




SPIS TREŚCI NUMERU 7 (482)

Spadający Księżyc <i>Krzysztof Turzyński</i>	str. 1
Niewymierność $\sqrt{2}$ i jeszcze większe niemożliwości <i>Mariusz Skalba</i>	str. 2
Proca grawitacyjna <i>Szymon Charzyński</i>	str. 4
Funkcja Lamberta <i>Krzysztof Oleszkiewicz</i>	str. 5
Jajo <i>Jerzy Tyszkiewicz</i>	str. 7
Jak wielka była Ziemia w starożytności? <i>Michał Bejger</i>	str. 8
Choć proste to nieproste	str. 9
 Zadania	str. 9
Elektryzująca metryka pingpongowa <i>Michał Szurek</i>	str.10
Każdy czworokąt jest prostokątem <i>Jerzy Bednarczuk</i>	str.12
 Spory w nauce <i>Magdalena Fikus</i>	str.14
Symetria względem okręgu <i>Michał Miśkiewicz</i>	str.15
Ze świata USOS. Część 10 – Ciągnąć czy pchać? <i>Marymilian Śmiech</i>	str.18
Informatyczny kącik olimpijski (74): Jakie to proste <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Najstarsza gwiazda we Wszechświecie	str.24
Niebo w lipcu	str.24
 Jeden obraz mówi więcej niż tysiąc słów <i>Joanna Jaszuska</i>	str.25

W następnym numerze



Jestem, jaki jestem, bo byłem, jaki byłem!

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–18⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

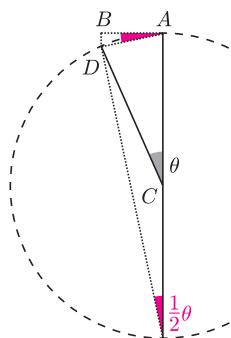
Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Ślady powstawania idei unifikacji prowadzą do Kopernika, który w swym najsłynniejszym dziele sugerował, że, mówiąc dzisiejszym językiem, kulisty kształt różnych ciał niebieskich ma jedną przyczynę: w znanym podówczas Wszechświecie w każdym jego miejscu miałyby obowiązywać ta sama fizyka. Od czasów Kopernika poglądy na temat Wszechświata zmieniły się zasadniczo, jednak rozwój tej wiedzy wciąż opiera się na postulacie jedności praw fizyki, znanym dzisiaj jako zasada kopernikańska, a przy tym doskonale – w ramach możliwości obserwacyjnych – sprawdzonym.



Ruch obiegowy Księżyca wokół znajdującej się w punkcie C Ziemi. Kąt θ odpowiada przemieszczeniu Księżyca na orbicie w ciągu minuty ruchu i jest tu dla czytelności rysunku znacznie wyolbrzymiony.



Uważa się, że jedną z najważniejszych trudności teoretycznych, jakie Newton musiał przezwyciężyć na drodze do prawa powszechnego ciężenia, było określenie siły grawitacji w pobliżu masywnych, rozciągłych obiektów. Nie wnikamy tu w te subtelności.

Literatura:

S. Chandrasekhar, *Newton's 'Principia' for the Common Reader*, Oxford University Press, Oxford, 1995,
A.K. Wróblewski, *Historia fizyki*, PWN Warszawa 2011.

Naukowcy uwielbiają unifikacje, czyli sytuacje, w których dwa na pozór różne zjawiska lub własności okazują się przejawami tego samego prawa lub przyczyny. Jedno z najbardziej znanych praw fizyki – prawo powszechnego ciężenia Newtona – jest w istocie pierwszym sukcesem programu unifikacji nowożytniej fizyki. Także i dzisiaj postulat unifikacji oddziaływań jest jedną z najważniejszych motywacji badań teoretycznych w fizyce cząstek elementarnych. Warto zatem przyjrzeć się bliżej, jak ta historia się zaczęła oraz jak się – przynajmniej na razie – kończy.

Można się spierać, czy pierwszeństwa sformułowania prawa powszechnego ciężenia nie należałoby przyznać Robertowi Hooke'owi, który już w 1670 roku podczas swych wykładów spekulował, że ta sama siła powoduje spadanie ciał przy powierzchni Ziemi i ruch Księżyca wokół Ziemi. Jednak to Newton w swym wydrukowanym w 1687 roku dziele *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* nadał tej idei precyzyjną matematyczną formę oraz przeprowadził szereg pomysłowych testów słuszności tego prawa. Szczególnie elegancki jest test przedstawiony w dowodzie tezy IV z Księgi III wspomnianego dzieła. Tezę tę można przedstawić w następujący sposób:

Księżyc jest przyciągany grawitacyjnie przez Ziemię; dzięki tej sile grawitacji jest bezustannie odchylany od ruchu prostoliniowego i utrzymywany na orbicie.

Argumentację Newtona uzasadniającą tę tezę można by dziś przedstawić w następujący sposób. Rozważmy przedstawiony na rysunku ruch obiegowy Księżyca wokół Ziemi, znajdującej się w punkcie C . Z pomiarów astronomicznych wykonywanych od czasów starożytnych znamy odległość Księżyca od Ziemi (Newton uśrednia wyniki wielu badaczy, w tym Ptolemeusza i Kopernika). Księżyc, początkowo znajdujący się w punkcie A , po minucie ruchu znajdzie się w punkcie D , przesuwał się na swej orbicie o kąt θ . Ruch ten, zgodnie z postulatem Hooke'a, będzie złożeniem ruchu jednostajnego prostoliniowego z początkową prędkością (przesunięcie od A do B) oraz spadku na Ziemię spowodowanego działaniem przyciągającej siły grawitacji. Ponieważ kąt θ jest bardzo mały, więc możemy stosować przybliżenie $\sin \theta \approx \text{tg } \theta \approx \theta$. Zatem:

$$|BD| \approx \frac{1}{2} \theta \cdot |AD| \approx \frac{1}{2} \theta^2 \cdot |AC|,$$

co doprowadziło Newtona do wyniku $|BD| = 4,875$ m. Promień Ziemi jest 60 razy mniejszy niż odległość Ziemia-Księżyc. Od Huygensa wiemy też, że równoważąca siłę odśrodkową (wynalazek Kartezjusza) siła grawitacji musi być odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między oddziaływającymi ciałami (w przypadku Ziemi odległość tę liczymy od środka planety). Na powierzchni Ziemi siła ziemskiej grawitacji jest więc $60^2 = 3600$ razy silniejsza niż przy Księżycu. Wiedząc zaś od Galileusza, że w spadku swobodnym przebyta droga h jest proporcjonalna do kwadratu czasu spadania t (tj. $h = \frac{1}{2}gt^2$), wnioskujemy, że na powierzchni Ziemi odległość $|BD|$ powinna zostać przebyta w czasie $t = 1$ s. Na podstawie ruchu Księżyca możemy zatem wyznaczyć przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi:

$$g = \frac{2|BD|}{t^2} = 9,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

które doskonale zgadza się ze znanymi w czasach Newtona pomiarami. Własności siły grawitacji pozwalają więc na jednoczesne wyjaśnienie spadania przedmiotów na powierzchni Ziemi oraz ruchu obiegowego Księżyca wokół Ziemi. Udało się zunifikować dwie na pozór odległe idee!

Historia ostatniej spektakularnej unifikacji kończy się w lipcu 2012 roku, kiedy to zespoły badawcze działających przy LHC detektorów ATLAS i CMS ogłosiły odkrycie bozonu Higgsa. Istnienie tej cząstki było wnioskiem z zaproponowanego w 1964 roku (przez Petera Higgsa, tandem: François Englert i Robert Brout oraz zespół w składzie: Carl Hagen, Gerald Guralnik i Tom Kibble) mechanizmu, który pozwolił w 1969 roku Abdusowi Salamowi i Stevenowi Weinbergowi ująć w precyzyjną matematyczną formę pomysł Sheldon'a Glashowa z 1961 roku, że oddziaływania elektromagnetyczne oraz powodujące niektóre reakcje jądrowe oddziaływania słabe są w istocie różnymi przejawami tego samego oddziaływania – elektroslabego.

Nie jest obecnie jasne, czy należy się spodziewać kolejnej unifikacji i jaki miałyby mieć ona charakter. Widać więc, że w fizyce oddziaływań fundamentalnych jest jeszcze trochę problemów do rozwiązania.



Niewymierność $\sqrt{2}$ i jeszcze większe niemożliwości

Mariusz SKAŁBA*

Punktem wyjścia niech będzie najsłynniejsza chyba matematyczna konstatacja, ta mianowicie, że liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna. Można to wysłowić w następujący równoważny i tendencyjny sposób.

Twierdzenie 1. *Jeśli liczby całkowite x, y spełniają równanie $x^2 - 2y^2 = 0$, to $x = y = 0$.*

Czy twierdzenie to można wzmocnić? Okazuje się, że tak! Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 2. *Jeśli $x, y, z \in \mathbb{Z}$ oraz $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 0$, to $x = y = z = 0$*

Zauważmy przede wszystkim, że jeśli liczba całkowita a nie dzieli się przez 3, to $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Ponieważ $x^2 - 2y^2 \equiv 0 \pmod{3}$, więc $y \equiv 0 \pmod{3}$ oraz $x \equiv 0 \pmod{3}$. Zatem $3z^2 \equiv 0 \pmod{9}$ i stąd również $z \equiv 0 \pmod{3}$.

Istnieją więc takie liczby całkowite x_1, y_1, z_1 , że $x = 3x_1, y = 3y_1, z = 3z_1$ oraz $x_1^2 - 2y_1^2 - 3z_1^2 = 0$. Wynika stąd, że wyjściowe liczby x, y, z są podzielne przez dowolnie wysokie potęgi liczby 3, a to jest możliwe tylko dla $x = y = z = 0$.

Okazuje się, że można to jeszcze bardziej uogólnić!

Twierdzenie 3. *Jeśli $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ oraz $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 6t^2 = 0$, to $x = y = z = t = 0$.*

Z równości $x^2 + 6t^2 = 2y^2 + 3z^2$ wynika bowiem, że

$$(x^2 + 6t^2)^2 = (x^2 + 6t^2)(2y^2 + 3z^2) = 2(xy + 3zt)^2 + 3(xz - 2yt)^2.$$

Z twierdzenia 2 wynika teraz, że $x^2 + 6t^2 = 0$ i stąd $x = t = 0$. Z równości $-2y^2 - 3z^2 = 0$ otrzymujemy ostatecznie $y = z = 0$.

Jak Czytelnik słusznie przeczuwa, niemożliwości nie mogą rozpychać się w nieskończoność, a w naszym przypadku przygwadźda je

Twierdzenie 4. *Dla każdej liczby całkowitej $m \neq 0$ istnieją takie liczby całkowite x, y, z, t, s , nie wszystkie równe 0, że*

$$x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 6t^2 - ms^2 = 0.$$

Łatwo zauważyć, że powyższe twierdzenie można wypowiedzieć w następujący równoważny sposób:

Dla każdej liczby całkowitej $m \neq 0$ istnieją takie liczby wymierne x, y, z, t , że

$$x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 6t^2 = m.$$

Kluczowy jest poniższy lemat.

Lemat 1. *Iloczyn i iloraz dwóch liczb postaci $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 6t^2$ jest też tej postaci.*

Dowód wynika z następujących tożsamości:

$$\begin{aligned} (x_1^2 - 2y_1^2 - 3z_1^2 + 6t_1^2)(x_2^2 - 2y_2^2 - 3z_2^2 + 6t_2^2) &= \\ &= (x_1x_2 + 2y_1y_2 + 3z_1z_2 - 6t_1t_2)^2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1 - 3z_1t_2 + 3z_2t_1)^2 - \\ &\quad - 3(x_1z_2 + x_2z_1 + 2y_1t_2 - 2y_2t_1)^2 + 6(x_1t_2 + x_2t_1 + y_1z_2 - y_2z_1)^2 \end{aligned}$$

oraz

$$(x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 6t^2)^{-1} = \left(\frac{x_2}{w_2}\right)^2 - 2\left(\frac{y_2}{w_2}\right)^2 - 3\left(\frac{z_2}{w_2}\right)^2 + 6\left(\frac{t_2}{w_2}\right)^2,$$

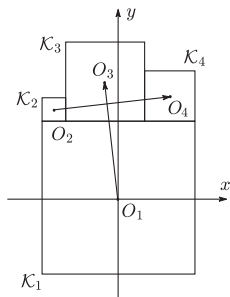
gdzie oznaczyliśmy $w_2 = x_2^2 - 2y_2^2 - 3z_2^2 + 6t_2^2$.



*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

**Rozwiązanie zadania M 1426.**

Przyjmijmy, że bok kwadratu \mathcal{K}_1 ma długość 2, a kwadratów $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4$ – odpowiednio $2a, 2b, 2c$ (stąd $a + b + c = 1$). Niech środek układu współrzędnych będzie ustawiony w środku kwadratu \mathcal{K}_1 , a osie niech będą równoległe do jego boków (jak na rysunku). Oznaczmy środek kwadratu \mathcal{K}_i przez O_i dla $1 \leq i \leq 4$.



Mamy $O_3 = (-1 + 2a + b, 1 + b)$, więc $\vec{O_1O_3} = [-1 + 2a + b, 1 + b]$. Podobnie, skoro $O_2 = (-1 + a, 1 + a)$, $O_4 = (1 - c, 1 + c)$ oraz $a + b + c = 1$, to otrzymujemy $\vec{O_2O_4} = [2 - a - c, c - a] = [1 + b, 1 - 2a - b]$. Stąd w oczywisty sposób dostajemy $\vec{O_1O_3} \cdot \vec{O_2O_4} = 0$. Zauważmy, że wykazaliśmy nawet więcej. Z rozwiązania wynika również, że $O_1O_3 = O_2O_4$.

**Rozwiązanie zadania M 1427.**

Odp. Tak!
Liczby $x \geq 0$ kolorujemy na kolor o numerze $[x] \bmod 4$. Załóżmy, że $\frac{a+b}{2} = c + 1$ dla pewnych liczb nieujemnych a, b, c i przyjmijmy, że $a \leq b$. Załóżmy, że a i b mają ten sam kolor. Niech $[a] = k$, czyli $a \in [k, k + 1)$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 0$. Wówczas $b \in [k + 4l, k + 4l + 1)$ dla pewnej liczby całkowitej $l \geq 0$. Zatem $(a + b)/2 \in [k + 2l, k + 2l + 1)$, więc $[c] = k + 2l - 1$. Ponieważ $2l \bmod 4 = 0$ lub 2 , więc liczba c ma w opisanym przez nas kolorowaniu inny kolor niż liczby a i b .

Z lematu 1 wynika przede wszystkim, że dla dowodu twierdzenia 4 wystarczy rozpatrzyć tylko przypadek $m > 0$, gdyż

$$-1 = 1^2 - 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0^2.$$

Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na m . Dla $m = 1$ oraz $m = 2$ mamy przedstawienia

$$1 = 1^2 - 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0^2, \quad 2 = 2^2 - 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0^2.$$

Założmy z kolei, że $m \geq 3$ i teza zachodzi dla $1 \leq m' < m$. Rozróżniamy teraz dwa przypadki. Jeżeli m jest liczbą złożoną, to $m = m' \cdot m''$ gdzie $m' < m$ oraz $m'' < m$. Z lematu 1 wynika więc odpowiednie przedstawienie dla m . Jeżeli $m = p$ jest liczbą pierwszą, to sytuacja jest bardziej skomplikowana. Przyda się następujący

Lemat 2. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to istnieją takie liczby całkowite α, β , że*

$$\alpha^2 - 2\beta^2 - 3 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Założmy od razu, że $p \neq 2$. Reszty mod p liczb

$$0^2 - 3, 1^2 - 3, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - 3$$

są parami różne i jest ich $(p+1)/2$. Podobnie, reszty mod p liczb

$$2 \cdot 0^2, 2 \cdot 1^2, \dots, 2\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

są parami różne i jest ich $(p+1)/2$. Ponieważ wszystkich reszt mod p jest tylko p , więc pewna reszta typu $\alpha^2 - 3$ pokrywa się z pewną resztą typu $2\beta^2$, co daje tezę lematu 2.

Ponieważ $x^2 \equiv (x-p)^2 \pmod{p}$ więc w lemacie 2 możemy założyć, że liczby całkowite α i β spełniają dodatkowo nierówności

$$|\alpha| < \frac{p}{2} \text{ oraz } |\beta| < \frac{p}{2}.$$

Mamy zatem oszacowania

$$-\frac{p^2}{2} - 3 \leq \alpha^2 - 2\beta^2 - 3 < \frac{p^2}{4}.$$

Ponieważ $p \geq 3$, więc

$$|\alpha^2 - 2\beta^2 - 3| < p^2.$$

Możemy zatem napisać

$$|\alpha^2 - 2\beta^2 - 3| = kp, \text{ przy czym } 1 \leq k < p.$$

Na mocy założenia indukcyjnego liczba naturalna k ma przedstawienie

$$k = x_2^2 - 2y_2^2 - 3z_2^2 + 6t_2^2, \text{ gdzie } x_2, y_2, z_2, t_2 \in \mathbb{Q}.$$

Wnosimy stąd na podstawie lematu 1, że liczba

$$p = \frac{kp}{k} = \frac{(\mp 1)(\alpha^2 - 2\beta^2 - 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 0^2)}{k}$$

też ma takie przedstawienie i to kończy dowód indukcyjny twierdzenia.

Wyniki przedstawione powyżej są kompletne, ale dość sztuczne. Szczęście nam sprzyjało, gdyż forma kwadratowa $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 6t^2$ jest tzw. formą normową dla algebry kwaternionowej $(\frac{2,3}{\mathbb{Q}})$ – stąd wynika „cudowna” tożsamość wypisana w Lemacie 1. A gdyby nie pomagać szczęściu aż tak bardzo? Okazuje się, że prawdziwe jest następujące ogólne twierdzenie.

