







20 marca 2014 roku zmarł  
**Profesor Andrzej Grzegorzcyk**  
filozof, logik, matematyk  
Autor *Delty*

## SPIS TREŚCI NUMERU 5 (480)

BRIDGES – mosty budowane pomiędzy matematyką i sztuką <i>Małgorzata Mikołajczyk</i>	str. 1
Rekordy długowieczności i procesy Poissona, część II <i>Wojciech Niemirol</i>	str. 5
Observacje naziemne Wenus w bazie danych ESA <i>Magdalena Otulakowska-Hypka</i>	str. 7
 Kto by się spodziewał <i>Marek Kordos</i>	str. 8
Jaki jest następny wyraz tego ciągu? <i>Paweł Matejek</i>	str. 9
Dwa zadania <i>Jarosław Wróblewski</i>	str.11
O wiązaniach wodorowych <i>Krzysztof Rejmer</i>	str.12
 Zadania	str.13
Szczęście w zbiorach mierzalnych <i>Eryk Kopczyński</i>	str.14
Ze świata USOS. Część 8 – Leniwy programista, czyli co może za nas zrobić komputer <i>Michał Kurzydłowski</i>	str.16
Informatyczny kącik olimpijski (72): Multizbiory <i>Paweł Gawrychowski</i>	str.18
 Niezwykłe ostrza. Niezwykli ludzie. <i>Magdalena Fikus</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Nieziemska pogoda	str.24
Niebo w maju <i>Magdalena Otulakowska-Hypka</i>	str.24
 Punkty na prostej <i>Joanna Jaszńska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sek. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.  
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**Pol-Perfect:** [www.polperfect.com.pl](http://www.polperfect.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–18<sup>00</sup>.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

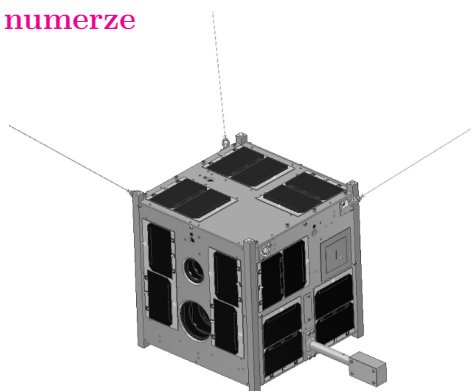
Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

**Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):** [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**

### W następnym numerze



satelita Lem

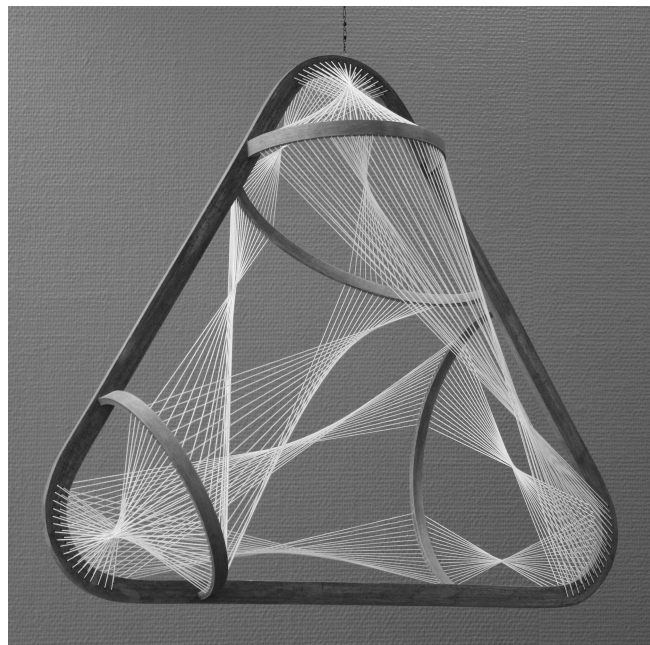
# BRIDGES

– mosty budowane pomiędzy matematyką i sztuką

Małgorzata MIKOŁAJCZYK

Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

## Czym jest Bridges?



Autor: David H. Press

Międzynarodowe konferencje Bridges odbywają się corocznie od 1998 roku w różnych krajach świata (w Europie, Ameryce i Azji). Dotyczą związków matematyki z różnymi dziedzinami sztuki (plastyka, muzyka, architektura, teatr, poezja, taniec). W czterodniowych obradach oraz wydarzeniach artystycznych uczestniczą naukowcy (głównie matematycy i informatycy), architekci, inżynierowie, nauczyciele, muzycy, tancerze, reżyserzy, rzeźbiarze, poeci i inni artyści oraz miłośnicy sztuki inspirowanej matematyką (lub na odwrót). Tradycją jest udział w każdej edycji laureata Nagrody Nobla, a w niektórych także laureata medalu Fieldsa, co jest wymiernym dowodem prestiżu tych konferencji w środowisku naukowym. Zdarzają się także inne osobistości, np. gwiazdą węgierskiej edycji Bridges (jedynej, jaka odbyła się do tej pory w Europie Środkowo-Wschodniej) był Ernő Rubik, który podzielił się z uczestnikami refleksjami na temat fenomenu kostki i innych wymyślonych przez siebie łamigłówek.

Integralną i bardzo ważną częścią konferencji jest zawsze wystawa sztuki inspirowanej matematyką *Bridges Visual Art*. Zgłaszane na nią eksponaty przechodzą wcześniej procedurę kwalifikacyjną. Ostatecznie do udziału w wystawie zapraszanych jest około 150 artystów z kilkudziesięciu krajów świata. Na zakończenie konferencji, po głosowaniu przeprowadzonym wśród jej uczestników, wyłaniane i nagradzane są najlepsze prace w czterech kategoriach: **zawartość matematyczna**, **wrażenia estetyczne**, **innowacyjność tworzywa** i **kunszt wykonania**.

Uczestnicy konferencji otrzymują (w formie papierowej lub elektronicznej) *Proceedings of Articles* zawierające skróty około stu wykładów przedstawionych podczas obrad oraz *Katalog wystawy Mathematical Art* prezentujący dzieła wszystkich artystów zakwalifikowanych na wystawę konferencyjną. Materiały ze wszystkich dotychczasowych konferencji są także dostępne na stronie internetowej organizacji Bridges <http://bridgesmathart.org>.

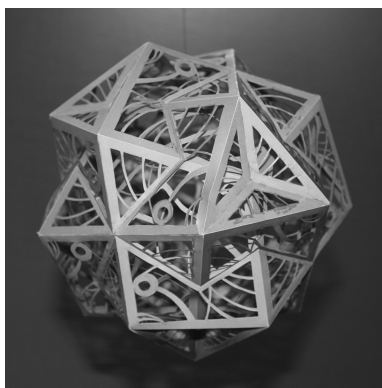
## Jakie cele stawiają sobie organizatorzy?

Bridges jest konferencją interdyscyplinarną adresowaną do przedstawicieli środowisk reprezentujących naukę i sztukę. Nic dziwnego, że ma bardzo otwarty, społecznościowy charakter. Jej główne cele to:

- wskazanie innowacyjnych technik integrowania matematyki z różnymi dziedzinami sztuki oraz interdyscyplinarnego nauczania matematyki,
- stworzenie matematykom i artystom przełamującym bariery między nauką i sztuką możliwości prezentacji swoich pomysłów i osiągnięć,
- inspirowanie działalności badawczej, artystycznej i edukacyjnej naukowców, artystów i nauczycieli,
- popularyzacja matematyki w społeczeństwie za pośrednictwem sztuki przez organizację otwartych imprez towarzyszących,
- dokumentacja podejmowanych działań i ich efektów przez wydawanie katalogów.



Autor: George Hart



Autor: Ulrich Mikloweit

Dotychczas konferencje Bridges odbyły się (lub wkrótce odbędą) w następujących miastach:

1998–2002 – Winfield, Kansas, USA;  
 2003 – Granada, Hiszpania;  
 2004 – Winfield, Kansas, USA;  
 2005 – Banff, Alberta, Canada;  
 2006 – Londyn, Wielka Brytania;  
 2007 – San Sebastián, Hiszpania;  
 2008 – Leeuwarden, Holandia  
 (miasto rodzinne M.C. Eschera);  
 2009 – Banff, Alberta, Canada;  
 2010 – Pécs, Węgry;  
 2011 – Coimbra, Hiszpania;  
 2012 – Towson, Maryland, USA;  
 2013 – Enschede, Holandia;  
 2014 – Seul, Korea;  
 2015 – Washington, DC, USA;  
 2016 – Wrocław, Polska.

## Kto organizuje Bridges?

Bezpośrednim organizatorem konferencji jest organizacja non-profit **The Bridges** z siedzibą w USA, działająca pod kierownictwem Rezy Sarhangi z Wydziału Matematyki Towson University. Konferencja jest wspólnie finansowana ze środków The Bridges, Międzynarodowej Unii Matematycznej, organizatorów lokalnych oraz z opłat uczestników i dotacji sponsorów.

W skład głównego komitetu organizacyjnego wchodzi ponadto utytułowani i wielokrotnie nagradzani w swoich dziedzinach matematycy, informatycy i artyści:

- George Hart – matematyk i informatyk oraz lingwista, dyrektor Muzeum Matematyki w Nowym Jorku;
- Craig Kaplan – matematyk i informatyk, redaktor naczelny *Journal of Mathematics and the Arts*, autor oprogramowania m.in. *Maze Design*, *Star Patterns*, *Escherization*, *Patterns on Surfaces*, *Metamorphoses and Deformations*;
- Carlo Sequin – informatyk i fizyk;
- Robert Fathauer – fizyk i inżynier elektronik, założyciel Tessellations Company wytwarzającej lamigłówniki, albumy, podręczniki i pomoce naukowe, doroczny kurator wystawy *Bridges Visual Art*;
- Dmitri Tymoczko – matematyk, kompozytor i teoretyk muzyki.

Ponadto przy organizacji konferencji pracują wieloosobowe komitety koordynujące poszczególne przedsięwzięcia.

## Co dzieje się w czasie Bridges?

Na program konferencji składa się część zamknięta – przeznaczona dla zarejestrowanych uczestników (w jej ramach odbywają się wykłady plenarne, referaty w grupach roboczych, prezentacje, warsztaty interaktywne, pokazy, koncerty, m.in. *Formal Music Night* i *Informal Music Night* oraz wycieczki krajoznawczo-matematyczno-artystyczne), a także część otwarta, przeznaczona dla szerokiej publiczności (w jej ramach odbywają się wykłady popularno-naukowe, wystawy towarzyszące, pokazy filmów inspirowanych matematyką, m.in. *Mathematics and Art Short Movie Festival*, przedstawienia teatralne, koncerty muzyczne, wieczory poezji oraz *Family Day*: happeningi, kiermasze, warsztaty i pokazy w przestrzeni miejskiej).



Podczas czterech dni Bridges odbywa się też budowa gigantycznego samonośnego obiektu z klocków *ZomeTool* (często składającego się z ponad 100 tysięcy części). Każdy może przyłączyć się do tego przedsięwzięcia, a uroczyste zakończenie prac i odsłonięcie gotowego dzieła jest przez wszystkich uczestników konferencji fetowane lampką szampana.

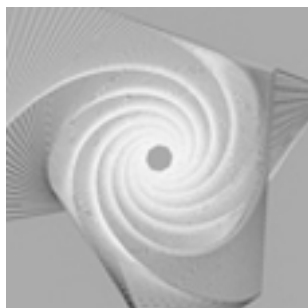


## Migawki z Bridges 2013

To właśnie w Enschede znaleziono odpowiedź na postawiony przez Stanisława Ruziewicza i zamieszczony w Księdze Szkockiej pod numerem 59. problem, czy można rozbić kwadrat na skończoną liczbę różnych kwadratów. W marcu 1978 roku tamtejszy matematyk i informatyk Adrianus Duijvestijn pokazał, jak rozłożyć kwadrat na 21 różnych kwadratów i wykazał, że nie można tego zrobić dla żadnej mniejszej liczby różnych kwadratów.



Autorka: Jane Adler



Autor: Manuel Diaz Regueiro



Autor: Francesco De Comitè



Autorka: Tatiana Bonch-Osmolovskaya

W ubiegłym roku miłośnicy budowania mostów między matematyką a kulturą i sztuką spotkali się w holenderskim Enschede na Uniwersytecie Nauk Stosowanych Saxion.

Wykład inauguracyjny wygłosił Harold Kroto – profesor chemii z Uniwersytetu Sussex (Wielka Brytania), laureat Nagrody Nobla, którą otrzymał (wspólnie z Robertem Curlem i Richardem Smalleyem) w roku 1996 za odkrycie fullerenów – cząsteczek węgla o kształtach bazujących na dwudziestościanie ściętym (czyli tzw. piłce nożnej – taki właśnie kształt ma pierwszy odkryty w 1985 roku fulleren  $C_{60}$ ). Harold Kroto w swoim wykładzie podzielił się refleksjami na temat wpływu sztuki na jego rozwój i karierę naukową. Był to wykład otwarty dla wszystkich chętnych. Inne odczyty publiczne dotyczyły wizualizacji matematycznych i ich zastosowań m.in. w kartografii, innowacji w holenderskiej architekturze oraz nanotechnologii w codziennym życiu (uczestnikom wykładu rozdawane były podarunki okazjnie zakupione w nanosupermarkecie: nanowino, nanotrampki lub nanoskarpety – więcej o tych i wielu innych nanoproductach można przeczytać na stronie <http://www.nanosupermarket.org>).

Tematyka odczytów zamkniętych także była bardzo zróżnicowana. Siegała od matematycznych aspektów motywów dekoracyjnych w Opactwie Westminsterskim i fraktalnych ornamentów islamskich, przez matematyczne idee w starożytnej poezji hinduskiej i wykorzystanie technologii druku 3D do wypieku matematycznych ciasteczek w formie escherowskich parkietazy płaszczyzny aż po poważne problemy współczesnej topologii – opis powierzchni topologicznych zwanych Boy's Surface i Girl's Surface (nazwa Boy pochodzi od nazwiska odkrywcy pierwszej powierzchni – Wenera Boya, nazwa Girl jest dowcipem odkrywców drugiej powierzchni).

Wyjątkowym wydarzeniem był *Family Day*, podczas którego wszyscy chętni mogli uczestniczyć w warsztatach matematyczno-tanecznych, budowaniu czworościanu Sierpińskiego, tworzeniu perskich iluminacji, warsztatach matematycznego origami, projektowaniu map globu ziemskiego na powierzchni ośmiościanu i wielu innych atrakcjach.

Wieczór muzyczny był okazją do wysłuchania matematycznych kompozycji Dmitriego Tymoczki inspirowanych histogramami, Giovanniego Albiniego opartych na matematycznych odwzorowaniach motetów Carla Gesualda, Cliftona Callendera z nieskończonymi kanonami naśladowującymi spiralę logarytmiczną oraz improwizacji w wykonaniu niemieckich i holenderskich filharmoników. W części nieformalnej wieczoru muzycznego była okazja do wysłuchania amatorskich kompozycji uczestników konferencji i do wspólnego wykonania zabawnej piosenki podsumowującej konferencyjne wydarzenia (refren kilkusetosobowa widownia śpiewała bez żadnego przygotowania: *zero-zero-zero, zero-zero-one, zero-one-zero, zero-one-one, one-zero-zero, ...* – czy już widać, jak to dalej leciało?) Nie zabrakło wydarzeń teatralnych: były występy matematycznych mimów, a na zakończenie konferencji trupa aktorów złożona z uczestników brawurowo wystawiła sztukę Johna Mightona (matematyka z Uniwersytetu w Toronto) poświęconą sztucznej inteligencji pt. *Half Life* w reżyserii Stephena Abbotta (matematyka z Middlebury College w USA, także uczestnika konferencji).

Odbył się także festiwal matematycznych miniatur filmowych, podczas którego zaprezentowano kilkanaście najlepszych prac nadesłanych na konferencję. Jeden z filmów prezentował geometryczny taniec z mieczami, inny – związki między żonglowaniem, zaplataniem warkoczy a teorią grup, a jeszcze inny – życiowe perypetie urojonej liczby  $i$ . Wszystkie można odnaleźć na stronie konferencji. Odbył się też wieczór poezji matematycznej, podczas którego swoje utwory czytało kilkunastu poetów (wśród których istotną część stanowili matematycy).



Na konferencyjnej wystawie sztuki wizualnej swoje prace prezentowało ponad 130 artystów z 30 krajów świata, w tym troje z Polski: Krystyna Burczyk i Halina Rościszewska-Narloch przedstawiły modele w technice origami, a Piotr Pawlikowski – kartonowy model kompozycji wielościanów jednorodnych. Wśród eksponowanych prac znalazły się też grafiki, obrazy, makaty, fotografie, modele płaskie i przestrzenne, statyczne i dynamiczne, urządzenia mechaniczne, a nawet biżuteria i odzież inspirowana matematyką. Wielką była też różnorodność użytych materiałów – papier, karton, drewno, akryl, stal, plastik, paciorki, tkaniny i inne. Oprócz gotowych dzieł na wielu stanowiskach można było obserwować eksponaty tworzone „na żywo”, na oczach widzów.



Głównej wystawie towarzyszyły również okolicznościowe wystawy w muzeach i galeriach sztuki w Enschede oraz pobliskim Hengelo. Były tam eksponowane m.in. grafiki znanego węgierskiego artysty, przedstawiciela op-artu Istvána Orosza, zapierające dech w piersiach z wrażenia ażurowe modele wielościanów Ulricha Mikloweita, a także drewniane modele fraktalne Koosa Verhoeffa.

Prawdziwą gratką dla miłośników sztuki matematycznej była wystawa kilkudziesięciu grafik Mauritsa Eschera.

Ważnym wydarzeniem była budowa ogromnego pentadysku z klocków *ZomeTool* prowadzona pod czujnym okiem Paula Hildebrandta – założyciela firmy. Model o średnicy 6 metrów, złożony ze 104 tysięcy elementów specjalnie na spotkanie w Holandii zaprojektował inżynier mechanik i nauczyciel matematyki Fabien Vienne. Gigantyczna konstrukcja na stałe zawisła w holu Uniwersytetu Saxion i została wpisana do Księgi Guinnessa jako rekordowa konstrukcja złożona z odrębnych elementów.



