

Nagrodę Dziekanów





dla Autora najlepszego artykułu w *Delcie*
w roku akademickim 2012/2013

uzyskał

Przemysław Kiciak

za artykuł *Najładniejsza choinka*
zamieszczony w numerze 4(467)/2013

SPIS TREŚCI NUMERU 2 (477)

Schemat Falka <i>Przemysław Kiciak</i>	str. 1
Prawa prawdziwie naturalne <i>Ewelina Knapska</i>	str. 3
Ze świata USOS. Część 5 – Oceanarium, czyli o nurkowaniu w otchłani danych <i>Przemysław Biecek</i>	str. 4
Turing kontra spamboty <i>Tomasz Idziaszek</i>	str. 8
 Zadania	str. 9
Istnienie <i>Jarosław Górnicki</i>	str.10
Odkryj własną egzoplanetę <i>Jakub Bochiński</i>	str.12
 Samą linijką można nakreślić okrąg <i>Marek Kordos</i>	str.15
 Odejsie giganta <i>Magdalena Fikus</i>	str.16
Informatyczny kącik olimpijski (69): Świetliki <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.17
Klub 44	str.18
Aktualności	str.23
Prosto z nieba: Szybkie błyski radiowe <i>Michał Bejger</i>	str.24
Niebo jak własna kieszeń: Luty	str.24
 Postaw na krawędzi! <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–18⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numerzy archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł



Wbrew często (i zazwyczaj bezmyślnie) powtarzanemu przysłowiu *nie każdy obraz jest wart tysiąca słów*. Ale niektóre są. Każdy student matematyki, informatyki lub politechniki na pierwszym roku poznaje wzór, który definiuje iloczyn macierzy: jeśli liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B , to ich iloczynem jest macierz AB , której współczynniki to $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$. Takie mnożenie macierzy jest znane od XIX wieku. Dopiero wiek później został wynaleziony sposób jego zobrazowania, który dla mnie jest wart tysiąca słów, a nawet trochę więcej.

Schemat Falka, bo tak się ten wynalazek nazywa, składa się z tabelki ze współczynnikami macierzy, rozmieszczonych jak na rysunku 1. Łatwo jest na nim odnaleźć współczynniki macierzy A (na lewo) i B (powyżej), które mają wpływ na współczynnik c_{ij} iloczynu. Wszystkie znane własności mnożenia macierzy mają, oczywiście, dowody rachunkowe. Schemat Falka pozwala zobaczyć wiele z tych własności, a to jest w pewnym sensie coś więcej niż dowód.

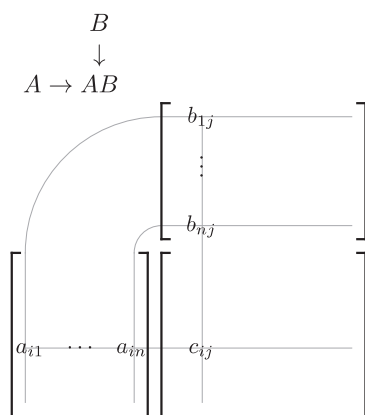
Własność 1. Współczynniki nie muszą być liczbami, byleby można je było jakoś mnożyć, a iloczyny jakoś dodawać; w tym sensie definicja iloczynu macierzy jest uniwersalna. Na przykład (rys. 2) współczynnikami mogą być macierze (zwane **blokami**), jeśli tylko „pasują”, tj. dla każdego i wszystkie bloki A_{ik} mają tyle samo wierszy, dla każdego j wszystkie bloki B_{kj} mają tyle samo kolumn, i dla każdego k każdy blok A_{ik} ma tyle samo kolumn, ile bloki B_{kj} mają wierszy. Jeśli bloki są macierzami liczbowymi, to mamy stąd ogólniejszy zapis mnożenia macierzy liczbowych. Można też rozpatrywać bloki puste, tj. mające 0 wierszy lub kolumn, co czasami jest wygodne.

Własność 2. O macierzy A mówi się, że jest **trójkątna górna**, jeśli wszystkie jej współczynniki a_{ij} , takie że $i > j$, są równe 0. Mnożenie macierzy ma tę własność, że jeśli obie macierze A i B są trójkątne górne, to ich iloczyn też jest taki. Spójrzmy na rysunek 3: po odnalezieniu współczynników w i -tym wierszu macierzy A i j -tej kolumnie macierzy B zauważamy, że jeśli $i > j$, to w każdym iloczynie $a_{ik}b_{kj}$ co najmniej jeden czynnik jest zerem, a stąd $c_{ij} = 0$. Analogiczna własność dotyczy macierzy trójkątnych dolnych (takich że $a_{ij} = b_{ij} = 0$ dla $i < j$), co proponuję Czytelnikom narysować własnoręcznie.

Własność 3. **Transpozycja** przyporządkowuje dowolnej macierzy A o współczynnikach a_{ij} macierz A^T o współczynnikach a_{ji} ; inaczej mówiąc, przekształcenie to zamienia wiersze z kolumnami. Jeśli macierze A i B można pomnożyć (i mnożenie współczynników jest przemienne), to $(AB)^T = B^T A^T$. Ze schematu Falka to wynika natychmiast po narysowaniu jego odbicia symetrycznego względem ukośnej linii (tzw. diagonalni macierzy AB), porównaj rysunki 1 i 4. Mnożenie macierzy (bloków) nie jest przemienne, dlatego dokonując transpozycji iloczynu macierzy zbudowanych z bloków, tj. „odbijając” schemat Falka, musimy „odbić”, czyli transponować każdy blok macierzy A i B i ich iloczynu. Ale to po obejrzeniu rysunków jest oczywiste.

Własności 4 i 5. Macierz A jest **diagonalna**, jeśli wszystkie współczynniki oprócz a_{ii} ma zerowe. **Macierz permutacji** jest to macierz kwadratowa, która w każdym wierszu i w każdej kolumnie ma jeden współczynnik równy 1, i pozostałe współczynniki 0. Wiersz i -ty macierzy AB , gdzie macierz A jest diagonalna, jest iloczynem współczynnika a_{ii} i i -tego wiersza macierzy B . Jeśli zaś A jest macierzą permutacji, to iloczyn AB powstaje przez poprzeszawianie wierszy macierzy B . Narysowanie schematów (najlepiej z użyciem bloków) i doprecyzowanie szczegółów polecam dla relaksu. A co będzie, jeśli to drugi (tj. prawy) czynnik jest macierzą diagonalną lub permutacji?