Twierdzenie 5. *Jeżeli liczby wymierne $a, b, c, d, -f$ są różne od zera oraz nie są wszystkie tego samego znaku to istnieją takie liczby wymierne x, y, z, t , że*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = f.$$

Dowód tego twierdzenia wymaga zastosowania poważnej i pięknej matematyki.

Ważnymi jego składnikami są: prawo wzajemności dla reszt kwadratowych oraz twierdzenie Dirichleta o liczbach pierwszych w postępie arytmetycznym. To wszystko, i dużo więcej, znajdzie Czytelnik w zajmującej książce: Z.I. Borewicz, I.R. Szafarewicz, *Теория чисел*, Moskwa 1985 (istnieją tłumaczenia na angielski i niemiecki).

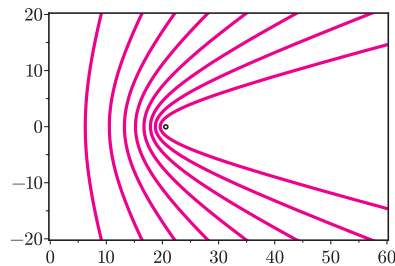


Proca grawitacyjna

Szymon CHARZYŃSKI*

Kiedy podrzucamy piłkę do góry, to przyciąganie grawitacyjne zawsze ją zawraca. Im mocniej ją podrzucimy – czyli im większą nadamy jej energię – tym wyżej polecą, zanim zawróci. Ale czy zawsze zawróci? Nadanie obiektowi wystarczająco dużej prędkości początkowej (większej od pewnej granicznej wartości zwanej prędkością ucieczki) pozwala mu uwolnić się z przywiązania do Ziemi i odlecieć na dowolnie dużą odległość. Przyciąganie Ziemi nigdy nie zdoła zawrócić takiego obiektu. Prędkość ucieczki z powierzchni Ziemi to około 11,2 km/s.

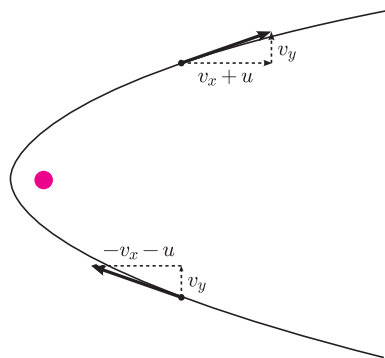
Sondy, które opuściły Układ Słoneczny to Pioneer 10 i 11 (wystrzelone w 1972 i 1973 r.) oraz Voyager 1 i 2 (wystrzelone w 1977 r.). Aktualnie sonda New Horizons (wystrzelona w 2006) jest na drodze do opuszczenia Układu Słonecznego. Do orbity Plutona dotrze w 2015 roku.



Rys. 1. Orbity hiperboliczne. Wszystkie hiperbole na rysunku mają wspólne ognisko, w którym znajduje się planeta.

Mimo, że jest to dosyć duża prędkość (kilkukrotnie większa niż np. prędkość pocisku wystrzelonego z karabinu lub działa – dlatego pociski zawsze spadają na Ziemię), to ludzkość zbudowała pojazdy zdolne ją osiągnąć. Na przykład, przekroczył ją statek Apollo 11, którego załoga 45 lat temu, dokładnie 20 lipca, wylądowała na Księżycu. Rakiety Saturn V, wynoszące statki Apollo, były najpotężniejszymi zbudowanymi kiedykolwiek raketami.

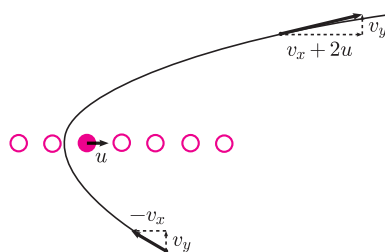
Chcąc lecieć dalej w Kosmos, napotkamy kolejną, większą przeszkodę. Dużo trudniejsze od ucieczki z Ziemi jest wyzwolenie się ze studni potencjału grawitacyjnego Słońca. Prędkość ucieczki względem grawitacji Słońca z punktu położonego na orbicie Ziemi wynosi około 42,1 km/s. Żaden ze zbudowanych do tej pory przez człowieka pojazdów kosmicznych nie był w stanie za pomocą własnych silników nadać sobie energii wystarczającej do ucieczki od Słońca. Wiadomo jednak, że kilka wysłanych z Ziemi sond opuściło Układ Słoneczny na dobre – przyciąganie Słońca nigdy ich już nie zawróci. Jak im się to zatem udało?



Rys. 2. Przelot sondy w pobliżu planety widziany w układzie odniesienia związanym z planetą. u – prędkość planety względem Słońca, v_x – składowa prędkości sondy względem Słońca równoległa do prędkości planety, v_y – składowa prędkości sondy prostopadła do prędkości planety.

Rozpędzenie sondy uzyskano dzięki sprytnemu zaplanowaniu trajektorii lotu, tak aby w odpowiedni sposób przeleciała w pobliżu planety Układu Słonecznego i ukradła jej trochę energii. Mechanizm ten nosi nazwę *procy grawitacyjnej* lub *asysty grawitacyjnej* i był wykorzystywany do rozpędzania wielu sond, a niektóre z nich wykorzystywały go kilkakrotnie w czasie swojej misji, przelatując w pobliżu różnych planet lub zbliżając się kilka razy do tej samej. Jak to działa?

Wyobraźmy sobie, że sonda zbliża się do planety. W układzie odniesienia związanym z planetą, trajektoria sondy jest w przybliżeniu hiperbolą (przybliżenie polega na zaniedbaniu oddziaływania innych ciał niebieskich na sondę). Planeta znajduje się w ognisku hiperboli, a kąt pomiędzy asymptotami jest związany z tym, jak blisko planety przeleci sonda (rys. 1) – im bliżej, tym większemu odchyleniu ulegnie kierunek jej ruchu. W układzie odniesienia, w którym planeta spoczywa, ruch sondy jest symetryczny względem odwrócenia w czasie, a długość wektora prędkości przy ustalonej odległości od planety jest taka sama w fazie zbliżania, jak w fazie oddalania się sondy od planety. Sonda nadlatuje z daleka mając pewną energię kinetyczną, okrąży planetę i oddala się zachowując tę samą energię, którą miała przed zbliżeniem, istotnej zmianie ulega jedynie kierunek jej ruchu (rys. 2). Proces ten można porównać do sprężystego odbicia piłeczki od nieruchomej ściany. Piłeczka po odbiciu zachowuje energię kinetyczną, zmienia się jedynie kierunek jej prędkości. Można więc wyobrażać sobie zbliżenie sondy do planety jako rodzaj zderzenia sprężystego.



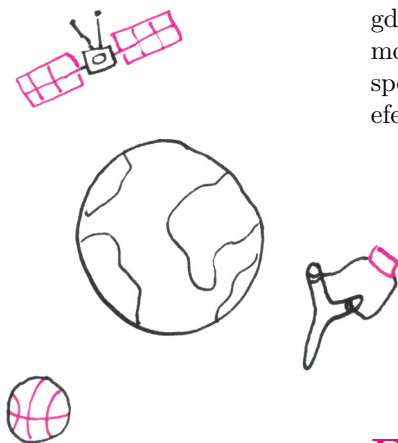
Rys. 3. Przelot sondy w pobliżu planety w układzie odniesienia Słońca.

Chcieliśmy jednak umożliwić naszej sondzie ucieczkę spod jurysdykcji Słońca. Zastanówmy się zatem, jak to sprężyste zderzenie wygląda w układzie odniesienia związanym ze Słońcem. W tym układzie planeta się porusza i to dosyć szybko. Na przykład, prędkość Ziemi w jej ruchu orbitalnym wynosi około 30 km/s, Jowisza około 13 km/s. Ponieważ czas przelotu sondy w porównaniu z okresem orbitalnym planety jest bardzo mały, możemy w dobrym przybliżeniu przyjąć, że planeta w rozważanym czasie porusza się ruchem prostoliniowym. Wtedy transformacja prędkości z układu spoczynkowego planety do układu Słońca polega na dodaniu do wszystkich wektorów prędkości wektora prędkości planety względem Słońca. Rozważmy sytuację, w której sonda obiega Słońce po orbicie w kierunku przeciwnym do kierunku obiegu planety, czyli rozważane

*Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego

Przykład zbioru poszukiwanego w artykule Jajo Jerzego Tyszkiewicza.

Niech A będzie zbiorem tych liczb naturalnych, które nie są postaci 2^k , dla $k \geq 1$. Wówczas A nie jest zbiorem prawie-okresowym, gdyż odstęp między kolejnymi elementami brakującymi w A coraz bardziej rosną. Jednak zbiór $A + A$ jest prawie-okresowy, gdyż po prostu $A + A = \mathbb{N}$. Żeby to zobaczyć weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $n \in A$, to $n = (0 + n) \in (A + A)$, jako że $0 \in A$. Jeśli zaś $n \notin A$, to $(n - 1) \in A$, ponieważ nie istnieją dwie sąsiednie liczby naturalne większe lub równe 2 będące potęgami dwójki. A zatem $n = (1 + (n - 1)) \in (A + A)$, jako, że $1 \in A$. Czytelnik dociekliwy może zauważyć, że taka definicja zbioru A dalece nie jest jedyna możliwa, w szczególności korzystaliśmy jedynie z bardzo niewielu własności funkcji 2^n .



obiekty początkowo poruszają się z grubsza w przeciwnych kierunkach. Składowe prędkości sondy prostopadłe do kierunku ruchu planety nie zmieniają się, natomiast ulegną zmianie składowe równoległe – w fazie zbliżania od wartości składowej równoległej odejmie się prędkość planety, a w fazie oddalania prędkość planety się do niej doda (rys. 3). W konsekwencji, jeżeli porównamy składową równoległą prędkości sondy przed i po zbliżeniu, to będą się one różniły o podwojoną wartość prędkości planety. Uzyskamy zatem to, co chcieliśmy – sonda po zbliżeniu będzie się poruszać szybciej! Ponownie możemy zastosować analogię do odbijania piłeczki. Przelot w pobliżu nieruchomej planety porównalibyśmy do sprężystego odbijania piłeczki o ścianę. Natomiast analogią przelotu obok planety poruszającej się jest odbijanie piłeczki od ruchomego obiektu, np. od czoła poruszającego się pociągu. Jeżeli rzucilibyśmy piłką z prędkością 20 km/h w jadący z prędkością 100 km/h z przeciwną pociąg, to po sprężystym odbiciu piłka leciałaby z prędkością 20 km/h + 2 · 100 km/h = = 220 km/h. Oczywiście, w układzie odniesienia związanym z pociągiem prędkości piłki przed i po odbiciu mają wartość 120 km/h i są przeciwnie skierowane.

Dzięki powszechnemu zastosowaniu procy grawitacyjnej udało się przeprowadzić wiele spektakularnych kosmicznych misji, które byłyby niemożliwe do wykonania, gdyby sondy musiały polegać tylko na własnych silnikach. Asysta grawitacyjna może być wykorzystana nie tylko do rozpędzania sond, ale również do ich spowalniania. Wiele szczegółowych informacji na temat wykorzystania tego efektu w konkretnych misjach można znaleźć na stronie NASA i w Wikipedii.

Funkcja Lamberta

Krzysztof OLESZKIEWICZ*

Określona na półprostej $[-1, \infty)$ funkcja $f(x) = xe^x$ jest ciągła i rosnąca, a zbiorem jej wartości jest półprosta $[-1/e, \infty)$. Można więc jednoznacznie zdefiniować funkcję $W : [-1/e, \infty) \rightarrow [-1, \infty)$ odwrotną do f , tj. taką, że $W(f(x)) = x$ dla każdego $x \geq -1/e$. Funkcję tę nazywa się obecnie funkcją Lamberta, ponieważ zagadnienia z nią związane rozważane były już przez osiemnastowiecznego matematyka Johanna Heinricha Lamberta (a także przez Eulera). Przydaje się ona do opisu rozwiązań ważnych w zastosowaniach równań różniczkowych z opóźnieniem i niektórych równań fizyki kwantowej, a także, jako funkcja tworząca, w kombinatoryce. Czytelnik zechce sprawdzić, że $-\frac{3}{\ln 3} W(-\frac{1}{3} \ln 3)$ jest rozwiązaniem równania $3^x = x^3$, i ustalić, czy liczba ta jest mniejsza od 3.

Udowodnimy, że dla liczb zespolonych z dostatecznie bliskich zera (można też ograniczyć się do z rzeczywistych bez potrzeby wprowadzania zmian w dowodzie) funkcję W można przedstawić w postaci szeregu potęgowego

$$W(z) = z - \frac{2^1}{2!}z^2 + \frac{3^2}{3!}z^3 - \frac{4^3}{4!}z^4 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} p_m z^m,$$

gdzie $p_m = (-m)^{m-1}/m!$ – ponieważ $p_{m+1}/p_m \rightarrow e$, gdy $m \rightarrow \infty$, więc dla wszystkich z , dla których $|z| < 1/e$, szereg ten jest zbieżny.

Trzeba wykazać, że dla powyższego szeregu W równość $W(f(z)) = z$ jest spełniona dla wszystkich z z pewnego otoczenia zera. Przyda się nam prosta tożsamość kombinatoryczna.

Ścisłej mówiąc, we współczesnej matematyce rozważa się zwykle funkcję f określoną takim samym wzorem, ale na całej płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} , na której nie jest już ona różnowartościowa, w związku z czym funkcję odwrotną do niej trzeba definiować lokalnie; wprowadzona przez nas funkcja W to tylko fragment jednej z gałęzi funkcji Lamberta.

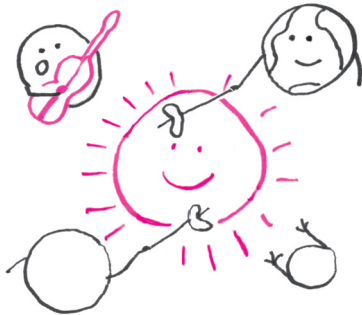
*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



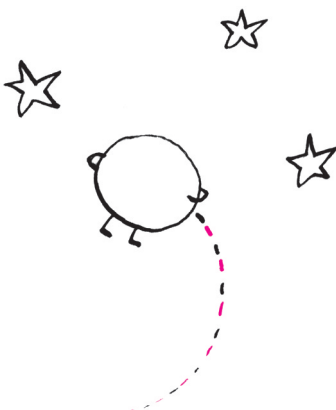
$\text{im}(g)$ oznacza obraz funkcji g , czyli zbiór wszystkich przyjmowanych przez nią wartości.



Inaczej niż w przypadku sum skończonych, zmiana kolejności wyrazów szeregu może zmienić jego sumę lub szereg zbieżny przekształcić w rozbieżny. Jeśli jednak $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to wyrazy szeregu $\sum_n a_n$ można dowolnie przestawiać bez wpływu na wynik sumowania.



Zasada identyczności: Przyjmijmy, że $K \subset U$, gdzie K jest kołem otwartym, a U pewnym spójnym otwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej. Jeśli funkcje analityczne $\varphi, \psi : U \rightarrow \mathbb{C}$ spełniają równość $\varphi(z) = \psi(z)$ dla wszystkich $z \in K$, to $\varphi(z) = \psi(z)$ dla wszystkich $z \in U$.



Lemat. Dla $n = 2, 3, 4, \dots$ mamy $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^{n-1} = 0$.

Dowód lematu: Rozważmy funkcje $g : \{1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Dla $k = 1, 2, \dots, n$ niech A_k oznacza $\{g : k \notin \text{im}(g)\}$, czyli rodzinę tych funkcji ze zbioru $\{1, 2, \dots, n-1\}$ w zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$, które nie przyjmują wartości k . Dla dowolnych $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ mamy

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = |\{g : \text{im}(g) \cap \{i_1, i_2, \dots, i_k\} = \emptyset\}| = (n-k)^{n-1}.$$

Żadna z funkcji określonych na zbiorze $(n-1)$ -elementowym nie może przyjmować n różnych wartości, więc $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ to rodzina wszystkich funkcji ze zbioru $\{1, 2, \dots, n-1\}$ w zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$. Zatem ze wzoru włączeń-wyłączeń wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} n^{n-1} &= |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^{n-1} = n^{n-1} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^{n-1}, \end{aligned}$$

a to już jest równoważne dowodzonej tezie. \square

Niech teraz s będzie taką liczbą dodatnią, że $se^s = 1/e$. Jeśli $|z| < s$, to $|z|e^{|z|} < 1/e$, więc $\sum_{m=1}^{\infty} |p_m| (|z|e^{|z|})^m < \infty$, co usprawiedliwia zmianę kolejności sumowania:

$$\begin{aligned} W(f(z)) &= \sum_{m=1}^{\infty} p_m z^m e^{mz} = \sum_{m=1}^{\infty} p_m z^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k z^k}{k!} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_m m^k}{k!} z^{m+k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{p_m m^{n-m}}{(n-m)!} \cdot z^n. \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu ze znanego rozwinięcia funkcji wykładniczej w szereg potęgowy, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, a następnie pogrupowaliśmy składniki według potęg parametru z . Współczynnik przy z^1 jest równy 1, a dla $n \geq 2$ mamy

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \frac{p_m m^{n-m}}{(n-m)!} &= \sum_{m=1}^n (-1)^m \cdot \frac{m^{m-1} m^{n-m}}{m!(n-m)!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} m^{n-1} = \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^{n-1} = 0, \end{aligned}$$

na mocy lematu. Zatem wykazaliśmy, że $W(f(z)) = z$ dla wszystkich liczb zespolonych z z koła otwartego o środku w zerze i promieniu s . Zawiera się ono w spójnym podzbiore otwartym płaszczyzny zespolonej

$$U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > -1, |ze^z| < 1/e\}.$$

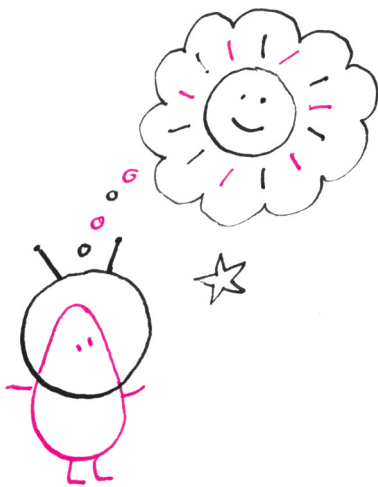
Czytelnik obeznany nieco z teorią funkcji analitycznych bez problemu wywnioskuje stąd, że $W(f(z)) = z$ dla $z \in U$, a więc w szczególności dla $z \in (-1, s)$. Przechodząc do granicy $z \rightarrow -1^+$, otrzymamy też równość $W(-1/e) = W(f(-1)) = -1$, czyli

$$\sum_{m=1}^{\infty} |p_m| e^{-m} = \frac{1}{e} + \frac{2^1}{2!e^2} + \frac{3^2}{3!e^3} + \dots = 1.$$

Omówione rozwinięcie funkcji W w szereg to szczególny przypadek nieco bardziej skomplikowanego klasycznego wzoru Lagrange'a – jeśli f rozwija się w szereg potęgowy na pewnym otoczeniu zera, a ponadto $f(0) = 0$ i $f'(0) \neq 0$, to istnieje funkcja analityczna w rozwijalna na pewnym otoczeniu zera w szereg $w(z) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m z^m$ i taka, że $w(f(z)) = z$ dla z dostatecznie bliskich zera, a przy tym

$$p_m = \frac{1}{m!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z^m/f(z)^m) \Big|_{z=0}.$$

Gdy $f(z) = ze^z$, to $z^m/f(z)^m = e^{-mz}$, skąd łatwo otrzymać współczynniki funkcji Lamberta.