## Nadchodzące Bridges

Najbliższa konferencja Bridges będzie połączona ze światowym Kongresem Matematycznym i odbędzie się w dniach 14–19 sierpnia 2014 w Seulu. Jej lokalnym gospodarzem będzie Gwacheon National Science Museum. Edycja 2015 zaplanowana jest w Waszyngtonie, ale za trzy lata Bridges znowu wrócą do Europy. W 2016 roku budowniczy mostów spotkają się przy... Moście Grunwaldzkim we Wrocławiu. Już teraz zapraszamy wszystkich na to matematyczne święto do stolicy Dolnego Śląska (która będzie w tym czasie także Europejską Stolicą Kultury). A że Wrocław znany jest jako „miasto stu mostów”, jest to wręcz wymarzone miejsce dla Bridges.

## Czym planuje zaskoczyć uczestników Wrocław?

Nie chcemy zdradzać zbyt wielu niespodzianek, poza tym nie wszystkie pomysły są już ostatecznie zatwierdzone, ale możemy uchylić rąbka tajemnicy. Bridges 2016 towarzyszyć będą m.in.

- *Wrocław FAST* – festiwal sztuki inspirowanej nauką i techniką organizowany przez Wrocławską Akademię Młodych Uczonych i Artystów,
- *Symmetry Festival* – konferencja naukowa organizowana przez Międzynarodowe Stowarzyszenie Badań nad Symetrią „Symmetrion”,
- wystawa *Wrocław – miasto 100 mostów* w Muzeum Architektury,
- wystawa *Matematyka na znaczkach pocztowych* w Muzeum Poczty i Telekomunikacji,
- wystawa *Geometria staropolskiej pisanki* w Muzeum Etnograficznym,
- koncert bluesowy zespołu matematyków z Wrocławia *Mizia & Mizia* w ramach *Informal Music Night*.

A to tylko początek. Ciekawe, czy zgadniecie, jaka tym razem gigantyczna konstrukcja powstanie z klocków *ZomeTool*? Będzie bardzo wielka, bardzo wrocławska i bardzo wisząca.



Zdjęcia: Piotr PAWLIKOWSKI i George HART

# Rekordy długowieczności i procesy Poissona

Wojciech NIEMIRO\*

## Część II: Dygresje i komentarze

Przypominamy podstawowe definicje i założenia opisywanego modelu.

$S(t)$  to z definicji prawdopodobieństwo dożycia  $t$  lat.

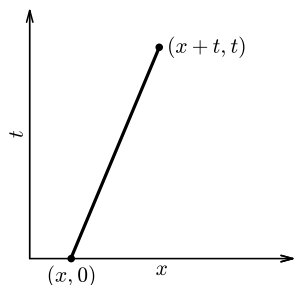
**T1** Każdy noworodek ma jednakową funkcję przeżycia  $S$ .

**T2** Długości życia różnych noworodków są statystycznie niezależne.

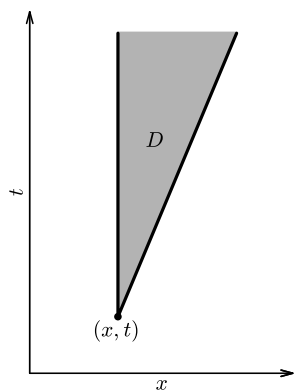
**N1** Dla dowolnego momentu  $x$ , prawdopodobieństwo urodzenia się dziecka w „krótkim” odcinku czasu  $(x, x+h]$  jest w przybliżeniu równe  $\lambda h$ , prawdopodobieństwo zaś urodzenia się więcej niż jednego dziecka jest tak małe, że możemy je zaniedbać.

**N2** Liczby noworodków pojawiających się w rozłącznych odcinkach czasu są statystycznie niezależne.

**TN** Długości życia wszystkich osobników są niezależne statystycznie od procesu narodzin.



Rys. 1. „Odcinek życia” osobnika, który urodził się w roku  $x$  i umarł w wieku  $t$  lat.



Rys. 2. Obszar  $D$  „zaczepiony” w punkcie  $(x, t)$ .

Przed miesiącem szukaliśmy prawdopodobieństwa tego, że umierający człowiek będzie starszy od wszystkich aktualnie żyjących. Zadanie wykonaliśmy.

Obliczyliśmy interesujące nas prawdopodobieństwo. Pozwólmy sobie teraz na kilka komentarzy i dygresji. Przypomnijmy najważniejszy wynik pomocniczy, który udowodniliśmy przed miesiącem.

**Stwierdzenie 1.** Prawdopodobieństwo tego, że osobnik umierający w wieku  $t$  lat jest starszy od wszystkich aktualnie żyjących, jest równe

$$\exp\{-\lambda R(t)\}, \quad \text{gdzie} \quad R(t) = \int_t^{\infty} S(u) du.$$

Warto przyjrzeć się bliżej funkcji  $R$ . Wyobraźmy sobie, że mamy „bardzo liczną” próbkę losową osobników o funkcji przeżycia  $S$ . Spodziewamy się, że spośród wszystkich  $n$  osobników liczba tych, którzy przeżyją przynajmniej  $t$  lat, jest bliska  $nS(t)$ . Tak jak w poprzednich rozważaniach, podzielimy przedział  $(t, \infty)$  na krótkie odcinki  $(t+ih, t+(i+1)h]$ , gdzie  $i = 0, 1, \dots$ . Oczekujemy, że około  $n(S(t+ih) - S(t+(i+1)h))$  osobników w naszej próbce będzie miało długość życia w  $i$ -tym przedziale, czyli w przybliżeniu  $t+ih$ . Jeśli teraz obliczymy średnią długość życia ponad  $t$  lat, to otrzymamy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\infty} ih n(S(t+ih) - S(t+(i+1)h)) = \sum_{i=1}^{\infty} hS(t+ih) \approx R(t).$$

W rachunku prawdopodobieństwa nazywamy  $R(t)$  *wartością oczekiwaną* lub *średnią* czasu życia ponad  $t$  lat. Zauważmy, że mówimy tu o średniej pośród wszystkich osobników. Uznajemy, że ci, którzy wieku  $t$  nie dożyli, mają czas trwania życia ponad  $t$  lat równy 0. Jeśli obliczymy średnią pośród tylko tych osobników, którzy dożyli wieku  $t$ , to otrzymamy  $R(t)/S(t)$ . Poniższy wynik ma, z oczywistych względów, duże znaczenie dla ubezpieczeń życiowych.

**Stwierdzenie 2.** Oczekiwany dalszy czas życia osobnika, który dożył  $t$  lat, jest równy  $R(t)/S(t)$ .

W szczególności, średnia długość życia jest równa  $m = R(0)$ .

W realnych populacjach średnia długość życia jest skończona. Jednak z matematycznego punktu widzenia nic nie stoi na przeszkodzie, aby rozważać takie funkcje przeżycia  $S$ , że pole pod wykresem  $S$  jest nieskończone, czyli  $m = \infty$ . Każda taka nierosnąca funkcja  $S$ , że  $S(0) = 1$  i  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ , jest poprawną matematycznie funkcją przeżycia! W świecie, w którym obowiązują reguły T1, T2, N1, N2 i TN i jednocześnie  $m$  jest nieskończone, pewne zjawiska mogą się wydać paradoksalne.

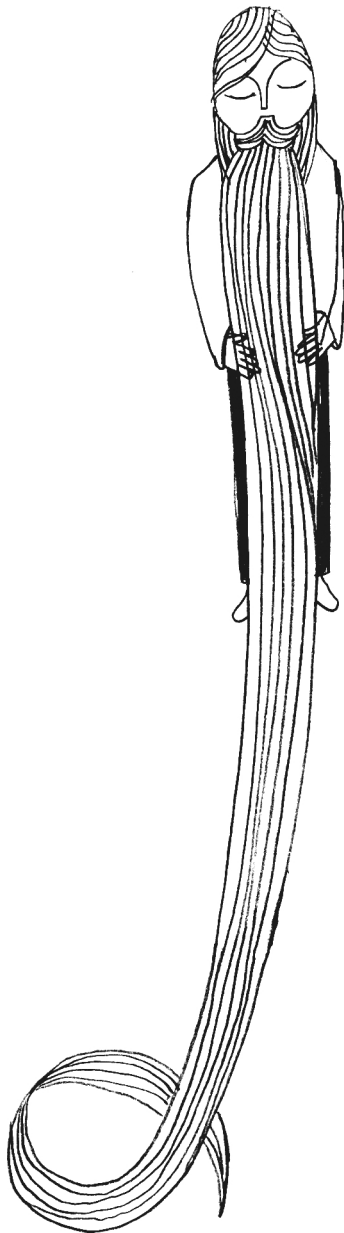
**Wniosek 1.** Jeśli średnia długość życia jest nieskończona, to w momencie śmierci każdego osobnika żyje nieskończenie wielu innych osobników od niego starszych.

Nikt nie jest nigdy najstarszy! Nieco dokładniej, teza Wniosku 1 jest zdarzeniem losowym, które zachodzi z prawdopodobieństwem równym 1.

**Dowód Wniosku 1.** Zdarzenie losowe, o którym mówi Stwierdzenie 1, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy w obszarze  $D$  na rysunku 2 nie ma ani jednego końca „odcinka życia” (por. rys. 1). Jeśli  $m = \infty$ , to  $R(t) = \infty$  dla każdego  $t$ . Stosując formalnie wzór, widzimy, że w obszarze  $D$  nie ma „punktów śmierci” z prawdopodobieństwem  $\exp(-\lambda R(t)) = 0$  (można to uzasadnić nieco porządniej, modyfikując tylko nieznacznie podany poprzednio dowód).

Z prawdopodobieństwem 1, w obszarze  $D$  leży zatem przynajmniej jeden punkt. Nazwijmy teraz  $D$  „obszarem zaczepionym w punkcie  $(x, t)$ ” i zauważmy, że w nim jest zawarty każdy obszar zaczepiony w  $(x, t+i)$ , dla  $i = 1, 2, \dots$

\*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski; Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń



W każdym z tych „mniejszych obszarów” leży przynajmniej jeden punkt, a zatem w obszarze  $\mathcal{D}$  leży nieskończenie wiele punktów, czego mieliśmy dowieść.

Z drugiej strony, w świecie, w którym obowiązują reguły T1, T2, N1, N2 i TN i jednocześnie  $m < \infty$ , też dzieją się rzeczy osobliwe.

**Wniosek 2.** *Jeśli średnia długość życia jest skończona, to w dowolnym, ustalonym momencie z niezerowym prawdopodobieństwem liczba aktualnie żyjących osobników jest równa zero.*

Co jakiś czas świat całkowicie się wyludnia. Na szczęście, nasze aksjomaty zapewniają, że dzieci będą rodzić się nieprzerwanie, z jednakową intensywnością.

**Zagadka 1.** *Jaki jest wzór na „niezerowe prawdopodobieństwo”, o którym mówi Wniosek 2?*

Dla ułatwienia dodajmy, że ten wzór wynika natychmiast z naszych poprzednich rozważań i zależy tylko od  $\lambda$  i  $m$ .

**Zagadka 2.** *Jaka jest średnia (oczekiwana) liczba osobników żyjących w ustalonym momencie?*

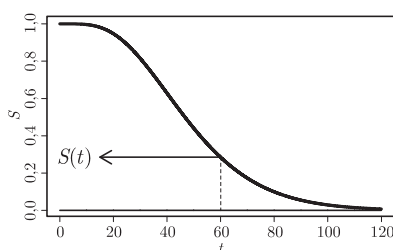
W tytule tego artykułu procesy Poissona występują w liczbie mnogiej. Założenia N mówią, że proces urodzeń jest jednorodnym procesem Poissona. Można wywnioskować, powołując się na Założenia T i TN, że proces zgonów jest też jednorodnym procesem Poissona z tą samą intensywnością  $\lambda$ . Żeby zobaczyć jeszcze jeden proces Poissona, zauważmy następujący fakt.

**Stwierdzenie 3.** *Zdarzenie polegające na tym, że w „krótkim” odcinku czasu  $(x, x + h]$  nastąpi śmierć osobnika, który narodził się w „krótkim” odcinku czasu  $(x - t, x - t + k]$ , ma prawdopodobieństwo w przybliżeniu równe  $\lambda\sigma(t)hk$ . Prawdopodobieństwo śmierci więcej niż jednego osobnika jest tak małe, że możemy je zaniedbać.*

Innymi słowy, możemy rozpatrywane zdarzenie wyrazić tak: w „małym równoległoboku” na płaszczyźnie znajdzie się jeden „punkt śmierci”. Widać tu analogię z warunkiem N1. Mały równoległobok można zastąpić, na przykład, „małym prostokątem”  $(x, x + h] \times (t, t + k]$ . Można udowodnić własność analogiczną do N2: liczby punktów w rozłącznych obszarach są statystycznie niezależne. Losowy zbiór „punktów śmierci” jest procesem Poissona na półpłaszczyźnie  $\{(x, t) : t > 0\}$ , z intensywnością  $\lambda\sigma(t)$ . Jest to proces jednorodny względem  $x$ , ale *niejednorodny* względem  $t$ , bo jego intensywność zależy od  $t$ . Niestety, nie możemy tu kontynuować opowieści o procesach Poissona. Czytelnik może sięgnąć do pięknej książki Kingmana *Procesy Poissona*, PWN, Warszawa, 2002.

\* \* \*

Na zakończenie popatrzymy na badane przez nas zjawisko z perspektywy statystycznej.

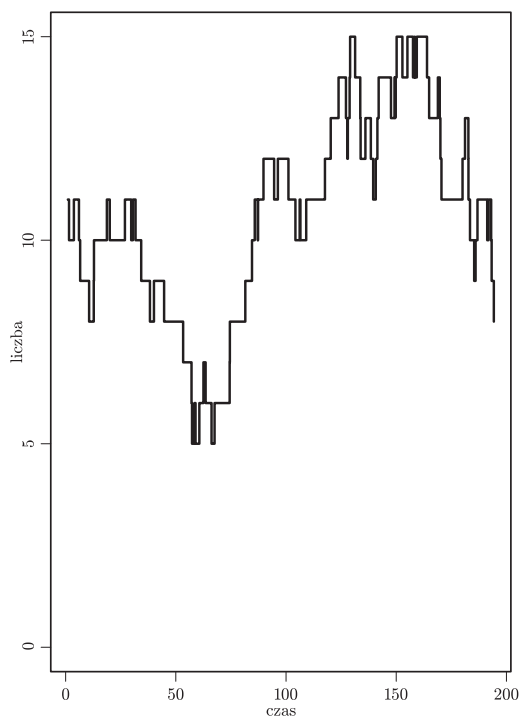


Rys. 3. Wykres funkcji przeżycia.

W tym celu udamy się na wyprawę do Symulandii. Jest to mały, wyspiarski kraj, którego mieszkańcy rodzą się i umierają ściśle według reguł T, N i TN. Funkcja przeżycia jest dokładnie taka, jak na rysunku 3 (znanym już z poprzedniej części artykułu), w szczególności  $m = 50$ , intensywność procesu urodzin jest równa  $\lambda = 0,2$ .

Co więcej, Główny Symulandzki Urząd Statystyczny dysponuje pełnymi danymi dotyczącymi osób, które urodziły się *lub* umarły w przedziale czasowym  $(0, 200]$  (według lokalnego kalendarza).

Dane dotyczą 82 osób i składają się z par  $(x_j, t_j)$ , gdzie  $x_j$  jest czasem urodzenia,  $t_j$  jest długością życia  $j$ -tej osoby ( $j = 1, \dots, 82$ ). Obliczyliśmy na ich podstawie kilka statystyk, które teraz przytoczymy. Są to „empiryczne odpowiedniki” wielkości, które analizowaliśmy.



Rys. 4. Liczba ludności Symulandii.

Wyprawę do Symulandii umożliwił pakiet statystyczny R.

R Development Core Team (2011). *R: A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

Każdy, kto ma komputer i dostęp do Internetu, może sobie zainstalować za darmo to potężne narzędzie obliczeniowe – i budować własne Symulandie. Zachęcam do takiej zabawy.

- W ciągu 200 lat zaobserwowano 44 urodzenia i 46 zgonów.
  - Porównaj z liczbą  $200 \cdot \lambda = 40$ .
- Średnia długość życia dla 82 osób była równa 48,72.
- 21 osób, czyli 25,61% spośród 82 przeżyło ponad 60 lat.
  - Porównaj z wartością funkcji przeżycia,  $S(60) = 25,51\%$ .
- Średnia długość życia ponad 60 lat, obliczona dla tych 21 osób, była równa 18,37 lat.
  - Porównaj z wielkością  $R(60)/S(60) = 18,17$ .
- W ciągu 200 lat ani razu liczba ludności Symulandii nie spadła do 0.
  - Porównaj z Zagadką 1.
- Średnia liczba ludności Symulandii w przedziale 200 lat była równa 10,31.
  - Porównaj z Zagadką 2 i z rysunkiem 4 (10,31 jest to nic innego, jak pole pod wykresem liczby ludności, podzielone przez 200).
- Na koniec statystyka dla nas najważniejsza. Spośród 46 zgonów 12 razy zdarzył się rekord długowieczności w sensie przez nas rozpatrywanym.
  - Porównaj ułamek  $12/46 = 26,09\%$  z liczbą 25,09% obliczoną zgodnie z uzyskanym przed miesiącem wzorem

$$\exp \left\{ -\lambda \int_t^{\infty} S(u) du \right\}.$$

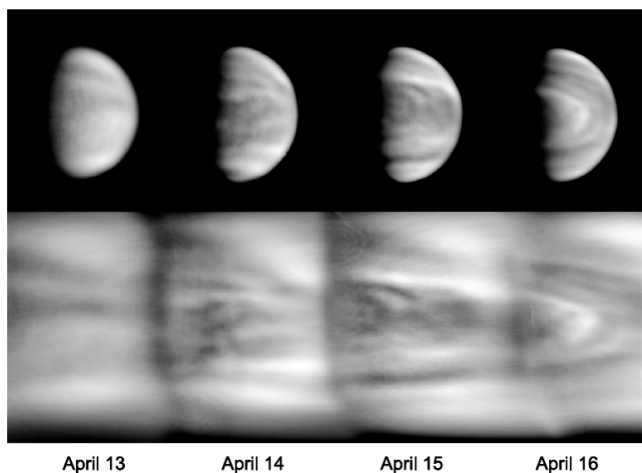
## Obserwacje naziemne Wenus w bazie danych ESA

Wenus, siostrzana planeta naszej Ziemi, jest bardzo wdzięcznym obiektem obserwacji astronomicznych, również tych amatorskich. W czerwcu 2012 roku byliśmy świadkami dość rzadkiego zjawiska astronomicznego, tzw. „przejścia”, czyli tranzytu Wenus na tle tarczy Słońca. W takich niecodziennych momentach oczy większości miłośników nieba zwracają się w stronę naszej Porannej Gwiazdy. Okazuje się jednak, że także na co dzień obserwacje Wenus mogą być nie tylko ciekawe, ale również przydatne naukowcom.

