




W następnym numerze polecamy



polowanie na neutrina

SPIS TREŚCI NUMERU 9 (484)

Tak bardzo oczekiwana wartość <i>Piotr Chrząstowski-Wachtel</i>	str. 1
Fuzja Bonda <i>Krzysztof Rejmer</i>	str. 3
Matematyka żonglowania <i>Denis Kuperberg</i>	str. 4
Plejady 3D <i>Grzegorz Derfel</i>	str. 6
 Zadania	str. 7
 Nasze i wirusowe czapeczki <i>Magdalena Fikus</i>	str. 8
Olimpiady 2014/2015	str. 9
Czy stado słońi jest stadem zwierząt? O kowariancji i kontrawariancji <i>Paweł Lipski</i>	str.17
Informatyczny kącik olimpijski (75): Smok i owce <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: O kurczącym się Merkurym	str.24
Niebo we wrześniu	str.24
 Twierdzenie Pascala <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–18⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Tak bardzo oczekiwana wartość

Piotr CHRZĄSTOWSKI-WACHTEL*

Nazywano ją kiedyś nadzieją. Czasami dodawano przymiotnik „matematyczna”, żeby nie było nieporozumień. Chodziło bowiem o wartość oczekiwaną, czyli o pojęcie znane z rachunku prawdopodobieństwa. Słowo *nadzieja* faktycznie budziło wątpliwości, szczególnie gdy mierzono jakieś negatywnie nacechowane wielkości, jak liczba zgonów, wypadków samochodowych czy strat. Powiedzenie „nadzieja, jeśli chodzi o wysokość straty, wynosi 100 zł” brzmi zupełnie inaczej niż „wartość oczekiwana straty to 100 zł”.

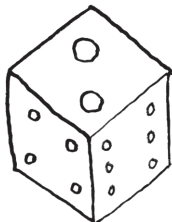
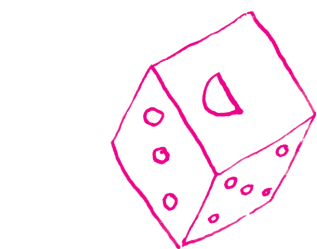
Ze szkoły znamy zapewne ciekawy przypadek rzutu kostką: średnio wypada $3\frac{1}{2}$ oczka. Każdy wynik ważymy bowiem prawdopodobieństwem, z jakim się go spodziewamy – tu wszystkie prawdopodobieństwa wynoszą $\frac{1}{6}$. Łącznie mamy więc $\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3\frac{1}{2}$. Ale widział kto kiedy kostkę, która tyle właśnie pokazuje? Okazuje się, że ta „typowa” wartość jest w ogóle niemożliwa. Choć jeśli wykonamy odpowiednio dużo doświadczeń i obliczymy średnią z wyników rzutów, to wyjdzie nam coś w okolicy $3\frac{1}{2}$.

Właściwie można powiedzieć, że pojęcie wartości oczekiwanej było obecne u zarania, kiedy powstawał rachunek prawdopodobieństwa. Do Błażeja Pascala zgłosił się jego znajomy, Antoni Gombaud, lepiej znany jako kawaler de Méré, z prośbą, aby rozstrzygnąć sposób podziału puli pieniędzy przy grze w kości, gdy przerwie się grę w momencie, kiedy jedna ze stron wygrywa. W skrócie rzecz biorąc, możemy założyć, że mamy prostą grę, w której z zadaniem prawdopodobieństwem, przyjmijmy roboczo że 50%, jeden z graczy wygrywa. Na przykład, gracze rzucają na przemian kośćmi i rundę wygrywa ten, kto pierwszy wyrzuci parę szóstek. Pięć wygranych rund oznacza wygraną całego meczu i, niezależnie od tego, ile punktów zdobył przeciwnik, zgarnia się całą pulę.

Kawaler de Méré zadał Pascalowi pytanie, jak należało pulę podzielić, gdy jego przeciwnik miał 3, a on sam 4 punkty i grę musiano przerwać. Przeciwnik uważał, że w stosunku 3 do 4, czyli zgodnie z liczbą zdobytych punktów. Kawaler de Méré, że w stosunku 1 do 2, gdyż do wygranej jemu brakowało tylko jednego punktu, podczas gdy przeciwnikowi aż dwóch. Pascal przeprowadził rozumowanie, które dla nas dziś jest oczywiste: w połowie przypadków kolejną rundę, a zatem cały mecz wygra kawaler de Méré, a z pozostałej połowy znów połowę stanowi szansa wygrania przez niego całego meczu. Zatem łącznie kawaler de Méré miał aż trzy szanse na cztery, że wygra, podczas gdy jego przeciwnik tylko jedną. Pulę więc należałoby podzielić w stosunku 1 do 3. Zatem ani de Méré, ani jego partner nie mieli racji.

W rzeczywistości kawaler de Méré był zainteresowany innymi, bardziej złożonymi zagadnieniami. Chodziło mu o wyznaczenie takiej liczby rzutów, aby szanse na wygraną przekraczały połowę – wtedy mógł się zakładać na równych zasadach. Empirycznie doszedł, na przykład, do tego, że opłaca mu się przyjmując zakład o to, iż przy 4 rzutach kostką wypadnie co najmniej jedna szóstka. W rzeczywistości prawdopodobieństwo tego zdarzenia to prawie 52%. Nieco trudniej poszło mu z wyznaczeniem najmniejszej opłacalnej liczby rzutów dwiema kostkami tak, aby można się było założyć na równe stawki o to, że wypadną w końcu jednocześnie 2 szóstki. Wyszło mu 24, choć – jak się łatwo możemy dziś przekonać – musiał popełnić błąd (albo też miał nieco zwichnięte kości), gdyż prawdopodobieństwo sukcesu wynosi tu około 0,4914 i dopiero 25 rzutów daje przewagę. Pascal skontaktował się z innym francuskim matematykiem, Piotrem Fermatem. W rezultacie ich wspólnych dociekań powstała wymiana listów o zawartości, która uzasadnia stwierdzenie, że właśnie wtedy powstała teoria prawdopodobieństwa.

Zmienna losowa – wynalazek nieco późniejszy – to po prostu kodowanie niektórych wyników za pomocą liczb. Na przykład możemy kodować sukces przez wartość 1, a porażkę przez wartość 0. Jeżeli znamy prawdopodobieństwo sukcesu p , to możemy się spodziewać, że średnio w n doświadczeniach losowych



Rozwiązanie zadania F 863.

Podniesienie środka ciężkości człowieka o masie m na wysokość h wymaga wykonania pracy $W = mgh$, gdzie g oznacza przyspieszenie spadku swobodnego na powierzchni Ziemi. Uwolnienie się od przyciągania planetoidy o masie M i promieniu R wymaga wykonania pracy równej energii „wiązania grawitacyjnego” $E = -GMm/R = W$, gdzie G oznacza stałą grawitacji. Biorąc pod uwagę, że $g = GM_Zm/R^2$ oraz związek masy kuli z jej promieniem i gęstością otrzymujemy ostatecznie

$$RZh = R^2,$$

co po podstawieniu podanych wartości h i Rz daje

$$R = 1955 \text{ m} \approx 2 \text{ km}.$$

Pominęliśmy tu ograniczenie ruchów przez kombinezon kosmonauty.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania F 864.

Stopnienie okołobiegunowych lądolodów oznacza zmianę rozkładu masy planety, a więc także jej całkowitego momentu bezwładności, a moment pędu związany z obrotem planety nie ulegnie przy tym zmianie. Początkowy moment bezwładności wynosi

$$I_0 = 2MR^2/5 + I_p(\theta),$$

gdzie pierwszy składnik to moment bezwładności kuli, a drugi – moment bezwładności obu czap lodowych – każde o masie $m/2$ i kącie $\theta = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$. Po stopnieniu lodu woda pokryje całą powierzchnię planety – dla uproszczenia obliczeń przyjmijmy, że tworzy na niej warstwę o grubości niezależnej od szerokości geograficznej. Końcowy moment bezwładności planety wynosi więc

$$I_k = 2MR^2/5 + I_p(180^\circ).$$

Kątowa prędkość obrotu zmieni się przy tym z ω_0 na ω_k zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu: $I_0\omega_0 = I_k\omega_k$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \omega_k - \omega_0 &= \frac{I_1 - I_0}{I_1} \omega_0 = \\ &= \frac{-\cos(\theta)(1 + \cos(\theta))mR^2}{3\left(\frac{2}{5}MR^2 + \frac{2}{3}mR^2\right)} \omega_0, \end{aligned}$$

a po podstawieniu wartości liczbowych i skorzystaniu ze związku prędkości kątowej z okresem obrotu otrzymujemy, że doba zmieni się o $T_k - T_0 \approx 0,55$ s.

Dane liczbowe zadania odpowiadają warunkom na Ziemi, ale założony rozkład masy lądolodu i idealnie kulisty kształt powierzchni to oczywiście dosyć grube przybliżenia.



uzyskamy pn jedynek i $(1-p)n$ zer. Wartość oczekiwana takiej dyskretnej zmiennej losowej to po prostu ważona odpowiednimi prawdopodobieństwami suma jej możliwych wyników.

Problem kawalera de Méré możemy ściśle ująć następująco. Przyjmijmy, że X_n jest taką rodziną zmiennych losowych, że dla ustalonego n wartość zmiennej X_n jest równa 1, jeśli w n kolejnych rzutach dwiema kośćmi wypadną co najmniej dwie szóstki, a 0 – jeśli nie. Pytamy się teraz o to, dla jakiego najmniejszego n wartość oczekiwana $E(X_n)$ przekracza połowę. Jeśli zatem będziemy w stanie wyznaczać wartości oczekiwane $E(X_n)$ dla każdego n , to zadanie to zostanie rozwiązane i wynikiem jego będzie wartość n , począwszy od której warto się zakładać o to, że dwie szóstki wypadną jednocześnie w ciągu n rzutów.

Ogólnie, jeśli prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia wynosi p , a sami mamy nutkę hazardzisty oraz chętnego przeciwnika do zabawy, to mamy prostą strategię zakładania się o to, że to właśnie zdarzenie nastąpi. Załóżmy, że nasz przeciwnik jest skłonny wyłożyć pewną kwotę na zakład, iż nie uda się nam nasze doświadczenie. Postarajmy się ustalić tak nasz udział w zakładzie, aby się nam opłaciło. Dla uproszczenia przyjmijmy, że cała pula po wpłaceniu przez nas stawek ma wartość 1. Ile zatem bylibyśmy skłonni postawić w takim zakładzie? Oznaczmy tę niewiadomą stawkę przez x . Wtedy z prawdopodobieństwem p wygramy $1-x$, a z prawdopodobieństwem $(1-p)$ stracimy x . Chodzi o to, żeby bilans wyszedł dodatni, zatem mamy nierówność $p(1-x) - (1-p)x > 0$. Rozwiązując ją, otrzymujemy po prostu $x < p$. Zatem jeśli postawimy mniej niż p -tą część puli przeciw $1-p$, wyjdziemy na tym dobrze, jeśli więcej, to wyjdziemy na tym źle, a jeśli postawimy dokładnie p , to zakład nie będzie faworyzował nikogo z nas. Przy długich seriach wygrana będzie oscylowała wokół zera.

Sytuacja się komplikuje, jeżeli wygrane są duże w porównaniu do prawdopodobieństw. Wyobraźmy sobie takie doświadczenie. Nasz kolega bierze dwie identyczne puszkę, monetę i trochę gotówki i wychodzi do sąsiedniego pokoju. Tam rzuca monetą tak długo, aż wypadnie reszka. Notuje liczbę wykonanych rzutów n i do jednej puszkę wkłada 3^{n-1} zł, a do drugiej 3^n zł. Zamyka puszkę, przynosi je nam i proponuje, żebyśmy wybrali, z której puszkę chcemy dostać pieniądze. Możemy jedną z nich otworzyć i przeliczyć gotówkę, a następnie albo ją wziąć, lub też „w ciemno” zdecydować się na drugą puszkę i zadowolić tym, co tam zastaniemy. Jaką strategię powinniśmy przyjąć?

Zauważmy, że uzyskanie n rzutów monetą do pierwszej reszki ma prawdopodobieństwo $\frac{1}{2^n}$, bo musi wypaść dokładnie $n-1$ orłów, a potem reszka. Jeśli widzimy, że w pierwszej puszkę jest 3^k zł, to albo $k=0$ (czyli widzimy jedną złotówkę) i wtedy na pewno opłaca się zdecydować na pewne 3 zł w drugiej puszkę, albo $k > 0$. W tym drugim przypadku jeśli zdecydujemy się na pozostanie przy pieniądzu z pierwszej puszkę, to wygramy po prostu 3^k zł. Jeśli natomiast zdecydujemy się na zmianę puszkę, to możemy tam zastać albo 3^{k-1} zł, albo 3^{k+1} zł, przy czym to drugie zdarzenie będzie dwa razy mniej prawdopodobne. Para $(3^k, 3^{k-1})$ ma bowiem prawdopodobieństwo $\frac{1}{2^k}$, zaś para $(3^k, 3^{k+1})$ ma prawdopodobieństwo $\frac{1}{2^{k+1}}$. Zatem oczekiwana ilość pieniędzy w drugiej puszkę to $\frac{2}{3} \cdot 3^{k-1} + \frac{1}{3} \cdot 3^{k+1}$, co jest większe niż 3^k , bo przecież już sam drugi składnik to dokładnie 3^k .

Dochodzimy do zaskakującego wniosku: zawsze się opłaca wybrać tę drugą puszkę! Ale po co w takim razie w ogóle było otwierać tę pierwszą? I która miałyby niby być ta pierwsza – przecież puszkę są nierozróżnialne. Gdybyśmy chwycili najpierw tę drugą i przeliczyli pieniądze, które się tam znajdują, to też opłacałoby się zmienić decyzję? I uzyskać ostro większą wartość oczekiwaną przy zmianie decyzji z powrotem na tę pierwszą? Coś tu nie gra!

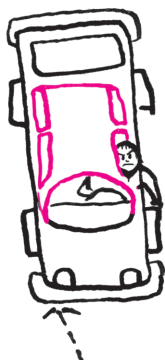
Dochodzimy tu do fenomenu znanego w probabilistyce pod nazwą *paradoksu petersburskiego*. Odkryty on został przez Daniela Bernoulliego. Odkrył on, że jeśli prawdopodobieństwa nieskończenie wielu zdarzeń będą odpowiednio duże, to wartość oczekiwana może wyjść nieskończona, mimo że w każdym doświadczeniu

Artykuł analizujący dokładnie tę grę pojawił się w *Delcie* 7/1998.

Co najmniej, gdyż w tych obliczeniach zakładamy, że mamy pecha i otwieramy zawsze tę gorszą puszkę, więc w rzeczywistości będzie nawet nieco lepiej.

Mówimy tu o wyidealizowanej sytuacji, w której zakładamy nieograniczoną wypłacalność drugiej strony – w rzeczywistości założenie niezbyt realne.

Opisywany eksperyment dotyczył nieco uproszczonej wersji, oryginalnie badanej przez D. Bernoulliego, w której nie było dwóch puszek, tylko po prostu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2^n}$ wygrywało się 2^n zł. Łatwo sprawdzić, że wartość oczekiwana jest tu też nieskończona. W opisywanym doświadczeniu średnia wartość deklarowanej stawki do zaakceptowania przez pytanych wyniosła 25. [Ian Hacking, *Strange expectations*, Philosophy of Science 47 (1980), nr 4, 562–567.]



Jeżeli Czytelnik Praktyczny uzna, że pominięcie oporów ruchu przy prędkości rzędu 100 km/h świadczy o kompletnym oderwaniu autora od rzeczywistości, może – pamiętając o tym, że ta sama cecha dotyczy filmów o agencie 007 – obliczyć, jak często Bond musi strzelać, by utrzymać bezpieczną prędkość. Można przyjąć, że opory ruchu są proporcjonalne do kwadratu prędkości.



zyskujemy jedynie skończoną wartość. Tak jest i u nas. Nawet jeśli będziemy wybierali za każdym razem pierwszą puszkę, to wartość oczekiwana wyniesie co najmniej $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 9 + \frac{1}{16} \cdot 27 + \dots = \infty$. A jak będziemy kapryśli i zdecydujemy się na branie tej drugiej puszkę, to nawet więcej. Zaraz, zaraz. Więcej niż nieskończoność? O ile?

No właśnie! Nieskończoności nie da się przeskoczyć. Tu mamy do czynienia z nieintuicyjnym pojęciem nieskończonej wartości oczekiwanej. W ujęciu bliskim kawalerowi de Méré po prostu mamy do czynienia z sytuacją, w której zapytani, jaką sumę bylibyśmy w stanie zapłacić, aby w taką grę sobie zagrać, powinniśmy odpowiedzieć: **każdą**. Ciekawe, że gdy psychologowie badali ten aspekt, okazało się, że ludzie nie byli tacy przekonani o opłacalności takiej gry i średnio deklarowali kilkadziesiąt zł.

