

problem sztucznej inteligencji


SPIS TREŚCI
NUMERU 10 (485)


Kondensat Bosego–Einsteina:
o najzimniejszych atomach
świata
Krzysztof Pawłowski str. 1

Kafelkowanie prostokątów
i grafy planarne
Marcin Kotowski,
Michał Kotowski str. 4

Układanie prostokątów
Joachim Jelisiejew str. 6

Jak zważyć czarną dziurę?
Justyna Modzelewska str. 8


 Jak leczyć choroby
wirusowe?
Magdalena Fikus str.11

 Spróbuj zostać
Archimedesem
Marek Kordos str.12

Japońskie tajemnice neutrin
Paweł Przewłocki str.14

Informatyczny kącik olimpijski
(76): Skarb
Tomasz Idziaszek str.17

O obrotach... wektorów
i satelitów
Aleksander
Schwarzenberg-Czerny str.18


 Zadania str.20

Aktualności str.21

Klub 44 str.22

Prosto z nieba: Las i BOSS str.24

Niebo w październiku str.24

 A jednak istnieje!
Joanna Jaszewska str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–18⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Kondensat Bosego–Einsteina: o najzimniejszych atomach świata

Krzysztof PAWŁOWSKI*

Legenda głosi, że historia kondensacji Bosego–Einsteina rozpoczęła się przypadkiem, podczas wykładu na Uniwersytecie w Dhace. Prowadzący, Satyendra Nath Bose, pokazywał, że współczesny mu statystyczny opis teorii promieniowania ciała doskonale czarnego nie zgadza się z obserwacjami. Jednak podczas wyprowadzenia popełnił elementarny „błąd” – potraktował cząstki jako obiekty nierozróżnialne. Konsekwencją jego błędu była całkowita zgodność teorii i doświadczenia. Pewne jest, że w czerwcu 1924 roku Bose napisał do Alberta Einsteina list z prośbą o ocenę swego artykułu na temat nowego wyprowadzenia rozkładu Plancka. Artykuł, uprzednio odrzucony przez czasopisma naukowe, został przetłumaczony przez Einsteina na język niemiecki i za jego rekomendacją opublikowany.

Einsteina urzekła matematyczna elegancja wyników Bosego, ale podchodził sceptycznie do ich fizycznego znaczenia. Mimo to miesiąc po otrzymaniu listu przedstawił rozszerzenia i możliwe konsekwencje tej teorii. Tak powstała kwantowa teoria gazu doskonałego. Jednym z pierwszych wniosków, jakie Einstein z niej wyciągnął, była właśnie kondensacja Bosego–Einsteina.

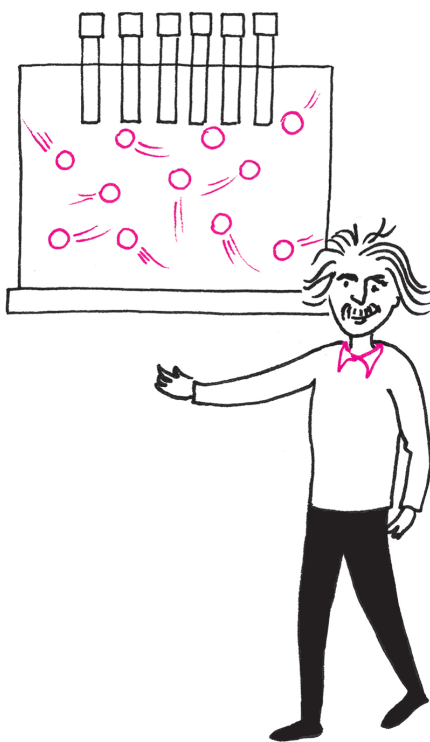
W swoim wyprowadzeniu Einstein rozważył naczynie z gazem, do którego dodawane są kolejne atomy, ale tak, aby temperatura nie ulegała zmianie. Teoria gazu doskonałego doprowadziła go do zaskakującego wniosku. Powyżej pewnej krytycznej gęstości każdy nowo dodany atom musi być nieruchomy. Gdy dodamy bardzo dużo cząstek, gaz będzie się składał z dwóch faz: ze „standardowej” fazy termicznej, której cząstki latają chaotycznie w różnych kierunkach ze średnią prędkością zależną od temperatury, oraz właśnie z kondensatu Bosego–Einsteina, utworzonego przez większość cząstek, które lewitują praktycznie nieruchomo. Wygląda to tak, jakby w trakcie losowania toto-lotka prawie wszystkie kule unosiły się nieruchomo w maszynie losującej, podczas gdy kilka z nich latałoby szybko po całym jej wnętrzu.

Nowa teoria wywołała ostrą krytykę środowiska fizyków. Nawet autor miał szereg wątpliwości, czego najlepszym świadectwem jest list Ehrenfesta do Joffego:

Mój drogi przyjacielu! Zdecydowanie Einstein jest z nami! W pełni zgodziliśmy się, że odrażająca praca Bosego jest bez żadnego znaczenia.

Największe zastrzeżenia budziły założenia teorii, ale nawet ci, którzy ją w całości zaakceptowali, nie dawali szans kondensacji Bosego–Einsteina. Otóż obliczono, że dla rzeczywistych atomów oraz dla rozsądnych gęstości kondensacja ujawni się dopiero przy ekstremalnie niskich temperaturach. Temperatura pokojowa to około 300 K, azot skrapla się w 100 K, temperatura w kosmosie jest szacowana na 3 K. Tymczasem typowe temperatury kondensacji oszacowano na setki nanokelwinów. Oczekiwano, że każda substancja w tej temperaturze powinna natychmiast zamrznąć, być ciałem stałym, a nie gazem. Poza tym, w czym trzymać kondensat? Gaz, zderzając się ze ściankami naczynia, ogrzewałby się do temperatury naczynia. Zatem należałoby schłodzić również naczynie, bo w innym przypadku kondensat natychmiast by wyparował.

Dopiero dużo późniejsze badania nad ciekłym helem przekonały społeczność naukowców, że kondensacja może być czymś więcej niż tylko matematycznym konceptem. Badania nad sublimacją pokazały, że kondensat może się uformować, zanim cały gaz przejdzie w ciało stałe, wystarczy jedynie zacząć od bardzo rozrzedzonego gazu. Ominęto również problem naczynia. Tutaj pomogło zrozumienie, jak materia oddziałuje ze światłem, oraz powstanie laserów.



*Centrum Fizyki Teoretycznej PAN

Otóż odpowiednio dobrany laser może wsysać atomy do środka swojej wiązki. Gaz zawieszają się w próżni, świecąc na niego laserami z różnych kierunków i dodatkowo oddziałując na niego polem magnetycznym.

Temperatura klasycznego gazu doskonałego jest z definicji proporcjonalna do średniej energii kinetycznej cząstek gazu. Natomiast energia kinetyczna jest proporcjonalna do kwadratu prędkości.

Długo głównym problemem pozostawało chłodzenie. Rozwiązania wykorzystywane obecnie są wynikiem prac kilku pokoleń badaczy. Atomy chłodzi się w wielu etapach, ostatni z nich, zwany chłodzeniem przez parowanie, jest stosunkowo prosty. W trakcie doświadczenia osłabia się wiązki laserowe i pole magnetyczne trzymające gaz. Pozwala to najszybszym atomom uciec poza zasięg tej magnetoptycznej pułapki. Zostają tylko atomy najwolniejsze, a zmniejszenie średniej prędkości to po prostu ochłodzenie. Efekt jest taki sam jak wtedy, gdy dmuchamy nad szklanką z gorącą herbatą. Dmuchaając, usuwamy te atomy, które były najslabiej związane z cieczą, czyli atomy najszybsze. Pozostają powolne cząstki, średnia prędkość tych, które pozostają, maleje, czyli herbata stygnie. Eksperyment jest więc przeprowadzony odwrotnie do idei Einsteina. Zamiast dodawać cząstki w stałej temperaturze, usuwa się większość cząstek – te najszybsze, aby zmniejszyć temperaturę. Czy w ten sposób osiągnie się kondensat?

Problem rozstrzygnięto w 1995 roku, 70 lat po pracach Bosego i Einsteina. W doświadczeniu najpierw ochłodzono gaz, potem nagle wyłączono magneto-ptyczną pułapkę trzymającą gaz. Część atomów natychmiast rozpięchła się na boki – te uznano za fazę normalną. W centrum został bohater tego artykułu – atomy o najniższej energii, zatem z niemalże zerową prędkością, tworzące kondensat Bosego–Einsteina.

W 1995 roku dwie grupy badawcze (pracujące niezależnie) wytworzyły kondensat w laboratorium. Zespół pod kierownictwem Erica Cornella i Carla Wiemana z JILA w Boulder skondensował gaz atomów rubidu. Natomiast grupa z MIT, kierowana przez Wolfganga Ketterlego, zaobserwowała kondensację gazu atomów sodu. Eric Cornell, Wolfgang Ketterle i Carl Wieman zostali za te badania uhonorowani Nagrodą Nobla z fizyki w 2001 roku, czyli zaledwie 6 lat po odkryciu, co jak na standardy Komitetu Noblowskiego jest czasem bardzo krótkim.

Zrozumienie kondensacji bardzo się zmieniło od czasów Einsteina. Okazało się, że kondensat jest dla materii tym, czym laser dla światła. Przypomnijmy długą, rozpoczętą jeszcze w XVII wieku, debatę na temat natury światła. Naukowcy podzielili się na dwa obozy. Pierwsi skłaniali się do teorii falowej, stwierdzającej, że światło jest dość podobne do dźwięku. Drugi obóz twierdził, że światło składa się z podobnych do małych kulek cząstek światła. Natura okazała się sprawiedliwa dla obu stron. Dzisiaj wiemy, że światło jest i falą, i zbiorem cząstek (fotonów) jednocześnie. Podobnie wygląda sprawa z atomami, jednak ich falowa natura ujawnia się dopiero przy ultraniskich temperaturach. Tutaj na scenę znowu wychodzi kondensat – jest on tak zimny, że jego atomy traktuje się jak fale. Co więcej – fale te są na tyle „długie”, że fale różnych atomów nakładają się. Wreszcie to, co czyni kondensat tak szczególnym, to jego spójność – w kondensacie fale różnych atomów wzmacniają się wzajemnie, tak jak dźwięk z kilku odpowiednio rozmieszczonych głośników. Właściwie kondensat bardziej przypomina jeden superatom, będący sumą setek tysięcy atomów dodających się do jednej fali materii. Dokładnie tak, jak fotony w laserze dodają się do jednej spójnej wiązki.

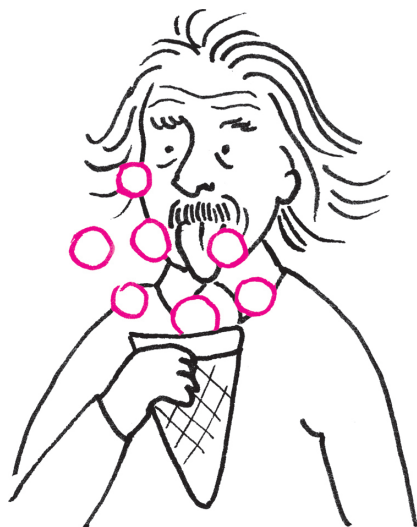
Pozostało jeszcze pytanie, które może nurtować Czytelnika – po co to wszystko? Jedną z motywacji jest użycie kondensatu do budowy nowego rodzaju komputerów – komputerów kwantowych. W klasycznym komputerze podstawową jednostką informacji jest bit – układ, który może przyjąć dwie różne wartości umownie nazywane „0” i „1”. Komputer kwantowy będzie oparty na kwantowych bitach, zwanych kubitami, w których „0” i „1” mogą występować jednocześnie. Okazuje się, że mając kubity, można wykonać niektóre zadania, na przykład rozłożenie liczby na czynniki pierwsze, szybciej, niż jest to możliwe w przypadku komputerów klasycznych. Jednym z wielu pomysłów na tworzenie kubitów miał być kondensat Bosego–Einsteina podzielony na dwie części, ale położone tak blisko siebie, żeby atomy mogły przeskakiwać między tymi dwoma kondensatami. Sterując oddziaływaniami między atomami wewnątrz kondensatów oraz zmieniając odległość między kondensatami, można by wykonywać proste operacje logiczne. Na przykład, gdyby wszystkie atomy znalazły się w jednym kondensacie, byłby to odpowiednik „0”, gdy w drugim – „1”. Tuż po podziale jednego kondensatu

na dwie równe części układ byłby w stanie superpozycji „0+1”. Istnieją teoretyczne propozycje, jak zrealizować wszystkie bramki logiczne niezbędne do działania komputera kwantowego. Obliczenia i pamięć komputera opierałyby się na zimnych atomach, natomiast informacje między kondensatami oraz elektroniką byłyby przesyłane za pomocą światła. Z jednej strony kondensat wydawał się bardzo dobrym kandydatem: jest to układ, który wyróżnia się spośród innych długim czasem spójności – pozostaje „kwantowy” przez sekundy, będąc rekordzistą w tej kategorii. Kolejną zaletą jest jego długi zasięg spójności – kondensatem manipuluje się jak jednym atomem, ale w wyniku uzyskuje się duże wzmocnienie manipulacji. Mimo tych zalet teraz wydaje się, że o ile badania nad kondensatem były milowym krokiem w kierunku kwantowych komputerów, sam kondensat, być może, nie jest najlepszym budulcem. Operacje na kondensacie zachodzą zbyt wolno, pozostaje problem ze skalowaniem, gdyż ciągle laboratoria muszą poświęcać całe pomieszczenia na elementy optyczne i elektroniczne niezbędne do wytworzenia kondensatu.

Natomiast ultrazimne atomy są już na tyle kontrolowane, że zaczynają służyć jako narzędzie do zrozumienia innych, bardziej skomplikowanych układów. Nauczono się, jak zmieniać siłę oddziaływań między atomami, dzielić kondensaty na części niemalże dowolnie rozmieszczone w przestrzeni, tworzyć chmury gazów jedno-, dwu- i trójwymiarowe. Stąd pomysły, żeby użyć zimnych gazów do zrozumienia innych układów. Dla przykładu, jednym z nierozwiązanych problemów fizyki teoretycznej jest wyjaśnienie nadprzewodnictwa wysokotemperaturowego. Mechanizm musi być związany z ruchem elektronów wewnątrz sieci krystalicznej, jednak obecnie nie ma metod mierzenia tego ruchu. Przewiduje się natomiast, że ruch elektronów jest z dobrym przybliżeniem opisywany pewnym modelem, zwanym modelem Hubbarda. Korzystając z tego modelu, możemy napisać równania ruchu elektronów, jednak ich rozwiązanie okazuje się bardzo trudne. Nawet używając komputerów, umiemy je rozwiązać tylko dla maksymalnie kilkunastu cząstek. Można natomiast stworzyć podobny układ w zimnych gazach – rozdziela się je pomiędzy tysiące małych pułapek, używając tzw. sieci optycznych, tak aby atomy mogły przepływać między różnymi pułapkami. Ścisłej, buduje się taki układ, żeby ruch atomów był również opisywany modelem Hubbarda. Tym razem jednak mamy możliwość swobodnej zmiany parametrów tego modelu, a jednocześnie możemy śledzić ruch pojedynczych atomów. Poprzez badanie ich zachowania być może zostanie rozstrzygnięty problem, czy model Hubbarda wystarcza do wyjaśnienia nadprzewodnictwa, a jeśli tak – w jakich dokładnie warunkach to nadprzewodnictwo zachodzi. Budujemy zatem dobrze kontrolowany układ, tak aby udawał układ, którego jeszcze nie rozumiemy. Pomysł pochodzi od Richarda Feynmana i znany jest pod nazwą kwantowych symulatorów.

Inne, może bardziej przyziemne, zastosowanie to metrologia. Okazuje się, że niektóre wielkości, np. sekunda albo stała grawitacyjna mogą być zmierzone precyzyjniej, jeśli pomiarów dokona się używając atomów skondensowanych, a nie, jak to robiono wcześniej, atomów w fazie normalnej gazu. Tutaj pierwsze testy kondensat ma już za sobą, a kilka centrów miar i wag wdraża to rozwiązanie. Szczególnie interesujące są pomysły przygotowania kondensatu w takim stanie kwantowym, który umożliwi pomiary dokładniejsze niż jakikolwiek układ klasyczny.

Dokąd zmierza kondensat? Odpowiadając przewrotnie – w kosmos. Od 2010 roku międzynarodowy zespół badaczy opracowuje możliwość wysłania kondensatu w przestrzeń kosmiczną. Interferometry oparte na kondensacie mają posłużyć do dokładniejszych weryfikacji teorii grawitacji oraz dokładnego wyznaczenia stałej grawitacyjnej i pomiaru pola grawitacyjnego Ziemi. Być może za kilka lat na orbicie Ziemi kropla kondensatu Bosego–Einsteina, spadając w ziemskim polu grawitacyjnym, ujawni nowe tajemnice natury.



O sieciach optycznych pisaliśmy w *Delcie* 4/2011.



Rozwiązanie zadania F 865.

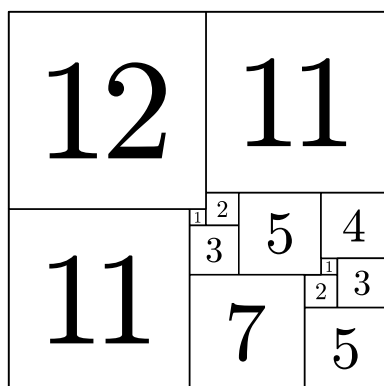
Dla prądu I płynącego wzdłuż krzywej l siła elektrodynamiczna działająca na element prądu Idl jest dana iloczynem wektorowym $dF = I \cdot dl \times B$. Ze względu na kształt rozważanego obwodu elektrycznego sumy składowych elementów prądu o zwrocie $+y$ i $-y$ muszą mieć taką samą wartość, a w konsekwencji składowa x wypadkowej siły elektrodynamicznej wyniesie zero. Natomiast suma wszystkich składowych x elementów prądu musi być skierowana od A do B i musi być równa całkowitemu prądowi, przepływającemu przez płytkę, a długość składowej x dowolnej drogi przepływu prądu musi być równa L . Stąd siła działająca na płytkę to $F = B \cdot I \cdot L$, gdzie prąd $I = \mathcal{E}/R_0$. Masa płytki wynosi $m = \rho \cdot d \cdot L^2 \sqrt{3}/4$. Z II zasady dynamiki dostajemy $a = 4 \cdot B \cdot \mathcal{E}/\sqrt{3} \cdot \rho \cdot d \cdot R_0 \cdot L$.