Przykładem wykorzystania amatorskich obserwacji Wenus przez profesjonalnych astronomów jest Venus Active Archive (VAA), czyli archiwum naziemnych zdjęć Wenus wykonanych

przez miłośników astronomii (<http://www.rssd.esa.int/vaa>). Powstało ono w celu uzupełnienia danych zbieranych przez Venus Express (VEX), czyli pierwszego satelitę zbudowanego przez Europejską Agencję Kosmiczną (ESA), który bada atmosferę Wenus. Niestety, nie jest on w stanie nieustannie monitorować nieba nad północną półkulą planety, ponieważ obiega ją po eliptycznej orbicie z apocentrum znajdującym się nad biegunem południowym. Położenie VEX na orbicie powoduje, że czasami części planety są widoczne z Ziemi, ale nie są widoczne z satelity. Dlatego właśnie dodatkowe obserwacje prowadzone z teleskopów naziemnych dostarczają brakujących i niezbędnych informacji na temat atmosfery Wenus.

VAA wykorzystuje możliwości amatorów astronomii, którzy uzyskują obrazy wykonane w podczerwieni lub ultrafiolecie za pomocą filtrów monochromatycznych oraz typowych kamer CCD. Zdjęcia te pozwalają, na przykład, na badanie jasności chmur Wenus względem całej jej powierzchni w zależności od czasu i mogą być użyte przez profesjonalnych astronomów w pracy naukowej. Przykładem mogą być obserwacje amatora astronomii, Berndta Gaehrkena, pokazane obok. Jest to zestawienie obrazów wykonanych pomiędzy 13 a 16 kwietnia 2007 roku za pomocą 80-cm teleskopu wyposażonego w kamerę internetową i filtr UV. Każdy obraz powstał ze złożenia około 4500 zdjęć. Mamy nadzieję, że pokazany przykład zachęci naszych Czytelników do obserwacji astronomicznych, które mogą mieć również wartość naukową.



Magdalena OTULAKOWSKA-HYPKA



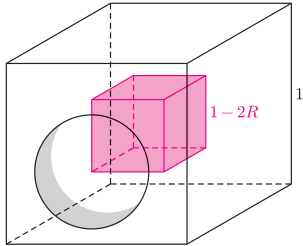
# 5

# mała delta

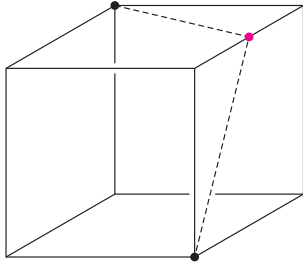
## Kto by się spodziewał,

że prawdziwe jest stwierdzenie:

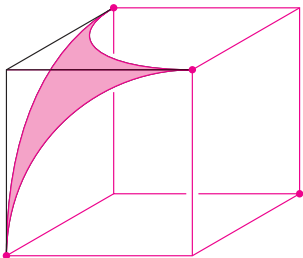
*jeśli w sześcianie mieszczą się trzy jednakowe kulki, to zmieści się też czwarta tej samej wielkości!*



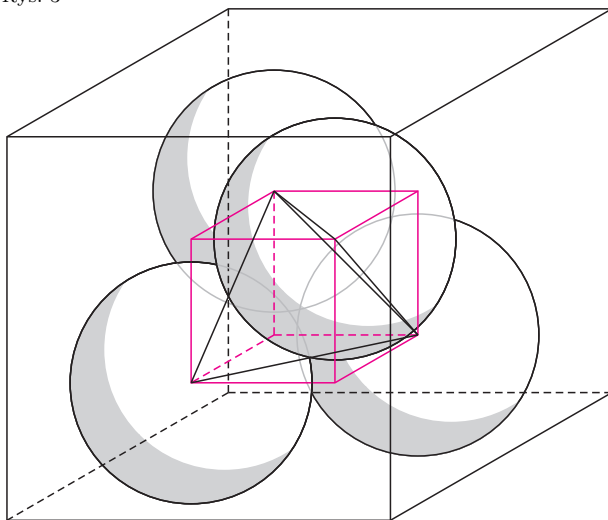
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Aby to uzasadnić, stwórzmy najtrudniejszą sytuację – umieśmy w sześcianie trzy kulki największe, jak to tylko jest możliwe. Przyjmijmy, że sześcian ma krawędź o długości 1. Jaki wtedy jest promień takich największych kulki?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, zbadajmy, gdzie leży w sześcianie środek zawartej w nim kulki o promieniu  $R$ . Odpowiedź jest na rysunku 1 – oczywiście, w odległości co najmniej  $R$  od ścian sześcianu, czyli w mniejszym sześcianiku o krawędzi  $1 - 2R$ . Oznaczmy tę liczbę przez  $k$ .

Nasze zadanie sprowadza się teraz do znalezienia takich trzech punktów w tym sześcianiku, aby najmniejsza z odległości między nimi (oznaczymy ją  $d$ ) była jak największa – w nich umieścimy środki naszych kulki: ich promienie będą równe  $d/2$ .

Pomysł, by zacząć od obrania dwóch najdalej położonych punktów w sześcianiku (czyli odległych o  $k\sqrt{3}$ ), daje nam  $d = k\sqrt{5}/2$ . Faktycznie (rys. 2) kolorowy punkt ma taką odległość od obranych punktów czarnych, a jakiegokolwiek jego poruszenie w sześcianiku zmniejsza jego odległość od jednego z nich.

Okazuje się, że ten wynik można poprawić, zaczynając „słabiej”, czyli nie od punktów położonych na końcach przekątnej sześcianiku, lecz na końcach przekątnej jego ściany. Takie punkty są odległe o  $k\sqrt{2}$ . Jak łatwo spostrzec, każdy wierzchołek sześcianiku należy do trzech ścian, więc do wyboru na pozostałe dwa „stanowiska” najbardziej odległych punktów mamy punktów aż trzy. Rysując sferę o środku w wierzchołku sześcianiku i promieniu  $k\sqrt{2}$  (rys. 3), bez trudu stwierdzamy, że poruszenie dowolnego z punktów spowoduje zmniejszenie jego odległości od co najmniej dwóch spośród pozostałych. Można więc jako środki trzech możliwie największych kulki w sześcianie jednostkowym wybrać dowolne trzy spośród tak wyróżnionych wierzchołków sześcianiku, bo nietrudno stwierdzić, że  $k\sqrt{5}/2 < k\sqrt{2}$ .

Mamy zresztą nie tylko położenie środków największych kulki, ale też i ich promienie, bo z  $k = 1 - 2R$  i  $2R = k\sqrt{2}$  wynika  $R = 1 - \sqrt{2}/2$ .

Patrząc na rysunek 3, widzimy też, że „niechcący” dowiedliśmy zdanie rozpoczynające ten tekst. Cztery kulki zostały sportretowane na rysunku 4. Oczywiście, mniejsze kulki też zmieszczą się w sześcianie.

Łatwo zauważyć tu pole do dalszych zadań. Można sprawdzić, że gdy w sześcianie mieści się jedna kulka, to nie zawsze da się włożyć tam jeszcze jedną taką samą, podobnie będzie dla dwóch – ale jak będzie dla pięciu, sześciu itd.? Wydaje mi się, że początkowe stwierdzenie będzie też prawdziwe dla czworoscianu foremego – ale czy to prawda? A czy dałoby się sformułować podobne (i prawdziwe) stwierdzenia dla innych wielościanów? No i można też zadać pytanie o maksymalny rozmiar  $n$  jednakowych kulki mieszczących się w jednostkowym sześcianie – dla  $n = 1$  mamy  $1/2$ , dla  $n = 2$  jest to  $\sqrt{2}/2$ , dla  $n = 3$  (i  $n = 4$ ) obliczyliśmy przed chwilą, dla  $n = 8$  mamy  $1/4$ , ale co dla innych  $n$ ?

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

## Jaki jest następny wyraz tego ciągu?

*Paweł MATEJEK\**

3, 7, 31, 211, 2311, ... – jaki jest następny wyraz tego ciągu? Jakiś czas temu taka zagadka pojawiła się na jednej z polskich rozrywkowych stron internetowych. Niemal od razu w komentarzach pod nią rozpoczął się spór o poprawne, *prawdziwe* rozwiązanie. Czytelnik zapewne zechce podjąć wyzwanie samodzielnie odnalezienia następnego elementu ciągu i jego ogólnej reguły. Zatem zatrzymajmy się tu i pozwólmy sobie na chwilę namysłu; w dalszej części tekstu pojawi się rozwiązanie (autorowi niniejszego tekstu zajęło kilka dłuższych chwil znalezienie formuły).

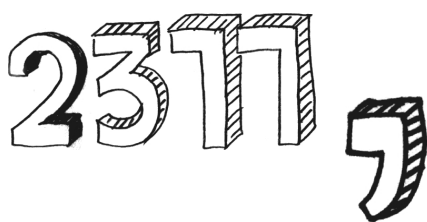
Autor myślał tak: wszystkie te liczby są nieparzyste, a nawet pierwsze; początkowe dwie są jednocyfrowe, następne mają jedynekę jako cyfrę jedności. Z braku lepszych pomysłów odejmijmy 1 od każdej z tych liczb – otrzymamy wtedy: 2, 6, 30, 210, 2310. Łatwo można zauważyć, że  $6 = 2 \cdot 3$ ,  $30 = 6 \cdot 5$ ,  $210 = 30 \cdot 7$  i szybko sprawdzić, że  $2310 = 210 \cdot 11$ . Czyli zaczynamy od 2, mnożymy przez 3, potem wynik mnożymy przez 5, kolejny wynik mnożymy przez 7, a ten z kolej przez ... nie, nie przez 9. Przez 11. Czemu nie przez 9? Widać nie chodzi o kolejne liczby nieparzyste. Więc może kolejne liczby pierwsze? Jak dotąd, iloczyny budowaliśmy z kolejnych liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, więc pewnie to o to tu chodzi. Kolejną liczbą pierwszą jest 13, zatem Czytelnik Sprawny szybko obliczy w pamięci (a mniej sprawny za pomocą kalkulatora, jak to i autor uczynił), że  $2310 \cdot 13 = 30030$ . Teraz trzeba jeszcze tylko dodać do tego jedynekę i mamy rozwiązanie zagadki: następną liczbą jest 30031, zaś  $n$ -ty wyraz ciągu powstaje przez dodanie jedynki do iloczynu  $n$  kolejnych liczb pierwszych.

Po uzyskaniu powyższego wyniku zadowolony z siebie autor (niechaj Czytelnik Przejorny zawsze strzeże się nadmiernego zadowolenia z siebie – niewiele jest rzeczy równie pewnie wiodących do zguby!) postanowił skonfrontować swoje rozumowanie z tymi przedstawionymi w komentarzach. Był więcej niż zdziwiony, gdy zobaczył odpowiedź: 509 – i to bez słowa wyjaśnienia. Cóż więc pozostało uczynić, jak nie zwrócić się po pomoc do mądrzejszych od siebie? *Wolfram Alpha* rzeczywiście podaje 509 jako kolejny prawdopodobny wyraz podanego ciągu, z wyjaśnieniem odsyłając do *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Tam możemy przeczytać, że  $n$ -ty element badanego ciągu to największy dzielnik pierwszy iloczynu  $n$  kolejnych liczb pierwszych powiększonego o jeden, a dalej, że pomysł tego ciągu wywodzi się z dowodu Euklidesa, iż istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych. Zamiast się wyjaśnić, sprawa stała się jeszcze bardziej zagmatwana. Co do rzeczy ma Euklides? Przypomnijmy może twierdzenie i dowód (mówiąc ścisłej, współczesną interpretację tego dowodu), które zamieścił w swoich *Elementach*.

**Twierdzenie.** *Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.*

**Dowód (Euklidesa).** Swój dowód Euklides przeprowadził metodą *reductio ad absurdum*. Podążając tropem jego myśli, załóżmy, że istnieje skończenie wiele liczb pierwszych. Oznaczmy je w kolejności rosnącej jako  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Zdefiniujmy liczbę  $A = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ . Nie dzieli się ona przez żadną z liczb pierwszych  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , bo reszta z dzielenia zawsze wynosi 1, nie jest więc złożona. Jest też większa od każdej z liczb  $p_i$ , nie jest więc także pierwsza. Ale przecież każda liczba naturalna (większa od 1) jest albo pierwsza, albo złożona, z definicji pierwszości. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że poczynione przez nas założenie było fałszywe, a więc, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Czytając powyższy dowód nie dość uważnie, można by w pierwszej chwili pomyśleć, że skonstruowana w powyższym dowodzie liczba  $A$  jest kolejną liczbą pierwszą, którą można równie dobrze oznaczyć jako  $p_{n+1}$ . Otóż  $A$  nie musi być kolejną liczbą pierwszą, mogą istnieć inne liczby pierwsze większe niż każda z  $p_i$ , ale mniejsze niż  $A$ . W istocie  $A$  nie musi być w ogóle liczbą pierwszą – może być iloczynem kilku liczb pierwszych większych niż liczby  $p_i$ . Obrazują to dwa przykłady.



**Rozwiązanie zadania F 856.** Świecenie neonówki nastąpi, gdy przyłożone napięcie wystarczy do rozpędzenia (pomiędzy zderzeniami) znajdujących się w niej elektronów do energii równej energii jonizacji atomów. Pomiędzy zderzeniami elektron uzyskuje energię  $E$ :

$$E = \frac{eUl}{d},$$

gdzie  $l$  oznacza drogę swobodną elektronu (patrz zadanie 855),  $e$  ładunek elektronu, a  $eU/d$  jest równe natężeniu pola elektrycznego pomiędzy elektrodami. Oznacza to, że droga swobodna elektronu powinna wynosić:

$$l = \frac{E_0 d}{eU},$$

czyli około  $650 \mu\text{m}$ . Droga swobodna jest odwrotnie proporcjonalna do ciśnienia gazu, a więc w neonówce powinno panować ciśnienie

$$p = 0,59p_0/650 \approx 0,0009p_0 = 0,92 \text{ hPa.}$$

W wyniku zderzeń powstaną także jony neonu – ich drogi swobodne są jednak kilka razy mniejsze niż elektronów, a więc nie będą między zderzeniami uzyskiwały energii wystarczających do zderzeniowego jonizowania dalszych atomów.

\*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

**Rozwiązanie zadania M 1421.**

Udowodnimy indukcyjnie względem  $n$ , że dla każdego  $1 \leq k \leq n$  jest prawdziwa nierówność z tezy zadania. Dla  $n = 1$  mamy

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 < e.$$

Zakładając prawdziwość tezy dla  $n$ , udowodnimy ją dla  $n + 1$ . Ponieważ  $\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}$  dla  $j \geq 1$  oraz  $\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j}$  dla  $j = 0$ , otrzymujemy dla  $k < n + 1$

$$\sum_{j=0}^k \binom{n+1}{j} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}.$$

Dla  $k = n + 1$  ten wzór jest również prawdziwy, jeśli przyjmiemy  $\binom{n}{n+1} = 0$ .

Korzystając z założenia indukcyjnego, dostajemy

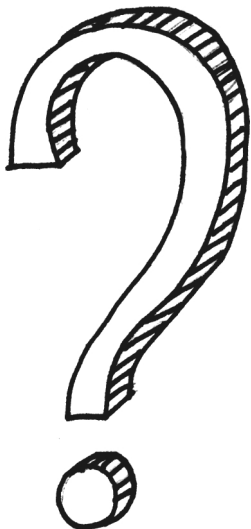
$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \binom{n+1}{j} &< \left(\frac{en}{k}\right)^k + \left(\frac{en}{k-1}\right)^{k-1} = \\ &= \left(\frac{e}{k}\right)^k \left(n^k + \frac{1}{e} \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} kn^{k-1}\right). \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} &= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} < \\ &< \frac{1}{e} \cdot e = 1 \end{aligned}$$

oraz  $n^k + kn^{k-1} \leq (n+1)^k$ , otrzymujemy

$$\sum_{j=0}^k \binom{n+1}{j} < \left(\frac{e(n+1)}{k}\right)^k.$$



**Przykład 1.** Załóżmy, że jest tylko pięć liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11. Wtedy konstruujemy liczbę  $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$ . Liczba ta nie dzieli się przez żadną z wybranych liczb pierwszych. W istocie nie dzieli się przez żadną liczbę mniejszą od siebie (nie licząc jedynki), zatem jest to liczba pierwsza, jednak inna niż ta z poczynionego założenia – sprzeczność. Przy czym istnieją też inne, mniejsze liczby pierwsze, np. 13.

**Przykład 2.** Załóżmy, że jest tylko sześć liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, 13. Wtedy konstruujemy liczbę  $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$ . Liczba ta nie dzieli się przez żadną z wybranych liczb pierwszych. Ale okazuje się, że  $30031 = 59 \cdot 509$ , przy czym tak 59, jak i 509 są pierwsze, choć nie zostały wymienione w założeniu. Znowu sprzeczność.

A więc to o to w tym wszystkim chodziło – o ilustrację powyższego dowodu, w szczególności niuansu zilustrowanego przykładami. Teraz już wiadomo, jak i dlaczego badany ciąg został określony. No dobrze, czy w takim razie 30031 jest złą odpowiedzią? Nie, odpowiedź ta jest zgodna z treścią zadania – jest to ciąg o zadanych początkowych elementach i prostej regule tworzenia kolejnych wyrazów. Tyle, że to inny ciąg niż oczekiwany przez twórcę zadania. Zbieżność początkowych wyrazów obu ciągów wynika z faktu, że owe wyrazy są liczbami pierwszymi, a więc ich największymi dzielnikami pierwszymi są one same. Dopiero następny iloczyn, 30031, czy też jego największy dzielnik pierwszy, 509, ujawniają różnicę. Gdyby w zagadce podano o jedną liczbę więcej, byłoby jasne, o który ciąg chodzi: ciąg 3, 7, 31, 211, 2311, 30031 będzie kontynuowany przez 510528, zaś ciąg 3, 7, 31, 211, 2311, 509 przez 277.