O językach regularnych pisaliśmy np. w *Delcie* 11/2010,

Redakcja

Jajo

Jerzy TYSZKIEWICZ

Od lat prowadzę ćwiczenia z przedmiotu *Języki, Automaty i Obliczenia*, w skrócie JAiO, zwanego potocznie „jajo”.

Ma on swój standardowy zbiór zadań, a w nim następujące pytanie-zadanie:

Czy istnieje taki nieregularny język L , że LL jest językiem regularnym?

Ma się rozumieć, odpowiedź należy uzasadnić.

Długo by opowiadać, co to są języki, w tym języki regularne, co oznacza mnożenie języków (a tak naprawdę konkatencja). Oczywiście, nie mogę tego wyjaśnić, bo wówczas Redakcja na pewno nie przyjąłaby mi tego artykułu do numeru pod hasłem „Jakie to proste”.

Jeśli jednak studenci nie wymyślą wystarczająco szybko jakiegoś innego rozwiązania, zaczynam udzielać im podpowiedzi. Tak się miło składa, że po kilku takich podpowiedziach zadanie w sam raz nadaje się do pokazania tutaj.

Wygląda ono wtedy tak:

Czy istnieje zbiór A liczb naturalnych, który sam nie jest prawie-okresowy, ale zbiór $A + A = \{n + m \mid n, m \in A\}$ jest prawie-okresowy?

Zbiór $B \subseteq \mathbb{N}$ jest okresowy, gdy dla pewnego $k > 0$ i każdej liczby naturalnej n mamy $n \in B \Leftrightarrow n + k \in B$. Łatwo sobie taki zbiór wyobrazić: informacja o tym, które liczby naturalne z przedziału $[0, k - 1]$ należą do B , determinuje go całkowicie, bo dalej ten sam szablon *należy/nie należy* powtarza się w nieskończoność – trochę jakby był namalowany na osi przez malarza, który ma wzorzysty wałek do malowania o obwodzie długości k . Zbiór jest prawie-okresowy jeśli można go otrzymać ze zbioru okresowego przez dodanie lub usunięcie skończenie wielu elementów.

Teraz można już bardzo łatwo udowodnić, że taki zbiór A istnieje.

Zacznijmy od $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ten zbiór na pewno nie jest prawie-okresowy, bo odstępy pomiędzy jego kolejnymi elementami coraz bardziej rosną, a w zbiorze prawie-okresowym tak nie ma prawa być.

Przyjrzyjmy się teraz $A + A = \{n^2 + m^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Niewątpliwie $A + A$ jest prawie-okresowy albo nie jest prawie-okresowy, ale sprawdzenie, która konkretnie z tych możliwości zachodzi, wymagałoby chyba trochę pracy. Na szczęście możemy się obyć bez tego.

W pierwszym przypadku, gdy $A + A$ jest prawie-okresowy, żądanym przykładem jest zbiór A .

W drugim przypadku żądanym przykładem jest zbiór $A + A$ (wówczas nie jest on prawie-okresowy). Zastanówmy się, dlaczego zbiór $(A + A) + (A + A)$ na pewno jest prawie-okresowy.

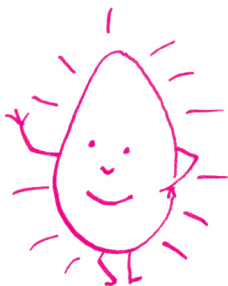
Otóż $(A + A) + (A + A) = \{n^2 + m^2 + p^2 + q^2 \mid n, m, p, q \in \mathbb{N}\}$. Teraz przypominamy sobie twierdzenie Lagrange’a, mówiące, że

każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych.

A zatem zdefiniowany w skomplikowany sposób zbiór $(A + A) + (A + A)$ to po prostu \mathbb{N} , a ten jest oczywiście prawie-okresowy, a nawet okresowy.

To już koniec dowodu istnienia, i to bez definitywnego wskazania żadnego przykładu.

No właśnie: czy umiesz, Czytelniku, podać konkretny przykład takiego zbioru A ? Jeśli nie, poszukaj go w numerze.

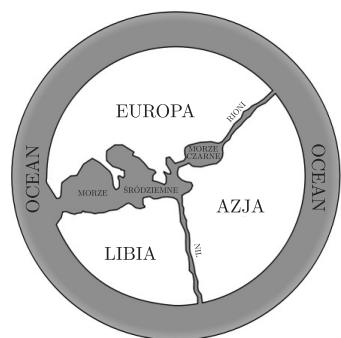


Jeśli komuś się to rozwiązanie kojarzy ze znanym niekonstruktywnym dowodem tego, że istnieją takie niewymierne liczby a i b , że a^b jest wymierne, to dobrze mu się kojarzy.

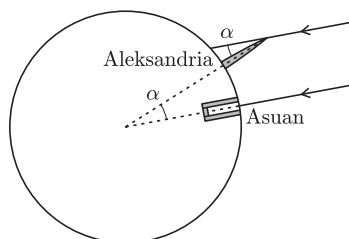
Warto zajrzeć do *Delt*y 2/2010.

*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

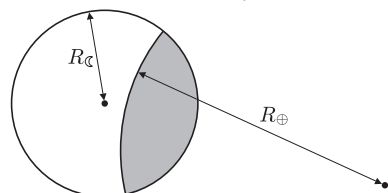
Starożytnym myślicielom zawdzięczamy przede wszystkim solidne naukowe podstawy uprawiania nauki. Opracowali oni założenia matematyki, logiki i geometrii, a w szczególności studiowali fizykę i filozofię z dociekliwością nie mniejszą niż współcześni badacze (a może o wiele większą, gdyż nie mieli do dyspozycji wyników doświadczeń Wielkiego Zderzacza Hadronów czy obserwacji teleskopu Hubble’a). Leukippos, Demokryt i Epikur wiedzieli na przykład, że materii nie da dzielić się w nieskończoność – składa się ona z niepodzielnych elementów (atomów), pomiędzy którymi znajduje się próżnia.



Rys. 1. Świat według Anaksymandra z Miletu.



Rys. 2. Zakładając, że Słońce znajduje się dostatecznie daleko, jego promienie można uważać za równoległe. Padają one w tym samym momencie w Aleksandrii i Asuanie pod różnymi kątami.



Rys. 3. Cień Ziemi na tarczy Księżycy wyobrażany jako przecięcie Księżycy i Ziemi.

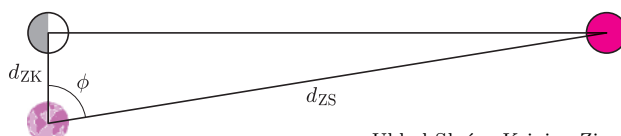
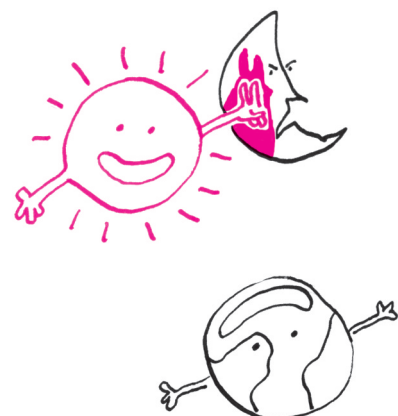
Świat według Anaksymandra z Miletu (610–546 p.n.e.) był niezwykle prosty (rys. 1) i składał się z trzech kontynentów otoczonych oceanem. Był to obraz tak wyraziście przemawiający do wyobraźni, że posługiwali się nim późniejsi uczeni, na przykład św. Izydor z Sewilli (VII w. n.e.), a jeszcze w XII w. n.e. przerysowywano go w uczonych księgach, takich jak *Codex Gigas*. Mimo że mapa Anaksymandra jest z braku danych mocno uproszczona, starożytni z pewnością przeczuwali, że „coś jest na rzeczy”. Arystoteles (384–322 p.n.e.), wypowiadając się na temat kształtu Ziemi, argumentował, że musi być ona kulą, gdyż z warunku symetrii każda część Ziemi jest przyciągana do wspólnego środka; także cień Ziemi na tarczy Księżycy podczas jego zaćmienia jest częścią koła.

Jak wykonać pomiar, mając takie przesłanki teoretyczne i obserwacyjne? Eratostenes (276–195 p.n.e.) dokonał tego w stylu prawdziwego teoretyka, nie ruszając się z biurka w bibliotece aleksandryjskiej, w której pracował. Wiedział on, że w dniu przesilenia letniego, w oddalonym o około $d = 5000$ stadiów mieście Syene (dzisiejszy Asuan) promienie słoneczne padają podczas lokalnego południa pionowo, tak że da się zobaczyć jego odbicie w głębokiej studni. Asuan znajduje się bowiem prawie dokładnie na zwrotniku Raka i prawie dokładnie na tym samym południku co Aleksandria, w której promienie Słońca padają w dniu przesilenia letniego pod kątem $\alpha = 7^{\circ}12'$ od pionu (rys. 2). Według Eratostenesa wystarczy więc wykonać proste obliczenia:

$$\frac{\alpha}{360^{\circ}} = \frac{d}{2\pi R_{\oplus}}$$

Tłumacząc stadia na kilometry, dostaniemy $d = 780$ km, z czego wynika, że długość równika to $2\pi R_{\oplus} = 39000$ km, a więc wartość bardzo bliska prawdziwej: 40 075 km.

Używając podobnie prostych argumentów, Arystarch z Samos (310–230 p.n.e.) zaproponował metodę pomiaru odległości i rozmiaru Księżycy. Obserwacje zaćmienia przekonują, że względny rozmiar Księżycy i cienia Ziemi oświetlanej przez odległe Słońce (rys. 3) to mniej więcej $R_{\zeta}/R_{\oplus} \simeq 1/3$ (dokładna obecna wartość to $R_{\zeta}/R_{\oplus} = 0,2724$). Arystarch umiał także mierzyć średnice kątowe obiektów na niebie – rozmiar kątowy Księżycy wynosi $\theta = 0,5^{\circ}$ (0,0087 radianów), zatem odległość Ziemia-Księżyc można otrzymać, analizując równoramienny trójkąt o kącie rozwarcia θ i podstawie długości średnicy Księżycy. Dostaniemy wtedy $d_{ZK} \simeq 2R_{\zeta}/\theta \simeq 4 \cdot 10^5$ km, podczas gdy obecnie rutynowo mierzona w eksperymentach radarowych i laserowych średnia odległość Ziemia-Księżyc to około $3,8 \cdot 10^5$ km. Gdy znamy odległość Ziemia-Księżyc, nic nie stoi na przeszkodzie, by obliczyć też odległość Ziemia-Słońce. Z pomocą przychodzi kolejna obserwacja Arystarcha z Samos: podczas kwadry (Księżyc oświetlony dokładnie w połowie), kąt ϕ Księżyc-Ziemia-Słońce jest mniejszy od 90° ; w czasach starożytnych zmierzono $\phi = 87^{\circ}$, co przekłada się na $d_{ZS} = d_{ZK}/\cos \phi$, czyli $d_{ZS} \simeq 20d_{ZK}$. Obecnie wiemy, że ϕ jest znacznie bliższe 90° i wynosi $89,853^{\circ}$, co daje $d_{ZS} \simeq 390d_{ZK}$ (brak dokładności pomiarowej w niczym oczywiście nie umniejsza genialnej prostoty przedstawionych powyżej pomysłów).



Układ Słońce-Księżyc-Ziemia podczas kwadry.

Choć proste to nieproste

Starożytni Egipcjanie sprzed 4000 lat uznawali tylko ułamki proste, czyli takie, które w liczniku miały jedynkę. Oczywiście, były też inne ułamki, ale o nich uczeni mówić nie chcieli – przedstawiali je jako sumę ułamków prostych. Nie byłoby w tym niczego nadzwyczajnego, gdyby nie pretensjonalne wymaganie, aby w owej sumie każdy ułamek był inny.

Czy każdy ułamek da się przedstawić jako sumę różnych ułamków prostych? Tak, jest nawet bardzo prosty algorytm, pozwalający to zrobić: od ułamka należy odejmować największy jak się da ułamek prosty.

Zobaczmy to na przykładzie rozkładu $\frac{9}{19}$:

$$\frac{9}{19} - \frac{1}{3} = \frac{27 - 19}{57} = \frac{8}{57}, \quad \frac{8}{57} - \frac{1}{8} = \frac{64 - 57}{456} = \frac{7}{456},$$

$$\frac{7}{456} - \frac{1}{66} = \frac{462 - 456}{456 \cdot 66} = \frac{6}{456 \cdot 66} = \frac{1}{456 \cdot 11} = \frac{1}{5016},$$

Zatem $\frac{9}{19} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{66} + \frac{1}{5016}$.

Patrząc na te rachunki, widzimy, że przy naszym algorytmie w każdym kroku licznik maleje o 1 (Czytelniku, udowodnij to!). Stąd widać, że algorytm ma własność stopu – jeśli w liczniku było k , to taki rozkład (a mogą być inne?) będzie zawierał co najwyżej k ułamków prostych.

Dla $\frac{2}{29}$ algorytm daje rozkład $\frac{1}{15} + \frac{1}{435}$, ale dobrym rozkładem jest też $\frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$.

Widzimy jednak, że w pewnym momencie coś się skróciło i ułamków było mniej – nie 9, a tylko 4. I to się zdarza bardzo często już nawet dla małych liczników, np.

$$\frac{4}{13} - \frac{1}{4} = \frac{16 - 13}{52} = \frac{3}{52},$$

$$\frac{3}{52} - \frac{1}{18} = \frac{54 - 52}{52 \cdot 18} = \frac{2}{52 \cdot 18} = \frac{1}{52 \cdot 9} = \frac{1}{468},$$

czyli $\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{468}$.

Badacze ułamków prostych, obserwując ich zachowanie, postawili ważne, do dziś nierozstrzygnięte pytanie:

Problem Erdősa–Strausa:

czy każdy ułamek $\frac{4}{n}$ jest sumą trzech różnych ułamków prostych?

Andrzej Schinzel zaryzykował natomiast niepotwierdzoną dotychczas hipotezę:

dla dowolnego k istnieje takie N , że dla dowolnego $n > N$ ułamek $\frac{k}{n}$ jest sumą trzech różnych ułamków prostych.

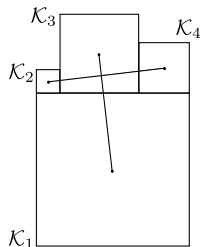
Czytelniku – do roboty!

M.K.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1426. Dany jest kwadrat \mathcal{K}_1 . Na jednym z jego boków, na zewnątrz, zbudowano trzy sąsiadujące kolejno kwadraty $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4$. Udowodnić, że odcinki łączące odpowiednio środki kwadratów $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_3$ oraz $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_4$ są prostopadłe.

Rozwiązanie na str. 3

M 1427. Czy, mając do dyspozycji cztery kolory, można pokolorować każdą liczbę rzeczywistą nieujemną na jeden z nich tak, aby żadne liczby a, b, c spełniające zależność $a + b = 2c + 2$ nie były tego samego koloru?

Rozwiązanie na str. 3

M 1428. Niech a_1, \dots, a_n będą liczbami dodatnimi i niech S_k oznacza sumę wszystkich iloczynów różnych k liczb spośród a_1, \dots, a_n ,

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_k}.$$

Udowodnić, że dla każdego naturalnego $1 \leq k \leq n - 1$ spełniona jest nierówność

$$S_k S_{n-k} \geq \binom{n}{k}^2 a_1 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Rozwiązanie na str. 20

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 859. Naczynie o objętości V i ściankach doskonale odbijających promieniowanie elektromagnetyczne wypełnione jest promieniowaniem o całkowitej energii E . Jakie ciśnienie p na ścianki naczynia wywiera zawarte w nim promieniowanie elektromagnetyczne? Rozwiązanie na str. 23

F 860. Zmierzona przez satelity (tj. poza atmosferą) średnia wartość strumienia energii promieniowania słonecznego (tzw. stała słoneczna) wynosi

$q = 1360 \text{ W/m}^2$. Jaki jest stosunek siły odpychającej Ziemię od Słońca wynikającej z wywieranego przez to promieniowanie ciśnienia do siły grawitacyjnego przyciągania Ziemi i Słońca?