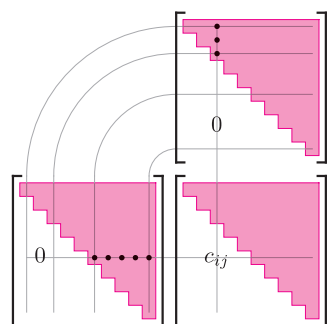
Własność 6. **Łączności** mnożenia macierzy tak całkiem bez rachunków pokazać się nie da, ale zobaczymy schematy na rysunku 5. Jest jasne, że wymiary macierzy $(AB)C$ i $A(BC)$ są identyczne. Jeśli w miejsce A podstawimy blok A_i – i -ty wiersz macierzy A i zastąpimy C przez j -tą kolumnę, C_j , to w obu przypadkach dostaniemy współczynnik na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny



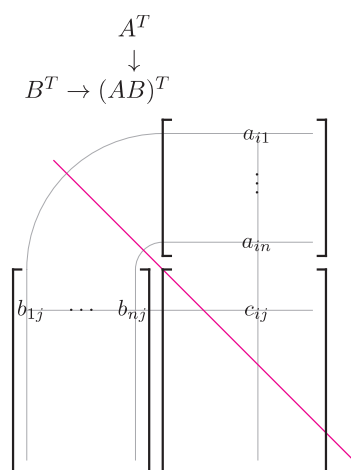
Rys. 1

$$\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} \end{bmatrix}$$

Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

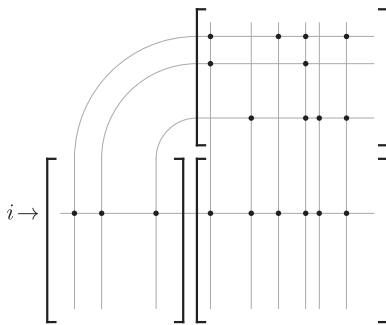
*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

$$\begin{array}{ccc} & B & C \\ & \downarrow & \downarrow \\ A \rightarrow & AB & \rightarrow (AB)C \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \downarrow & \\ B \rightarrow & BC & \\ & \downarrow & \\ A \rightarrow & A(BC) & \end{array}$$

Rys. 5

O architekturze CUDA pisaliśmy w *Delcie* 9/2011.



Rys. 6

odpowiedniego iloczynu wszystkich trzech macierzy. Wyróżnimy w macierzach bloki

$$A_i = [A_{i1} \quad A_{i2}], \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad C_j = \begin{bmatrix} C_{1j} \\ C_{2j} \end{bmatrix}.$$

Podstawiając tak podzielone macierze do pierwszego schematu, dostaniemy

$$(A_i B) C_j = (A_{i1} B_{11} + A_{i2} B_{21}) C_{1j} + (A_{i1} B_{12} + A_{i2} B_{22}) C_{2j},$$

a z drugiego schematu otrzymamy

$$A_i (B C_j) = A_{i1} (B_{11} C_{1j} + B_{12} C_{2j}) + A_{i2} (B_{21} C_{1j} + B_{22} C_{2j}).$$

Jeśli mnożenie *mniej*szych bloków jest łączne i rozdzielne względem dodawania, a dodawanie jest przemienne, to oba te wyrażenia mają tę samą wartość. Ale to umożliwia przeprowadzenie dowodu indukcyjnego, zaczynając od bloków pustych i bloków 1×1 , tj. zbudowanych z pojedynczych współczynników.

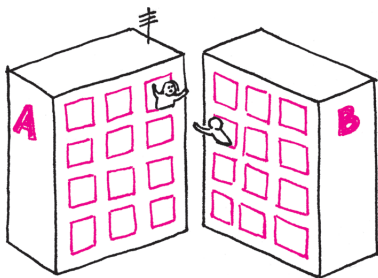
Schemat Falka z blokowym przedstawieniem macierzy został wykorzystany do zilustrowania bardzo pięknego, równoległego algorytmu mnożenia *dużych* macierzy przy użyciu karty graficznej w architekturze CUDA; zachęcam do zapoznania się z nim w dokumentacji firmy NVIDIA. Tu zaś wykorzystamy schemat Falka do przedstawienia idei szybkiego (sekwencyjnego) algorytmu mnożenia *wielkich* macierzy rzadkich, czyli takich, których większość współczynników (np. ponad 99%) to zera. Iloczyn macierzy rzadkich zwykle też jest macierzą rzadką, a przy tym każdy (lub prawie każdy) jego niezerowy współczynnik jest sumą niewielu niezerowych składników. Dopuszczamy zupełnie dowolne rozmieszczenie niezerowych współczynników w macierzach A i B . Chcielibyśmy, aby algorytm mnożył i dodawał tylko liczby różne od zera.

Zobaczmy schemat na rysunku 6. W pokazanym przykładzie i -ty wiersz macierzy A zawiera tylko trzy niezerowe współczynniki. Aby obliczyć i -ty wiersz iloczynu, trzeba pomnożyć przez nie odpowiednie trzy wiersze macierzy B i dodać. Oczywiście, wystarczy odnaleźć i pomnożyć tylko niezerowe współczynniki macierzy B w tych wierszach.

Obie macierze i ich iloczyn będziemy reprezentować za pomocą wykazów niezerowych współczynników. Wykaz jest tablicą, której każdy element zawiera indeksy wiersza i kolumny oraz niezerowy współczynnik na ich przecięciu.

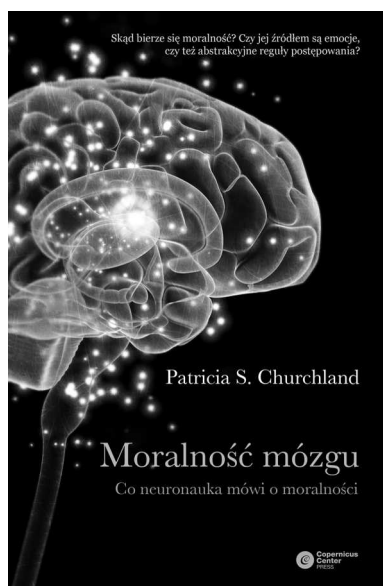
Porządkiem wierszowym wykazu współczynników macierzy nazwiemy taką kolejność jego elementów, że elementy reprezentujące niezerowe współczynniki z każdego kolejnego wiersza są obok siebie (a w obrębie wiersza elementy są uporządkowane dowolnie). W pierwszym kroku algorytmu należy (np. za pomocą sortowania) uporządkować w ten sposób wykazy obu macierzy, A i B . Następnie tworzymy dwie tablice pomocnicze, których długości są o 1 większe od liczb wierszy tych macierzy. Kolejne elementy tablicy pomocniczej są indeksami uporządkowanego wykazu, umożliwiającymi szybki dostęp do elementów reprezentujących współczynniki każdego wiersza (liczba niezerowych współczynników w wierszu jest różnicą dwóch kolejnych indeksów w pomocniczej tablicy, jej ostatni element razem z przedostatnim umożliwia obliczenie liczby tych współczynników w ostatnim wierszu).