Właśnie ta niejednoznaczność wywołała burzliwą dyskusję, zresztą zupełnie niepotrzebną. Dla matematyka jest oczywiste, że gdy w zadaniu należy znaleźć obiekt o pewnych własnościach określonych w treści zadania, to próbuje znaleźć wszystkie obiekty spełniające zadane warunki. Na przykład, kiedy szuka rozwiązań równania  $x^2 - x = 0$ , nie zadowala się samą jedynką, czy też samym zerem – jako rozwiązania podaje obie te liczby. Problem leży raczej po stronie samych zagadek pt. *jaka jest następna liczba?* Jeżeli podamy kilka liczb, możemy dobrać do nich nieprzeliczalnie wiele nieskończonych ciągów, których początkowe wyrazy będą takie, jak te podane, np. 3, 7, 31, 211, 2311, 0, 0, 0, ..., albo 3, 7, 31, 211, 2311, 314, 31415, 3141592, ..., żeby już trzymać się naszego ciągu.

Oczywiście, nie o to chodzi w zagadkach, ale o to, by na podstawie podanych początkowych wyrazów znaleźć metodę otrzymywania kolejnych, by znaleźć ogólny schemat. Ale nawet przy takim ograniczeniu nadal mamy nieskończenie wiele różnych wzorów. Do węzłów (1, 3), (2, 7), (3, 31), (4, 211), (5, 2311) możemy (nawet nie musimy) dołożyć sobie dowolne kolejne, np. (6, 66), (12, 2013), znaleźć jakąś funkcję określoną na całej prostej i przechodzącą przez podane punkty (najprościej numerycznie, za pomocą komputera), by na koniec ograniczyć dziedzinę do argumentów naturalnych, otrzymując w ten sposób ciąg spełniający warunki zadania, wraz ze sposobem obliczania kolejnych jego wyrazów. Możemy nawet z góry zadać następny element, jak w przypadku węzła (6, 66) – to właśnie on wygeneruje kolejny wyraz równy 66.

I tu właśnie leży sedno: ściśle poprawna odpowiedź musiałaby zawierać wszystkie ciągi rozpoczynające się zadanymi liczbami, a zagadka, jako łamigłówka, powinna mieć jedną, stosunkowo łatwą do znalezienia odpowiedź. Rzecz jasna, jej znalezienie wcale nie musi być łatwe, ale rozwiązania nie powinny wymagać zaawansowanych studiów (w każdym razie tak autor postrzega zagadki i chyba nie jest w tym odosobniony). Stąd niejawnie założenie jednoznaczności. Czy nonsensowne? Raczej nie, choć wymaga ostrożności przy takim konstruowaniu zagadek, by oczekiwane rozwiązanie było naturalne i wyraźnie łatwiejsze do znalezienia niż pozostałe, nienaturalne i nieoczekiwane. Ta naturalność wymaga pewnej intuicji i wyczucia przy tworzeniu zagadek. Czy w takim razie opisana zagadka jest zła? Chyba nie, skoro skłoniła do przemyśleń co najmniej jedną osobę (autora), czego efektem jest niniejszy tekst.

## Dwa zadania (*Delta* 12/1990)

Jarosław WRÓBLEWSKI

10  
219  
4796  
105030  
2300104  
50371117  
1103102046  
24157378203  
529034393290  
11585586272312  
253718493496142  
5556306986017175  
121680319386464850  
2664737596978110299  
58356408797678883616  
1277975907130111287030  
27987027523701766535844  
612901781044839990619277  
13422239746246942029463326  
293940277834746405249823203  
6437143767881726489806973190  
140970200455734695276637468392  
3087176259086334835548776106122  
67607602343297851162601939391695  
1480572377802050246594187936024890  
32423788005073752816976163732130379  
710064596881545822871428836670676836  
15550056386553447472796412677073638630  
340538388601466711930899827265490092384  
7457618881148419333592105943068579865437

**Zadanie 1:** Znaleźć regułę, według której skonstruowany jest ciąg o 30 początkowych wyrazach podanych obok.

**Rozwiązanie 1:**

$A(1) = 10$ ,  $A(2) = 219$ ,  $A(n+2) = A(n+1)^2/A(n)$  zaokrąglone do najbliższej liczby całkowitej. To znaczy: zaczynamy od 10 i 219, za każdym razem wybieramy liczbę, która z najlepszym przybliżeniem tworzy ciąg geometryczny z poprzednimi dwiema.

**Rozwiązanie 2:**

Zaczynamy od 10, 219, 4796, 105030 i kontynuujemy według wzoru

$A(n+4) = -11A(n) + 18A(n+1) - 3A(n+2) + 22A(n+3)$  (rekursja liniowa 4. rzędu).

**Zadanie 2:** Skoro dany ciąg może być zdefiniowany na dwa różne sposoby, to jak wykazać, że te dwie definicje są równoważne?

**Rozwiązanie:**

No cóż, można obliczyć pierwszych 1000 wyrazów, używając obu definicji, i przekonać się, że wszystko się zgadza. Wydrukowanie tysiąca początkowych wyrazów zajęłoby pokaźnych rozmiarów książkę. Czyż trzeba bardziej przekonującego argumentu? Tak, trzeba. Tylko że takiego argumentu po prostu nie ma. Obie, bądź co bądź, bardzo proste definicje określają dwa różne ciągi!!! Jedynie „skromny” początek obu ciągów, składający się z 1402 wyrazów, jest taki sam. Ale według pierwszej definicji 1403. wyraz jest równy

1943708471314943308059445452657010940487450311864066842732596790939279068  
191168021439671095304800683519756645143142801766345115405789059172602192  
426024357604507643919310528104572431148473422703387902120314696316682603  
735267692111685622339243356242260056059336217912799059786079481997806631  
913955493134941095358770263918313025848373581726054928149011342047774528  
154248287433782463237576416857026309254788755903742777139477594456385042  
020381315538604379941789590322666368814892780385046811477655985825537894  
431894143994712043942268394043823543450207513886190799409707531632679517  
052869104335940723488960240770470438470434329535343866330429132657179201  
894810776495469936998716229270764904917198741365340242782600909003168195  
629553831589770365472687705483796661474238920271726070390505179067208859  
490817765494636249793643314197295308500154814706778732034270622318621910  
522030142040283435992446877395852252468365235219657327211742475429216859  
612898009146799397834207588995393930733511691021384920256724554594857336  
855550714963221355049079118765001875374835520434138927516201876958496564  
958805765202364476313555615826884516631224599151532590504446541236893625  
713832620042439077419006777861484860386048975978762433100742439296700782  
881889486380714070148887484098410694218233687263042755465493793927981497  
199521026920386200848153568287674310343346371498689283968784694184354766  
679111870702565268681491357079215569781219694309328629243757829281537544  
222305623084962270299300645420182502879046175714261919397771509700298570  
157891004711917373029290386303109701959096841328964650889891682871446978  
568692922345060182670103628056600403977432916893829069098732545636174794  
446362475483205590674696119315488543667867514676786440758126850754300452  
964368265133082563202580908171650074203739290735941387946242005524276316  
413356912394816492851593842390985938520048268384592849898513622096090183  
58701821,

podczas gdy druga definicja daje 1403. wyraz o 1 większy.



### Rozwiązanie zadania M 1422.

Możemy założyć (dla  $k > 1$ ), że  $k$ -ta osoba w kolejce ma na bilecie numer  $k$ . Niech  $B_n$  oznacza zdarzenie w doświadczeniu z  $n$  osobami, w którym  $n$ -ta osoba usiadła na swoim miejscu. Oczywiście,  $\mathbb{P}(B_2) = 1/2$ . Udowodnimy teraz indukcyjnie, że  $\mathbb{P}(B_n) = 1/2$ . Niech  $n \geq 3$  i  $\mathbb{P}(B_k) = 1/2$  dla  $k \leq n-1$ . Rozpatrzmy doświadczenie z  $n$  osobami i niech  $A_k$  oznacza zdarzenie, że pierwsza osoba wylosowała miejsce  $k$ -te. Oczywiście,  $\mathbb{P}(A_k) = 1/n$  dla  $1 \leq k \leq n$ . Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite mamy

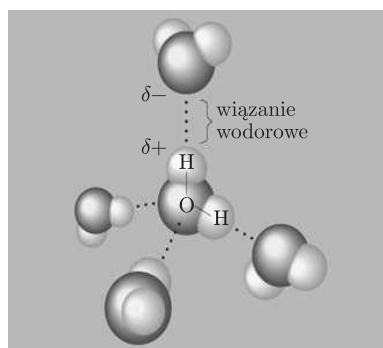
$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_n|A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k).$$

Zauważmy, że  $\mathbb{P}(B_n|A_n) = 0$ ,  $\mathbb{P}(B_n|A_1) = 1$  oraz dla  $2 \leq k \leq n-1$  zachodzi  $\mathbb{P}(B_n|A_k) = \mathbb{P}(B_{n-k+1}) = 1/2$ . Otrzymujemy więc, że

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{n} \left( 1 + (n-2) \cdot \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{1}{2}.$$

# O wiązaniach wodorowych

Krzysztof REJMER



Schemat wiązań wodorowych między cząsteczkami wody (wg Wikipedii).

substancja		ciepło sublimacji
woda	H <sub>2</sub> O	51
metan	CH <sub>4</sub>	8
selenowodór	H <sub>2</sub> Se	22
czterowodorek germanu	GeH <sub>4</sub>	17
tellurowodór	H <sub>2</sub> Te	28
czterowodorek cyny	SNH <sub>4</sub>	21

Tabela ciepł sublimacji wybranych par izoelektronowych związków chemicznych.

Niektóre pierwiastki, takie jak fluor czy tlen – czyli w języku chemii te najbardziej elektroujemne – mają zdolność tworzenia specyficznego rodzaju wiązania jonowego, nazywanego wiązaniem wodorowym. Wiązania wodorowe są słabsze od wiązań kowalencyjnych i od zwykłych wiązań jonowych, a silniejsze niż oddziaływania van der Waalsa (choć siła tych ostatnich na ogół wzrasta wraz ze wzrostem liczby elektronów w cząsteczce). Klasyczne wiązanie wodorowe tworzy się, gdy atom wodoru jest kowalencyjnie związany z atomem silnie elektroujemnym. W obecności innej takiej samej cząsteczki atom wodoru jest przez nią nieco odciągany od swego atomowego partnera, co osłabia wewnętrzne wiązanie w cząsteczce, ale powoduje utworzenie słabego wiązania elektrostatycznego dwóch cząsteczek.

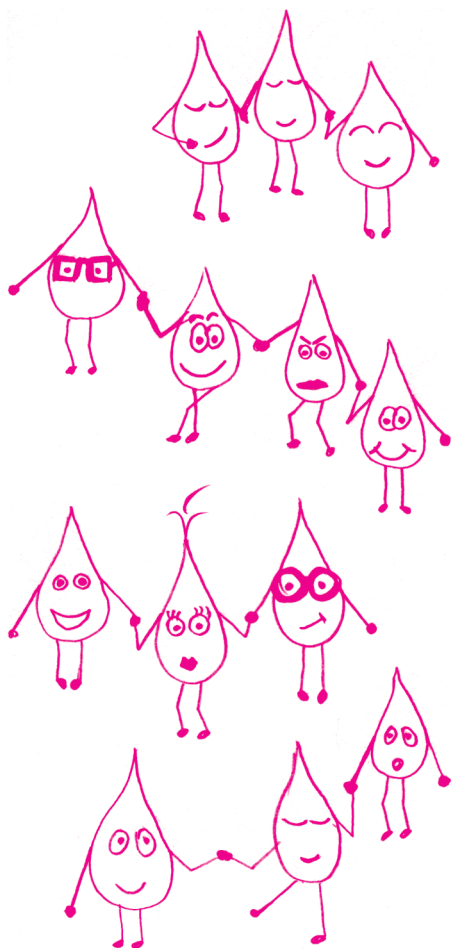
Zbadajmy dokładniej niektóre własności wiązań wodorowych w oparciu o dane liczbowe łatwe do znalezienia w różnego rodzaju tablicach fizycznych. Tabela na marginesie przedstawia wartości ciepł sublimacji trzech par substancji izoelektronowych, tj. każda z cząsteczek danej pary ma tyle samo elektronów (choć liczba ta jest różna dla różnych par). Wiedząc, że we wszystkich przypadkach pomiędzy cząsteczkami występuje oddziaływanie van der Waalsa, a tylko cząsteczki H<sub>2</sub>O tworzą wiązania wodorowe, możemy oszacować wartość ciepła sublimacji hipotetycznej postaci lodu, w której cząsteczki związane są jedynie siłami van der Waalsa, a następnie wyznaczyć energię wiązania wodorowego w lodzie. Stosunek ciepł sublimacji dla drugiej i trzeciej pary ma wartość około 1,3. Możemy więc przyjąć w przybliżeniu, że taki sam byłby on dla pierwszej pary, gdyby dla H<sub>2</sub>O nie istniały wiązania wodorowe. Wtedy ciepło sublimacji wody byłoby równe nie 51 kJ/mol, lecz  $1,3 \cdot 8 \text{ kJ/mol} = 10,4 \text{ kJ/mol}$ . Zważywszy na fakt, że cząsteczka wody ma dwa protony, stwierdzamy, iż energia pojedynczego wiązania wodorowego jest połową różnicy rzeczywistej i obliczonej wyżej wartości ciepła sublimacji, zatem otrzymujemy energię wiązania wodorowego w wodzie równą około 20 kJ/mol.

Co się dzieje z wiązaniami wodorowymi, kiedy lód topnieje? Ciepło topnienia lodu wynosi 6,02 kJ/mol. Ciepło topnienia metanu jest znacznie niższe i wynosi 0,92 kJ/mol. Na podstawie tych liczb możemy oszacować, jaka część wiązań wodorowych w lodzie ulega rozerwaniu w wyniku topnienia. Energię potrzebną do rozerwania wiązań wodorowych w lodzie podczas topnienia możemy wyznaczyć jako różnicę między ciepłami topnienia lodu i metanu; wynosi ona więc około 5,1 kJ/mol. Obliczyliśmy wcześniej, że całkowita energia wiązań wodorowych wynosi około 40 kJ/mol, a zatem rozpadowi ulega jedynie około 1/8 wszystkich wiązań wodorowych.

Okazuje się, że jest to oszacowanie mocno zawyżone. Z doświadczenia wynika, iż zerwaniu ulega znacznie mniejsza liczba wiązań wodorowych, co oznacza, że nasze wyniki należy interpretować jako miarę zmiany energii wiązań wodorowych związaną z ich deformacją. Używając pojęć mechanicznych, moglibyśmy wyobrazić sobie, że wiązania te są rozciągane i skręcane.

Wiązania wodorowe są odpowiedzialne, między innymi, za anomalną rozszerzalność wody. Jak zobaczyliśmy, topnienie lodu niszczy je tylko w niewielkim stopniu, dlatego objętość wody nie różni się znacząco od objętości lodu, z którego powstała. W odpowiednio niskich temperaturach (od 0 °C do 4 °C) występowanie wiązań wodorowych znacząco wpływa na odległości i wzajemne ustawienie cząsteczek wody. Dzięki temu w opisywanym zakresie temperatur gęstość wody rośnie ze wzrostem temperatury.

Warto tu przy okazji wspomnieć o szarlatanerii nazywanej homeopatią. Środki (bo nie są to żadne leki) homeopatyczne to wodne roztwory (czego – to bez większego znaczenia) o tak silnym stopniu rozcieńczenia, że prawdopodobieństwo napotkania cząsteczki substancji rzekomo czynnej jest mniejsze od prawdopodobieństwa trafienia szóstki w lotto. Jak zatem coś takiego mogłoby





leczyć? Niesławnej pamięci immunolog francuski, Jacques Benveniste, twierdził, że udowodnił istnienie zjawiska pamięci wody. Otóż substancja rozpuszczana miałaby pozostawiać po sobie informację zawartą w drganiach cząsteczek lub w ich strukturze. Teoria ta została wielokrotnie sfalsyfikowana doświadczalnie.

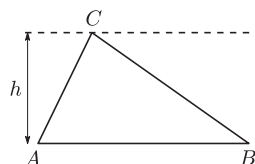
Mimo to istnieją zerujące na ludzkiej naiwności firmy produkujące i sprzedające urządzenia, które rzekomo zmieniają strukturę wody. „Żywa woda” – jak nazywają wynik działania tych maszynek – różni się od tej złej, czyli „martwej”, tym, że ma strukturę heksagonalną. Z tego, co powiedzieliśmy powyżej, wiemy, że taka struktura jest w wodzie obecna zawsze, przynajmniej w niezbyt wysokich temperaturach. Odważny Czytelnik *Delty*, ryzykując sądowy pozew, bez trudu może udowodnić „specjaliście” od wody heksagonalnej jego oszustwo. Gdyby w „złej” wodzie poddanej działaniu urządzenia uzdatniającego powstawała heksagonalna struktura, powinna wzrosnąć objętość wody. A to jest akurat bardzo łatwe do sprawdzenia.



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

**M 1420.** Dany jest odcinek  $AB$  i liczba dodatnia  $h$ . Wśród trójkątów  $ABC$  o podstawie  $AB$  i wysokości opuszczonej z wierzchołka  $C$  długości  $h$  znaleźć taki, dla którego iloczyn długości wszystkich trzech wysokości jest maksymalny (rys. obok).



Rozwiązanie na str. 18

**M 1421.** Udowodnić, że dla dodatnich liczb całkowitych  $k \leq n$  prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} < \left(\frac{en}{k}\right)^k,$$

gdzie  $e$  to stała zdefiniowana np. jako  $e = \sup_{m \geq 1} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ .

Rozwiązanie na str. 10

**M 1422.** W kolejce stoi  $n$  pasażerów, którzy chcą wejść na pokład samolotu,  $n \geq 2$ . Wszyscy mają swoje bilety z numerem miejsca oprócz pierwszej osoby w kolejce, która go zgubiła. W związku z tym wybiera ona swoje miejsce losowo. Każda następna osoba, jeśli nie może usiąść na miejscu wskazanym przez swój bilet (bo jest ono już zajęte), także wybiera swoje miejsce losowo (każde dostępne miejsce jest jednakowo prawdopodobne). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ostatni pasażer usiądzie na swoim miejscu, jeśli  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 100$ ?

Rozwiązanie na str. 11

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 855.** Oszacować średnią odległość  $l_0$  (tzw. średnią drogę swobodną) przebywaną przez elektron pomiędzy dwoma zderzeniami z atomami neonu znajdującego się w warunkach normalnych (tj. w temperaturze  $T_0 = 273,15$  K i pod ciśnieniem  $p_0 = 1013,25$  hPa). Promień atomu neonu wynosi  $r = 1,5 \cdot 10^{-10}$  m.