Kafelkowanie prostokątów i grafy planarne

Marcin KOTOWSKI*, Michał KOTOWSKI*

Rozważa się również ogólniejszą wersję problemu: kafelkowanie prostokąta. Pierwszy przykład takiego kafelkowania (dla prostokąta o wymiarach 32×33 , za pomocą dziewięciu kwadratów) znalazł Zbigniew Moron w 1925.

Właściwie zamiast o grafach powinniśmy mówić o *multigrafach*: będziemy pozwalać na istnienie wielokrotnych krawędzi pomiędzy parą wierzchołków, a także pętli, czyli krawędzi o tym samym początku i końcu. Jednak w tym artykule przyjmujemy, że termin *graf* obejmuje również takie przypadki.



Rys. 1

O związku kafelkowania z elektrycznością warto też przeczytać w książce Jarosława Górnickiego *Okruchy matematyki*.

Ścianą grafu planarnego jest każdy spójny obszar ograniczony krawędziami grafu oraz nieograniczony obszar leżący na zewnątrz grafu. Tę ostatnią ścianę będziemy nazywać ścianą zewnętrzną.

Zajmijmy się następującym klasycznym zadaniem: należy pokryć kwadrat jednostkowy kwadratowymi kafelkami o różnych bokach tak, aby żadne dwa kafelki nie nachodziły na siebie. Czytelnik może spróbować poszukać takiego kafelkowania metodą prób i błędów, ale na pierwszy rzut oka nie jest jasne, czy pokrycie o żądanych własnościach w ogóle istnieje. A nawet jeśli istnieje, to nie wiadomo, jak wiele kafelków trzeba użyć. Okazuje się, że zadanie ma elegancką interpretację w językach teorii grafów planarnych i sieci elektrycznych, która pomoże nam odpowiedzieć na te pytania.

Zacznijmy od ogólniejszej sytuacji: dany jest prostokąt wykafelkowany kwadratami, na razie niekoniecznie różnymi – na przykład tak jak na rysunku 1. Kafelkowaniu przyporządkowujemy jego graf incydencji, czyli każdemu maksymalnemu poziomemu odcinkowi (być może złożonemu z boków kilku kwadratów) przypisujemy wierzchołek, a każdemu kafelkowi krawędź, w taki sposób, że krawędź odpowiadająca danemu kwadratowi łączy wierzchołki odpowiadające przeciwnym poziomym bokom tego kwadratu. Łatwo przekonać się, że powstały graf jest planarny, to znaczy można go narysować na płaszczyźnie tak, że nie ma przecinających się krawędzi.

Okazuje się, że konstrukcję tę można odwrócić, czyli przekształcać grafy planarne w kafelkowania. Żeby to zrobić, będziemy traktować taki graf jak obwód elektryczny. Przypomnijmy najpierw podstawowe prawa dotyczące przepływu prądu w obwodzie.

Jeśli do dwóch punktów obwodu złożonego z oporników podłączymy baterię, na każdym oporniku wytworzy się różnica napięć i przepływ prądu zgodnie z prawem Ohma:

$$\Delta V = I \cdot R,$$

gdzie ΔV to różnica potencjałów, I – natężenie prądu, a R – opór.

Załóżmy, że każda krawędź ma taki sam opór. Niech I_{uv} oznacza natężenie prądu płynącego po krawędzi od wierzchołka u do v (a więc $I_{vu} = -I_{uv}$). Bezpośrednio z prawa Ohma wnioskujemy, że dla dowolnego cyklu (u_1, \dots, u_n, u_1) w obwodzie suma natężeń prądów na tym cyklu jest równa zero:

$$\sum_{i=1}^n I_{u_i u_{i+1}} = 0.$$

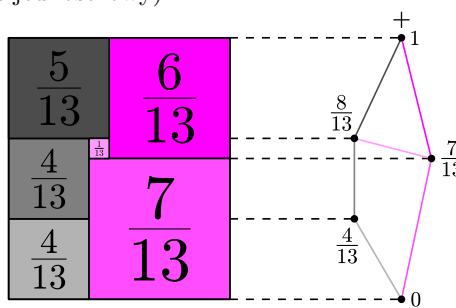
Z kolei prawo Kirchhoffa mówi, że w każdym wierzchołku u suma natężeń prądów jest zerowa:

$$\sum_{v \sim u} I_{uv} = 0,$$

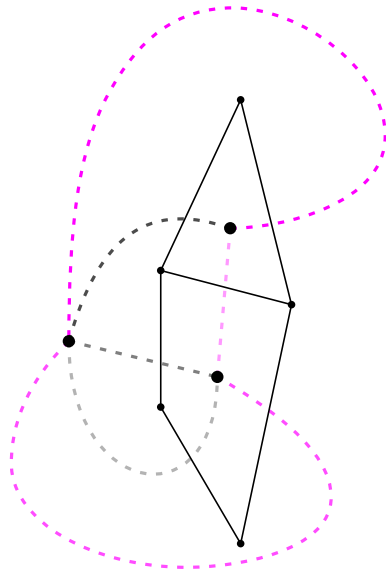
gdzie sumujemy po wszystkich wierzchołkach v sąsiadujących z u .

Niech teraz G będzie dowolnym grafem planarnym. Będziemy myśleć o G jako o obwodzie elektrycznym, w którym każda krawędź ma jednostkowy opór.

Wybermy w dowolny sposób dwa różne wierzchołki $a, b \in G$ położone na zewnętrznej ścianie grafu. Podłączmy do nich baterię generującą jednostkową różnicę potencjałów – możemy bez straty ogólności przyjąć $V_a = 1$, $V_b = 0$. W ten sposób w każdym wierzchołku u otrzymamy pewną wartość potencjału elektrycznego V_u , a na każdej krawędzi (u, v) przepływ prądu $I_{uv} = V_u - V_v$ (bo opór na krawędzi jest jednostkowy).

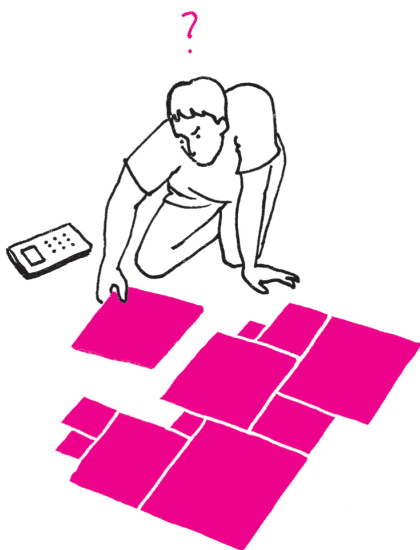


*University of Toronto, Kanada



Rys. 2

Może zdarzyć się, że po przyłożeniu napięcia przez którąś krawędź nie płynie prąd (tj. łączy ona wierzchołki o tym samym potencjale). Wtedy w kafelkowaniu odpowiadałby jej zdegenerowany kwadrat o zerowym boku. Niestety, nie zawsze da się tej sytuacji uniknąć, o czym można przekonać się na przykładzie klikli czteroelementowej.



Graf nazywamy 3-spójnym, jeśli usunięcie dowolnych dwóch jego wierzchołków nie rozspójnia go.

Kafelkowanie prostokąta odpowiadające grafowi G konstruujemy w następujący sposób. Niech (u, v) będzie krawędzią, dla której $I_{uv} > 0$. Przyporządkowujemy jej kwadrat, którego dolny i górny brzeg znajdują się odpowiednio na wysokościach V_v i V_u (a więc długość jego boku jest równa I_{uv}). Aby otrzymać kafelkowanie, musimy jednak określić jeszcze, gdzie każdy kwadrat jest umieszczony w poziomie. Tu przychodzi nam z pomocą konstrukcja grafu dualnego. Dla grafu planarnego G graf dualny G' jest określony następująco: wierzchołki G' odpowiadają ścianom G (łącznie z zewnętrzną, nieograniczoną ścianą), przy czym dwa z nich są połączone krawędziami (rys. 2), jeśli odpowiadające im ściany sąsiadują w G . Czyli każdej krawędzi e w G odpowiada dualna krawędź e' w G' , a ściany w G' odpowiadają wierzchołkom w G . Możemy narysować G' tak: w każdej ścianie G zaznaczamy punkt, a następnie dla każdej krawędzi G rysujemy krawędź grafu dualnego łączącą punkty odpowiadające ścianom po obu jej stronach. Zwróćmy uwagę na to, że w ten sposób otrzymujemy nie tylko abstrakcyjną strukturę grafu dualnego, ale również pewien jego rysunek na płaszczyźnie. Na przykład wszystkie drzewa o N krawędziach będą miały takie same abstrakcyjne grafy dualne (jeden wierzchołek z N pętlami), ale otrzymane reprezentacje na płaszczyźnie będą zależały od struktury (i wybranego rysunku!) drzewa.

Zauważmy teraz, że maksymalne pionowe odcinki w kafelkowaniu odpowiadają dokładnie ścianom w jego grafie incydencji. Ponadto z definicji maksymalne poziome odcinki odpowiadają wierzchołkom grafu incydencji. Ponieważ w grafie dualnym wierzchołki przechodzą na ściany, ściany na wierzchołki, a każda krawędź na krawędź, widzimy, że graf dualny jest niemal grafem incydencji kafelkowania obróconego o 90 stopni.

Należy jeszcze poradzić sobie z pewną niedogodnością: boki wyjściowego prostokąta odpowiadają ścianie zewnętrznej w grafie incydencji. Dodajmy więc do grafu G specjalną krawędź e między biegunami a i b . W grafie dualnym G' bieguny baterii przykładamy między końcami krawędzi dualnej e' , a następnie usuwamy ją. Z powyższej obserwacji o obracaniu kafelkowania otrzymujemy przepis na współrzędne poziome kafelków: są one wyznaczone dokładnie przez natężenia prądów na krawędziach „poprawionego” grafu dualnego. Czytelnik Wnikliwy zapyta z pewnością, dlaczego taki wybór daje dobry układ kafelków, tzn. dlaczego nie ma w nim „dziur”. Sprawdź, Czytelniku, że zapewnia to prawo Kirchhoffa!

Każdemu grafowi planarnemu z wybranymi biegunami odpowiada zatem kafelkowanie prostokąta za pomocą kwadratów. Możemy przyjąć, że pionowy bok tego prostokąta ma długość 1. Jaka jest długość poziomego boku? To suma długości boków kafelków przylegających do niego, czyli suma natężeń prądów wypływających z bieguna baterii. Ponieważ $V_a - V_b = 1$, to z prawa Ohma wynika, że suma ta jest równa odwrotności oporu zastępczego między a i b w grafie G . Kafelkowanie kwadratu dostaniemy dokładnie wtedy, kiedy opór zastępczy będzie równy 1.

Wobec tego podaliśmy właśnie metodę znajdowania wszystkich możliwych kafelkowań kwadratu za pomocą parami różnych kafelków: należy znaleźć wszystkie grafy planarne o tej własności, że po przyłożeniu napięcia jednostkowego między pewnymi dwoma wierzchołkami opór zastępczy między nimi będzie równy 1, a natężenia prądów na krawędziach będą niezerowe i parami różne. Korzystając z tej charakterystyki, znaleziono, oczywiście używając komputera, liczne nowe przykłady kafelkowań kwadratów i innych prostokątów. Ich galerię można znaleźć na stronie <http://www.squaring.net>.

Na zakończenie wspomnijmy o jeszcze jednym nieoczekiwanym związku. Chcąc znaleźć wszystkie kafelkowania ustalonego prostokąta, wystarczy ograniczyć się do kafelkowań prostych, to znaczy takich, których nie da się podzielić pionowym odcinkiem na dwa rozłączne kafelkowania. Chwila zastanowienia pokazuje, że warunek ten jest równoważny 3-spójności grafu incydencji. Pochodzące z kombinatoryki wielościanów twierdzenie Steinitza mówi, że 3-spójne grafy planarne to dokładnie szkielety wypukłych trójwymiarowych wielościanów. Czytelnik Wnikliwy może się więc zastanowić, jakiemu kafelkowaniu odpowiada jego ulubiony wielościan.

Układanie prostokątów

Joachim JELISIEJEW*

W tym artykule zastanawiamy się nad pytaniem

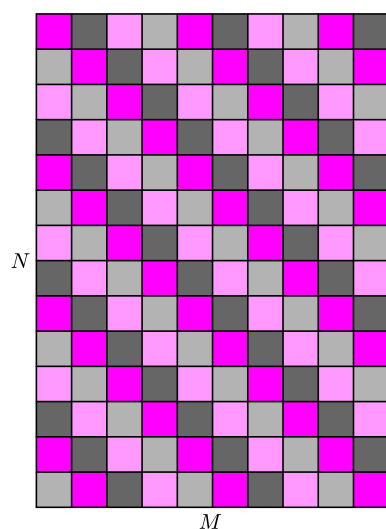
kiedy szachownicę $N \times M$ można pokryć prostokątami $1 \times n$?

Pokryć to znaczy ułożyć prostokąty na szachownicy tak, by nie zachodziły na siebie i by cała powierzchnia szachownicy była zakryta. Przez cały artykuł patrzmy tylko na prostokąty położone w taki sposób, że zakrywają n kolejnych pól (w rzędzie lub kolumnie).

Naturalna próba odpowiedzi to: *szachownicę można pokryć, gdy n dzieli długość któregoś z boków, czyli gdy $n | N$ lub $n | M$* . Jasne jest, że w tym przypadku faktycznie można pokryć szachownicę. Ale czy są inne przypadki, w których istnieje pokrycie?

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to łatwo zauważyć, że nie: jeżeli duży prostokąt jest pokryty prostokątami $1 \times n$, to n dzieli jego pole, które jest równe NM . Skoro n jest pierwsza, to $n | N$ lub $n | M$.

W przypadku, gdy n nie jest pierwsza, sprawa nie jest taka prosta. Istnieje sporo klasycznych zadań z tej problematyki, dotyczących szczególnych przypadków tego pytania (patrz np. *deltoid* 4/2010). Okazuje się, że łatwiej dojść do rozwiązania, gdy potraktuje się problem ogólnie. Kluczem jest, jak we wspomnianym *deltoidzie*, metoda kolorowania.



Rys. 1

Pokolorujmy kolejne przekątne szachownicy n kolorami (na rysunku 1 mamy $n = 4$, $N = 14$, $M = 10$). Do dalszych rozważań potrzeba nam nieco oznaczeń i obserwacji. W większości przypadków znacznie łatwiej przekonać się o prawdziwości podanych stwierdzeń, np. patrząc na rysunek, niż porządnie opisać dowód, zatem uzupełnienie uzasadnień pozostawiamy Czytelnikowi.

1. Pola o tym samym kolorze leżące w tym samym rzędzie lub kolumnie są oddalone o dokładnie n . Wynika stąd kluczowy wniosek:

każdy prostokąt $1 \times n$ zakrywa dokładnie jedno pole każdego koloru.

2. Mówimy, że rząd *ma kolor* a , jeżeli zaczyna się od pola koloru a .
3. Jeżeli n nie dzieli N , to rzędów niektórych kolorów jest o jeden więcej, niż rzędów pozostałych kolorów. Te kolory nazywamy *częstymi*. Pozostałe kolory nazywamy *nieczęstymi*. Na rysunku 1 magenta i jasnoszary są częste, a pozostałe nieczęste. Jeżeli n dzieli N , to wszystkie kolory nazywamy częstymi.
4. Jeżeli jest dokładnie k kolorów częstych, to N daje resztę k z dzielenia przez n .
5. *Kolorowanie pozwala rozróżniać rzędy*. Jeżeli n nie dzieli M , a rząd A i rząd B mają różne kolory, to istnieje taki kolor c , że liczba pól pokolorowanych na c jest różna w A i B .

6. *Przemaalowywanie*. Wybierzmy dwa kolory a i b i przemaalujmy każdy rząd koloru b na rząd koloru a i odwrotnie. Na rysunku 2 rzędy magenta przemaalowano na ciemnoszare i odwrotnie. Następująca obserwacja jest kluczowa:

po przemaalowaniu każdy prostokąt $1 \times n$ zakrywa dokładnie jedno pole każdego koloru.

Oczywiście, wszystkie powyższe obserwacje przenoszą się na kolumny – wystarczy zamienić N z M w sformułowaniach powyżej.

Możemy już przejść do rozwiązania naszego problemu.

Zadanie 1. Kiedy szachownicę $N \times M$ można pokryć prostokątami $1 \times n$?

Rozwiązanie. Wiemy, że jeśli $n | N$ lub $n | M$, to pokrycie istnieje. Wykażemy, że zachodzi również implikacja odwrotna: jeżeli istnieje pokrycie, to $n | N$ lub $n | M$.

Załóżmy, że szachownicę $N \times M$ można pokryć prostokątami $1 \times n$ oraz liczba n nie dzieli ani N , ani M . Pokolorujmy szachownicę n kolorami, podobnie jak na rysunku 1. Z obserwacji 1 wynika, że pól każdego koloru jest tyle samo.

Skoro n nie dzieli N , to istnieje przynajmniej jeden kolor nieczęsty. Wybierzmy dowolny kolor częsty a i dowolny kolor nieczęsty b i przemaalujmy rzędy a na b i odwrotnie (jak w przykładzie na rysunku 2).

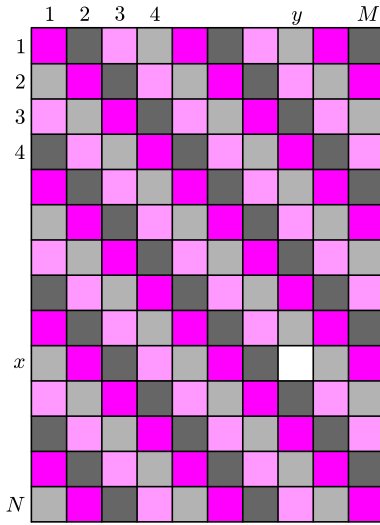
Na mocy obserwacji 6 po przemaalowaniu każdy prostokąt zawiera n pól o różnych kolorach, więc pól każdego koloru jest nadal tyle samo. Z drugiej strony, ubył

Rys. 2

*doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

jeden rząd a , przybył zaś jeden rząd b . Z obserwacji 5 wynika, że liczba pól pokolorowanych na pewien kolor c zmieniła się, zatem mamy sprzeczność. \square

Można zastanawiać się też, kiedy istnieje pokrycie szachownicy z wyciętymi polami: rogami, polem środkowym itp. Przyjrzyjmy się najprostszej modyfikacji zadania, czyli szachownicy z wyciętym jednym polem.