Warto dodać, że Pascal pojęcie nieskończonej wartości oczekiwanej rozumiał na wiele lat przed Bernoullim. Oparł na nim swój słynny zakład. W obliczu nieskończonej szczęśliwości w przyszłym życiu oferowanej przez Boga nie należy kombinować, tylko po prostu żyć zgodnie z przykazaniami. Żadna wartość w doczesnym, skończonym życiu nie zrekompensuje nam braku wiecznego szczęścia. Nie mówiąc już o nieskończonej ujemnej wartości oczekiwanej, jeśli przydarzyłoby się nam przegrać na Sądzie Ostatecznym. Zostawmy może te rozważania teologom, a na własny użytek raczej omijajmy kolektury Lotto, bo tam oczekiwana wartość wygranej oscyluje wokół -50% opłaconej stawki. Więc jeśli nachodzi nas chęć wykupienia losu za 3 zł, to znacznie bardziej opłacalne jest wyrzucenie do kosza przy kolekturze, na przykład, złotówki. W długiej perspektywie wyjdziemy na tej strategii lepiej.

Fuzja Bonda

James Bond jest ścigany przez niegodziwego doktora No. Samochód Bonda rozwija maksymalną prędkość $v_0 = 100$ km/h, ale samochód doktora No rozwija nieco większą prędkość $u_0 = 101$ km/h. James Bond w szkole dla szpiegów słyszał o zasadzie zachowania pędu i postanawia ją wykorzystać – zaczyna strzelać do przeciwnika. Jego samochód wpada w poślizg (pomijamy tarcie i opory ruchu) i dzięki zjawisku odrzutu przyspiesza. Sprawdźmy, ile strzałów (przyjmując, że wciąż chybiamy) musi oddać James Bond, żeby uciec doktorowi No? Masa pocisku jest równa $m = 10$ g, a jego prędkość wylotowa to $w_0 = 400$ m/s. Masa samochodu Bonda wraz z pasażerem i amunicją wynosi $M = 1$ t.

Niech v_1 będzie prędkością samochodu Bonda po pierwszym wystrzale. Z zasady zachowania pędu wynika

$$Mv_0 = (M - m)v_1 - m(w_0 - v_0),$$

A stąd

$$v_1 = v_0 + \frac{m}{M - m}w_0.$$

Ze względu na ogromną różnicę mas pominiemy m w mianowniku ułamka w ostatnim równaniu. Powtarzamy to rozumowanie po każdym wystrzale. Po n strzałach Bond porusza się z prędkością

$$v_n = v_0 + n \frac{m}{M}w_0.$$

Bond musi strzelać tak długo, aż jego prędkość przekroczy u_0 . To daje

$$n = \left\lceil \frac{u_0 - v_0}{w_0} \frac{M}{m} \right\rceil.$$

Podstawiając dane, otrzymujemy $n = 70$. A zatem lepiej chyba oddać celny strzał albo ścigać się na znacznie lżejszych sankach.

A czy doktor No może skorzystać z metody wymyślonej przez Bonda? Oczywiście, o ile będzie strzelał do tyłu.

Krzysztof REJMER

Matematyka żonglowania

Denis KUPERBERG*

Żonglerka to starożytna sztuka, jej początki wydają się dorównywać wiekiem ludzkości, znane są np. rysunki żonglującej kobiety znalezione w egipskim grobowcu datowanym na XII wiek p.n.e. Wystarczy kilka kamieni i trochę praktyki, nie jest więc wcale zdumiewające, że ludzie zaczęli się tym zajmować bardzo dawno.

Jednakże dopiero bardzo niedawno zaczęto się interesować matematycznymi aspektami żonglowania. Pierwszy raz matematyczną notacją dla wzorców żonglowania wprowadzono w latach 80. XX wieku niezależnie na Uniwersytecie Kalifornijskim w Santa Cruz, w Caltech i na uniwersytecie w Cambridge.

Przedstawię tutaj krótki opis tego, jak matematycy mogą pomóc żonglerom w tworzeniu wzorców żonglerki i jak ta międzydziedzinowa współpraca może przydać się również matematykom.

Pierwszy krok to stworzenie schematycznego modelu po to, by móc o żonglowaniu mówić precyzyjnie. Załóżmy (na początek), że czas jest dyskretny, czyli jest ciągiem chwil $1, 2, 3, \dots$, oraz że żongler ma dwie ręce, z których każda może trzymać w danej chwili co najwyżej jeden przedmiot (piłkę). Ręce poruszają się na zmianę, to znaczy jedna z nich łapie i rzuca piłkę w chwilach parzystych, a druga w nieparzystych.

Ciekawszą rzeczą są różne sposoby rzucenia piłki – my możemy to opisać wyłącznie poprzez czas (liczbę *chwil*), który piłka spędza w powietrzu. To znaczy rzut *wysokości t* wykonany w chwili *i* ląduje w chwili $i + t$. Zauważmy, że znaczy to, iż wszystkie rzuty parzystej wysokości lądują w tej samej ręce, która je wyrzuciła, a te o wysokości nieparzystej zmieniają rękę. Oznaczmy przez 0 pusty rzut, to znaczy ręka wykonuje rzut 0 w chwili *i*, jeśli jest ona wolna w chwili *i*.

Na rysunku 1 przedstawiony jest przykład sekwencji rzutów. Każda piłka jest identyfikowana przez swój kolor; dodatkowa informacja (stan) będzie przydatna w dalszej analizie. Zauważmy, że żongler używa trzech piłek.

Przedstawiona szczególna sekwencja będzie opisana tylko przez ciąg wykonanych rzutów, czyli – jak widać – 531453055205314530. Taką notację z angielskiego nazywamy *siteswap*. Żonglerzy zazwyczaj interesują się prostszymi sekwencjami aniżeli zaprezentowana tutaj. Szczególną uwagę darzone są sekwencje *okresowe*, w których skończony ciąg rzutów może być powtarzany w nieskończoność. Na przykład pierwszym wzorcem, którego uczy się większość ludzi, to ten z trzema piłkami, zwany *kaskadą*; odpowiada on ciągowi 33333...

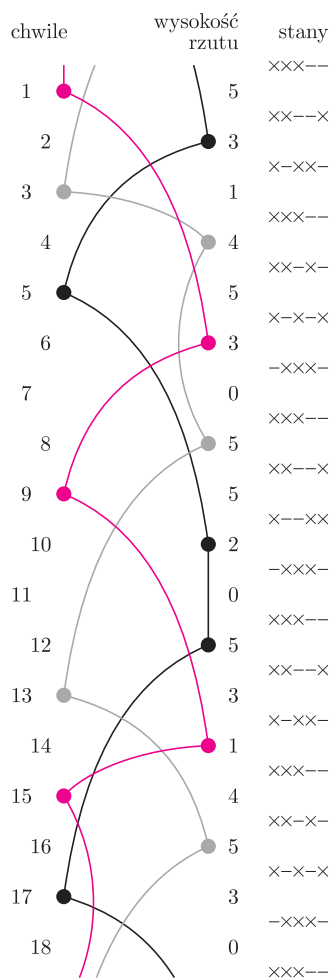
Aby uniknąć powtarzania zbędnej informacji, zazwyczaj zapisujemy sekwencję okresową podając jedynie jej jeden okres, czyli w przypadku kaskady po prostu (3).

Matematyczny umysł może tu postawić wiele pytań. Czy wszystkie wzorce są poprawne? Jak liczba piłek zależy od wzorca? Ile wzorców istnieje przy pewnych ustalonych ograniczeniach (jak liczba piłek i maksymalna wysokość rzutu)?

Przyjrzyjmy się kilku podstawowym własnościom wzorców siteswap.

Definicja. Wzorec $t_0 \dots t_{k-1}$ dla $k \geq 1$ nazwiemy *poprawnym* wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma : \{0, 1, \dots, k-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$ zdefiniowana jako $\sigma(i) = i + t_i \pmod{k}$ jest permutacją. Wszystkie wzorce dla $k = 1$ są poprawne; wzorec (n) odpowiada kaskadzie n piłek.

Ta definicja po prostu wyraża w inny sposób fakt, że dwie piłki nie mogą wylądować w tym samym momencie. Innymi słowy, różne rzuty we wzorcu muszą lądować w różnych chwilach.



Rys. 1

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Lemat. W poprawnym wzorcu dla n piłek średnia wysokość rzutów wynosi n .

Dowód pozostawiam jako ćwiczenie-prezent dla Czytelnika lubiącego wyzwania.

Fakt opisany w lemacie może być użyty jako wstępny test na poprawność wzorca: jeśli średnia wysokość nie jest liczbą naturalną, to wzorec nie może być poprawny.

Przykłady:

- (521) ma średnią $8/3$, więc nie jest poprawnym wzorcem.
- (321) ma średnią 2, więc mogłyby opisywać wzorec dla dwóch piłek; jednakże pierwszy warunek nie jest spełniony: $\sigma(0) = \sigma(1) = \sigma(2) = 0$, czyli wszystkie piłki lądują w tym samym momencie.
- (441), (531), (55500) są poprawnymi wzorcami dla trzech piłek. (6451), (7333), (71) są poprawnymi wzorcami dla czterech piłek.

Benoît Guerville udowodnił interesujący, nietrywialny fakt.

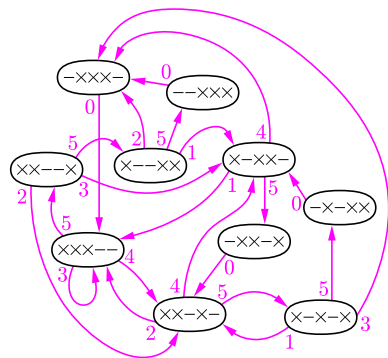
Twierdzenie o reorganizacji. *Każdy ciąg liczb naturalnych o średniej będącej liczbą naturalną można poprzestawiać tak, by przedstawiał poprawny wzorec.*

Powróćmy do rysunku 1. Chcę objaśnić to, co zostało umieszczone w kolumnie stany. W każdej chwili możemy spojrzeć na wysokość danej piłki, tzn. czas od danego momentu do jej wylądowania. Ponieważ dwie piłki nigdy nie lądują w tej samej chwili, więc wszystkie wysokości będą różne. Będziemy je zapisywać od lewej do prawej, znak \times oznacza, że jest piłka, a znak $-$, że jej nie ma. W szczególności, pierwszy symbol z lewej strony odpowiada wysokości 0, czyli aktualnie aktywnej ręce. Opis stanu kończy się na maksymalnej wysokości (w przykładzie to 5), więc opis stanów jest skończony. Ograniczamy też wszystkie rzuty do tej maksymalnej wysokości. To znaczy, że jeśli stan zaczyna się znakiem $-$, to aktualna ręka jest pusta i następny rzut to 0. Przy czym, jeśli jest tam \times , to piłka może być rzucona na dowolną pozycję zaznaczoną $-$, czyli odpowiadającą wolnemu miejscu. Maksymalny rzut jest zawsze dozwolony, gdyż odpowiada wirtualnemu $-$ za ostatnią pozycję. Wtedy wszystkie symbole są przesuwane w lewo, co obrazuje upływającą jednostkę czasu. Używając stanów, zawsze wiemy, jakie rzuty są dozwolone, co może być zilustrowane przez automat: diagram stanów-przejść, taki jak na rysunku 2, gdzie są trzy piłki, a maksymalna wysokość to 5.

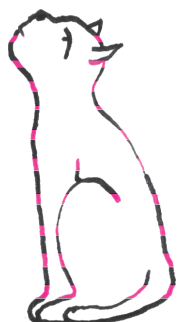
A zatem poprawne ciągi etykietowania ścieżek w tym automacie, a okresowe wzorce odpowiadają cyklom. To spojrzenie może być użyte do definiowania egzotycznych wzorców zonglowania i niektórzy artyści (na przykład firma *Gandini Juggling*) szeroko używają wzorców przy projektowaniu układów na swoje pokazy.

Zauważmy, że matematyczne rezultaty nigdzie nie wykorzystywały faktu, iż występują akurat dwie ręce. Wszystkie rozumowania będą wciąż poprawne dla większej liczby zonglujących „stron” (stóp, głowy, wielu osób, ...). Badania nad wzorcami siteswap trwają, uogólnia się to pojęcie na wiele sposobów: dla czasu synchronicznego (wiele rąk rzuca w tym samym momencie), multipleksów (jedna ręka może rzucać wiele piłek naraz), ...

Rozważania te doprowadziły także do bardziej abstrakcyjnych badań naukowych, zostało opublikowanych wiele artykułów na ten temat, w większości o kombinatoryce wzorców. Interesujący jest fakt, że pewne pomysły rozwinięte podczas studiowania zonglowania były użyte w innych dziedzinach matematyki. Wiele artykułów, a czasem nawet prace doktorskie (np. *Combinatorial aspects of juggling* Anthony’ego Maysa) wskazują związki wzorców siteswap z nowatorskimi rozwiązaniami w matematyce. Nie ma takich rzeczy jak bezużyteczna matematyka: wzajemne powiązania często pojawiają się przy najbardziej niewinnych tematach!



Rys. 2



Rysunki do artykułu zostały zaadaptowane z Wikipedii.

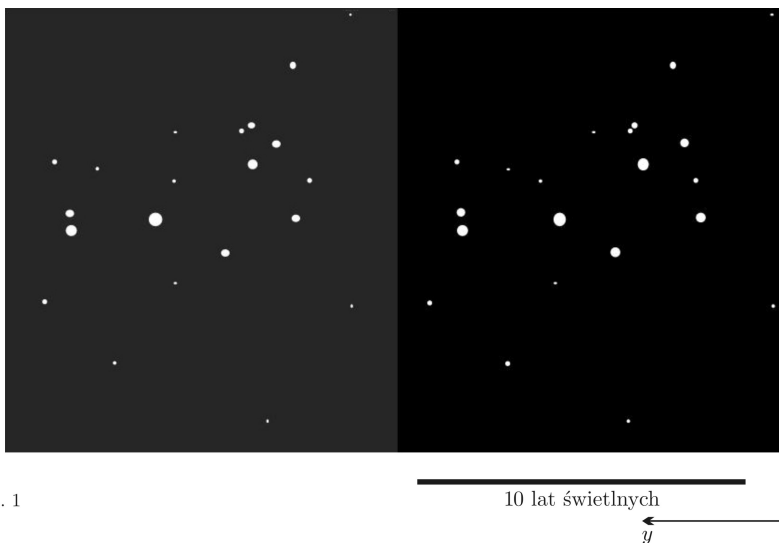
Tłumaczył Wojciech CZERWIŃSKI

W okresie od października do marca na niebie dobrze widoczny jest gwiazdozbiór Byka. Wśród interesujących obiektów w nim zawartych wyróżniają się dwie, najjaśniejsze na niebie, gromady otwarte – Hiady i Plejady. Ta ostatnia, oznaczona jako M45 w katalogu Messiera, jest zbiorem gwiazd o wyjątkowej urodzie, prawdziwym klejnotem na zimowym niebie. Do jej podziwiania wystarczy lornetka. Centrum gromady oddalone jest o około 390 lat świetlnych. „Atlas nieba gwiazdzistego” [1] wymienia w tej gromadzie 145 gwiazd; inne źródła podają znacznie większe liczby. Plejady zajmują obszar nieba o rozmiarze około 100 minut kątowych. Dziesięć gwiazd (zebranych w tabelce, [2]) ma swoje nazwy wzięte z mitologii greckiej, a 6 najjaśniejszych z nich można zobaczyć okiem nieuzbrojonym. Gromada zawiera młode gorące gwiazdy powstałe nie dawniej niż 100 milionów lat temu z istniejącej wciąż mgławicy, którą oświetlają.

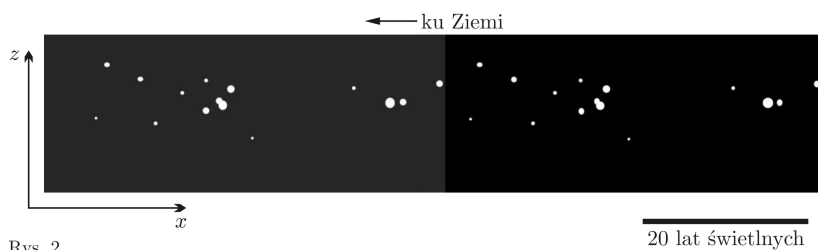
*	α	δ	d [ly]
Alcjona	$3^h 47' 29,077''$	$24^\circ 6' 18,49''$	403,16
Atlas	$3^h 49' 9,7''$	$24^\circ 3' 12''$	382,36
Elektra	$3^h 44' 52,537''$	$24^\circ 6' 48,01''$	404,66
Maja	$3^h 45' 49,0607''$	$24^\circ 22' 3,89''$	383,26
Meropa	$3^h 46' 19,574''$	$23^\circ 56' 54,09''$	380,14
Tajgeta	$3^h 45' 12,5''$	$24^\circ 28' 2''$	409,23
Celena	$3^h 44' 48,215''$	$24^\circ 17' 22,09''$	377,06
Asteropa	$3^h 45' 54,4''$	$24^\circ 33' 17''$	371,9
Plejona	$3^h 49' 11,216''$	$24^\circ 8' 12,16''$	381,92

Wszystkie obiekty astronomiczne wydają się leżeć na sferze niebieskiej w jednakowej nieokreślonej odległości od nas. Sprzyja to dowolnemu łączeniu gwiazd w gwiazdozbiory. Jednak pozornie bliskie gwiazdy należące do jednej konstelacji mogą w rzeczywistości być od siebie znacznie oddalone, leżeć w znacznie różniących się odległościach od Ziemi. Dzięki znajomości odległości dzielących nas od niektórych gwiazd Plejad można sporządzić rysunki tworzące stereoparę, która zilustruje rozmieszczenie gwiazd w przestrzeni. W tym celu trzeba odtworzyć wygląd dwóch układów gwiazd widocznych na sferach niebieskich związanych z obserwatorami znajdującymi się w dwóch dostatecznie oddalonych od siebie miejscach w kosmosie. Takie tworzące parę rysunki, „lewy” i „prawy”, są przeznaczone do jednoczesnego oglądania oddzielnie lewym i prawym okiem. Po odpowiedniej adaptacji oczu powstaje wrażenie oglądania trójwymiarowego zbioru punktów reprezentujących gwiazdy.

