieniądze, można często określić oczekiwaną wartość rozgrywki. Jest to suma możliwych wyników ważona prawdopodobieństwami ich uzyskania. Załóżmy, że obliczenia wykonamy z punktu widzenia jednego z zawodników. Jeśli po odjęciu stawki, którą zapłacił, otrzymamy wartość dodatnią, to gracz ten będzie mniej więcej tyle średnio wygrywał, jeśli ujemną, to tyle będzie średnio przegrywał. Jeśli dodatkowo tak obliczona wartość oczekiwana okaże się skończona, to wyznaczając wartość oczekiwaną wypłaty otrzymamy stawkę graniczną: powyżej tej stawki nie opłaca się płacić za udział w grze, poniżej warto w taką grę wchodzić. Gdyby zaś wartość oczekiwana takiej gry okazała się nieskończona, to właśnie mielibyśmy do czynienia z paradoksem petersburskim.

W oryginalnym zadaniu, rozważanym jeszcze w XVIII w. przez Daniela Bernoulliego, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2^n}$ wygrywalibyśmy 2^n zł. Łatwo sprawdzić, że wartość oczekiwana takiego rozkładu zmiennej losowej wynosi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Na pierwszy rzut oka wygląda to niewiarygodnie: w każdej grze wygrywamy przecież skończoną ilość pieniędzy. Jak więc można wygrać średnio nieskończenie wiele? Otóż nie można! Wyobrażanie sobie wartości oczekiwanej jako średniego wyniku było błędem. Jedyne, co nam pozostaje, to odwołać się do obliczonej wartości granicznej i przyjąć, że gdy jest ona nieskończona, to opłaca się w takiej grze postawić każdą sumę, aby tylko uzyskać możliwość zagrania. Gdy przyjrano się temu fenomenowi bliżej, okazało się, że ludzie w to nie wierzą i nie są skłonni do aż takiego hazardu. W badaniu ankietowym, opisanym na początku lat 80. XX wieku, deklarowana średnia wartość, którą ankietowani byli skłonni postawić w grze Bernoulliego wynosiła 25 zł. To zastanawiające: czyżbyśmy aż tak nie wierzyli w matematykę? Czyżby nasze intuicje były zbyt dalekie od rzeczywistości? Może po prostu kłania się zwykła, a jakże powszechna ignorancja matematyczna? Niewykluczone też, że w końcu istnieje jeszcze jakiś inny powód.

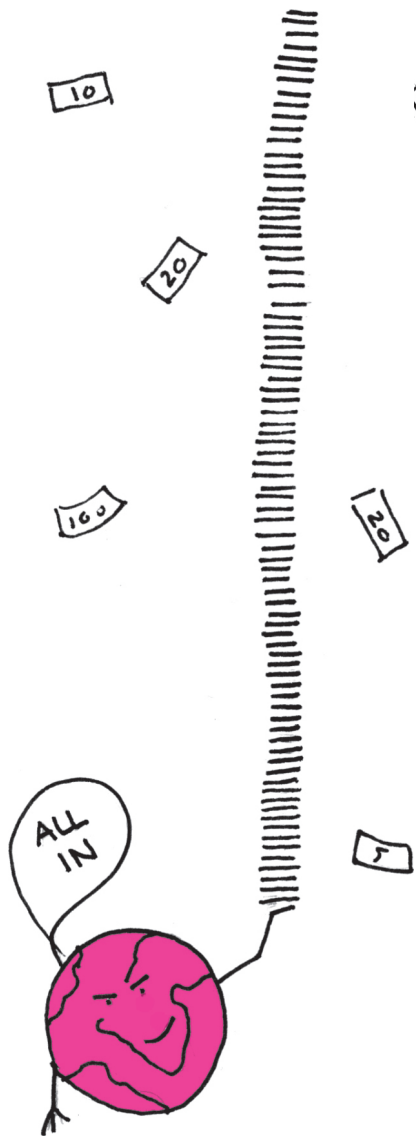
Przyjrzyjmy się bliżej możliwym przyczynom takiej nieufności. Pamiętajmy, że warunkiem uzyskania nieskończonej wartości oczekiwanej jest pełna wypłacalność naszego przeciwnika. Jeśli jego zasoby pieniężne są ograniczone, to deklaruje on, że gra nie może trwać dłużej niż jakaś z góry ustalona liczba rzutów. Oznacza to, że jeśli na przykład ustalimy, że rzutów nie może być więcej niż 10, to partner wypłaci nam co najwyżej 1024 zł. W tym przypadku najdalej po 9 rzutach już będziemy znali wynik gry. Jeśli wypadnie kolejno 9 reszek, to już możemy nie wykonywać ostatniego rzutu monetą, gdyż wtedy i tak dostaniemy tę maksymalną stawkę wynikającą z przyjętego ograniczenia. Cały paradoks jednak wtedy znika. Niezależnie od wysokości deklarowanego limitu rzutów, wartość oczekiwana wypłaty staje się skończona. Bez trudu więc możemy wyznaczyć graniczną wartość, do wysokości której opłaca się wejść do gry. Załóżmy więc ogólnie, że gramy w grę Bernoulliego za pomocą monety: rzucamy tak długo, aż wypadnie orzeł. Liczymy liczbę k reszek, które wcześniej wypadły, a nasz przeciwnik wypłaca nam tyle złotych, ile wynosi dwa podniesione do liczby wykonanych rzutów, czyli 2^{k+1} . Gdy maksymalna liczba reszek zostanie ustalona na r , wówczas wartość oczekiwana naszej wygranej wynosi

$$\sum_{k=1}^r \frac{1}{2^k} 2^k + \frac{1}{2^r} 2^r = r + 1.$$

Pierwsze r składników tej sumy odpowiada wypadnięciom kolejno zera reszek, jednej reszki, dwóch reszek, ..., $r - 1$ reszek. Ostatni składnik zbiera resztkę



*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

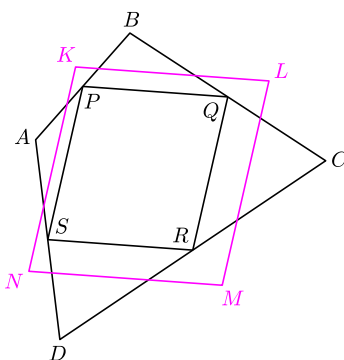


przypadków. Załóżmy też, dla uproszczenia rachunków, że nasz przeciwnik dysponuje kwotą 2^{r+1} i tyle właśnie oferuje nam jako maksymalną wypłatę. Wtedy, zgodnie z przeprowadzonymi rachunkami, graniczną wartością, która ustala stan równowagi gry jest $r + 1$. Każdą kwotę mniejszą opłaca się postawić, większej się nie opłaca, a postawienie dokładnie tej kwoty jest neutralne: średnio nic nie zyskamy ani nie stracimy.

No cóż – widać, że grając z partnerem dysponującym kwotą będącą potęgą dwójki, warto wnieść do gry co najwyżej tyle pieniędzy, ile wynosi wykładnik tej potęgi, czyli logarytm dwójkowy z deklarowanej przez niego wartości. Widać też, że dla wartości niebędących potęgami dwójki to też będzie zależność logarytmiczna – w końcu mała różnica w obliczeniach dotyczy tylko ostatniego wyrazu. Wynik ten oznacza jednak, że wcale tak dużo nie powinniśmy być skłonni wydawać. Funkcja logarytmiczna, choć dąży do nieskończoności, to rośnie przecież bardzo wolno. Widzimy na przykład, że przeciwko partnerowi oferującemu co najwyżej 1024 zł nie powinniśmy stawiać więcej niż 10 zł. To jest jeszcze dość intuicyjne. Ale nawet jeśli stanie naprzeciw nas Bill Gates ze swoim majątkiem szacowanym na około 70 miliardów dolarów i powie, że gra z nami, gwarantując naszą wygraną wszystkim, co posiada (no może niech to będzie 68719476736, czyli 2^{36} dolarów dla łatwego rachunku – niech już Bill tak bardzo nie ryzykuje i coś sobie jednak zostawi w razie konieczności wypłaty wszystkiego, co zadeklarował), to nam opłacałoby się postawić w takiej grze zaledwie 36 dolarów! Idźmy dalej. Gdyby postawić wszystkie pieniądze znajdujące się w obiegu na świecie, a ich ilość szacuje się na mniej więcej 3 biliony dolarów ($3 \cdot 10^{15}$), wówczas nadal kwota równowagi nie byłaby imponująca – plasowałaby się w okolicy 50 dolarów. Swoją drogą śmiesznie byłoby wygrać całą pulę w takiej grze i stać się właścicielem wszystkich pieniędzy w obiegu światowym! Cóż – prawdopodobieństwo, że cały świat byłby zainteresowany zagranem w taką grę jest chyba jeszcze mniejsze niż szansa wygranej, nawet jak dorzucimy jeszcze z 5 dolarów na zachętę.

Widać więc, że ludzie ankietowani we wspomnianym badaniu wcale nie byli tacy głupi. Nawet byliby skłonni nieco przepłacić: kwota 25 dolarów odpowiada limitowi ponad 33 milionów. Szansa tak dużej wygranej to jeden do ponad 16 milionów. Mniej niż trafienie szóstki w totolotka, więc naprawdę trzeba by długo grać, żeby trafić taką sumę. Po prostu badani mieli zdrowe wyczucie nieskończoności, która, choć duża, to w realnym świecie przecież nie istnieje. Ciekawe, że matematyka, którą Hermann Weyl nazwał (a wielu matematyków podziela ten pogląd) nauką o nieskończoności, jest badaniem rzeczy tak bardzo niewystępujących w przyrodzie, a nasze intuicje są często dalekie od tego, co myślą o tym matematycy.

Czy potrafisz?



Środek ciężkości wierzchołków czworokąta to środek równoległoboku, który tworzą środki jego boków. Rzeczywiście, jeśli wierzchołki czworokąta $ABCD$ obciążymy jednakowo ciężarami m , to środkiem ciężkości punktów A i B będzie środek P odcinka AB obciążony przez $2m$. Podobnie, środkiem ciężkości C i D będzie środek R odcinka CD obciążony przez $2m$. Zatem środkiem ciężkości wszystkich wierzchołków będzie środek PR . Powtarzając to rozumowanie dla odcinków AD i BC , stwierdzamy, że środkiem ciężkości wszystkich wierzchołków jest środek QS . Odcinki te mają więc wspólny środek, wobec tego czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem, a jego środek jest środkiem ciężkości wierzchołków czworokąta $ABCD$.

Na rysunku jest jeszcze jeden równoległobok $KLMN$. Powstał on z prostych przechodzących przez punkty dzielące boki czworokąta $ABCD$ na trzy równe części. Czy potrafisz udowodnić, że jego boki są równoległe do boków równoległoboku $PQRS$? – to nie powinno być trudne. Czy potrafisz wykazać, że środki równoległoboków $PQRS$ i $KLMN$ pokrywają się tylko wtedy, gdy $ABCD$ też jest równoległobokiem? – to już trudniejsze. A czy potrafisz udowodnić, że środek $KLMN$ jest środkiem ciężkości jednorodnej „deseczki” $ABCD$? – to jest już naprawdę trudne!

M.K.

Zadania z indywidualnością

Wiktor BARTOL

Matematyka, zwłaszcza tzw. szkolna, wypracowała przez lata procedury rozwiązywania określonego typu zadań. Gdy rozpoznajemy problem jako równanie kwadratowe, w głowie pojawia się hasło „bekwadratminusczteryace” i już wszystko wiadomo, niezależnie od tego, jak w rzeczywistości nazwalibyśmy współczynniki funkcji kwadratowej. Kiedy widzimy wartość bezwzględną wyrażenia, w pierwszym odruchu rozbijamy zadanie na przypadki: gdy wyrażenie jest dodatnie i gdy jest ujemne. Pierwiastek kwadratowy w równaniu skłania do podniesienia obu stron do kwadratu, by jak najszybciej się owego pierwiastka pozbyć. A przecież wiele zadań ma specyficzną konstrukcję, własną indywidualność, która często pozwala stosować prostsze lub bardziej eleganckie metody rozwiązania. Czyż do rozwiązania równania $x^2 - 4 = 0$ trzeba się odwoływać do wyróżnika funkcji kwadratowej?



Nie zawsze warto poddawać się pierwszym odruchom. Rozwiązanie omijające ogólną procedurę, wykorzystujące szczególne cechy konkretnej sytuacji matematycznej, daje satysfakcję nie tylko autorowi, ale także czytelnikom tego rozwiązania, otwiera umysły i zachęca do poszukiwania własnych dróg. Nawet jeśli nietypowe rozwiązanie nie jest krótsze od rozwiązania wynikającego z procedur, warto je pokazywać. Poniżej parę przykładów rozwiązań standardowych (przez co będziemy rozumieli rozwiązania „pierwszego odruchu”) i niestandardowych (wynikających z niepoddania się odruchom). Klasyfikacja rozwiązań do jednej lub drugiej kategorii jest, rzecz jasna, subiektywna – różni ludzie miewają różne odruchy – ale ułatwia ujawnienie tego, co określiliśmy jako indywidualność zadania. Niemal wszystkie przykłady, zarówno standardowe, jak i niestandardowe, pochodzą z rzeczywistych prac uczniów licealnych.

Zadanie 1. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej f danej wzorem $f(x) = x^2 - 2x + 10$.

Rozwiązanie standardowe: Proste, mamy przecież wzór na najmniejszą wartość funkcji kwadratowej (gdy takowa wartość istnieje): to „minus delta przez cztery a”, więc obliczamy „deltę”, dopisujemy minus, dzielimy przez 4 i otrzymujemy najmniejszą wartość równą 9.