Rozwiązanie na str. 19

**F 856.** Odległość elektrod w neonówce (lampce wypełnionej neonem) wynosi  $d = 3$  mm. Jakiego powinno być ciśnienie zawartego w niej gazu, żeby jej zapłon (zaświecenie) następował po przyłożeniu napięcia 100 V. Energia jonizacji neonu wynosi  $E_0 = 21,56$  eV. Przyjmij, że temperatura gazu w lampce wynosi  $T_0 = 273,15$  K. W warunkach normalnych droga swobodna elektronu w neonie wynosi  $l_0 = 0,59$   $\mu\text{m}$ . Wskazówka: skorzystać z wyniku zadania 855.

Rozwiązanie na str. 9



Wyobraźmy sobie następującą grę. Mamy planszę o polach ponumerowanych od 0 do 100 i dwa pionki, stojące na początku na polu o numerze 0. Gracze wykonują ruchy na przemian. Gracz rzuca monetą i jeśli wypadnie reszka, to przesuwa swój pionek o 1 pole, a jeśli orzeł – o 5 pól. Wygrywa ten, kto pierwszy dojdzie do pola o numerze 100.

Mało ciekawa gra, prawda? Zależy tylko od szczęścia, a nie od podejmowania słusznych decyzji. Dodajmy więc do niej jakiś element decyzyjny. Powiedzmy, że przed wykonaniem ruchu gracz może wybrać spośród dwóch wariantów: A i B. Jeśli wybierze wariant A, to rzuca monetą i wykonuje ruch tak, jak napisano wyżej.

Jeśli wybierze bardziej ryzykowny wariant B, to w przypadku wyrzucenia orła rusza się do przodu o 20 pól, ale w przypadku wyrzucenia reszki wraca na pole zerowe. Żeby nasza gra zawsze się kończyła, przyjmijmy, że jeśli 10 razy danemu graczowi wypadnie reszka podczas stosowania wariantu B, to ten gracz przegrywa.

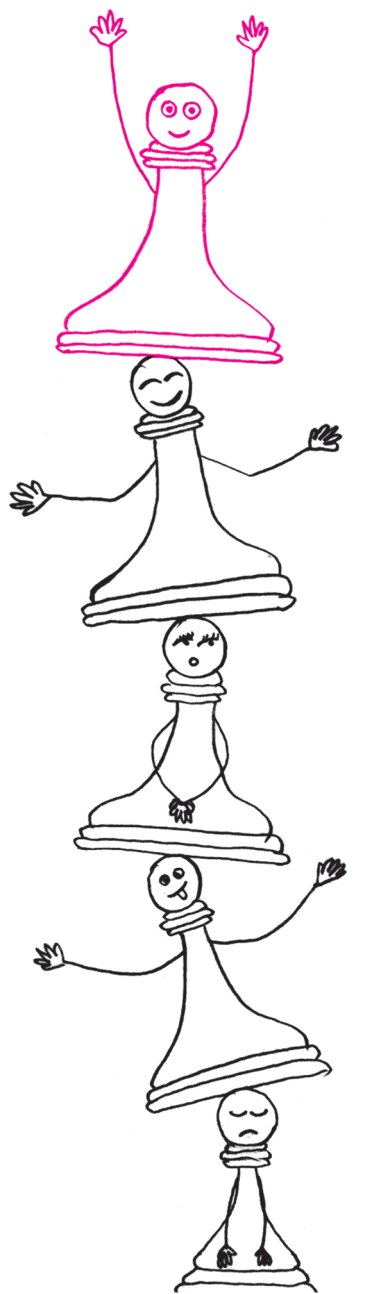
Ta gra jest trochę ciekawsza (są sytuacje, w których bardziej opłaca się zastosować wariant A, i sytuacje, w których lepszy jest wariant B), ale wciąż zależy od szczęścia. No ale co to jest szczęście? Może dałoby się jakoś włączyć szczęście do samej gry, tak, żeby było deterministycznym elementem gry, a nie losowym?

Przyjmijmy, że nasze szczęście jest liczbą z przedziału  $[0, 1)$ . (Szczęście zawsze rozpatrujemy z punktu widzenia konkretnego gracza – jeśli nasze szczęście jest równe  $s$ , to szczęście przeciwnika wynosi  $1 - s$ .) Szczęście równe 1 oznaczałoby, że na monecie zawsze będzie wypadło to, co chcemy. Szczęście równe 0 oznacza, że zawsze wypada to, czego chce przeciwnik. Pośrednie wartości oznaczają, że obaj gracze mają coś do powiedzenia. Przykładowo, jeśli szczęście jest większe niż  $\frac{1}{2}$ , to powinniśmy mieć możliwość wybrania wyniku rzutu monetą, ale będzie się to działo kosztem naszego szczęścia w dalszej części gry.

Dokładniej, szczęście działa w następujący sposób. Powiedzmy, że nasze szczęście w pewnym momencie jest równe  $s$ , a reguły gry z elementem losowym mówią, że powinniśmy w tym momencie rzucić monetą. Zamiast to robić, decydujemy, jak podzielić  $s$  między oba możliwe wyniki. Wybieramy dwie liczby,  $s_R$  i  $s_O$ , obie z przedziału  $[0, 1]$  i takie, że ich średnia jest równa  $s$ . Przeciwnik wybiera wynik rzutu – jeśli wybierze reszkę, to nasze szczęście zmienia się na  $s_R$ , w przeciwnym przypadku nasze szczęście zmienia się na  $s_O$ . Nie wolno mu wybrać takiego wyniku, któremu przypisaliśmy wartość naszego szczęścia 1. Zauważmy, że dla każdego rzutu monetą to my wybieramy podział  $s$ , a przeciwnik wybiera wynik rzutu, niezależnie od tego, do którego z graczy należał rzut monetą.

Przykładowo, wyobraźmy sobie taką prostą grę: gracze rzucają monetą na przemian, zaczyna przeciwnik, a wygrywa ten, kto wyrzuci orła. Zaczniemy ze szczęściem  $s = 0,7$ . Gramy w następujący sposób: w pierwszym ruchu przyporządkowujemy  $s_O = 1$ ,  $s_R = 0,4$ , dzięki czemu blokujemy przeciwnikowi orła i „wypada reszka”, ale nasze szczęście spada do 0,4. Teraz, oczywiście, przeciwnik nie wybierze orła (bo jest nasz ruch), także możemy mu przypisać dowolnie małą wartość szczęścia i przyporządkowujemy  $s_O = 0$ ,  $s_R = 0,8$ . Wypada reszka, nasze szczęście wzrosło do 0,8. Po wymuszeniu reszki w ten sam sposób, co ostatnio, szczęście spada do 0,6. Teraz możemy przyporządkować  $s_R = 1$ ,  $s_O = 0,2$ , zatem wypada orzeł i wygrywamy. Można pokazać, że wygrywamy dla wartości szczęścia powyżej  $\frac{2}{3}$ , dla wartości poniżej  $\frac{2}{3}$  wygrywa przeciwnik (dla  $s = \frac{2}{3}$  gra się nie skończy, a właściwie skończy się wtedy, gdy któryś z graczy się znudzi i wykona ruch prowadzący do zakończenia gry jego przegraną).

Co właściwie oznacza szczęście? Jeśli gra jest skończona (na przykład w powyższej grze uznajemy, że jeśli po 100 rzutach nie doszło do konkluzji, to następny rzut decyduje), to można udowodnić, że jeśli w danym momencie szczęście jest większe od prawdopodobieństwa wygrania gry losowej przez przeciwnika (przy założeniu, że obaj gracze stosują optymalne strategie), to my mamy strategię wygrywającą. Jeśli jest mniejsze, to strategię wygrywającą ma przeciwnik. Strategia polega na tym, by wszystkie sytuacje, w których nie mamy szans wygrać, blokować (korzystając z wysokiej wartości szczęścia), a w pozostałych grać tak, by powyższy warunek był zachowany (szczęście ma być zawsze większe niż prawdopodobieństwo). Szczegóły dowodu zostawiamy Czytelnikowi. Polecamy też się zastanowić, jak dostosować ten system do popularnych gier z użyciem kostki, od (dwuosobowego) chińczyka do backgammona. Albo do gier, w których ważny jest wynik (a nie tylko, kto wygrał, a kto przegrał), lub też do gier, w których losowość wynika stąd, że obaj gracze podejmują decyzje jednocześnie



\*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

(jak kamień-nożyce-papier). Zauważmy również, że gra ma niesymetryczny charakter, bo mamy dwóch graczy: gracz wybierający podział („dzielący”) i gracz wybierający wynik rzutu („rządzący”). Te dwie role mogą być na stałe przypisane do graczy, można też się zastanowić nad systemem, w którym role się zmieniają.

\* \* \*

W powyższej grze zarządziliśmy, żeby rozgrywka zawsze była skończona. Jednak można wymyślić gry, w których rozgrywka czasami albo zawsze jest nieskończona. W przypadku rozgrywek nieskończonych również w jakiś sposób określamy zwycięzcę. Przykład takiej gry nieskończonej? Mamy pewien podzbiór  $A \subseteq [0, 1]$  i dwa pionki, z których jeden stawiamy w punkcie 0, a drugi w punkcie 1. Gracze na przemian wybierają jeden z pionków i stawiają go w punkcie dokładnie pośrodku pomiędzy poprzednimi pozycjami pionków. Tak więc w pierwszym ruchu my przestawiamy jeden z pionków do punktu  $\frac{1}{2}$ , powiedzmy ten, który wcześniej stał w 1, a w drugim ruchu przeciwnik wybiera, który z pionków ma przenieść do punktu  $\frac{1}{4}$  (średnia 0 i  $\frac{1}{2}$ ). Jeśli wybrał przestawienie pionka z 0, to my przestawiamy jeden z pionków do  $\frac{3}{8}$ , i tak dalej. „Po nieskończonym czasie” oba pionki będą stały w tym samym punkcie granicznym. Jeśli ten punkt graniczny należy do zbioru  $A$ , to my wygramy, jeśli nie, to wygrywa przeciwnik. Można pokazać np. że jeśli zbiór  $A$  jest zbiorem liczb wymiernych, to w takiej grze nieskończonej przeciwnik ma strategię wygrywającą (choć w skończonej grze pionki zawsze będą stały na liczbach wymiernych) – strategia ta polega na tym, że przeciwnik ustawia wszystkie liczby wymierne w ciąg, i w kolejnych swoich ruchach dba o to, żeby wykluczać kolejne liczby z tego ciągu jako możliwe punkty graniczne.



W powyższej grze wybory „świadome” można zastąpić wyborami losowymi (pionek przenoszony do środka wybieramy losowo). Wtedy punkt graniczny jest wybierany całkowicie losowo, zatem prawdopodobieństwo, że my wygramy, jest równe prawdopodobieństwu, że losowo wybrany punkt należy do zbioru  $A$ .

Czy podany wyżej sposób na zamianę gry losowej na grę deterministyczną „ze szczęściem” można również zastosować do powyższej gry nieskończonej (i innych)? Zastanówmy się, co by to oznaczało. Jeśli szczęście jest większe niż prawdopodobieństwo zwycięstwa, to my mamy strategię wygrywającą, a jeśli mniejsze, to wygrywa przeciwnik. Zatem udałoby nam się zdefiniować prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany punkt nie należy do zbioru  $A$ , przy użyciu gier. Dla za małych wartości szczęścia strategię wygrywającą ma przeciwnik, a dla za dużych my. Zatem możemy zdefiniować prawdopodobieństwo jako najmniejszą wartość szczęścia, przy której my mamy strategię wygrywającą w danej grze (a dokładniej kres dolny zbiorów tych wartości).

Skądinąd wiadomo, że w standardowej matematyce (używającej aksjomatu wyboru) istnieją zbiory niemierzalne, tzn. takie, dla których wartości prawdopodobieństwa nie da się określić. (Jednym z przykładów tego zjawiska może być paradoks Banacha–Tarskiego: można udowodnić, że kulę w przestrzeni trójwymiarowej można podzielić na części, z których można następnie złożyć dwie różne kule, każda takiej samej wielkości jak oryginalna. Gdyby wszystkie zbiory były mierzalne, takiego czegoś nie dałoby się zrobić.)

Czy to oznacza, że konstrukcja gry „ze szczęściem” nie działa dla gier nieskończonych? Okazuje się, że działa – można udowodnić, że jeśli strategię wygrywającą mamy my, to miara zewnętrzna (ograniczenie górne prawdopodobieństwa) dopełnienia  $A$  jest mniejsza niż  $s$ , a jeśli przeciwnik, to miara wewnętrzna (ograniczenie dolne) jest większa. Zauważmy, że gdyby dla każdej wartości szczęścia któryś z graczy miał strategię wygrywającą, to zbiór  $A$  byłby mierzalny (bo miara wewnętrzna jest większa lub równa wartości granicznej, a zewnętrzna jest mniejsza lub równa, więc gdy miara zewnętrzna jest mniejsza lub równa od miary wewnętrznej, to obie muszą być równe). Problem w tym, że istnieją gry, dla których żaden z graczy nie ma strategii wygrywającej – takie właśnie gry pojawiają się dla niemierzalnych zbiorów  $A$ . Można rozważać teorię, w której zamiast aksjomatu wyboru przyjmujemy aksjomat, że w każdej grze jeden z graczy ma strategię wygrywającą. Wtedy wszystkie zbiory są mierzalne i rzeczy takie jak paradoks Banacha–Tarskiego nie mogą mieć miejsca.

Jan Mycielski i Hugo Steinhaus w 1962 roku sformułowali aksjomat determinacji. Wynika z niego fałszywość aksjomatu wyboru, za pomocą którego dowodzi się istnienia zbiorów niemierzalnych. W teorii mnogości z aksjomatem determinacji każdy zbiór liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue’a.

Artykuł został zainspirowany pracami Donalda A. Martina.



# Ze świata USOS.

## Część 8 – Leniwy programista, czyli co może za nas zrobić komputer

\*Instytut Informatyki, Wydział  
Matematyki, Informatyki i Mechaniki,  
Uniwersytet Warszawski

Michał KURZYDŁOWSKI\*

Nikt nie lubi sprawdzania swojej pracy, prawda? Udało nam się rozwiązać zadanie, bo wpadliśmy na pomysł i potrafiliśmy go zrealizować. Podobnie programista często potrafi napisać cały kod potrzebny do wykonania zadania, nim go choć raz uruchomi, by sprawdzić, czy program robi to, co było zamierzone. W taki „wir pracy” każdy z nas nieraz wpadł. W końcu właśnie w tym czujemy się najlepiej – w rozwiązywaniu problemów.

Z przykrością jednak zauważamy, że nazbyt często taki tryb pracy doprowadza nas do złych rozwiązań. Stawia nas przy tym w sytuacji, w której ciężko jest znaleźć odpowiednią drogę. Nie jest jasne, co z obecnego rozwiązania jest prawidłowe, a co nie. Nie pozostawiliśmy za sobą bowiem żadnych wskazówek ani innego rodzaju kamieni milowych wyznaczających małe sukcesy na drodze do celu.

Chciałbym w tym artykule podzielić się z Czytelnikiem doświadczeniem, jakiego nabyliśmy my, programiści USOS, szukając lepszego sposobu rozwiązywania powierzonych nam zadań. Mam nadzieję pokazać, że warto być leniwym i odwlekać wykonanie pracy na później.

**Zdefiniuj problem testami.** Najczęściej działamy pod wpływem impulsu. Jeśli ktoś zada nam pytanie lub postawi przed nami problem, to większość z nas zapewne podsunie mu niemal natychmiast odpowiedź. Często będzie to pierwszy pomysł, jaki przyjdzie nam do głowy. Czasem będzie to wynik głębszego przemyślenia, ale pewno przeoczmy jakieś szczegóły. Wydaje się nam, że rozwiązaliśmy zadanie, ale to właśnie te szczegóły, które w pośpiechu pominęliśmy, powodują, iż nasza odpowiedź jest błędna. Nie inaczej postępuje nieuważny programista, który także woli przejść od razu do swojego ulubionego zajęcia – programowania.

Spróbujmy jednak zatrzymać się na chwilę i skupić na dokładnym zdefiniowaniu problemu. Podczas rozwiązywania zadania matematycznego użyjemy w tym celu kartki lub tablicy. Zapiszemy to, co wiemy, i oznaczmy to, czego szukamy. Będziemy przekształcać opis słowny problemu na zapis z użyciem symboli matematycznych. Taka postać jest dla nas wygodniejsza, bo jest pozbawiona zbędnego „szumu”, a przy tym nie pomija żadnego istotnego szczegółu.

Jeśli, przykładowo, dostaniemy zadanie, by znaleźć funkcję liniową, która przechodzi przez dwa określone punkty, to możemy sformułować je następująco:

$$\begin{aligned}f(x_1) &= y_1, \\f(x_2) &= y_2, \\f(x) &= ax + b.\end{aligned}$$

Powyżej zapisaliśmy trzy „ograniczenia”, jakim musi podlegać szukana funkcja  $f$ . Spójrzmy na nie jak na testy, które dla zadanej funkcji  $f$  dostarczą nam informację o tym, czy owa funkcja spełnia przyjęte założenie. Sprowadziliśmy zatem nasze zadanie do poszukiwania funkcji, która spełnia wszystkie te warunki. Podobny formalizm możemy zastosować podczas programowania, ale o tym za chwilę.

**Pracowity czy leniwy?** Załóżmy, iż został nam zgłoszony błąd na stronie, który uniemożliwia nauczycielowi edycję ocen studentów z pewnego przedmiotu. Pierwszym krokiem jest próba powtórzenia opisanego problemu. Warunki początkowe, takie jak oceny studentów, informacje o tychże studentach, dane o przedmiocie, wraz z listą działań, które podejmuje

nauczyciel, stanowią opis testu. Test jest naszym narzędziem, które pozwala nam wyznaczyć moment, w którym kod został już naprawiony.

Pracowity programista nie potrzebuje nic więcej. Jest w stanie modyfikować kolejne fragmenty kodu, powtarzając co pewien czas test, aż do momentu, kiedy



zostanie on spełniony. Szybko jednak odkrywa, że najnudniejszym i dającym najmniej satysfakcji zajęciem jest owo powtarzanie testu, gdyż sprowadza się do wykonywania po wielekroć tych samych czynności. Rozwiązanie, które najczęściej znajduje w tym przypadku, to odwrócenie testowania albo zawężanie jego zakresu do absolutnego minimum. Pierwszy wybór powoduje, że błędy w kodzie odkrywamy dopiero po czasie. Drugi doprowadza do kodu, który tylko pozornie wydaje się poprawny, nie spełnia jednak bardziej szczegółowych testów.