Rys. 3

Zadanie 2. Uzasadnij, że szachownicę $N \times M$ z wyciętym polem o współrzędnych (x, y) , jak na rysunku 3, można pokryć prostokątami $1 \times n$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z warunków:

1. n dzieli każdą z liczb $N - 1, M - 1, x - 1, y - 1$,
2. n dzieli każdą z liczb $N + 1, M + 1, x, y$.

Rozwiązanie. Jak zwykle Czytelnikowi pozostawiamy udowodnienie, że gdy któryś z warunków zachodzi, to pokrycie istnieje; prostokąty można wtedy ułożyć w cztery duże „bloki”, patrz rysunek 4 dla pokrycia z $N = 13, M = 10, n = 3$ oraz $(x, y) = (7, 4)$.

Założmy zatem, że pokrycie prostokąta istnieje. Na początek chcemy rozważyć rzędy i stwierdzić, że

liczba n dzieli liczbę $N - 1$ i $x - 1$ lub liczba n dzieli liczbę $N + 1$ i x .

Niech a będzie kolorem rzędu zawierającego wycięte pole. Założmy, że a jest częsty. Jeżeli istnieje inny kolor częsty b , to przemaalowujemy a na b i b na a , jak w obserwacji 6. Pomijając wycięte pole, przemaalowanie to nie zmienia liczby pól danego koloru na szachownicy, gdyż szachownica zawiera tyle samo rzędów koloru a i b . Skoro rzędy b i a są różnych kolorów, to pole w kolumnie y miało w tych rzędach różny kolor. Wobec tego po przemaalowaniu liczba pól pewnego koloru zmniejszy się o jeden.

Z drugiej strony, prostokąt pokryty był prostokątami $1 \times n$, więc pól każdego koloru przed i po przemaalowaniu jest tyle samo: $(NM - 1)/n$. Zatem przemaalowanie nie może zmieniać liczby pól żadnego koloru.

Sprzeczność pokazuje, że tylko kolor a jest częsty. Z obserwacji 4 wynika, że $n \mid N - 1$. Zauważmy ponadto, że N -ty rząd ma kolor częsty, a więc kolor a . Wobec tego $n \mid N - x$, czyli $n \mid x - 1$.

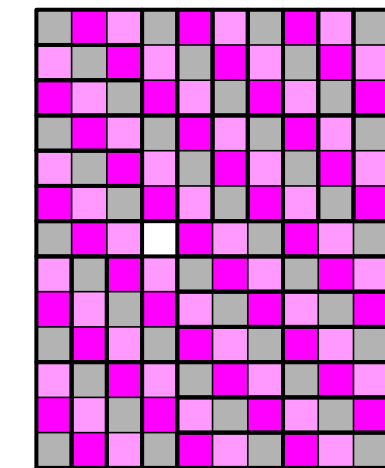
Podobnie rozumujemy, gdy a jest nieczęstym kolorem: stwierdzamy, że jest on jedynym nieczęstym kolorem, więc częstych kolorów jest $n - 1$, stąd $n \mid N + 1$. Ponadto rząd n -ty ma kolor nieczęsty, więc $n \mid n - x$, czyli $n \mid x$.

Popatrzmy teraz na kolumny. Podobnie jak w przypadku rzędów stwierdzamy, że liczba n dzieli $M - 1$ i $y - 1$ lub liczba n dzieli $M + 1$ i y .

Mamy łącznie cztery możliwości: dwie na mocy rozumowania „o rzędach” i dwie „o kolumnach”. Chcemy teraz wyeliminować możliwości $n \mid N + 1$ i $n \mid M - 1$ oraz $n \mid N - 1$ i $n \mid M + 1$. Założmy najpierw, że $n \geq 3$. Skoro prostokąty o polu n pokrywają szachownicę z wyciętym polem, która ma pole powierzchni $NM - 1$, to $n \mid NM - 1$. Gdyby $n \mid N + 1$ i $n \mid M - 1$, to $n \mid NM + 1$, więc $n \mid (NM + 1) - (NM - 1) = 2$, co daje sprzeczność. Podobnie przypadek $n \mid N - 1$ i $n \mid M + 1$ prowadzi do sprzeczności. To kończy rozumowanie w przypadku $n \geq 3$.

Na koniec rozważmy przypadek $n = 2$ i założmy, że n dzieli liczby $N - 1, x - 1, M + 1, y$. Wobec tego liczby N i M są nieparzyste. Nazwijmy kolor pola narożnego *białym*, zaś drugi kolor *czarnym*. Na pełnej szachownicy o nieparzystych długościach boków pól białych jest więcej niż czarnych. Zatem, jeżeli istnieje pokrycie szachownicy z wyciętym polem (x, y) , to pole to ma kolor biały. To znaczy, że $2 \mid x - y$, i otrzymujemy sprzeczność z podzielnościami $2 \mid x - 1$ oraz $2 \mid y$. To samo rozumowanie eliminuje przypadek, gdy 2 dzieli liczby $N + 1, x, M - 1, y - 1$. \square

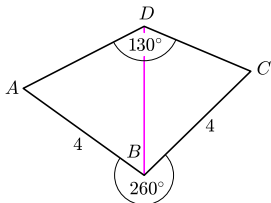
Jak widać, przedstawiona metoda jest ogólna, w tym znaczeniu, że przy odrobinie czasu i cierpliwości można ją zastosować, na przykład, do szachownicy z rozsądną liczbą wyciętych pól. Na zachętę pozostawiamy Czytelnikowi kilka problemów.



Rys. 4



Rozwiązanie zadania M 1435.
Zauważmy, że kąt zewnętrzny ABC ma miarę 260° – dwa razy większą od kąta ADC .



Zatem punkt D leży na okręgu o środku B i promieniu $BA = BC = 4$, skąd $BD = 4$.

Zadanie 3. Uzasadnić, że jeżeli $N, M, n \geq 3$, to szachownicę $N \times M$ z usuniętymi dwoma przeciwnymi rogami można pokryć prostokątami $1 \times n$ wtedy i tylko wtedy, gdy n dzieli każdą z liczb $N - 1, M - 2$ lub n dzieli każdą z liczb $N - 2, M - 1$.

Zadanie 4. Dla których całkowitych n szachownicę 2015×2015 z wyciętym środkowym polem można pokryć prostokątami $1 \times n$?

Zadanie 5. Dla których całkowitych n szachownicę 2015×2015 z wyciętym narożnym polem można pokryć prostokątami $1 \times n$?

Wskaźówka 3. Kolorujemy szachownicę na n kolorów jak w poprzednich przykładach. Zatem, że pierwszy rząd jest koloru a , zaś drugi – koloru b . Jeżeli n nie dzieli ani $N - 1$ ani $N - 2$, to rządów kolorów a i b jest tyle samo, zaś ostatni rząd nie jest koloru a ani b . Przenalujemy rząd koloru a na kolor b i odwrotnie i sprawdzamy, że po tej zamianie liczba pól pewnego koloru zmienia się. To daje sprzeczność. Podobnie uzasadniamy, że n dzieli $M - 1$ lub $M - 2$.

Innymi słowy, pokrycie istnieje dla tych n , które są dzielnikami 1012 lub 1013.

- $n \mid 2016$ oraz $n \mid 1013$,
- $n \mid 2014$ oraz $n \mid 1012$,

Wskaźówka 4. Na podstawie zadania 2 szukamy liczb n , które spełniają jeden z warunków

Innymi słowy, pokrycie istnieje dla tych n , które są dzielnikami 2014.

- $n \mid 2016$ oraz $n \mid 1$, czyli $n = 1$,
- $n \mid 2014$ oraz $n \mid 0$,

Na podstawie zadania 2 szukamy liczb n , które spełniają jeden z warunków

Wskaźówka 5. Możemy uznać, że pole narożne ma współrzędne $(1, 1)$.

Jak zważyć czarną dziurę?

Justyna MODZELEWSKA*



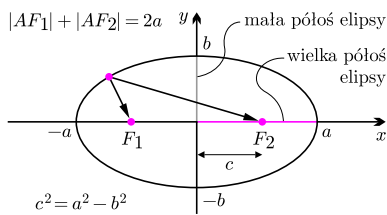
Masa jest miarą ilości materii, z której składa się obiekt fizyczny. To jedno z podstawowych pojęć w fizyce, może ono określać bezwładność (tzw. masa bezwładna) lub oddziaływanie grawitacyjne (tzw. masa grawitacyjna). Oszacowanie masy obiektów astronomicznych nie jest wcale prostą sprawą – nie da się ich przecież położyć na wadze. Czarne dziury są uważane przez wielu naukowców za niezwykle interesujące obiekty – być może dlatego, że nie da się ich obserwować wprost, okrywa je bowiem *horyzont zdarzeń*, spod którego nie dociera do obserwatorów zewnętrznych żadna informacja, nawet fotony poruszające się z największą dozwoloną w fizyce prędkością światła. Do opisu tego, co dzieje się na zewnątrz stacjonarnej czarnej dziury potrzeba jedynie dwóch parametrów, jej masy oraz miary tempa jej obracania się (momentu pędu). Astronomowie już od dłuższego czasu badają czarne dziury: okazuje się, że są one zjawiskiem bardzo powszechnym. Ogromne czarne dziury znajdują się w centrum prawdopodobnie każdej galaktyki. Dużo mniejsze czarne dziury istnieją również w układach podwójnych.

Jednym z pierwszych badaczy, którzy rozważali możliwość wysyłania sygnałów z otoczenia bardzo masywnych obiektów, był John Mitchell (1724–1793). Rozważał on problem prędkości ucieczki z powierzchni gwiazdy o masie M oraz promieniu R . Taką prędkość w prosty sposób możemy wyznaczyć z teorii Newtona – należy określić, dla jakiej prędkości energia całkowita cząstki o masie m jest równa zero:

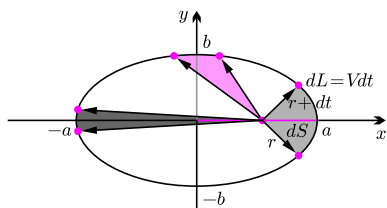
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0.$$

Otrzymujemy stąd $v = \sqrt{2GM/R}$, czyli dobrze znaną *drugą prędkość kosmiczną*. Przyrównując ją do prędkości światła w próżni, wynoszącej $c = 299\,792\,458$ m/s, otrzymujemy odpowiadający tej sytuacji promień równy $R_g = 2GM/c^2$.

*doktorantka, Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika PAN w Warszawie

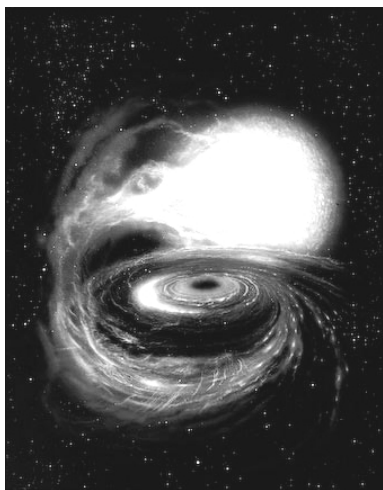


Rys. 1. Elipsa w układzie współrzędnych: F_1, F_2 są ogniskami elipsy, c jest odległością między środkiem elipsy a jednym z jej ognisk.



Rys. 2. Graficzne przedstawienie drugiego prawa Keplera.

Konsekwencją I prawa Keplera jest fakt, że **każde** z oddziałujących ciał obiega po elipsie środek masy układu.



Rys. 3. Artystyczna wizja ciasnego układu podwójnego.

Efekt Dopplera, dobrze znany np. z charakterystycznej zmiany wysokości dźwięku karetki pogotowia jadącej na sygnale, polega na zmianie długości fali, np. elektromagnetycznej, w zależności od prędkości źródła. Dla $|v| \ll c$ zmiana ta wyraża się wzorem:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c},$$

gdzie v jest prędkością źródła względem obserwatora.

Prędkość ucieczki z „gwiazdy” o masie M i promieniu mniejszym od R_g jest większa od prędkości światła! Taka „gwiazda” jest niewidoczna, a jej istnienie można stwierdzić jedynie poprzez pośrednie oddziaływania z innymi świecącymi ciałami. Okazuje się, że wyrażenie na R_g uzyskane przez Mitchella pojawia się także w ogólnej teorii względności, a dokładniej w rozwiązaniu Schwarzschilda opisującym geometrię czasoprzestrzeni na zewnątrz sferycznie symetrycznego rozkładu mas. Wielkość R_g określa tam tzw. horyzont zdarzeń, nazywany też *promieniem Schwarzschilda*. Jako że czarne dziury nie widać, do określenia ich mas używa się wyników obserwacji towarzyszących im czasami w układach podwójnych świecących obiektów. Można tego dokonać przy znajomości trzech praw sformułowanych przez Johanna Keplera do opisu ruchu planet w Układzie Słonecznym. Prawa te są uniwersalne dla dowolnych dwóch ciał oddziałujących opisywanymi mechaniką newtonowską siłami grawitacyjnymi.

- I prawo Keplera: jedno z ciał porusza się względem drugiego po orbicie będącej krzywą stożkową, w ognisku której znajduje się drugie ciało,
- II prawo Keplera: prędkość polowa v_s w ruchu względnym pierwszego ciała względem drugiego jest stała – jest to konsekwencja zasady zachowania momentu pędu w polu grawitacyjnym; $v_s = dS/dt = \text{const}$,
- III prawo Keplera: jeśli ciało o masie m obiega ciało o masie M po orbicie eliptycznej o pólosci wielkiej a , to

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M + m)}{4\pi^2},$$

gdzie G to stała grawitacji, T – okres obiegu.

O ile tylko towarzysz czarnej dziury nie zbliża się do niej zanadto, także i on będzie posłuszny tym prawom.

Przykładem wykorzystania powyższej wiedzy jest oszacowanie masy supermasywnej czarnej dziury znajdującej się w centrum naszej Galaktyki. Dokładne obserwacje okolic centrum pozwoliły na znalezienie i określenie okresu orbitalnego pewnej gwiazdy (nazwanej S2): $T = 15,56 \pm 0,35$ lat. Jej orbita jest elipsą o pólosciach długości 5,5 i 15,2 dni świetlnych. Orbita gwiazdy S2 pokrywa się praktycznie z płaszczyzną Galaktyki, w innych przypadkach obserwacje byłyby bardziej skomplikowane (obserwując jeden rzut pod nieznanym kątem, nie da się określić parametrów elipsy – potrzebny jest dodatkowy pomiar). Korzystając z trzeciego prawa Keplera, w którym masę gwiazdy m można zaniedbać w porównaniu z masą czarnej dziury M_{BH} , otrzymujemy

$$M_{\text{BH}} = M = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 G}.$$

Podstawiając do tego wzoru dane obserwacyjne, otrzymujemy

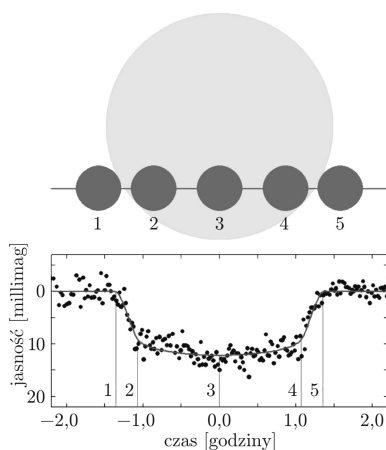
$$M_{\text{BH}} = 4,31 \cdot 10^6 M_{\odot}.$$

Niestety, nie zawsze jest tak łatwo. Galaktyczna czarna dziura znajduje się stosunkowo niedaleko nas, jeśli jednak zapagniemy zmierzyć masy innych supermasywnych czarnych dziur, zadanie się komplikuje – nie dysponujemy np. optycznymi danymi układu, z których odczytamy wszystkie potrzebne informacje. Nic jednak straconego! Aby nie komplikować dalszej dyskusji, przyjmijmy, że składniki układu poruszają się po torach kołowych, w III prawie Keplera należy zatem zamienić wielką pólosci elipsy na promień odpowiedniego okręgu. Ponieważ prędkość liniowa ciała w ruchu po okręgu to $v = 2\pi R/T$, z III prawa Keplera uzyskujemy związek

$$v = \sqrt{\frac{G(M_{\text{BH}} + m)}{R}}$$

Obserwacje charakterystycznych linii widmowych obiektu, a w szczególności zmienność ich długości fal w czasie pozwala na oszacowanie, przy wykorzystaniu efektu Dopplera, prędkości, z jaką świecące ciało krąży wokół czarnej dziury. Łącząc wzory na prędkość liniową ruchu po okręgu i trzecie prawo Keplera, dostajemy:

$$2M_{\text{BH}} = \frac{v^3 T}{2\pi G}.$$



Rys. 4. Zmiana jasności obiektu podczas tranzytu.

Wyposażeni w tę wiedzę, rozważmy poszczególne przypadki, z których pierwszym jest *ciasny układ podwójny*. W tej sytuacji masa czarnej dziury i jej towarzysza są podobne. Okres obiegu określa się przy sprzyjających okolicznościach za pomocą obserwacji przejścia jednego ciała niebieskiego przez tarczę drugiego, czyli tranzytu, który powoduje chwilowy spadek jasności przykrywanego obiektu.

Aby taka sytuacja miała miejsce, oba składniki układu i obserwator muszą znajdować się w przybliżeniu w jednej linii. W przypadku dostatecznie dużych obiektów znajdujących się blisko siebie zawsze dojdzie do choćby częściowego zaćmienia.

Inną metodę ważenia stosuje się dla supermasywnych czarnych dziur w centrach aktywnych galaktyk. Dla galaktyk pobliskich korzysta się z pomiarów dyspersji prędkości gwiazd, w przypadku galaktyk odległych używa się natomiast modelu obszaru szerokich linii emisyjnych.

Przypadek pierwszy sprowadza się do obserwacji tzw. zgrubienia centralnego (ang. *galactic bulge*), w którym znajduje się większość materii galaktycznej. Z obserwacji zależności rozkładu prędkości gwiazd od odległości od centrum dla pobliskich galaktyk wyznacza się przybliżoną zależność między masą czarnej dziury a masą zgrubienia:

$$M_{\text{BH}} = 0,0002m_{\text{bulge}}.$$

Prędkość ruchu gwiazd wyznaczamy, posługując się efektem Dopplera. W tym przypadku nie mierzymy jednak prędkości pojedynczych gwiazd, ponieważ jest ich zbyt dużo. Przyjmujemy, że płaszczyzny orbit gwiazd rozłożone są przypadkowo. W momencie pomiaru niektóre gwiazdy przybliżają się do nas, inne oddalają. To powoduje, że wysyłana przez nie linia emisyjna jest przesunięta w stronę niebieską i czerwoną widma. W mierzonym widmie zgrubienia centralnego obserwujemy zatem bardzo szeroką linię emisyjną, której szerokość odpowiada typowej prędkości gwiazdy.