Rozwiązanie niestandardowe: $x^2 - 2x + 10 = (x - 1)^2 + 9$, zatem najmniejszą wartość funkcja f osiąga wtedy, gdy $(x - 1)^2 = 0$ i jest ona równa 9.

Komentarz: Indywidualność tego zadania, jak widać, polega na tym, że – wbrew pozorom – nie wymaga ono teorii funkcji kwadratowej; wystarczą wzory skróconego mnożenia (można nawet nie wiedzieć o postaci kanonicznej takiej funkcji).

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $x^2 - 2x + |x - 1| - 1 = 0$.

Rozwiązanie standardowe: Nie ma się nad czym zastanawiać: rozpatrujemy dwa przypadki: $x < 1$ oraz $x \geq 1$. W pierwszym otrzymujemy równanie $x^2 - 3x = 0$, które ma tylko jedno rozwiązanie wśród liczb mniejszych od 1, mianowicie 0, w drugim – równanie $x^2 - x - 2 = 0$, które rozwiązujemy jak każde porządne równanie kwadratowe, wybieramy rozwiązanie nie mniejsze od 1, czyli 2.

Rozwiązanie niestandardowe: Może jednak chwilę się zastanówmy. Rozszerzmy nieco równanie:

$$x^2 - 2x + |x - 1| - 1 = (x^2 - 2x + 1) + |x - 1| - 2 = |x - 1|^2 + |x - 1| - 2.$$

Niech $t = |x - 1|$. Rozwiązujemy równanie $t^2 + t - 2 = 0$ i otrzymujemy $t = -2$ lub $t = 1$. Pierwsze rozwiązanie odpada ($t \geq 0$), zatem $t = |x - 1| = 1$, a stąd $x = 0$ lub $x = 2$.

Komentarz: Miła okoliczność – współczynniki pozwalają zastosować wzór skróconego mnożenia tak, że wszystko ładnie się związa.

Zadanie 3. Dane są takie liczby rzeczywiste x, y , że $\frac{x}{x+y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Oblicz $\frac{y}{x+y}$.

Rozwiązanie standardowe: Idąc za odruchem przekształcania, sprowadzamy równanie do postaci $2x = \sqrt{2}(x+y)$, skąd otrzymujemy $y = (\sqrt{2}-1)x$ i podstawiamy: $\frac{y}{x+y} = \frac{(\sqrt{2}-1)x}{x+y} = (\sqrt{2}-1)\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie niestandardowe: Oczywiście $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1$, zatem $\frac{y}{x+y} = 1 - \frac{x}{x+y} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Komentarz: Wniosek – nie należy przystępować do obliczeń z zamkniętymi oczami. Warto dobrze przyjrzeć się zadaniu, by dostrzec jego niezbyt głęboko ukrytą strukturę.



Zadanie 4. Niech f będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych o stopniu co najmniej 1. Wykaż, że jeśli c i d są różnymi liczbami całkowitymi, to $c-d$ dzieli $f(c) - f(d)$.

Rozwiązanie standardowe: Musimy przecież wiedzieć, jak wielomian wygląda, więc niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Wówczas $f(c) - f(d) = a_n(c^n - d^n) + a_{n-1}(c^{n-1} - d^{n-1}) + \dots + a_1(c - d)$. Ze wzorów skróconego mnożenia wynika, że każdy składnik sumy jest podzielny przez $c-d$, zatem suma $f(c) - f(d)$ jest także podzielna przez $c-d$.

Rozwiązanie niestandardowe: Z twierdzenia o dzieleniu wielomianów z resztą oraz z twierdzenia Bézout wynika, że mamy $f(x) = q(x)(x-d) + f(d)$ dla pewnego wielomianu q (którego współczynniki także są całkowite). Stąd $f(c) = q(c)(c-d) + f(d)$, czyli $f(c) - f(d) = q(c)(c-d)$, gdzie $q(c)$ jest liczbą całkowitą.

Komentarz: Trudno uznać rozwiązanie standardowe za szczególnie skomplikowane, ale o ileż ładniejsze jest to drugie rozwiązanie, odwołujące się do twierdzeń o podzielności wielomianów. A przy tym wymaga mniej znaczków.

Zadanie 5. Zbadaj, czy istnieje taki wielomian f stopnia 3 o współczynnikach całkowitych, że $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ oraz $f(3) = 0$.

Rozwiązanie standardowe: Niech $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ będzie wielomianem przyjmującym zadane wartości. Podstawiamy je i widzimy, że $d = 1$, a pozostałe współczynniki są związane układem równań:

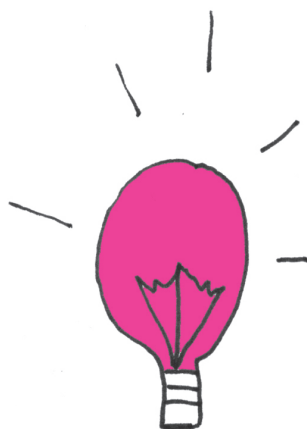
$$\begin{cases} a + b + c + 1 = 2, \\ 8a + 4b + 2c + 1 = 3, \\ 27a + 9b + 3c + 1 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ (dowolną poprawną metodą) i okazuje się, że wartości współczynników nie są całkowite. Tak więc taki wielomian f o współczynnikach całkowitych nie istnieje.

Rozwiązanie niestandardowe 1: Z warunków zadania wynika, że jeśli f jest takim wielomianem, to $f(3) - f(0) = 27a + 9b + 3c = -1$. Obie strony drugiej równości są liczbami całkowitymi, jednak lewa strona jest podzielna przez 3, prawa nie. Sprzeczność.

Rozwiązanie niestandardowe 2: Z warunków zadania wynika, że wyraz wolny domniemanego wielomianu f ma być równy 1, a 3 ma być pierwiastkiem (całkowitym) tego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Stąd liczba 3 powinna być dzielnikiem wyrazu wolnego – a nie jest.

Komentarz: Rzucając się do obliczeń, przegapiamy fakt, że niektóre informacje w zadaniu są zbędne. Po co wiedzieć, że $f(1) = 2$ i $f(2) = 3$? Rozwiązania niestandardowe nie zajmują się układem równań; kluczem do dowodu jest podzielność.



Zadanie 6. Niech $f(x) = x^2 - x + 1$. Znajdź wszystkie wartości x , dla których $f(f(x)) = f(x)$.

Rozwiązanie standardowe: Po podstawieniu otrzymujemy równanie $(x^2 - x + 1)^2 - (x^2 - x + 1) + 1 = x^2 - x + 1$, co po przekształceniach prowadzi do równania $x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = 0$, co daje $x = 0$ lub $x = 1$.

Rozwiązanie niestandardowe 1: Dla jakich wartości a zachodzi równość $f(a) = a$? Sprawdzamy: $a^2 - a + 1 = a$, gdy $a = 1$. Pozostaje sprawdzić, dla jakich wartości x mamy $f(x) = 1$: $x^2 - x + 1 = 1$, gdy $x^2 - x = 0$, a więc gdy $x = 0$ lub $x = 1$.

Rozwiązanie niestandardowe 2: Jeśli funkcja kwadratowa przyjmuje tę samą wartość w punktach a i b , to punkty te muszą być położone na osi x symetrycznie względem osi symetrii wykresu funkcji. Dla funkcji f osią symetrii jest prosta $x = \frac{1}{2}$, zatem z warunku $f(f(x)) = f(x)$ wynika, że $x = \frac{1}{2} - c$ i $f(x) = \frac{1}{2} + c$ dla pewnego c . Stąd dochodzimy do równania

$$f(f(x)) = \left(\frac{1}{2} + c\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + c\right) + 1 = \frac{1}{2} + c = f(x),$$

z którego otrzymujemy $c = \frac{1}{2}$. W konsekwencji $x = 1$, a z symetrii sytuacji mamy drugie rozwiązanie: $c = -\frac{1}{2}$ oraz $x = 0$.

Komentarz: Rozwiązanie standardowe jest dość proste, ale pierwsze rozwiązanie niestandardowe, choć ideowo dość podobne, wydaje się bardziej przejrzyste, prostsze są równania, jakie trzeba rozwiązać. Drugie rozwiązanie niestandardowe utraciło co prawda zaletę prostoty, ale opiera się na innej własności funkcji kwadratowej.

* * *

Na koniec przykład niestandardowego dowodu, który nie pochodzi z prac uczniowskich (można go odnaleźć w sieci), ale ma pewną cechę, z powodu której warto go przytoczyć. To dowód faktu, że

dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ liczba $\sqrt[n]{2}$ jest liczbą niewymierną.

Przypuśćmy, że $n > 2$ i istnieją liczby całkowite a i b względnie pierwsze takie, że $\sqrt[n]{2} = \frac{a}{b}$. Wtedy $2b^n = a^n$, czyli $b^n + b^n = a^n$. A to stoi w jawnej sprzeczności z Wielkim Twierdzeniem Fermata: dla $n > 2$ równanie $x^n + y^n = z^n$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych!

Jakaż to cecha powoduje, że warto zobaczyć ten dowód? Trudno go określić jako prostszy od dowodu standardowego, opierającego się na własnościach podzielności, gdyż zawiera potężne narzędzie, zbudowane przez Pierre'a de Fermata i Andrew Wilesa, daleko wykraczające poza to, co moglibyśmy nazwać prawem dowodu do obrony własnej. Z tego samego powodu trudno też uznać go za elegancki. Otóż jest on po prostu... zabawny!

W matematyce zdanie staje się twierdzeniem, gdy zostaje wsparte dowodem. Nierzadkie są jednak przypadki, gdy po udowodnieniu twierdzenia zaczynają pojawiać się publikacje proponujące inny jego dowód. Dlaczego dowodzi się czegoś, co już zostało udowodnione? Po pierwsze dlatego, że nieustannie trwa poszukiwanie dowodów prostych i ładnych. Po drugie zaś dlatego, że nowy dowód często odwołuje się do zupełnie innych własności matematycznych niż poprzednie, co pozwala zobaczyć samo twierdzenie pod innym kątem i lepiej zrozumieć jego miejsce wśród innych. Co widać na podanych wyżej prostych przykładach.

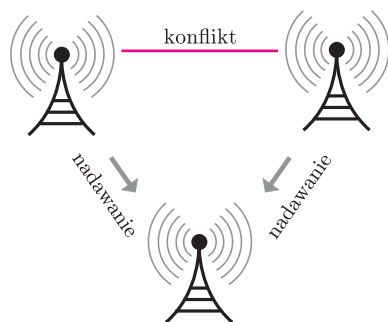
O modelowaniu przydziału częstotliwości za pomocą kolorowania grafów

Krzysztof WESEK*

Teoria grafów to gałąź matematyki, do której powstania impuls dało liczące sobie już ćwierć tysiąclecia słynne zagadnienie mostów królewieckich, rozwiązane przez Leonharda Eulera. Osobiście lubię patrzeć na matematykę nie tylko jako na zbiór problemów ciekawych samych w sobie, ale również jak na model rzeczywistości, narzędzie pozwalające efektywniej radzić sobie z rzeczywistymi zmartwieniami. Obecnie teoria grafów staje się jednym z najpopularniejszych takich narzędzi, używanym chętnie przez matematyków (na rzecz innych gałęzi tej nauki), informatyków, fizyków, chemików, a nawet socjologów. Niniejszy artykuł ma na celu przedstawienie tego, jak zagadnienie kolorowania grafów służyć może za narzędzie przydatne w przydzielaniu częstotliwości nadajnikom w jednym z modeli sieci radiowej.

Problem nadajników

Nasze rozważania zaczniemy od rzeczywistego zagadnienia. Wyobraźmy sobie, że mamy sieć nadajników/odbiorców radiowych (telefonii komórkowej) – każdy nadajnik ma ograniczony zasięg bezpośredniej komunikacji z innymi nadajnikami. Urządzenia nadające na tej samej częstotliwości mają to do siebie, że mogą się wzajemnie zagłuszać, interferować – tzn. jeśli pewien nadajnik „słyszy” jednocześnie sygnały z dwóch innych, to tak naprawdę nic „nie słyszy”. Zakładamy, że stacje znajdujące się w swoim zasięgu (czyli mogące „rozmawiać” bezpośrednio między sobą) szybko uzgodnią nadawanie i nie będą jednocześnie wysyłać wiadomości do wspólnego sąsiada. Problem pozostaje z takimi stacjami, które nie mogą się komunikować bezpośrednio (są poza swoim zasięgiem), ale mają inną stację w swoim wspólnym zasięgu – a zatem mogą się czasem zagłuszać.

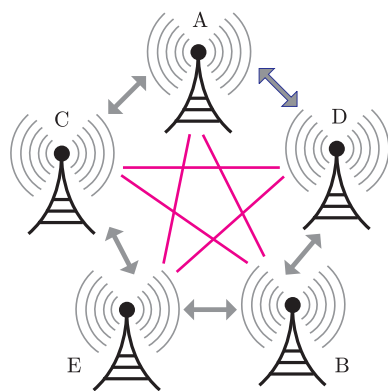


Jak można zapobiec zagłuszaniu w takich przypadkach? Możemy przydzielić każdej stacji pewien odcinek czasu (tzw. szczelinę czasową) w taki sposób, aby nadajniki potencjalnie konfliktowe otrzymały rozłączne odcinki czasu. Ale jak to zrobić? Z pomocą przyjdzie nam teoria grafów!

Klasyczne i ułamkowe kolorowanie grafów

Przypomnijmy, że grafem nazywamy parę (V, E) , gdzie V to zbiór wierzchołków, a E to pewien zbiór par wierzchołków z V nazywanych krawędziami.