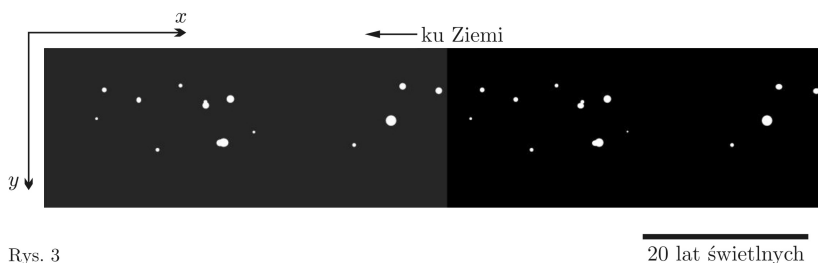
Konstrukcję rysunków można przeprowadzić w następujący sposób. Wprowadzamy układ współrzędnych xyz , który posłuży do określenia położenia gwiazd. Za jednostkę długości przyjmijmy rok świetlny. Początek układu umieszczamy w dowolnie wybranym punkcie wewnątrz gromady, o położeniu określonym rektascensją α_0 , deklinacją δ_0 i odległością od Ziemi x_0 . Oś x układu nadajmy kierunek wzdłuż linii przechodzącej przez Ziemię i zwrot od Ziemi. Oś y niech będzie równoległa do płaszczyzny równika niebieskiego i niech ma zwrot zgodny z ruchem rocznym Słońca. Oś z jest wtedy prostopadła do płaszczyzny równika i ma zwrot ku północnemu biegunowi świata. Współrzędną x_i w tym układzie wybranej gwiazdy można ustalić, odejmując od dzielącej nas od niej odległości przyjętą wartość x_0 . Współrzędne y_i i z_i dotyczą natomiast położenia rzutu gwiazdy na płaszczyznę yz . Aby wyrazić je w latach świetlnych, rektascensję i deklinację gwiazdy zmniejszamy o α_0 i δ_0 , po czym wyniki wyrażone w radianach mnożymy przez x_0 . W ten sposób zostają obliczone współrzędne dla obserwatora ziemskiego. Aby powstały oba obrazki naszej stereopary, potrzebujemy dwóch zestawów analogicznych współrzędnych obowiązujących w układach zdefiniowanych dla obserwatorów patrzących na Plejady z innych kierunków różniących się od naszego kierunku obserwacji o niewielkie



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

kąty $\pm\phi$ równe np. $\pm 0,01$ rad. Wygodnie jest przyjąć, że prosta łącząca obu fikcyjnych obserwatorów jest równoległa do osi y . Wtedy współrzędne z_i gwiazd pozostają zachowane, $z^\pm = z_i$, a nowe współrzędne y^\pm można obliczyć, posługując się przekształceniem opisującym obrót układu współrzędnych wokół osi z o kąty $\pm\phi$:

$$y^\pm = -x_i \sin(\pm\phi) + y_i \cos(\pm\phi),$$

gdzie górne znaki dają rysunek dla prawego oka, a dolne dla lewego. Na podstawie obliczonych współrzędnych można sporządzić podwójny rysunek, taki jak rysunek 1. Przyjęto dla niego $\alpha_0 = 3^h 48'$, $\delta_0 = 23^\circ 54'$ i $x_0 = 380$ lat świetlnych. Przedstawia wygląd Plejad z dwóch punktów kosmosu oddalonych od siebie o 7,6 lat świetlnych. Rysunek powinien mieć odpowiedni rozmiar, tak aby analogiczne fragmenty jego obu części były oddalone o odcinek nieco mniejszy

niż rozstaw oczu. Wówczas, jeśli spojrzymy na rysunek z odległości kilkunastu centymetrów i przystosujemy oczy tak, aby oba obrazy nałożyły się, zobaczymy gwiazdy Plejad zawieszony w przestrzeni.

Te same dane dotyczące gwiazd stwarzają możliwość obejrzenia Plejad z dowolnej strony. Rysunek 2 ukazuje gromadę widzianą z punktu na osi y o współrzędnej $y = -380$ lat świetlnych, a rysunek 3 – z punktu widzenia $z = -380$ lat świetlnych. Napotykamy tu pewną niedogodność wynikającą z tego, że rozmiar Plejad wzdłuż osi x jest znacznie większy niż wzdłuż y i z . Dlatego rysunki 2 i 3 przedstawiają Plejady w innej skali niż rysunek 1, a ponadto nie zawierają gwiazd peryferyjnych. Dla otrzymania wyraźniejszego efektu przestrzennego użyto kąta $\phi = \pm 0,03$ rad.

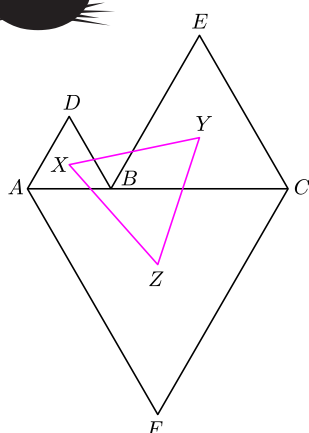
Literatura

- [1] „Atlas nieba gwiazdzistego”, J. Dobrzycki i A. Dobrzycki, PWN, Warszawa, 1989.
 [2] Dane zaczerpnięte z programu Stellarium, darmowego „komputerowego planetarium”, <http://www.stellarium.org/pl>.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1432. Punkt B należy do odcinka AC . Punkty D i E leżą po jednej stronie prostej AC , a punkt F po drugiej, przy czym trójkąty ABD , BCE , ACF są równoboczne o ortocentrach odpowiednio X , Y , Z . Udowodnić, że trójkąt XYZ jest równoboczny.
 Rozwiązanie na str. 20

M 1433. Określmy funkcję $f(x) = x^2 + bx + c$ dla pewnych liczb rzeczywistych b, c . Wiadomo, że zbiór $A = \{x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1\}$ jest zbiorem pustym, odcinkiem lub sumą dwóch odcinków (w zależności od wartości b i c). Udowodnić, że za każdym razem łączna długość nie przekracza $2\sqrt{2}$.
 Rozwiązanie na str. 18

M 1434. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$ i $2n$ -kąt foremny. Każdy jego wierzchołek pomalowano na czerwono lub niebiesko, przy czym liczba czerwonych wierzchołków jest równa liczbie niebieskich wierzchołków. Udowodnić, że liczba głównych (przechodzących przez środek symetrii wielokąta) przekątnych o dwóch czerwonych końcach jest równa liczbie głównych przekątnych o dwóch niebieskich końcach.
 Rozwiązanie na str. 17

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 863. Na Ziemi najwyższe podskoki odpowiadają podniesieniu środka ciężkości człowieka o około 60 cm. Jaki jest największy promień skalnej planetoidy, od której przyciągania człowiek mógłby uwolnić się o własnych siłach? Średni promień Ziemi wynosi $R_Z = 6371$ km. Przyjmij, że średnia gęstość planetoidy jest równa średniej gęstości Ziemi.
 Rozwiązanie na str. 1

F 864. Okolice biegunów planety pokrywały kiedyś czapy lądolodów od każdego z biegunów aż do szerokości geograficznej $\varphi = 70^\circ$. Niestety, nieostrożne spalanie paliw kopalnych przez mieszkańców okolic o umiarkowanym klimacie spowodowało wzrost temperatury atmosfery (tzw. efekt cieplarniany) i stopienie obu okołobiegunowych lądolodów. O ile zmieniła się długość doby jeśli początkowo doba trwała $T_0 = 86400$ s. Masa planety wynosi $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, jej promień $R = 6371$ km, a masa lądolodów $m = 2,5 \cdot 10^{19}$ kg. Załóż, że planeta jest niemal idealną kulą.

Wskazówka: Moment bezwładności sferycznej czaszy opartej na kącie wewnętrznym θ , promieniu r i masie m wynosi

$$I_p(\theta) = \frac{mR^2}{3}(2 - \cos(\theta)(1 + \cos(\theta))).$$

Rozwiązanie na str. 2



Nasze i wirusowe czapeczki

Świat biologii molekularnej był tak rozczulająco prosty, kiedy Watson i Crick opisali strukturę kwasów nukleinowych, a Khorana i Nirenberg odkryli chemiczną naturę kodu genetycznego. Tę prostotę uosabia centralny dogmat biologii molekularnej sformułowany przez Cricka w końcu lat 60. XX wieku opisujący kierunek przepływu informacji genetycznej. Kolejność ułożenia elementów składowych DNA w nici determinuje jednoznacznie kolejność ułożenia bardzo podobnych (chemicznie) elementów drugiego kwasu nukleinowego – RNA. RNA jest chemicznym odwzorowaniem DNA, to odwzorowywanie nazwano transkrypcją. Domniemywano, że długość nici DNA, mierzona liczbą elementów składowych, jest w przybliżeniu równa długości RNA. Transkrypcji ulega cała informacja genetyczna komórki.

Kolejnym etapem przekazywania informacji, głosił dogmat, jest translacja – przerobienie symboli nukleinowych na kolejno ułożone w łańcuchu symbole proteinowe tworzące – jako dużą cząsteczkę – białko. Białko kieruje, spełnia, wykonuje wszystkie funkcje życiowe w komórce. Dzięki transkrypcji i translacji zrealizował się program dziedziczenia cech komórki.

Kierunek przekazu informacji był jeden – głosił dogmat.

To słowo, dogmat, na szczęście nie zamknęło dociekań ludzi wątpiących w dogmaty. Znalezione przykłady odwrócenia kierunku (synteza DNA na matrycy RNA, zwana potocznie odwrotną transkrypcją). Zadano cios aforyzmowi francuskiego noblisty, Jacquesa Monoda: *mechanizmy dziedziczenia bakterii są takie same u niej, u słonia i u człowieka*. Cały proces (procesy realizacji informacji genetycznej u organizmów wyżej zorganizowanych niż bakterie ma cechy szczególne. Zrozumieli to szybko genetycy zajmujący się przenoszeniem genów z bakterii do komórek wyższych (eukariotycznych); większość takich prób kończyła się niepowodzeniem.

Chyba największe „rewolucje” molekularne rozegrały się na polu transkrypcji. Eukariotyczny RNA ulega wielokrotnym i różnorodnym modyfikacjom. Nauczyciele akademicy poświęcają na przekazanie tej wiedzy roczne wykłady – my postąpimy brutalnie, skrótowo, zajmując się tylko jedną z nich: dołączaniem na jednym końcu RNA cząsteczki nazwanej *cap* (po polsku czule *czapeczką*). Dla każdego biochemika jest oczywiste, że wszystkie (liczne) reakcje „dojrzewiania” RNA prowadzą specyficzne enzymy, białka.

Czapeczka jest małą cząsteczką również podlegającą różnym modyfikacjom, sumarycznie polegającym na przyłączaniu grupy metylowej (CH_3). Czapeczka decyduje o określonej aktywności całego RNA, o wielu jego oddziaływaniach z białkami komórki, wzmacnia stabilność całego RNA, uczestniczy w usuwaniu nadmiarowych fragmentów RNA, w jego komórkowym transporcie i w inicjacji translacji. Bez czapeczki „nie ma życia”. Ale, co najciekawsze, modyfikacje (metylacje) czapeczki RNA eukariotycznych wirusów są dla nich charakterystyczne, są znacznikiem informacji wirusowej. Tak, słusznie myślicie: mogłyby być także celem działania leków antywirusowych.

W aktualną wiedzę o czapeczkach polscy naukowcy mają swój znaczący wkład. Od wielu lat w Zakładzie Biofizyki UW konstruuje się czapeczki o różnorodnych modyfikacjach, a potem obserwuje, jak to zmienia „życie” całego RNA. A całkiem niedawno duża grupa polskich uczonych, też z Zakładu Biofizyki i z Międzynarodowego Instytutu Biologii Molekularnej i Komórkowej opisała szczegółowo strukturę krystaliczną jednego z enzymów człowieka metylującego czapeczkę, a także jego kompleksu z czapeczką. Z opisu tych struktur można wnioskować o zasadniczych różnicach między systemami wirusowymi i komórkowymi, co otwiera drogę poszukiwań związków hamujących wybiórczo aktywność wirusowych metylaz czapeczki.

Skomplikowane, prawda? A wyżej wspomniane odkrycia zapewniają polskim placówkom naukowym znaczącą pozycję w tej dziedzinie na świecie. Taka mała czapeczka, a tak ważna!

Magdalena FIKUS

Dla dociekliwych: zasadnicza struktura czapeczki to N^7 -metyloguanozyna (m^7G) połączona niekanonicznym mostkiem trifosforanowym ($5' - 5'$) z $5'$ -końcem RNA.



Olimpiada

Zadania zawodów I stopnia Olimpiad: Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej 2014/2015

LVIII Olimpiada Astronomiczna

Informacje regulaminowe

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.
2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne.
3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, do **13 października 2014 r.**, rozwiązania 3 zadań, dowolnie wybranych przez uczestnika, spośród zestawu zawierającego 4 zadania.
4. Uczniowie, którzy prześlą rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają na adres prywatny tematy drugiej serii oraz przydzielony im osobisty kod uczestnika. Zadania drugiej serii będą również zamieszczone, od 15 października 2014 r., na stronie internetowej olimpiady astronomicznej: www.planetarium.edu.pl/oa.htm.
5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, do **17 listopada 2014 r.** Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.
6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu, do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyższej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).
7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem:

**Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej
Planetarium Śląskie
41-500 Chorzów, skr. poczt. 10**

w terminach podanych w p. 3 i 5. Decyduje data stempla pocztowego.

8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych, należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.

9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem.

Dodatkowo, do rozwiązań pierwszej serii zadań należy dołączyć wypełnioną ankietę uczestnika, dostępną na stronie internetowej olimpiady:
www.planetarium.edu.pl/oa.htm.

10. Zawody II stopnia odbędą się **12 stycznia 2015 r.** Zawody III stopnia odbędą się w dniach **od 5 do 8 marca 2015 r.**

11. Powiadomienia o zakwalifikowaniu do zawodów kolejnych stopni otrzymają jedynie uczniowie awansujący.

12. O uprawnieniach w przyjmowaniu na wyższe uczelnie laureatów i finalistów olimpiady decydują senaty uczelni. Informacje na ten temat są umieszczane na ich stronach internetowych.

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Pierwsza seria zadań zawodów I stopnia

1. Gwiazda znajdująca się w odległości $d = 25$ pc ma bolometryczną jasność obserwowaną $m = 8^m$ i temperaturę efektywną $T = 4000$ K. W jej widmie linia odpowiadająca długości fali λ wykazuje ekstremalne przesunięcia o $\pm\Delta\lambda$ (symetryczne poszerzenie linii), przy czym $|\Delta\lambda|/\lambda = 10^{-4}$. Zakładając, że oś obrotu gwiazdy jest prostopadła do kierunku widzenia, oblicz okres obrotu tej gwiazdy.

Jako dodatkowe dane liczbowe przyjmij bolometryczną jasność absolutną Słońca $M_S = 4,75^m$ i moc promieniowania Słońca $J_S = 4 \cdot 10^{26}$ W.

2. Księżyc Jowisza Kallisto w czasie opozycji planety osiąga jasność obserwowaną $m_K = 5,65^m$; analogiczne wielkości dla Oberona (księżycza Urana) i Trytona (księżycza Neptuna) przyjmują odpowiednio wartości: $m_O = 13,94^m$ i $m_T = 13,47^m$. Wyznacz stosunki albedo Trytona do albedo Oberona oraz albedo Oberona do albedo Kalisto. Przyjmij następujące wartości promieni księżyców i promieni orbit planet: $r_K = 2410$ km, $r_O = 761$ km, $r_T = 1350$ km, $d_J = 5,203$ au, $d_U = 19,19$ au, $d_N = 30,06$ au.

3. Przypuśćmy, że w serwisach informacyjnych podano wiadomość o pojawieniu się na niebie gwiazdy supernowej, której jasność pozwala dostrzec ją nawet w dzień. Oblicz prawdopodobieństwo, że w Twojej miejscowości gwiazda ta może się znaleźć ponad horyzontem astronomicznym, przyjmując losowość jej położenia na sferze niebieskiej.