Przypadek drugi dotyczy odległych aktywnych galaktyk, których centralna czarna dziura ma dysk akrecyjny. Świeci on w zakresie promieniowania optycznego, nadfioletowego oraz rentgenowskiego, jest też źródłem obszaru szerokich linii emisyjnych. Obszar ten składa się z obłoczków materii wyrwanych z dysku akrecyjnego. Można je uznać za obiekty okrążające czarną dziurę i użyć tych samych argumentów co we wcześniejszych scenariuszach. Przyjmuje się, że w porównaniu z masą czarnej dziury masa obłoczków jest zaniedbywalna. Promieniowanie obłoczków dochodzi do ziemskich teleskopów z opóźnieniem zależnym od ich odległości od czarnej dziury. Z tej zależności można otrzymać promień orbity obłoczka, będącego źródłem szerokich linii emisyjnych, zakładając

$$c\tau = R,$$

gdzie τ to opóźnienie sygnału. W tym przypadku mamy do czynienia z liniami emisyjnymi i wykreślając zależność ilości energii od długości fali, dostajemy informację o szerokości linii, a tym samym o prędkości obłoczków. Ostatecznie, masę otrzymujemy z trzeciego prawa Keplera:

$$M_{\text{BH}} = \frac{v^2 R}{G}.$$

Opisana powyżej metoda jest nazywana metodą *echa świetlnego*.

Czarne dziury to bardzo ciekawe obiekty, są natchnieniem wielu obserwacji i rozmyślań teoretycznych, a oszacowanie ich mas jest bardzo ważne. Prawdziwa potęga fizyki ujawnia swoje oblicze: właśnie dzięki podstawowym prawom fizyki i obserwacjom można zważyć to, co niewidoczne dla oczu. Pozwalają one zbadać czarne dziury o masach 100 mln razy większych od Słońca oraz znajdujących się o miliardy lat świetlnych od nas. Podczas swoich studiów doktoranckich analizuję obserwacje odległego kwazara CTS C30.10, prowadzone za pomocą teleskopu SALT (ang. *Southern African Large Telescope*). Badając zachowanie się linii emisyjnej MgII, między innymi staram się oszacować masę czarnej dziury w tej aktywnej galaktyce.

Jak leczyć choroby wirusowe?

W chwili gdy piszę ten tekst, „widmo strachu” przed wirusem Ebola krąży po Europie. W książce J. Stangrooma (*Co myślą naukowcy*, PIW 2009), napisanej w 2005 roku, wybitna badaczka wirusów, Dorothy Crawford, o tym wirusie powiada, że chorzy na tyle szybko umierają, iż nie zdążą zakazić dużej liczby zdrowych. Znaczenia komunikacji samolotowej uczona nie doceniła. Ebola nie jest zresztą jedynym wirusem sprawiającym nam kłopoty terapeutyczne. Wirusy szybciej się zmieniają, niż my nadążamy z naszymi badaniami i z autoryzacją nowych procedur terapeutycznych.

Szczególność natury wirusów, gdzieś między żywym i martwym, utrudnia postępowanie badawcze. Zacząć trzeba było od poznania budowy i funkcji materiału genetycznego, wszak namnażanie to jedna z funkcji życia. Nie jedyna... Na szczęście genomy wirusów są małe (małe, tzn. mniejsze i znacznie mniejsze od genomów bakteryjnych), a ich oznaczenie stanowiące krok pierwszy do postawienia diagnozy, jest dziś stosunkowo rutynowe. Diagnoza nie oznacza prostego przełożenia na proces leczniczy, ponieważ materiał genetyczny wirusów jest wysoce zmienny, a proces infekcji przebiega z użyciem maszynierii molekularnej zakażonej komórki. Podobno w tym samym pacjencie AIDS może występować kilka odmian wirusa HIV. Większość dotychczasowych postępowań leczniczych skierowane było na metabolizm komórki, co jest działaniem nie specyficznym, uszkadzającym również zdrowe komórki gospodarza.

Ta sytuacja ulega stopniowo zmianie. Nieoczekiwanie nowe wyniki z badań wirusów atakujących bakterie, tzw. bakteriofagów. Bakteriofagi odegrały ważną rolę w historii genetyki; poznanie przebiegu infekcji bakterii *E. coli* przez jeden z bakteriofagów dostarczyło niezbitych dowodów na naturę chemiczną genów (DNA, lata 50. XX wieku). Bakterie zakażone bakteriofagiem są chore, mogą zginąć, ale mogą też próbować się bronić, a mechanizm obronny zauważono i zaczęto badać od niedawna. Odkryto zjawisko nazwane akronimem CRISP. W różnych gatunkach bakterii znaleziono takie same fragmenty DNA, oskrzydlające fragmenty centralne, pochodzące z różnych wirusów. Być może pochodziły z wcześniejszych infekcji, wcześniejszych pokoleń danego gatunku bakterii. W przypadku powtórnej infekcji bakteriofagiem fragment ten staje się swoistym sygnałem aktywującym bakteryjne białko Cas9, chroniące przed nowym zakażeniem. Jest to prosty mechanizm obronny, bardzo odległy, ale jednak prototyp układu immunologicznego wyższych organizmów.

Za odkryciem CRISP poszły badania jego molekularnej struktury przy zastosowaniu najbardziej wyszukanych metod analizy krystalograficznej, prowadzone w kilku ośrodkach amerykańskich i brytyjskich. Ich z kolei konsekwencją był pomysł, aby skonstruować podobny kompleks do zwalczania inwazji wirusów (nie bakteriofagów) powodujących u niektórych zakażonych ludzi rozwój nowotworów. Naturalnym kandydatem do takich badań był HPV, wirus brodawczaka ludzkiego. Znanych jest ponad 100 jego odmian, prawdopodobnie zakażonych jest ponad 75% ludzi. Wirusy te trwają w komórkach, a powielając się wraz z ich podziałami, prowadzą do powstawania różnorodnych brodawek; niektóre są przyczyną raka szyjki macicy lub prąca. Badacze sądzą, że wprowadzenie specyficznymi wektorami do komórek nowotworowych konstrukcji molekularnych przypominających bakteryjne CRISP mogłoby wybiórczo niszczyć te komórki, w których znajduje się groźny HPV. Tego typu próby, na razie prowadzone w hodowlach komórek odpowiednich nowotworów, stwarzają nadzieję na przyszłe zastosowania terapeutyczne. Ważną, bo będą wybiórcze i specyficzne. Uzyskanie pozytywnych wyników klinicznych wymagać będzie jeszcze wielu doświadczeń laboratoryjnych.

Kto by pomyślał kilkadziesiąt lat temu, że bakteriofagi przyczynią się do poznania mechanizmów rozwoju i ewentualnego zwalczania nowotworów...

Magdalena FIKUS

5

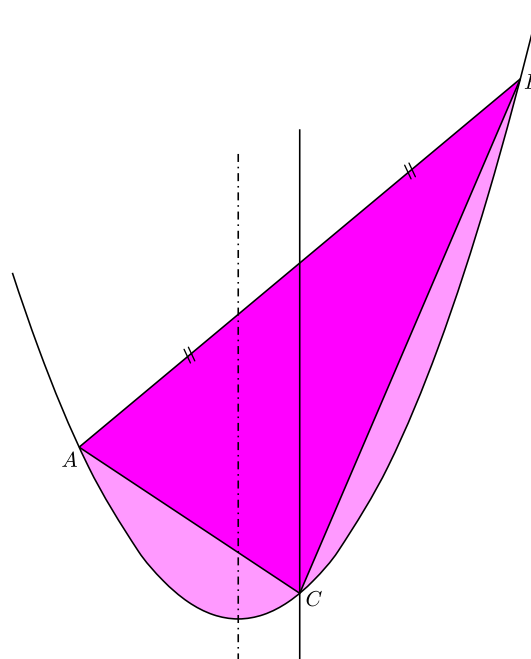
mała delta

Spróbuj zostać Archimedesem

Jeden ze sposobów obliczenia pola odcinka paraboli, czyli ograniczonej spośród części, na jakie dzieli płaszczyznę parabola i jej cięciwa, zaproponowany przez Archimedeasa, jest następujący: przez środek cięciwy (nazwijmy ją AB) prowadzimy prostą równoległą do osi paraboli i uzyskujemy w przecięciu z parabolą punkt C ;

pole odcinka paraboli to $\frac{4}{3}$ pola trójkąta ABC .

Dlaczego tak jest i jak on na to wpadł?



O paraboli można bez końca.

Jest to tor pocisku wyrzuczonego ukośnie w jednorodnym polu grawitacyjnym (oczywiście w próżni).

Albo przecięcie powierzchni stożka płaszczyzną równoległą do jednej z jego tworzących.

A także wykres funkcji kwadratowej

$$ax^2 + bx + c$$

– można ten wykres przesunąć tak, że będzie to funkcja ax^2 , gdzie widać, że ma on oś symetrii, prostą $x = 0$ (jeśli punkt (x, y) należy do wykresu, to punkt $(-x, y)$ też).

Przez obracanie paraboli dokoła jej osi otrzymamy lustro, które równoległe do osi promienie skupi w jednym punkcie, zwanym ogniskiem paraboli.

Jeśli poprowadzimy prostą prostopadłą do osi tak, by środkiem odcinka utworzonego przez jej przecięcia z osią i ogniska był punkt przecięcia osi parabolą (wierzchołek paraboli), to każdy punkt paraboli będzie w tej samej odległości od tej prostej (zwanej kierownicą) i od ogniska.

A w biegunowym układzie współrzędnych, którego środkiem będzie ognisko, a kąty mierzyć będziemy od odcinka ognisko-wierzchołek, to parabolę opisze równanie $r = p/(1 + \cos \varphi)$, gdzie p to odległość ogniska od kierownicy.

I tak dalej...

Co wiedział od poprzedników?

Od Eudoksosa (którego w wielu miejscach podziwiam) pochodzi

Zasada wyczerpywania

jeśli z jakiejś figury płaskiej wyjmiesz więcej niż połowę, z tego, co zostanie, znów wyjmiesz więcej niż połowę i będziesz tak postępował dalej, to suma pól wyjętych części dowolnie dokładnie przybliży pole tej figury.

Dowód tego faktu jest indukcyjny. Oznaczmy więc poszukiwane pole figury przez S , a kolejno wyjmowane fragmenty (nie muszą być w jednym kawałku) przez U_1, U_2, U_3, \dots . Wykażemy, że

$$(*) \quad U_1 + U_2 + \dots + U_n \geq S \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right).$$

Dla $n = 1$ mamy tak z założenia. Jeśli więc dla pewnego k powyższa zależność ma miejsce, mamy też

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 + \dots + U_{k+1} &\geq \\ &\geq U_1 + U_2 + \dots + U_k + \frac{1}{2}(S - (U_1 + U_2 + \dots + U_k)) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (S + (U_1 + U_2 + \dots + U_k)) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(S + S \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} \right) \right) = \\ &= S \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \right), \end{aligned}$$

co dowodzi nierówności (*).

Jeśli teraz zauważymy, że

$$S \geq (U_1 + U_2 + \dots) \geq S \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = S$$

(nierówność na początku wynika stąd, że wszystko wyjmowaliśmy z figury o polu S ; równość na końcu to znany wzór na sumę szeregu geometrycznego), to tym samym zakończymy dowód zasady wyczerpywania.

Co sam zauważył?

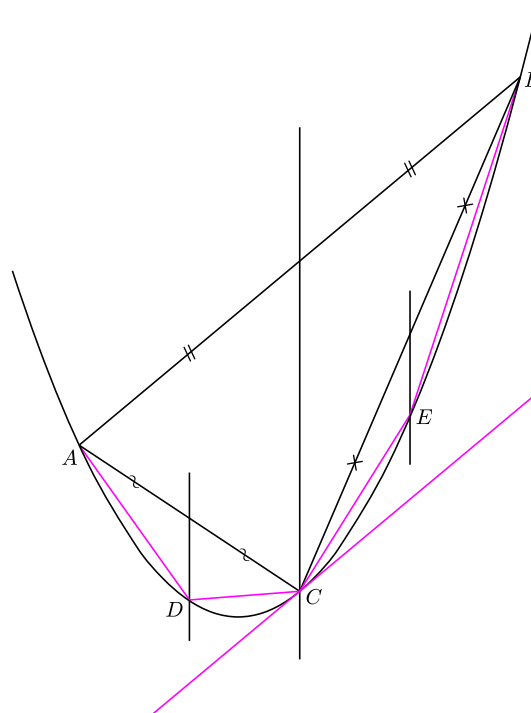
Pierwsze spostrzeżenie polegało na tym, że

styczna do paraboli poprowadzona w punkcie C , w którym przecina ją prosta równoległa do osi i przechodząca przez środek pewnej cięciwy AB tej paraboli, **jest równoległa do tej cięciwy**.

Drugie spostrzeżenie zaczyna się od tego, że przecięz zarówno AC , jak BC też są cięciwami paraboli i

jeśli dla nich powtórzymy taką samą operację jak dla cięciwy AB , otrzymując odpowiednio punkty D i E , to trójkąty ACD i BCE **będą miały jednakowe pola**, co więcej, **równe jednej ósmej pola trójkąta ABC** .

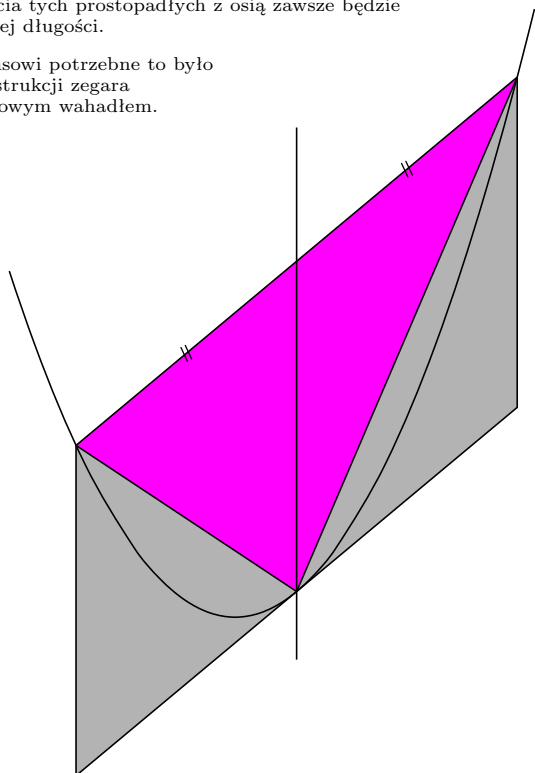
I jeśli Czytelnik Ambitny ma zamiar zostać matematykiem na miarę Archimedes, powinien się sprawdzić, dowodząc poprawności obu tych spostrzeżeń.



A może wolisz pościgać się z kimś z XVII wieku?

Na przykład z Christiaanem Huygensem? Jeśli tak, to sprawdź, że gdy w dowolnym punkcie paraboli poprowadzimy prostopadłą do stycznej w tym punkcie i prostopadłą do osi, to odcinek utworzony przez punkty przecięcia tych prostopadłych z osią zawsze będzie tej samej długości.

Huygensowi potrzebne to było do konstrukcji zegara z obrotowym wahadłem.



A może z kimś z XIX wieku?

Na przykład z Victorem Ponceletem? Jeśli tak, to narysuj cztery proste, z których żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt, ale każda przecina wszystkie trzy pozostałe. Zobaczysz wtedy cztery trójkąty. Okręgi na nich opisane przecinają się w jednym punkcie, który jest na dodatku ogniskiem paraboli stycznej do tych czterech prostych. On to wiedział, a Ty?

Bo dalej jest już prosto!

Pierwsze spostrzeżenie pozwala stwierdzić, że wyjmując najpierw, jako U_1 , trójkąt ABC , jako U_2 oba (razem!) trójkąty ACD i BCE , a potem cztery trójkąty analogicznie zbudowane w pozostałych czterech odcinkach paraboli, potem osiem itd., za każdym razem wyjmujemy więcej niż połowę tego, co jeszcze zostało do dyspozycji. Rysując bowiem równoległobok, którego jednym bokiem jest cięciwa, przyległe do niej boki są równoległe do osi paraboli, a ostatnim bokiem jest styczna w trzecim wierzchołku, widzimy, że wyjmowany trójkąt to dokładnie połowa tego równoległoboku, a on zawiera mierzony przez nas odcinek paraboli.

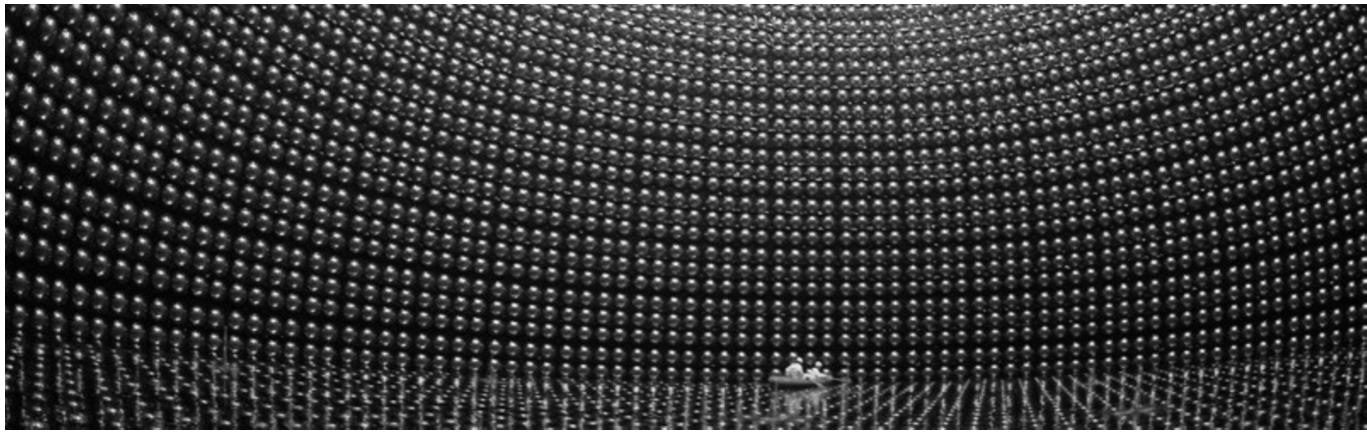
Drugie spostrzeżenie mówi nam, że za każdym razem wyjmujemy jedną czwartą tego, co wyjęliśmy w poprzednim kroku. Zatem, jeśli przez $[ABC]$ oznaczymy pole trójkąta ABC , to w sumie otrzymamy

$$[ABC] \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots\right) = \frac{4}{3}[ABC].$$

Jak widać, wystarczy mieć trafne spostrzeżenia, a do wielkiej kariery matematycznej w zupełności wystarczy wiedza zdobyta w gimnazjum.