W naturalny sposób przedstawimy konflikty w naszej sieci w postaci grafu: wierzchołki będą odpowiadać nadajnikom, a krawędziami połączymy te nadajniki, które mogą się zagłuszać, tzn. te, które są poza swoim zasięgiem, ale mają inny nadajnik w swoim wspólnym zasięgu. Obok mamy przykład tworzenia grafu konfliktów pewnej sieci – kolorowe linie oznaczają konflikt, czyli krawędź w grafie.

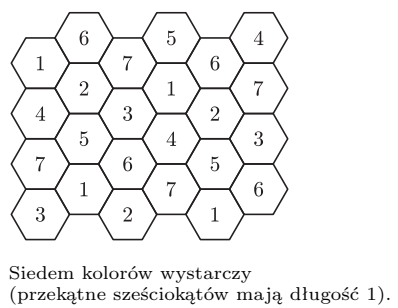
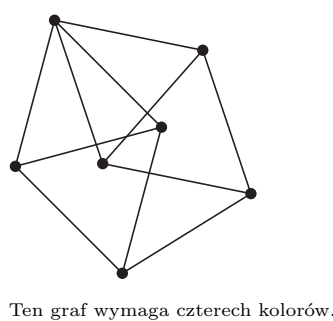
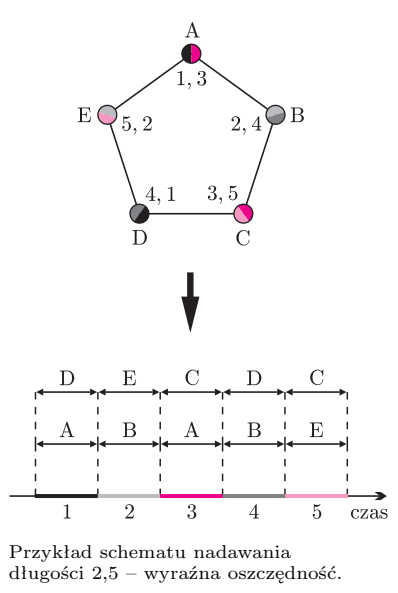
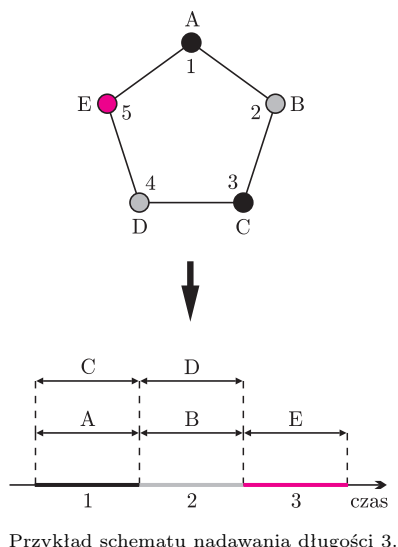


Przyjmijmy w tworzonym modelu, że wszystkie nadajniki są równie ważne, tzn. w ramach cyklu pracy każda stacja ma otrzymać pewną jednostkę czasu dostępnego do nadawania. Nasze pierwsze podejście będzie następujące: jeden cykl nadawania będzie składał się z k ponumerowanych liczbami $1, \dots, k$ odcinków czasu jednostkowej długości i będziemy starali się tak przydzielić wierzchołkom liczby, aby wierzchołki połączone krawędzią (sąsiedzi w grafie) otrzymały różne odcinki czasu. Im mniejsze k , dla którego uda się to zrealizować, tym lepiej – cykl nadawania będzie krótszy przy tej samej skuteczności. To, co właśnie opisaliśmy, to tak naprawdę klasyczne zagadnienie kolorowania grafu:

k -kolorowaniem grafu G nazywamy takie przyporządkowanie wierzchołkom kolorów spośród k kolorów, że każde wierzchołki połączone krawędzią mają różne kolory.

Liczbę chromatyczną $\chi(G)$ definiujemy jako minimalne k , dla którego istnieje k -kolorowanie grafu G .

*Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska



Zatem w naszym podejściu najlepszy przydział szczelin czasowych odpowiada kolorowaniu grafu G sieci na $\chi(G)$ kolorów.

A gdybyśmy podzielili odcinki czasu przydzielane nadajnikom na mniejsze kawałki, powiedzmy długości $1/d$? Nadal wymagamy, aby w jednym cyklu pracy każdy nadajnik otrzymał sumarycznie jedną jednostkę czasu, ale tym razem podzielmy cały cykl pracy (ponownie k odcinków) na odcinki długości $1/d$. Z tego wynika, że każdy nadajnik powinien otrzymać d odcinków, czyli d różnych liczb – sprowadza się to do tzw. ułamkowego kolorowania grafów:

(k, d)-kolorowaniem grafu G nazywamy takie przyporządkowanie wierzchołkom d -elementowych zbiorów kolorów spośród k kolorów, że każde wierzchołki połączone krawędzią otrzymują rozłączne zbiory
Ułamkową liczbę chromatyczną $\chi_f(G)$ grafu G definiujemy jako kres dolny liczb k/d , dla których istnieje (k, d) -kolorowanie grafu G .

Warto zwrócić uwagę na fakt, że ułamkowa liczba chromatyczna danego grafu jest zawsze nie większa niż liczba chromatyczna – wynika to z faktu, że $(k, 1)$ -kolorowanie jest tym samym co k -kolorowanie. Oznacza to, że podejście ułamkowe może dać tylko oszczędność w stosunku do klasycznego kolorowania!

Podkreślmy, że ułamek k/d odpowiada długości jednego cyklu pracy, przy całym czasie ustalonej skuteczności jednego cyklu. A zatem dążymy do cyklu pracy długości $\chi_f(G)$.

Jak znaleźć przydział czasów?

Jak więc możemy znaleźć konkretny schemat nadawania? Niestety, sprawa nie jest łatwa.

Wydaje się, że mogą być dwa podejścia:

- I. Obliczeniowe: stosowanie algorytmów kolorowania do konkretnych sieci/grafów;
- II. Uniwersalne: użycie narzędzi teoretycznych do uzyskania uniwersalnych rozwiązań.

W przypadku I problem polega na tym, że nie znamy szybkich algorytmów kolorowania grafów – zarówno w przypadku klasycznego kolorowania, jak i w ułamkowej wersji. Oznacza to, że dla małych grafów znajdziemy optymalne rozwiązanie, ale w przypadku większych grafów optymalne rozwiązanie ($\chi(G)$ bądź $\chi_f(G)$) jest poza zasięgiem możliwości obliczeniowych dzisiejszych komputerów. Można wtedy stosować tzw. algorytmy przybliżone: takie, które działają w rozsądnym czasie, ale najpewniej nie podadzą nam najlepszego kolorowania, a jedynie jakieś „niezłe” (zazwyczaj używające o wiele większej liczby kolorów niż teoretycznie niezbędna).

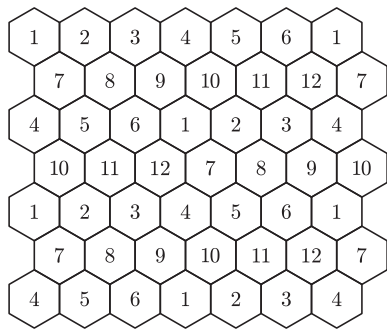
Okazuje się, że w przypadku II można zaproponować tak naprawdę uniwersalną *makię* wykorzystującą taką skończoną liczbę kolorów, która zadziała dla każdej, dowolnie skomplikowanej sieci nadajników. Nie jest to oczywiste, bowiem ogólnie dla każdego k istnieje graf, który wymaga więcej niż k kolorów (i podobnie dla ułamkowej wersji kolorowania). Jednak geometryczne własności układu nadajników upraszczają sytuację.

Kolorowanie płaszczyzny

Przed przedstawieniem wspomnianej makiety przyda się wstęp historyczny. Otóż w latach 60. XX wieku Edward Nelson zadał następujące pytanie:

ile kolorów potrzeba, aby pokolorować (nieskończony) graf G_1 , którego wierzchołkami są wszystkie punkty płaszczyzny euklidesowej \mathbb{R}^2 , a dwa punkty/wierzchołki są połączone krawędzią, jeśli znajdują się w odległości dokładnie 1?

Być może w pierwszej chwili to zaskakuje, ale taki graf można pokolorować na 7 kolorów. Mimo sporego zainteresowania tym problemem nie udało się poprawić znanego od kilkudziesięciu lat oszacowania $4 \leq \chi(G_1) \leq 7$.



Najoszczędniejsze znane kolorowanie klasyczne (średnica sześciokątów to 1).

Dalszy tok działania będzie taki, że punkty na płaszczyźnie będą oznaczały wszelkie możliwe miejsca, gdzie może znaleźć się nadajnik. Postawmy pytanie: w jakiej odległości mogą się znajdować nadajniki konfliktowe, gdy zasięg każdego nadajnika jest równy 1? Potencjalnie konfliktowa jest każda para nadajników w odległości z przedziału $(1, 2)$ – tylko wtedy nadajniki nie mogą się kontaktować bezpośrednio, ale mogą (choć nie muszą) mieć inny nadajnik we wspólnym zasięgu. Zastąpmy więc graf G_1 grafem G_2 :

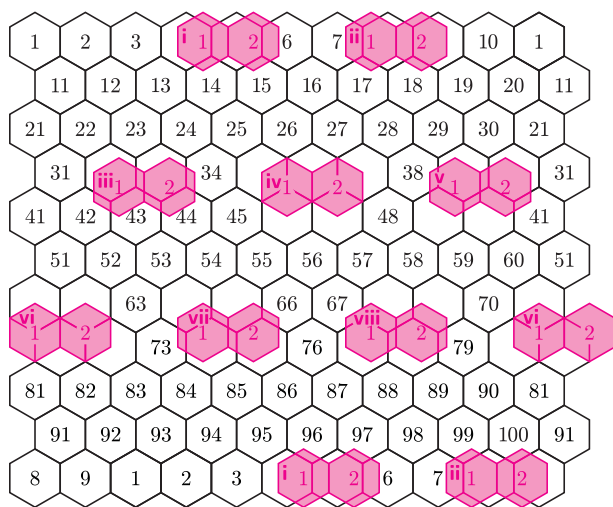
- zbiór wierzchołków to \mathbb{R}^2 ;
- krawędzią łączymy punkty leżące w odległości z przedziału $(1, 2)$.

Kolorowanie tego grafu będzie stanowiło uniwersalną makietę: wystarczy położyć konkretną sieć na płaszczyźnie makiety, odczytać kolory poprawnego kolorowania tej sieci, a co za tym idzie, poprawny schemat nadawania.

Najpierw więc pokolorujmy G_2 w klasyczny sposób. Oto najlepszy znany wynik.

Twierdzenie 1 ([1]). *Istnieje 12-kolorowanie grafu G_2 .*

Takie kolorowanie daje uniwersalny cykl nadawania długości 12.



Teraz obejrzymy przykład oszczędności za pomocą ułamkowej wersji kolorowania.

Twierdzenie 2 ([2]). *Istnieje $(100, 9)$ -kolorowanie grafu G_2 .*

Takie kolorowanie daje uniwersalny cykl nadawania długości

$$\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}.$$

Rysunek wymaga objaśnienia, bo powinien być trójwymiarowy: Wyróżnione pary sześciokątów z liczbami od **i** do **viii** to fragmenty kolejnych warstw ułożonych z tych samych stu, ale oczywiście odpowiednio przesuniętych kolorów (te sześciokąty odpowiadają kolorom 1 i 2, a pozostałe są usytuowane względem nich tak, jak na dolnej warstwie) – warstw jest 9, co oznacza, że każdy punkt ma 9 kolorów.

Rozwijając tę metodę, można znaleźć kolejne kolorowania, dążące do wartości $\approx 10,679$ (np. dla $k = 7225$ i $d = 676$ otrzymujemy jakość lepszą niż $10,69$).

Im większe d , tym drobniejszy podział cyklu nadawania na kawałki – ale zbyt mocny podział może z technicznych powodów być niemożliwy do zastosowania.

Dla bardziej skomplikowanych figur i naprawdę bardzo dużych d można jednak zejść nawet poniżej 10.

Twierdzenie 3 ([2]). *Istnieje ciąg (k_i, d_i) -kolorowań G_2 taki, że*

$$\frac{k_i}{d_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 9,890\dots$$

Na koniec warto zwrócić uwagę na fakt, iż zastosowanie uniwersalnej makiety nie tylko nie wymaga obliczeń dla każdej nowej sieci, ale nawet działa w przypadku nadajników ruchomych – nie trzeba niczego wyliczać na nowo, wystarczy uwzględnić przesuwanie się nadajników zgodnie z makietą. Czasem teoria ma naprawdę wielką siłę!

Literatura

- [1] L.L. Ivanov, *On the chromatic numbers of \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 with intervals of forbidden distances*, Electronic Notes in Discrete Mathematics 29 (2007), 159–162.
- [2] K. Junosza-Szaniawski, J. Sokół, K. Węsek, *Fractional coloring of the plane*, preprint.