Lenistwo w tym przypadku może popłacać, bo komputer okazuje się doskonałym narzędziem do wykonywania za nas wszelkich czynności, które potrafimy opisać czy, ujmując inaczej, zautomatyzować. Taką właśnie czynnością jest testowanie. Przy odrobinie pracy test zapisany na kartce można przekształcić w kod, który będzie mógł być uruchamiany wedle potrzeby programisty. Nie potrzeba tym samym kompromisu między testowaniem a programowaniem. Programista może zająć się tym drugim, gdy komputer wyręcza go w tym pierwszym.

**Testowania różne smaki.** Wiemy już, że pierwszą czynnością programisty będzie powtórzenie błędu. Kolejną zaś jego zapisanie w postaci testu, który będzie potrafił wykonać za niego komputer. Nie jest jednak oczywiste, jak ów test zapisać. Wróćmy do przykładu z niezapisującymi się ocenami. Odtworzyliśmy problem, używając przeglądarki. Wystarczyłoby zatem zapamiętać stan bazy danych, konfiguracji aplikacji i nagrać czynności, które wykonaliśmy w przeglądarce. To jednak cała masa informacji, które muszą być zapisane i odtworzone przed każdym wykonaniem testu.

Oplaca się wykonać więcej analiz, nim przejdziemy do zapisania testu. W końcu i tak będziemy analizować problem, by znaleźć rozwiązanie. Po zastanowieniu możemy dojść do wniosku, że istotne są tylko niektóre informacje związane z przedmiotem i studentami. Możemy też, przykładowo, zauważyć, że błąd występuje jedynie dla ocen oznaczających niezaliczenie. Tego typu spostrzeżenia zmniejszają opis problemu i sprawią, że będzie czytelniejszy.

Taki test jest jednak nadal „ciężki”, choć także „pewny”. Ciężki ze względu na ilość danych i pracy, która musi zostać wykonana przy każdym uruchomieniu testu – musimy bowiem załadować dane do bazy, uruchomić przeglądarkę i wykonać w niej zapisane akcje. Pewny, gdyż jego spełnienie daje spore gwarancje rozwiązania problemu. Trzeba się jednak zawsze liczyć z tym, że nasze dane lub sposób testowania nie zawierają jakiegos istotnego szczegółu.

Istnieje jeszcze jeden prócz czasochłonności mankament tego rodzaju testu. Jego działanie często zależy od danych niepowiązanych bezpośrednio z problemem, czy od struktury stron internetowych i interakcji między nimi. Źle zapisany test mógłby np. wymagać tego, by guzik do edycji ocen był w określonym miejscu na stronie. Trzeba mieć na uwadze, że aplikacja będzie

musiała ulegać modyfikacjom i to nie tylko ze względu na zmieniające się wymogi, czy też nowe funkcjonalności, ale i trendy w internecie. Nie chcemy, by oznaczało to także konieczność edycji testów niezwiązanych bezpośrednio z tymi zmianami.

**Lżej znaczy lepiej?** Na etapie pisania testu często wiemy już, co wymaga naprawy. Ta wiedza pomaga nam doprowadzić test do postaci, która najczytelniej definiuje problem. Możemy jednak jeszcze bardziej „odchudzić” nasze testy, zmieniając technikę testowania. Zapomnijmy zatem o przeglądarce i potraktujmy ją jako narzędzie tłumaczące operacje użytkownika na żądania realizowane przez aplikację.

Opis żądania i format odpowiedzi na nie stanowią pewnego rodzaju API (*Application Programming Interface*), które w dobrze zaprojektowanej aplikacji rzadko ulega zmianie. Korzystając z takiego API, możemy zdefiniować nasz problem, opisując żądanie i spodziewaną odpowiedź. Taki test ma mniejszy opis i może zostać szybciej wykonany przez komputer, gdyż nie wymaga od niego użycia przeglądarki lub też symulacji jej działania.

Czy da się zejść jeszcze „niżej”, tj. w głąb naszej aplikacji? API specyfikuje format danych wejściowych, wyjściowych i zachowanie. Sposób implementacji takiego API jest w gestii programisty, który zazwyczaj ułatwia sobie pracę i nadaje kodowi czytelną strukturę, używając do tego zrębów aplikacji (ang. *framework*). Wspominam o nich, gdyż stanowią one szkielet, który powoduje, że łatwiej znaleźć w kodzie pewną powtarzającą się strukturę, która nie ulega zbyt częstym zmianom. Takim schematem może być np. zapisywanie logiki aplikacji w postaci metod przypisanych pewnym obiektom. Brzmi abstrakcyjnie? Spójrzmy na przykład.

Ocena jest pewnym obiektem w aplikacji, dla którego może istnieć metoda pozwalająca na jej edycję. Przy takiej implementacji możemy sprowadzić nasz problem do wywołania owej metody i oczekiwania, że zakończy się ona poprawnie. Zmniejszyliśmy tym samym poziom abstrakcji definicji naszego problemu, redukując tym samym opis testu. Uzależniliśmy się jednak równocześnie od struktury aplikacji. Podejmowanie decyzji o wyborze konkretnego rodzaju testu wymaga zatem wzięcia pod uwagę wielu czynników. Trzeba zbadać, które narzędzie jest najbardziej odpowiednie do danego zadania.

**Lenistwo popłaca?** Widzimy zatem, że analiza problemu, dobór testu i jego implementacja pochłaniają dużą część czasu programisty. Moglibyśmy o takim pracowniku powiedzieć, że jest leniwy. Jego powinnością jest pisanie kodu, z którego będzie się składać aplikacja, a on tymczasem odkłada ten obowiązek na później. Owszem, pisze kod, ale buduje z niego testy. One zaś nie dostarczają bezpośredniej wartości. Programista będzie twierdził, że poprawia w ten sposób jakość aplikacji, którą pisze, ale czy będzie w stanie potwierdzić swoje zapewnienia? Sami oceńcie, czy warto być leniwym. Może i wy, podejmując się kolejnego zadania, spróbujecie odłożyć „pracę” na później?

Kącik powstał na podstawie wpisu na blogu autora:  
<http://fajnezadania.wordpress.com>.  
 Blog zawiera opisy rozwiązań ciekawych i często nietrywialnych zadań „z algorytmiki i okolic”.

Przykładowo  $2, 2, 3, 1 \prec 1, 4, 2, 5, 2$ , gdyż 3 (najmniejsza liczba występująca różną liczbę razy w tych fragmentach) występuje częściej w pierwszym z nich. Z kolei fragmenty  $1, 3, 3, 2, 1$  i  $2, 3, 1, 3, 1$  są dla nas takie same.

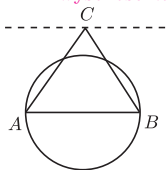


**Rozwiązanie zadania M 1420.**  
 Rozważmy trójkąt  $ABC$  o wysokości opuszczonej z wierzchołka  $C$  długości  $h$ . Oznaczmy długości wysokości opuszczonych z wierzchołków  $B$  i  $C$  odpowiednio przez  $h_B$  i  $h_C$ , a jego pole przez  $S$ . Wiemy, że

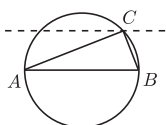
$$2S = AC \cdot BC \cdot \sin C = \frac{2S}{h_B} \cdot \frac{2S}{h_A} \cdot \sin C,$$

skąd  $h_A h_B = 2S \sin C$ .

Ponieważ pole trójkąta  $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h$  jest ustalone, to iloczyn  $h_A h_B h$  jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sin C$  ma maksymalną wartość. Oczywiście, kąt  $C$  ma maksymalną wartość (oznaczmy ją przez  $\gamma_{\max}$ ), gdy  $C$  jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego o podstawie  $AB$ . Jeśli  $h > \frac{AB}{2}$ , to  $\gamma_{\max} < 90^\circ$ , więc rozwiązaniem jest trójkąt równoramienny o podstawie  $AB$  i wysokości  $h$ .



Jeśli natomiast  $h \leq \frac{AB}{2}$ , to  $\gamma_{\max} \geq 90^\circ$ , więc rozwiązaniem jest trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej  $AB$  (dla którego  $\sin C = 1$ ).



## Informatyczny kącik olimpijski (72): Multizbiory

W tym kąciku proponuję zadanie polecane przez mojego korespondenta w Jekaterynburgu, mieście znanym również z turnieju Ural Sport Programming Championship, którego zeszłoroczną atrakcją był bezwzględny pojedynek pięciu najlepszych drużyn z Rosji z pięcioma najlepszymi drużynami z Chin. Popatrzmy na zadanie, którego nie udało się rozwiązać żadnej z nich!

Mamy dany ciąg liczb  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Rozważamy jego wszystkie spójne podciągi, czyli fragmenty postaci  $S_i, S_{i+1}, \dots, S_j$ , które sortujemy w dość dziwny sposób. Mianowicie, aby porównać dwa fragmenty  $X$  i  $Y$ , szukamy najmniejszej liczby  $a$ , która występuje różną liczbę razy w  $X$  i  $Y$ . Fragment  $X$  jest mniejszy niż  $Y$  (co zapisujemy jako  $X \prec Y$ ) dokładnie wtedy, gdy owa liczba  $a$  występuje więcej razy w  $X$  niż w  $Y$ . Jeśli takiej liczby nie ma, to fragmenty są dla nas takie same; innymi słowy porównujemy *multizbiory* liczb występujące w obu fragmentach. Naszym zadaniem jest wyznaczenie multizbioru, który jest generowany przez  $k$ -ty fragment w tym dziwnym porządku.

Pewnie warto przez chwilę zwątpić, czy ten porządek jest faktycznie porządkiem, czyli czy  $X \prec Y \prec Z$  implikuje, że  $X \prec Z$ . W przeciwnym przypadku ciężko byłoby bowiem mówić o sortowaniu. Na szczęście, okazuje się, że tak jest w istocie ( $\prec$  jest w rzeczywistości porządkiem leksykograficznym na fragmentach potraktowanych jako multizbiory). Ograniczenia podane w treści to  $n \leq 150\,000$  i  $k \leq \frac{n(n-1)}{2}$ , czyli wygenerowanie i posortowanie wszystkich fragmentów nie jest najlepszym z możliwych pomysłów. Ba, problematyczne byłoby już nawet samo wygenerowanie fragmentów, nie mówiąc o tym, że porównanie dwóch fragmentów wydaje się wymagać czasu proporcjonalnego do ich długości. Zaczyna się robić ciekawie!

Co prawda, interesuje nas wyznaczenie  $k$ -tego fragmentu, ale może wypadałoby urealnić oczekiwania i zacząć od próby skonstruowania efektywnego sposobu zliczania fragmentów, które są ściśle mniejsze od danego? Jest to dość standardowe podejście: zamiast rozwiązywać problem „znajdź najmniejsze dobre rozwiązanie”, zajmujemy się problemem „sprawdź, czy dane rozwiązanie jest dobre”. Potem zwykle wystarczy tylko zastosować wyszukiwanie binarne, choć w naszym przypadku sytuacja okaże się odrobinę bardziej skomplikowana.

Mając dany fragment  $X$ , chcemy zliczyć fragmenty  $Y = S_i, S_{i+1}, \dots, S_j$ , dla których  $Y \prec X$ . Dość naturalne jest ustalenie  $i$  i przyjrzenie się wszystkim  $j$ , które spełniają żądany warunek. Po chwili namysłu można dostrzec, że dodając kolejne elementy, możemy tylko zmniejszyć  $a$ , które ma więcej wystąpień, zatem  $S_i, S_{i+1}, \dots, S_{j+1} \preceq S_i, S_{i+1}, \dots, S_j$ . Wynika stąd, że  $j$  spełniające warunek tworzą spójny przedział  $[f_i, n]$ . Ale jak wyznaczyć to  $f_i$ ? Pewnie moglibyśmy zacząć od  $f_i = i$  i zwiększać je o jeden, dopóki  $X \preceq S_i, S_{i+1}, \dots, S_{f_i}$ . Brzmi to całkiem rozsądnie, choć pojawiają się co najmniej dwa problemy. Przede wszystkim potrzebujemy efektywnej metody na sprawdzanie, czy aktualne  $f_i$  należy zwiększyć o jeden. Jest to jednak dość łatwe: trzeba tylko skonstruować strukturę danych, która umożliwi nam przechowywanie dla każdego  $a$  różnicy między liczbą jego wystąpień w  $X$  i liczbą jego wystąpień w aktualnym fragmencie  $S_i, S_{i+1}, \dots, S_{f_i}$ , oraz znajdowanie najmniejszego  $a$ , dla którego ta różnica nie jest zerem. Musi również umożliwiać dodawanie nowych elementów  $S_j$  (co wiąże się ze zmniejszaniem odpowiadających im różnic). Taką strukturą może być zwykle drzewo licznikowe, które umożliwia wykonywanie zarówno aktualizacji, jak i pytań w czasie  $O(\log n)$ . Dysponując takim narzędziem, będziemy w stanie wyznaczyć każde  $f_i$  w czasie  $O(n \log n)$ . Niby fajnie, ale w tym momencie pojawia się drugi problem: przecież mamy aż  $n$  różnych  $f_i$ , które wypadałoby znaleźć! Na szczęście można zauważyć, że  $f_{i+1} \geq f_i$ , czyli dla kolejnego  $i$  możemy zacząć od  $f_{i+1} = f_i$ . Jest to o tyle wygodne, że wspomniane przed chwilą drzewo licznikowe bez większych problemów pozwala także na zwiększenie  $i$  o jeden (czyli na usunięcie  $S_i$  z aktualnego fragmentu). Zatem dla kolejnych  $i$  zwiększamy  $f_i$  o jeden tak długo, jak aktualny fragment jest nie mniejszy niż  $X$ , a następnie usuwamy  $S_i$  ze struktury. Ponieważ  $f_i \leq n$ , wykonamy nie więcej niż  $3n$  operacji na drzewie licznikowym, co daje sumaryczny czas  $O(n \log n)$ . Fantastycznie.



### Rozwiązanie zadania F 855.

Ponieważ masa elektronu jest około 40 tysięcy razy mniejsza od masy atomu neonu, to w warunkach równowagi termodynamicznej porusza się on około 200 razy szybciej niż atomy neonu, które wobec tego można w przybliżeniu uznać za nieruchome. Elektron „trafi” w atom, jeśli ten znajdzie się w odległości nie większej niż  $r$  od toru ruchu elektronu. Średnio nastąpi to, gdy w objętości  $\pi r^2 l$  będzie znajdował się jeden atom. Oznacza to warunek

$$\frac{N}{V} \pi r^2 l_0 = 1,$$

gdzie  $N$  jest liczbą atomów, a  $V$  objętością naczynia. Dla gazu w warunkach normalnych mamy

$$\frac{N}{V} = \frac{p_0}{kT_0},$$

gdzie  $k$  jest stałą Boltzmannna. Ostatecznie:

$$l_0 = \frac{kT_0}{\pi r^2 p_0},$$

czyli  $l_0 \approx 0,59 \mu\text{m}$ .



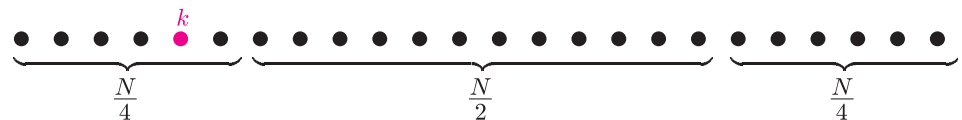
Umiemy więc obliczyć, ile fragmentów jest mniejszych od danego  $X$ . Używając bardzo podobnej metody, można też zliczyć fragmenty, które są równe  $X$ . O ile więc tylko ktoś podrzuciłby nam fragment  $X$ , umielibyśmy sprawdzić, czy faktycznie jest on  $k$ -tym w naszym porządku (jeśli mamy  $\ell$  fragmentów, które są mniejsze od  $X$ , i  $e$  takich, które są równe  $X$ , wystarczy sprawdzić czy  $\ell < k \leq \ell + e$ ). Niestety, nie mamy co liczyć na żadną zycziwą odpowiedź.

Spróbujemy zastosować strategię przypominającą wyszukiwanie binarne. Na dobry początek możemy stwierdzić, że szukany fragment na pewno znajduje się (w zdefiniowanym wyżej porządku) między  $S_1, S_2, \dots, S_n$  a (dowolnym) pustym fragmentem. Załóżmy więc, że wiemy już, iż szukany  $X$  leży między fragmentami  $A$  a  $B$ . Co dalej? Przydałby nam się fragment  $M$ , który leży mniej więcej w połowie drogi między  $A$  a  $B$ . Mając  $M$ , moglibyśmy szybko zliczyć fragmenty, które są od niego mniejsze, porównać tę liczbę z  $k$  i w zależności od wyniku zastąpić  $A$  lub  $B$  przez  $M$  (lub stwierdzić, że właśnie  $M$  jest szukany fragmentem). Dobranie się do takiego  $M$  wydaje się jednak dość problematyczne, gdyż zakłada, że znamy cały porządek na fragmentach, a przecież tak nie jest.

Wyobraźmy sobie zbiór wszystkich fragmentów, które leżą (w naszym dziwnym porządku) między  $A$  a  $B$ . Dla każdego  $i$  prawe końce takich  $S_i, S_{i+1}, \dots, S_j$  tworzą spójny przedział  $j \in [f_i^B, f_i^A)$ , co więcej, używając opisanej wyżej metody, możemy efektywnie wyznaczyć wszystkie  $f_i^B$  i  $f_i^A$  (po prostu rozważamy wszystkie fragmenty mniejsze niż  $B$  i odrzucamy te, które są również mniejsze niż  $A$ ). Można więc przedstawić interesujący nas zbiór jako sumę  $n$  mniejszych zbiorów  $Z_1, \dots, Z_n$  (każdy z nich jest tak naprawdę posortowany, choć nie będzie to dla nas istotne). Ale co z tego?

Skoro nie wiemy, co zrobić, może warto wpaść w panikę i zrobić coś losowego. Spróbujmy więc wybrać losowy spośród fragmentów, które leżą między  $A$  a  $B$ . Wystarczy tylko wylosować jeden ze zbiorów  $Z_1, \dots, Z_n$  (jako że ich rozmiary mogą być dość różne, to wybieramy  $Z_i$  z prawdopodobieństwem  $\frac{|Z_i|}{|Z_1| + \dots + |Z_n|}$ ), a następnie element w zbiorze. Wylosowawszy fragment  $M$ , możemy sprawdzić, czy szukany fragment jest mniejszy czy większy (a może równy) od  $M$ . A dlaczego to działa?