A jak Archimedes na to wpadł, oczywiście, nie wiemy.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

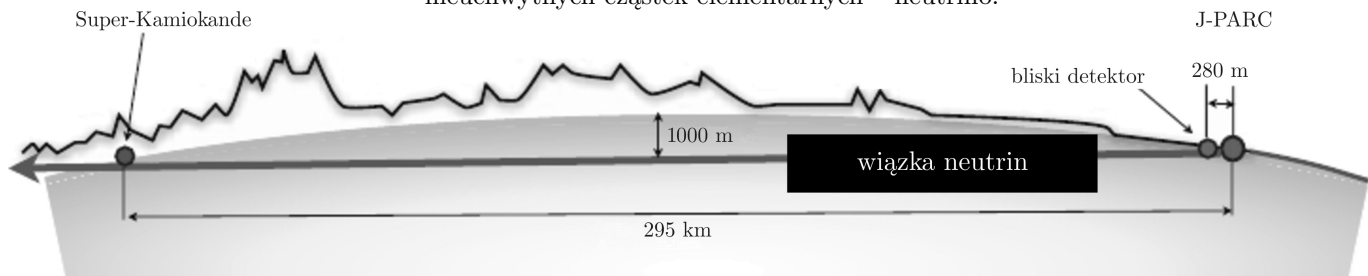


Czujniki światła (fotopowielacze) w detektorze Super-Kamiokande. Zdjęcie zostało wykonane podczas dokonywanego z pokładu małej łódki przeglądu aparatury w przerwie między doświadczeniami.

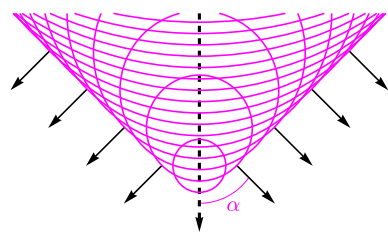
Japońskie tajemnice neutrin

Paweł PRZEWŁOCKI*

Wewnątrz jest całkowicie ciemno. Wydrążony w skale olbrzymi zbiornik, zawierający 50 tysięcy ton ultraczystej wody, komunikuje się z otoczeniem tylko za pomocą impulsów elektrycznych wysyłanych przez tysiące czujników światła, zamontowanych na jego ścianach. Dostęp do tego wyjątkowego urządzenia badawczego jest skomplikowany – wszystko znajduje się kilometr pod ziemią, wewnątrz góry Ike w kopalni na zachodzie Japonii. Naukowcy nadzorujący pracę detektora czujnie obserwują monitory w pokoju kontrolnym – widać na nich błyski światła, od czasu do czasu pojawiające się w detektorze. Ich rejestracja jest sygnałem, że za pomocą naszego zbiornika złapaliśmy jedną z najbardziej nieuchwytnych cząstek elementarnych – neutrin.



Rys. 1. Ogólny schemat eksperymentu T2K.



Rys. 2. Zjawisko Czerenkowa. Linia przerywaną zaznaczono tor cząstki naładowanej o prędkości v_{cz} większej niż prędkość $v_{św}$ rozchodzenia się światła w ośrodku materialnym. Cząstka ta pobudza ośrodek do świecenia. Okręgi (w trzech wymiarach – sfery) oznaczają możliwe położenia tych fotonów, wyemitowanych w chwili, gdy cząstka naładowana przechodzi przez środek każdego z okręgów. Obwódnic tych okręgów, gdzie występuje szczególnie duża koncentracja fotonów, jest stożkiem o kącie rozgarcia $\arcsin(v_{św}/v_{cz})$. Fotony Czerenkowa są więc emitowane pod kątem $\alpha = \arccos(v_{św}/v_{cz})$ do kierunku ruchu cząstki naładowanej.

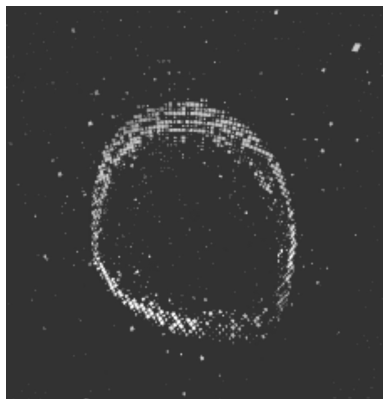
*Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Trzysta kilometrów dalej na wschód, w nadmorskiej miejscowości Tokai, inna grupa badaczy śleczy nad aparaturą kontrolującą akcelerator protonów (przypominający trochę Wielki Zderzacz Hadronów działający w CERN-ie). Od ich efektywnej pracy zależy działanie pobliskiej „fabryki”, produkującej seryjnie wielkie ilości neutrin. Ich wiązka jest wysyłana pod ziemią w kierunku detektora Super-Kamiokande, podziemnego zbiornika opisanego przed chwilą. Jeśli chcielibyśmy przejechać tę trasę samochodem, potrzebowalibyśmy kilku godzin – neutrinom ich podziemna podróż zajmuje zaledwie około milisekundy.

Po co to wszystko? Co tak interesującego dzieje się pomiędzy Tokai a Super-Kamiokande, że kosztem miliardów dolarów zbudowaliśmy eksperyment, w którym tworzymy neutrina – tylko po to, żeby je później łapać? Okazuje się, że w ten sposób jesteśmy w stanie badać niezwykle ciekawe zjawisko oscylacji. Zanim jednak o nim, opowiedzmy więcej o samych neutrinach, bo ciekawe z nich bestie.

Neutrina są wszędzie. W jednej sekundzie przez ciało człowieka przelatują ich biliony, nie robią nam jednak krzywdy – jako nienaładowane i prawie bezmasowe cząstki oddziałują z materią niezwykle słabo, jedynie bardzo niewielka ich część rozproszy się na jądrach atomowych pierwiastków, z których zbudowany jest otaczający nas świat. To jednocześnie powoduje, że bardzo trudno je badać, bo tylko przez obserwowalne produkty ich reakcji z materią możemy coś powiedzieć o ich własnościach. A są one interesujące, choćby ze względu na to, że neutrina,

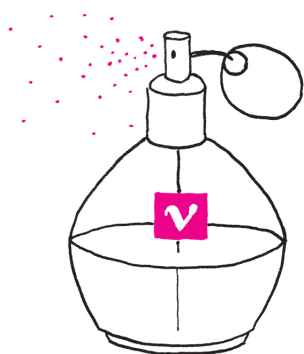
które do nas dolatują, pochodzą z wielu źródeł: Ziemi, Słońca, atmosfery ziemskiej, reaktorów jądrowych, gwiazd supernowych i innych dalekich obiektów kosmicznych. Badanie tych neutrin może nam wiele powiedzieć o naturze procesów, w których zostały wyprodukowane.



Rys. 3. Zarejestrowany w detektorze Super-Kamiokande obraz czerenkowskiego stożka światła emitowanego przez poruszający się w wodzie mion. Obraz elektronu wygląda podobnie, ma tylko bardziej postrzępione brzegi, gdyż jest efektem emisji światła przez większą liczbę elektronów kaskady elektromagnetycznej rozwijającej się w wyniku oddziaływania neutrina.

Jak oddziałują neutrina, jeśli już do reakcji dojdzie? Podlegają tylko dwóm z czterech fundamentalnych typów oddziaływań: oddziaływaniom słabym i grawitacyjnym (pozostawiając oddziaływania elektromagnetyczne i silne innym cząstkom). Przykładową reakcją słabą jest promieniotwórczy rozpad beta. W jego wyniku powstaje m.in. neutrino elektronowe – neutrina bowiem występują w trzech rodzajach (zapachach): elektronowym, mionowym i taonowym, i razem ze swoimi naładowanymi braćmi (elektronem, mionem i taonem) tworzą sektor leptonowy na liście cząstek elementarnych. Naładowane leptony rodzą się w oddziaływaniach odpowiadających im neutrin. Łatwo je zaobserwować i w ten sposób dowiedzieć się czegoś o bohaterach tego artykułu, których śladów w detektorach nie możemy zobaczyć. Błyski światła w Super-Kamiokande pochodzą głównie właśnie od mionów i elektronów.

Z neutrinami związane było pytanie, które wisiało nad fizyką cząstek elementarnych przez drugą połowę XX wieku. W wielu eksperymentach, poczynając od lat sześćdziesiątych, obserwowano neutrina pochodzące ze Słońca, jednak liczba zaobserwowanych oddziaływań z ich udziałem była dużo mniejsza od spodziewanej. Teoretycy mieli gotowe rozwiązanie wyjaśniające ten deficyt – neutrina miały podczas swojego lotu oscylować, czyli cyklicznie zmieniać zapach. Ponieważ eksperymenty, o których była mowa, rejestrowały głównie oddziaływania jednego zapachu neutrin (elektronowego), część neutrin „uciekała” i nie była w ogóle zauważana. Przyjęcie tego rozwiązania oznaczałoby jednak, iż neutrina mają masę (tylko wtedy bowiem zjawisko oscylacji może zachodzić), a tego nie przewidywał Model Standardowy – obowiązujący w dziedzinie cząstek elementarnych model teoretyczny. Pojawiały się więc również inne hipotezy wyjaśniające problemy z obserwacjami. Niektórzy sądzą, na przykład, iż zrozumienie procesów jądrowych zachodzących w Słońcu jest niewystarczające (w związku z czym nasze przewidywania strumienia neutrin są niewiarygodne). Kilkanaście lat temu okazało się jednak, że pomiary eksperymentów Super-Kamiokande i SNO ostatecznie dowodzą istnienia cyklicznych zmian zapachu zarówno dla neutrin pochodzących z ziemskiej atmosfery, jak i słonecznych. Naukowcom pozostało więc pogodzić się z niedoskonałością dotychczasowej teorii i wyruszyć na ekscytujące badania niezbadanych obszarów Nowej Fizyki.



Teoria zakłada, że oscylacje zachodzą, gdy stany o określonych *zapachach* – tj. te obserwowalne, jak neutrina mionowe czy elektronowe – nie są tożsame ze stanami o określonych masach. Relacja między jednym a drugim zestawem stanów określana jest przez współczynniki, które wygodnie zebrać w tablicę 3×3 – nazywa się ją macierzą mieszania Pontecorvo–Maki–Nakagawy–Sakaty. Parametry tej macierzy (uczenie nazywane kątami mieszania i fazą naruszającą symetrię CP) oraz różnice kwadratów mas stanów o określonych masach to stałe natury, których poszukujemy podczas studiowania oscylacji. W ciągu ostatnich 15 lat badań poznaliśmy wartości większości tych parametrów – a więc dowiedzieliśmy się wiele o szczegółach dotyczących oscylacji. Wiemy, że w przypadku neutrin atmosferycznych neutrina mionowe (o energiach rzędu GeV) oscylują głównie w neutrina taonowe; w przypadku neutrin słonecznych produkowane w Słońcu neutrina elektronowe (ich energia jest rzędu MeV) podlegają przemianom w mionowe i taonowe. Podobna transformacja zachodzi dla antyneutrin elektronowych produkowanych w reaktorach jądrowych. Jednak do niedawna jeden parametr, nazywany kątem θ_{13} , wymykał się obserwacjom, gdyż oscylacje neutrin, pozwalające na jego zbadanie, są bardzo mało prawdopodobne. Parametr ten pełni ważną rolę – jeśli jest większy od zera (czyli związane z nim oscylacje zachodzą), możliwe jest badanie za pomocą eksperymentów oscylacyjnych różnic w oscylacjach neutrin i ich antycząstek – antyneutrin. Odkrycie takiego zjawiska (mówimy tu o przyszłych eksperymentach,

Przepis na wiązkę neutrin mionowych jest prosty. Weź sporo protonów oraz tarczę, np. grafitową. Protony rozpędź i uderz nimi w tarczę. Powstałe w wyniku zderzenia piony o odpowiednim ładunku uformuj polem magnetycznym w podłużną wiązkę (to samo pole rozproszy piony o nieodpowiednim ładunku) i wprowadź do rury rozpadowej. Odczekaj, aż piony rozpadną się na (anty)miony, te na (anty)neutrina mionowe oraz (anty)elektrony i neutrina (antyneutrina) elektronowe. Inne niż neutrina cząstki zatrzymaj w bloku betonowym na końcu rury.

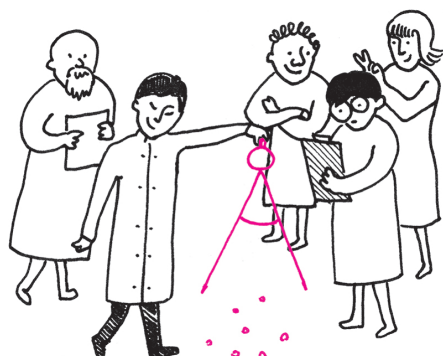
bo żaden istniejący nie jest w tej chwili w stanie dokonać odpowiedniego pomiaru) miałyby duże znaczenie dla wielu teorii kosmologicznych, m.in. pomogłoby wyjaśnić asymetrię między materią i antymaterią we Wszechświecie.

Aby wreszcie przyspilić ten oporny fragment fizycznej rzeczywistości, fizycy potrzebują dwóch rzeczy. Pierwszą jest sztuczna wiązka neutrin mionowych o energiach trochę poniżej 1 GeV. Przy kilkusetkilometrowym dystansie między źródłem a detektorem energia taka zapewnia maksymalną liczbę wynikających z naszego trudno mierzalnego parametru θ_{13} oscylacji neutrin mionowych w neutrina elektronowe. Drugą rzecz to czuły i dobrze sprawdzony detektor pozwalający wykryć te ostatnie, na przykład... tak, właśnie wspomniany na początku tego artykułu Super-Kamiokande, przeżywający właśnie swą drugą naukową młodość. Cały schemat doświadczalny nazywa się mało poetycko T2K (skrót od *Tokai To Kamioka*, co jest po prostu opisem drogi przebywanej przez neutrina) i bierze w nim udział kilkaset fizyczek i fizyków z wielu krajów, w tym z Polski (również autor tego tekstu). Jest to jeden z nielicznych eksperymentów, w których mamy kontrolę nad mierzonymi neutrinami w miejscu ich produkcji – a więc możemy wytwarzać neutrina o pożądanym właściwościach, jak również mierzyć te właściwości, zanim jeszcze proces oscylacji będzie miał miejsce. Pomiar przed oscylacjami (przy źródle wiązki, za pomocą tzw. detektora bliskiego) i po ich zajściu (za pomocą Super-Kamiokande, czyli detektora dalekiego) pozwala na precyzyjne pomiary nawet niewielkich efektów oscylacyjnych.

Eksperyment T2K zaczął działać w roku 2010, a już półtora roku później ogłosił (pomimo przerwy w zbieraniu danych spowodowanej wielkim trzęsieniem ziemi w 2011 roku), że istnieją poważne przesłanki, iż zachodzą oscylacje neutrin mionowych w elektronowe, a więc że parametr θ_{13} jest niezerowy. Po dwóch kolejnych latach możemy już mówić o pewności tej obserwacji: zaobserwowaliśmy dotąd aż 28 neutrin elektronowych w Super-Kamiokande, a gdyby oscylacje nie zachodziły, powinniśmy ich widzieć mniej niż 5! Efekt jest więc wyraźny i jednoznaczny. Jest to wielki sukces eksperymentu i jego międzynarodowej ekipy.

W świecie nauki istnieje ostra konkurencja – tak było i tym razem. Gdy w Japonii obserwowaliśmy kolejne błyski światła pochodzące od oddziaływań neutrin elektronowych, 3000 km dalej, w południowych Chinach, inna ambitna ekipa naukowa przeprowadzała eksperyment, który również miał na celu pomiar parametru θ_{13} , ale w zupełnie inny sposób – poprzez pomiar oscylacyjnego zanikania antyneutrin elektronowych z reaktorów jądrowych elektrowni Daya Bay. Ten pomiar również zakończył się sukcesem (pomiar o dużej pewności pojawił się nawet wcześniej niż w przypadku T2K).

Co dalej? O oscylacjach wiemy już sporo, ale nie wszystko! Teraz czas na doświadczalne badanie różnic między oscylacjami neutrin i antyneutrin – planowane są nowe, większe eksperymenty, mogące mierzyć się z tak trudnym wyzwaniem. A to tylko część możliwości, które daje nam fizyka neutrin. Niedawno eksperyment IceCube, umieszczony w antarktycznej czapie lodowej na biegunie południowym, poinformował o pierwszej w historii obserwacji wysokoenergetycznych neutrin pochodzących z kosmosu, rozpoczynając w ten sposób erę neutrinowych obserwacji astrofizycznych. Przyszłość rysuje się więc wielce interesująco.



O eksperymencie Daya Bay pisaliśmy w *Delcie* 5/2013.



Rozwiązanie zadania M 1436.

Nasze założenie jest równoważne nierówności

$$(1) \quad (a - bc)^2 \leq (1 - b^2)(1 - c^2).$$

Zauważmy, że wobec $|a| \leq 1$ i nierówności Schwarza mamy

$$(2) \quad (a^{n-1} + a^{n-2}(bc) + \dots + a(bc)^{n-2} + (bc)^{n-1})^2 \leq (1 + |bc| + \dots + |bc|^{n-1})^2 \leq (1 + |b|^2 + \dots + |b|^{2(n-1)})(1 + |c|^2 + \dots + |c|^{2(n-1)}).$$

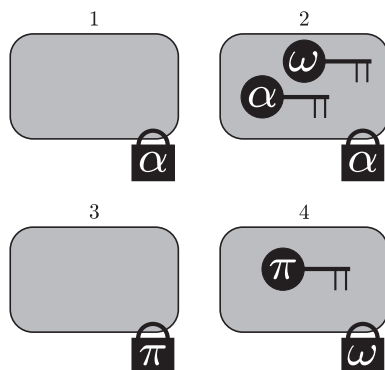
Mnożąc stronami (1) i (2), dostajemy

$$(a^n - (bc)^n)^2 \leq (1 - b^{2n})(1 - c^{2n}),$$

co jest równoważne tezie.