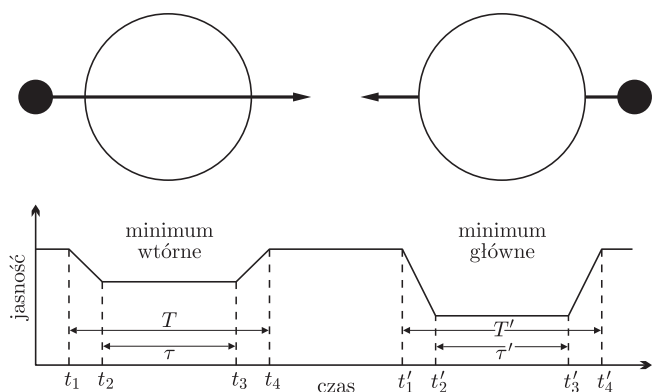
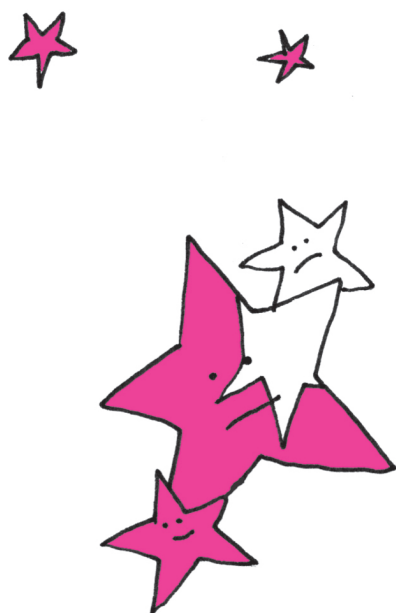
O wyjątkowych zaćmieniach gwiazd kataklizmicznych

*doktorantka, Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika, Warszawa

Karolina BAKOWSKA*

Wielokrotnie przysłuchując się astronomom, dowiadujemy się, iż obserwacje gwiazd podwójnych zaćmieniowych są szczególnie cenne, gdyż umożliwiają wyznaczenie wielu parametrów fizycznych, takich jak masa, rozmiar, kształt, temperatura powierzchniowa składników. Pośród wielu typów gwiazd zmiennych zaćmieniowych są wyjątkowe obiekty – zaćmieniowe gwiazdy kataklizmiczne – i to o nich opowiem poniżej.

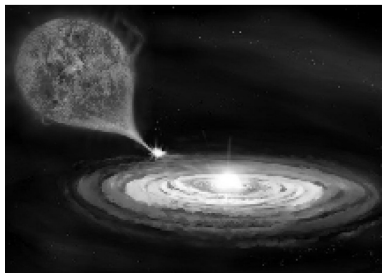
Przez wiele stuleci gwiazdy pełniły jedynie rolę punktów odniesienia na sferze niebieskiej. To właśnie względem nich badano położenia planet Układu Słonecznego. Zakładano, że gwiazdy nie zmieniają ani swojego położenia, ani jasności. Sytuacja uległa zmianie pod koniec XVI wieku. W latach 1572 i 1604 zaobserwowano dwa zupełnie nowe obiekty na niebie nazwane „Gwiazdą Tychona” i „Gwiazdą Keplera”. Obiekty te były tak jasne, że można było obserwować je nawet w ciągu dnia. Obecnie wiemy, że były to wybuchy supernowych, w których ogromne pojaśnienie wynika z gwałtownych reakcji termojądrowych zachodzących w końcowym stadium ewolucji gwiazdy. Inne odkrycie nietypowej gwiazdy nastąpiło w 1596 roku, gdy David Fabricius stwierdził, że odkrył nową gwiazdę w gwiazdozbiore Wieloryba (łac. *Cetus*). Odkrycie potwierdził Johannes Phocylides Holward w 1638 roku i wtedy gwiazda... znikła. Nazwano ją *mira stella* (cudowna gwiazda), gdyż pojawiała się na niebie bardzo kapryśnie. Dziś tę gwiazdę nazywamy *Mira Ceti*, zmienia ona swoją jasność na skutek pulsacji, czyli cyklicznej zmiany rozmiaru zachodzącej w ciągu kilkuset dni, i stanowi prototyp gwiazd zmiennych nazywanych mirydami. Kolejnymi odkrytymi obiektami, które zmieniały jasność, były gwiazdy zaćmieniowe. W 1783 roku John Goodrick zauważył zmienność gwiazdy β Persei, nazywanej także Algolem. Obiekt ten jest układem podwójnym zaćmieniowym, czyli składa się z dwóch gwiazd, które ustawione są w takim położeniu względem obserwatora z Ziemi, że jedna z gwiazd co pewien czas zasłania drugą, powodując jej zaćmienie, co z kolei wpływa na zmniejszenie obserwowanej przez nas jasności tych gwiazd. β Persei stała się prototypem gwiazd zmiennych nazywanych gwiazdami typu Algola. Gdy zaczęto prowadzić intensywne obserwacje astronomiczne, okazało się, że układy podwójne i wielokrotnie występują częściej, niż początkowo sądzono. Na 100 gwiazd położonych najbliżej Słońca jest ich aż 66. Termin określający układy podwójne jako pierwszy wprowadził Herschel w roku 1802, a obecnie układami takimi nazywamy dwie gwiazdy krążące wokół wspólnego środka masy.



Rys. 1

Układy zaćmieniowe to takie układy podwójne, których orbita ma niewielkie nachylenie w stosunku do obserwatora. Podczas zaćmienia jednego składnika przez drugi rejestrujemy spadki jasności w stosunku do otrzymanej krzywej zmian blasku. Przykładowo, gdy mniejsza i jaśniejsza gwiazda (oznaczona na rysunku 1 czarną kropką) przechodzi na tle większej i słabszej gwiazdy (lewa część rysunku), to rejestrujemy zaćmienie wtórne (zazwyczaj płytsze). W odwrotnej sytuacji obserwujemy zaćmienie główne (prawa część rysunku). Przez t_1 , t_2 , t_3 oraz t_4 oznaczono czasy czterech kontaktów między gwiazdami.

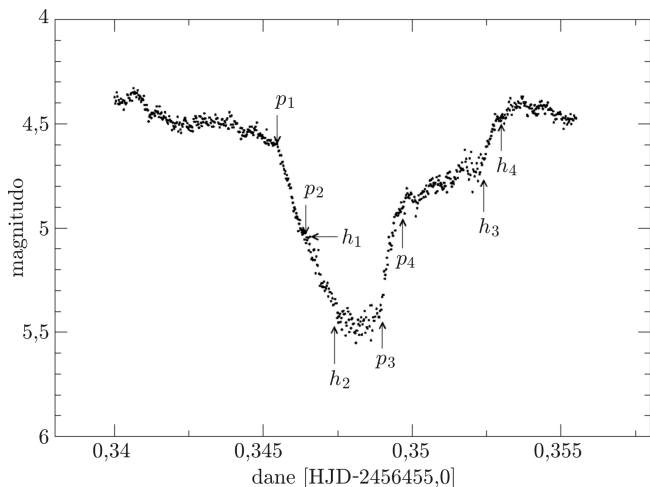
Zupełnie inne typy zaćmień prezentują gwiazdy kataklizmiczne. O obserwacjach tych gwiazd szerzej pisała Magdalena Otulakowska-Hypka w *Delcie* 12/2013. Obiekty te to nie tylko gwiazdy wdzięczne do obserwacji, ale także wyjątkowe laboratoria badawcze.



Rys. 2. Wizja artystyczna układu kataklizmicznego. Z lewej strony składnik wtórny, z którego materia splywa na dysk akrecyjny wokół składnika pierwotnego.
Rys. A.A. Czarnecka, www.optyczne.pl.

Gwiazdy kataklizmiczne to układy podwójne zawierające białego karła (nazywanego składnikiem pierwotnym) i gwiazdę ciągu głównego (określaną jako składnik wtórny), w których materia splywa ze składnika wtórnego w kierunku składnika pierwotnego, tworząc dysk akrecyjny. Miejsce uderzenia strugi materii w dysk astronomowie nazywają gorącą plamą.

Zaćmienia gwiazd kataklizmicznych okazały się dla astronomów na tyle intrygujące, iż dostarczyły materiału do badań na wiele kolejnych dziesięcioleci. Odkrycie oraz prawidłowe rozwiązanie zagadki nietypowych zaćmień gwiazd kataklizmicznych to zasługa polskich astronomów, Józefa Smaka i Wojciecha Krzemińskiego (więcej na ten temat można przeczytać w *Uranii* 01/2014, „Warszawska Nowa U Gem”). Przyjrzyjmy się zatem krzywej zmian blasku takiego układu, przedstawionej na rysunku 3. Widać, że zaćmienie ma skomplikowaną budowę i przebiega w kilku etapach.



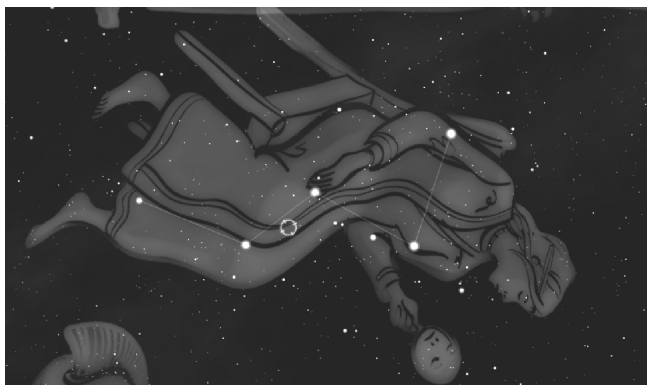
Rys. 3. Krzywa zmian blasku gwiazdy kataklizmicznej zaćmieniowej. Dane pochodzą z teleskopu SALT (o średnicy zwierciadła ponad 10 metrów) znajdującego się w Republice Południowej Afryki, do którego mają dostęp polscy astronomowie. Projekt obserwacji tej gwiazdy został zrealizowany przez Arkadiusza Olecha.

Dzieje się tak dlatego, że zaćmiewany jest również biały karzeł (momenty jego zaćmienia oznaczono odpowiednio p_1 – p_4). Ponadto zaćmiewana przez składnik wtórny jest także gorąca plama, wnosząca znaczącą wartość do jasności całego układu, a jej momenty zaćmień oznaczone zostały h_1 – h_4 . Widać zatem, iż najpierw zaćmiewany jest biały karzeł, następnie chowa się plama. Wyjście z zaćmienia przebiega przeciwnie – najpierw wyłania się karzeł, potem plama. Sprawę komplikuje fakt, że nie zawsze biały karzeł w ogóle jest zaćmiewany. Czasem astronomowie obserwują zaćmienie układu kataklizmicznego, które jest wynikiem przesłaniania dysku i gorącej plamy przez składnik wtórny, natomiast składnik główny układu nie jest zaćmiewany w ogóle!

Wiemy już, że obserwowane krzywe zmian blasku zaćmieniowych układów kataklizmicznych są skomplikowane. Najważniejsze wydaje się, że są one złożeniem krzywej blasku pochodzącej od dysku akrecyjnego oraz krzywej związanej z jasnością gorącej plamy.

Metoda dekompozycji krzywych zmian blasku zaproponowana przez Smaka pozwala rozdzielić te krzywe. Dzięki takiej analizie astronomowie mogą osobno analizować zestawy danych dotyczące gorącej plamy oraz te dotyczące dysku.

Założenia, na których opiera się metoda dekompozycji, to, po pierwsze, symetria krzywej blasku dysku w okolicach punktu $\phi = 0$, czyli w środku zaćmienia; po drugie fakt, że zaćmienie gorącej plamy jest całkowite. Kolejne kroki to odejmowanie stron zaćmienia od siebie nawzajem względem ustalonego wcześniej środka zaćmienia. Właśnie z takiej procedury odejmowania udaje nam się wyłonić krzywą zmian blasku gorącej plamy. A jak to wygląda w praktyce?

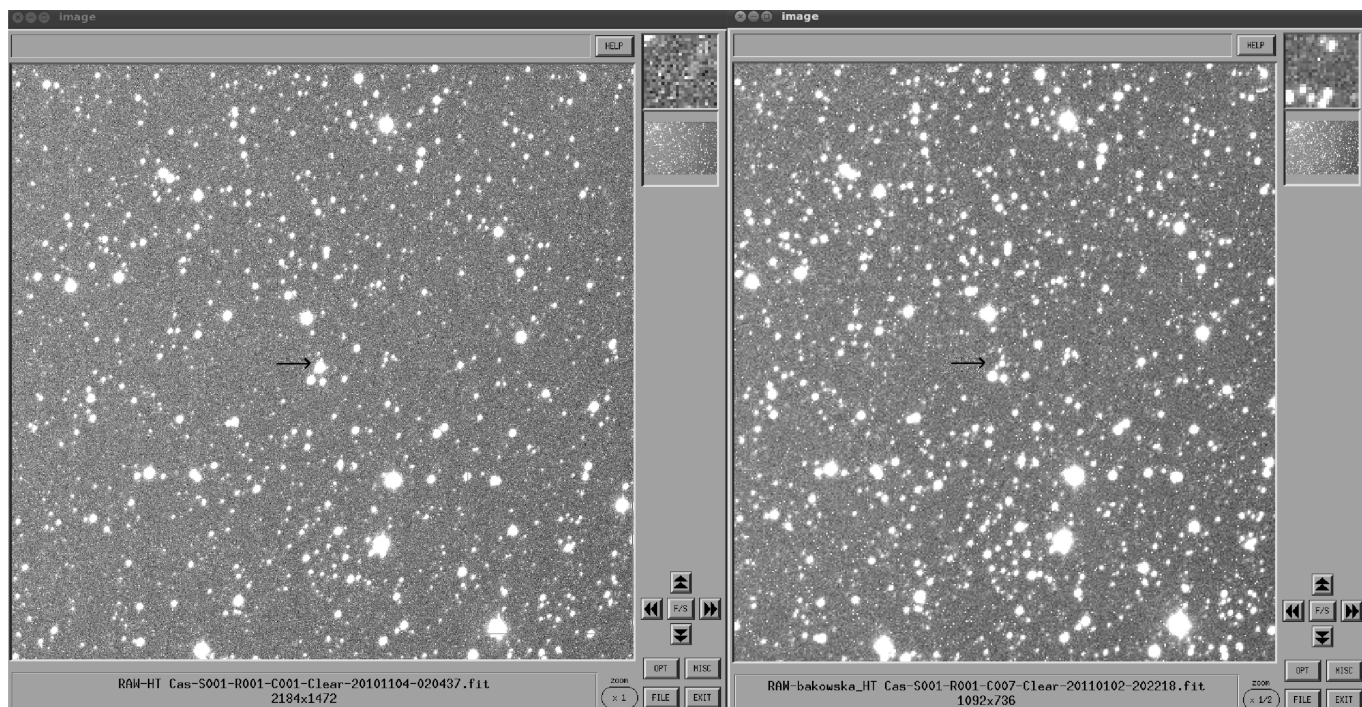


Rys. 4. Gwiazdozbiór Kasjopei z zaznaczonym kółeczkiem obiektem HT *Cas*.