Aby obliczyć iloczyn AB , przeglądamy kolejne wiersze macierzy A . Dla współczynnika $a_{ik} \neq 0$ znajdujemy elementy reprezentujące niezerowe współczynniki w k -tym wierszu macierzy B . Dla każdego takiego elementu, w dodatkowej tablicy, zapamiętujemy trójkę liczb: indeks elementu reprezentującego współczynnik a_{ik} w wykazie A , indeks elementu reprezentującego współczynnik b_{kj} w wykazie B i indeks j odpowiedniej kolumny macierzy B (czyli także iloczynu). Mając wszystkie takie trójki dla i -tego wiersza macierzy A (i iloczynu), sortujemy ich ciąg względem indeksów kolumn j . Po tym posortowaniu łatwo jest odnaleźć odpowiednie współczynniki macierzy A i B i wykonać działania na nich, ponieważ iloczyny, których sumę trzeba obliczyć, są reprezentowane przez trójki znajdujące się obok siebie. W ten sposób otrzymamy niezerowe współczynniki w i -tym wierszu macierzy AB , a ściślej te współczynniki, które są sumami niezerowych składników.



Koszt tego algorytmu w istotny sposób zależy od użytego algorytmu sortowania, ale są znane bardzo szybkie algorytmy sortowania, których użycie sprawia, że obliczenia pomocnicze zabierają tylko kilka razy więcej czasu niż same działania na współczynnikach. Można też opracować podobny algorytm, korzystający z kolumnowego uporządkowania wykazów.

Rysunkowe przedstawienie mnożenia macierzy wymyślił w latach 50. dwudziestego wieku Sigurd Falk, profesor politechniki w Brunszwiku. Opisane wyżej przykłady nie wyczerpują zastosowań tego wynalazku, ale mam nadzieję, że uzasadniają jego wartość, przy użyciu kilku obrazków i w przybliżeniu 1100 słów.



Prawa prawdziwie naturalne

Umysł to wytwór mózgu. Budowa i funkcjonowanie mózgu człowieka i innych zwierząt jest wynikiem milionów lat ewolucji. Aspektów działania umysłu, na przykład tego, co uważamy za moralne, nie da się zatem zrozumieć bez wnikania w to, jak odpowiednie pojęcia mogły się w toku ewolucji wytworzyć i zmieniać. Oznacza to, że każda intelektualnie uczciwa próba zrozumienia ludzkiej moralności wymaga – prócz języka historii filozofii – zastosowania najnowszych osiągnięć neurobiologii, ewolucjonizmu i psychologii.

Wczesnymi próbami w tym zakresie były prace E.O. Wilsona, socjobiologa, a dzięki wielu interesującym książkom, m.in. S. Pinkera, językoznawcy, próby wyjaśnienia ludzkiego zachowania w zarysowany wyżej sposób zdobyły pewną popularność, zwłaszcza w środowiskach racjonalistycznych. Nie było jednak dotąd w języku polskim publikacji, która w sposób precyzyjny i przystępny analizowałaby moralność z uwzględnieniem współczesnej wiedzy o mózgu. Lukę tę wypełnia wydana właśnie książka filozofki Patricii S. Churchland „Moralność mózgu” (Copernicus Center Press).

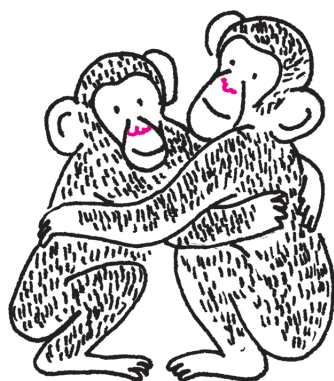
Warunkiem niezbędnym do mówienia o moralności jest występowanie więzi społecznych. Churchland opisuje szczegółowo, lecz interesująco, budowę i funkcjonowanie ośrodków kary i nagrody w mózgu, a także to, jak troska o siebie, zapewniana poprawnym działaniem tych ośrodków, może się uogólnić na troskę o innych. Równie dokładnie autorka wprowadza czytelnika w świat mechanizmów dziedziczenia, a jej opis, jak zachowanie jest uwarunkowane przez geny, niewątpliwie wywoła nie lada wrażenie na tych, którym genetyka kojarzy się wyłącznie z Mendlem i jego groszkiem pachnącym.

Nie oznacza to bynajmniej, że Churchland przyjmuje za dobrą monetę wszystkie narracje na temat działania mózgu, jakie funkcjonują w środowisku neurobiologów – przeciwnie, jak na rasowego filozofa przystało, stara się je krytycznie zanalizować. Doskonałym przykładem jest kwestia znanych od zaledwie 22 lat neuronów lustrzanych, komórek kory mózgowej aktywujących się zarówno w przypadku, gdy osobnik (małpa) wykonuje określony ruch, jak i gdy obserwuje innego osobnika taki ruch wykonującego. Ileż postawiono dalekosiężnych hipotez dotyczących zaangażowania neuronów lustrzanych w percepcji stanów umysłowych innych ludzi oraz empatii! Churchland konsekwentnie wskazuje na mielizny wnioskowania w przypadku tego typu hipotez, starając się precyzyjnie określić, gdzie znajduje się granica między pewnym a prawdopodobnym oraz prawdopodobnym a dopuszczalnym.

Wydaje się zaskakujące, u jak wielu ludzi pokutuje kartezjański pogląd o roli introspekcji w analizie umysłu. Dla tych wszystkich – oraz dla każdego, kto chciałby wiedzieć, jak działa świat – świetnie napisana i doskonale udokumentowana książka Patricii S. Churchland powinna być lekturą obowiązkową.

Ewelina KNAPSKA

Pracownia Neurobiologii Emocji, Instytut Biologii Doświadczalnej im. M. Nenckiego PAN w Warszawie



Ze świata USOS. Część 5 – Oceanarium, czyli o nurkowaniu w otchłani danych

Przemysław BIECEK*

Co wspólnego ma ocean i system USOS? Okazuje się, że znacznie więcej niż tylko literę „o” występującą w obydwu słowach.

Eksploatacja oceanu to bardzo wciągający temat. Co znajduje się w otchłani? Źródła minerałów, piękne widoki, dziwaczne stwory? Każdy może bawić się na brzegu w szukanie muszelek, ale aby zejść głębiej i zobaczyć coś, czego nikt inny jeszcze nie widział, potrzebny jest i trening, i specjalistyczny sprzęt.

A co z systemem USOS? Bazy danych tego systemu zawierają wiele informacji. Począwszy od danych, takich jak oceny wystawione studentom, poprzez wyniki ankiet wystawione przez studentów, do wyników z rekrutacji, preferencji w zapisach na przedmioty itp. Początki systemu USOS sięgają roku 1999, przez te kilkanaście lat na niektórych wydziałach zebrał się prawdziwy ocean danych.

Analizując te dane, możemy dowiedzieć się czegoś ciekawego o życiu na uczelni. Oczywiście, co innego będzie ciekawe dla dziekana, co innego dla prowadzącego zajęcia, a jeszcze co innego dla studenta. Zdecydowana większość użytkowników systemu USOS to studenci, dlatego poniżej spojrzymy na ten ocean danych z perspektywy studenta.