Informatyczny kącik olimpijski (76): Skarb

Zadanie *Skarb* pojawiło się w kwalifikacjach do konkursu Google Code Jam 2013. W skarbcu znajduje się n szkatulek, każda z nich zamknięta na kłódkę, która może być otwarta kluczem określonego rodzaju. W szkatułkach, oprócz kosztowności, mogą znajdować się klucze, które można wykorzystać do otwarcia innych szkatulek (w sumie jest m kluczy). Klucz, którym otworzyliśmy szkatulkę, nie może być użyty ponownie. Wchodząc do skarbcza, mamy już kilka kluczy. Znając zawartość szkatulek, należy stwierdzić, czy istnieje taka kolejność ich otwierania, która pozwoli na otwarcie ich wszystkich (patrz rysunek).



Mamy cztery szkatułki i trzy zamknięte klucze. Rodzaje kluczy i kłódek oznaczone są literami greckimi. Początkowo mamy jeden klucz rodzaju α . Jedną z kolejności otwarcia wszystkich szkatulek to 2, 1, 4, 3. Jeśli zaczniemy od otwarcia szkatułki 1, to nie będziemy w stanie otworzyć już żadnej innej.

Zadanie jest całkiem trudne, spróbujmy więc rozwiązać jego prostszy wariant, w którym zaczynamy z jednym kluczem rodzaju x , a w każdej szkatułce jest co najwyżej jeden klucz. Zauważmy, że następujący warunek jest konieczny, by rozwiązanie istniało:

(A) kluczy ustalonego rodzaju musi być co najmniej tyle, ile jest kłódek tego rodzaju.

W szczególności oznacza to, że co najwyżej jedna szkatułka może być pusta. Otwarcie szkatułki zamkniętej na kłódkę rodzaju x i zawierającej klucz rodzaju y skutkuje wymianieniem klucza x na klucz y . Sytuację możemy więc przedstawić za pomocą skierowanego multigrafu G , którego wierzchołkami będą rodzaje kluczy, a skierowana krawędź $x \rightarrow y$ będzie istnieć dla każdej szkatułki zamkniętej na kłódkę rodzaju x , która zawiera w sobie klucz rodzaju y . Każda ścieżka w G , startująca z wierzchołka x_I opisuje możliwą do zrealizowania procedurę otwierania szkatulek (otwieramy szkatułki odpowiadające kolejnym krawędziom ścieżki). Innymi słowy, rozwiązanie istnieje, jeśli w multigrafie G istnieje ścieżka Eulera z wierzchołka x_I . Czytelnicy na pewno znają warunki, jakie musi spełniać skierowany multigraf, aby taka ścieżka istniała: (a) każdy wierzchołek musi mieć stopień wyjściowy równy wejściowemu (oprócz co najwyżej dwóch, w których te liczby mogą się różnić o 1) oraz (b) graf musi być (słabo) spójny.

Nietrudno się przekonać, że warunek (a) wynika z warunku (A) i tego, że w każdej szkatułce jest co najwyżej jeden klucz. Jeśli założymy, że warunek (a) jest spełniony, to warunek (b) jest równoważny temu, że

(B) dla każdego rodzaju klucza da się zdobyć co najmniej jeden klucz tego rodzaju.

Nieprzypadkowo wyróżniliśmy warunki (A) i (B). Okazuje się bowiem, że są one konieczne i wystarczające do tego, by istniało rozwiązanie zadania w pełnej ogólności. (Tym razem w G mamy krawędź $x \rightarrow y$ dla każdego klucza rodzaju y zamkniętego w szkatułce na kłódkę rodzaju x .) Konieczność jest oczywista. Ponadto jeśli początkowa konfiguracja szkatulek spełnia warunek (A), to otwieranie szkatulek tego warunku nie popsuje (otwarcie szkatułki „zużywa” nam jeden klucz i kłódkę tego samego rodzaju). Pozostaje zatem udowodnić, że dla każdej konfiguracji spełniającej oba warunki istnieje szkatułka, której otwarcie doprowadzi do konfiguracji spełniającej warunek (B).

Założmy, że mamy klucz dowolnego rodzaju x , który otwiera pewną szkatulkę. Jeśli mamy wszystkie klucze tego rodzaju, to z warunku (A) możemy otworzyć wszystkie szkatułki zamknięte na kłódkę rodzaju x , i warunek (B) będzie nadal spełniony.

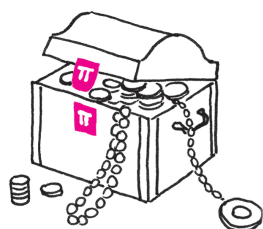
W przeciwnym przypadku istnieje szkatułka zawierająca klucz rodzaju x , a z warunku (B) wynika, że istnieje ciąg rodzajów kluczy $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{k-1} \rightarrow x_k = x$, który pozwala na zdobycie klucza x , zakładając posiadanie przez nas klucza x_0 . Założmy, że jest to najkrótszy taki ciąg, zatem $x_i \neq x$ dla $1 \leq i \leq k-1$.

Jeśli $x_0 \neq x$, to możemy użyć klucza rodzaju x do otwarcia dowolnej szkatułki. Aby pokazać, że nie popsuje to warunku (B), rozważmy klucz dowolnego rodzaju y (być może $y = x$) i ciąg rodzajów kluczy $y_0 \rightarrow y_1 \rightarrow \dots \rightarrow y_{l-1} \rightarrow y_l = y$, który pozwalał go zdobyć. Jedyna wątpliwość pojawia się, gdy x występuje w tym ciągu, zatem ciągi te mają jakiś element wspólny. Niech j będzie największym takim indeksem, że y_j równa się pewnemu x_i . Wtedy, po użyciu klucza x możemy nadal dostać się do klucza y , wykonując operacje z ciągu $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_i = y_j \rightarrow y_{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow y_l = y$.

Z kolei jeśli $x_0 = x$, to otwieramy szkatulkę zawierającą klucz rodzaju x_1 i, powtarzając powyższe rozumowanie, również dowodzimy, że warunek (B) jest nadal spełniony.

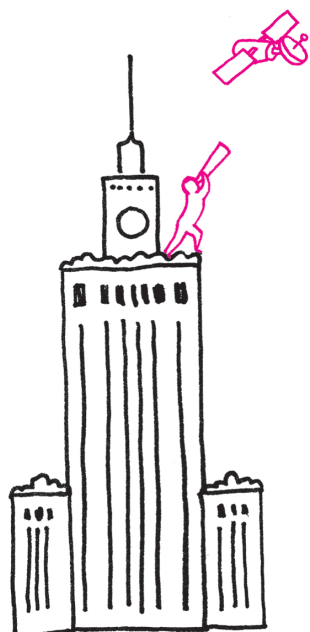
Ostatecznie udowodniliśmy, że dla każdej konfiguracji spełniającej warunki (A) i (B) istnieje szkatułka, którą możemy otworzyć, aby uzyskać nową konfigurację również spełniającą oba warunki. Wykonując tę operację n razy, otworzymy wszystkie szkatułki. Jeśli chodzi o implementację, to sprawdzenie warunku (A) jest trywialne, zaś warunek (B) sprowadza się do przeszukania multigrafu G . Można to zrobić w czasie $O(n+m)$.

Tomasz IDZIASZEK



O obrotach... wektorów i satelitów

Aleksander SCHWARZENBERG-CZERNY*



Czas i obroty układu współrzędnych. Pierwszy polski satelita naukowy BRITE-Lem wystartował 21 listopada 2013 roku o godzinie $t_{GI} = 8^h10^m11^s$ czasu polskiego (CSE = UTC + 1h) z bazy Jasny w Rosji a na orbicie znalazł się 956 s później, w chwili, którą oznaczmy t_0 . Operator rakiety „Dniepr”, rosyjsko-ukraińsko-kazachska korporacja Kosmotras, podała przewidywane współrzędne satelity w chwili t_0 , w *nierotującym* względem gwiazd układzie kartezyjskim ze środkiem w centrum Ziemi. Oś z tego układu współrzędnych jest skierowana ku biegunowi północnemu, natomiast osie x i y są skierowane w ten sposób, że w chwili startu (t_{GI}) Greenwich leżało w płaszczyźnie xz . W takim układzie współrzędnych pracują urządzenia nawigacyjne rakiet, włączane w chwili startu t_{GI} . Współrzędne satelity w chwili wejścia na orbitę t_0 w tym układzie to $\mathbf{r} = (4429984, 5371299, 460860)$ m i prędkość $\mathbf{v} = (1097,441, -295,718, -7556,327)$ m/s. Spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, czy i w jakim kierunku satelita mógł być widziany o godzinie $t_W = 9^h50^m$ CSE tego dnia ze zlokalizowanego w Warszawie punktu o współrzędnych kartezyjskich $\mathbf{r}_W = (3654522, 1407838, 5017412)$ w układzie *rotującym* z Ziemią, w którym Greenwich zawsze leży w płaszczyźnie xz .

Od razu zastrzegę, że by uprościć wywody, zaniedbamy wpływ spłaszczenia Ziemi i oporu resztek atmosfery na ruch satelity i skorzystamy z równań opisujących ruch satelity po elipsie keplerowskiej wokół obiektu o sferycznie symetrycznym rozkładzie masy (który może być równoważnie zastąpiony masą punktową). Główna konsekwencja zaniedbanych efektów to powolna (około stopień na dzień) precesja orbity, o niewielkim wpływie na szukaną odpowiedź.

Z określenia układów wynika, że w momencie t_{GI} w układzie rakiety Warszawa miała położenie \mathbf{r}_W , ale potem w czasie $\Delta t = t_0 - t_{GI}$ obróciła się wraz z Ziemią o kąt $\Delta\alpha = (366,2422/365,2422)(2\pi/24)\Delta t$. Licząc kąt obrotu, zamieniliśmy jednostki czasu na radiany i uwzględniliśmy, że dni liczymy względem obracającego się kierunku Ziemia-Słońce, czyli w ciągu roku Ziemia wykonuje o jeden obrót więcej niż liczba dni. Przy tym obrocie współrzędna z_W pozostaje bez zmiany, a współrzędne $x_W + iy_W$ przekształcają się w następujący sposób:

$$(x_W + iy_W)|_{t=t_{GI}} = (x_W + iy_W)|_{t=t_0} \cdot e^{i\Delta\alpha}.$$

Znaleźliśmy zatem przedstawienia wszystkich wektorów w nierotującym układzie GI. Astronomowie zwykle używają nierotującego układu, w którym punkt Barana Υ , czyli przecięcie ekliptyki z równikiem, wyznacza oś x , ale to temat na inną okazję.

Elementy keplerowskie orbity. W artykule o prawach Keplera (*Delta 5/2011*) pokazaliśmy, jak z nich wyprowadzić drugie prawo dynamiki Newtona. Przy okazji zdobyliśmy wiedzę, która pozwoli nam opisać orbitę satelity.

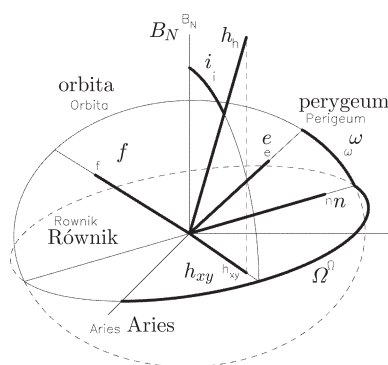
Choć na razie nie znamy położenia orbity, to zaczniemy przekształcenia w układzie ze środkiem w centrum Ziemi, w którym oś x wskazuje perigeum, a oś y też leży w płaszczyźnie orbity. Obliczymy analitycznie rozmaite iloczyny wektorów \mathbf{r} , \mathbf{v} , by na podstawie wyników zrozumieć ich związek z elementami orbity. Na końcu wrócimy do znanego nam układu GI i wykonamy te same obliczenia liczbowo, i korzystając z tego, że te iloczyny mają to samo znaczenie w każdym układzie, znajdziemy wartości elementów orbity. Jak to wyprowadziliśmy poprzednio, chwilowe położenie i prędkość na orbicie można wyrazić poprzez kąt zwany *anomaliami mimośrodową* E :

$$(1) \quad \mathbf{r} \equiv (x, y, 0) = a(\cos E - e, \sqrt{1 - e^2} \sin E, 0) \quad (\text{I prawo Keplera}),$$

$$(2) \quad \dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} = (v_x, v_y, 0) = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1}{1 - e \cos E} (-\sin E, \sqrt{1 - e^2} \cos E, 0).$$

Aktualną wartość E w chwili t znajdujemy jako rozwiązanie równania Keplera:

$$(3) \quad N(t - \tau) \equiv M = E - e \sin E \quad (\text{II prawo Keplera}),$$



*Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika w Warszawie

**Rozwiązanie zadania F 866.**

Energia potencjalna kulki dla maksymalnego wychylenia w lewo wynosi $U_L = 2mgl \sin^2(\beta/2)$, a w prawo $U_P = 2mgl \sin^2(\alpha/2)$. Dla małych kątów α i β mamy: $U_L = mgl\beta^2/2$ i $U_P = mgl\alpha^2/2$. Po pierwszym uderzeniu w powierzchnię kulka będzie miała energię kinetyczną $U_1 = Kmg(\beta^2 - \alpha^2)/2$ i wychyli się o kąt β_1 , odpowiadający sumie tej energii kinetycznej i energii potencjalnej odpowiadającej wychyleniu o kąt α , czyli $\beta_1^2 = K\beta_0^2 + (1-K)\alpha^2$. Powtarzając to rozumowanie dla kolejnych uderzeń, dostajemy ogólne wyrażenie na wartość kąta po n -tym uderzeniu: $\beta_n = \sqrt{K^n \beta_0^2 + (1-K^n)\alpha^2}$. Zauważmy, że $\beta_n \rightarrow \alpha$ dla $n \rightarrow \infty$, chyba że $K = 1$ (zderzenie sprężyste), kiedy to $\beta_n = \beta_0$ dla dowolnego n .

gdzie τ jest czasem przejścia przez perigeum, a

$$N = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (\text{III prawo Keplera})$$

zwane *ruchem średnim* w istocie jest uśrednioną prędkością kątową satelity, natomiast a i e oznaczają odpowiednio *półos wielką* orbity (połowę odległości między perigeum i apogeum) oraz *mimośród* (spłaszczenie) orbity. Dla skrótienia zapisu wprowadziliśmy $\mu = GM_{\oplus} = 398600,4418 \cdot 10^9 \text{ m}^3/\text{s}^2$ zamiast iloczynu stałej grawitacji i masy Ziemi.

Chociaż obliczenia prowadzimy w układzie płaszczyzny orbity, to będziemy korzystać wyłącznie z iloczynów wektorów, aby wynik przedstawić w postaci niezależnej od wyboru układu współrzędnych. Kwadraty długości wektorów mamy z twierdzenia Pitagorasa lub z iloczynu skalarnego wektora przez siebie, co na jedno wychodzi:

$$(4) \quad r^2 \equiv |\mathbf{r}|^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = a^2(1 - e \cos E)^2 \Rightarrow e \cos E = 1 - \frac{r}{a},$$

$$(5) \quad v^2 \equiv |\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mu}{a} \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E} = \frac{\mu}{r} \left(2 - \frac{r}{a}\right),$$

gdzie ostatnia równość wynika z podstawienia (4) do (5). Z ostatniego wzoru wynika, że energia całkowita $\mathcal{E} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$ jest stała, jak należało oczekiwać, oraz:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}.$$

Mając półos a orbity, spłaszczenie orbity znajdziemy z pomocą iloczynu skalarnego (1) przez (2):

$$(6) \quad d \equiv \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{\mu a}} = \frac{-(\cos E - e) \sin E + (1 - e^2) \sin E \cos E}{1 - e \cos E} = e \sin E.$$

Korzystając z (4) oraz (6), mamy

$$e^2 = \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 + d^2, \quad \text{tg } E = \frac{d}{1 - \frac{r}{a}}.$$

Tak znalezione e i E po podstawieniu do (3) dają M oraz czas τ . Ćwiartkę, do której należy kąt E (i podobnie dla innych kątów), określamy na podstawie znaków funkcji \sin i \cos , natomiast wartość samego kąta wyznaczymy za pomocą funkcji arc tg .

Gdy a , e i τ są znane, to pozostaje wyznaczyć trzy elementy określające orientację orbity w przestrzeni. Dwa z nich to kąty i oraz Ω wskazujące kierunek wektora *momentu pędu* \mathbf{h} w układzie współrzędnych, w którym oś z pokrywa się z osią obrotu Ziemi. Moment pędu jest proporcjonalny do iloczynu wektorowego \mathbf{r} i \mathbf{v} , który w układzie współrzędnych o osiach x , y leżących w płaszczyźnie orbity ma postać:

$$(7) \quad \mathbf{h} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{v} = (0, 0, h_z), \quad \text{gdzie}$$

$$h_z = \frac{\sqrt{a\mu(1 - e^2)}}{1 - e \cos E} [(\cos E - e) \cos E + \sin^2 E] = \sqrt{a\mu(1 - e^2)}.$$

Zasada zachowania pędu zapewnia, że \mathbf{h} w nieobrcającym się układzie jest stałe. Znajdziemy teraz współrzędne wektora \mathbf{h} w układzie współrzędnych, którego oś z pokrywa się z osią obrotu Ziemi. W tym układzie współrzędnych, składowa tego wektora w płaszczyźnie xy to $\mathbf{h}_{xy} = (h_x, h_y, 0)$. Nachylenie i wektora \mathbf{h} do osi z oraz nachylenie $\Omega - \pi/2$ wektora \mathbf{h}_{xy} do osi x wynikają ze stosunku ich składowych:

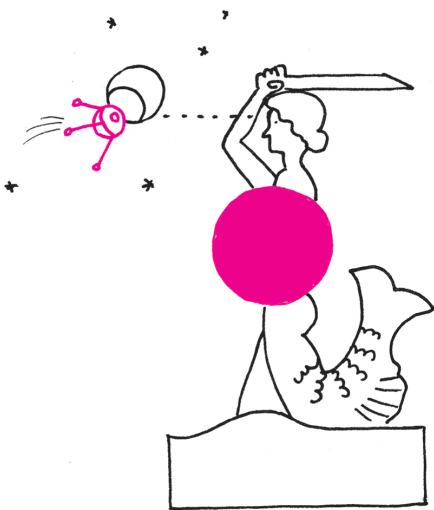
$$\text{tg } i = \frac{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}{h_z},$$

$$\text{tg} \left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{h_y}{h_x} \Rightarrow \text{tg } \Omega = \frac{+h_x}{-h_y}.$$

Sam kąt Ω to kąt w płaszczyźnie xy między osią x a prostopadłym do \mathbf{h}_{xy} wektorem

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1) \times \mathbf{h} = (-h_y, h_x, 0)$$

wskazującym *linię węzłów*, tj. linię przecięcia orbity z płaszczyzną xy .