Weźmy „żywe” dane obserwacyjne i dla nich zrealizujemy dekompozycję. Gwiazdą, która idealnie nadaje się do tego celu, jest HT *Cassiopeiae* (w skrócie HT *Cas*) – zaćmieniowa gwiazda kataklizmiczna z grupy nowych karłowatych. Obiekt ten odkryty został przez Hoffmeistera ponad 70 lat temu i przez ponad trzy dekady nikt się nim nie interesował. Przełom nastąpił w 1978 roku, kiedy odkryto zaćmienia, a pierwsze obserwacje dały tak owocne rezultaty, iż o HT *Cas* od tamtej pory astronomowie mówią, iż jest „kamieniem z Rosetty pośród nowych karłowatych”. Rysunek 4 pozwala odnaleźć położenie HT *Cas* na niebie, jednak ponieważ gwiazda ta w ciszy ma jasność około 18 magnitudo, więc do jej obserwacji potrzebny jest teleskop.

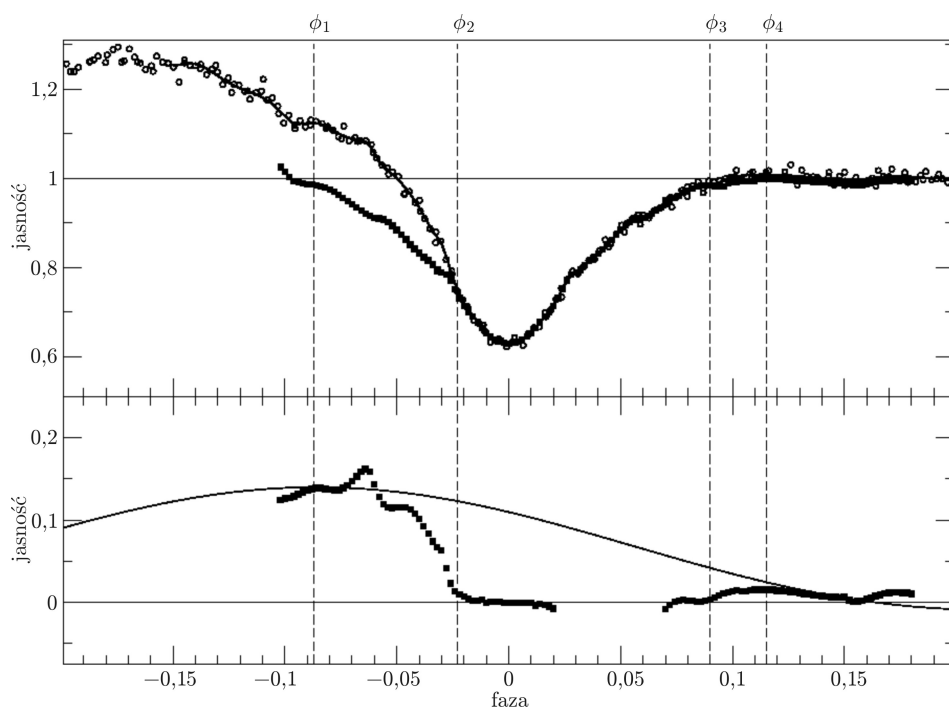
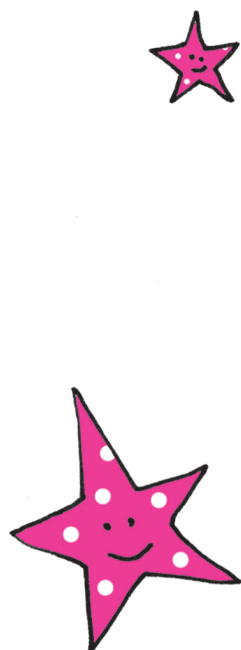
Niemniej jednak, HT *Cas* zaskoczyła astronomów superwybuchem w listopadzie 2010 roku. Jej jasność osiągnęła wtedy poziom doskonały do obserwacji małymi

teleskopami rzędu 15 centymetrów. Prawa strona rysunku 5 przedstawia HT *Cas* w trakcie ciszy, lewa – w trakcie superwybuchu.



Rys. 5. Obserwacje wykonano zdalnie (przez Internet) z wykorzystaniem teleskopu ze zwierciadłem o średnicy 25 cm (Nowy Meksyk, USA).

Mamy zatem zgromadzone dane obserwacyjne i po ich standardowej redukcji i fotometrii, dzięki której mamy względne jasności naszego obiektu przedstawione w postaci krzywych zmian blasku, możemy przystąpić do dekompozycji.

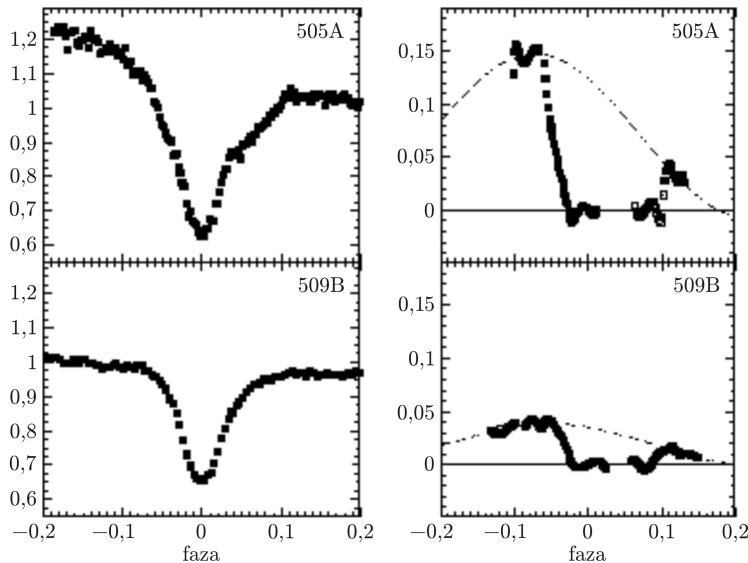


Rys. 6

Przyjrzyjmy się zatem zaćmieniu przedstawionemu na rysunku 6, gdzie na górnym rysunku widzimy przedstawione otwartymi kółeczkami dane obserwacyjne jednego z zaćmień HT *Cas*. Do tych danych dopasowano, możliwie jak najdokładniej, krzywą syntetyczną (przedstawioną jako ciągła czarna linia), gdyż na takich danych łatwiej wykonuje się potem kolejne kroki dekompozycji. Na dole przedstawiona jest już wynikowa krzywa jasności gorącej plamy, gdzie widać zarówno początek zaćmienia (fazy ϕ_1 i ϕ_2), jak i wyjście z zaćmienia



(fazy ϕ_3 oraz ϕ_4). Natomiast jeśli od krzywej obserwacyjnej odejmiemy krzywą z plamą, to otrzymujemy zaćmienie pozostałej części dysku akrecyjnego, co przedstawiono na górnej części rysunku za pomocą czarnych kwadraczków.



Rys. 7

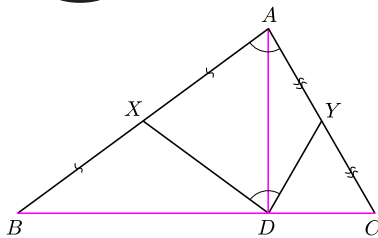
Analizując rysunek 7, widzimy po lewej dwa różne zaćmienia HT *Cas*, a po prawej stronie odpowiadające im zrekonstruowane krzywe gorącej plamy. Od razu widać znaczące wahania jasności plamy. Czasem jej manifestacja jest bardzo wyraźna, czasem plamy praktycznie nie ma. Czemu ten fakt okazał się tak ważny dla astronomów? Otóż model TTI (*thermal-tidal instability model*) wyjaśniający obserwowane w krzywych zmian blasku cykliczne zmiany jasności, nazywane przez astronomów wybuchami i superwybuchami, zakładał stały przepływ materii ze składnika wtórnego na powierzchnię dysku, zatem gorąca plama powinna mieć stałą jasność. Analiza z wykorzystaniem metody dekompozycji krzywych pokazuje, iż tak nie jest. Jest to bardzo ważny dla astronomów wynik, zmuszający ich do wyteźonej pracy nad modelami gwiazd kataklizmicznych.

Jeśli ponadto weźmiemy pod uwagę, iż zgromadzone dla HT *Cas* tak ważne i cenne dane pochodziły z małych, amatorskich teleskopów o średnicach 15–25 centymetrów, to widzimy, jak wielką rolę w wyjaśnianiu zagadek dotyczących gwiazd mają wszelkie, nawet najbardziej amatorskie obserwacje wykonane bardzo małymi instrumentami!



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1438. W trójkącie ABC zachodzi $AB \neq AC$. Punkty X i Y są odpowiednio środkami boków AB i AC . Na boku BC dany jest taki punkt D różny od środka boku, że $\sphericalangle XDY = \sphericalangle XAY$. Wykazać, że AD i BC są prostopadłe.

Rozwiązanie na str. 4

M 1439. Niech f będzie wielomianem stopnia 2 o całkowitych współczynnikach. Wiadomo, że $f(k)$ jest podzielne przez 5 dla każdej liczby całkowitej k . Udowodnić, że wówczas każdy współczynnik f jest podzielny przez 5.

Rozwiązanie na str. 2

M 1440. Ile jest takich macierzy $m \times n$ o wyrazach 0, 1, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest parzysta liczba jedynek?

Rozwiązanie na str. 3

Przygotował Michał NAWROCKI

F 867. Otwarte akwarium w kształcie półsfery o średnicy 30 cm wypełniono całkowicie wodą i umieszczono w pokoju, w którym nie ma prądów powietrza. Przez dwie doby poziom wody w akwarium obniżył się o 1 centymetr. Przyjmując, że temperatura i wilgotność powietrza w pokoju są stałe, a proces parowania jest na tyle powolny, że temperatura wody nie ulega zmianie, znaleźć czas, po którym woda całkowicie wyparuje z akwarium.

Rozwiązanie na str. 5

F 868. W stałej odległości od nienaładowanej metalowej kuli umieszczono dodatkowo naładowaną cząstkę. Gdy naładowano kulę dodatnim ładunkiem q , okazało się, że cząstka i kula przyciągają się z siłą F_1 , gdy naładowano kulę ładunkiem $2q$ – cząstka i kula przyciągają się z siłą F_2 . Jak duża będzie siła działająca pomiędzy cząstką i kulą, gdy ta ostatnia zostanie naładowana ładunkiem $3q$?

Rozwiązanie na str. 3



W krainie snów

Jeżeli sen nie ma pierwszorzędного znaczenia dla funkcji organizmu, to jest to największy błąd kiedykolwiek popełniony przez ewolucję.

A. Rechtschaffen

Myśleli i pisali o śnie najwięksi myśliciele, pisarze i filozofowie. Już w Mezopotamii. Potem w Egipcie. Potem wielcy mędrzy greccy. Arystoteles napisał trzy traktaty: *O śnie i czuwaniu*, *O bezsenności* i *O wróżbach we śnie*. Pisał i rozważał naukowo Zygmunt Freud, opisywał literacko Pedro Calderone de la Barca. A jednak... A jednak sens tych okresów życia, kiedy śpimy, nadal jest niewyjaśniony.

Definicja: *snem nazywamy taki stan, w którym bez uczestnictwa czynników zewnętrznych człowiek (osobnik, śnią wszystkie ciepłokrwiste) traci przytomność i staje się bezbronny*. Już pozbawienie snu na jedną noc obniża funkcje poznawcze, regulacje emocji, procesy podejmowania decyzji. Brak snu wpływa na funkcje immunologiczne. Tak samo przebiega charakterystyka snu niezależnie od płci, pochodzenia etnicznego, wieku człowieka. Zmienia się jednak w padaczce, narkolepsji, endogennej depresji.

Do połowy XX wieku uważano, że w czasie snu organizm, a w szczególności mózg odpoczywa i nie wykazuje aktywności właściwej okresom czuwania. Dopiero opracowanie bezinwazyjnej metody pomiarów czynności bioelektrycznej mózgu pozwoliło na stwierdzenie, iż pogląd taki jest zasadniczo błędny. Dziś prawie każdy wie, że w trakcie snu człowiek przechodzi przez kolejne, półtoragodzinne fazy REM (szybkich ruchów gałek ocznych) i Nie-REM (obserwuje się obie te fazy także u niemowląt, widocznie mają sny). Sny, obrazy i przeżycia zachodzą w fazie REM. Co bardzo ciekawe – zarówno u zwierząt, jak i ludzi w fazie REM zanika aktywność mięśniowa, choć niektórzy obrazowo mówią, że w tym samym czasie mózg aż tętni aktywnością, niejednokrotnie większą niż w okresie czuwania. I nawet tylko podczas snu pojawia się w ludzkim mózgu, kiedy indziej nieobecna, korowa oscylacja czynności bioelektrycznej.