Dla uproszczenia przyjmujemy, że całe promieniowanie jest pochłaniane przez Ziemię, przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, odległość Ziemia-Słońce to średnio $R_{ZS} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, rok trwa w przybliżeniu $T = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$, stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Rozwiązanie na str. 23

Wskazówka: Promieniowanie elektromagnetyczne to gaz fotonów.



Instytut Matematyki, Wydział
Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski

Elektryzująca metryka pingpongowa

Michał SZUREK

Wśród wielu typów zagadnień matematycznych bardzo sobie cenię takie, które po wierzchu są elementarne, łatwe na początku i dające się rozwiązać nietypowymi, efektownymi, niecodziennymi metodami. Dobrze jest też, gdy zadania te są wierzchołkiem pewnej góry lodowej, albo – stosując inne porównanie – są początkiem ścieżki wiodącej nas w nieznanne. Oto

Zadanie 1. Mamy sześcian (a raczej jego szkielet), wykonany z drutu. Do przeciwległych wierzchołków sześcianu podłączono prąd. Wyznaczyć opór zastępczy układu. Zakładamy, że opór każdej krawędzi wynosi 1Ω .

Jest to bardzo łatwe zadanie dla każdego, kto choć trochę zna prawa rządzące przepływem prądu. Nasuwa się od razu oczywiste uogólnienie: jak to jest dla innych wielościanów i ogólniej: dla innych układów. W latach sześćdziesiątych XX wieku wiele uwagi poświęcił podobnym zagadnieniom matematyk brytyjski i kanadyjski Crispin Alvah Nash-Williams (1932–2001).

Związek z geometrią dostrzegli tu przed stu laty E.E. Brooks i A.W. Poyser w książce *Magnetism and Electricity*. Jeden z najbardziej znanych popularyzatorów matematyki, Charles Wilderman Trigg (1898–1989), wracał do tego zadania kilkakrotnie, głównie na łamach *Journal of Recreational Mathematics*. Z jego artykułu w tym magazynie z roku 1981 pochodzi zadanie o oporze dla przeciwległych wierzchołków kostki dowolnego wymiaru. Potem zadanie zaczęło żyć własnym życiem i obrastać w teorię. Z zagadnieniami tymi można się zapoznać w sieci, na przykład pod hasłem *resistance distance*, co ja tłumaczę jako „odległość elektryczna”.

Od pewnego czasu wielościany (w szczególności foremne) sklejam z piłeczek pingpongowych. Jakoś lepiej mi się myśli, gdy mogę wziąć w rękę taki model. Stąd się wziął ten dziwny tytuł artykułu. Załączam zdjęcie sześcianu nad Giewontem.

Definicja. Niech G będzie grafem spójnym. Wyobraźmy sobie, że krawędzie jego są wykonane z materiału dobrze

przewodzącego prąd i że dana jest oporność każdej krawędzi. Dla dowolnych dwóch wierzchołków grafu określamy ich *odległość elektryczną* jako opór zastępczy całego układu, gdy do wierzchołków tych podłączony jest prąd.

Z praw dotyczących przepływu prądu otrzymujemy natychmiast, że dla każdych trzech wierzchołków A, B, C odległość między A i C jest nie większa niż suma odległości między A i B oraz między B i C . Znaczący to, że tak określona odległość elektryczna jest rzeczywiście odległością w sensie matematycznym i zbiór wierzchołków grafu tworzy pewną przestrzeń metryczną, a konkretniej nawet wielościan.

Zadanie może być sprowadzone do algebry. Mamy bowiem prawa Kirchhoffa:

I prawo Kirchhoffa. Suma natężeń prądów wpływających do węzła i z niego wypływających jest równa zero. Inaczej mówiąc, ładunek elektryczny nie jest gromadzony w węźle.

II prawo Kirchhoffa. Suma spadków napięć na elementach obwodu zamkniętego jest równa zero. Mamy do dyspozycji też prawo Ohma oraz reguły rządzące opornością najprostszymi typów połączeń oporników. Dla połączeń szeregowych opór zastępczy jest sumą oporów składowych, dla połączeń równoległych przepustowość układu jest równa sumie przepustowości składników. Przez *przepustowość* układu rozumiemy tu odwrotność oporu.

Równania Kirchhoffa nie są zwykle skomplikowane – jest ich jednak dużo. Gdzie tylko można, należy od nich uciekać, najczęściej odwołując się do geometrii. Możliwe to jest tam, gdzie układ cechuje pewna symetria. Rozpatrzmy uogólnienie zadania 1.

Zadanie 2. Wyznaczyć opór zastępczy układu, gdy wejście i wyjście (źródło i ujście prądu) są przeciwległymi wierzchołkami *kostki n -wymiarowej*.

Rozwiązanie. Wierzchołki odległe o tyle samo (w sensie odległości „po grafie”) od tych punktów mają te same

potencjały, więc nie popłynę między nimi prąd. Dzięki temu możemy je utożsamić, co prowadzi do układu połączonych ze sobą szeregowo n podukładów połączeń równoległych. Pozostaje określić, ile jest przewodów w każdym z tych połączeń równoległych. Jeżeli napięcie przyłożone jest w $(0, 0, 0, \dots, 0)$, a ujęcie jest w $(1, 1, 1, \dots, 1)$, to wierzchołki są równoważne, gdy mają tę samą sumę współrzędnych. Proste rozumowanie kombinatoryczne pokazuje, że liczba krawędzi wynosi kolejno $n \cdot \binom{n-1}{k-1}$, gdzie $k = 1, \dots, n$. Na przykład, dla sześcianu mamy kolejno 3, 6 i 3 połączenia, dla kostki wymiaru 4 mamy kolejno 4, 12, 12 i 4 połączenia. Wynika stąd (po łatwych obliczeniach), że opór zastępczy układu jest równy

$$R_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}.$$

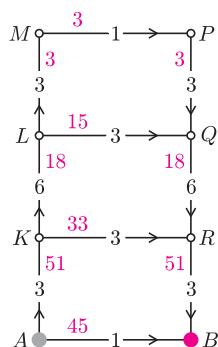
Opór ten maleje wykładniczo wraz z wymiarem n . Czy jest to zgodne z naszą intuicją? Powinno być: chociaż odległość między skrajnymi punktami rośnie liniowo, to liczba połączeń rośnie wykładniczo.

Przykład 3. Interesujące matematycznie jest zadanie obliczenia oporu zastępczego szkieletu kostki n -wymiarowej, gdy źródło i ujęcie znajdują się w sąsiednich wierzchołkach

Pełne wyliczenie pozostawimy Czytelnikowi. Wynik brzmi: $\frac{2^n - 1}{n \cdot 2^{n-1}}$. Opór ten maleje wraz ze wzrostem n , ale dość wolno. Znow możemy się zastanowić, czy jest to zgodne z intuicją.

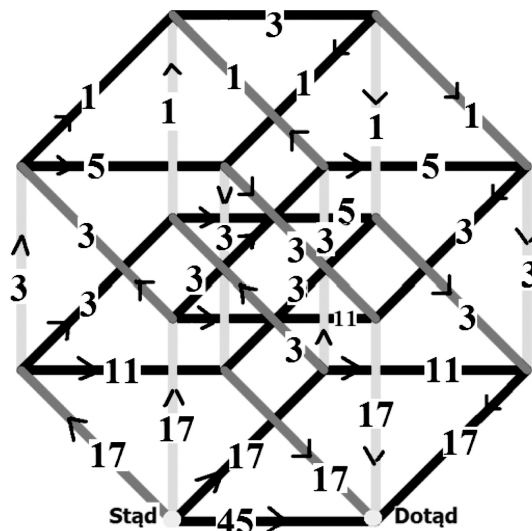
Często radzę uczniom i studentom tak: zmień fabułę zadania (nie zmieniając jego treści matematycznej) na inną, nawet żartobliwą lub niepoważną. Zrób to, po pierwsze, dla samego ćwiczenia. Otrzymasz – w terminologii wybitnego matematyka holenderskiego Hansa Freudenthala – zadanie izomorficzne. Po drugie, a nuż po takim przeformułowaniu zadanie będzie wyglądać ciekawiej i może nawet łatwiej się rozwiąże.

Wielu ludzi z pokolenia autora artykułu ma sentyment do kolei, najlepiej starych, parowych, wlokących się dostojnie po szynach na drewnianych podkładach. No to przełożmy zadanie na język „kolejowy”, zamieniając je na problem przepustowości sieci. Rozważę przypadek $n = 4$. Spójrzmy jeszcze raz na diagram oczami dyspozytora kolejowego, który ma wysłać 96 wagonów ze stacji A do stacji B tak, by znalazły się tam w jak najkrótszym czasie. Ma on do dyspozycji sieć stacji pośrednich K, L, M, P, Q, R . Czarne liczby 1, 3, 6 umieszczone na trasie oznaczają przepustowość danej linii. Za jednostkę przepustowości weźmiemy odwrotność czasu przejazdu jednego wagonu. Przepustowość 3



oznacza zatem, że w jednostce czasu da się tym odcinkiem linii przesłać trzy wagony.

Dla młodszych Czytelników niech będą narty. Możemy sobie wyobrazić, że A to podnóże góry, B – wierzchołek a diagram to sieć wyciągów. Niektóre z nich są wolniejsze, inne szybsze. Na przykład na odcinku AB posuwamy się 3 razy wolniej niż na AK i KR , a sześć razy wolniej niż na KL i QR . Na dole czeka 96 narciarzy. Jak najszybciej wwieźć ich wszystkich na górę? Liczy się oczywiście czas, po którym ostatni narciarz wjedzie na górę.



Rozwiążemy zadanie w interpretacji narciarskiej. 45 narciarzy wjeżdża trasą AB (czyli Stąd-Dotąd), jeden po drugim. Zajmuje im to łącznie 45 minut. Pozostałych 51 narciarzy w 17 minut osiąga K (na rysunku: drugi poziom). Tu rozdzielają się, 33 jedzie do R ; przy przepustowości 3 zajmuje im to 11 minut. W tym samym czasie 11 minut 15 turystów dociera do punktu R trasą $KLQR$ a trzech trasą $KLMPQR$. Po 45 minutach wszyscy spotykają się na górze. Wyciągi pracowały bez przestojów, zatem jest to najlepszy możliwy czas wykonania zadania. Wyciągi przewiozły zatem 96 turystów w 45 minut, co daje przepustowość $\frac{96}{45} = \frac{32}{15}$ turysty na minutę. Przepustowość to odwrotność oporu, zadanie rozwiązane, odpowiedź jest zgodna z podaną wcześniej.

Metryką elektryczną zainteresowali się fizycy i chemicy (zwłaszcza krystalografowie). Odkryto metody algebraiczne, pozwalające na obliczenie wszystkich odległości elektrycznych dla konkretnego grafu. Niestety, obliczenia są skomplikowane. Należy bowiem rozważyć wszystkie połączenia w grafie, co prowadzi do rozważania macierzy o kilkunastu czy nawet kilkudziesięciu wierszach i kolumnach i obliczania ich macierzy odwrotnych, a to zawsze było skomplikowane rachunkowo. Ale my poprzestaniemy na prostych grafach, gdzie – zabierając dziecku zabawkę – możemy bawić się kolejką elektryczną.

Każdy czworokąt jest prostokątem

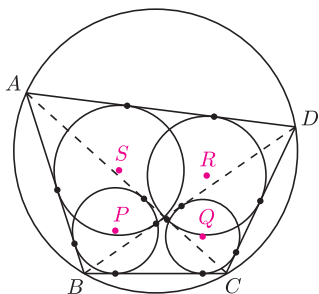
Jerzy BEDNARCZUK

Każdy czworokąt jest prostokątem

Niektórzy sądzą, że geometria jest trudna. Oto zadanie, które wielu by odstraszyło:

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. W trójkąty ABC , BCD , CDA , DAB wpisano okręgi. Wykazać, że środki P , Q , R , S tych okręgów są wierzchołkami prostokąta.

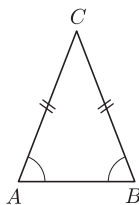
Rysunek do tego zadania mógłby wyglądać tak:



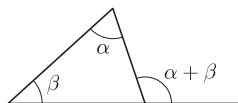
Wygląda przerażająco. A przecież wypadaloby jeszcze narysować dwusieczne wielu kątów (skoro są tu środki okręgów wpisanych w cztery trójkąty).

Zacznijmy od czegoś łatwiejszego:

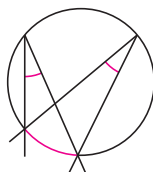
- (1) *Jeśli dwa kąty trójkąta są równe, to przeciwległe im boki też są równe.*



- (2) *Kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie kątów wewnętrznych nie przylegających do niego.*

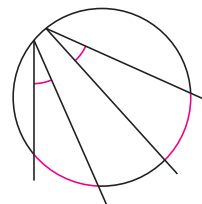


- (3) *Jeśli dwa kąty wpisane w okrąg są oparte na tym samym łuku, to są równe.*



Z niezrozumiałych powodów ostatnie twierdzenie w szkołach jest nauczane w takiej właśnie, kalekiej wersji. Uzupełnijmy je więc:

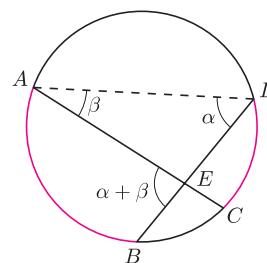
- (4) *Dwa kąty wpisane w okrąg są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na przystających (równych) łukach.*



Korzyści z tego twierdzenia jest wiele. Na przykład, zamiast wykonywać działania na kątach wpisanych w okrąg, czasem wygodniej jest operować na łukach, na których są one oparte (uwalniając się w ten sposób od wierzchołków tych kątów).

Jeszcze coś prostego:

- (5) *Przekątne czworokąta $ABCD$, wpisanego w okrąg przecinają się w punkcie E . Niech kąty wpisane w ten okrąg, oparte odpowiednio na łukach AB i CD będą równe α i β . Wówczas $\sphericalangle AEB = \alpha + \beta$.*

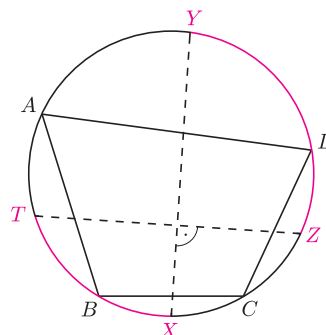


Dla dowodu wystarczy zauważyć, że kąt AEB jest kątem zewnętrznym trójkąta AED .

Twierdzenie (5) może być przydatne, bo kąt AEB nie jest ani kątem środkowym, ani wpisany, ani dopisany, a to twierdzenie pozwala obliczyć jego miarę w zależności od kątów wpisanych, opartych na łukach AB i CD .

Wykorzystamy to w następującym zadaniu:

- (6) *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty T , X , Z , Y są środkami odpowiednio łuków AB , BC , CD , DA tego okręgu. Wykazać, że proste XY i TZ są prostopadłe.*



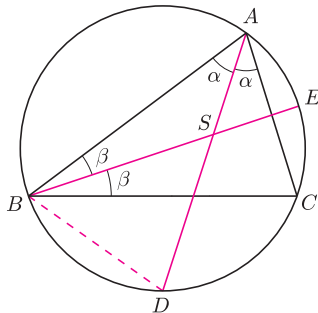
Dla dowodu wystarczy zauważyć, że suma łuków TX i ZY jest półokręgiem, a następnie skorzystać z twierdzenia (5).

Twierdzenie (4) może być także przydatne, gdy na rysunku mamy zaznaczyć środek okręgu **wpisanego** w trójkąt ABC .

Zaczynamy od narysowania okręgu **opisanego** na tym trójkącie i środków D i E łuków BC i CA .

Dwusieczne kątów naszego trójkąta to półproste AD i BE . Punkt S , w którym one się przecinają, to środek okręgu wpisanego.

Oznaczmy kąty jak na rysunku.

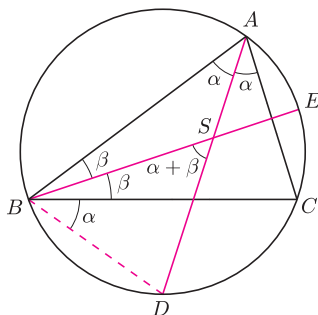


Zauważmy, że kąt BSD jest kątem zewnętrznym trójkąta ABS .

Wobec tego, na mocy twierdzenia (2), otrzymujemy, że $\sphericalangle BSD = \alpha + \beta$.

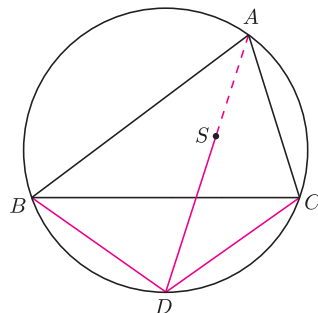
Kąty CAD i CBD są wpisane w okrąg i oparte na tym samym łuku, więc $\sphericalangle CBD = \alpha$.

Otrzymaliśmy w trójkącie BSD równe kąty przy wierzchołkach B i S . Na mocy twierdzenia (1) otrzymujemy równość $DB = DS$.



Tym samym udowodniliśmy następujące twierdzenie:

(7) Jeżeli punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , a półprosta AS przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D , to $DB = DS = DC$.

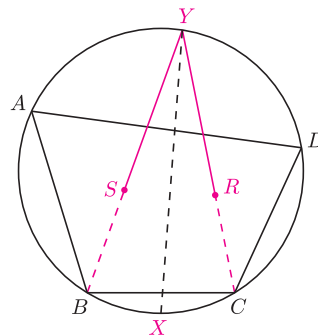


Uwaga: przypominamy, że punkt D jest środkiem łuku BC .

Otrzymaliśmy wygodną metodę wyznaczania środka okręgu wpisanego w trójkąt ABC : wyznaczamy środek D łuku BC , a następnie na odcinku DA wyznaczamy taki punkt S , że $DS = DB$.