Postawimy trzy pytania oraz pokażemy, jak wygląda proces znajdowania odpowiedzi na każde z nich. Każde kolejne pytanie wymagać będzie coraz sprawniejszego aparatu matematycznego i będzie bardziej wymagające obliczeniowo.

Zbieramy muszelki, czyli co znajdziemy na brzegu

Pierwsze pytanie, które często przychodzi na myśl studentom, to *Na jakie inne zajęcia zapisana jest ta brunetka, która chodzi ze mną na mikroekonomię?* Odpowiedź na takie pytanie jest stosunkowo prosta, o ile ma się bezpośredni dostęp do bazy systemu USOS. Dane są przechowywane w postaci tabel, które odpowiadają relacjom, np. takim jak *student X jest zapisany na zajęcia Y*.

Aby dowiedzieć się, na jakie inne zajęcia chodzi kolega/koleżanka z naszej grupy, musimy znać strukturę tych tabel. Najpierw wśród osób zapisanych z nami na mikroekonomię odnajdziemy interesującą studentkę *y*, a następnie sprawdzimy, na jakie inne zajęcia *y* jest zapisana. Wystarczy dostęp do bazy danych i znajomość języka zapytań SQL.

Snorkeling, czyli pływanie z maską i rurką

Drugie pytanie, które zadamy, dotyczyć będzie mapy „popularności” i „trudności” przedmiotów. Na wielu wydziałach studenci mogą samodzielnie wybierać przedmioty z puli przedmiotów obieralnych. Czyż nie byłoby wspaniale mieć mapę raf i mielizn? Mapę z zaznaczoną zdawalnością dla każdego przedmiotu oraz informacją, jak oceniali go studenci w poprzednich semestrach.

W przeciwieństwie do pierwszego pytania informacja o „popularności”, czy „trudności” przedmiotu nie jest bezpośrednio przechowywana w bazie danych. Te charakterystyki trzeba wyznaczyć na podstawie danych z tabel (nazywanych surowymi, nieprzetworzonymi danymi), tworząc agregaty. Jednym z takich agregatów może być średnia arytmetyczna opinii studentów



Rozwiązanie zadania F 850.

Zaniedbajmy dla uproszczenia średnicę rury i oznaczmy przez d średnicę utworzonej przez nią obręczy. Wskutek obrotu Ziemi z częstotliwością Ω różnica prędkości górnego i dolnego krańca rury względem układu inercjalnego związanego z osią obrotu Ziemi jest równa $\Delta v = \Omega d \cos \varphi$. O ile woda może swobodnie płynąć w rurze, obrót rury zmienia prędkość fragmentów rury w układzie inercjalnym, a wody – nie; prowadzi do powstania różnicy prędkości tych fragmentów rury i zawieranej przez nie wody równej właśnie Δv . Podstawiając $d = 1m$, otrzymujemy prędkość rzędu $0,01 \text{ mm/s}$; można ją próbować dostrzec pod mikroskopem, używając zawiesziny zamiast wody.



*Interdyscyplinarne Centrum Modelowania Matematycznego i Komputerowego, Uniwersytet Warszawski

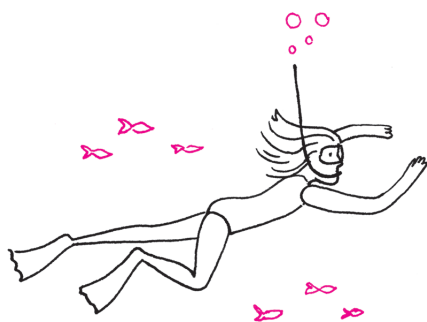
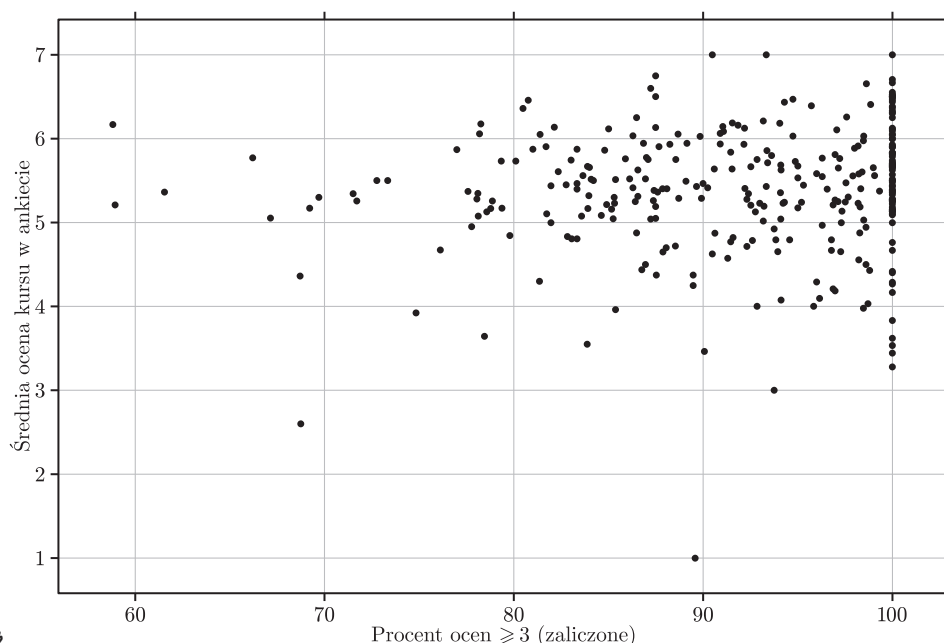
o przedmiocie. Na podstawie danych z wynikami ankiet możemy obliczyć

$$o(k) = \frac{\sum_{y \in Y} o(y, k)}{\#Y},$$

gdzie $o(k)$ to średnia opinia o przedmiocie k , $o(y, k)$ to opinia o przedmiocie k studenta y , Y to zbiór wszystkich studentów, a symbolem $\#Y$ oznaczamy licznosc zbioru studentów. W podobny sposób możemy obliczyć procent studentów, którzy zaliczyli przedmiot k .

Obliczanie średniej arytmetycznej oznacza, że traktujemy ocenę 2 jak połowę oceny 4. To nie zawsze ma sens, przecież 2 to nie jest pół zaliczenia, ale brak zaliczenia.

Obliczywszy dla każdego przedmiotu „popularność” (średnia ocena z ankiet) i „trudność” (zdawalność), możemy te dwie charakterystyki przedstawić na wykresie punktowym. Gdy wybieralnych przedmiotów jest dużo, z wykresu odczytać można więcej niż z tabeli liczb. Poniższy wykres przedstawia sytuację z Wydziału MIMUW. Każdy przedmiot jest przedstawiony za pomocą pojedynczej kropki. Nazwy przedmiotów usunięto, zamazałyby one cały wykres. Jak widzimy, w ofercie są przedmioty o bardzo wysokiej zdawalności i o niższej zdawalności. Co ciekawe, wydaje się, że zdawalność nie ma większego związku z oceną przedmiotu w ankietach.