**Rozwiązanie zadania M 1437.**

Odp. Nie!

Rozważmy macierz 5×9 zawierającą 44 jedynki i zero. Szukana podmacierz musiałaby zawierać 22 jedynki, a więc mieć 23 lub 22 wyrazy. W takim razie musiałaby mieć wymiary 1×23 lub 23×1 , 1×22 lub 22×1 , 2×11 lub 11×2 , co nie jest możliwe.

Powróćmy do układu płaszczyzny orbity. Zanim wyznaczmy położenie perigeum, znajdziemy pomocniczy wektor, mnożąc wektorowo (2) oraz (7):

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = \sqrt{\mu(1-e^2)}(1-e \cos E)^{-1}(\sqrt{1-e^2} \cos E, \sin E, 0).$$

Następnie odejmując (1) podzielone przez (4), otrzymujemy

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} = (e, 0, 0).$$

Tak zdefiniowany wektor *mimosładowy* ma długość e i wskazuje kierunek perigeum. Wektory \mathbf{h} i \mathbf{e} całkowicie określają orientację orbity. Prostopadły do \mathbf{e} wektor

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{h} \times \mathbf{e} = (0, h_z e, 0)$$

też leży w płaszczyźnie orbity. Zatem iloczyny skalarne $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}$ i $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}$ są proporcjonalne do sinusa i kosinusa kąta ω , jaki kierunek perihelium tworzy z linią węzłów, skąd:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}} \frac{e}{f}.$$

Kąty *nachylenie* i , *argument perigeum* ω i *długość linii węzłów* Ω w pełni określają położenie orbity. Ponieważ wszystkie elementy określiliśmy za pomocą iloczynów wektorów, to wzory pozostają słuszne po dowolnym obrocie orbity, zmieniają się tylko składowe wektorów, ale nie ich długości i kąty między nimi. Zatem do powyższych iloczynów wektorowych można teraz podstawić znane wektory w układzie GI, by otrzymać elementy orbity i wektory pomocnicze w tym właśnie układzie.

Widoczność w Warszawie. Teraz możemy opisać sposób znalezienia odpowiedzi na pytanie postawione na samym początku. Dla nowego momentu czasu t_W należy obliczyć M , następnie rozwiązać (3) na E i znaleźć \mathbf{r} w płaszczyźnie orbity z (1). Wtedy w układzie GI położenie będzie równe $\mathbf{r}_{GI} = x_e \mathbf{e} + y_f \mathbf{f}$, gdzie wektory \mathbf{e} i \mathbf{f} określają kierunki dużej i małej osi orbity. Dalej, oznaczając położenie Warszawy przez \mathbf{r}_W , możemy wyrazić wektor wodzący z Warszawy do satelity jako $\mathbf{R} = \mathbf{r}_{GI} - \mathbf{r}_W$, a kosinus kąta między zenitem a satelitą, pomijając spłaszczenie Ziemi, wynosi:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_W}{R r_W}.$$

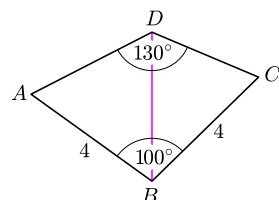
Dokończenie rachunków i znalezienie ostatecznej odpowiedzi na postawione na początku artykułu pytanie pozostawiamy Czytelnikowi.

Zainteresowani Czytelnicy mogą także wykonać obliczenia dla swojego położenia i w dowolnej chwili, korzystając z danych TLE BRITE-PL Lem publikowanych przez NORAD. Są one podane w nierotującym układzie względem punktu Υ w płaszczyźnie xz (rektascencja i deklinacja). Pozycję Υ określa się na podstawie zliczenia dni juliańskich (JD) dla danej daty i obrotu Ziemi względem Υ , tj. czasu gwiazdowego w Greenwich. Przy tym na podstawie czasu, jaki upłynął od epoki TLE, warto uwzględnić precesję Ω , biorąc pod uwagę jej szybkość podaną w TLE jako $\dot{\Omega}$.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



Rys. 1

M 1435. $ABCD$ jest czworokątem wypukłym, w którym $AB = BC = 4$, $\sphericalangle ABC = 100^\circ$, $\sphericalangle CDA = 130^\circ$ (rys. 1). Znaleźć długość odcinka BD .

Rozwiązanie na str. 8

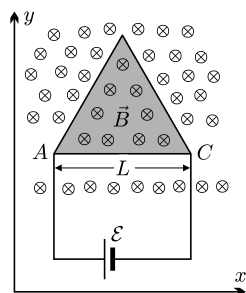
M 1436. Niech liczby a, b, c z przedziału $[-1, 1]$ spełniają

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + 2abc.$$

Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$,

$$a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \leq 1 + 2(abc)^n.$$

Rozwiązanie na str. 16



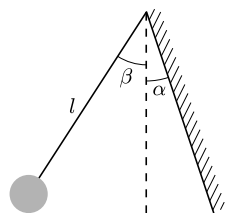
Rys. 2

M 1437. Czy dla każdej macierzy $m \times n$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$ zawierającej parzystą liczbę jedynek istnieje podmacierz (otrzymana z wyjściowej macierzy przez wykreślenie pewnej liczby wierszy i pewnej liczby kolumn, niekoniecznie kolejnych), zawierająca dokładnie połowę wszystkich jedynek?

Rozwiązanie na str. 19

Przygotował Michał NAWROCKI

F 865. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B umieszczono cienką metalową płytkę, mającą kształt trójkąta równobocznego o boku L . Grubość płytki wynosi d , jej gęstość jest równa ρ , a jej powierzchnia jest prostopadła do kierunku pola magnetycznego. Do wierzchołków A i C trójkąta (rys. 2) dołączono źródło napięcia o sile elektromotorycznej \mathcal{E} i oporności wewnętrznej R_0 . Znaleźć przyspieszenie płytki. Zaniedbać masę, oporność i sprężystość łączących przewodów oraz oporność płytki. Rozwiązanie na str. 3



Rys. 3

F 866. Na powierzchni nachylonej do pionu pod małym kątem α zawieszono na nierozciągliwej, nieważkiej nici o długości l kulkę o masie m . Kulkę wychyliło na lewo o mały kąt β_0 większy od α (rys. 3) i puszczono. Właściwości sprężyste kulki i powierzchni są takie, że stosunek energii kinetycznej kulki bezpośrednio po zderzeniu do jej energii kinetycznej bezpośrednio przed zderzeniem wynosi K ($0 < K < 1$). Jaki będzie maksymalny kąt dla kolejnych wychyleń kulki w lewo?

Rozwiązanie na str. 19

Nowo dostrzeżona kwantowa zasada niezaszufladkowania

Zasada szufladkowa Dirichleta jest w anglojęzycznym świecie spopularyzowana jako *pigeonhole principle*: po włożeniu trzech gołębi do dwóch przegródek w którejś z przegródek będą co najmniej dwa gołębie.

Niedawno ukazała się praca [1], w której autorzy dowodzą, że w świecie kwantowym powinno być inaczej, o ile zadowalamy się informacją dotyczącą jedynie korelacji między kwantowymi „gołębiami”.

Rozpatrzmy trzy rozróżnialne cząstki. Na początku każdą przygotowujemy w superpozycji dwóch stanów (cząstka w lewej „przegrodce”: $|L\rangle$, w prawej: $|R\rangle$):

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle + |R\rangle).$$

Uwaga. W stosowanym tu zapisie Diraca, $|\phi\rangle$ (tzw. *ket*) oznacza funkcję falową ϕ . Funkcja falowa sprzężona ϕ^* jest zapisywana jako $\langle\phi|$ (tzw. *bra*), więc moduł funkcji falowej (prawdopodobieństwo) to $\langle\phi|\phi\rangle$ (czyli *bra ket*). Użyteczność zapisu wynika m.in. z łatwości zapisu operatora rzutującego Π_ψ na stan $|\psi\rangle$ (operatora mierzącego, ile jest stanu ψ w badanym stanie) jako $|\psi\rangle\langle\psi|$. Np. pomiar, ile jest stanu $|L\rangle$ w stanie $|+\rangle$, daje następujący, łatwy do przerechnienia (i oczekiwany) wynik: $|L\rangle\langle L| \cdot |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|L\rangle(\langle L|L\rangle + \langle L|R\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|L\rangle(1+0) = \frac{1}{\sqrt{2}}|L\rangle$.

Wracając do głównego wątku, początkowy stan trzech cząstek można zapisać jako $|\Psi\rangle = |+\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3$.

Na końcu dokonujemy sprawdzenia, czy każda z cząstek jest w stanie $|+i\rangle = \frac{1}{2}(|L\rangle + i|R\rangle)$ (ortogonalnym do analogicznie zdefiniowanego stanu $|-i\rangle$).

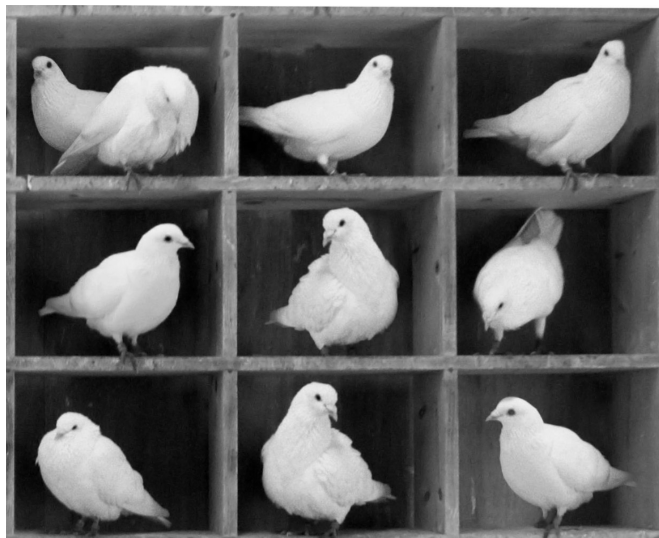
Raz na osiem razy otrzymamy wynik

$$|\Phi\rangle = |+i\rangle_1|+i\rangle_2|+i\rangle_3.$$

W takim przypadku możemy zastanowić się, czy jakaś para cząstek była w tej samej przegrodce. Wobec symetrii układu wynik będzie taki sam dla każdej z trzech par. Taka para może być albo w lewej, albo w prawej przegrodce, więc stosowny operator rzutujący (dla pary $k, n \in \{1, 2, 3\}$, $k \neq n$) ma postać $\Pi_{k,n}^{\text{razem}} = \Pi_{k,n}^{LL} + \Pi_{k,n}^{RR}$, gdzie $\Pi_{k,n}^{AB} = |A\rangle_k|B\rangle_n \langle A|_k \langle B|_n$.

Analogicznie można zapisać operator sprawdzający, czy cząstki te były osobno: $\Pi_{k,n}^{\text{osobno}} = \Pi_{k,n}^{LR} + \Pi_{k,n}^{RL}$.

Bezpośrednim rachunkiem łatwo wykazać, że: $\langle\Psi|\Pi_{k,n}^{\text{razem}}|\Psi\rangle = \langle\Phi|\Pi_{k,n}^{\text{razem}}|\Phi\rangle = \frac{1}{2}$ oraz $\langle\Psi|\Pi_{k,n}^{\text{osobno}}|\Psi\rangle = \langle\Phi|\Pi_{k,n}^{\text{osobno}}|\Phi\rangle = \frac{1}{2}$, czego można było się spodziewać, podczas gdy: $\langle\Psi|\Pi_{k,n}^{\text{razem}}|\Phi\rangle = 0$ oraz $\langle\Psi|\Pi_{k,n}^{\text{osobno}}|\Phi\rangle = 1$.



„TooManyPigeons” [2]

Czyli między początkowym ustawieniem $|\Psi\rangle$ a końcowym pomiarem $|\Phi\rangle$ każda para cząstek była osobno, choć cząstek było trzy w dwóch przegrodkach!?!

Jeżeli wynik końcowego pomiaru wyszedłby inny np. $|+i\rangle_1|-i\rangle_2|+i\rangle_3$, to pary $\{1, 2\}$ oraz $\{2, 3\}$ byłyby między pomiarami razem, ale para $\{1, 3\}$ osobno, co, według klasycznej logiki, również jest nie do pojęcia (tego typu sytuacja zdarza się 6, a poprzednio omówiona 2 razy na 8 możliwości).

Jest to wcześniej niezauważony aspekt kwantowego splątania. Tym razem chodzi bardziej o splątanie czasowe niż przestrzenne. Wynik zależy nie tylko od tego, co przedtem, ale również od tego, co potem. Należy jednak od razu ostudzić zapał entuzjastów SF. To nie jest droga do podróży w czasie. Wszystko dzieje się w ramach nieoznaczoności Heisenberga.

Zauważmy jednak, że ta zaskakująca własność teorii kwantowej pojawia się tylko dlatego, że nie pytamy o to, w której przegrodce znajduje się która cząstka. Pytamy wyłącznie o korelacje między cząstkami, które w żaden inny sposób skorelowane ze sobą nie są.

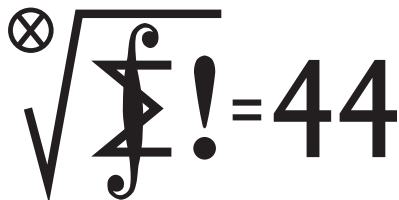
W omawianej pracy [1] podane są nawet propozycje doświadczalnej obserwacji zjawiska poprzez oddziaływanie cząstek wtedy, gdy są razem. Czekamy.

Piotr ZALEWSKI

[1] Y. Aharonov, F. Colombo, S. Popescu, I. Sabadini, D.C. Struppa oraz J. Tollaksen, *The quantum pigeonhole principle and the nature of quantum correlations*; arXiv:1407.3194v1 [quant-ph] 11 lipca 2014.

[2] „TooManyPigeons” by en:User:BenFrantzDale; this image by en:User:McKay; Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons – <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:TooManyPigeons.jpg>.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 677 ($WT = 1,51$) i 678 ($WT = 2,13$) z numeru 3/2014

Paweł Duch	Bielawa	40,84
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Stanisław Bednarek	Łódź	39,50
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,00
Michał Miodek	Zawiercie	35,31
Jerzy Cisło	Wrocław	34,05
Wojciech Tobis	Praszka	32,96
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75

Rozwiązania zadań z numeru 6/2014

Przypominamy treść zadań:

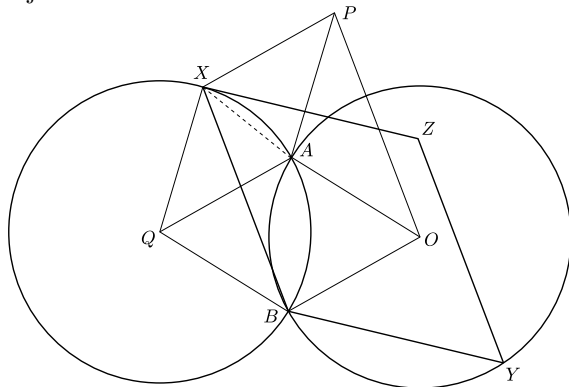
683. Dane są dwa przystające okręgi, przecinające się w punktach A i B . Punkt X leży na jednym z tych okręgów, punkt Y na drugim, przy czym prosta XY nie przechodzi ani przez A , ani przez B , ani przez środek odcinka AB . Punkt Z jest wierzchołkiem równoległoboku XYZ . Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach AXZ , AYZ są przystające do dwóch danych okręgów.

684. Wykazać, że dla żadnej pary różnych liczb pierwszych p, q układ

$$a^2 + b^2 = p, \quad x^2 + y^2 = q, \quad (a - x)^2 + (b - y)^2 = |p - q|$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych a, b, x, y .

683. To zadanie o równoległobokach. Oznaczmy środek okręgu (ABY) przez O , środek okręgu (ABX) przez Q , i niech P będzie punktem symetrycznym do Q względem prostej AX .



Czworokąty $QAPX$ i $QAOB$ są rombami. Zatem

$$|PX| = |AQ| = |OB| \quad \text{oraz} \quad PX \parallel AQ \parallel OB,$$

skąd wniosek, że czworokąt $XBOP$ jest równoległobokiem. Również czworokąt XYZ jest (z założenia) równoległobokiem. Stąd – jak przed chwilą – wnosimy, że równoległobokiem jest także czworokąt $POYZ$. Wobec tego $|PZ| = |OY|$.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z matematyki nr 687, 688

Redaguje Marcin E. KUCZMA

687. Dowieść, że wśród dowolnie wybranych 39 kolejnych liczb naturalnych znajdzie się liczba, której suma cyfr dzieli się przez 11.

688. Trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$. Na krawędziach SA, SB, SC leżą takie punkty X, Y, Z , że suma kwadratów pól trójkątów SXY, SYZ, SZX jest równa kwadratowi pola trójkąta XYZ . Obliczyć objętość ostrosłupa $ABCS$.

Zadanie 688 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Ta równość, wraz z poprzednią uwagą o rombie $QAPX$, pokazuje, że odległość punktu P od każdego z trójki punktów Z, A, X jest równa promieniowi dwóch danych okręgów. Inaczej mówiąc, P jest środkiem okręgu przystającego do nich i przechodzącego przez punkty Z, A, X ; to jest pierwsza część tezy. Druga część tezy, dotycząca okręgu opisanego na trójkącie AYZ , wynika z pierwszej przez symetrię (logiczną).

684. Przypuśćmy, że liczby p, q oraz a, b, x, y spełniają podane warunki. Można przyjąć, że $p > q$. Odejmując pierwsze równanie od drugiego i uwzględniając równanie trzecie, dostajemy związek $ax + by = x^2 + y^2$, czyli

$$(1) \quad x(a - x) + y(b - y) = 0.$$

Skoro suma $x^2 + y^2 = q$ jest liczbą pierwszą, zatem liczby x, y są względnie pierwsze i żadna z nich nie jest zerem. Z równania (1) wynika teraz, że x jest dzielnikiem różnicy $b - y$, zaś y jest dzielnikiem różnicy $a - x$. Tak więc $b - y = kx, a - x = ly$ dla pewnych liczb całkowitych k, l . Po podstawieniu do równania (1) mamy $xy(k + l) = 0$. Ale $xy \neq 0$, więc $l = -k$, i dalej:

$$b = kx + y, \quad a = x + ly = x - ky$$

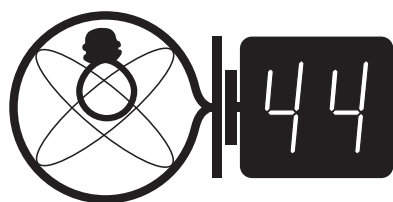
oraz

$$p = a^2 + b^2 = (x - ky)^2 + (kx + y)^2 = (k^2 + 1)(x^2 + y^2) = (k^2 + 1)q.$$

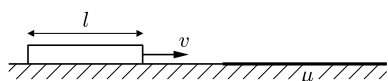
Dla liczby pierwszej p taka równość zachodzić nie może. Sprzeczność dowodzi, że liczby o podanych własnościach nie istnieją.