Wróćmy do zadania, od którego zaczynaliśmy rozważania:

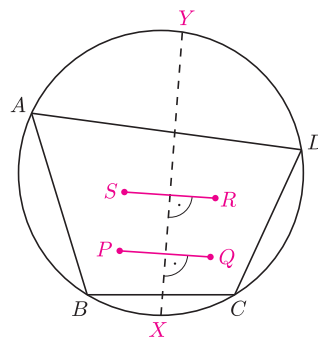
Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. W trójkąty ABC , BCD , CDA , DAB wpisano okręgi. Wykazać, że środki P , Q , R , S tych okręgów są wierzchołkami prostokąta.



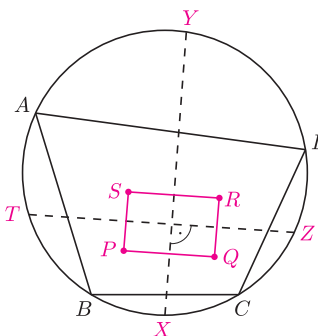
Środki łuków BC i DA oznaczmy odpowiednio przez X i Y .

Na mocy twierdzenia (7) środki R i S okręgów wpisanych w trójkąty CDA i DAB należą odpowiednio do odcinków YC , YB i spełniają warunek $YR = YD = YA = YS$.

Otrzymaliśmy trójkąt równoramienny SYR , w którym YX jest dwusieczną kąta między ramionami. Wobec tego prosta XY jest symetralną odcinka SR .



Analogicznie otrzymujemy, że prosta XY jest symetralną odcinka PQ . Prosta XY jest więc osią symetrii czworokąta $PQRS$. Podobnie dowodzimy, że jeśli punkty T , Z są środkami łuków AB i CD , to prosta TZ też jest osią symetrii czworokąta $PQRS$. Na mocy twierdzenia (6) proste XY i TZ są prostopadłe. Wobec tego czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.



Jaka ta geometria łatwa.

Nawet, jeśli nie każdy czworokąt jest prostokątem, tylko niektóre.

Spory w nauce

Zorganizowana w maju przez Stowarzyszenie Otwarta Rzeczpospolita debata, prowadzona przez publicystkę Janinę Paradowską, z udziałem Moniki Płatek (prawniczka), Magdaleny Fikus (biolożka) i Zbigniewa Nosowskiego (publicysta), miała za myśl przewodnią zdanie wypowiedziane przez fizyka, wieloletniego dyrektora Festiwalu Nauki w Warszawie, Macieja Gellera (1941–2014): „Krytyk moich poglądów nie jest moim wrogiem, lecz współtowarzyszem w dążeniu do prawdy”. Jeżeli przywołamy treść i zawartość debat, debatek i dyskusji tych obecnych w telewizji, radiu i gazetach (z nielicznymi chlubnymi wyjątkami), to zdanie Gellera wydaje się czystą abstrakcją. Nie jest abstrakcją w przypadku nauk ścisłych, ponieważ mogą one działać w oparciu o metodę naukową, która w skrócie polega na: zauważeniu zjawiska, doświadczalnym jego „obwąchnaniu” i obmierzeniu z różnych stron, sformułowaniu hipotezy i znowu sprawdzaniu jej na różne sposoby, budowie modelu doświadczalnego i, o ile to możliwe, matematycznego, przedstawieniu swoich danych do wglądu społeczności naukowej, sformułowaniu teorii i . . . w gruncie rzeczy czekaniu, co się zdarzy. Nauka nie rozwija się liniowo, badacze wpadają w różne pułapki albo pułapka okazuje się nową drogą, badania naukowe są dążeniem do prawdy, którą osiąga się na poziomie, na który pozwalają współczesne metody pomiarów i analizy. Wzruszające jest zdanie Newtona, który w tekście naukowym napisał : „nie będę definiował ruchu i czasu, bo wszyscy wiedzą, o co chodzi”, czy też przestroga Einsteina, który postanowił zająć się bliżej ruchem i czasem i stwierdził, że nawet gdyby istniało 1000 przykładów na tezę, to jeśli znajdzie się jeden, który jej przeczy – trzeba wrócić do początku!

W historii takiej nauki, o której mowa, a głównie fizyki i biologii molekularnej, spotyka się bardzo dużo przykładów na krętą drogę dochodzenia do prawdy. Czasem są to odkrycia, w które nikt nie wierzy, które współczesnym wydają się niemożliwe. Takie odkrycia mogą wynikać z błędu doświadczalnego (zimna fuzja, cząstki szybsze od światła), mogą być pomyłką lub świadomym oszustwem, ale dzięki metodzie naukowej bardzo szybko zostaną zdyskwalifikowane, także przez innych badaczy. Więc nie mówcie, że uczeni nie wiedzą, co lepsze: masło czy margaryna. Badania trwają i wyrzuciwszy słowo „lepsze”, na pewno uzyskamy wystarczającą liczbę danych o tym, jak działa jeden i drugi tłuszcz na żywy organizm.

Ale nieoczekiwane odkrycia mogą być wynikiem bardziej wnikliwej analizy już znanych procesów. Czasem potrzebny jest wielki upór badawczy. Takim uporem odznaczyła się np. Barbara McClintock, która w latach 30–40. ub. wieku badała zmienność kolorów ziaren i liści kukurydzy i propagowała tezę, że wynika ona z „przeskakiwania” genów w różne pozycje genomu. Przypominam, że w tym czasie nie wiadomo było, z czego zbudowany jest gen, a jeśli chodzi o skakanie w kukurydzy, to można było się tylko z tego śmiać. Barbara była przez całe życie samotną badaczką, dobrze, że dawano jej jakieś miejsce w laboratorium. A potem, dużo później (lata 1960–1970), odkryto skaczące geny w bakteriach, a potem też w wyższych organizmach i dobrze, że Barbara okazała się genialnym naukowym wizjonerem jako młodziutka osoba i jeszcze zdążyła odebrać w 1983 roku Nagrodę Nobla.

Wyłomy w ustalonych faktach czynili także H. Temin (odwrotna transkrypcja), K. Cantell (interferon), S. Prusiner (priony). I o dziwo, wszystkie te odkrycia zasłużyły na Nagrody Nobla.

Nie bój się odkryć coś nieprzewidywalnego. A potem to sprawdź, nim wyruszysz do Sztokholmu.

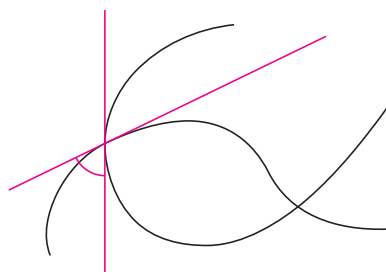
Magdalena FIKUS



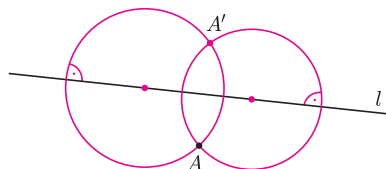
Symetria względem okręgu

Michał MIŚKIEWICZ*

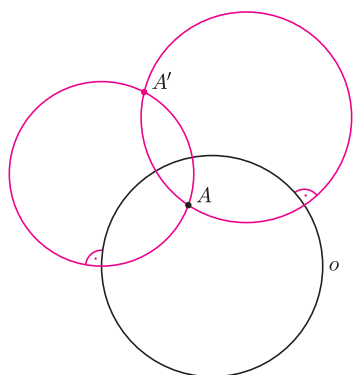
W naszych rozważaniach wzbogacimy płaszczyznę o dodatkowy punkt, który oznaczymy przez ∞ . Przyjmijemy przy tym, że ów punkt leży na każdej z prostych. Takie rozszerzone proste oraz okręgi obejmujemy wspólną nazwą *bloków*. Czytelnik może wyobrażać sobie ∞ jako punkt „nieskończenie daleko”, ale równie dobrze może traktować go jedynie jako umowę notacyjną, która ułatwi sformułowanie pewnych zależności.



Kąt między krzywymi to kąt między stycznymi do nich w punkcie ich przecięcia.



Tak konstruuje się obraz punktu w symetrii względem prostej,



a tak względem okręgu.

Zacznijmy od zdefiniowania kąta między dwiema krzywymi: jeśli dwie gładkie krzywe się przecinają, to kątem między nimi nazwiemy kąt między stycznymi poprowadzonymi w punkcie przecięcia. W ogólności kąt ten może być różny dla różnych punktów przecięcia, tutaj jednak ograniczymy się wyłącznie do rozważania bloków. Dwa bloki mogą przecinać się w więcej niż jednym punkcie, ale wtedy otrzymany kąt nie zależy od jego wyboru; możemy więc śmiało mówić o kącie między dwoma przecinającymi się blokami. Gdy kąt ten jest prosty, figury nazywamy prostopadłymi. Na przykład, prosta jest prostopadła do okręgu dokładnie wtedy, gdy przechodzi przez jego środek.

Przypomnijmy dobrze znaną konstrukcję symetrii osiowej cyrklem i linijką. Aby dla danej prostej l i punktu A wyznaczyć punkt A' do niego symetryczny, zakreślmy dwa okręgi przechodzące przez A i prostopadłe do prostej l (czyli o środkach leżących na l). Wówczas punkt A' otrzymujemy jako drugi punkt przecięcia tych okręgów. Oczywiście równie poprawne byłoby tutaj zastąpienie słowa *okrąg* słowem *blok*. Jediną zmianą byłoby dopuszczenie prostej przechodzącej przez A i prostopadłej do l – co prawda trudniej jest ją wytyczyć, ale przecież i ona przechodzi przez A' . Tak sformułowany opis konstrukcji motywuje do przeprowadzenia podobnej operacji w przypadku okręgu.

Definicja (symetria względem okręgu). Dany jest okrąg o oraz punkt A . Poprowadźmy dwa bloki przechodzące przez A i prostopadłe do okręgu o . Ich drugi punkt przecięcia A' nazwiemy punktem symetrycznym do A względem okręgu o . Otrzymane przekształcenie nazwiemy symetrią (lub inwersją) względem okręgu o .

Jest jasne, że tak zdefiniowane przekształcenie jest samoodwrotne: obrazem obrazu dowolnego punktu jest on sam. Powyższa definicja obejmuje również przypadki, gdy A jest punktem ∞ lub środkiem okręgu o . Punkty te zamieniają się miejscami, gdyż wszystkie proste przechodzące przez środek okręgu są prostopadłe do o i przechodzą przez punkt ∞ .

O symetrii względem okręgu (inwersji) można było przeczytać więcej m.in. w *deltoidzie* 5/2013 i 8/2013. Definicja podana powyżej różni się jednak od tej powszechnie przyjętej. Posiada ona niewątpliwe wady – nie jest na przykład jasne, że określenie punktu A' nie zależy od wyboru bloków prostopadłych. Czytelnik znający podstawowe własności inwersji (można je znaleźć w przywołanych artykułach) może łatwo ze standardowej definicji wyprowadzić powyższą jako wniosek. Nasza definicja posiada jednak następującą zaletę – w naturalny sposób uogólnia pojęcie symetrii osiowej. Tutaj pójdziemy na skróty, przywołując bez dowodu najważniejsze własności symetrii względem ustalonego bloku b :

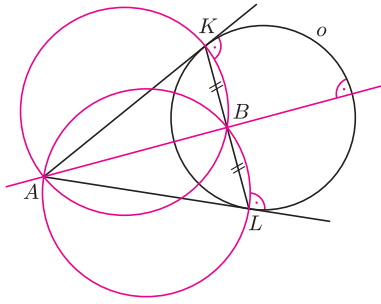
1. Obrazem dowolnego bloku jest blok.
2. Zachowane są kąty między krzywymi, w szczególności zachowana jest prostopadłość bloków.
3. Zachowane są symetrie względem bloków, to znaczy jeśli punkty A, A' są symetryczne względem o , to ich obrazy są symetryczne względem obrazu o .

Gdy b jest okręgiem o środku S , to punkty S, ∞ są symetryczne względem b . Dlatego obrazem bloku przechodzącego przez S jest blok przechodzący przez ∞ , czyli prosta. W podobny sposób na podstawie własności 1 można podać kryteria, kiedy obrazem prostej jest okrąg, kiedy obraz okręgu przechodzi przez S itd.

Definicja (wersja standardowa). Dany jest okrąg $o = o(S, r)$ oraz punkt A . Punktem symetrycznym do A względem okręgu o nazwiemy punkt A' na półprostej SA^{\rightarrow} spełniający $SA \cdot SA' = r^2$.

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Zwróćmy uwagę, że trzecia własność wynika z dwóch poprzednich. Istotnie, jeśli zgodnie z definicją mamy dwa bloki prostopadłe do o przechodzące przez A i A' , to przy symetrii względem b konfiguracja ta jest zachowana: ich obrazy są blokami prostopadłymi do obrazu o i przechodzącymi przez obrazy punktów A i A' , a zatem obrazy tych punktów są symetryczne względem obrazu o .

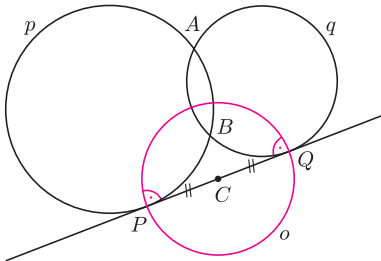


Rys. 1

Poniżej znajdują się przykłady zadań, w których można z powodzeniem wykorzystać wymienione własności.

Zadanie 1. Proste k, l są styczne do okręgu o w punktach K, L i przecinają się w punkcie A . Punkt B jest środkiem odcinka KL . Wykazać, że punkty A, B są symetryczne względem okręgu o .

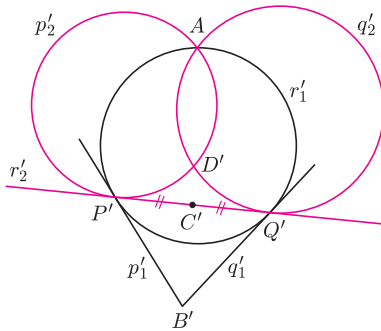
Rozwiązanie. Skoro prosta AB jest prostopadła do KL , to jako bloki z definicji można przyjąć okręgi o średnicach AK i AL , gdyż są prostopadłe do o i przechodzą przez A, B (rys. 1). Oczywiście, sama prosta AB też się do tego celu nadaje. \square



Rys. 2

Zadanie 2. Okręgi p i q przecinają się w punktach A i B . Prosta r jest styczna do tych okręgów w punktach odpowiednio P i Q . Punkt C jest środkiem odcinka PQ . Wykazać, że punkty A, B, C są współliniowe.

Rozwiązanie. Niech o będzie okręgiem o średnicy PQ . Okręgi p, q są do niego prostopadłe, a zatem punkty A, B są symetryczne względem o (rys. 2). Stąd już wynika, że są współliniowe z punktem C jako środkiem tego okręgu – prosta poprowadzona z C do punktu A jest prostopadła do o , więc musi przechodzić przez punkt B . \square



Rys. 3

Zadanie 3. Okręgi p_1 i q_1 przecinają się w punktach A i B . Prosta r_1 jest styczna do tych okręgów w punktach odpowiednio P i Q . Punkt C jest symetryczny do punktu B względem prostej r_1 . Okrąg r_2 jest opisany na trójkącie APQ . Proste p_2 i q_2 styczne do r_2 w punktach odpowiednio P' i Q' przecinają się w punkcie D . Wykazać, że punkty A, C, D są współliniowe.

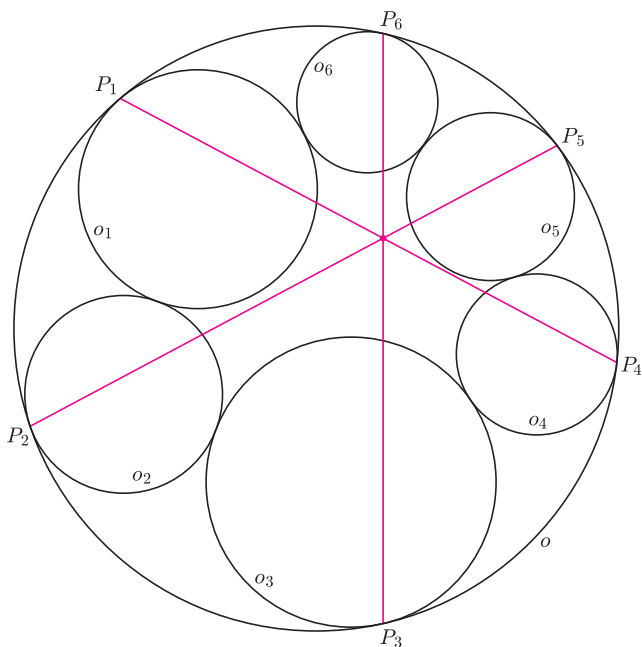
Rozwiązanie. Przeprowadźmy symetrię względem dowolnego okręgu o o środku w A ; obraz każdej z figur oznaczmy przez dodanie znaku prim. Na podstawie własności 1 możemy zauważyć, że figury z zadania zamieniły się rolami: okręgi p'_2 i q'_2 przecinają się w punktach A i D' , prosta r'_2 jest styczna do tych okręgów w punktach P', Q' , okrąg r'_1 jest opisany na trójkącie $AP'Q'$, proste p'_1 i q'_1 są styczne do r'_1 w punktach P', Q' oraz przecinają się w punkcie B' (rys. 3).

Dzięki własności 3 wiemy, że punkt C' jest symetryczny do punktu B' względem okręgu r'_1 , co na mocy zadania 1 oznacza, że jest środkiem odcinka $P'Q'$. W ten sposób otrzymaliśmy konfigurację z zadania 2, a zatem punkty A, C', D' są współliniowe. Obrazem prostej $AC'D'$ jest prosta ACD , co kończy rozwiązanie. \square

W drugiej części artykułu zaprezentuję wyjątkowo elegancko twierdzenie, którego dowód wykorzystuje niektóre z przedstawionych wcześniej własności symetrii względem okręgu.