Płetwonurkowanie, czyli schodzimy głębiej

Pierwsze z zadanych pytań dotyczyło chwili obecnej. *Na jakie przedmioty zapisana jest ta urocza brunetka w tym semestrze?* Drugie pytanie dotyczyło danych historycznych, ale wynik rodzi pokusę, by ekstrapolować go na przyszłość. Gdy **ja** będę wybierał przedmiot na przyszły semestr, jaka jest szansa, że ten przedmiot będzie **mnie** się podobał i jaka jest szansa, że **ja** będę miał trudności z zaliczeniem tego przedmiotu?

Chciałbym więc mieć bardziej spersonalizowaną mapę, opartą na danych studentów **takich jak ja**. Ale, oczywiście, nie ma studentów dokładnie takich jak ja. Studenci są różni i żadnych dwóch nie jest takich samych (prowadzę zajęcia dla studentów od wielu lat i jeszcze nie zdarzyło mi się nie móc rozróżnić dwóch osób). Przewidując więc, jak bardzo dany przedmiot będzie mi się podobał, będę szukał opinii studentów **podobnych** do mnie. To już głębsze rejony oceanu. Musimy jakoś określić miarę podobieństwa studentów.

Interesuje nas określenie miary niepodobieństwa dwóch studentów, oznaczymy ich przez x i y . Ich niepodobieństwo będziemy oznaczać $d(x, y)$. Niektóre algorytmy analizy danych wymagają od funkcji $d(x, y)$ symetrii

W języku potocznym łatwiej operować terminem *podobieństwo*. Ale w opisie matematycznym znacznie łatwiej operować przeciwieństwem podobieństwa, czyli *niepodobieństwem*. Mając jedno, łatwo jest wyznaczyć drugie, dlatego poniżej będziemy używać raz jednego, raz drugiego terminu.



Rozwiązanie zadania M 1412.

Bez utraty ogólności możemy założyć, że $\bar{a} = 0$. Wówczas

$$\max_{1 \leq i \leq n} a_i \geq 0 \geq \min_{1 \leq i \leq n} a_i.$$

Zauważmy, że dla $1 \leq k < l \leq n$ mamy

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| &\geq |a_k - a_{k+1}| + \dots + |a_{l-1} - a_l| \geq \\ &\geq |a_k - a_l|. \end{aligned}$$

Zatem w szczególności

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| &\geq |\max a_i - \min a_i| = \max a_i - \min a_i \geq \\ &\geq \max\{\max a_i, -\min a_i\} = \end{aligned}$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

($d(x, y) = d(y, x)$), rozróżnialności ($d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$) i spełniania warunku trójkąta. Nie zawsze jednak da się wszystkie te wymagania spełnić. Poniżej opiszemy metody wymagające jedynie symetrii.

Funkcja $d(x, y)$ opisuje, jak bardzo studenci x i y są niepodobni. Ale można być podobnym/niepodobnym na wiele sposobów. Na przykład, są podobni, bo chodzili do tej samej szkoły. Podobni, bo mają zbliżone wyniki z rekrutacji. Podobni, bo na pierwszym semestrze mieli podobne oceny.

Z tego powodu wygodnie jest definiować podobieństwo przez składowe, np. tak

$$d(x, y) = \sum_i w_i d_i(x, y),$$

gdzie $d_i(x, y)$ to składowa i niepodobieństwa, a w_i to waga, z jaką ta składowa wpływa na końcową wartość niepodobieństwa. Wagi są istotne, ponieważ jeżeli będziemy chcieli przewidzieć, czy jakiś przedmiot nam się będzie podobał, to będziemy szukać studentów o podobnych gustach, będziemy więc większą wagę przykładać do składowych opisujących gusta (np. podobne wybory przedmiotów obieralnych). Jeżeli interesować nas będzie trudność przedmiotu, to będziemy większą wagę przykładać do składowych związanych z biegłością w danej dziedzinie.

Mając miarę podobieństwa/niepodobieństwa, możemy chcieć wiedzieć, czy nie da się ze zbioru wszystkich studentów wydzielić podzbiorów studentów „podobnych”. Aby zilustrować to zagadnienie, rozważmy następującą funkcję niepodobieństwa

$$d_z(x, y) = 1 - \frac{\#(K_x \cap K_y)}{\#(K_x \cup K_y)},$$

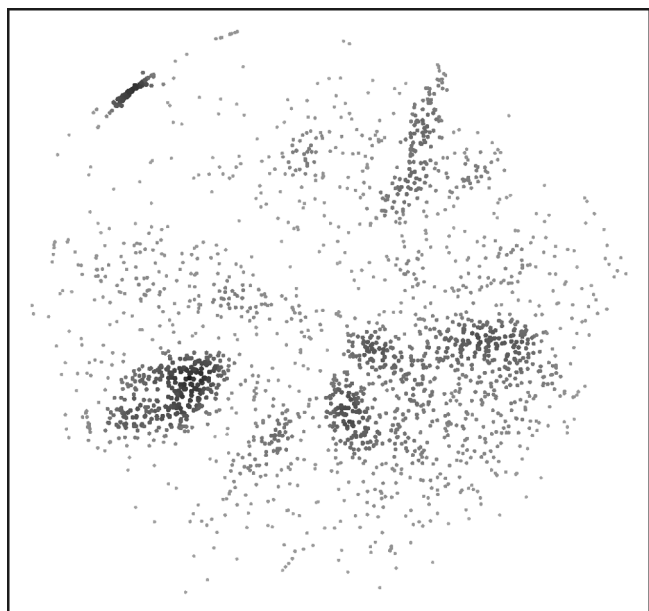
gdzie K_x to zbiór przedmiotów, na które zapisany jest student x , K_y to zbiór przedmiotów, na które zapisany jest student y .

Zauważmy, że $d_z(x, y)$ może być równe 0, nawet gdy $x \neq y$. Wystarczy, by x i y byli zapisani na te same przedmioty. Trzeba z tym żyć albo zmienić funkcję niepodobieństwa.

W naszym przykładzie dla Wydziału MIMUW mamy dane dla trzech tysięcy studentów. Macierz niepodobieństwa dla każdej pary studentów ma więc trzy tysiące wierszy i trzy tysiące kolumn. Jak coś zobaczyć w takiej macierzy?

Z pomocą przyjdzie nam technika skalowania wielowymiarowego (*Multidimensional scaling*), która pozwala na znalezienie r -wymiarowej reprezentacji obiektów dobrze odwzorowującej niepodobieństwo między obiektami. Dla $r = 2$ otrzymamy dwuwymiarowy opis dla każdego studenta, który możliwie dobrze zachowa opisaną funkcję niepodobieństwa. Przypadek $r = 2$ jest interesujący, ponieważ dwa wymiary można przedstawić na wykresie punktowym.