4. Dla wstępnej segregacji dużej już liczby danych o planetach pozasłonecznych, pod kątem ich podobieństwa do Ziemi, wprowadzono wskaźnik ESI (*Earth Similarity Index*). Określa on stopień podobieństwa planety do Ziemi, w skali od 0 (brak jakiegokolwiek podobieństwa) do 1 (identyczność z Ziemią). Korzystając z wiarygodnych źródeł internetowych znajdź wzór, którym ESI jest wyrażane i krótko go omów.

Na podstawie znalezionej wzoru oblicz zakres wartości ESI w grupie skalistych planet Układu Słonecznego i porównaj go z wartościami wskaźnika w grupie planet olbrzymów. Otrzymane wyniki porównaj z wartościami tego wskaźnika obliczonymi dla potwierdzonych składników układu planetarnego wokół gwiazdy Gliese 581.

Termin przesłania rozwiązań zadań pierwszej serii upływa 13.10.2014 r.

Zadania obserwacyjne

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. Wykonaną obserwację astronomiczną należy odpowiednio udokumentować.

1. Nad zachodnim fragmentem horyzontu wykonaj zdjęcie nieba w okolicy Arktura (α Boo) tak, by na fotografii widoczny był również fragment widnokregu. Dowolną metodą, np. posługując się programem *Stellarium*, możliwie dokładnie wykreśl na swoim zdjęciu linię horyzontu astronomicznego.

2. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji, prowadzonych w ostatnim roku.

Internetowe zadanie obserwacyjne

3. Kamerą typu „rybie oko”, w Obserwatorium Astronomicznym Uniwersytetu Pedagogicznego na Suhorze ($20,0^\circ$ E; $49,5^\circ$ N), wykonywane są zdjęcia nieba, na bieżąco umieszczane pod internetowym adresem: www.as.up.krakow.pl/images/allsky/allsky.php. W lewym górnym rogu każdego zdjęcia podane są: data i moment jego wykonania oraz czas naświetlania, a w lewym dolnym rogu – kolejny numer zdjęcia.

Na wydruku wybranego zdjęcia zaznacz punkty przecięcia siatki układu horyzontalnego o współrzędnych (A, h) , przy czym $A = n \cdot 30^\circ$ dla $n = 0, 1, 2, \dots, 11$; zaś $h = n \cdot 30^\circ$ dla $n = 0, 1, 2, 3$. Na tym samym wydruku zaznacz punkty kardynalne horyzontu oraz podaj współrzędne horyzontalne widocznych na zdjęciu planet i pięciu najjaśniejszych gwiazd.

Termin przesłania zadania obserwacyjnego upływa 17.11.2014 r.

Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej

Zalecana literatura

- Obowiązujące w szkołach podręczniki do przedmiotów ścisłych.
- H. Chrupała, M. T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych*.
- H. Chrupała, *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach).
- H. Chrupała, J. M. Kreiner, M. T. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami*.
- J. M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką*.
- J. M. Kreiner, *Ziemia i Wszechświat – astronomia nie tylko dla geografów*.
- *Słownik szkolny – Astronomia* (praca zbiorowa).
- *Encyklopedia szkolna – fizyka z astronomią* (praca zbiorowa).
- Atlas nieba.
- Obrotowa mapa nieba.
- Czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Astronomia* oraz inne periodyki popularno-naukowe.
- Poradniki i kalendarze astronomiczne dla obserwatorów nieba.



LXIV Olimpiada Fizyczna

Zadania zawodów I stopnia

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach:

część I – do 10 października br.
część II – do 14 listopada br.

O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II.

Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl>.

Krótką informacją na temat poprawnej redakcji rozwiązań zadań Olimpiady Fizycznej

Zadania powinny być rozwiązane jasno, przejrzysto i czytelnie. Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce papieru. Poszczególne etapy rozumowania należy opisać, a wszelkie zależności fizyczne, które nie są wprost podane w podręcznikach szkolnych – udowodnić. Należy również objaśnić wszelkie oznaczenia występujące w rozwiązaniach zadań. Rysunki mogą być wykonane odręcznie – muszą być jednak przejrzyste i czytelne oraz dobrze opisane w tekście.

Rozumowanie przedstawione w rozwiązaniach nie może zawierać luk logicznych. Każdy krok rozumowania powinien być zwięźle opisany, a przyjęte założenia – klarownie uzasadnione. Rozwlekłość jest uznawana za ujemną cechę pracy.

Rozwiązanie zadania teoretycznego powinno być poprzedzone analizą problemu poruszanego w zadaniu, a zakończone dyskusją wyników. Rozwiązania zadań teoretycznych powinny odnosić się do ogólnej sytuacji opisanej w treści, dane liczbowe (o ile podane) powinny być podstawione dopiero do ostatecznych wzorów.

W zadaniach doświadczalnych należy wyraźnie rozgraniczyć części teoretyczną i doświadczalną. Część teoretyczna zadania doświadczalnego powinna zawierać analizę problemu wraz z wyprowadzeniem niezbędnych wzorów (o ile nie ma ich wprost w podręcznikach szkolnych) oraz sugestię metody doświadczalnej. Część doświadczalna powinna zawierać m.in. opis układu doświadczalnego ilustrowany rysunkiem, opis wykonanych pomiarów, wyniki pomiarów, analizę czynników mogących wpływać na wyniki (jak np. rozpraszanie energii lub opory wewnętrzne mierników), opracowanie wyników wraz z dyskusją niepewności pomiarowych. Wykresy do zadania doświadczalnego powinny być starannie wykonane, najlepiej na papierze milimetrowym. Ocenie podlegają wyłącznie elementy rozwiązania opisane w pracy. W zadaniach doświadczalnych osobno oceniana jest część teoretyczna i część doświadczalna.

W rozwiązaniach można posługiwać się dowolnym układem jednostek, chyba że tekst zadania mówi wyraźnie inaczej.

Część I (termin wysyłania rozwiązań – 10 października 2014 r.)

Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię, adres e-mail oraz adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki.

Podaj i krótko uzasadnij odpowiedź (nawet jeśli w treści zadania znajdują się odpowiedzi do wyboru, uzasadnienie jest wymagane). Za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty.

1. W cylindrycznym naczyniu z wodą pływa piłka. Przez równomiernie rozłożone małe otwory w dnie naczynia zaczęto tłoczyć powietrze.

Jak zmieni się zanurzenie piłki (średnie, bo oczywiście wydobywające się bąbelki powietrza powodują, że powierzchnia cieczy nie jest równa): wzrośnie (a być może nawet piłka utonie), nie zmieni się, czy może zmaleje?

2. Koło rowerowemu nadano prędkość obrotową, tak że bieżnik przesuwają się z prędkością v_0 . Następnie postawiono je na poziomej, szorstkiej powierzchni. Jaka będzie końcowa prędkość ruchu postępowego koła?

Przyjmij, że cała masa koła jest skupiona na jego obwodzie.

Pomiń opór powietrza oraz tarcie toczne i przyjmij, że koło nie zmienia kierunku ruchu oraz, że pozostaje w płaszczyźnie pionowej.

3. W jakiej odległości od brzegu jeziora powinien znajdować się wędkarz o wysokości h , aby pływająca w tym jeziorze rybka nie mogła go zobaczyć?

Powierzchnia wody jest idealnie płaska. Pomiń krzywiznę Ziemi.



Rys. 1

4. Leszek twierdzi, że jeśli wędkarz znajduje się w odległości od brzegu nieco większej niż $h \frac{n}{\sqrt{1-n^2}}$, gdzie h jest wysokością ust wędkarza ponad poziomem wody, a $n = \frac{v_p}{v_w}$ ($v_p \approx 340$ m/s – prędkość dźwięku w powietrzu, $v_w \approx 1500$ m/s – prędkość dźwięku w wodzie) to nawet mała rybka pływająca tuż przy brzegu, tuż pod powierzchnią wody nie słyszy, co on mówi. Kasia natomiast twierdzi, że tak by było, gdyby można było pominąć falowe własności dźwięku, a w tym przypadku nie jest to słuszne. Kto ma rację?

5. Mamy przejechać wózkiem sklepowym przez wysoki próg. W którym przypadku możemy działać mniejszą siłą – w sytuacji a), czy w sytuacji b) (patrz rysunek 1)? Wózek jest równomiernie załadowany zakupami.

6. Marek ma aparat fotograficzny i dwa obiektywy do niego: pierwszy o ogniskowej $f = 17$ mm i liczbie F (stosunek ogniskowej do średnicy otworu, przez który wpada światło) równej 2,8 oraz drugi o ogniskowej $f = 14$ mm i liczbie $F = 3,5$.

Marek chce zrobić zdjęcie grupie przyjaciół w dość ciemnym pomieszczeniu. Którego obiektywu powinien użyć, aby na matrycę aparatu padło (w ustalonym czasie) jak najwięcej światła? Marek zamierza dostosować odległość od przyjaciół do użytego obiektywu tak, by wielkość osób na zdjęciu była taka sama. Przyjaciele stoją obok siebie w jednej linii prostopadłej do osi optycznej aparatu.

7. W adiabatycznie izolowanym pojemniku znajduje się 1 kg pary wodnej o temperaturze 100°C i ciśnieniu normalnym. Do tego pojemnika wrzucono 1 kg lodu o temperaturze 0°C . Wyznacz temperaturę w pojemniku po ustaleniu się stanu równowagi.

Objętość pojemnika zmienia się tak, by ciśnienie w jego wnętrzu pozostało stałe.

8. Ania kupiła sobie soczewkę Fresnela (co to jest soczewka Fresnela, wyszukaj w dostępnych Ci źródłach), aby móc przeczytać tekst napisany drobnym drukiem. Przyglądając się soczewce zauważyła, że widzi w niej odbity, pomniejszony obraz okna znajdującego się za nią. Gdy obróciła soczewkę, zauważyła, że również widzi pomniejszony obraz okna, ale tym razem jest on odwrócony. Wyjaśnij, dlaczego tak się dzieje.

Uwaga: w soczewce można też zobaczyć niepomniejszone odbicie okna, ale tylko z jednej jej strony.

9. W sześciu nieskończonych, równoległych i cienkich przewodach płyną prądy o natężeniu I , przy czym w pięciu w tę samą stronę, a w szóstym w przeciwną. Przewody tworzą krawędzie graniastosłupa prawidłowego o podstawie sześciokąta foremnego o boku a . Jaka jest indukcja magnetyczna B na osi układu (w równej odległości od każdego z przewodów)?

10. Rozważmy wahadło sferyczne, tzn. małe ciało zawieszone na nitce. Przy małych odchyleniach od położenia równowagi

drgania w prostopadłych kierunkach są drganiami harmonicznymi o tej samej częstotliwości i dlatego pionowy rzut toru na płaszczyznę poziomą jest w krzywą zamkniętą zbliżoną do elipsy. Jeśli jednak amplituda drgań w jednym z prostopadłych kierunków będzie wystarczająco duża, drgania w tym kierunku przestaną być harmoniczne i tor nie będzie już krzywą zamkniętą. W pierwszym przybliżeniu ruch będzie można opisać jako złożenie ruchu po krzywej przypominającej wydłużoną elipsę oraz ruchu obrotowego tej krzywej. W którą stronę będzie się obracać ta „wydłużona elipsa” (patrzmy z góry)?

11. Wyobraźmy sobie, że powierzchnia Księżyca została zalana wodą (oceanem). Czy na takim odmienionym Księżycu będą występowały przyływy i odpływy? A jeśli tak, to jak często w danym punkcie na Księżycu będzie przyływ?

Zakładamy, że na Księżycu powstała również atmosfera gwarantująca właściwe ciśnienie i temperaturę (pozostawanie wody w stanie ciekłym).

12. Malarz stojący na szczycie długiej, ciężkiej drabiny zachwiał się i drabina zaczęła się przewracać. Malarz chce zminimalizować skutki upadku (zmniejszyć swoją prędkość w chwili zetknięcia z ziemią) i rozważa dwie możliwości:

- Natychmiastowe zeskoczenie z drabiny.
- Trzymanie się drabiny aż do momentu uderzenia w ziemię.

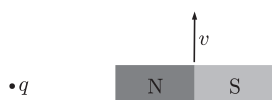
Która z nich jest lepsza?

Przyjmij, że drabina nie ślizga się po podłożu i nie odrywa od niego. Dla uproszczenia możesz też przyjąć, że masa drabiny jest równomiernie rozłożona na całej jej długości, lub że cała masa drabiny jest skupiona w jej środku.

13. W pobliżu spoczywającego, dodatniego ładunku q przesuwa się magnes – patrz rysunek 2. Czy na ładunek działa jakaś siła pochodząca od magnesu, a jeśli tak, to jak jest skierowana?

14. Do lekkiego pręta długości l przymocowano na jednym końcu małą, ale ciężką kulkę. Żongler chce utrzymać pręt w pozycji w przybliżeniu pionowej po postawieniu go na dłoni i w tym celu może wykonywać tylko poziome ruchy ręką. Jak będzie mu łatwiej wykonać zadanie:

- gdy kulka będzie znajdowała się na górze,
- gdy kulka będzie znajdowała się na dole?



Rys. 2

15. Pomiędzy dwiema dużymi, równoległymi płytami jest próżnia. Pierwsza płyta ma temperaturę T_1 , a druga temperaturę T_2 , przy czym $T_1 > T_2$. Mamy dwa rodzaje farb: X i Y . Gdy płytę pomalujemy farbą X , będzie się ona zachowywać jak ciało doskonale szare o współczynniku emisji (względnej zdolności emisyjnej – patrz definicja ciała doskonale szarego poniżej) A_X , a gdy pomalujemy ją farbą Y , będzie się ona zachowywać jak ciało doskonale szare o współczynniku emisji A_Y , przy czym $A_X > A_Y$.

Którą płytę powinniśmy pomalować farbą X , a którą farbą Y , aby przepływ ciepła od płyty cieplejszej

do chłodniejszej był mniejszy? A może ten wybór nie ma znaczenia?

Moc promieniowania fragmentu o powierzchni ΔS ciała doskonale szarego jest określona wzorem $P_{\Delta S} = A \cdot \Delta S \cdot \sigma T^4$, gdzie T jest temperaturą powierzchni w skali Kelvina, σ – stałą Stefana–Boltzmana, a A – pewną stałą (współczynnikiem emisji lub względną zdolnością emisyjną) z zakresu od 0 do 1 charakteryzującą powierzchnię. Jednocześnie ciało doskonale szare pochłania ułamek równy A padającego na nie promieniowania, a odbija (rozprasza) całą resztę.

Część II (termin wysyłania rozwiązań – 14 listopada 2014 r.)

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię, adres e-mail oraz adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy

podać także nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Osoby, które chcą być poinformowane listownie o wynikach kwalifikacji, do pracy powinny dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę z naklejonym znaczkiem.

Zadania teoretyczne

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

T1. Zorganizowano „Zawody w podskokach narciarskich” dla początkujących narciarzy. Zawody odbywają się na górze o kształcie danym wzorem

$$y = \begin{cases} B \cdot x^2 & \text{dla } x \leq 0, \\ -B \cdot x^2 & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

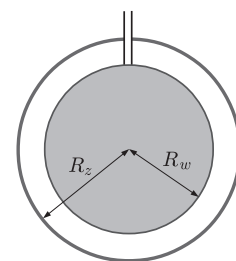
gdzie y jest składową pionową, x – składową poziomą, a B – stałą. Rozbieg zaczyna się na stoku w punkcie $y = H$, a zawodnicy wybijają się w punkcie $y = 0$. Wiadomo, że najlepsi zawodnicy potrafią się wybić na wysokość $y = h$. Niech l oznacza poziomą długość skoku, tzn. miejscem lądowania skoczka jest $x = l$, $y = -Bl^2$.

Wyznacz zależność długości skoku l najlepszego skoczka od wysokości rozbiegu H .

Pomiń wpływ powietrza na ruch skoczka (początkujący narciarze jeżdżą wolno).

indukowałyby się niezerowa siła elektromotoryczna, a to wobec zerowego oporu powodowałyby przepływ prądu o nieskończenie wielkim natężeniu).

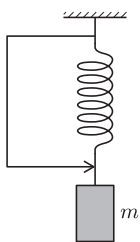
T3. Skroplony gaz jest przechowywany w naczyniu (termosie) składającym się z naczynia wewnętrznego w kształcie kuli o promieniu R_w i naczynia zewnętrznego w kształcie powłoki kulistej o promieniu wewnętrznym R_z – patrz rysunek 4. Środki geometryczne obu naczyń się pokrywają, a między nimi panuje próżnia.



Rys. 4. Przekrój termosu.