Wybierając losowy element, mamy sporą szansę, że liczba elementów między  $A$  a  $B$  istotnie się zmniejszy. Najłatwiej wyobrazić sobie sytuację, korzystając z poniższej ilustracji, na której kolejne kropki reprezentują elementy między  $A$  a  $B$  ułożone w kolejności zgodnej z naszym dziwnym porządkiem. Powiedzmy, że jest ich  $N$ , a szukany element to kolorowa kropka na pozycji  $k$ . Skoro wybieramy losowy element, to z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  będzie on w środkowym okienku długości  $\frac{N}{2}$ . Tak naprawdę sprawdzamy, czy wybrany element jest na prawo czy na lewo od szukanego, i w zależności od wyniku porównania pozbywamy się elementów na lewo lub na prawo od tego losowo wybranego. A to jest bardzo wygodne: zawsze pozbędziemy się przynajmniej lewego lub prawego kawałka długości  $\frac{N}{4}$ . Czyli mamy przynajmniej  $\frac{1}{2}$  szansy na to, że liczba elementów między  $A$  a  $B$  spadnie przynajmniej o jedną czwartą.



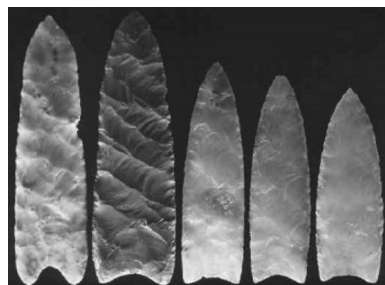
Skoro zaczynamy z  $\frac{n^2}{2}$  kandydatami, szansa na to, że konieczne okaże się dużo więcej niż, powiedzmy,  $4 \log \frac{n^2}{2}$  iteracji, wydaje się niewielka. Darujemy sobie szczegółowe rachunki, wymagają one bowiem pewnej elementarnej wiedzy z rachunku prawdopodobieństwa: uwierzcie mi, że oczekiwana liczba rund to  $O(\log n)$ . Otrzymaliśmy więc rozwiązanie o oczekiwanym czasie działania  $O(n \log^2 n)$ , które w dodatku nie jest bardzo skomplikowane implementacyjnie.

Paweł GAWRYCHOWSKI  
Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

## Niezwykłe ostrza. Niezwykli ludzie.

Nie jestem paleontologiem, interesują mnie odkrycia starożytnych genów. O problem pochodzenia współczesnych rdzennych Amerykanów (my, czytelnicy książek przygodowych, nazywamy ich po prostu „Indianami”) sprzeczą się badacze obu Ameryk do dziś. A ostatnio zwolennicy hipotezy „Pierwsi Clovis” dostali do ręki istotne dane pochodzące z badań genów. Może spory można zakończyć?

Ślady archeologiczne kultury Clovis Amerykanie datują na 13,5 tysięcy lat temu, epokę zlodowacenia. Po około 500 latach już ich nie ma. Nie wiadomo, czy ci ludzie wszyscy wymarli. Czy przetrwały geny?



Siedliska Clovis znaleziono na całym terytorium Ameryki Północnej, centralnej i Meksyku, w licznych lokalizacjach (ponad 1500), znajduje się tylko bardzo charakterystyczne i unikatowe w skali świata ostrza liściowate długości około 15 cm. Oszczep zwieńczony grotem wytwarzanym przez przedstawicieli kultury Clovis mógł z powodzeniem być stosowany w polowaniu na mamuty, mastodonty, bizona, takie ostrza znajdowano np. w szkieletach zwierząt. Kultura Clovis znana jest właśnie głównie z miejsc zabijania i ćwiartowania wielkich zwierząt epoki lodowcowej.

Ostrza wykonane są z niezwykłą precyzją, co ostatnio pokazano na serii obrazów 3D w różnej skali powiększeń. W próbie współczesnego ociosania takiego grotu podobnej precyzji nie udało się osiągnąć. Musiała istnieć rzesza wytwórców ostrzy, być może ta umiejętność przechodziła z ojca na syna. Ciosane były z minerałów: obsydianu, chalcedonu, rogowca, jaspisu.

Interesuje nas problem pochodzenia własnych przodków i własnych grup etnicznych. Dla rdzennych Amerykanów pytanie o pochodzenie przodków związane jest z wierzeniami i obrzędami i odpowiedź na nie jest dla nich bardzo istotna. Jedną z naukowych hipotez zakłada migrację ze wschodniej Azji różnych grup, była nawet hipoteza wędrówki na kontynent amerykański mieszkańców Europy epoki lodowcowej. Karkołomny pomysł!

Ale byli też wśród paleontologów zwolennicy pochodzenia ludzi obu Ameryk z jednej migracji, uosobionej przez grupę Clovis.

I tak by się nadal sprzeczano, gdyby nie przeanalizowano DNA pochodzącego z dawnego znaleziska – analiza stała się możliwa dopiero teraz, w wyniku udoskonalenia metod sekwencjonowania DNA z mikro pozostałości. W stanie Montana w 1968 roku odkryto szczątki rocznego chłopca z kultury Clovis, obecnie zbadano jego DNA i porównano z DNA współczesnych rdzennych Indian obu Ameryk. Jest to pierwszy i jedyny, jak dotąd, znaleziony człowiek z kultury Clovis. Ciało dziecka z Montany pokryte było ochrą i otoczone dużą liczbą grotów strzał, co sugeruje ich znaczenie mistyczne. Przyczyny śmierci dziecka nie poznano. Jest to najstarsze odkryte w Ameryce miejsce pochówku i jedyne z czasów kultury Clovis.

Odpowiedź genetyków na pytanie, czy wszyscy obecnie żyjący potomkowie rdzennej ludności Ameryk pochodzą z jednego pnia, czy też kilku, brzmi: z jednego, wszyscy są potomkami ludu kultury Clovis, nie wszyscy Clovis wymarli!

Ta odpowiedź była tak ważna, że zasłużyła na szczególną konferencję prasową czasopisma naukowego *Nature*. Goście przychodzący na nią nie wiedzieli, jak jest werdykt genetyków, do ostatniej chwili zachowywano go

w tajemnicy. Do prac tych włączono również konsultantów lokalnych. Jednym z nich jest historyk, Shane Doyle, pochodzący z indiańskiego plemienia Apsaaloke. Powiedział: *W naszych plemionach zawsze wiedzieliśmy, że byliśmy tu od niepamiętnych czasów, i że wszystkie te stare wykopaliska są dziełem rąk naszych przodków.* Zgodnie z wierzeniami Indian w Montanie koniecznym stał się powtórny uroczysty pochówek dziecka z plejstocenu, aby przywrócić mu spokój wieczny. Badacze powołali też innych współczesnych konsultantów z plemienia Apsaaloke, żeby uniknąć ewentualnych konfliktów o naruszanie całości miejsc pochówku.

Są jednakże też dowody, że około 10 tysięcy lat wcześniej, przed istnieniem kultury Clovis, przesmyk Beringa przekroczyli po lodzie inni ludzie z Azji, ale kim byli – nie wiadomo. Geny chłopca „Clovis” w 1/3 pokrewne są z genami innego chłopca znad jeziora Bajkał, żyjącego tam 24 tysiące lat temu. Sugeruje to, że kontakty między tymi dwoma grupami ludzi nastąpiły przed migracją z Azji do Ameryki, a migranci dali początek kulturze Clovis.

Spójrzcie na mapę i odległości, pokonywane przez pokolenia ludzi plejstocenu. . .

Magdalena FIKUS

## Zawirowanie BICEP2 – 17.03.2014

Tegoroczny Dzień Świętego Patryka może przejść do historii nauki. Jeżeli tylko potwierdzi się to, co ogłosił zespół badawczy eksperymentu BICEP2 [1], to odkrycie Higgosa 4 lipca 2012 roku (też łatwa do zapamiętania data) może się schować. Jeżeli się potwierdzi. Bo wynik został uzyskany w niezwykle zaawansowany sposób – łatwe odkrycia już dawno zostały zrobione. A w nawet najbardziej sumiennie przeprowadzonej analizie coś może umknąć uwagi zwiadowców.

Informacja przetoczyła się przez światowe (więc również polskie) media, ale głównie pod hasłem odkrycia fal grawitacyjnych. Po pierwsze, to nie do końca prawda, po drugie, nie to jest najważniejsze. Jednak proste wytłumaczenie, o co naprawdę chodzi, nie jest łatwe.

Mierzona była polaryzacja docierającego do nas ze wszystkich stron relikтового promieniowania tła. Po poprawieniu na efekt Dopplera, wywołany ruchem Ziemi (chodzi głównie o ruch Układu Słonecznego względem centrum Drogi Mlecznej), otrzymuje się najbardziej jednorodne spektrum promieniowania ciała doskonale czarnego, jakie znamy (o temperaturze około 2,7 K). Jest ono jednak, w znacznej mierze, pochłaniane przez atmosferę (zwłaszcza przez parę wodną). Do jego badania najlepiej nadają się instrumenty wyniesione w przestrzeń kosmiczną lub znajdujące się tak blisko niej, jak to tylko możliwe.

Chodzi o badanie niejednorodności tego promieniowania, które są na poziomie  $10^{-5}$  i mniejszym. Promieniowanie to pochodzi z momentu, gdy rozszerzający się stygnący wszechświat stał się przezroczysty, czyli gdy nastąpiła rekombinacja plazmy w neutralne atomy. Najpełniejsze wyniki zostały uzyskane za pomocą satelity Planck (ESA). Zgadza się one bardzo dobrze z modelem  $\Lambda$ CDM, według którego obserwowalny wszechświat rozszerza się od 13,7 miliarda lat. Prawie 70% jego gęstości energii przypada na tzw. ciemną energię (o naturze której możemy tylko spekulować), jedną czwartą stanowi ciemna materia (o której wiemy niewiele więcej), podczas gdy znane formy materii wnoszą zaledwie około 4% do bilansu. W sumie energii jest dokładnie tyle, żeby obserwowalny wszechświat był euklidesowy (wygląda na to, że w dowolnie dużym trójkącie suma kątów jest równa kątowi półpełnemu). Informacje te zostały zdobyte głównie za pomocą badania anizotropii temperatury promieniowania relikowego oraz, dodatkowo, obserwacji tzw. modu E rozkładu polaryzacji, który jest oczekiwany dla fal gęstości odcisniętych w promieniowaniu reliktowym zgodnie z modelem  $\Lambda$ CDM.

Jeszcze subtelniejszym efektem jest tzw. mod B polaryzacji. Jeżeli kierunek liniowej polaryzacji promieniowania relikowego na mapie nieba (w komórkach o określonym rozmiarze kątowym) przedstawimy za pomocą kresek (podobnie jak przedstawia się kierunek wiatru na mapach meteorologicznych), to dla modu E otrzymamy obrazek bezwiryowy, natomiast dla modu B przeciwnie, kreski będą układać się w wiry (patrz obok).

Poszukiwanie śladu modu B dla podziału na komórki o rozmiarze kątowym około jednego stopnia jest związane z interpretacją ewentualnej obserwacji jako uchwycenia stanu

propagujących się fal grawitacyjnych (w analogii do zdjęcia falującego oceanu), wywołanych w trakcie kosmicznej inflacji, czyli w chwili, która uważana jest za początek tego, co w ogóle możemy obserwować (właśnie od której upłynęło te 13,7 miliardów lat). Fale grawitacyjne, w odróżnieniu od skalarnych fal gęstości (dźwiękowych), są tensorowymi zaburzeniami samej przestrzeni. Dlatego ich wpływ objawia się nie tylko poprzez mod E, ale również poprzez mod B. Sam wkład do polaryzacji, o który chodzi, jest związany z tzw. ostatnim oddziaływaniem fotonów z elektronami, których ruch był wymuszony przez propagujące się przez plazmę fale.

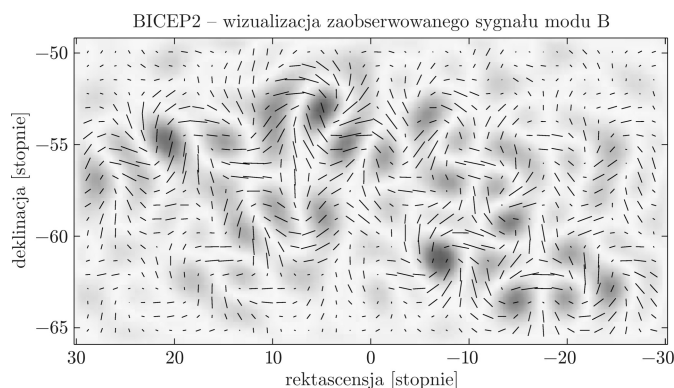
Instrument BICEP2 działał w latach 2010–2012 na biegunie południowym. Jest to idealne miejsce ze względu na możliwość praktycznie ciągłej obserwacji wybranego fragmentu nieba, dużą wysokość n.p.m. oraz bardzo małą wilgotność. Trudno o miejsce na Ziemi mniej przesłonięte przez atmosferę. BICEP2 był w całości schłodzony do temperatury ciekłego helu teleskopem zwierciadlanym o średnicy 26 cm, z niezwykle precyzyjnym odczytem, którego częścią był SQUID (nadprzewodzący interferometr kwantowy). Bezpośrednim jego poprzednikiem był BICEP1, już działającym następcą jest *Keck Array*, a wersja BICEP3 ma zacząć obserwacje w przyszłym roku. Oprócz tego całe stado innych zespołów przeprowadza lub planuje podobne badania, na czele z Planckiem, którego analiza ma być opublikowana jeszcze w tym roku.

Efekt, o którym raportuje BICEP2 [1], jest nadspodziewanie duży (odwrotnie proporcjonalny do wielkości zespołu badawczego). Na podstawie wcześniejszych pośrednich oszacowań (informacje zdobywane o promieniowaniu reliktowym są wzajemnie powiązane) spodziewano się czegoś znacznie mniejszego. A wielkość efektu jest bezpośrednio (choć jednak modelowo) związana z wartością potencjału inflacyjnego. Jeżeli potwierdzi się pomiar BICEP2, to jest to energia odpowiadająca wielkiej unifikacji (energia  $2 \cdot 10^{16}$  GeV).

Po raz pierwszy zmierzone zostało coś o charakterystycznej energii pomiędzy skalą elektroslabą a skalą Plancka. Ciekawe, do jakiej temperatury podgrzali się zajmujący się tą problematyką teoretycy.

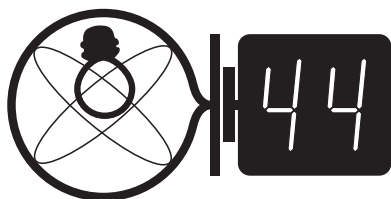
Piotr ZALEWSKI

[1] BICEP2 Collaboration, *BICEP2 I: Detection of B-mode polarization at degree angular scales*, <http://bicepkeck.org>, 17 marca 2014.

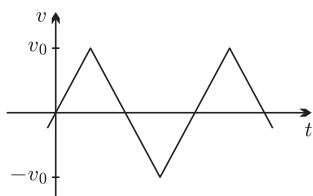


### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2014



### Zadania z fizyki nr 578, 579

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**578.** Ciało znajduje się na desce nachylonej pod kątem  $\alpha$  do poziomu. Deska wykonuje podłużne oscylacje: jej prędkość zmienia się z dużą częstotliwością w sposób przedstawiony na rysunku. Znaleźć średnią prędkość ciała, wiedząc, że amplituda zmian prędkości wynosi  $v_0$ , a współczynnik tarcia ciała o deskę jest równy  $\mu$ .

**579.** Reakcja jądrowa  ${}^{14}\text{N} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{17}\text{O} + {}^1\text{p}$  może zachodzić, gdy energia kinetyczna cząstek  $\alpha$  padających na nieruchome jądra azotu przewyższa energię progową  $E_p = 14,5$  MeV. O ile energia kinetyczna cząstek  $\alpha$  musi przewyższać energię progową, aby powstające w wyniku reakcji protony miały zerową prędkość?

### Rozwiązania zadań z numeru 1/2014

Przypominamy treść zadań:

**570.** Pręt o długości  $l$ , promieniu  $r$  i masie  $m$  porusza się wewnątrz pionowej rury o promieniu  $R \ll l$ , wypełnionej nieściśliwą cieczą o gęstości  $\rho$ , wzdłuż jej osi. Gęstość pręta jest mniejsza od gęstości cieczy. Znaleźć przyspieszenie pręta. Opory ruchu (lepkość cieczy) można zaniedbać.

**571.** W pionowej, wąskiej rurce o długości  $2l$  dolny koniec jest zamknięty, a górny otwarty. W dolnej połowie znajduje się gaz doskonały o temperaturze  $T_1$ , górna połowa jest wypełniona rtęcią. Ciśnienie zewnętrzne jest równe ciśnieniu słupka rtęci o wysokości  $l$ . Do jakiej temperatury wystarczy ogrzać gaz w rurce, aby cała rtęć została z niej wyparta?