Zamieszczony obok wykres przedstawia wynik skalowania dla wspomnianych trzech tysięcy studentów. Każdy punkt odpowiada jednemu studentowi. Punkty bliskie sobie powinny odpowiadać studentom podobnym według zadanej miary niepodobieństwa, a punkty dalekie od siebie odpowiadać powinny studentom niepodobnym.



Jak widzimy, punkty nie tworzą jednej chaotycznej chmury, ale odnaleźć można podgrupy studentów wybierających podobne przedmioty! Niektóre

z nich odpowiadają specjalnościom, widać jednak, że granice między grupami nie są ostre i wielu studentów jest „gdzieś pomiędzy”.

Co jeszcze możemy zrobić z macierzą niepodobieństwa? Wykorzystajmy ją do oszacowania/odgadnięcia $o(x, k)$, czyli opinii studenta x o przedmiocie k .

Przyjmując, że opinia studenta x będzie podobna do opinii studentów podobnych do x , mogą np. uśrednić opinię 10 studentów najbardziej podobnych do x lub studentów o niepodobieństwie mniejszym od 0,1. W wielu przypadkach dobre wyniki daje uśrednianie opinii wielu studentów poprzez ważenie głosu studenta y w zależności od tego, jak bardzo jest on podobny do studenta x . Im bardziej podobny, tym ważniejsza będzie jego opinia.

Tak otrzymujemy wzór na ocenę opinii studenta x o przedmiocie k jako ważoną średnią opinii innych studentów

$$\hat{o}(x, k) = \frac{\sum_{y \in Y} o(y, k) \cdot h(d(x, y))}{\sum_{y \in Y} h(d(x, y))},$$

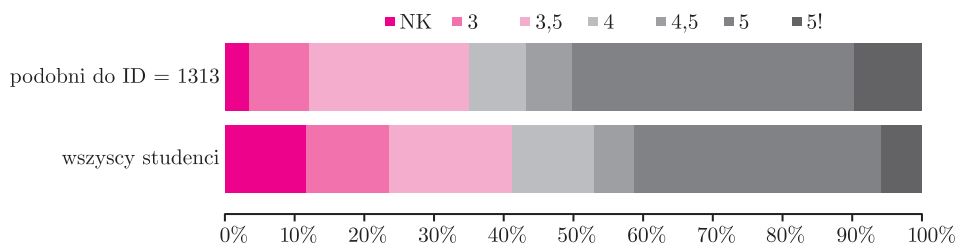
gdzie Y to zbiór wszystkich studentów, $h(d(x, y))$ to funkcja określająca, jak niepodobieństwo studentów x i y przekłada się na wagę opinii studenta y w przewidywaniu gustów studenta x . Jednym z częstych wyborów jest $h(t) = \exp(-t^2)$.

Możemy teraz oszacować opinię studenta x o każdym z przedmiotów. Podobnie możemy oszacować jego szanse zaliczenia przedmiotu i przedstawić mu bardziej spersonalizowaną mapę „trudność–popularność”.

Przedstawiony wzór na „średnią” można dowolnie modyfikować. Na przykład, zamiast wyznaczania średniej zdawalności możemy wyznaczyć rozkład ocen wśród podobnych studentów ważony podobieństwem do wybranego studenta.

Zobaczmy, jak to wygląda na konkretnym przykładzie. Weźmy pod lupę przedmiot *Pakiety statystyczne: R i SAS*, który prowadzę. Następnie wybierzmy studenta o wdzięcznym identyfikatorze ID = 1313, który na ten przedmiot jeszcze nie uczęszczał, i zobaczmy, czy wśród studentów, którzy ten przedmiot realizowali, ci podobni do ID = 1313 otrzymywali lepsze czy gorsze oceny.

Na poniższym wykresie przedstawiono procent studentów, którzy otrzymali określoną ocenę z przedmiotu *Pakiety statystyczne: R i SAS*. Dolny pasek opisuje sytuację wszystkich studentów realizujących ten przedmiot. Pasek na górze jest ważony podobieństwem do ID = 1313. Okazuje się, że „podobni” studenci mają częściej lepsze oceny. Również szanse niezaliczenia (oznaczone jako NK) są niższe niż w przypadku „losowego” studenta. Nic, tylko się zapisywać!



Na podobnej zasadzie działają systemy rekomendacyjne sugerujące zakup książki w księgarni internetowej czy proponujące film do obejrzenia. I podobnie jak w przypadku książek czy filmów, nie ma gwarancji, że to, co podobało się osobom o podobnych profilach do naszego, spodoba się również nam. Gwarancji nie ma, ale czasem nawet informacja „niepewna” może być użyteczna.

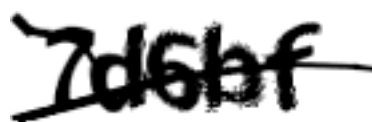
Daszek nad funkcją o oznacza szacowanie opinii. Aby poznać prawdziwą opinię $o(x, k)$, student x musiałby się na przedmiot k zapisać, a później musiałby go ocenić.

Jak przejść z powyżej opisywanej ważonej średniej do ważonego rozkładu? Pozostawiamy to jako łamigłówkę dla Czytelnika.



Czy komputery potrafią myśleć? Ta kwestia nurtuje informatyków od ponad pół wieku. W 1950 roku angielski matematyk Alan Turing zadał podobne, ale bardziej precyzyjne pytanie. A mianowicie, czy komputer (lub program komputerowy) jest w stanie przekonać człowieka, że sam również jest istotą ludzką. Turing zaproponował wtedy następujący test (który dziś, na jego cześć, zwany jest *testem Turinga*). Jeśli człowiek-sędzia podczas rozmowy prowadzonej w języku naturalnym (ale za pośrednictwem pisma) równocześnie z człowiekiem oraz z programem komputerowym nie będzie w stanie stwierdzić, który z interlokutorów jest który – to taki program zalicza test Turinga.

Choć od jego sformułowania minęło ponad sześćdziesiąt lat, to jak dotąd żadnemu programowi komputerowemu nie udało się przejść testu Turinga i nic nie zapowiada, że w najbliższej przyszłości miałyby się to zmienić. Pojawiające się co jakiś czas doniesienia, że było blisko (jak w 2001 roku w przypadku programu Cleverbot), należy traktować z dużą dozą sceptycyzmu.



Ironią może być więc fakt, że pomimo tego, iż komputery nie wypadają najlepiej jako ich uczestnicy, to podobnego rodzaju testy organizuje się na masową skalę z komputerami w roli sędziów. Zapewne każdy Czytelnik, serfując po Internecie, nie raz brał udział w teście, podczas którego musiał przekonać program komputerowy o swoim człowieczeństwie. Mogło to być przy okazji zakładania konta poczty elektronicznej, wypełniania formularza w sklepie internetowym, czy też umieszczania komentarza na forum. Takie *odwrócone testy Turinga* są powszechne tam, gdzie właściciele stron internetowych chcą odścisnąć aktywność *spambotów* (czyli takich programów komputerowych, które na masową skalę zasypują sieć spamem).