Przyjmij, że naczynie zewnętrzne promieniuje jak ciało doskonale czarne, natomiast naczynie wewnętrzne – jak ciało doskonale szare: moc promieniowania jego fragmentu o powierzchni ΔS jest określona wzorem $P_{\Delta S} = A \cdot \Delta S \cdot \sigma T^4$, gdzie T jest temperaturą powierzchni w skali Kelvina, σ – stałą Stefana–Boltzmana, a A – pewną stałą (współczynnikiem emisji lub względną zdolnością emisyjną) z zakresu od 0 do 1 charakteryzującą powierzchnię. Jednocześnie ciało doskonale szare pochłania ułamek równy A padającego na nie promieniowania, a odbija (rozprasza) całą resztę.

a) Wykaż, że jeśli całkowita moc promieniowania wysyłanego do wewnątrz przez naczynie zewnętrzne wynosi P , to moc promieniowania padającego na naczynie wewnętrzne wynosi PS_w/S_z , gdzie S_w jest powierzchnią wewnętrznego naczynia, a S_z – wewnętrzną powierzchnią zewnętrznego naczynia.



Rys. 3. Ciężarek zawieszony na sprężynie. Strzałką oznaczono bezporowoty styk ślizgowy, pozwalający ciężarkowi poruszać się wzdłuż osi pionowej bez tarcia.

T2. Na nieważkiej sprężynie o stałej sprężystości k i długości swobodnej l_0 wisi ciężarek o masie m (patrz rysunek 3). Sprężyna jest wykonana z cienkiego drutu o zerowym oporze tworzącego zwojnicę o liczbie zwojów n ($n \gg 1$), nawiniętą na powierzchni walcowej i zwartą zewnętrznym odcinkiem tego drutu. Promień walca jest równy r , przy czym $r \ll l_0$. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Ciężarek odciągnięto w dół, tak że sprężyna osiągnęła długość l_1 . Natężenie prądu w zwojnicy wynosiło w tym momencie I_1 . Puszczono ciężarek. Jaka będzie długość l_2 sprężyny w chwili zatrzymania się ciężarka w górnym położeniu i ile będzie wynosiło w tej chwili natężenie prądu I_2 ?

Podaj wyniki liczbowe dla $k = 50 \text{ N/m}$, $l_0 = 20 \text{ cm}$, $m = 0,3 \text{ kg}$, $n = 50$, $r = 2 \text{ cm}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $l_1 = 30 \text{ cm}$, $I_1 = 200 \text{ A}$.

Wskazówki:

- Zwoje solenoidu wzajemnie się przyciągają, dlatego na końce solenoidu działa siła skierowana wzdłuż jego osi. Dla długiego solenoidu bez rdzenia, w którym płynie prąd I , siła ta jest równa

$$F_I = \frac{\mu_0 S}{2} \left(\frac{In}{l} \right)^2,$$

gdzie S – pole przekroju solenoidu.

- W przypadku zamkniętego obwodu o oporze zerowym, strumień indukcji magnetycznej B przez ten obwód jest stały w czasie (w przeciwnym przypadku w obwodzie

Wewnętrzne naczynie całkowicie wypełniono skroplonym gazem o gęstości ρ , temperaturze T_w (równej temperaturze wrzenia) i ciepłe parowania c_p . Temperatura otoczenia wynosi T_z .

b) Wyznacz czas t , po jakim cała ciecz w naczyniu odparuje.

Uwaga: Wewnętrzne naczynie jest połączone cienką, pionową rurką z otoczeniem. Przez tę rurkę można nalewać lub wylewać ciecz i przez nią para może się wydostawać na zewnątrz. Ta rurka nie ma wpływu na ilość ciepła dopływającego do naczynia.

Przyjmij, że temperatura zewnętrznego naczynia jest równa temperaturze otoczenia, a wewnętrznego – temperaturze skroplonego gazu.

Podaj wynik liczbowy dla $R_w = 0,2$ m, $R_z = 0,3$ m, $T_z = 300$ K, $T_w = 7$ K, $\rho = 807$ kg/m³, $c_p = 198$ kJ/kg.

T4 (zadanie numeryczne). Dla większości sprężyn siła sprężystości jest proporcjonalna do wydłużenia jedynie w przybliżeniu – bardzo dobrym dla małych wydłużeń, ale gorszym dla dużych. Dokładniejszym opisem tej zależności może być przyjęcie, że siła jest sumą wyrazu proporcjonalnego do wydłużenia sprężyny r oraz wyrazu proporcjonalnego do kwadratu wydłużenia r^2 :

$$F = -kr - br^2.$$

Przyjmijmy, że jeden koniec sprężyny jest unieruchomiony w początku układu współrzędnych $x-y$, a do drugiego

przymocowano ciało o masie m . Ponadto zakładamy, że sprężyna jest nieważka, siła F jest jedyną siłą działającą na to ciało, a także, że długość swobodnej (nierozciągniętej) sprężyny można pominąć w porównaniu z wydłużeniem.

W chwili początkowej $t = 0$, $x = x_0$, $y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = v_{y0}$.

Wyznacz numerycznie tory ruchu tego ciała w przedziale czasu od 0 do 100 s i przedstaw je graficznie dla następujących wartości stałych: $m = 1$ kg, $k = 1$ N/m, $x_0 = 0,5$ m, $v_{y0} = 2$ m/s oraz b równych: 0, 0,1 N/m², -0,1 N/m², 0,2 N/m², -0,2 N/m².

Uwaga: Rozwiązanie powinno zawierać: wzory używane w rozwiązaniu (wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem, jeśli nie są to wzory podane w treści zadania), opis zastosowanego algorytmu, opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz z sposobem zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyników, wykres toru (dokładnie dla czasu podanego w treści zadania) dla każdej z podanych wartości b oraz jakościowe omówienie otrzymanych wyników.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub programów wyznaczających tor lub ruch automatycznie po podaniu wzoru na siłę.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

Zadania doświadczalne

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.

D1. Masz do dyspozycji:

- plastikową buteleczkę o pojemności 20–50 ml,
- elektroniczny termometr z czujnikiem na kablu,
- wodę demineralizowaną,
- zamrażarkę,
- zegarek,
- folię aluminiową, taśmę klejącą.

Wyznacz ciepło właściwe lodu.

Wskazówki:

1. W otoczeniu o temperaturze T_0 , temperatura T przedmiotu pozostawionego w tym otoczeniu wynosi w chwili t

$$T = T_0 + \Delta T_0 \cdot e^{-t/\tau},$$

gdzie ΔT_0 jest różnicą temperatur przedmiotu i otoczenia w chwili $t = 0$, $e = 2,718 \dots$ oznacza podstawę logarytmu naturalnego; $\tau = \alpha \cdot c \cdot m$, c – ciepło właściwe przedmiotu, m – masa przedmiotu, α – pewna stała związana z kształtem i rodzajem powierzchni przedmiotu.

2. Ciepło właściwe wody wynosi $c_w = 4200$ J/(kg · K).

D2. Celem doświadczenia jest zbadanie spadania magnesu w pobliżu pionowej powierzchni, do której magnes jest przyciągany. Masz do dyspozycji:

- magnes neodymowy w kształcie kulki o średnicy 5 mm,
- płaską, pionową powierzchnię (np. stalowe drzwi, bok metalowej szafki, drzwi lodówki, itp.),
- papier milimetry i linijkę,
- taśmę klejącą,
- książki o różnej grubości.

1. Wyznacz czas t spadania magnesu od momentu jego puszczenia do chwili przyłgnięcia do powierzchni, w zależności od początkowej odległości d magnesu od tej powierzchni. Pomiar wykonaj dla możliwie szerokiego zakresu początkowych odległości.
2. Jeżeli siła przyciągania magnesu do powierzchni jest proporcjonalna do $1/d^k$ (gdzie k jest dodatnią liczbą rzeczywistą), to czas t jest w przybliżeniu proporcjonalny do $d^{(k+1)/2}$. Na podstawie przeprowadzonego eksperymentu wyznacz wartość k .

Przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9,81$ m/s². W rozważanej sytuacji wpływ prądów indukowanych na ruch magnesu jest zaniedbywalny.

Uwagi:

- Połknięcie magnesu może być bardzo niebezpieczne!
- Jeżeli nie masz możliwości zdobycia takiego magnesu, do 31 października 2014 r. przyslij na adres KGOF zaadresowaną do siebie kopertę ze znacznikiem.

D3. Pilot do telewizora steruje odbiornikiem za pośrednictwem wiązki niewidzialnego dla oka ludzkiego promieniowania podczerwonego. Mając do dyspozycji

- pilot do telewizora,
- cyfrowy aparat fotograficzny (np. kamerę internetową, aparat w telefonie),
- płytę CD o pojemności 700 MB,
- taśmę klejącą i plastelinę,
- linijkę, papier milimetry i nożyczki,

wyznacz długość fali promieniowania podczerwonego wytwarzanego przez pilot. Przyjmij, że odległość między ścieżkami na płycie CD wynosi $d = 1,55 \pm 0,05$ μm .

Wskazówka: Wybierz aparat, który jest czuły na promieniowanie podczerwone, tzn. może je „zobaczyć”, kiedy skieruje się na niego wiązkę z pilota.



LXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2014 r. – I seria,

3 listopada 2014 r. – II seria,

1 grudnia 2014 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl.



Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Katedra Matematyki Politechniki Rzeszowskiej, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

(1 września 2014 r. –
– 30 września 2014 r.)

1. Dane są takie liczby całkowite a, b i c różne od zera, że liczba

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

jest całkowita. Wykazać, że iloczyn abc jest sześcianem liczby całkowitej.

2. Dodatnie liczby całkowite x_1, x_2, \dots, x_n spełniają warunek

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = s < 2n.$$

Udowodnić, że każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, s\}$ jest sumą pewnych spośród liczb x_1, x_2, \dots, x_n .

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita $n \geq 1$, że liczba

$$\sqrt[n]{\sqrt{2} + 1} + \sqrt[n]{\sqrt{2} - 1}$$

jest wymierna.

4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB \neq AC$. Punkty E i F są spodkami wysokości tego trójkąta opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C . Punkty M i N są środkami odpowiednio odcinków BC i EF , a punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AMN . Dowieść, że proste AQ i BC są równoległe.

II seria

(1 października 2014 r. –
– 3 listopada 2014 r.)

5. Rozwiązać w liczbach całkowitych x i y równanie

$$x^4 - 2x^3 + x = y^4 + 3y^2 + y.$$

6. Dany jest trójkąt ABC , w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C , a okrąg wpisany w dany trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach E i F . Wykazać, że punkt przecięcia wysokości trójkąta AEF jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD .

7. Dany jest czworościan $ABCD$. Płaszczyzna przechodząca przez punkty styczności sfery s wpisanej w ten czworościan ze ścianami ABD , BCD i ACD przecina krawędzie AD , BD i CD odpowiednio w punktach A' , B' i C' . Udowodnić, że środek sfery wpisanej w czworościan $A'B'C'D$ leży na sferze s .

8. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą k o następującej własności:
Wśród dowolnych k różnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ mających parzystą liczbę elementów istnieją dwa różne podzbiory, których część wspólna ma parzystą liczbę elementów.

III seria

(4 listopada 2014 r. –
– 1 grudnia 2014 r.)

9. Nieujemne liczby rzeczywiste x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 2$) spełniają równość $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Udowodnić, że

$$\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cdot \left(1 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{x_i, x_j\}\right) \geq 1.$$

10. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, c i d , że dla każdej liczby naturalnej n liczba $an + b$ jest podzielna przez liczbę $cn + d$. Wykazać, że istnieje liczba naturalna k , dla której $a = kc$ i $b = kd$.

11. Dany jest trójkąt ABC , w którym $BC < CA < AB$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC , CA i AB odpowiednio w punktach D , E i F , a punkty K , L i M są środkami odpowiednio boków BC , CA i AB . Proste DE i KL przecinają się w punkcie P , a proste DF i KM – w punkcie Q . Dowieść, że punkty A , P i Q leżą na jednej prostej.

12. Na płaszczyźnie zaznaczono wierzchołki 2014-kąta foremego. Dwaj gracze na przemian dorysowują nowy bok albo nową przekątną tego wielokąta. Gracz przegrywa grę, jeżeli po jego ruchu dla każdego wierzchołka v dowolne dwa spośród pozostałych wierzchołków można połączyć łamaną złożoną z narysowanych odcinków, nie przechodzącą przez wierzchołek v . Rozstrzygnąć, który z graczy – rozpoczynający grę czy jego przeciwnik – ma strategię wygrywającą.

Czy stado słoń jest stadem zwierząt? O kowariancji i kontrawariancji

Paweł LIPSKI*

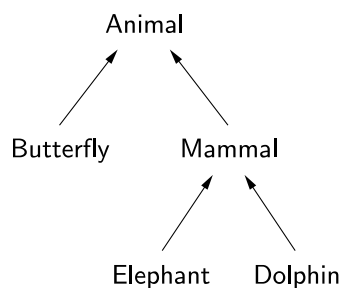
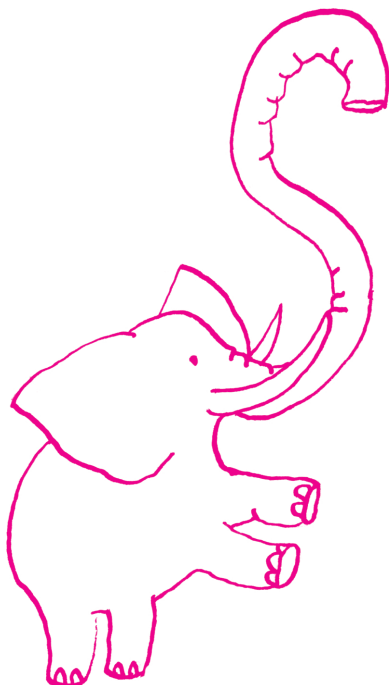


Diagram klas dla zamieszczonego kodu, w którym strzałkami zaznaczono relację dziedziczenia.



Rozwiązanie zadania M 1434.

Niech a , b , c oznaczają liczbę głównych przekątnych odpowiednio o dwóch końcach czerwonych, o dwóch końcach niebieskich i o końcach w różnych kolorach. Ponieważ każdy wierzchołek jest końcem dokładnie jednej głównej przekątnej, więc mamy $2a + c$ czerwonych wierzchołków i $2b + c$ niebieskich. Ponieważ liczby te są równe, otrzymujemy $a = b$.

Informatycy wiedzą, że odpowiedzi na pewne z pozoru filozoficzne pytania wcale nie tak trudno znaleźć. Wystarczy napisać i uruchomić odpowiedni kod. W taki też sposób podejmiemy do problemu postawionego w tytule artykułu.

Na wstępie powiedzmy sobie trochę o *programowaniu obiektowym* – to właśnie z jego pomocą będziemy modelować w kodzie tytułowe „stada”, „słonie” i inne „zwierzęta”. Zapewne spora grupa czytelników spotkała się z programowaniem obiektowym, choćby przy okazji używania kontenerów STL w języku C++, często używanych w rozwiązaniach zadań olimpijskich.

Najogólniej, *Object-Oriented Programming* (OOP) jest paradygmatem programowania. Jego podstawowymi pojęciami są *klasy* i *obiekty*. Klasę możemy rozumieć jako typ danych. Klasami mogą być np. zwierzę, ssak, słoń, delfin – rozumiane jako *rodzaje* istot żywych, a nie jako *konkretni przedstawiciele* tych rodzajów. Obiektem klasy słoń natomiast będzie np. Jumbo – a więc pewien konkretny przedstawiciel tego gatunku. Jumbo (i generalnie każdy słoń) *jest* w ogólności także ssakiem. I dalej, każdy ssak *jest* w ogólności zwierzęciem.

Ta relacja „*jest*” mówi nam o *dziedziczeniu*. Jeśli każdy obiekt klasy *Elephant* jest także obiektem klasy *Mammal*, to mówimy, że klasa *Elephant* *dziedziczy* z klasy (albo inaczej: *rozszerza* klasę) *Mammal*.

Przełożmy teraz te dywagacje na kod (patrz też rysunek):

```
class Animal {
    def move { ... }
}
class Butterfly extends Animal {
    def fly { ... }
}
class Mammal extends Animal {
    def feedYoung { ... }
}
class Elephant extends Mammal {
    def trumpet { ... }
}
class Dolphin extends Mammal {
    def swim { ... }
}
```

Powyższy fragment kodu, jak i wszystkie kolejne, są napisane w języku programowania Scala. Język ten powstał jako następca szeroko używanego języka Java. Dowolnej biblioteki napisanej w Javie można użyć z poziomu kodu źródłowego w Scali. Scala zapewnia bardzo dokładną kontrolę poprawności kodu (zwłaszcza poprawności typów – jest tzw. *type-safe language*) na etapie kompilacji, dzięki czemu można uniknąć wielu błędów powstających już po uruchomieniu programu.