Ostatnie badania sugerują, że funkcją snu jest odtwarzanie dobrostanu systemów endokrynych, komórkowych, a nawet zdolności do adaptacji ekologicznej. Na temat potrzeby snu sformułowano kilka teorii i żadna nie tłumaczy wszystkich cech charakterystycznych tego stanu. Może trzeba go rozpatrywać łącznie jako: stan przywracania homeostazy synapsów, profilaktyki zachowania dobrego stanu komórek, synchronizację aktywności neuronalnej, reorganizację i uporządkowanie dynamiki zmian w korze mózgowej. Wszystko to raczej odbywa się w fazie NREM, kiedy mózg wytwarza fale o niskiej częstotliwości i wysokiej amplitudzie. Podobnie nieostro formułuje się hipotezy o roli fazy REM. Że wspomaga ona dojrzewanie mózgu, formowanie się pamięci, kontroluje wyniki fazy NREM. Same „być może” i po prostu: „nie wiemy”.

Wreszcie ważnym pytaniem związanym ze snem jest pytanie o przyczyny bezsenności. Uznając ją za schorzenie, możemy sugerować wiele różnych przyczyn, jak używki, stres czy depresja, choć dla około 20% pacjentów żadna z nich nie pasuje. Z taką bezsennością nie należy mylić skutków zaburzeń rytmu życia, powodujących zaburzenia snu. W tym przypadku rolę wiodącą gra hormon wytwarzany w szyszynkach zwierząt – melatonina. Jej też przypisuje się przyczyny dokuczliwego dla rodziców okresu życia noworodka: jego organizm do 3 miesięcy życia prawie wcale nie wytwarza melatoniny i dziecko nie weszło jeszcze w rytm dobowego snu i czuwania. Niestety, wytwarzanie melatoniny spada również około 80. roku życia i starszycy często skarżą się na problemy ze snem. W IV w.p.n.e. chiński filozof Chuang Tzu napisał:

Kiedy śnimy, nie wiemy, że śnimy. Podczas snu żyjemy w naszych snach. Dopiero po przebudzeniu wiemy, że śniliśmy. Kiedyś nastąpi wielkie przebudzenie i dowiemy się, że życie jest wielkim snem.

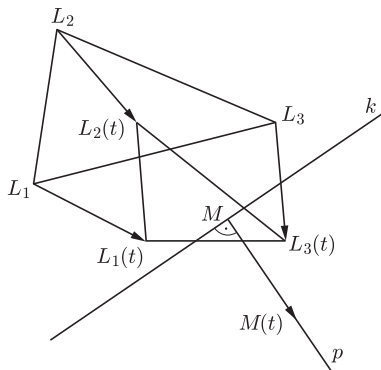
Magdalena FIKUS

Na łowy!

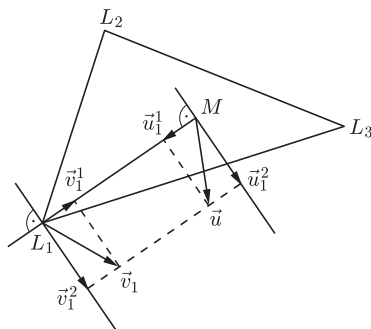
Jarosław GÓRNICKI*

*Katedra Matematyki,
Politechnika Rzeszowska

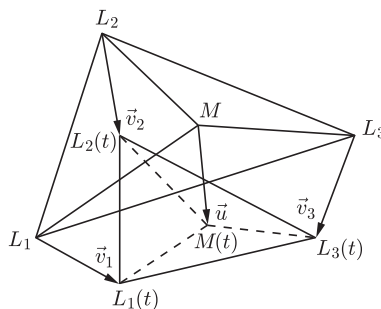
Podobny problem był rozważany w artykule J. Górnickiego *Lew i człowiek* w *Delcie* 2/2013. Wtedy myśliwy był w trochę lepszej sytuacji, ponieważ gonił go tylko jeden lew.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Lemat 1 jest prawdziwy dla dowolnego wielokąta wypukłego.

Epizod 1

Stado lwic L_1, L_2, \dots, L_n , gdzie $n \geq 3$, oraz myśliwy M (rozważani jako punkty płaszczyzny euklidesowej) poruszają się z równymi maksymalnymi prędkościami. Kiedy myśliwy ma skuteczną strategię ucieczki przed grupą lwic? Kiedy lwice mają skuteczną strategię pochycenia myśliwego w skończonym czasie?

Oznaczmy przez $L_j(t), M(t)$ położenia „uczestników” polowania w czasie $t \geq 0$ i niech $\text{conv}\{L_1(0), L_2(0), \dots, L_n(0)\}$ oznacza najmniejszy zbiór wypukły zawierający wszystkie punkty $L_j(0), j = 1, 2, \dots, n$.

Twierdzenie 1. *Jeżeli $M = M(0)$ nie jest punktem wewnętrznym zbioru $C = \text{conv}\{L_1(0), L_2(0), \dots, L_n(0)\}$ i $M \neq L_j$ dla każdego $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, to istnieje strategia pozwalająca myśliwemu na ucieczkę przed każdą lwicą L_j .*

Dowód. W opisanej sytuacji istnieje taka prosta k przechodząca przez punkt M , że zbiór C leży w jednej półpłaszczyźnie (domkniętej) ograniczonej prostą k . Niech p będzie półprostą o początku w punkcie M prostopadłą do prostej k , leżącą w półpłaszczyźnie niezawierającej zbioru C (rys. 1). Wówczas Czytelnik Wnikliwy łatwo sprawdzi, że myśliwy może uciec przed wszystkimi lwicami, poruszając się z maksymalną prędkością wzdłuż półprostej p . □

Ale może się zdarzyć, że myśliwy wpadnie w pułapkę zastawioną przez lwice...

Twierdzenie 2. *Jeżeli $M = M(0)$ jest punktem wewnętrznym trójkąta $L_1(0)L_2(0)L_3(0)$, to istnieje strategia gwarantująca tym trzem lwicom pochycenie myśliwego w skończonym czasie.*

Dowód. Opracowując strategię polowania dla lwic, będziemy żądali, by:

- lwice natychmiast reagowały na zmiany kierunku ucieczki myśliwego,
- w każdej chwili t myśliwy należał do wnętrza obszaru wyznaczonego przez aktualne pozycje lwic,
- odległość myśliwego od każdej lwicy nie powiększała się,
- lwice nie potrzebowały zewnętrznego koordynatora ani nie traciły czasu na wymianę informacji z otoczeniem.

Uwzględniając te wymagania, wskażemy kierunek pogoni każdej lwicy L_j w zależności od kierunku ucieczki myśliwego.

Załóżmy, że myśliwy M ucieka z prędkością wskazaną przez wektor \vec{u} , a każda lwica L_j ściga go z prędkością wskazaną przez wektor \vec{v}_j , taką, że $|\vec{v}_j| = |\vec{u}|$ (gdzie $|\vec{u}|$ oznacza długość wektora \vec{u}), ponieważ wszyscy poruszają się z równymi maksymalnymi prędkościami (rys. 2). Wyznamy teraz wektor prędkości \vec{v}_j . Niech \vec{u}_j^1 będzie rzutem prostopadłym wektora \vec{u} na prostą L_jM , a \vec{u}_j^2 będzie rzutem prostopadłym wektora \vec{u} na prostą prostopadłą do prostej L_jM wystawioną w punkcie M . Następnie w punkcie L_j zaczepiamy wektory składowe: \vec{v}_j^2 , taki, że $\vec{v}_j^2 = \vec{u}_j^2$ i wektor \vec{v}_j^1 o zwrocie w kierunku punktu M , taki, że $|\vec{v}_j^1| = |\vec{u}_j^1|$. Wówczas wektor $\vec{v}_j = \vec{v}_j^1 + \vec{v}_j^2$ wskazuje prędkość poruszania się lwicy L_j .

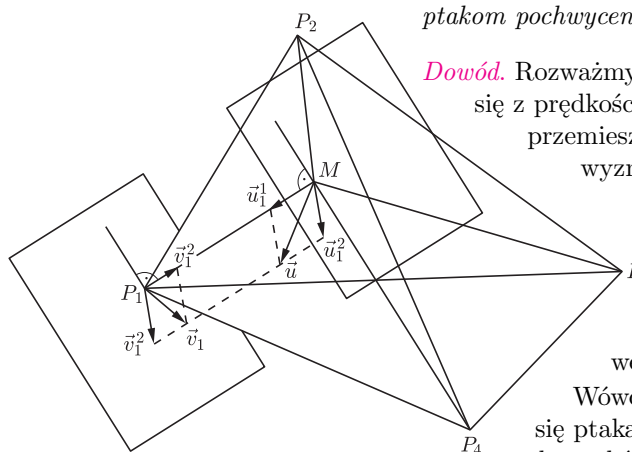
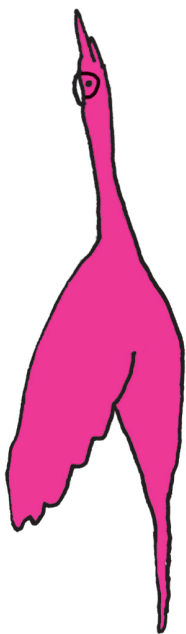
Po upływie czasu $t > 0$ położenia uczestników polowania ilustruje rysunek 3. Z przedstawionej konstrukcji wynika, że $L_jM \parallel L_j(t)M(t)$ dla $j = 1, 2, 3$, więc punkt $M(t)$ jest punktem wewnętrznym zbioru $\text{conv}\{L_1(t), L_2(t), L_3(t)\}$. Ponadto odległość między punktami $M(t)$ a $L_j(t)$ nie wzrosła.

Ostatnią obserwację można istotnie wzmocnić, korzystając z następującego lematu.

Lemat 1. *Jeżeli M jest punktem wewnętrznym trójkąta $L_1L_2L_3$, to istnieje taki kąt ostry γ , że dla pewnego $j_0, |\angle(\vec{u}, \vec{a}_{j_0})| \leq \gamma$, gdzie $\vec{a}_j = \overrightarrow{ML_j}, j = 1, 2, 3$.*



Przedstawioną strategię polowania lwice może wykorzystać grupa $n \geq 3$ okrętów do przechwycenia okrętu wroga na oceanie. Przechwycenie nastąpi szybciej, gdy prędkość okrętów pościgowych będzie większa niż prędkość okrętu uciekającego.



Rys. 4

Dowód lematu. Półproste o początku w punkcie M zgodne z wektorami \vec{a}_j rozcinają płaszczyznę na trzy kąty o mierze mniejszej niż π . Jeżeli największy z nich ma miarę β , to $\gamma = \frac{\beta}{2}$ spełnia warunki lematu. \square

Co stąd wynika? Zauważmy, że w każdym momencie trwania pościgu układ wektorów $\vec{a}_j = \overrightarrow{M(t)L_j(t)}$ pozostaje względem siebie niezmienny. Gwarantuje to, że w każdym momencie pościgu istnieje taki wektor \vec{a}_j , że $|\angle(\vec{u}, \vec{a}_j)| \leq \gamma$, gdzie γ jest kątem z lematu 1. Ponieważ

$$|\vec{v}_j^2| = |\vec{u}_j^2| \leq |\vec{u}| \cdot \sin \gamma,$$

więc

$$|\vec{v}_j^1| = \sqrt{|\vec{v}_j|^2 - |\vec{v}_j^2|^2} \geq \sqrt{|\vec{u}|^2 - (|\vec{u}| \cdot \sin \gamma)^2} = |\vec{u}| \cdot \cos \gamma.$$

Skoro wektor \vec{v}_j^1 jest skierowany w stronę punktu M , a wektor \vec{u}_j^1 jest skierowany do punktu L_j , więc odległość między punktami M i L_j maleje z prędkością nie mniejszą niż $|\vec{u}| \cdot \cos \gamma$. Oznacza to, że suma odległości $|ML_1| + |ML_2| + |ML_3|$ maleje z prędkością nie mniejszą niż $|\vec{u}| \cdot \cos \gamma$. Stąd wynika, że lwice złapią myśliwego w skończonym czasie, co kończy dowód twierdzenia. \square

Uwaga. Sytuacja komplikuje się, gdy grupa polujących lwic zostaje zmniejszona. Może się zdarzyć tak, że wyeliminowanie określonej lwicy daje myśliwemu szansę na skuteczną ucieczkę. Jeśli $M \notin \overline{\text{conv}}\{L_1, L_2, \dots, L_n\} \setminus \{L_k\}$, to na mocy twierdzenia 1 myśliwy może uciec po wyeliminowaniu lwicy L_k . Sytuacja ta wymaga jednak od myśliwego wiedzy na temat wszystkich goniących go lwic w każdej chwili t , a także zastanowienia – spełnienie tego warunku może być trudne...

Epizod 2

Stado ptaków P_1, P_2, \dots, P_n , gdzie $n \geq 4$ oraz mucha M (rozważane jako punkty przestrzeni euklidesowej) poruszają się z równymi maksymalnymi prędkościami. Kiedy mucha ma skuteczną strategię ucieczki przed stadem ptaków? Kiedy ptaki mogą pochwycić muchę w skończonym czasie?

Następującą obserwację możemy uzasadnić, opierając się na tym samym pomysśle, co w dowodzie twierdzenia 1.

Twierdzenie 3. Jeżeli $M = M(0)$ nie jest punktem wewnętrznym zbioru $C = \overline{\text{conv}}\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ i $M \neq P_j$ dla każdego $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, to mucha M ma skuteczną strategię ucieczki przed każdym ptakiem P_j .

Dowód kolejnego twierdzenia będzie wymagał więcej pracy.