Twierdzenie o siedmiu okręgach. Dany jest okrąg o oraz styczne do niego okręgi $o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6$, z których każdy jest styczny do następnego. Okrąg o_i jest styczny do o w punkcie P_i , ponadto punkty P_1, P_2, \dots, P_6 leżą na o w tej właśnie kolejności. Wtedy proste P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6 przecinają się w jednym punkcie.

W dowodzie będziemy się posługiwać *potęgą punktu względem okręgu*. O tym przydatnym narzędziu można przeczytać w *deltoidzie* 2/2012 i 3/2012. Poniżej podajemy kluczowe dla nas własności i pojęcia.





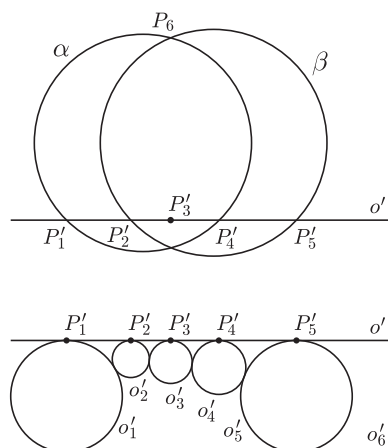
Uwaga. Jeśli dany jest okrąg o i punkt A , a prosta k przechodzi przez A i przecina o w punktach P, Q , to wartość iloczynu skalarnego $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ nie zależy od wyboru prostej k . Tę wspólną wartość nazywamy *potęgą A względem o* . Dla dowolnych niewspółśrodkowych okręgów o_1, o_2 zbiór tych wszystkich punktów A , które mają tę samą potęgę względem obu tych okręgów, tworzy prostą. Nazywamy ją *osią potęgową okręgów o_1, o_2* .

Jako przykład możemy rozważyć okręgi o_1, o_2 przecinające się w punktach A, B . Oba punkty mają tę samą (zerową) potęgę względem obu okręgów, a zatem osią potęgową okręgów o_1, o_2 jest ich wspólna sieczna AB . Ta obserwacja, choć bardzo prosta, okaże się nam jeszcze przydatna.

Lemat. Dana jest prosta k oraz okręgi o_1, o_2, o_3 , z których każdy jest styczny do następnego. Okrąg o_i jest styczny do k w punkcie P_i , ponadto punkty P_1, P_2, P_3 leżą na k w tej właśnie kolejności. Wtedy stosunek długości odcinków powstałych na prostej k zależy wyłącznie od stosunku promieni okręgów o_1, o_3 .

Lemat powyżej jest pozostawiony Czytelnikowi jako zadanie. Istotnie, nietrudno jest obliczyć długości tych odcinków na podstawie promieni okręgów o_1, o_2, o_3 ; można też próbować mniej bezpośrednich metod. Teraz możemy już przejść do właściwego dowodu.

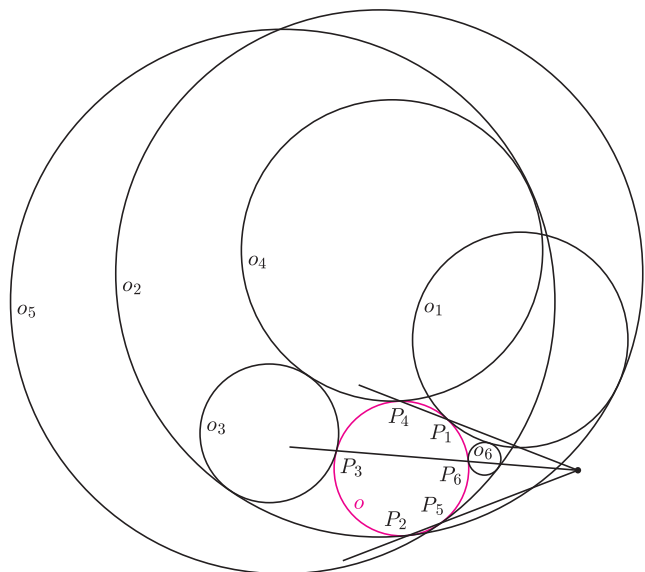
Dowód twierdzenia. Podobnie jak w rozwiązaniu zadania 3, przeprowadźmy symetrię względem dowolnego okręgu o środku w P_6 i obraz każdej z figur oznaczmy przez dodanie znaku prim. Podobnie też możemy stwierdzić, że okręgi o i o_6 przechodzą na proste równoległe o' i o'_6 , a obrazami pozostałych okręgów są okręgi o'_1, \dots, o'_5 zachowujące odpowiednie styczności; ich promienie oznaczmy kolejno przez r_1, \dots, r_5 . W szczególności oba okręgi o'_1, o'_5 są styczne do prostych równoległych o' i o'_6 , zatem $r_1 = r_5$. Punkty styczności P'_1, \dots, P'_5 leżą na prostej o' w tej właśnie kolejności.



Proste P_1P_4 i P_2P_5 przechodzą na okręgi $\alpha = o(P'_1P'_4P_6)$ i $\beta = o(P'_2P'_5P_6)$. Pozostaje wykazać, że prosta P'_3P_6 (czyli obraz prostej P_3P_6) przechodzi przez drugi punkt przecięcia α i β . Na podstawie stwierdzenia i następującej po nim uwagi jest to równoważne temu, że punkt P'_3 leży na osi potęgowej α i β . Aby to sprawdzić, wystarczy pokazać równość $\overrightarrow{P'_3P'_1} \cdot \overrightarrow{P'_3P'_4} = \overrightarrow{P'_3P'_2} \cdot \overrightarrow{P'_3P'_5}$, która przy ustalonej przez nas kolejności punktów P'_1, \dots, P'_5 przyjmuje postać proporcji

$$\frac{P'_3P'_1}{P'_3P'_2} = \frac{P'_3P'_5}{P'_3P'_4}.$$

Lemat implikuje, że lewa strona równości wyraża się przez stosunek promieni r_1/r_3 ; podobnie prawa strona wyraża się w ten sam sposób przez r_5/r_3 . Już wcześniej zauważyliśmy, że $r_1 = r_5$, co kończy dowód. \square



Na koniec chciałbym zachęcić Czytelnika do zastanowienia się nad poniższymi pytaniami. Wydają się one całkiem naturalne, a w celu znalezienia odpowiedzi wystarczy prześledzić powyższy dowód.

- Jak sformułować twierdzenie, aby można było w nim mówić o dowolnych blokach o, o_1, \dots, o_6 , niekoniecznie okręgach?
- Jakie inne kolejności punktów P_1, \dots, P_6 na okręgu o można dopuścić w założeniach?

Ze świata USOS. Część 10 – Ciągnąć czy pchać?

Maxymilian ŚMIECH student, Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

W okolicy mojego wydziału znajduje się stylowy bar mleczny. Potrawę należy wybrać przy kasie, zapłacić, a następnie podejść do „okienka”. Tam podajemy paragon i rozpoczynamy oczekiwanie na posiłek.

Niestety, okienko jest wyjątkowo małe i znajduje się bardzo nisko. Ciężko jest wsunąć rękę, a próba spojrzenia do wnętrza kuchni wymaga schylenia się. Zatem skąd mam wiedzieć, czy po drugiej stronie stoi mój talerz? Przy okienku nie ma dość miejsca na ciągłe czekanie, a zachowanie wygiętej postawy jest męczące – po prostu nie mogą cały czas tam zaglądać.

Spróbujmy opisać zachowania różnych klientów tego baru. Jednocześnie porównajmy przedstawioną historię ze światem komputerów na przykładzie najprostszej i niezwykle popularnej analogii, będącej w naszym świecie od lat: serwera WWW. Kuchnia to taki serwer. Produkty spożywcze to dane, a kucharki są jak programy (procesy, wątki) obsługujące żądania ludzi-klientów. Wszyscy są głodni, nikt nie chce dostać zimnego jedzenia.

Człowiek, który wciąż zagląda, by sprawdzić „czy już”, stara się skrócić okres stygnicia. Im częściej będzie patrzył, tym krócej jego posiłek będzie czekał na odebranie. Niestety, każde pytanie zabiera trochę czasu i energii. Należy wypracować kompromis między naszym zaangażowaniem a świeżością potrawy. Jeśli rzadziej pytamy, możemy w przerwach wykonywać inne czynności – czytać gazetę lub rozmawiać z kolegą.

Najbardziej rozpowszechnionym przykładem takiego zachowania jest indeksowanie sieci. W tym przypadku klient-wyszukiwarka prosi o stronę WWW, po czym analizuje jej treść. Jeśli spodziewa się regularnych aktualizacji, może częściej odpytywać serwer – łatwo zauważyć, że popularne portale informacyjne są sprawdzane co kilka minut.

Niestety, nawet jeśli inteligentnie dostosujemy częstotliwość sprawdzania, zawsze pojawią się opóźnienia. To staje się dotkliwie, gdy wiemy, że na stronie wkrótce coś się zmieni, ale nie możemy sobie pozwolić na intensywne pytanie. Taka sytuacja pojawia się na portalach społecznościowych – pojedyncze osoby raczej rzadko publikują, ale nowe zdarzenie od któregośkolwiek z naszych licznych znajomych pojawia się dość często. Chcemy być na bieżąco, żeby inni nie posądzili nas o towarzyskie wycofanie. Tutaj nieco żartuję, ale na giełdzie podobna gra toczy się o duże pieniądze.

Wróćmy do naszego baru. Możemy sobie wyobrazić tłok, jaki powstanie przy okienku, gdy wielu klientów będzie bardzo często sprawdzać „czy już”. Jeśli będzie ich za dużo, wszyscy się zablokują i nikt nowy nie będzie mógł podejść. Gdy zaczną napierać jeszcze mocniej – ściana nie wytrzyma, a kuchnia obróci się w ruinę. Tak samo w Internecie spotykamy serwisy, które nie nadążają z obsługą klientów. Z reguły wracają do działania, gdy

zainteresowanie maleje. Jednak gwałtowny wzrost ruchu może spowodować fizyczną awarię sprzętu, co wstrzymuje działanie usługi na dłuższy czas.

Odpytywanie będziemy ładnie nazywać „ciągnięciem” (*pull*), aby wyrazić działanie klienta: zgłasza się po dane wtedy, gdy ich potrzebuje. Zobaczyliśmy już, że klient powinien uważać ze zbyt częstym odpytywaniem, gdyż to męcząca czynność, także dla serwera.

Zastanówmy się teraz, jak nasz bar działa w rzeczywistości. Klienci nie muszą wciąż zaglądać do okienka – mogą spokojnie siedzieć przy stole. Gdy nadejdzie ich pora, zostaną zawiadomieni głośnym wywołaniem nazwy dania. W tej sytuacji serwer-kuchnia „wypycha” (*push*) informację z własnej inicjatywy – wie najlepiej, kiedy skończy gotować i do tego czasu nie musi nas zalewać bezużytecznymi komunikatami „proszę czekać”.

Potrzeba wypychania bieżących informacji pojawiła się wraz z serwisami udostępniającymi bogate w treść i dynamicznie zmieniające się strony WWW. Pierwsze próby były naiwne: aby użytkownik nie musiał nerwowo odświeżać strony, wprowadzono możliwość jej automatycznego przeładowania po ustalonym czasie. Mimo zwolnienia użytkownika z tej czynności, takie rozwiązanie to wciąż zwykle ciągnięcie.

Dynamiczne strony zaczęły tworzyć nadmierny ruch w sieci. Aby uniknąć przeciążenia serwera, który przy każdym żądaniu musiał na nowo generować całą zawartość, zastosowano pobieranie tylko tych fragmentów, które mogły się zmienić – w przypadku śledzenia znajomych będą to ich nowe komentarze czy zdjęcia. Reszta strony pozostanie ta sama – serwer oszczędzi czas i pamięć na generowaniu statycznego szkieletu, a wszyscy po drodze ucieszą się z mniejszego użycia łącza. Pomocny jest tu zestaw technologii AJAX, pozwalający pobrać dane z serwera i umieścić na wyświetlonej stronie bez ładowania jej od nowa. Niestety, to wciąż nic więcej, jak ciągnięcie.

W tym momencie ograniczeniem stały się tradycyjne serwery WWW, takie jak Apache. Ich model przetwarzania – wczytaj żądanie, wykonaj operację, przekazaj wynik – nie pasuje do schematu, w którym serwer niejako „sam z siebie” decyduje o wysłaniu czegoś do przeglądarki. Dążenie do dwukierunkowej komunikacji zmieniło sposób działania serwerów oraz wykorzystywane metody programowania. Od teraz żądanie jednego klienta może wywołać kaskadę zdarzeń, które doprowadzą do wysłania komunikatu do kogoś zupełnie innego. Udało się rozwiązać problem serwerów, lecz na drodze stanęły ograniczenia kanału transmisyjnego, a dokładniej: sposobu wymiany informacji między przeglądarką a serwerem WWW – znanego wszystkim jako protokół HTTP.

Fundamentalne cechy HTTP powodują, że pasuje on niemal wyłącznie do modelu żądanie-odpowiedź. Po pierwsze: zawsze klient nawiązuje połączenie z serwerem. Skomplikowana architektura Internetu i połączeń między komputerami sprawia, że w olbrzymiej większości przypadków przeglądarka jest ukryta przed światem, zatem nie może być wywołana przez serwer. Tylko, gdy z własnej inicjatywy nawiąże z nim połączenie, można przesłać do niej dane.

Programiści zaczęli się zastanawiać, jak można nadużyć tradycyjnego modelu żądanie-odpowiedź, aby tworzyć serwery WWW korzystające z HTTP i potrafiące wypychać informacje. Podstawy są banalne: przeglądarka inicjuje połączenie. Wiemy już, że inaczej się nie da. Mamy natomiast kontrolę nad tym, kiedy takie połączenie rozpoczynać i jak długo je utrzymywać.

Pierwsze rozwiązanie to cykliczne odpytywanie (*polling*) – klient pyta serwer, czy są jakieś dane, jeśli tak, to je pobiera, a na koniec rozłącza się. Po chwili łączy się ponownie. Taki schemat bardzo łatwo zrealizować, mając do dyspozycji tradycyjny serwer WWW. Pewnym wariantem, który wymaga specjalnych rozwiązań po stronie serwera, jest długie odpytywanie (*long polling*). Różnica w stosunku do zwykłego odpytywania jest subtelna: jeśli serwer stwierdzi, że nie ma nic do wysłania, wstrzymuje odpowiedź. Nie robi nic, nawet nie kończy połączenia. Z punktu widzenia klienta, serwer zachowuje się tak, jakby bardzo długo liczył. W rzeczywistości czeka, aż pojawią się interesujące dane do przekazania. Dopiero wtedy wysyła treść i się rozłącza.

Kiedyś zakładano, że serwer szybko zacznie wysyłać odpowiedź. Jeśli przez dłuższy czas nic nie wysyłał, to najprawdopodobniej coś poszło nie tak i należało zerwać połączenie. Natomiast gdy serwer rozpoczął wysyłanie, połączenie mogło trwać bardzo długo, gdyż Internet nie był tak szybki jak dzisiaj. Ważne, żeby co jakiś czas pojawiały się nowe bajty do odebrania. Wysyłanie drobnych danych podtrzymujących połączenie (tzw. „bicie serca”) można zrealizować na dowolnym serwerze za pomocą odpowiedniej konfiguracji.

To tylko przykłady kilku nadużyć, które wymyślili sprytni programiści. W pewnym momencie zaczęto zastanawiać się nad standardowym protokołem dwukierunkowej komunikacji na stronach WWW. Tak powstał WebSocket. Wiemy, że HTTP zbudowany jest na bazie protokołu TCP. Mimo że TCP pozwala stworzyć trwałe połączenie, żądania HTTP są niezależne i każde z nich musi zawierać zestaw informacji identyfikacyjnych, co niepotrzebnie wykorzystuje pasmo. HTTP nadaje się do przesyłania pełnych stron WWW, ale jest zbyt kosztowny w przypadku drobnych komunikatów. WebSocket opakowuje HTTP w zaskakujący sposób: tworzy naprawdę trwałe połączenie z serwerem, co pozwala uniknąć przesyłania zbędnych danych w czasie dalszej transmisji. W ten sposób HTTP zostaje odchudzony do niemal surowego TCP.

Jakie serwisy internetowe są odpowiednikami ruchliwych barów? Mówiliśmy już o portalach społecznościowych. Inne przykłady to podawanie bieżących statystyk finansowych czy dynamiczne gry w przeglądarce. Nawet USOS, a dokładniej niektóre jego aplikacje webowe, zwłaszcza rejestracje żetonowe, ale także USOSweb, w czasie zapisów na przedmioty bądź egzaminy odczuwają wyjątkowe zainteresowanie. Studenci bardzo chcą „ugryźć” miejsce w dobrej grupie.

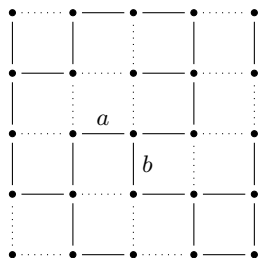
Dotychczasowa obsługa jest mało fachowa: o ustalonej godzinie rejestracja zostaje otwarta, a setki studentów starają się jak najszybciej przeładować stronę, a następnie kliknąć „zielony koszyk”. Najczęściej wszystkie miejsca w najlepszych grupach zostają błyskawicznie zajęte. Niektórzy od razu po wejściu na stronę mają do wyboru tylko te grupy, których nikt nie chciał. Można sobie wyobrazić strategię, jakie stosują studenci, żeby złapać dobrą grupę, a przynajmniej uniknąć trafienia do najgorszej. Krążą różne legendy i tajne sposoby na pomyślną rejestrację. W rzeczywistości decyduje przypadek. Krytycznym punktem systemu jest centralna baza danych, która musi za każdym razem zdecydować o przyjęciu zapisu. W zależności od liczby studentów, serwer staje się niedostępny na minutę lub godzinę. Niektórym udaje się zobaczyć stronę, pozostali otrzymują błąd. To niezbyt sprawiedliwe.