(Rezultat tego zadania ma ciekawą interpretację: nie istnieje trójkąt prostokątny o wierzchołkach w punktach kratowych płaszczyzny, w którym kwadraty długości dwóch boków – przeciwprostokątnej i jednej przyprostokątnej – byłyby liczbami pierwszymi).

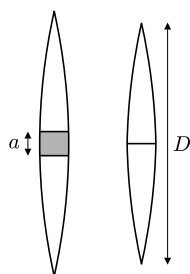
Klub 44



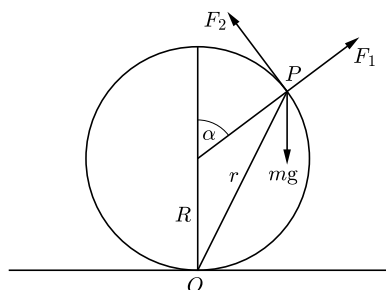
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2014



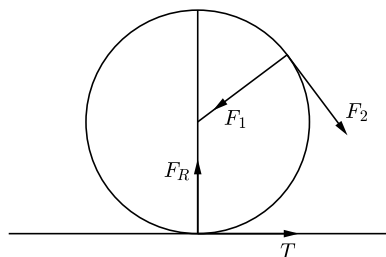
Rys. 1



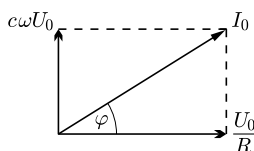
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Zadania z fizyki nr 584, 585

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

584. Po gładkiej, poziomej płaszczyźnie ślizga się z prędkością v jednorodny klocek o długości l . Klocek wsuwa się na szorstki odcinek powierzchni o współczynniku tarcia μ . Po jakim czasie klocek zatrzyma się?

585. Z cienkiej soczewki o ogniskowej $f = 50$ cm usunięto część środkową o szerokości $a = 0,6$ mm. Obie połówki soczewki stykają się. Średnica soczewki wynosi $D = 6$ cm. W odległości f od soczewki, na jej osi optycznej, ustawiono punktowe źródło światła monochromatycznego o długości fali $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ m. Z drugiej strony soczewki umieszczony jest ekran. Jakie musi być położenie ekranu, aby można było obserwować na nim prążki interferencyjne? Zakładając, że warunek ten jest spełniony, znaleźć odległość między sąsiednimi jasnymi prążkami.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2014

Przypominamy treść zadań:

580. Do powierzchni nieważkiej sfery przymocowany jest mały koralik, który możemy traktować jak punkt materialny. Sfera leży na poziomej podstawie, w chwili początkowej koralik znajduje się w najwyższym położeniu. Zakładamy, że sfera nie ślizga się po podstawie, dopóki wywiera na nią siłę nacisku. Na jakiej wysokości nad podstawką znajdzie się koralik po wytrąceniu z położenia równowagi, gdy sfera zacznie ślizgać się po podstawie?

581. Przez płaski kondensator, wypełniony dielektrykiem o stałej dielektrycznej ϵ i oporze właściwym ρ , płynie prąd $I(t) = I_0 \sin \omega t$. Znaleźć amplitudę napięcia na kondensatorze. Powierzchnia okładek kondensatora wynosi S , odległość między okładkami jest równa d .

580. Rozważmy układ w położeniu przedstawionym na rysunku 3 zakładając, że sfera toczy się jeszcze bez poślizgu. Na koralik w punkcie P działa siła ciężkości mg oraz siła reakcji sfery, której składowe wzdłuż promienia sfery i prostopadłą do promienia oznaczyliśmy przez F_1 i F_2 . Rysunek 4 przedstawia siły działające na sferę. Ponieważ sfera jest nieważka, wypadkowa działających na nią sił oraz wypadkowy moment sił względem dowolnego punktu wynosi zero. Zatem z drugiego warunku $T = F_2$. Gdy koralik przestaje naciskać na sferę znika siła tarcia T i z pierwszego warunku znikają wszystkie siły działające na sferę. Dopóki sfera toczy się bez poślizgu, ruch koralika możemy traktować jako czysty obrót wokół chwilowego środka w punkcie O styczności sfery z podstawką. Wypadkowa sił działających na koralik jest siłą dośrodkową i w chwili, gdy rozpoczyna się poślizg równa jest składowej siły ciężkości wzdłuż odcinka OP : $\frac{mv^2}{r} = mg \cos \frac{\alpha}{2}$, gdzie $r = |OP| = 2R \cos \frac{\alpha}{2}$ (R jest promieniem sfery). Jediną siłą zewnętrzną działającą na układ, która wykonuje pracę, jest siła ciężkości działająca na koralik, z zasady zachowania energii mamy więc: $\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha)$.

W chwili, gdy sfera przestaje naciskać na podstawkę $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$. Koralik znajduje się wtedy na wysokości $h = \frac{4R}{3}$. Od tej chwili koralik porusza się tylko pod działaniem siły ciężkości, czyli po paraboli, do momentu uderzenia w podstawkę. Sfera ślizga się po podstawie obracając się jednocześnie wokół własnej osi.

581. Układ możemy traktować jako połączenie równoległe opornika o oporze $R = \frac{\rho d}{S}$, przez który płynie prąd o natężeniu I_1 i kondensatora o pojemności $c = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$, przez który płynie prąd o natężeniu I_2 , przy czym $I = I_1 + I_2$. Napięcia na oporniku i kondensatorze są jednakowe: $U_R = U_c = U_0 \sin(\omega t - \varphi)$, gdzie φ jest przesunięciem fazowym między napięciem i natężeniem prądu całkowitego I a U_0 szukaną amplitudą napięcia. Ładunek na kondensatorze wynosi $Q = cU_0 \sin(\omega t - \varphi)$, stąd

$I_2 = \frac{dQ}{dt} = c\omega U_0 \cos(\omega t - \varphi) = c\omega U_0 \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$. Natężenie prądu płynącego przez opornik $\frac{U_0 \sin(\omega t - \varphi)}{R}$. Wprowadźmy wektory o długościach $I_{10} = \frac{U_0}{R}$ oraz

$I_{20} = c\omega U_0$, które tworzą ze sobą kąt $\frac{\pi}{2}$ i obracają się wokół wspólnego punktu zaczepienia z prędkością kątową ω tak, że ich rzuty na wyróżnioną oś wynoszą

I_1 oraz I_2 . Wtedy wektor będący ich sumą wektorową ma długość $I_0 = \sqrt{\frac{U_0^2}{R^2} + c^2 \omega^2 U_0^2}$

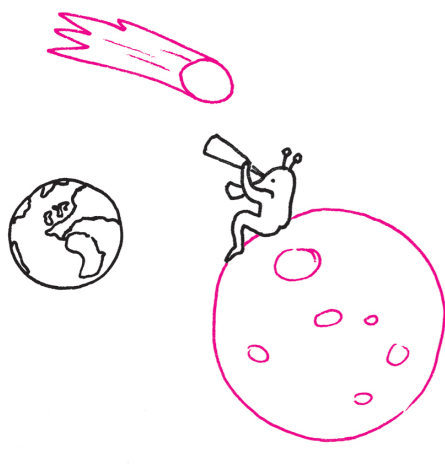
(rys. 5). Szukane napięcie na kondensatorze wynosi $U_0 = \frac{I_0}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + c^2 \omega^2}}$.

Prosto z nieba: Las i BOSS

„Zawsze za mała” ilość informacji dochodząca do ziemskich detektorów z otchłani Kosmosu skłania astronomów do stosowania różnych, czasami nawet bardzo wyrafinowanych metod. Jedną z takich metod jest obserwowanie odległych obiektów i używanie światła przez nie emitowanego do analizy tego, co znajduje się pomiędzy nimi a Ziemią. Klasą obiektów świetnie nadającą się do tego celu są *kwazary*, energetyczne jądra aktywnych, położonych bardzo daleko galaktyk – duże przesunięcia ku czerwieni kwazarów świadczą o ich kosmologicznych odległościach. Kwazary odkryto w paśmie radiowym we wczesnych latach sześćdziesiątych XX wieku; były początkowo uważane za gwiazdy, jednak szybko okazało się, że ich widma są zupełnie inne niż znanych obiektów galaktycznych. Fotony wyemitowane przez kwazar oddziałują na swej drodze z atomami materii międzygalaktycznej (głównie neutralnym wodorem), co pozostawia w ich widmie charakterystyczne linie absorpcyjne. Liczba i głębokość linii zależy, oczywiście, od gęstości i położenia absorbującego materiału; profil widmowy w tym przedziale częstotliwości nazywa się lasem $Ly\alpha$ (ang. *Lyman-alpha forest*, od nazwiska Theodore’a Lymana, który jako pierwszy obserwował przejścia pomiędzy pierwszym i drugim poziomem energetycznym atomu wodoru), ponieważ linie absorpcyjne są upakowane w tym rejonie bardzo gęsto.

Wygląd lasu $Ly\alpha$ jest używany przez projekt BOSS (ang. *Baryon Oscillation Spectroscopic Survey*, część przeglądu SDSS, ang. *Sloan Digital Sky Survey*) do określenia rozkładu neutralnego wodoru we Wszechświecie; średnie przesunięcie ku czerwieni kwazarów w obserwowanej próbce wyniosło $z = 2,34$. W szczególności, BOSS bada fluktuacje gęstości materii za pomocą akustycznych oscylacji barionowych (pisaliśmy o nich ostatnio w *Delcie* 1/2014 w kontekście badań mikrofalowego promieniowania tła satelity WMAP), skorelowanych z rozkładem wodoru daleko (tj. dawno temu) we Wszechświecie. Efektem takich obserwacji jest także bardzo dokładny pomiar parametru ekspansji Wszechświata, czyli stałej Hubble’a, dla $z = 2,34$: $H = 222 \pm 7$ km/s/Mpc.

Michał BEJGER

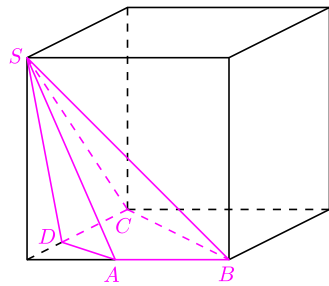


Niebo w październiku

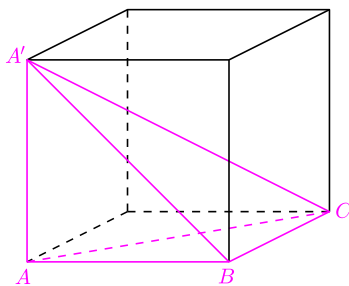
Październik jest miesiącem dwóch zaćmień, obu niestety niewidocznych z terenu Polski. Pierwsze z nich, zaćmienie Księżyca (pełnia, 8 X), będzie widoczne w obu Amerykach, wschodniej części Azji i w Australii. Po dwóch tygodniach (nów, 23 X) obserwatorzy z północnej i środkowej Ameryki będą mogli zarejestrować częściowe zaćmienie Słońca. Oprócz tego, dość pechowo w tym roku pełnia Księżyca zdarza się dokładnie w trakcie maksimum roju Drakonidów (8–9 X). Drakonidy to niewielki rój (około 10 zjawisk/h) pochodzący z pozostałości komety 21P Giacobiniego–Zinnera, odkrytej w 1900 r.; pozostaje mieć nadzieję, że blask Księżyca nie przyćmi najjaśniejszych meteorów. Maksimum drugiego październikowego roju, czyli Orionidów, pochodzących z resztek pozostawionych przez słynną komety Halleya, wypada na całe szczęście w okolicach nowiu (21–22 X). Możemy spodziewać się około 20 zjawisk/h, najlepszym czasem do obserwacji jest druga część nocy.

Przy użyciu lornetki można także spróbować znaleźć na niebie kometa C/2013 A1 (Siding Spring), która 19 X znajdzie się ekstremalnie blisko Marsa – z analizy jej elementów orbitalnych wynika, że odległość do planety może wynieść około 100 tys. km (dla porównania, jeden z naturalnych księżyców Marsa, Deimos, znajduje się w odległości 24 tys. km). Spotkanie z kometa może skończyć się dla Marsa deszczem meteorów, które być może zostaną zarejestrowane przez znajdujące się tam sondy. Mars ($0,9^m$) będzie widoczny przed zachodem Słońca w konstelacjach Wężownika oraz – w drugiej połowie miesiąca – Strzelca. Dość jasny Jowisz ($-1,8^m$) przekroczy natomiast granicę pomiędzy Rakiem i Lwem – pojawi się ponad wschodnim horyzontem po północy. Inna planeta zewnętrzna, Uran ($5,7^m$, gwiazdozbiór Ryb), znajdzie się w październiku w opozycji – jest to najlepszy moment do teleskopowych obserwacji jej całkowicie oświetlonej przez Słońce, niebiesko-zielonej tarczy.

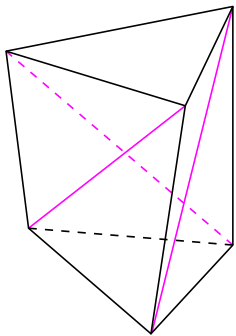
M.B.



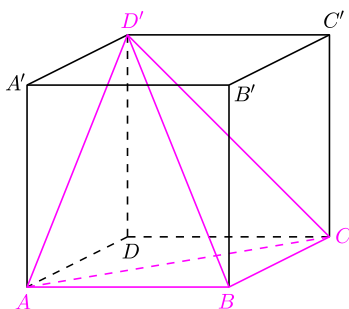
Rys. 1



Rys. 4. Jak widać, istnieje czworościan, którego każda ściana jest prostokątna.



Rys. 5. Wielościan Schönharda. Zewnętrzne kąty dwuścienne przy kolorowych krawędziach są mniejsze od 180° (M. Aigner, G.M. Ziegler, *Dowody z książki*, Wyd. Nauk. PWN, 2002).



Rys. 6

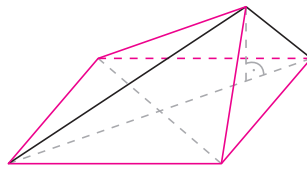
Zadanie 9 pochodzi z III Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.

A jednak istnieje!

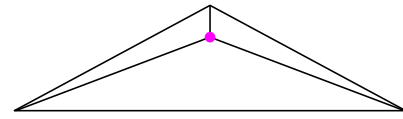
Joanna JASZUŃSKA

Niektóre wielościany są dość dziwne. Intuicja podpowiada, że nie powinny istnieć, a jednak istnieją. Czasem błędne przeczucia wynikają z nazbyt pochopnych uogólnień geometrii płaskiej na przestrzenną, czasem zaś z faktu, że świat wielościanów jest bogatszy, niż się na pierwszy rzut oka wydaje. Do budowania dziwnych wielościanów często przydają się pomocnicze sześciennie „szkielety”.

1. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, że dwie jego ściany boczne nie mające wspólnej krawędzi są prostopadłe do podstawy?
2. Wszystkie ściany boczne pewnego ostrosłupa o podstawie kwadratowej są trójkątami równoramiennymi. Czy ostrosłup ten musi być prawidłowy?
3. Czy istnieje czworościan, którego każda ściana jest trójkątem rozwartokątnym?
4. Czy wysokości czworościanu muszą przecinać się w jednym punkcie?
5. Czy istnieje wielościan wypukły, w którym można tak wybrać ponad połowę jego ścian, aby żadne dwie z wybranych ścian nie miały wspólnej krawędzi?
6. Czy każdy wielościan można striangulować, czyli podzielić na czworościany o wierzchołkach w wierzchołkach wyjściowego wielościanu?
7. Czy istnieje taki czworościan, w którym spodek żadnej wysokości nie należy do odpowiadającej jej podstawy?



Rys. 2



Rys. 3

Rozwiązania

- R1.** Ściany ABS i CDS ostrosłupa z rysunku 1 są prostopadłe do podstawy. \square
- R2.** Nie, ostrosłup z rysunku 2 ma wszystkie kolorowe krawędzie równej długości, więc spełnia warunki zadania, a nie jest prawidłowy. \square
- R3.** Rysunek 3 to widok z góry takiego czworościanu, wysokość opuszczona z kolorowego wierzchołka jest bardzo niewielka. \square
- R4.** W czworościanie z rysunku 4 wysokość $A'A$ (na ścianę ABC) nie ma wspólnych punktów z wysokością CB (na ścianę ABA'), tym bardziej nie można więc oczekiwać wspólnego punktu dla wszystkich czterech wysokości. \square
- R5.** Taki jedenastościan można uzyskać, obcinając wszystkie wierzchołki graniastosłupa trójkątnego tak, by otrzymać zamiast nich 6 trójkątnych, parami rozłącznych ścian (pozostałych 5 ścian powstaje ze ścian wyjściowego graniastosłupa). \square
- R6.** Dowolny czworościan, który miałby zawierać dolną podstawę wielościanu z rysunku 5, musiałby także zawierać któryś z jego górnych wierzchołków. Jednak taki czworościan nie byłby w całości zawarty w tym wielościanie. \square
- R7.** W czworościanie z rysunku 6 spodek wysokości z wierzchołka D' to punkt D . Wysokość z wierzchołka A zawarta jest w prostej AB' , prostopadłej do płaszczyzny $BCD'A'$, więc spodek tej wysokości to środek przedniej ściany sześciannu. Analogicznie spodem wysokości z wierzchołka C jest środek kwadratu $BCC'B'$. Przekątna $B'D$ sześciannu jest prostopadła do ściany ACD' czworościanu, zatem wysokość z wierzchołka B jest równoległa do $B'D$, a co za tym idzie jej spodek również trafia poza odpowiednią podstawę. \square

Zadania domowe

8. Rozwiąż zadanie 1 dla ostrosłupa o podstawie czworokąta wklęsłego.
9. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny oraz taka płaszczyzna przecinająca wszystkie jego krawędzie boczne, że pole uzyskanego przekroju jest większe od pola podstawy ostrosłupa?