**570.** Pręt porusza się do góry i w danej chwili ma prędkość  $v$ . Ciecz wypierana przez górny koniec pręta przemieszcza się w dół i wypełnia miejsce zwolnione przez dolną część pręta. Pomijając niewielkie obszary w pobliżu końców pręta, można przyjąć, że prędkość cieczy  $v_1$  między prętem i ściankami rury jest wszędzie taka sama. Ponieważ ciecz jest nieściśliwa, mamy związek:  $\pi r^2 v = \pi(R^2 - r^2)v_1$ . Energię kinetyczną poruszającej się cieczy o masie  $m_c$  możemy zapisać w postaci:  $m_c \frac{v_1^2}{2} = \pi(R^2 - r^2)l\rho \frac{v_1^2}{2} = m_1 \frac{v^2}{2}$ , gdzie  $m_1 = V\rho \frac{r^2}{R^2 - r^2}$ ,  $V = \pi r^2 l$  jest objętością pręta. Zasada zachowania energii ma postać:

$$V\rho gh - mgh = (m + m_1) \frac{v_2}{2},$$

gdzie  $h$  jest wysokością, na jaką podniósł się pręt, gdy osiągnął prędkość

$$v = \sqrt{\frac{2gh(V\rho - m)}{m + m_1}}.$$

Jest to prędkość końcowa w ruchu jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem  $a = \frac{(\pi r^2 l \rho - m)g}{m + m_1}$ . Pręt porusza się, jakby jego masa zwiększyła się o  $m_1$ . Siła, z jaką poruszająca się ciecz działa na pręt, dana jest wzorem:

$$F = m(a + g) = \frac{mg(V\rho + m_1)}{m + m_1}.$$

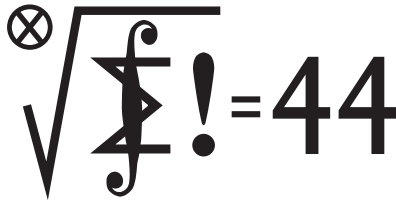
**571.** Rozważmy stan równowagi, w którym słupek gazu w rurce ma wysokość  $x$ . Temperaturę gazu  $T(x)$  możemy otrzymać z równania Clapeyrona:  $p(x)xS = nRT(x)$ , gdzie  $S$  jest powierzchnią przekroju rurki, a warunek równowagi ciśnień ma postać  $p(x) = \rho g(3l - x)$ , gdzie  $\rho$  jest gęstością rtęci. Temperatura jest kwadratową funkcją  $x$ :

$$T(x) = \frac{\rho g S(-x^2 + 3lx)}{nR}$$

i ma maksimum dla  $x = \frac{3l}{2}$ . Temperatura  $T_0$ , do której wystarczy ogrzać gaz w rurce, wynosi więc  $T_0 = \frac{9\rho g S l^2}{4nR}$ . Uwzględniając, że w stanie początkowym  $T_1 = \frac{2\rho g S l^2}{nR}$ , otrzymujemy ostatecznie:

$$T_0 = \frac{9}{8} T_1.$$

## Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 667 ( $WT = 2,35$ ) i 668 ( $WT = 1,60$ ) z numeru 10/2013

Rami Marcin Ayoush	Szelków	45,50
Adam Dzedzej	Gdańsk	44,28
Marcin Małogrosz	Warszawa	44,25
Janusz Fiett	Warszawa	44,02
Jędrzej Garnek	Poznań	40,03
Marek Spychała	Warszawa	39,37
Andrzej Idzik	Bolesławiec	38,63
Wojciech Maciak	Warszawa	38,32

Pan Adam Dzedzej kończy swoją drugą rundę „44”. Panowie Rami Ayoush, Marcin Małogrosz, Janusz Fiett to nowe twarze – witamy w Klubie 44. Dawno nie mieliśmy tak gromadnego jednoczesnego przekroczenia magicznej bariery!



## Zadania z matematyki nr 681, 682

**681.** Mamy dwa stosy bierek. Dwaj gracze wykonują ruchy na przemian. W jednym ruchu wolno: usunąć jedną bierkę (z dowolnie wybranego stosu); usunąć po jednej bierce z obu stosów; przełożyć jedną bierkę z jednego (dowolnego) stosu na drugi. Gra kończy się, gdy wszystkie bierki znikną. Wygrywa gracz, który zdjął ostatnią bierkę. W zależności od liczności stosów w stanie początkowym, ustalić, czy i który z graczy (rozpoczynający czy jego przeciwnik) ma strategię wygrywającą.

**682.** Liczby dodatnie  $x_1, \dots, x_n$  spełniają warunek

$$\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Udowodnić, że

$$\frac{\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n}}{n-1} \geq \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}.$$

Zadanie 682 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/2014

Przypominamy treść zadań:

**673.** Czy istnieją cztery kolejne liczby całkowite dodatnie, których iloczyn, powiększony o  $2^{10}$ , jest kwadratem liczby całkowitej? Podać wszystkie rozwiązania (jeśli istnieją).

**674.** Znaleźć wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , które spełniają układ równań funkcyjnych

$$f(x+1) = f(x) + 1, \quad f(x^2) = f(x)^2 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

**673.** Szukamy rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych  $x, y$  równania

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = y^2 - 1024.$$

Przepisujemy lewą stronę jako  $z^2 - 1$ , gdzie  $z = x^2 + 3x + 1$  (skoro  $x \geq 1$ , to  $z \geq 5$ ) i rozwiązujemy równanie

$$y^2 - z^2 = 1023 = 3 \cdot 11 \cdot 31.$$

Jego lewa strona to iloczyn  $(y+z)(y-z)$ , w którym pierwszy czynnik jest dodatni, więc drugi też. Musi to być iloczyn jednej z czterech postaci:  $1023 \cdot 1$ ,  $341 \cdot 3$ ,  $93 \cdot 11$ ,  $33 \cdot 31$ ; dają one odpowiednio wartości  $z = 511$ ,  $169$ ,  $41$ ,  $1$ . Jedynie  $z = 41$  jest wartością trójmianu  $x^2 + 3x + 1$  dla naturalnego  $x$ , mianowicie  $x = 5$ . Otrzymujemy jedyne rozwiązanie zadania:  $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 2^{10} = 52^2$ .

**674.** Niech  $f$  będzie funkcją, spełniającą podane równania. Wykażemy, że jest to funkcja nieparzysta. Z drugiego równania widać, że  $f(-x)^2 = f(x)^2$ . Tak więc  $f(-x) = \pm f(x)$ . Przypuśćmy, że dla pewnej liczby  $x_0$  zachodzi równość  $f(-x_0) = f(x_0) =: y_0$ . Wystarczy pokazać, że  $y_0 = 0$ . Otóż

$$y_0 + 1 = f(-x_0) + 1 = f(1 - x_0) = \pm f(x_0 - 1) = \pm(y_0 - 1)$$

(ostatnia równość wynika ze spostrzeżenia, że  $f(x-1) = f(x) - 1$  dla wszystkich  $x$ ). Stąd  $|y_0 + 1| = |y_0 - 1|$ , co jest prawdą jedynie dla  $y_0 = 0$ . Zatem  $f$  jest funkcją nieparzystą.

Dla  $x \geq 0$  mamy  $f(x) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$ . Wobec nieparzystości,  $f(x) \leq 0$  dla  $x \leq 0$ . Dla  $x \leq 1$  dostajemy oszacowanie  $f(x) = f(x-1) + 1 \leq 1$ . To znaczy, że funkcja  $f$  odwzorowuje przedział  $\langle 0; 1 \rangle$  w siebie. Z równania  $f(x+1) = f(x) + 1$  wynika teraz, że funkcja  $f$  odwzorowuje każdy przedział postaci  $\langle k; k+1 \rangle$  w siebie ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Zachodzi więc nierówność

$$|f(x) - x| \leq 1 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Weźmy dowolną liczbę  $u > 1$  i oznaczmy  $f(u) = v$ . Z równania  $f(x^2) = f(x)^2$  dostajemy  $f(u^{2^n}) = v^{2^n}$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Stąd  $|v^{2^n} - u^{2^n}| \leq 1$ , czyli

$$\left| \left( \frac{v}{u} \right)^{2^n} - 1 \right| \leq \left( \frac{1}{u} \right)^{2^n},$$

co w granicy (przy  $n \rightarrow \infty$ ) daje równość  $v = u$ . Wykazaliśmy w ten sposób, że  $f(x) = x$  dla  $x > 1$ .

Dzięki równości  $f(x-1) = f(x) - 1$  wnosimy stąd, że

$$f(x) = x \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$

Funkcja identycznościowa spełnia oba równania układu i jest jego jedynym rozwiązaniem.



*Gliese Catalogue of Nearby Stars*, spis założony w 1957 r. przez Wilhelma Gliese zawiera parametry obiektów znajdujących się nie dalej niż 20 parseków (65 lat świetlnych) od Słońca, czyli inwentarz naszego najbliższego sąsiedztwa.

## Prosto z nieba: Nieziemska pogoda

Oto kolejna porcja wiadomości z odległych globów: prognoza pogody dla egzoplanety GJ 1214b. Praca synoptyka w układzie zawierającym ten glob, obiegający w 38 godzin wokół czerwonego karła Gliese 1214, a odległego od Układu Słonecznego o 40 lat świetlnych, jest najprawdopodobniej bardzo prosta, wygląda bowiem na to, że atmosfera planety jest zawsze pełna gęstych chmur. GJ 1214b nazywa się czasem super-Ziemią: jest ona nieco tylko mniejsza od Neptuna, jej promień to  $2,68 \pm 0,13 R_{\oplus}$ , masa wynosi ok.  $6,5 M_{\oplus}$ , a oszacowana temperatura waha się pomiędzy 400 a 550 K. Istnienie planetarnej atmosfery wydaje się warunkiem koniecznym dla istnienia i podtrzymywania życia, dlatego od wielu lat poszukiwano takich pobliskich planet. Niedawno udało się ostatecznie potwierdzić istnienie wiecznej pochmurnej atmosfery właśnie podczas obserwacji GJ 1214b. W badaniach wykorzystano prawie 100 godzin pracy teleskopu Hubble'a; była to najdłuższa dotychczas kampania obserwacyjna teleskopu kosmicznego poświęcona jednej egzoplanecie. Planetę odkrył w 2009 projekt MEarth, poszukujący tranzytów planetarnych w krzywych blasku pobliskich czerwonych karłów. Wstępne obserwacje sugerowały następujące możliwości: atmosfera jest albo przejrzysta i zdominowana przez parę wodną (lub inne podobne molekuly), albo też składa się głównie z wodoru, a powierzchnię planety zasłaniają położone na dużej wysokości chmury. Teleskop Hubble'a obserwując światło planety w bliskiej podczerwieni, wykluczył obecność w widmie linii spektralnych wody, metanu, azotu, czadu i dwutlenku węgla. Oznacza to, że preferowane wyjaśnienie przewiduje pogodę pochmurną, w której, według modeli atmosfer takich planet, obłoki składają się z (egzotycznych w ziemskim powietrzu) chlorku potasu lub siarczku cynku. Przyszłe obserwacje teleskopu kosmicznego Jamesa Webba, mającego zastąpić teleskop Hubble'a, rozwieją resztki wątpliwości.

*Michał BEJGER*

## Niebo w maju

W tym miesiącu będziemy prawdopodobnie świadkami najbardziej spektakularnego wydarzenia astronomicznego tego roku. Mało znana kometa okresowa 209P/LINEAR przejdzie przez peryhelium swojej orbity 6 maja w odległości 0,969 jednostki astronomicznej od Słońca. Osiemnaście dni później, w nocy z 23 na 24 maja, Ziemia przejdzie przez strumień cząstek pyłu pozostawianego przez kometa rozmieszczony wzdłuż jej orbity. Naukowcy przewidują, że może to spowodować intensywny deszcz meteorów, a może nawet „burzę” – w warunkach idealnych przez godzinę pojawi się kilkaset, a może nawet ponad 1000 meteorów. Oznacza to, że owej nocy będzie można zaobserwować najwięcej „spadających gwiazd” od ponad dekady.

Skąd to wiadomo? Modele komputerowe pozwalają naukowcom, którzy zajmują się mechaniką nieba, na bardzo dokładne obliczanie trajektorii ciał niebieskich, w tym komet. Takie modele mogą także śledzić pył pozostawiony przez kometa w pobliżu peryhelium, który tworzy strugę cząstek. Obliczenia pokazują, że taki pył ma tendencję do pozostawiania blisko jądra komety, a pasma cząstek pyłu często zbiegają się w przestrzeni kosmicznej w pobliżu peryhelium orbity. Przewidywania te są, co prawda, obarczone błędami, jednak aż trzy różne modele przewidują, że ten spektakularny pokaz niebieski na pewno się odbędzie.

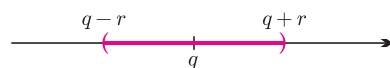
W maju, a konkretnie od 19 kwietnia do 28 maja, można również obserwować meteory z roju Eta Akwarydów, które zostały utworzone przez kometa Halleya. Największą ich aktywność, około 30/h, zobaczymy w nocy z 5 na 6 maja. Radiant tego roju, czyli miejsce, z którego zdają się wybiegać jego meteory, znajduje się w gwiazdozbiornie Wodnika, błyski mogą być jednak obserwowane na całym niebie. 10 maja Saturn znajdzie się w tzw. opozycji, czyli będzie najbliżej Ziemi, a cała jego powierzchnia będzie oświetlona światłem słonecznym. Dzięki temu warunki do obserwacji Saturna, jego pierścieni i księżyców będą tego dnia doskonałe.

*Magdalena OTULAKOWSKA-HYPKA*



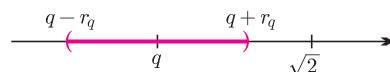
Zbiór nazywamy *przeliczalnym*, jeśli jego elementy można ustawić w ciąg.

Dla każdego  $n$  zachodzi  $a_n < g < b_n$ . Gdyby bowiem  $b_n \leq g$  dla pewnego  $n$ , to dla każdego  $k$  także  $a_k < b_n \leq g$ , więc  $g$  nie byłoby granicą ciągu  $(a_n)$ . Podobnie nie istnieje takie  $n$ , że  $a_n \geq g$ .



Rys. 1. Otoczenie o promieniu  $r$  punktu  $q$ .

Zbiór liczb wymiernych jest *gęsty* w zbiorze liczb rzeczywistych, co oznacza, że pomiędzy dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi zawsze istnieje liczba wymierna.



Rys. 2. Otoczenie o promieniu  $r_q$  punktu  $q$ .

## Punkty na prostej

Joanna JASZUŃSKA

W *deltoidzie 7/2013* wykazaliśmy, że odcinek nie jest przeliczalny, posługując się tzw. metodą przekątniową Cantora. Tym razem udowodnimy ten sam fakt, wykorzystując pewną dwuosobową grę, której „planszą” jest zbiór  $(0, 1)$ .

**Gra.** Ania i Bartek grają w następującą grę. Najpierw ustalili wspólnie pewien podzbiór  $W$  odcinka  $(0, 1)$ . Następnie Ania wybiera dowolną liczbę  $a_1 \in (0, 1)$ , po czym Bartek wybiera  $b_1 \in (a_1, 1)$ . W kolejnych ruchach, które wykonują na przemian, każdy gracz musi wybrać liczbę pomiędzy dwiema ostatnio wybranymi, czyli  $a_n \in (a_{n-1}, b_{n-1})$  oraz  $b_n \in (a_n, b_{n-1})$  dla  $n > 1$ .

Ciąg  $(a_n)$  jest rosnący i ograniczony z góry, a więc ma granicę  $g \in (0, 1)$ . Jeśli  $g \in W$ , to wygrywa Ania, w przeciwnym przypadku – Bartek.

**Strategia.** Wykażemy, że jeśli zbiór  $W$  jest co najwyżej przeliczalny, to Bartek ma strategię wygrywającą. Dla  $W = \emptyset$  na pewno  $g \notin W$ , więc Bartek wygra. Dla  $W \neq \emptyset$  ustawmy elementy zbioru  $W$  w nieskończony ciąg  $w_1, w_2, w_3, \dots$  (jeśli  $W$  jest skończony, powtarzamy ostatni element). Niech Bartek dla każdego  $n$  wybiera  $b_n = w_n$ , o ile jest to zgodne z zasadami gry, a w przeciwnym przypadku niech wybiera dowolne dozwolone  $b_n$ .

W ten sposób dla każdego  $n$  albo  $w_n = b_n$ , albo  $w_n$  było dla Bartka niedostępne, czyli  $w_n \leq a_n$  lub  $w_n \geq b_{n-1} > b_n$ . Wobec tego dla żadnego  $n$  liczba  $w_n$  nie należy do przedziału  $(a_n, b_n)$ . Stąd żadna z liczb  $w_n$  nie jest równa  $g$ , czyli  $g \notin W$ . Opisana strategia faktycznie jest więc dla Bartka wygrywająca.

**Morał.** Oczywiście jeśli  $W = (0, 1)$ , grę wygrywa Ania niezależnie od przebiegu rozgrywki. Wobec powyższego oznacza to, że **zbiór  $(0, 1)$  nie jest przeliczalny**.

Dalsze wnioski z tej gry: <http://people.math.gatech.edu/~mbaker/pdf/realgame.pdf>.

W *deltoidzie 7/2013* wykazaliśmy też, że liczby wymierne tworzą zbiór przeliczalny. Zajmiemy się teraz przykrywaniem ich kolorowymi odcinkami.

**Zamalujemy całą prostą...** Dana jest liczba  $r > 0$ . Dla każdej liczby wymiernej zamalujemy wszystkie punkty z osi liczb rzeczywistych odległe od niej o mniej niż  $r$  (rys. 1). Czy niezależnie od wyboru  $r$ , pomalujemy w ten sposób całą prostą?

Okazuje się, że tak. Aby upewnić się, że liczba rzeczywista  $x$  zostanie zamalowana, rozważmy odcinek  $(x - r, x + r)$ . Należy do niego pewna liczba wymierna  $q$ . Odległość  $x$  od  $q$  jest mniejsza niż  $r$ , zatem  $x$  zostanie zamalowany, gdy malować będziemy otoczenie punktu  $q$  o promieniu  $r$ .

**... a może niekoniecznie całą?** Dla każdej liczby wymiernej  $q$  zamalujemy wszystkie punkty z osi liczb rzeczywistych odległe od niej o mniej niż pewną *zależną od  $q$*  dodatnią wielkość  $r_q$ . Czy niezależnie od wyboru  $r_q$  pomalujemy całą prostą?

Okazuje się, że niekoniecznie! Dla każdej liczby wymiernej  $q$  ustalmy  $r_q$  równe połowie odległości pomiędzy  $q$  a liczbą  $\sqrt{2}$  (rys. 2). Wówczas liczba  $\sqrt{2}$  nie zostanie zamalowana, gdyż od każdej liczby wymiernej  $q$  jest odległa o więcej niż  $r_q$ .

**Zamalujemy dowolnie mało!** Nietrudno zmodyfikować powyższe rozumowanie, by zostawić niezamalowane dwie liczby niewymierne, np.  $\sqrt{2}$  oraz  $\sqrt{3}$ . Czy można tak dobrać  $r_q$ , by zamalować istotnie mniejszą część prostej?

Ustawmy liczby wymierne w ciąg  $q_1, q_2, q_3, \dots$  i niech  $r_{q_n} = 1/2^n$  dla każdej liczby wymiernej  $q_n$ . Wtedy dla  $q_1$  malujemy jej otoczenie o promieniu  $1/2$ , a więc odcinek o długości  $1$ , dla  $q_2$  – otoczenie o promieniu  $1/4$ , czyli odcinek o długości  $1/2$  etc. Łączna długość zamalowanej w ten sposób części prostej nie przekracza

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 2.$$

Pomalowaliśmy wszystkie liczby wymierne, a jednocześnie praktycznie całą prostą pozostała niezamalowana! Co więcej, **zamalowana część prostej może mieć dowolnie małą długość** – wystarczy odpowiednio zmniejszyć wszystkie  $r_{q_n}$ .