Jako programiści USOS staramy się wykorzystać nowoczesne techniki programistyczne, aby uniknąć „zabijania” serwera w czasie rejestracji. Po pierwsze, odchodzimy od natychmiastowego rejestrowania chętnych studentów – chcemy zbierać ich kliknięcia przez dłuższą chwilę jako „prośby”. W ten sposób odciążymy główną bazę danych, aby nie doprowadzić do zablokowania całego systemu. Gdy nadejdzie odpowiednia pora, prośby będą przetwarzane tak, aby dać uczciwą szansę każdemu studentowi.

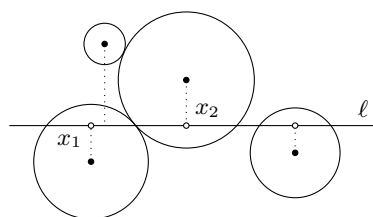
Prawdziwe pchanie osiągniemy, tworząc specjalny interfejs w przeglądarce: stronę, na którą student wchodzi raz, na początku rejestracji, po czym wszystkie najważniejsze informacje i wydarzenia zostaną mu podane we właściwym momencie. Główny widok zawiera podsumowanie próśb składanych przez wszystkich uczestników. Najważniejsza cecha komunikacji to wysyłanie statystyk do przeglądarki tylko wtedy, gdy coś się zmieni. Ponadto, możemy inteligentnie dobierać częstotliwość powiadamiania w zależności od obciążenia. Dzięki temu dajemy równe szanse wszystkim studentom. Każdy z nich zobaczy działającą stronę, każdy będzie otrzymywał taką samą ilość informacji oraz każdy zdąży podjąć odpowiednie decyzje.

Dwukierunkowa komunikacja pozwala zatrzeć różnice między przeglądarką a serwerem: obie strony stają się niemal równoprawnymi częściami nowoczesnej aplikacji webowej. Wkrótce premiera naszych nowych rozwiązań. Być może Czytelnik, rejestrując się na swój wymarzony przedmiot czy zajęcia z WF-u, wspomni ten artykuł, doceniając zaawansowaną technologię stojącą za pozornie prostą stroną WWW.

Informatyczny kącik olimpijski (74): Jakie to proste



Rys. 1. Jeśli spojrzymy na mapę miasta jak na układ współrzędnych, to dla każdej pary liczb całkowitych x, y , takiej że $1 \leq x, y \leq n$, w punkcie (x, y) znajduje się skrzyżowanie; ponadto każde dwa skrzyżowania oddalone o 1 są połączone ulicą. Przykładowe miasto dla $n = 5$, w którym zamknięto już 16 ulic (linie kropkowane). Po zamknięciu ulicy a będzie można przejechać między jej końcami, nie uda się to natomiast po zamknięciu ulicy b .



Rys. 2. Na odcinku x_1x_2 prostej ℓ nie ma żadnego rzutowanego środka koła, które przecina ℓ .



Rozwiązanie zadania M 1428.

Oznaczmy $p_I = a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_k}$, gdzie I jest ciągiem indeksów $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ (mamy $\binom{n}{k}$ takich ciągów). Niech również $p = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$. Wówczas $S_k = \sum_I p_I$ oraz $S_{n-k} = \sum_I p/p_I$, więc z nierówności Schwarza dostajemy

$$\begin{aligned} \sqrt{S_k S_{n-k}} &= \sqrt{\sum_I p_I} \sqrt{\sum_I \frac{p}{p_I}} \geq \sum_I \sqrt{p} = \\ &= \binom{n}{k} \sqrt{p}. \end{aligned}$$

W tym kąciku dwa zadania z cyklu naszych ulubionych, tzn. na pierwszy rzut oka ciężkie do ugryzienia, ale ące ładne i krótkie rozwiązania.

Zadanie *Bajthattan* pochodzi z Akademickich Mistrzostw Polski w Programowaniu Zespołowym z roku 2013. Sieć drogowa w mieście tworzy regularną siatkę $n \times n$ (rys. 1). Napływają do nas informacje o zamknięciach ulic. Dla każdej informacji mamy stwierdzić, czy po zamknięciu danej ulicy nadal będzie można przejechać pomiędzy skrzyżowaniami położonymi na jej końcach, poruszając się jedynie po ulicach, które dotychczas nie zostały zamknięte.

Oczywiście, sieć drogową możemy zastąpić grafem nieskierowanym, w którym wierzchołki reprezentować będą skrzyżowania, a krawędzie – ulice. I, oczywiście, rozwiązanie brutalne, które dla każdego zamknięcia ulicy (usunięcia krawędzi grafu) wykonuje przeszukiwanie grafu w celu znalezienia ścieżki pomiędzy dwoma wierzchołkami, nas nie satysfakcjonuje. Takie rozwiązanie działa w czasie $O(kn^2)$, gdzie k to liczba usunięć krawędzi.

Zauważmy, że jeśli ścieżka pomiędzy końcami usuniętej krawędzi nie istnieje, to usunięcie tej krawędzi spowodowało, że jej końce znalazły się w różnych spójnych składowych grafu. Równoważnie zatem możemy badać, które usunięcia krawędzi zwiększają liczbę spójnych składowych grafu. Nasz graf jest *planarny*, zatem zależność między liczbą jego wierzchołków, krawędzi, ścian (części płaszczyzny ograniczonych krawędziami) i spójnych składowych (oznaczymy te liczby kolejno przez v, e, f i s) wyraża się wzorem Eulera:

$$v - e + f = s + 1.$$

Rozważmy usunięcie jednej krawędzi. Liczba wierzchołków v jest stała (równa n^2), natomiast liczba krawędzi e zmniejsza się o jeden. Jeśli po obu stronach usuwanej krawędzi mieliśmy tę samą ścianę, to f się nie zmienia (i wtedy liczba spójnych składowych s rośnie o jeden), w przeciwnym wypadku f maleje o jeden (i wtedy s się nie zmienia).

Powyższy warunek możemy testować, trzymając ściany grafu w strukturze dla zbiorów rozłącznych. W momencie, gdy usuwamy krawędź, dwie ściany należy połączyć. Rozwiązanie to działa w czasie $O(n^2 + k \log^* n)$.

Z kolei *Kręgi w zbożu* pojawiły się w finale Potyczek Algorytmicznych 2012. Na płaszczyźnie znajduje się n kół, których wnętrza są rozłączne. Środek i -tego koła znajduje się w punkcie (x_i, y_i) , a jego promień wynosi r_i . Należy wyznaczyć liczbę par kół, które mają punkt wspólny.

Znowu rozwiązanie brutalne, które z osobna sprawdza każdą z $O(n^2)$ par kół, jest za wolne. Z drugiej strony, odpowiedź nie będzie nigdy przekraczać $3n$ (gdyż graf o n wierzchołkach w środkach okręgów i krawędziach łączących środki stykających się kół jest planarny, więc ma co najwyżej $3n$ krawędzi). Spróbujmy zatem ograniczyć liczbę kandydatów na pary, które musimy sprawdzić. Zauważmy, że jeśli poprowadzimy linię prostą ℓ przez punkt przecięcia pary kół, a następnie rzutujemy prostopadłe na tę prostą środki wszystkich kół, które przecinają ℓ , to rzutowane środki kół należących do pary będą sąsiadować na prostej (rys. 2).

Dzięki temu spostrzeżeniu możemy zastosować metodę zmiatania. Będziemy przesuwając od dołu do góry poziomą linię prostą (miotłę) i jednocześnie utrzymywać zbiór kół, które ją przecinają. Zauważmy, że i -te koło zostanie wrzucone do zbioru, gdy miotła będzie w pozycji $y = y_i - r_i$, a zostanie z niego usunięte dla $y = y_i + r_i$. Co więcej, będą to jedyne momenty, w których zawartość zbioru będzie się zmieniać. Zatem w czasie $O(n \log n)$ sortujemy te „istotne” pozycje miotły, a następnie przechodzimy je w kolejności niemalejącej. Za każdym razem, gdy uaktualnimy zbiór, sprawdzamy stałą liczbę par kół (konkretnie te, które sąsiadują z dodanym kołem lub sąsiadowały z usuniętym). Zbiór realizujemy jako uporządkowany słownik, w którym koła są posortowane względem wartości x_i i który umożliwia w czasie $O(\log n)$ dodawanie i usuwanie elementów oraz znajdowanie następnego i poprzedniego elementu w tym porządku.

Rozwiązanie działa w czasie $O(n \log n)$. I jak to bywa w zadaniach z geometrii obliczeniowej – pozostał jeden przypadek szczególny (gdy miotła jest styczna do pary kół), którego uwzględnienie pozostawiamy jako zadanie dla Czytelników.

Tomasz IDZIASZEK

Nowe degradowalne duromery

Etap rozwoju cywilizacyjnego można poznać po ilości i rodzaju śmieci, które dana cywilizacja po sobie zostawia. Obecny przełom tysiącleci to epoka tworzyw sztucznych. Ich dostępność i trwałość zmieniły nasze zwyczaje i zapewnią nam nieśmiertelność: [...] *trza dzieciom ostawić długie. Wielkie długie, co by je splotały. Bedóm długo splotać, bedóm długo wiedzieć, ze miały ojca.* (Józef Tischner, *Historia filozofii po góralsku*).

Jakimś sposobem jest segregacja i odzysk odpadów. Polska nie jest jedynym krajem, w którym to idzie bardzo opornie, ale jest modelowym tego (oporu) przykładem. Świadczy to nie tylko o braku kultury, ale również o braku cywilizacji. Nawet jeżeli chcielibyśmy segregować śmieci, to często nie wiemy lub nie bardzo mamy jak.

Tworzywami, które wyjątkowo trudno przetworzyć, są duromery (ang. *thermosets*). Dlatego od dawna poszukiwane są ich odmiany, które (zachowując pożądane cechy, takie jak wytrzymałość mechaniczna, odporność na wysoką temperaturę czy obojętność chemiczna) mogłyby być łatwo (czyli tanio i bez znaczącego dodatkowego obciążenia dla środowiska) przetwarzane [1].

Właśnie została opublikowana praca [2], którą można uważać za przełomową. Autorzy opisują w niej bardzo prosty (szybki i tani) sposób uzyskania duromerów poprzez polikondensację (para)formaldehydu (H_2CO) i węglowodorów z przyłączonymi dwiema grupami aminowymi ($-NH_2$). Reakcja zachodzi w ciągu kilkudziesięciu minut w temperaturze $50^\circ C$, a po dodatkowym, dziesięciominutowym podgrzaniu do $185^\circ C$ (w obecności dimetylosulfotlenku $(CH_3)_2SO$) wytwarzają się dodatkowe połączenia sieci (z wydzieleniem wody). Otrzymuje się w ten sposób materiał o bardzo dużej wytrzymałości mechanicznej.

Najciekawsze jest jednak to, że uzyskane materiały rozkładają się do podstawowych substratów w środowisku kwaśnym $pH < 2$ (wystarczająco kwaśny jest już kwas żołądkowy).

Otwiera to drogę do nowej rodziny polimerów o różnych własnościach, które byłyby całkowicie odzyskiwalne.

Można żywić nadzieję, że doprowadzi to do znacznego uszczuplenia dziedzictwa naszej cywilizacji.

[1] Timothy E. Long; *Toward Recyclable Thermosets*; *Science* **344**, 706–707, 16/05/2014; DOI: 10.1126/science.1254401

[2] Jeannette M. García i inni; *Recyclable, Strong Thermosets and Organogels via Paraformaldehyde Condensation with Diamines*; *Science* **344**, 732–735, 16/05/2014; DOI: 10.1126/science.1251484

[3] Margaret S. Livingstone i inni, *Symbol addition by monkeys provides evidence for normalized quantity coding*; *PNAS*; DOI: www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.1404208111

Małpy liczą niedościgle

Kultura to jest to, co wyróżnia nas spośród zwierząt. Nie jest to pogląd specjalnie kontrowersyjny. Czyż jednak przeświadczenie o wyjątkowości posługiwania się np. myśleniem symbolicznym nie wynika głównie z trudności w porozumiewaniu się ze zwierzętami? Często można odnieść wrażenie, że to bardziej my nie rozumiemy zwierząt niż one nas.

Kultura matematyczna jest kluczowym aspektem ogólnoludzkiej kultury. Wykazano, że wiele gatunków zwierząt (badano głównie ssaki i ptaki) potrafi liczyć, tzn. prawidłowo oceniać liczebność zbiorów skończonych. Oczywiście, precyzja takiej oceny maleje wraz z tą liczebnością (np. przeciętni ludzie radzą sobie z takim liczeniem do około siedmiu). Po przekroczeniu pewnej wartości przechodzimy na ocenę w skali logarytmicznej (tzn. oceniamy, ile razy dany zbiór jest większy od jakiegoś zbioru wzorcowego; dopiero jeżeli mamy odpowiednio dużo czasu i zależy nam na precyzji, przeliczamy elementy zbioru). A jak to robią zwierzęta?

Ukazała się niedawno praca [3], w której autorzy wykazują, że rezusy robią to podobnie jak my. Żeby to sprawdzić, nauczono kilka z nich posługiwania się dwoma zestawami symboli, które odpowiadały liczbom od 0 do 25. Pierwszy zestaw był alfanumeryczny, drugi zaś składał się z matryc 3×3 kwadracików (binarnych: czarnych lub białych), w którym kolejnym liczbom przypisane były różne symbole w przypadkowo (ale niezmiennie) wybrany sposób.

Zadanie polegało na wybraniu napisu o większej wartości spośród dwóch, z których jeden był przedstawiony za pomocą pojedynczego symbolu, a drugi miał wartość sumy dwóch przedstawionych symboli. Po dokonaniu wyboru makak dostawał tyle kropel smakołyku, ile sobie wybrał. W trakcie uczenia pierwszego zestawu symboli wykorzystywane były zestawy kropek o odpowiedniej liczebności. Po opanowaniu zestawu symboli alfanumerycznych włączono zestaw matryc i sprawdzano, jak szybko i jak dobrze rezusy go opanują.

Okazało się, że do nauczenia się nowego systemu makaki potrzebowały tylko 10 dni, podczas gdy opanowanie pierwszego zajęło im dwa miesiące.

Całość badania, zdaniem autorów, dowodzi wykorzystywania numerycznej wartości symboli. Inaczej mówiąc, małpy dodają tak jak ludzie (przynajmniej niektórzy).

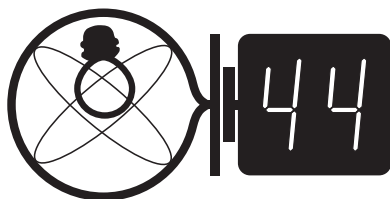
Ciekawe, czy ktoś pokusi się o wypracowanie procedury uczenia rezusów dodawania ułamków.

Mogłoby to mieć bezpośrednie zastosowanie przy kolejnej reformie oświaty.

Piotr ZALEWSKI

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



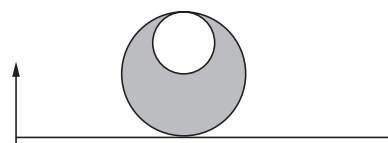
Rozwiązania zadań z numeru 3/2014

Redaguje **Elżbieta ZAWISTOWSKA**

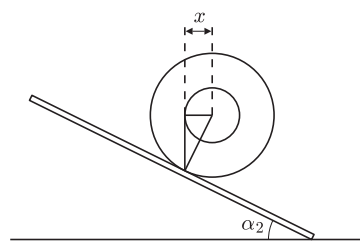
Przypominamy treść zadań:

574. Na desce leży walec o promieniu R z wydrążeniem w kształcie walca o promieniu $R/2$ stycznym do osi walca (rys. 1). Deskę zaczynamy wolno podnosić za jeden koniec. Znaleźć kąt graniczny nachylenia deski, przy którym walec pozostanie jeszcze w równowadze. Współczynnik tarcia walca o deskę jest równy $\mu = 0,2$.

575. Okładki płaskiego kondensatora powietrznego o powierzchni S i wysokości h są skierowane pionowo i zanurzone w cieczy o stałej dielektrycznej ϵ do wysokości $h/3$. Obliczyć ładunek, jakim naładowany jest kondensator, jeżeli w stanie równowagi ciecz wypełnia całą przestrzeń między okładkami. Gęstość cieczy wynosi ρ , odległość między okładkami jest mała w porównaniu z rozmiarami liniowymi okładek.



Rys. 1



Rys. 2

R 574. Należy porównać kąt nachylenia deski α_1 , powyżej którego walec zacznie się zsuwać, i kąt α_2 , powyżej którego zacznie się toczyć. Pierwszy warunek ma postać $\text{tg } \alpha_1 = \mu = 0,2$.

Niech x oznacza odległość środka masy wydrążonego walca od jego środka geometrycznego. Traktując walec pełny o masie m i promieniu R jako złożenie walca wydrążonego o masie $\frac{3}{4}m$ i walca o masie $\frac{1}{4}m$ promieniu $\frac{1}{2}R$ w miejscu wydrążenia, otrzymujemy związek $\frac{3}{4}mx = \frac{1}{8}mR$, skąd $x = \frac{1}{6}R$. Gdy deskę powoli podnosimy, wydrążony walec obraca się, a jego środek masy przesuwa się po okręgu o promieniu x (określamy położenie na prostej pionowej przechodzącej przez punkt styczności walca z deską). Moment siły ciężkości względem tego punktu jest wówczas równy 0. Kąt nachylenia deski, powyżej którego walec zacznie się staczać, określa warunek $\sin \alpha_2 = \frac{x}{R} = \frac{1}{6}$. Ponieważ $\sin \alpha_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} > \sin \alpha_2$, walec straci równowagę, gdy kąt nachylenia deski przekroczy $\arcsin \frac{1}{6}$ i walec zacznie się toczyć bez poślizgu.