Twierdzenie 4. Jeżeli $M = M(0)$ jest punktem wewnętrznym czworoboku $P_{j_1}P_{j_2}P_{j_3}P_{j_4}$, gdzie $j_1, j_2, j_3, j_4 \in \{1, 2, \dots, n\}$, to istnieje strategia gwarantująca ptakom pochwycenie muchy w skończonym czasie.

Dowód. Rozważmy czworobok $P_1P_2P_3P_4$. Załóżmy, że mucha M porusza się z prędkością wskazaną przez wektor \vec{u} . Wówczas ptak P_j powinien przemieszczać się z prędkością wskazaną przez wektor \vec{v}_j , który teraz wyznaczymy. Niech \vec{u}_j^1 będzie rzutem prostym wektora \vec{u} na prostą MP_j , a \vec{u}_j^2 będzie rzutem prostym wektora \vec{u} na płaszczyznę przechodzącą przez punkt M i prostą MP_j . Następnie w punkcie P_j zaczepiamy taki wektor \vec{v}_j^2 , że $\vec{v}_j^2 = \vec{u}_j^2$ (leży on w płaszczyźnie prostopadłej do prostej P_jM przechodzącej przez punkt P_j) oraz wektor \vec{v}_j^1 o zwrocie w kierunku punktu M , taki, że $|\vec{v}_j^1| = |\vec{u}_j^1|$. Wówczas wektor $\vec{v}_j = \vec{v}_j^1 + \vec{v}_j^2$ wskazuje prędkość poruszania się ptaka P_j (rys. 4). Konstrukcja ta (nawet dla liczniejszego stada ptaków) nie powiększa żadnej odległości między muchą M a ptakiem P_j oraz nie zmienia wzajemnego położenia wektorów $\vec{a}_j = \overrightarrow{MP_j}$.

Lemat 2 jest prawdziwy dla dowolnego wielościanu wypukłego.

Skuteczność tej strategii wynika z następującego lematu.

Lemat 2. Jeżeli M jest punktem wewnętrznym czworościanu $P_1P_2P_3P_4$, to istnieje taki kąt ostry β , że dla pewnego j_0 , $|\angle(\vec{u}, \vec{a}_{j_0})| \leq \beta$, gdzie $\vec{a}_j = \overrightarrow{MP_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Dowód lematu. Półproste o początku w punkcie M zawierające wektory $\vec{a}_j = \overrightarrow{MP_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$, dzielą przestrzeń na cztery kąty wielościenne (każdy taki kąt wielościenne jest wyznaczony przez trzy kąty płaskie o wspólnym wierzchołku M generowane przez trzy różne półproste). W każdym wielościanie $MP_iP_jP_k$, gdzie $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ i liczby i, j, k są parami różne, rzutujemy prostopadłe punkt M na płaszczyznę trójkąta $P_iP_jP_k$. Rzut ten oznaczamy przez R_h , gdzie $h \in (\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i, j, k\})$. Wówczas każdy z kątów płaskich R_hMP_j , gdzie $j \neq h$ i $j, h \in \{1, 2, 3, 4\}$, jest ostry (bo M jest punktem wewnętrznym czworościanu $P_1P_2P_3P_4$). Niech

$$(1) \quad \max_{j, h \in \{1, 2, 3, 4\}, j \neq h} |\angle R_hMP_j| = \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Wektor \vec{u} (prędkości muchy M) zawiera się w pewnym kącie trójściennym $MP_iP_jR_h$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest to kąt trójścienny $MP_1P_4R_2$ (rys. 5), w którym zgodnie z opisem prosta MR_2 jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez punkty P_1, P_4, R_2 . Niech prosta zawierająca wektor \vec{u} przebija powierzchnię trójkąta $P_1P_4R_2$ w punkcie D . Wówczas

$$(2) \quad |P_1D| + |DP_4| \leq |P_1R_2| + |R_2P_4|.$$

Rzeczywiście, gdy przedłużenie odcinka P_4D przecina bok P_1R_2 w punkcie E (rys. 6), to korzystając z nierówności trójkąta, mamy

$$|P_1D| \leq |P_1E| + |ED| \quad \text{i} \quad |P_4D| + |DE| \leq |ER_2| + |R_2P_4|.$$

Dodajemy te nierówności stronami, a następnie od obu stron nierówności odejmujemy wielkość $|ED|$ i otrzymujemy (2).

$$(3) \quad |\angle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_1})| + |\angle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_4})| \leq |\angle R_2MP_1| + |\angle R_2MP_4|.$$

Gdy na płaszczyźnie Π wykreślimy trójkąty R_2MP_1, R_2MP_4 tak, że punkty P_1 i P_4 leżą po różnych stronach prostej MR_2 , rys. 7, to punkty P_1, R_2, P_4 leżą na prostej (bo odcinek R_2M jest prostopadły do płaszczyzny trójkąta $P_1R_2P_4$). Następnie na płaszczyźnie Π w kącie P_1MP_4 wykreślamy trójkąt P_1MF podobny do trójkąta P_1MD , gdzie $|\angle P_1MF| = |\angle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_1})|$ i $|P_1F| = |P_1D|$ i $|MF| = |MD| \geq |MR_2|$, oraz trójkąt P_4MG podobny do trójkąta P_4MD , gdzie $|\angle P_4MG| = |\angle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_4})|$ i $|P_4G| = |P_4D|$ i $|MG| = |MD| \geq |MR_2|$, rys. 7.

Wówczas na podstawie nierówności (2) prawdziwa jest nierówność (3).

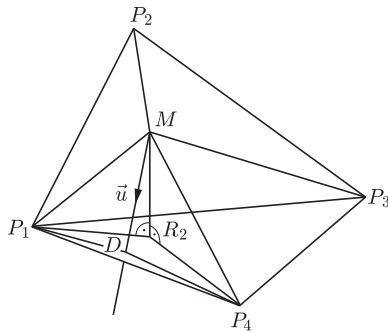
Z nierówności (3) oraz z warunku (1) wynika, że

$$|\angle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_1})| + |\angle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_4})| \leq 2\beta,$$

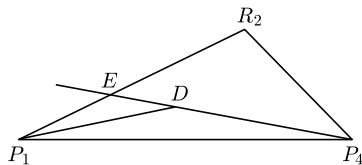
czyli jeden z kątów $(\vec{u}, \overrightarrow{MP_1})$ lub $(\vec{u}, \overrightarrow{MP_4})$ ma miarę nie większą niż β . Oznacza to, że w każdym momencie pościgu istnieje $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, takie, że $|\angle(\vec{u}, \vec{a}_j)| \leq \beta$.

To kończy dowód lematu; dalej dowód twierdzenia 5 przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 2. \square

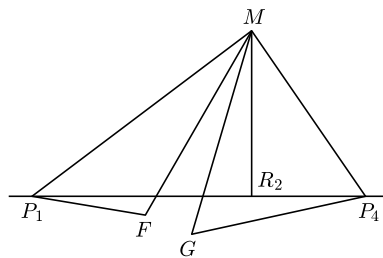
Dla obiektów poruszających się z identycznymi prędkościami maksymalnymi istnieją na płaszczyźnie i w przestrzeni modele *pulapek* i strategii *polowań* o stuprocentowej skuteczności, przynajmniej teoretycznie. Dodatkowo, dzieje się to przy założeniu braku wymiany informacji między goniącymi i nie wymaga koordynatora! Ten ostatni element stwarza jednak pewne ryzyko w praktycznych zastosowaniach tej teorii: uruchomionym pościgiem nie można sterować. Wydaje się, że tego typu strategii mogą być stosowane w programowaniu, grach ekonomicznych i wojennych, a może także na poziomie molekularnym, np. do zwalczania groźnych komórek – to jednak temat na inny artykuł.



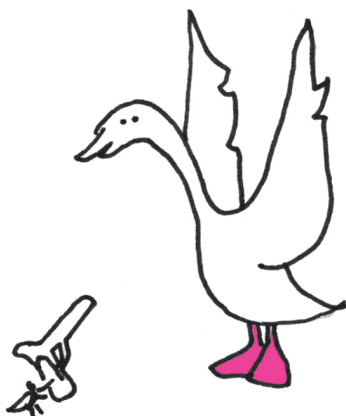
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Wyniki XXXI Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Szczyrk, 5–8 VI 2014

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych przez Jury (wraz z bibliografią) lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim, publicznym zreferowaniu tego opracowania.

W roku 2014/2015 zaproponowane przez Jury tematy to:

- Pierwsze modele populacyjne;
- Własności elipsy, hiperboli i paraboli;
- Relacje na zbiorach;
- Problem $3n + 1$;
- Matematyka wedyjska;
- George Boole – 200 rocznica urodzin;
- Matematyka kontra fizyka;
- Abstrakcja;
- Z matematyką na wakacje;
- Łańcuchy Markowa;
- Zbiory gęste;
- Matematyka kostki Rubika.

Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach we współpracy z Uniwersytetem Śląskim; www.spinor.edu.pl

Jury w składzie:

prof. dr hab. Maciej Sablik – przewodniczący,
dr Marian Podhorodyński – zastępca przewodniczącego, dr Tomasz Bielaczyc,
dr Anna Bień, dr Paweł Błaszczyk, dr Adrian Brückner, dr Damian Brückner,
dr Anna Brzeska, dr hab. Włodzimierz Fechner, dr Piotr Kalemba,
dr Rafał Kucharski, dr hab. Janusz Morawiec, dr Jolanta Sobera,
postanowiło:

I miejsce otrzymuje: **Małgorzata Dutka** z I LO w Bydgoszczy za pracę *Krótką opowieść o symedianie*;

II miejsce otrzymuje: **Wojciech Siwek** z I LO we Włoszczowie za pracę *Zasada szufladkowa Dirichleta*;

III miejsce otrzymują:

Kamil Cichosz z II LO w Jeleniej Górze za pracę

Okrąg i koło w różnych metrykach,

oraz

Jakub Sieroń z Pałacu Młodzieży w Katowicach za pracę

Wokół równania Cauchy'ego.

W głosowaniu publiczności na najlepszą prezentację

nauczyciele nagrodzili Małgorzatę Dutkę,

a uczniowie również Małgorzatę Dutkę

oraz

Jana Tabackiego z V LO w Dąbrowie Górniczej za pracę

Teoria muzyki w liczbach.

Protokół posiedzenia Jury XXXVI Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie:

Antoni Leon Dawidowicz – Przewodniczący Jury, Wiktor Bartol,
Andrzej Dąbrowski, Marek Kordos, Zdzisław Pogoda, Jan Szajkowski,
na posiedzeniu 20 września 2014 roku w Zielonej Górze, po wysłuchaniu
prezentacji prac dopuszczonych do finału, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść
prac i sposób ich przedstawienia, postanowiło, co następuje:

• **złote medale** i nagrody w wysokości 1400 zł otrzymują *ex aequo*

Paweł Piwek z LO im. Świętej Jadwigi Królowej w Kielcach za pracę

Krzywe przegubowe

oraz

Artur Zubilewicz z V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie za pracę

Krzywe stożkowe;

• **srebrne medale** i nagrody w wysokości 900 zł otrzymują *ex aequo*

Michał Baran z III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie za pracę

Przeprawa przez podzielności sum kwadratów

oraz

Kamil Klimkowski z II LO w Zduńskiej Woli za pracę

O pewnym równaniu funkcyjnym.

Opiekunowie prac: Renata Długosz, Jacek Dymel, Andrzej Lenarcik

i Marcin Radwański otrzymują dyplomy honorowe.

Finaliści i opiekunowie prac otrzymują również nagrody książkowe ufundowane przez Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Wydawnictwo Aksjomat, Wydawnictwo Demart oraz Wydawnictwo Szkolne Omega.

(—) podpisy Członków Jury

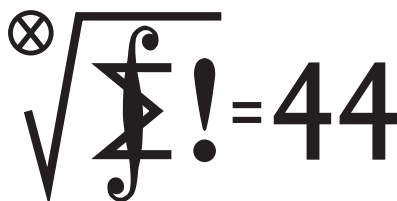
Prace nadsyłane na Konkurs powinny być samodzielnie przygotowanym przez ucznia opracowaniem, zawierającym nowe wyniki lub nowe twórcze ujęcie tematu. Szczegółowy regulamin Konkursu znajduje się na stronie deltami.edu.pl. Termin nadsyłania prac w kolejnej edycji Konkursu to **1 kwietnia 2015 roku**.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Słkie rozwiązania zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 679 ($WT = 1,80$) i 680 ($WT = 1,85$) z numeru 4/2014

Paweł Duch	Bielawa	44,49
Stanisław Bednarek	Lódź	43,15
Tomasz Wietecha	Tarnów	39,85
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Michał Miodek	Zawiercie	37,11
Jerzy Cisło	Wrocław	35,67
Wojciech Tobiś	Praszka	32,96
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75

Klub 44 M liczy już 123 członków.
Nowa postać: Paweł Duch z Bielawy.



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 570 ($WT = 3,90$), 571 ($WT = 2,40$), 572 ($WT = 3,22$) i 573 ($WT = 2,80$) z numerów 1/2014 i 2/2014

Michał Koźlik	Gliwice	44,02
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Tomasz Wietecha	Tarnów	28,21
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Andrzej Idzik	Bolesławiec	27,88
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51

Liczbę 44 punktów przekroczył pan Michał Koźlik. Gratulujemy!

Zadania z matematyki nr 689, 690

Redaguje Marcin E. KUCZMA

689. Znaleźć wszystkie pary zbiorów A, B , zawartych w zbiorze liczb całkowitych, o następujących własnościach:

- każda liczba całkowita należy do co najmniej jednego ze zbiorów A, B ;
- nie każda liczba całkowita należy jednocześnie do obu tych zbiorów;
- jeśli liczba x jest w zbiorze A , to liczba $x - 1$ jest w zbiorze B ;
- jeśli liczby x, y są w zbiorze B , to liczba $x + y$ jest w zbiorze A .