A wszystko zaczęło się w 2000 roku, kiedy to Luis von Ahn i trzech innych naukowców z Carnegie Mellon University ukuło termin CAPTCHA (ang. *Completely Automated Public Turing test to tell Computers and Humans Apart*), oznaczający program komputerowy, który generuje test w zamierzeniu łatwy do zaliczenia przez człowieka, ale trudny do zaliczenia przez maszynę. Najpopularniejszy test polega na przedstawieniu egzaminowanemu obrazka zawierającego zniekształcony napis, który należy odczytać i wprowadzić do formularza (rys. 1). Dziś nietrudno natknąć się na podobnego rodzaju obrazki, a w sieci trwa batalia między dwiema grupami programistów – tymi, którzy tworzą nowe implementacje CAPTCHA, i tymi, którzy tworzą doskonalsze spambotsy do ich łamania.



Rys. 1. Przykładowe obrazki generowane przez różne implementacje CAPTCHA.

Jest jednak sporo argumentów przemawiających przeciwko stosowaniu CAPTCHA. Przede wszystkim jest to metoda dość uciążliwa dla użytkowników (zwłaszcza jeśli jest wymagana przy częstych czynnościach jak np. wpisanie komentarza). Może być też nie do przejścia dla niektórych ludzi (np. niewidomi posługujący się drukarkami Braille'a nie zobaczą obrazka).



Rys. 2. Zbyt zniekształcona CAPTCHA z poczty na stronie internetowej wp.pl.

Poza tym skonstruowanie dobrego testu nie jest wcale łatwe, a źle skonstruowany test będzie więcej niż bezużyteczny. Jeśli algorytm generujący obrazki zbyt mocno zniekształci napis, to test taki stanie się zbyt trudny nawet dla ludzi (rys. 2). Z drugiej strony komputery dobrze radzą sobie z usuwaniem szumu z obrazu i klasyfikowaniem pojedynczych liter, a trudność sprawia im podział słowa na litery. W związku z tym implementacje, które nie łączą liter, skazane są na niepowodzenie – napisanie programu, które je rozwiązuje, nie będzie trudne (rys. 3).



Rys. 3. CAPTCHA prezentowana podczas tworzenia konta na poczcie onet.pl, która nie sprawi trudności spambotom.

Przez lata pojawiło się wiele konkurencyjnych pomysłów, które w zamierzeniu miały dać CAPTCHA idealną. Jednym z nich jest prezentowanie prostych pytań typu: „ile jest 2 + 2” lub „kto jest najlepszym przyjacielem człowieka”. Problem z tym rozwiązaniem jest taki, że spambotsy mogą wpisać to pytanie do wyszukiwarki Google i zanalizować otrzymane wyniki. Innym pomysłem jest zaprezentowanie egzaminowanemu kilku obrazków i polecenie, by zaznaczył on te, na których znajduje się np. kot. Tutaj kłopot jest taki, że takie rozwiązania wymagają stworzenia dużej bazy danych pytań (co jest trudniejsze niż deformacja losowego napisu). W przeciwnym przypadku pytania zaczną się powtarzać, więc po pewnym czasie spambotsy po prostu zgadną prawidłową odpowiedź.



Rys. 4. Dwa słowa reCAPTCHA.

Pomysł jest następujący: transformacja papierowej książki na tekst cyfrowy wymaga najpierw zeskanowania poszczególnych stron (co można zrobić mniej lub bardziej maszynowo), a następnie przepuszczenia ich przez oprogramowanie do rozpoznawania tekstu (OCR, ang. *Optical Character Recognition*). Dzięki zaawansowanym algorytmom znacząca część tekstu jest rozpoznawana poprawnie, ale niektóre słowa (zwłaszcza w starszych książkach) są dla nich zbyt zniekształcone. Takie słowa, których nie udało się rozpoznać automatycznie, trafiają do bazy słów reCAPTCHA. Podczas testu użytkownikowi przedstawiane są do przepisania dwa słowa: dla jednego z tych słów system zna poprawną odpowiedź (spełnia

Kolejnym argumentem przeciwników CAPTCHA jest to, że marnuje ona mnóstwo energii ludzkiej. Jak podają profesorowie z Carnegie Mellon, dziennie rozwiązywanych jest około 200 milionów CAPTCHA, co przy średnim czasie dziesięciu sekund na obrazek daje pół miliona godzin pracy dziennie. Luis von Ahn postanowił przeciwdziałać temu marnotrawstwu. Co ciekawe, jego pomysł polegał nie na wyeliminowaniu testów, ale na sprawieniu, by przy okazji ich rozwiązywania ludzie wykonywali pożyteczną pracę, której nie umieją wykonać komputery. Tak w roku 2008 powstał system reCAPTCHA, który pomaga digitalizować książki.

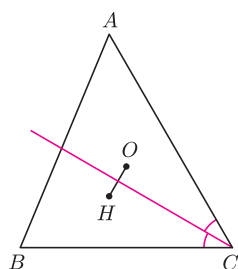
ono więc taką samą kontrolną funkcję jak w systemie CAPTCHA), a drugie słowo pochodzi z bazy słów nierozpoznanych przez OCR (z tym że kolejność tych dwóch słów jest losowa). Jeśli użytkownik poprawnie wpisze słowo kontrolne, to test jest zaliczany, a do bazy dopisywane jest potencjalne rozwiązanie nieznanego słowa. Jeśli kilku użytkowników w ten sam sposób odczyta nieznaną słowo, to system uznaje je za rozpoznane.

System reCAPTCHA jest aktualnie używany do digitalizowania starych roczników gazety *New York Times* oraz książek z Google Books. Użytkownikom przedstawiane są również zdjęcia numerów domów wykonywane w ramach projektu Google Street View.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



Rys. 1

M 1411. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC o ortocentrum H , środku okręgu opisanego O i kącie 60° przy wierzchołku C . Udowodnić, że dwusieczna kąta C jest symetralną odcinka HO .

Rozwiązanie na str. 14

M 1412. Dane są liczby rzeczywiste a_1, \dots, a_n . Niech $\bar{a} = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$ oznacza ich średnią arytmetyczną. Udowodnić, że prawdziwa jest nierówność

$$n(|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n|) \geq (|a_1 - \bar{a}| + \dots + |a_n - \bar{a}|).$$

Rozwiązanie na str. 6

M 1413. Mając dane wektory v_1, \dots, v_n w przestrzeni, definiujemy zbiór

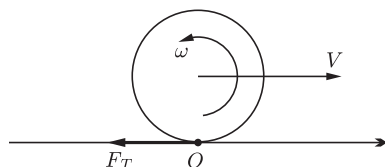
$$F(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]\},$$

np. $F((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ to standardowa kostka. Rozstrzygnąć, czy dla pewnych wektorów można w ten sposób otrzymać ośmiościan foremny.