R 575. Rozważmy sytuację, gdy poziom cieczy w kondensatorze znajduje się na wysokości x nad poziomem cieczy w naczyniu. Siła elektryczna $F(x)$ spowodowana niejednorodnością pola elektrycznego na brzegu kondensatora, pracując na małym odcinku Δx (dla którego można przyjąć, że wartość siły nie zmienia się), powoduje zmniejszenie energii elektrycznej kondensatora:

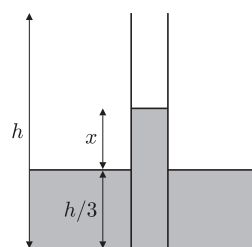
$F(x)\Delta x = W_E(x) - W_E(x + \Delta x)$, gdzie $W_E(x) = \frac{Q^2}{2c(x)}$, zaś $c(x)$ jest pojemnością zastępczą dwóch kondensatorów połączonych równolegle – powietrznego o wysokości $\frac{2}{3}h - x$ oraz wypełnionego dielektrykiem o wysokości $\frac{1}{3}h + x$. Wyrażenie na siłę elektryczną możemy obliczyć bezpośrednio z wzoru $F(x) = -\frac{\Delta W_E}{\Delta x}$ przy $\Delta x \rightarrow 0$ lub obliczyć pochodną

$$F(x) = -\frac{dW_E}{dE} = \frac{Q^2 d(\epsilon - 1)}{2\epsilon a \left(\frac{(2+\epsilon)h}{3} + (\epsilon - 1)x \right)},$$

gdzie $a = S/h$ jest szerokością okładek kondensatora, zaś d odległością między okładkami. Wartość siły grawitacji działającej na ciecz wciągniętą do kondensatora wynosi $P(x) = \rho g a x$. Z warunku równowagi sił elektrycznej i grawitacyjnej dla $x = \frac{2}{3}h$ otrzymujemy szukaną wartość ładunku

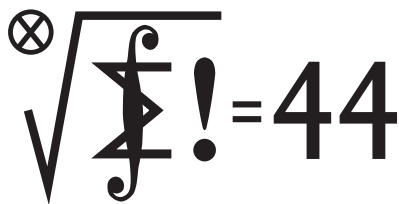
$$Q = 2S\epsilon \sqrt{\frac{\epsilon \rho g}{3(\epsilon - 1)}}.$$

Zadanie można też rozwiązać, poszukując minimum energii układu.



Rys. 3

Klub 44



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 671 ($WT = 1,69$) i 672 ($WT = 1,66$) z numeru 12/2013

Jędrzej Garnek	Poznań	43,38
Janusz Olszewski	Warszawa	41,33
Paweł Duch	Bielawa	40,18
Andrzej Idzik	Bolesławiec	39,87
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Stanisław Bednarek	Łódź	35,92
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75
Tomasz Wietecha	Tarnów	32,72

Rozwiązania zadań z numeru 3/2014

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

677. Rozważamy trójki liczb rzeczywistych (x, y, z) , spełniające warunki

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad x^2 + y^2 + z^2 > yz + zx + xy.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości iloczynu xyz .

678. Czy istnieją takie trzy różne liczby pierwsze p, q, r , że liczba $2^{q-1} - 1$ dzieli się przez p , liczba $2^{r-1} - 1$ dzieli się przez q , zaś liczba $2^{p-1} - 1$ dzieli się przez r ?

677. Liczby x, y, z muszą być różne od zera. Przepisujemy pierwsze równanie jako $yz(x - y) = y - z$, i dalej (cyklicznie)

$$(1) \quad yz(x - y) = y - z, \quad zx(y - z) = z - x, \quad xy(z - x) = x - y.$$

Mnożymy stronami:

$$(2) \quad (xyz)^2(x - y)(y - z)(z - x) = (y - z)(z - x)(x - y).$$

Gdyby któraś z różnic $x - y, y - z, z - x$ była zerem, to wobec zależności (1) wszystkie byłyby zerami, czyli liczby x, y, z byłyby równe. To się jednak kłóci z nierównością, daną w założeniach. Różnice te są więc różne od zera.

Równanie (2) po skróceniu daje wynik: $(xyz)^2 = 1$; jedynymi możliwymi wartościami iloczynu xyz są liczby 1 oraz -1 . Każda z nich jest faktycznie osiągalna – na przykład dla $(x, y, z) = (1, -\frac{1}{2}, -2)$ oraz $(x, y, z) = (-1, \frac{1}{2}, 2)$.

678. Zadanie zaproponował najstarszy stażem ligowiec Witold Bednarek – całe szczęście, że wraz z rozwiązaniem. Zobaczmy je:

Przypuśćmy, że dla pewnej liczby pierwszej s liczba $2^s - 1$ ma co najmniej trzy różne dzielniki pierwsze p, q, r . Wykażemy, że wówczas trójka p, q, r spełnia postulowane warunki.

Niech δ będzie najmniejszym wykładnikiem naturalnym, większym od 1, dla którego $2^\delta \equiv 1 \pmod{p}$. Z założenia także $2^s \equiv 1 \pmod{p}$, więc s dzieli się przez δ ; a skoro s jest liczbą pierwszą, to $\delta = s$. W myśl małego twierdzenia Fermata $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, zatem $p - 1$ dzieli się przez δ , czyli przez s .

Analogicznie stwierdzamy, że s jest dzielnikiem liczb $q - 1$ oraz $r - 1$. Podnosząc kongruencję $2^s \equiv 1 \pmod{p}$ do potęgi $(q-1)/s$, widzimy, że $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Tak samo, cyklicznie, $2^{r-1} \equiv 1 \pmod{q}$, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{r}$, czyli mamy to, o co chodzi (a nawet więcej: okazuje się, że każda z liczb $2^{p-1} - 1$, $2^{q-1} - 1$, $2^{r-1} - 1$ dzieli się przez iloczyn pqr).

Pozostaje wskazać liczbę pierwszą s o podanej na wstępie własności.

Przeglądając tablicę liczb Mersenne'a znajdujemy w niej liczbę złożoną $2^{29} - 1$, z rozkładem na czynniki pierwsze $233 \cdot 1103 \cdot 2089$. Zatem liczby $p = 233$, $q = 1103$, $r = 2089$ tworzą jedną z trójek, jakich szukamy.



Rozwiązanie zadania F 859. Niech x oznacza kierunek prostopadły do ścianki, n gęstość fotonów, a ε średnią energię fotonu. Zderzając się sprężysto ze ścianką foton o pędzie P padający pod kątem θ przekazuje jej pęd $2P \cos \theta$. W jednostce czasu Δt z każdego kierunku tworzącego kąt θ z normalną do każdego elementu ścianki o powierzchni S dolatuje więc

$$\frac{nSc\Delta t \cos \theta}{4\pi}$$

fotonów – uwzględniony został izotropowy rozkład kierunków ruchu fotonów (czynnik 4π w mianowniku). Biorąc pod uwagę, że dla fotonu $P = \varepsilon/c$, gdzie c jest prędkością światła, siła nacisku na ściankę równa jest przekazowi pędu w jednostce czasu, a ciśnienie jest stosunkiem siły nacisku do pola powierzchni, i sumując po wszystkich kątach padania, otrzymujemy:

$$p = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cdot nc \cos \theta \cdot 2 \frac{\varepsilon}{c} \cos \theta = \frac{1}{3} n\varepsilon.$$

$$\text{Ostatecznie } p = \frac{1}{3} \frac{E}{V}.$$

Wynik ten możemy uzyskać bez całkowania: w sześciennym naczyniu dla ustalonej ściany średnio 1/6 fotonów porusza się w jej kierunku, przekazując jej przy zderzeniu pęd $2E/c$.



Rozwiązanie zadania F 860. Energia fotonu o pędzie P wynosi cP . W związku z tym pochłanianie przez Ziemię promieniowania słonecznego związane jest z pochłanianiem strumienia pędu równego q/c . Związane z pochłanianiem pędu promieniowania siła F odpychająca od Słońca Ziemię o promieniu R wynosi więc $F = \pi R^2 q/c \approx 5,8 \cdot 10^8$ N. Siła F_G przyciągania Ziemi i Słońca wynosi:

$$F_G = \frac{GM_S M_Z}{R_{ZS}^2},$$

gdzie M_S oznacza masę Słońca, a M_Z masę Ziemi. Przyspieszenie Ziemi w ruchu dookoła Słońca wynosi $4\pi R_{ZS}/T^2$, a masę Ziemi możemy zastąpić wyrażeniem gR^2/G . Po podstawieniu tych wielkości otrzymujemy, że stosunek siły z jaką promieniowanie Słońca odpycha Ziemię do siły przyciągania Ziemia-Słońce wynosi:

$$\frac{F}{F_G} = \frac{GT^2 q}{4\pi R_{ZS} g c} \approx 1,6 \cdot 10^{-14}.$$



Metaliczność mierzona jest najczęściej w skali logarytmicznej za pomocą zawartości żelaza: $[Fe/H] = \log \frac{Z}{Z_{\odot}}$, gdzie Z jest (względna w stosunku do wodoru) zawartością żelaza w gwiazdzie, a Z_{\odot} analogiczną wartością dla Słońca.



Prosto z nieba: Najstarsza gwiazda we Wszechświecie

Gwiazdy, podobnie jak ludzi, można podzielić na pokolenia (populacje). Pierwsze historycznie obserwacje i podział na podgrupy przeprowadził Walter Baade, badając galaktykę M31 (Andromeda). W astronomicznym żargonie populacją I nazywa się młode gwiazdy znajdujące się najczęściej w dysku galaktycznym, natomiast populacja II składa się z gwiazd starych, występujących w centrum Galaktyki (zgrubieniu centralnym) oraz w halo. Parametrem, który rozróżnia te dwie klasy obiektów, jest *metaliczność*, czyli względna zawartość w gwiazdzie pierwiastków cięższych od helu (zwanymi zbiorczo „metalami”) w stosunku do ich względnej zawartości w widmie Słońca. Populacje są naturalną konsekwencją ewolucji Wszechświata. Pierwsze gwiazdy (nazwane z tradycyjną astronomiczną konsekwencją populacją III) w ogóle nie zawierały metali, które były dopiero wytwarzane w ich wnętrzach i rozrzucone podczas wybuchów supernowych. Z gazu wzbogaconego przez populację III powstała uboga w metale populacja II, a z niej zawierające dużo metali gwiazdy populacji I.

Zawartość pierwiastków ciężkich wpływa na wygląd, zachowanie i długość życia gwiazd (*vide* artykuł Radosława Smolca w *Delcie* 6/2014). Generalną regułą jest, jak u ludzi, że otyli żyją krócej. Wśród długowiecznych będą zatem gwiazdy lekkie i o małej metaliczności, świadczącej o wczesnych narodzinach. Taki obiekt, o szacowanym wieku 13,7 mld lat (czyli tylko trochę mniej niż wiek Wszechświata) zaprezentowali niedawno astronomowie z Australian National University. Gwiazda SMSS J031300.36-670839.3, znajdująca się około 6000 lat świetlnych od Układu Słonecznego, została odkryta przez automatyczny teleskop SkyMapper. Zebrane widmo w granicach błędu pomiaru nie zawiera w ogóle linii żelaza! Teoretycy modelujący takie gwiazdy twierdzą, że powstała ona z materii supernowej specjalnego typu: niskoenergetycznego wybuchu produkującego niewiele metali. Takie supernowe mogły być powszechne we wczesnym Wszechświecie; jest także prawdopodobne, że odgrywały ważną rolę w epoce rejonizacji i wczesnej ewolucji chemicznej galaktyk.

Michał BEJGER



Niebo w lipcu

Noc z 12 na 13 VII to najbardziej korzystny czas na obserwacje Merkurego. Tego dnia znajdzie się on w maksymalnej elongacji zachodniej od Słońca, czyli największej odległości kątowej na niebie od naszej dziennej gwiazdy. Merkury to najbliższa Słońcu planeta, która na niebie oddala się od Słońca najwyżej na 28 stopni. W konsekwencji niełatwo jest zaobserwować Merkurego, ponieważ światło słoneczne przeważnie skutecznie to utrudnia. Warto więc wykorzystać sprzyjający układ planet i udać się tej nocy na obserwacje. Merkury pojawi się nad wschodnim horyzontem około pół godziny po wschodzie Wenus i ponad godzinę przed wschodem Słońca. W czasie maksymalnej elongacji będzie znajdował się w gwiazdozbiornie Oriona.

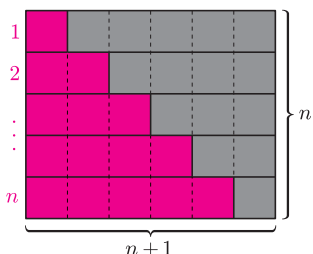
W tym miesiącu nów Księżyca przypada na 26 VII, dokładnie na godzinę 22:42 UTC. Taki układ ciał niebieskich stwarza nam idealne warunki do obserwacji najsłabszych obiektów nocnego nieba, takich jak galaktyki czy gromady kuliste gwiazd.

Lipiec jest też dobrym miesiącem do obserwacji „spadających gwiazd”. Jest aż kilka różnych rojów meteorów, których maksymalna aktywność wypada w tym miesiącu. Ich radianty, czyli położenia na sferze niebieskiej, z których meteory zdają się wylatywać, znajdują się między innymi w gwiazdozbiornach Koziorożca, Ryby Południowej, Łabędzia, a nawet Perseusza (słynne meteory z roju Perseidów można zaobserwować już w drugiej połowie lipca). Najbardziej aktywnym spośród lipcowych rojów będzie rój Delta Akwarydy S. Jego meteory będzie można obserwować pomiędzy 15 VII a 20 VIII, ale maksimum jego aktywności wypadnie 28 VII. Możemy spodziewać się dobrych warunków do obserwacji, ponieważ młody Księżyc zajdzie tego dnia wczesnym wieczorem pod horyzont i pozostawi całkowicie ciemne niebo. Warto wtedy udać się daleko od światła miasta i skierować oczy w stronę konstelacji Wodnika.

Magda OTULAKOWSKA-HYPKA

Joanna JASZUŃSKA

Wiele wzorów na sumy kolejnych liczb naturalnych, ich kwadratów, sześcianów itp. można uzasadnić (lub przynajmniej przekonująco zilustrować) na rysunkach. Często rysunki te wymagają niewiele lub nawet zero komentarza – są to tzw. dowody bez słów. Jednym z najprostszych i najsłynniejszych przykładów jest wzór na sumę kolejnych liczb naturalnych pokazany na rysunku 1:



Rys. 1

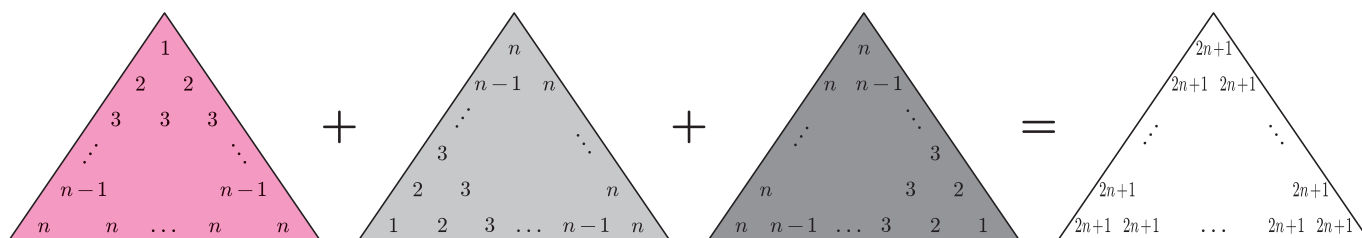
$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Korzystając z nieco podobnego pomysłu (rys. 2) można się przekonać, iż

$$3 \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + n \cdot n) = (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot (2n + 1),$$

a więc, na mocy powyższego wzoru na sumę liczb,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$



Rys. 2

Na rysunku 3 można z kolei zobaczyć, że

$$4 \cdot (1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n \cdot n^2) = (n(n+1))^2,$$

stąd wzór na sumę trzecich potęg kolejnych liczb naturalnych:

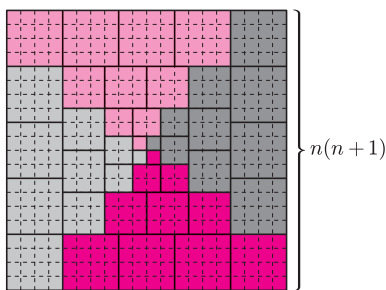
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Podobnie można uzyskać wzór na sumę kolejnych liczb nieparzystych (rys. 4):

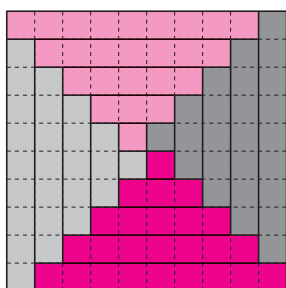
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{1}{4}(1 + 2n - 1)^2 = n^2.$$

Przedstawienie sumy liczb nieparzystych w postaci „piramidy schodkowej” pozwala też udowodnić (rys. 5) następującą, nieco mniej znaną tożsamość:

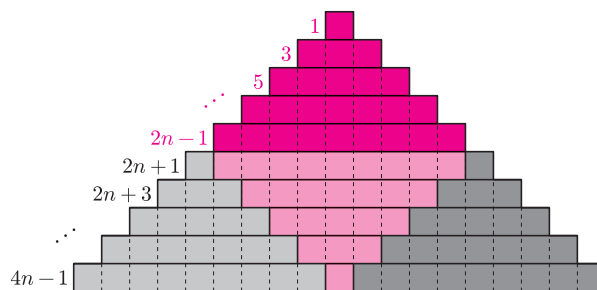
$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \dots = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\dots+(4n-1)}.$$



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Literatura:
R.B. Nelsen, *Proofs Without Words*,
MAA, 1993 (oraz część II w 2001 r.)

Inny obrazkowy dowód wzoru na sumę liczb nieparzystych przedstawiono w *deltoidzie* 1/2012, zaś inny dowód wzoru na sumę sześcianów – w *deltoidzie* 2/2013.