Oprócz słów kluczowych *class* i *extends*, deklarujących klasy i ich relacje dziedziczenia, używamy też słowa kluczowego *def*. Służy ono ogólnie do definiowania funkcji, a w tym przypadku dokładniej *metod klas*. Metody można rozumieć jako „osobiste” funkcje obiektów klasy. Jeśli mamy obiekt *animal* klasy *Animal*, to możemy na nim wywołać metodę *animal.move()*. Dzięki dziedziczeniu metoda *move* może zostać wywołana również na obiekcie klasy *Mammal* lub *Elephant* (choć co dokładnie zrobi obiekt po wywołaniu tej metody, zależy od tego, jak zostanie ona zaimplementowana w odpowiedniej klasie). Natomiast na obiekcie klasy *Butterfly* nie można wywołać metody *feedYoung* ani *trumpet*. W powyższych przykładach wnętrza metod pozostawiliśmy jednak niezdefiniowane, bo nie będą miały one dla nas większego znaczenia.

*student, Katedra Informatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków



Rozwiązanie zadania M 1433.

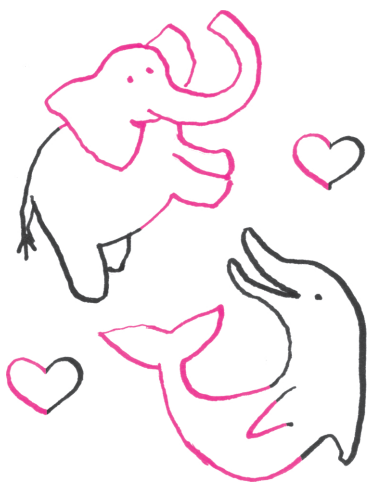
Mamy $f(x) = (x - b/2)^2 + c - b^2/4$.
 Możemy bez utraty ogólności przyjąć
 więc, że $b = 0$ (zmiana wartości
 parametrów na $c = c + b^2/4$ oraz $b = 0$
 przesuwa wykres w poziomie, co
 nie zmienia zbioru A). Mamy kilka
 przypadków.

1. $c > 1$; wtedy $A = \emptyset$.

2. $1 \geq c \geq -1$; wtedy A jest odcinkiem
 $[-\sqrt{1-c}, \sqrt{1-c}]$ o długości
 $2\sqrt{1-c} \leq 2\sqrt{2}$.

3. $c < -1$; wtedy $A = -I \cup I$, gdzie
 $I = [\sqrt{-1-c}, \sqrt{1-c}]$. Łączna długość
 tych dwóch odcinków wynosi

$$2(\sqrt{1-c} + \sqrt{-1-c}) = \frac{4}{\sqrt{1-c} + \sqrt{-1-c}} \leq \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$



Nowy obiekt tworzymy za pomocą słowa kluczowego `new`. Obiekty są w Javie i Scali przekazywane do funkcji przez referencję (sposób podobny do przekazania przez wskaźnik w C++), a więc przy wywołaniu nie jest tworzona żadna lokalna kopia. Ponadto, jeśli mamy obiekt klasy `Dolphin`, `Mammal`, `Butterfly` czy ogólnie klasy dziedziczącej po `Animal`, to możemy go przekazać do funkcji, która oczekuje obiektu klasy `Animal`. Dzięki dziedziczeniu obiekty klasy bardziej specyficznej nadal są obiektami klasy bardziej ogólnej:

```
def playWith(m: Mammal) { ... }
var elephant = new Elephant
var butterfly = new Butterfly
playWith(elephant)           - w porządku, słoń jest ssakiem
playWith(butterfly)          - błąd! motyl nie jest ssakiem
```

Przejdźmy teraz do *generyków*. Jest to mechanizm bardzo podobny do wzorców (*templates*) znanych z STL. Najlepiej wyjaśni przykład:

```
class Herd[T] {
  def getLatestMember: T = { ... }
  def addMember(x: T) { ... }
}
```

Mamy stado, które może trzymać obiekty dowolnego typu (niekoniecznie nawet dziedziczące po klasie `Animal`). Metoda `getLatestMember` zwraca ostatnio dodanego (za pomocą metody `addMember`) członka stada. Możemy stworzyć stado słoń (wywołując `new Herd[Elephant]`) i takie stado może przechowywać słonie, ale nie można do niego dołożyć np. delfina. Możemy stworzyć stado zwierząt (wykonując `new Herd[Animal]`) i takie stado może trzymać dowolne zwierzę (a więc zarówno słonie, jak i delfiny), ale nie można do niego dodać np. łańcucha znaków (obiekту klasy `String`).

Teraz widać już powoli, do czego zmierzamy. Jeśli mamy klasę `Herd` (albo dowolny inny generyk, np. `List`, `Vector`, `Set` itp.) obiektów klasy `Elephant`, to czy jest on w ogólności obiektem klasy `Herd[Mammal]`? Czy przekazanie `Herd[Elephant]` do funkcji, która oczekuje `Herd[Mammal]`, będzie poprawne i bezpieczne?

Załóżmy, że tak faktycznie jest i że stado słoń *jest* stadem ssaków, a w ogólności klasa `Herd[Y]` jest `Herd[X]` dla typu `Y` dziedziczącego po `X`. Zobaczmy, co się stanie w poniższym kodzie (w `wakeLatestMember` jest zwykłą funkcją, nie metodą):

```
def wakeLatestMember(herd: Herd[Mammal]) {
  herd.getLatestMember().feedYoung()
}
var elephantHerd = new Herd[Elephant]
elephantHerd.addMember(new Elephant)
wakeLatestMember(elephantHerd)
```

Kiedy uruchomimy funkcję `wakeLatestMember` na ostatnio dodanym do `elephantHerd` ssaku (czyli słoniu), zostanie wywołana metoda `feedYoung` – jest to zupełnie w porządku, bo słonie są ssakami.

Jest jednak druga strona medalu. Skoro `elephantHerd` jest stadem ssaków, powinniśmy móc do niego dodać *zupełnie* dowolnego ssaka.

```
def addDolphin(herd: Herd[Mammal]) {
  herd.addMember(new Dolphin)
}
```

W funkcji `addDolphin` parametr `herd` jest przekazywany przez referencję, więc dodawany delfin pozostanie w stadzie po zakończeniu działania funkcji.

Gdybyśmy teraz uruchomili `addDolphin(elephantHerd)`, to na pierwszy rzut oka nie byłoby problemu. Jednak wywołajmy teraz

```
elephantHerd.getLatestMember().trumpet()
```

Jest to jak najbardziej dozwolone – w końcu `elephantHerd` jest `Herd[Elephant]`, stadem słoń. Tymczasem okazuje się, że `getLatestMember` zwróci... delfina! Próba zawołania `trumpet` na obiekcie klasy `Dolphin` skończyłaby się błędem. (W istocie kompilator Scali uzna taki kod za niepoprawny.)

Spróbujmy więc z drugiej strony – załóżmy, że stado zwierząt (tak, *dowolnych* zwierząt!) jest stadem słoń. Każdy obiekt klasy `Herd[Animal]` musiałby w ogólności być obiektem `Herd[Elephant]`. Generalnie, przyjmijmy, że `Herd[Y]` jest `Herd[X]` wtedy i tylko wtedy, gdy `X` jest (dziedziczy po) `Y`. Wydaje się to z pozoru absurdalne, ale może akurat okaże się, że takie założenie nie prowadzi do błędów?

```
var animalHerd = new Herd[Animal]
addDolphin(animalHerd)
```

Funkcja `addDolphin` wymaga parametru typu `Herd[Mammal]`, a zgodnie z naszym założeniem `Herd[Animal]` jest `Herd[Mammal]`. Teraz nie ma żadnego problemu – `addDolphin` dodaje do stada delfina.

Po powrocie z `addDolphin` możemy bezpiecznie wywołać

```
animalHerd.getLatestMember().move()
```

Jednak taki sposób dziedziczenia ma poważny mankament. Spójrzmy jeszcze raz na funkcję `wakeLatestMember`. Zgodnie z nową logiką możemy do niej przekazać obiekt klasy `Herd[Animal]` – np. stado składające się z jednego motyla:

```
var butterflySwarm = new Herd[Animal]
butterflySwarm.addMember(new Butterfly)
wakeLatestMember(butterflySwarm)
```

Skutek jest prosty: wewnątrz `wakeLatestMember` będziemy chcieli wywołać `feedYoung` na motyłu! Znowu spowodowałoby to błąd w czasie wykonania programu, więc kompilator Scali zaprotestuje.

Gdybyśmy się zgodzili na dziedziczenie w którąkolwiek stronę między `Herd[Animal]` a `Herd[Elephant]`, mogłyby się zdarzyć (nieraz trudne do przewidzenia!) błędy czasu uruchomienia. W takiej sytuacji mówimy o klasie `Herd[T]`, że jest ona **inwariantna** w typie `T`.

Nie musi jednak być tak zawsze. (Reguły, które teraz podamy, są uproszczone – od razu mówię, że nie uwzględniamy one wszystkich przypadków.)

Gdybyśmy tak zmienili klasę `Herd[T]`, że nie byłoby w niej żadnej metody przyjmującej parametr typu `T` (lub generyka zawierającego `T`, np. `List[T]`), to okazałoby się, że `Herd[Elephant]` faktycznie jest `Herd[Animal]`! Przypomnijmy sobie – gdy stado słońi było stadem zwierząt, problem pojawiał się tylko przy metodzie *przyjmującej* obiekt typu `T`, a nie tej *zwracającej* obiekt typu `T`.

```
class CovariantHerd[+T] {
  def getLatestMember(): T = { ... }
  def getMaleMembers(): List[T] = { ... }
}
```

Mówimy, że klasa `CovariantHerd` jest **kowariantna** w typie `T`. Język Scala (przeciwnie niż Java i C++) pozwala wprost zadeklarować, że `CovariantHerd[Y]` dziedziczy po `CovariantHerd[X]` dla `Y` dziedziczącego po `X`. Służy do tego znak plus przed nazwą typu w deklaracji klasy. Kompilator musi jeszcze, oczywiście, zweryfikować, czy aby na pewno taka kowariancja nie doprowadzi do potencjalnych błędów.

Z drugiej strony, gdyby żadna metoda nie zwracała obiektu typu „zawierającego” typ `T`, to wtedy okazałoby się, że `Herd[Animal]` jest `Herd[Elephant]`.

```
class ContravariantHerd[-T] {
  def addMember(x: T) { ... }
  def removeMember(x: T) { ... }
}
```

Klasa `ContravariantHerd` jest **kontrawariantna** w typie `T` – sygnalizujemy to minusem przed `T`.

Często zdarza się, że klasa jest kowariantna w jednym typie, a kontrawariantna w drugim. Spójrzmy:

```
class Person { ... }
class Professor extends Person { ... }
class Publication { ... }
class Article extends Publication { ... }
def extractAuthors(func: Article => Person) { ... }
```

Powyższa składnia oznacza, że `extractAuthors` jako parametr przyjmuje funkcję. Jeśli teraz mamy funkcję, która dla danej publikacji zwraca obiekt profesora, który ją napisał:

```
def whose(p: Publication): Professor = { ... }
```

to możemy ją użyć jako parametr do funkcji pobierającej autorów: `extractAuthors(whose)`. Wszystko się zgadza – jeśli funkcja `whose` zostanie wywołana wewnątrz `extractAuthors`, to w parametrze podany zostanie jej pewien artykuł (który zawsze jest publikacją), a zwróci pewnego profesora (który zawsze jest osobą). Funkcja zwracająca profesora dla publikacji jest więc funkcją zwracającą osobę dla artykułu. Ogólnie, funkcje (w pewnym uproszczeniu w Scali to „obiekty klasy `Function`”) są kontrawariantne w typie parametru i kowariantne w typie zwracanym.

Mówiliśmy, że wcześniej podane reguły są uproszczone. Spójrzmy na przypadek, w którym przestają działać:

```
class Node[T, U, V] {
  def handle(item: T, next: Node[V, U, T]):
    Node[Node[V, U, T], U, V] = { ... }
}
```

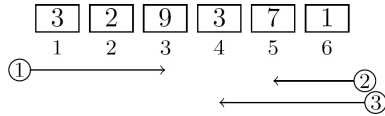
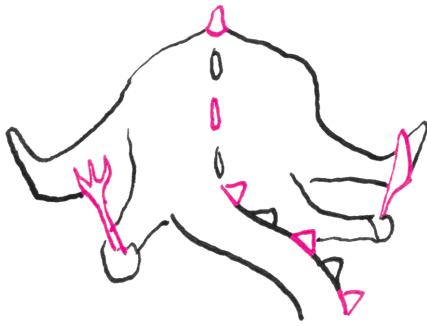
Ciężko na pierwszy rzut oka określić, jaka jest właściwie wariancja typów `T`, `U` i `V`. Po sprawdzeniu, z jakimi kombinacjami `+` i `-` przy `T`, `U`, `V` kod się kompiluje, okazuje się, że klasa `Node` w typie `T` jest kontrawariantna, w typie `U` – inwariantna, a w typie `V` – kowariantna.

Kompilator zgodzi się na deklarację `Node[-T, U, +V]`, ale przy deklaracji `Node[-T, -U, +V]` stwierdzi, że minus przy `U` może doprowadzić do błędów w czasie działania programu. Notabene, `Node[-T, U, V]` albo `Node[T, U, V]` też są poprawne – nie spowodują błędów, jedynie niepotrzebnie ograniczą relacje dziedziczenia.

Gdy już oznaczymy typy w deklaracji klasy jako `-T`, `U` oraz `+V`, do funkcji przyjmującej parametr typu `Node[Article, String, Person]` można przekazać parametr typu np. `Node[Publication, String, Professor]`.

Te wnioski nie zgadzają się z tym, co mówiliśmy wcześniej – np. w `V` klasa jest kowariantna, a mimo to `V` pojawia się w typie parametru (`next`). Dokładne kryteria są w istocie dosyć złożone (a momentami nawet zaskakujące). Nie sposób ich tutaj jednak wyjaśnić – potrzebny byłby zapewne kolejny artykuł.

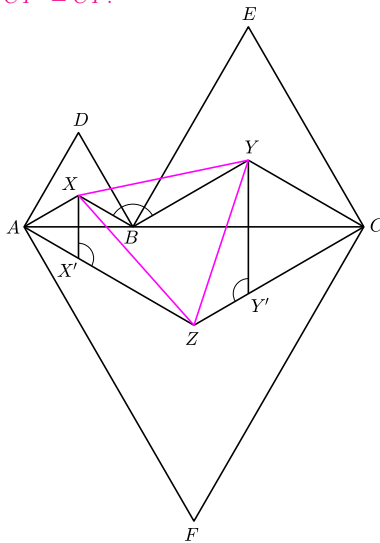
Trzymając się naszych uproszczonych reguł, wróćmy do tytułowego pytania. Odpowiedź można ująć tak: stado słońi *jest* stadem zwierząt, ale tylko wtedy, gdy nie przyjmuje żadnych obcych przybyszów. Ciekawy wniosek, czyż nie?



Jeśli mamy $n = 6$ pastwisk jak powyżej (liczba owiec w prostokątach), to jeden z optymalnych planów smoka jest następujący: pożera on 9 owiec z trzeciego pastwiska (płosząc 5 owiec z pierwszych dwóch pastwisk), następnie zjada 6 owiec z piątego pastwiska i w końcu 1 owcę z czwartego pastwiska.



Rozwiązanie zadania M 1432. Niech X' będzie takim punktem na odcinku AZ , że $AX' = AX$ oraz niech Y' będzie takim punktem na odcinku CZ , że $CY' = CY$.



Ponieważ $\sphericalangle XAZ = 60^\circ$, więc trójkąt AXX' jest równoboczny. Podobnie trójkąt YCY' jest równoboczny. Zauważmy, że

$$\sphericalangle XBY = \sphericalangle XX'Z = \sphericalangle YY'Z = 120^\circ.$$

Skoro $AB + BC = CA$, to $AX + CY = AZ$, więc $X'Z = Y'Y = BY$, $ZY' = X'X = XB$. Zatem trójkąty $XB Y$, $XX'Z$, $ZY'Y$ są przystające (cecha bbk). W szczególności $XY = YZ = ZX$.

Informatyczny kącik olimpijski (75): Smok i owce

Tym razem zadanie *Smok* z Akademickich Mistrzostw Polski w Programowaniu Zespołowym 2005, które odbyły się na Uniwersytecie Jagiellońskim. W długiej i głębokiej dolinie znajduje się n kolejno położonych pastwisk, na i -tym z nich pasie się $a[i]$ owiec. Każdego dnia dolinę może nawiedzić smok i pożreć owce z jednego pastwiska. Smok musi zawsze lecieć wzdłuż doliny (ale może wybrać, z której strony przyleci danego dnia), a z każdego pastwiska, nad którym przeleci, wszystkie owce uciekają. Ponadto pod koniec każdego dnia liczebność owiec (czy to z powodu wilków, czy pogłosek o smokach) na każdym pastwisku zmniejsza się o jeden. Należy obliczyć, ile maksymalnie owiec uda się pożreć smokowi (patrz rysunek).