690. Ciąg liczb całkowitych dodatnich (a_n) spełnia warunki: $a_0 = 1, a_1 > 1$,

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}{a_{\lfloor n/2 \rfloor}} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Niech

$$b_n = \frac{1}{a_{n+1} a_{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

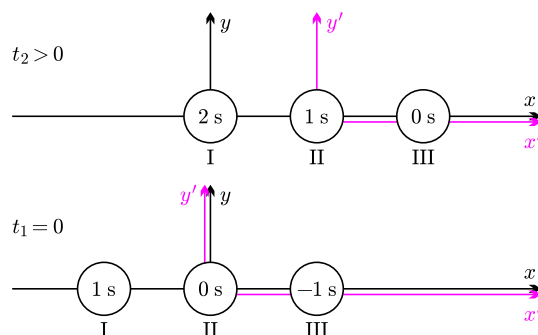
Udowodnić, że szereg $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ jest zbieżny, a jego suma jest liczbą wymierną.

Zadanie 690 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

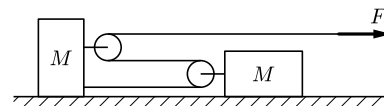
Zadania z fizyki nr 586, 587

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

586. K i K' to inercjalne układy odniesienia o zgodnych osiach, K' porusza się z prędkością V względem K wzdłuż osi x . Wzdłuż tej osi w układzie K' rozmieszczony jest ciąg jednakowych, równo odległych i zsynchronizowanych zegarów. Obserwator w K notuje równoczesne dla niego wskazania tych zegarów w dwóch chwilach: $t_1 = 0$ i $t_2 > 0$ (rys. 1). Na podstawie tych pomiarów wyznaczyć V oraz odległość l' między sąsiednimi zegarami mierzoną w K' .



Rys. 1



Rys. 2

587. W układzie przedstawionym na rysunku 2 bloki mają zaniedbywalnie małe masy, nić jest nieważka i nierozciągliwa, fragmenty nici, które nie leżą na blokach, są poziome. Masy klocków leżących na poziomej powierzchni są takie same i równe M . Do końca nici przyłożono poziomą siłę F . Z jakim przyspieszeniem porusza się ten koniec nici? Załóż brak tarcia i przyjmij, że klocki poruszają się ruchem postępowym.

Prosto z nieba: Poświata po błysku



Pionierem badań błysków był polski astrofizyk Bohdan Paczyński, który jako jeden z pierwszych zrozumiał, że mają one kosmologiczne pochodzenie; zaproponował także metody badania poświat.

Błyski γ są wciąż dość tajemniczymi zjawiskami kosmicznymi mimo prawie 50 lat od ich odkrycia przez wojskowe satelity szpiegowskie Vega (w latach 60. emisji energetycznego twardego promieniowania spodziewano się nie z Kosmosu, ale z Ziemi, poszukując dowodów na testy broni nuklearnej). Błysk γ , czyli wyjątkowo potężny wybuch o szacowanej energii 10^{44} J (zgodnie ze wzorem $E = mc^2$ mniej więcej tyle energii powstałoby z zamienienia planety wielkości Jowisza na fotony) zdarza się w przeciętnej galaktyce raz na około 10^5 lat; detektory satelitarne wykrywają średnio jeden błysk dziennie; rozkład błysków na niebie jest izotropowy. Energia błysku jest porównywalna z energią grawitacyjną supernowej, co sugeruje związek przyczynowo-skutkowy: istotnie, istnieje coraz więcej dowodów obserwacyjnych na to, że tzw. długie – trwające nawet 1000 s – błyski są związane z zapadnięciem się masywnej gwiazdy (budżet energetyczny sugeruje także, że emisja błysku jest skupiona w dość wąskim stożku – dżecie; izotropowa emisja wymagałaby nieosiągalnie wielkich ilości energii i większych niż obserwowane częstości występowania). Pozostałością po zapadnięciu się i wybuchu w takim modelu *kolapsara* jest czarna dziura. W ciągu następnego tygodnia w miejscu katastrofy pojawia się *poświata* (ang. *afterglow*), czyli mniej energetyczne promieniowanie optyczne, podczerwone i radiowe.

Niedawne obserwacje poświaty pewnego błysku (GRB 120308A) przeprowadzone za pomocą automatycznego Teleskopu Liverpoolskiego umieszczonego na Kanarach i używającego polarymetru RINGO2 dostarczają dowodu na obecność polaryzacji kołowej w świetle widzialnym poświaty; dodatkowo, stopień polaryzacji jest istotnie większy od tego, co zakładano w modelach teoretycznych. Najprawdopodobniej oznacza to, że obserwowane światło zostało wyemitowane przez elektrony przyspieszane w fali uderzeniowej w obecności wielkoskalowego, dostatecznie silnego pola magnetycznego, znajdującego się blisko centralnego obiektu (czarnej dziury). To bardzo dobra wiadomość – obserwacje polaryzacji otwierają nowe pole do popisu dla astrofizyków zajmujących się teorią. Jako że informacje zawarte w promieniowaniu poświaty są w oczywisty sposób związane z poprzedzającym ją wybuchem, prowadzenie takich obserwacji przybliży nas do zrozumienia szczegółów mechanizmu tych kosmicznych katastrof.

Michał BEJGER

Niebo w listopadzie

Listopadowe noce mają swoje minusy i plusy. Z jednej strony są już całkiem chłodne, ale jednocześnie stają się coraz dłuższe, co powinno ucieszyć *prawdziwych* miłośników astronomii. Warto będzie przygotować ciepłe ubranie i, w miarę możliwości, sprzęt optyczny, aby nie przegapić listopadowych nocnych atrakcji.

Podstawowy sprzęt optyczny, czyli nasze oko, pozwoli nam zaobserwować na przykład Księżyc, który 15 XI znajdzie się w apogeum swojej orbity, czyli w punkcie najbardziej odległym od Ziemi. Księżyc obiega naszą planetę po eliptycznej orbicie i dlatego odległość pomiędzy tymi dwoma ciałami niebieskimi zmienia się w czasie o około 10%, tzn. od 363 000 km do 405 000 km, a tym samym zmienia się nieznacznie jego wielkość kątowna. Tego dnia średnica kątowna Księżyca będzie miała 29,54 minut łuku (dla porównania średnia jej wartość wynosi 31,07 minut).

Przez cały miesiąc będzie można również nieuzbrojonym okiem zaobserwować meteory z roju Taurydów. Jest to

rój bardzo rozmyty i dość długo aktywny. Jego maksimum wypadnie w okolicach 12 XI. Możemy się wtedy spodziewać około 10 obiektów na godzinę, które będą wybiegać z radiantu położonego w konstelacji Byka.

Kolejnym ciekawym obiektem do obserwacji „gołym okiem” jest M45, czyli słynne Plejady. W drugiej połowie miesiąca ta otwarta gromada gwiazd będzie w bardzo korzystnym położeniu na niebie około północy. Oczywiście jest to obiekt ciekawy również dla posiadaczy lornetek. Z kolei właściciele teleskopów powinni zainteresować się planetoidą 6 Hebe, która 17 XI znajdzie się w opozycji. Oznacza to idealne warunki do jej obserwacji. Trudnością może okazać się fakt, że widoczna ona będzie na tle gwiazdozbioru Erydanu, który z Polski widoczny jest tylko częściowo i tylko zimą, czyli znajduje się bardzo nisko nad horyzontem. Jeżeli można jednak udać się na obserwacje w miejsce, gdzie południowy horyzont nie jest niczym przysłonięty, warto będzie to zrobić. Miejmy tylko nadzieję, że listopadowa pogoda będzie sprzyjająca!

Magda OTULAKOWSKA-HYPKA



Droga, prędkość, czas

Joanna JASZUŃSKA

Oto kilka krótkich zagadek do szybkiego rozwiązania w wolnym czasie.

1. Pewnego poranka o godzinie 8^{00} turysta wyruszył z domu u podnóża góry i o 20^{00} dotarł do schroniska na szczycie. O 8^{00} następnego dnia wyruszył ze szczytu tą samą trasą i o 20^{00} wrócił do domu. Udowodnij, że istnieje taki punkt, w którym turysta był w oba dni dokładnie o tej samej godzinie.
2. Na półce stoi dwutomowa encyklopedia. Każdy tom ma 5 cm grubości plus okładki grubości po 0,5 cm każda. Mól książkowy przegryza się przez tę encyklopedię od pierwszej strony pierwszego tomu, najkrótszą drogą, do ostatniej strony drugiego tomu. Jaką drogę pokona?
3. Pod domem pana Y zatrzymują się dwa tramwaje – nr 1 i 2, każdy z nich kursuje co 10 minut. Pan Y codziennie o przypadkowej godzinie wychodzi na przystanek i wsiada w pierwszy tramwaj, który nadjedzie. Tramwajem nr 1 dojeżdża do narzeczonej, zaś tramwajem nr 2 – do matki. Czy należy oczekiwać, że pan Y równie często trafia do każdej z nich?
4. Miasta A i B są odległe o 300 km. Z miasta A w kierunku B wyrusza pociąg z prędkością 90 km/h. W tym samym momencie z miasta B w kierunku A wyrusza pociąg z prędkością 60 km/h. Jednocześnie z miasta A startuje Struś Pędziwiatr, który gna w kierunku B z prędkością 250 km/h. Kiedy napotka pociąg jadący z B do A , zawraca w kierunku A . Kiedy z kolei napotka pociąg jadący z A do B , znów zawraca itd. – biega pomiędzy pociągami aż do momentu ich spotkania. Ile kilometrów pokona?
5. Mamy do dyspozycji dwa sznurki i zapałki. Wiadomo, że każdy ze sznurków, podpalony na końcu, spali się w godzinę. Sznurki mogą jednak palić się nierównomiernie i każdy inaczej. Jak odmierzyć kwadrans?
6. Jak wyżej, ale mamy tylko jeden sznurek.
7. Cztery osoby chcą przejść przez dziurawy most po ciemku. Mają do dyspozycji jedną latarkę, nikt nie może iść bez niej, z powrotem zawsze ktoś musi ją przynieść. Wspólnie przez most mogą iść najwyżej dwie osoby i idą wtedy w tempie wolniejszej z nich. Pierwszej osobie pokonanie mostu zajmie 10 minut, drugiej 5, trzeciej 2, a czwartej 1 minutę. Czy wszystkie te osoby są w stanie przedostać się przez most w mniej niż 19 minut?
8. Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 40 km/h i z powrotem, tą samą drogą, z prędkością 60 km/h. Oblicz średnią prędkość podróży.
9. Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 40 km/h. Z jaką prędkością powinien jechać z powrotem tą samą drogą, aby średnia prędkość całej podróży była równa 80 km/h? Przepisy drogowe, ograniczenia techniczne pojazdu itp. zaniebujemy.

Rozwiązania

R1. Niech drugiego dnia inny turysta pokonuje trasę w górę dokładnie tak samo, jak nasz turysta dzień wcześniej. W pewnym momencie obaj muszą się minąć! \square

R2. Tylko okładki – przednią I tomu i tylną II tomu, łącznie 1 cm. \square

R3. Jeśli tramwaj 1 jeździ o godzinach $xx:x0$, a tramwaj 2 minutę po nim ($xx:x1$), to pan Y ma 9 razy większą szansę na odwiedzinach u narzeczonej niż u matki. \square

R4. Pociągi zbliżają się do siebie z prędkością 150 km/h. Ich spotkanie nastąpi więc po 2 godzinach; Struś przebiegnie w tym czasie 500 km. \square

R5. Podpalamy jednocześnie pierwszy sznurek na obu końcach i drugi sznurek na jednym. Pierwszy sznurek spali się cały w pół godziny, w tym momencie zaczynamy mierzyć czas i podpalamy drugi koniec drugiego sznurka. Ponieważ zostało mu jeszcze pół godziny, to paląc się na obu końcach spłonie w kwadrans. \square

R6. Podpalamy sznurek jednocześnie na obu końcach i w dowolnym innym punkcie, uzyskując dwa fragmenty płonące każdy na obu końcach. Ilekroć któraś część się

cała spali, natychmiast podpalamy dowolny punkt drugiej części; być może powtarzamy tę procedurę nieskończenie wiele razy. W ten sposób zawsze mamy 4 płomyki, więc cały sznurek spali się w kwadrans. \square

R7. Tak. Idą dwie najszybsze osoby, jedna z nich wraca z latarką, potem idą dwie najwolniejsze, druga z najszybszych wraca z latarką i znów idą razem dwie najszybsze. To zajmuje 17 minut i można sprawdzić, że szybciej się nie da. \square

R8. Samochód dłużej jechał z prędkością 40 km/h, więc średnia prędkość jest poniżej 50 km/h. Dokładne rachunki pokazują, że jest ona średnią *harmoniczną* liczb $v_1 = 40$ i $v_2 = 60$:

$$t_1 = AB/40 - \text{czas podróży z } A \text{ do } B,$$

$$t_2 = AB/60 - \text{czas podróży z } B \text{ do } A,$$

$$v_{\text{średnia}} = \frac{AB + BA}{t_1 + t_2} = \frac{2AB}{\frac{AB}{40} + \frac{AB}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = 48. \square$$

R9. Nie ma takiej prędkości. Z poprzedniego zadania

$$v_{\text{średnia}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 2v_1 \cdot \frac{v_2}{v_1 + v_2} < 2v_1. \square$$