Zauważmy, że niezależnie od poczynań smoka pastwiska, które nie zostały przez niego odwiedzone (tzn. owce na tych pastwiskach nie zostały przez niego ani pożarte, ani spłoszone), leżą w spójnym fragmencie doliny. To sugeruje następujące rozwiązanie dynamiczne: wypełniamy tabelkę, w której $d[i, j, k]$ oznacza maksymalną liczbę pożartych owiec, jeśli pastwiska nieodwiedzone leżą w przedziale $[i, j]$, a smok wykonuje k -ty lot. Pomijając przypadki brzegowe, następująca rekurencja pozwala wyznaczyć tabelkę w czasie $O(n^3)$:

$$d[i, j, k] = \max(d[i + 1, j, k], d[i, j - 1, k], \\ \max(0, a[i] - k + 1) + d[i + 1, j, k + 1], \\ \max(0, a[j] - k + 1) + d[i, j - 1, k + 1]).$$

Widać, że problemy smoka są dwa: które pastwiska wybrać i w jakiej kolejności je odwiedzać. Załóżmy, że w pewnym optymalnym rozwiązaniu smok odwiedza kolejno pastwiska o numerach i_1, i_2, \dots, i_k . Ponieważ na każdym z nich się posili, zatem $a[i_j] \geq j$, i w sumie zje $A = \sum_{j=1}^k (a[i_j] - j + 1)$ owiec. A czy istnieje inna kolejność, w której może on odwiedzać te pastwiska? Zauważmy, że liczba owiec z pastwiska i_j , które *nie* zostaną pożarte przez smoka, wynosi $j - 1$, zatem w sumie nie pożre on $\binom{k}{2}$ owiec. Ale jeśli smok nie będzie latał kompletnie bez sensu (tzn. nie będzie płoszył owiec na pastwiskach i_1, \dots, i_k), to po j -tym przelocie liczba owiec zmniejszy się *co najwyżej* o $k - j$, zatem w sumie zmniejszy się co najwyżej o $\binom{k}{2}$. Zatem, odwiedzając pastwiska np. w kolejności od prawej do lewej, smok zje co najmniej A owiec, czyli tyle, ile w rozwiązaniu optymalnym.

To pozwala nam uprościć i przyspieszyć nasze rozwiązanie dynamiczne do działającego w czasie $O(n^2)$, rozważając jedynie przedziały postaci $[1, j]$:

$$d[j, k] = \max(d[j - 1, k], \max(0, a[j] - k + 1) + d[j - 1, k + 1]).$$

Spróbujmy podejść do problemu jeszcze inaczej. Załóżmy przez chwilę, że smok swoim lotem nie straszy owiec. Może wtedy odwiedzać pastwiska w dowolnej kolejności, zatem naturalne jest, że opłaca mu się zastosować strategię zachłanną i zaczynać od pastwisk, na których owiec jest jak najwięcej. Niech i_1, i_2, \dots, i_n będzie ciągiem numerów pastwisk uporządkowanym nierosnąco względem liczby owiec, tzn. $a[i_1] \geq a[i_2] \geq \dots \geq a[i_n]$. Zachłanny smok pożre

$$A_* = \sum_{j=1}^n \max(0, a[i_1] - j + 1)$$

owiec i będzie ucztował na pastwiskach i_1, \dots, i_k , gdzie k jest ostatnim indeksem, dla którego $a[i_k] - k + 1 > 0$. Ale, jak udowodniliśmy wcześniej, odwiedzając pastwiska ze zbioru $\{i_1, \dots, i_k\}$ w kolejności od prawej do lewej, smok pożre co najmniej A_* owiec i nie spłoszy żadnej owcy z tego zbioru. Zatem A_* jest optymalną liczbą pożartych owiec, a do jej wyznaczenia wystarczy posortować dane na wejściu ciąg, co można zrobić w czasie $O(n \log n)$.

Okazuje się, że powyższe zadanie można uogólnić, a rozwiązanie nadal będzie działać. Jeśli przedstawimy dolinę jako graf nieskierowany, w którym wierzchołki oznaczać będą pastwiska, a krawędzie łączące będą te z nich, pomiędzy którymi może przelecieć smok, to dostaniemy graf o jednej ścieżce. Możemy więc zamiast niego rozważyć dowolny graf nieskierowany. To było treścią zadania *Godzilla* z Obozu Naukowo-Treningowego im. A. Kreczmara w 2010 roku.

Tomasz IDZIASZEK

Nieopisany mangan

Tlen stanowi (objętościowo) 0,209(4) ziemskiej atmosfery. Tlenu rozpuszczonego w oceanach jest (wagowo) 120 razy mniej. Spalenie wszystkich znanych zasobów węgla i węglowodorów zredukowałoby stężenie tlenu w atmosferze tylko o około 80 punktów bazowych, czyli do około 0,201 (rachunek ten nie uwzględnia jednak węglowodorów uwieczonych w łupkach) [1].

Cały cząsteczkowy tlen jest ubocznym produktem fotosyntezy. Proces ten uwolnił w ciągu dwóch ostatnich miliardów lat rząd wielkości więcej tlenu, niż wynoszą jego obecne zasoby. Powstało przy tym odpowiednio dużo materii organicznej, która została uwięziona przede wszystkim w łupkach. Tlen ten w większości został zużyty na utlenianie wietrzących się skał [1].

Mniej więcej taki jak obecnie poziom stężenia tlenu został osiągnięty około 550 milionów lat temu, co odpowiada początkowi fanerozoiku (eonu), paleozoiku (ery) i kambriu (okresu). Poziom ten jest mniej więcej stały przez cały ten (nadal trwający) eon, choć uczeni badają i dyskutują, co konkretnie to „mniej więcej” oznacza i dlaczego się utrzymuje. Niektóre modele [2] wskazują na podniesienie się stężenia tlenu do około 0,3 w karbonie (około 300 milionów lat temu), wywołane prawdopodobnie wyjątkowym rozwojem roślinności (z tego okresu pochodzą znane złoża węgla kamiennego).

Praktycznie cały tlen powstał poprzez rozkład wody przez sinice, zarówno te funkcjonujące samodzielnie, jak i te będące organellami roślin – chloroplastami (zgodnie z teorią endosymbiozy). Wiemy również, że choć barwników zdolnych do wychwytywania fotonów jest wiele, to pomysł Przyrody na rozkład wody na cząsteczkowy tlen oraz wodór (który jest od razu magazynowany głównie w węglowodanach) jest tylko jeden. Tzw. kompleks rozkładający wodę (ang. *water splitting complex* lub *oxygen evolving complex OEC*), który znajduje się w każdym tzw. foto-układzie II (ang. *PS II*) każdego znanego fotosyntetyzującego organizmu na Ziemi, wykorzystuje atomy manganu, a konkretnie układ (enzym) CaMn_4O_5 .

Nie udało się jeszcze w pełni wyjaśnić, dlaczego akurat ten sposób na rozkład wody jest tak efektywny. Mangan jest metalem przejściowym (w tablicy Mendelejewa jest pomiędzy chromem i żelazem, a nad nim jest technet). Jest dość powszechnym pierwiastkiem. W związkach chemicznych występuje na 11. stopniach utlenienia (od -3 do $+7$).

Katalizatory manganowe są nieefektywne w wodzie o neutralnym pH. Okazuje się, że kluczem do zwiększenia ich reaktywności jest umożliwienie jednoczesnego odebrania pary elektron-proton (ang. *proton-coupled electron transfer PCET*) w miejsce reakcji dwustopniowej. Udało się to uzyskać poprzez dodanie pirydyny (lub jeszcze lepiej działających jej pochodnych) jako akceptora protonu (wodoru). Dzięki temu efektywność reakcji za pomocą elektrody MnO_2 wzrosła o rząd wielkości [3].

Nadal jednak jesteśmy daleko od zrozumienia, jak działa enzym CaMn_4O_5 . Wiadomo, że dzięki wykorzystaniu energii kolejnych fotonów przechodzi cyklicznie przez pięć stanów oznaczanych od S_0 do S_4 . W kolejnych stanach atomy manganu są na coraz wyższych stopniach utlenienia, aż w końcu, powracając do stanu S_0 , utleniają tlen z cząsteczki wody, zabierając mu elektrony. Można by było się temu zjawisku przyjrzeć za pomocą promieniowania rentgenowskiego. Niestety, promieniowanie to dezintegruje badany obiekt. Trudność tę udało się przezwyciężyć, wykorzystując ultrakrótkie, femtosekundowe impulsy generowane przez tzw. laser na swobodnych elektronach LCLS (ang. *Linac Coherent Light Source*) działający w SLAC (Stanford, USA).

Fotografowany był tzw. stan ciemny (S_1) oraz stan po wzbudzeniu dwoma impulsami zwykłego światła (przypuszczalny stan S_3). Wykonano około stu tysięcy takich rentgenogramów. Ich statystyczna analiza po raz pierwszy pozwoliła na uzyskanie obrazu zmiany konfiguracji elektronowej badanego obiektu [4].

Publikacje [3] i [4] to tylko ostatnie dwa przykłady prac wglębiających się w rolę manganu dla życia na naszej planecie. Badania te mogą równocześnie prowadzić do efektywniejszych metod pozyskiwania tzw. czystej energii.

Piotr ZALEWSKI

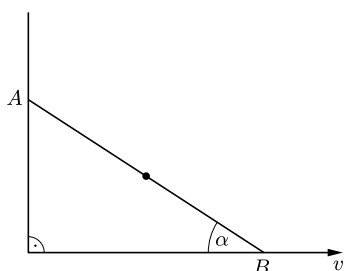
- [1] E.K. Duursma, M.P.R.M. Boisson; *Global oceanic and atmospheric oxygen stability considered in relation to the carbon cycle and to different time scales; Oceanologica Acta* **17**, 117–141, luty 1994.
- [2] R.A. Berner; *Atmospheric oxygen over Phanerozoic time; Proc. Natl. Acad. Sci. (USA)* **96**, 10955–10957, wrzesień 1999.
- [3] A. Yamaguchi, R. Inuzuka, T. Takashima, T. Hayashi, K. Hashimoto oraz R. Nakamura; *Regulating proton-coupled electron transfer for efficient water splitting by manganese oxides at neutral pH; Nature Communications*, czerwiec 2014, doi: 10.1038/ncomms5256.
- [4] Ch. Kupitz, Sh. Basul i inni; *Serial time-resolved crystallography of photosystem II using a femtosecond X-ray laser; Nature*, lipiec 2014, doi: 10.1038/nature13453.

Skrót regulaminu

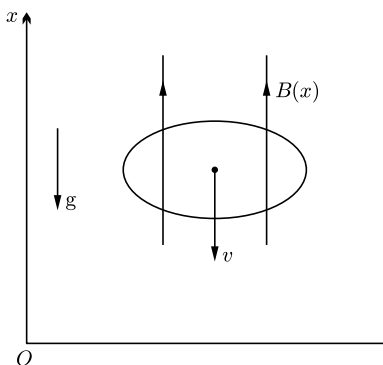
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



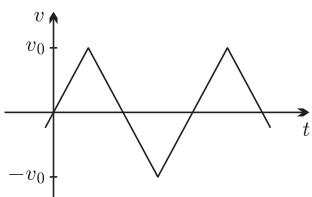
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2014



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zadania z fizyki nr 582, 583

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

582. W środku nieważkiego pręta o długości $2l$ przyczepiona jest mała kulka o masie m . Pręt porusza się jak na rysunku 1. Koniec B pręta porusza się w kierunku poziomym ze stałą prędkością v , koniec A porusza się wzdłuż pionowej ściany. Jaką siłę reakcji wywiera pręt na kulkę, gdy tworzy z poziomem kąt $\alpha = \pi/4$?

583. Metalowy pierścień o promieniu l i oporze R spada pod działaniem siły ciężkości w polu magnetycznym. Wartość wektora indukcji magnetycznej w kierunku pionowym zmienia się z wysokością zgodnie ze wzorem $B(x) = B_0(1 - \alpha x)$, gdzie stała α jest dodatnia (rys. 2). Znaleźć zależność siły hamującej ruch pierścienia od jego prędkości. Płaszczyzna pierścienia pozostaje prostopadła do linii pola magnetycznego.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2014

Przypominamy treść zadań:

578. Ciało znajduje się na desce nachylonej pod kątem α do poziomu. Deska wykonuje podłużne oscylacje: jej prędkość zmienia się z dużą częstotliwością w sposób przedstawiony na rysunku 3. Znaleźć średnią prędkość ciała, wiedząc, że amplituda zmian prędkości wynosi v_0 , a współczynnik tarcia ciała o deskę jest równy μ .

579. Reakcja jądrowa $^{14}\text{N} + ^4\text{He} \rightarrow ^{17}\text{O} + ^1\text{p}$ może zachodzić, gdy energia kinetyczna cząstek α padających na nieruchome jądra azotu przewyższa energię progową $E_p = 14,5$ MeV. O ile energia kinetyczna cząstek α musi przewyższać energię progową, aby powstające w wyniku reakcji protony miały zerową prędkość?

578. Deska drga z przyspieszeniem o wartości $a = \frac{4v_0}{T}$, gdzie T jest okresem drgań, a zwrot wektora przyspieszenia zmienia się co pół okresu. W układzie związanym z deską na ciało działa wzdłuż deski składowa siła ciężkości $mg \sin \alpha$, siła bezwładności ma o zmiennym zwrocie oraz siła tarcia o wartości $\mu mg \cos \alpha$. Ponieważ średnia prędkość ciała względem deski jest stała, musi ono przez pewną część okresu poruszać się w górę deski. Oznaczmy ten czas przez t_1 . W czasie okresu pęd ciała nie ulega zmianie:

$$\Delta p = 0 = mgT \sin \alpha + \frac{maT}{2} - \frac{maT}{2} + \mu mgt_1 \cos \alpha - \mu mgt_2 \cos \alpha, \text{ gdzie } t_2 = T - t_1. \text{ Stąd}$$

$t_2 - t_1 = \frac{T \operatorname{tg} \alpha}{\mu}$. Niech v_1 oznacza maksymalną prędkość klocka względem deski skierowaną w górę, a v_2 maksymalną prędkość skierowaną w dół. $v_1 = a_1 t_1$, gdzie

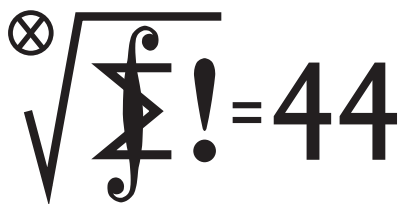
$a_1 = a + g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha$, $v_2 = a_2 t_2$, gdzie $a_2 = a + g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha$. Ponieważ deska drga z dużą częstotliwością $a \approx a_1 \approx a_2$. Ustalona średnia prędkość ciała

$$v = \frac{v_2 - v_1}{2} = \frac{a(t_2 - t_1)}{2} = \frac{v_0 \operatorname{tg} \alpha}{\mu}.$$

579. W rozważanej reakcji energia jest pochłaniana, czyli energia reakcji $Q = (m_N + m_\alpha - m_O - m_p)c^2$ jest ujemna. Podczas reakcji działają tylko siły wewnętrzne, zatem pęd całkowity układu nie zmienia się. W układzie środka masy, w którym pęd całkowity układu wynosi zero, minimalna energia kinetyczna równa jest energii pochłoniętej w reakcji: $|Q| = \frac{\mu v^2}{2} = \frac{m_\alpha m_N v^2}{2(m_\alpha + m_N)}$, gdzie v jest prędkością progową cząstki α :

$E_p = \frac{m_\alpha v^2}{2}$. Otrzymujemy stąd energię reakcji $Q = \frac{-14E_p}{18}$. Oznaczmy przez v_α prędkość padającej cząstki α , a przez E_α jej energię kinetyczną, gdy powstające protony mają zerową prędkość. Z zasady zachowania pędu: $m_\alpha v_\alpha = m_O v_O$ oraz z zasady zachowania energii: $\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + Q = \frac{m_O v_O^2}{2}$ otrzymujemy energię kinetyczną padającej cząstki α : $E_\alpha = \frac{119E_p}{117}$, która o 25 keV przewyższa energię progową.

Klub 44

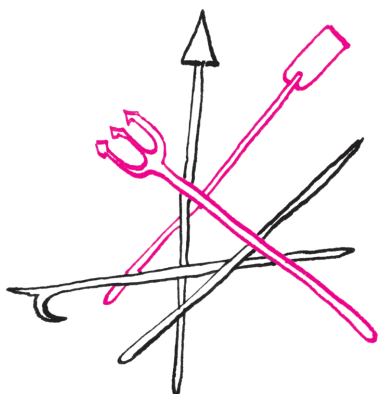


Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 675 ($WT = 2,29$) i 676 ($WT = 1,94$) z numeru 2/2014

Andrzej Idzik	Bolesławiec	44,04
Paweł Duch	Bielawa	40,84
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Stanisław Bednarek	Łódź	39,50
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,36
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75

Pan Andrzej Idzik, znany Czytelnikom *Delty* z różnych form aktywności, zamyka swoją drugą rundę.



682. Można przyjąć, że $x_1 \leq \dots \leq x_n$. Nierówność daną do udowodnienia przepisujemy w równoważnej postaci

$$\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{x_i} + \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right) \geq n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}}.$$

Lewa strona nie zmieni się, gdy ją pomnożymy przez liczbę 1, zapisaną (zgodnie z założeniem) jako suma odwrotności liczb $x_i + 1$:

$$(*) \quad \left(\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{x_i} + \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right) \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 1} \right) \geq n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}}.$$

Wystarczy teraz wykazać, że ciągi (a_1, \dots, a_n) i (b_1, \dots, b_n) o wyrazach

$$a_i = \sqrt{x_i} + \frac{1}{\sqrt{x_i}} = \frac{x_i + 1}{\sqrt{x_i}}, \quad b_i = \frac{1}{x_i + 1}$$

są odwrotnie uporządkowane; nierówność Czebyszewa $(\sum a_i)(\sum b_i) \geq n \sum a_i b_i$ da wówczas dowodzoną tezę (*).

Zadania z matematyki nr 685, 686

Redaguje Marcin E. KUCZMA

685. Niech $I = \langle 0; 1 \rangle$. Funkcje $f, g : I \rightarrow I$ spełniają warunki: f jest ściśle rosnąca, $f(g(x)) = x$ dla $x \in I$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right) \right) < n - \frac{1}{n}.$$

686. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n , dla których równanie $x^2 + y^2 = n$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych x, y , różnych od zera, ale ma rozwiązania w liczbach wymiernych x, y , różnych od zera.

Zadanie 686 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa

Rozwiązania zadań z numeru 5/2014

Przypominamy treść zadań:

681. Mamy dwa stosy bierek. Dwaj gracze wykonują ruchy na przemian. W jednym ruchu wolno: usunąć jedną bierkę (z dowolnie wybranego stosu); usunąć po jednej bierce z obu stosów; przełożyć jedną bierkę z jednego (dowolnego) stosu na drugi. Gra kończy się, gdy wszystkie bierki znikną. Wygrywa gracz, który zdjął ostatnią bierkę. W zależności od liczności stosów w stanie początkowym, ustal, czy i który z graczy (rozpoczynający czy jego przeciwnik) ma strategię wygrywającą.

682. Liczby dodatnie x_1, \dots, x_n spełniają warunek

$$\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Udowodnić, że

$$\frac{\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n}}{n-1} \geq \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}.$$

681. Gdy na każdym stosie leży parzysta liczba bierek, wówczas każdy ruch powoduje, że liczność co najmniej jednego stosu stanie się nieparzysta. Z takiej sytuacji można jednym ruchem ponownie uzyskać stan: obie liczności parzyste. Można przy tym wybrać taki ruch, który zmniejsza łączną liczbę bierek w obu stosach (jedyny typ ruchu, który tego nie robi, to przełożenie bierki ze stosu na drugi – ale wtedy ten sam efekt parzystości można uzyskać, zdejmując po jednej bierce z obu stosów).

Stąd wynika, że stany typu *obie parzyste* to pozycje przegrywane; pozostałe pozycje są wygrywane. Istotnie, ze stanu pierwszego typu każdy ruch prowadzi do stanu drugiego typu; stąd zaś istnieje ruch, przywracający stan *obie parzyste* i zmniejszający łączną liczbę (co gwarantuje, że gra się zakończy).

Dostajemy odpowiedź: gracz rozpoczynający ma strategię zwycięską wtedy i tylko wtedy, gdy na starcie liczba bierek w co najmniej jednym stosie jest nieparzysta.

Przyjeliśmy, że $x_1 \leq \dots \leq x_n$, więc ciąg (b_i) jest nierosnący; chcemy pokazać, że ciąg (a_i) jest niemalejący. Funkcja $f(x) = x^{1/2} + x^{-1/2}$ maleje w przedziale $(0; 1)$ oraz rośnie w przedziale $(1; \infty)$. Zatem fragment ciągu (x_i) , który leży w przedziale $(1; \infty)$, wyznacza niemalejący fragment ciągu o wyrazach $a_i = f(x_i)$. Skoro jednak $\sum b_i = 1$, to w przedziale $(0; 1)$ może leżeć co najwyżej jeden wyraz ciągu (x_i) , czyli liczba x_1 . Pozostaje dowieść, że wówczas $f(x_1) \leq f(x_2)$. Z założenia $\sum b_i = 1$, więc $b_1 + b_2 \leq 1$, skąd (po prostym przekształceniu) $x_1 x_2 \geq 1$. Stąd, ostatecznie,

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1}} = \\ &= (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

To kończy dowód nierówności (*), równoważnej z tezą zadania.

Merkury z promieniem około 2440 km jest nieco tylko większy od Księżyca, ale mniejszy od największych księżyców Układu Słonecznego, Ganimedesa i Tytana. Tak jak inne planety wewnętrzne, składa się w większości z metalicznego jądra okrytego krzemową skorupą i ma jedynie śladową atmosferę.

Prosto z nieba: O kurczącym się Merkuryem

Merkury jest stosunkowo słabo zbadaną planetą Układu Słonecznego: dotychczas poświęcono mu jedynie dwie misje satelitarne. Pierwszą z nich był wystrzelony w latach siedemdziesiątych XX wieku Mariner 10. W trakcie lotu do Merkurego sonda NASA zbadła także atmosferę Wenus, wykorzystując przy okazji efekt grawitacyjnej procy. Orbita Mariner 10 pozwoliła na trzykrotne zbliżenie do Merkurego – podczas przelotów zarejestrowano zaskakująco silne pole magnetyczne (jego pochodzenie jest wciąż nie do końca jasne) oraz wykonano szczegółowe zdjęcia części powierzchni planety.

Drugą, wciąż aktywną misją, jest Messenger, wysłany w kierunku Merkurego w 2004 roku. Celem sondy jest fotograficzne skatalogowanie całej powierzchni. Skorupa Merkurego, inaczej niż w przypadku Ziemi, nie składa się z paru oddzielnych i zderzających się ze sobą płyt tektonicznych, ale stanowi jednolitą strukturę. Analiza bardzo dobrej jakości zdjęć wykonanych przez Messengera pozwoliła zbadać dokładniej zarejestrowane przez Mariner 10 interesujące cechy powierzchni: przypominające zmarszczki, ciągnące się czasami przez setki kilometrów granie skalne i pofałdowane skarpy. Dotychczas znanych jest prawie 6000 takich formacji. Są to efekty kurczenia się Merkurego, wywołanego powolnym stygnięciem globu. Z szacunków wynika, że promień Merkurego zmniejszył się od momentu narodzin, tj. w trakcie 4 mld lat, o mniej więcej 6 km – poprzednie dane sondy Mariner 10 sugerowały wartość znacząco mniejszą (około 1 km). Badania struktury powierzchni Merkurego są bardzo cenne dla zrozumienia ewolucji termicznej skalistych planet i ich wnętrza, co z pewnością przyda się w przyszłych badaniach podobnych skalistych planet poza Układem Słonecznym.

Michał BEJGER

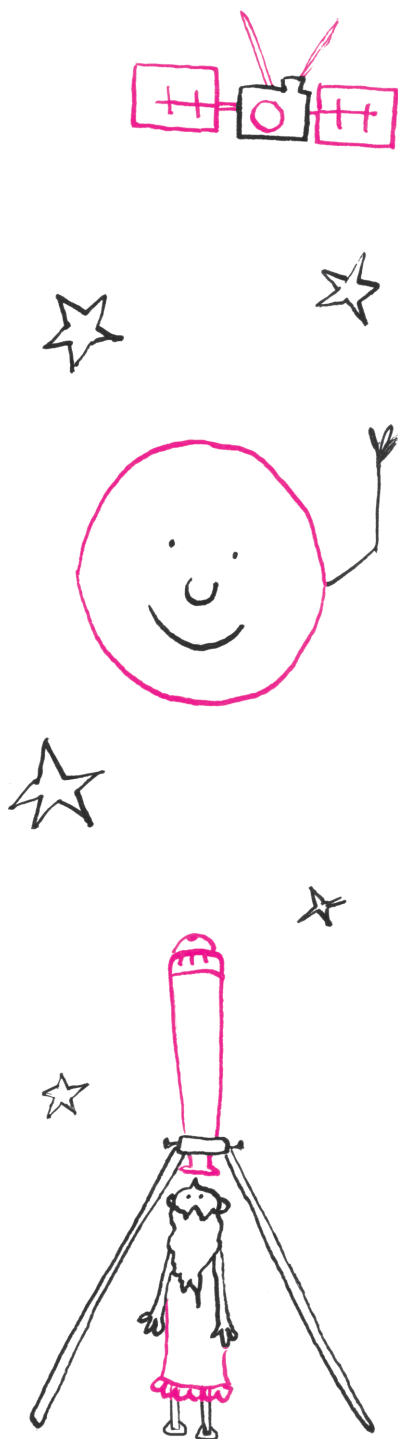
Niebo we wrześniu

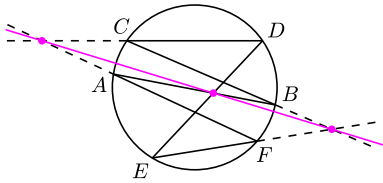
W pierwszy dzień września przypada maksimum roju Aurygidów – będzie można je obserwować w ciągu pierwszego tygodnia. Źródłem meteorów jest kometa Kiessa (C/1911 N1) o okresie orbitalnym około 2000 lat. Zjawiska meteorowe związane z Aurygidami są nieprzewidywalne i krótkie; zdarzają się lata, w których rój był praktycznie nieaktywny. Najbardziej obfity ostatnio był w roku 2007, gdy obserwowano około 100 zjawisk na godzinę, w tym wiele bardzo jasnych, najczęściej jednak jest ich mniej, rzędu 10 na godzinę. Radiant w gwiazdozbiórze Wolarza oznacza, że obserwacje należy rozpocząć po północy, gdy gwiazdozbiór pojawi się nad wschodnim horyzontem. Na całe szczęście Księżyc będzie już w tym czasie pod horyzontem (pierwsza kwadra 2 IX, pełnia 9 IX, now 24 IX).

Wrzesień sprzyja obserwacji Merkurego: będzie on widoczny po wschodniej stronie Słońca w gwiazdozbiórze Panny, a 22 IX znajdzie się w maksymalnej *elongacji* (oddaleniu od Słońca), z jasnością około $0,2^m$. Środek nocy oraz poranek jest odpowiednim czasem do obserwacji Jowisza, który świeci obecnie bardzo jasno ($-1,7^m$) w gwiazdozbiórze Raka. Posiadacze teleskopów mogą śledzić zakrycia księżyców przez częściowo oświetloną przez Słońce planetę. Niestety, wrzesień nie obfituje w ciekawe bliskie, widoczne z Polski koniunkcje, do obserwacji pozostaje nam jedynie spotkanie Saturna ($1,4^m$, Waga), cienkiego sierpa Księżyca, Antaresa oraz Marsa ($0,8^m$, Skorpion) nisko nad zachodnim horyzontem w dniu 28 IX (bliskie przejście Księżyca w pobliżu Saturna, w odległości $0^{\circ}40'$, będzie, niestety, niewidoczne w Polsce – nastąpi, gdy oba obiekty będą znajdować się pod horyzontem).

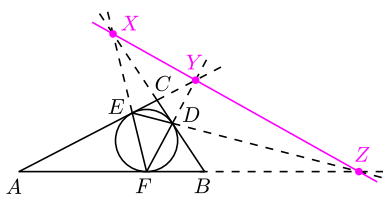
Koniec lata i początek astronomicznej jesieni nastąpi 23 IX. Od tego momentu dzień staje się krótszy od nocy – na przekór jesiennej depresji wydłużająca się noc powinna jednak cieszyć astronomów, dając im więcej czasu na obserwacje.

M.B.

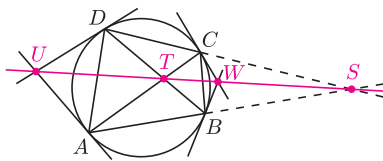




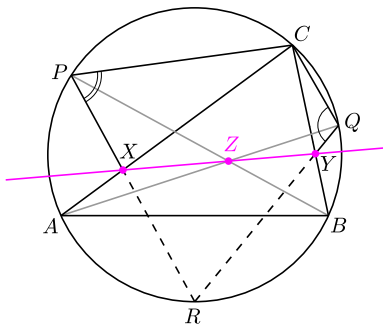
Rys. 1. TwP, jedna z wielu konfiguracji.



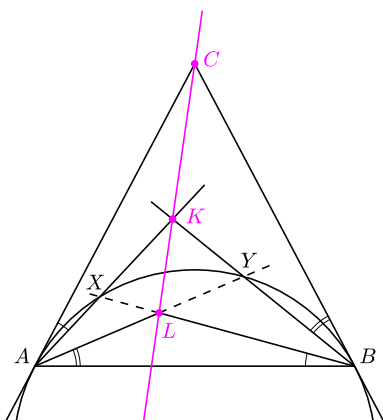
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Twierdzenie Pascala (**TwP**) orzeka, że jeśli sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg, to punkty $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CD \cap FA$ są współliniowe (rys. 1), gdzie $k \cap l$ to punkt przecięcia prostych k i l . Jest ono prawdziwe również dla sześciokątów, których pewne boki się przecinają lub pewne wierzchołki pokrywają. Przez AA rozumiemy wtedy prostą styczną do rozważanego okręgu w punkcie A .

W tym artykule zakładamy, że wszystkie rozważane punkty przecięcia prostych istnieją, ale **TwP** można uogólnić również na pozostałe przypadki. Ponadto, okrąg można zastąpić przez dowolną krzywą stożkową.

1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC , CA , AB odpowiednio w punktach D , E , F . Udowodnij, że punkty $X = BC \cap EF$, $Y = CA \cap FD$, $Z = AB \cap DE$ leżą na jednej prostej.
2. Na czworokącie $ABCD$, który nie jest trapezem, opisano okrąg. Wykaż, że punkty $T = AC \cap DB$, $U = AA \cap DD$, $W = BB \cap CC$ leżą na jednej prostej.
3. Punkty A, P, C, Q, B leżą w tej kolejności na łuku okręgu O . Na odcinkach AC i BC wybrano takie punkty odpowiednio X i Y , że $\sphericalangle XPC + \sphericalangle YQC = 180^\circ$. Wykaż, że wszystkie otrzymane w ten sposób proste XY (przy ustalonych punktach A, P, C, Q, B) mają punkt wspólny.
4. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$, i takie punkty K i L w jego wnętrzu, że $\sphericalangle KAC = \sphericalangle LBA$ oraz $\sphericalangle KBC = \sphericalangle LAB$. Udowodnij, że punkty C, K, L są współliniowe.

Rozwiązania

R1. Z **TwP** dla sześciokąta $DDEEFF$ (rys. 2), punkty $DD \cap EF = X$, $EE \cap FD = Y$ oraz $FF \cap DE = Z$ są współliniowe. \square

R2. Niech $S = BA \cap CD$ (rys. 3). Z **TwP** dla sześciokąta $AACDDDB$, punkt $AA \cap DD = U$ leży na prostej wyznaczonej przez punkty $AC \cap DB = T$ oraz $CD \cap BA = S$. Z kolei z **TwP** dla $BBACCD$, punkt $BB \cap CC = W$ także leży na prostej wyznaczonej przez punkty $BA \cap CD = S$ oraz $AC \cap DB = T$. \square

R3. Z warunku $\sphericalangle XPC + \sphericalangle YQC = 180^\circ$ wynika, że punkt $R = PX \cap QY$ leży na okręgu O (rys. 4). Z **TwP** dla sześciokąta $ACBPRQ$ uzyskujemy współliniowość punktów $AC \cap PR = X$, $CB \cap RQ = Y$ oraz niezależnego od X i Y punktu $Z = BP \cap QA$, co kończy dowód. \square

R4. Oznaczmy $X = AK \cap BL$ oraz $Y = AL \cap BK$ (rys. 5). Z równoramienności trójkąta ABC oraz danych równości kątów wynika, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XBY$. Ponieważ oba punkty A, B leżą po tej samej stronie prostej XY , oznacza to, że punkty A, B, X, Y leżą na jednym okręgu.

Z twierdzenia o stycznej i cięciwie oraz z równości $\sphericalangle KAC = \sphericalangle LBA$, okrąg ten jest styczny do prostej AC ; analogicznie jest on styczny do BC . **TwP** dla sześciokąta $AAXBYY$ daje żadaną współliniowość punktów $AA \cap BB = C$, $AX \cap BY = K$ oraz $XB \cap YA = L$. \square

Zadania domowe

5. Okrąg O jest styczny do okręgu O' opisanego na trójkącie ABC w punkcie S , a do boków AC i BC odpowiednio w punktach D i E . Wykaż, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest środkiem odcinka DE .

Wskazówka. Niech proste SD , SE przecinają okrąg O' odpowiednio w drugich punktach K i L . Warto rozważyć **TwP** dla sześciokąta $ACBKSL$.

6. Punkt F leży na boku DE pięciokąta wypukłego $ABCDE$, przy czym $\sphericalangle FAC = \sphericalangle DBC$ oraz $\sphericalangle FCA = \sphericalangle EBA$. Wykaż, że $\sphericalangle BAE + \sphericalangle BCD = 180^\circ$.

Wskazówka. Niech $X = AF \cap BD$, $Y = CF \cap BE$, $Z = AE \cap CD$.

7. Uzasadnij poprawność konstrukcji opisanej w *Małej Delcie* w lutym 2014 r.