Rozwiązanie na str. 13

Uwaga. Zbiór $F(v_1, \dots, v_n)$ w geometrii wypukłej nazywa się sumą Minkowskiego odcinków v_1, \dots, v_n .

Przygotowali Rafał KUŚ i Krzysztof TURZYŃSKI



Rys. 2

F 849. Baletnica wyrzuciła przed siebie obręcz o masie m i promieniu R , nadając jej początkowo prędkość kątową ω_0 i prędkość ruchu postępowego v_0 . Obręcz ślizgała się przez pewien czas Δt_1 po parkiecie, po czym zatrzymała się i natychmiast zawróciła ku baletnicy. Czas powrotu wynosił Δt_2 . Dla jakiej wartości stosunku ω_0/v_0 zachodzi równość $\Delta t_1 = \Delta t_2$? Współczynnik tarcia obręczy o podłoże wynosi μ , a moment bezwładności obręczy to $I = mR^2$.
Rozwiązanie na str. 17

F 850. (A. Compton) Na powierzchni Ziemi na szerokości geograficznej φ znajduje się toroidalna rura ustawiona tak, że jej oś symetrii obrotowej pokrywa się z kierunkiem północ-południe; rura jest wypełniona spoczywającą względem niej wodą. Demonstrator obrócił rurę o kąt 180° wokół jej poziomej osi wskazującej kierunek wschód-zachód. Jaka prędkość wody zmierzy demonstrator po obrocie rury?

Rozwiązanie na str. 4

Istnienie

Jarosław GÓRNICKI*

Gdy chcemy coś badać, rozsądnie jest upewnić się, że to coś istnieje.

Euklides w III wieku p.n.e. pokazał, jak tworzyć matematyczną rzeczywistość na drodze aksjomatycznej. Istnieją, oczywiście, inne sposoby pomnażania matematycznych bytów i uzasadniania ich poprawności.

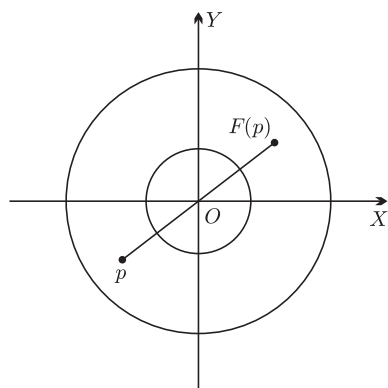


Problemy **istnienia** stanowią nieodłączną część matematyki i czasem wpływają na jej rozwój. Wystarczy przypomnieć historię poszukiwania odpowiedzi na pytania starożytnych Greków o istnienie konstrukcji platońskiej podwojenia sześcianu, kwadratury koła, trysekcji kąta. W podstawach matematyki niezłego zamieszania narobiły pytania o to, czy istnieje zbiór wszystkich zbiorów, czy istnieje zbiór złożony ze wszystkich zbiorów, które nie są swoimi elementami. Otwarte pytania w rodzaju – czy istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych postaci p i $p + 2$? – nadal inspirują matematyków.

Na początku XX wieku rozliczne zastosowania równań (różniczkowych, całkowych) skupiły uwagę na następujących problemach:

- (1) Czy równanie ma rozwiązanie? Ile jest rozwiązań?
- (2) Gdzie rozwiązania są zlokalizowane? Jaka jest ich struktura?
- (3) Jak te rozwiązania wyznaczyć?

Odpowiedzią matematyków były dwa spektakularne twierdzenia o punktach stałych (*punkt stały* przekształcenia $F : M \rightarrow M$ to taki punkt $x \in M$, że $F(x) = x$). Sformułujemy je dla przestrzeni euklidesowych (\mathbb{R}^n, d) , gdzie d jest metryką. Należy podkreślić, że ten rezultat nie przenosi się do przestrzeni o nieskończonym wymiarze.



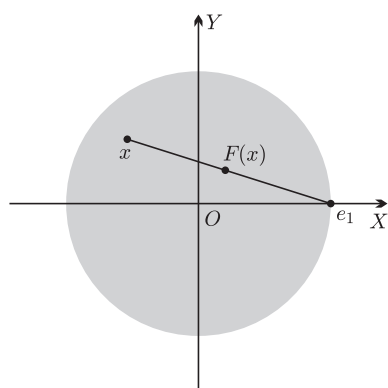
Rys. 1

Twierdzenie 1 (Luitzen Brouwer, 1911 r.). Niech $B \subset \mathbb{R}^n$ będzie domkniętą kulą jednostkową. Każde przekształcenie ciągle $F : B \rightarrow B$ ma punkt stały.

Twierdzenie 2 (Stefan Banach, 1922 r.). Przekształcenie $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy *zwężającym*, gdy istnieje taka stała $k \in [0, 1)$, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$d(F(x), F(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

Każde przekształcenie zwężające $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ma dokładnie jeden punkt stały x^* i granicą iteracji funkcji F dla każdego $y \in \mathbb{R}^n$ jest właśnie ten punkt.



Rys. 2

Sformułowania tych twierdzeń są optymalne. Antypodyczne przekształcenie pierścienia $F(p) = -p$ (rys. 1), przekształcenie koła bez brzegu $F(x) = \frac{1}{2}(x + e_1)$ (rys. 2), izometria $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x + 1$, przekształcenie $F(x) = n(1 + e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, które spełnia warunek $d(F(x), F(y)) < d(x, y)$ dla $x \neq y$ (ale nie istnieje taka uniwersalna stała k , dla której byłyby spełnione warunki z twierdzenia Banacha), nie mają punktów stałych.

Działanie tych twierdzeń pokażemy na szkolnych zadaniach.

Zadanie 1. Udowodnić zbieżność ciągu ułamków łańcuchowych

$$2, \quad 2 + \frac{1}{2}, \quad 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \quad 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \quad \dots$$

Rozważany ciąg zapisujemy rekurencyjnie: $x_1 = 2, x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}, n = 2, 3, \dots$

*Katedra Matematyki,
Politechnika Rzeszowska



Z oszacowań $x_1 \leq \frac{5}{2}$, $x_2 \leq \frac{5}{2}$ oraz z warunku

$$x_n = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_{n-2}}}, \quad n = 3, 4, \dots,$$

wynika, że $2 \leq x_n \leq \frac{5}{2}$ dla każdego $n = 1, 2, \dots$

Ponieważ przekształcenie $F(x) = 2 + \frac{1}{x}$ odwzorowuje przedział $[2, \frac{5}{2}]$ w siebie i jest zwężające,

$$|F(x) - F(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{|xy|} |x - y| \leq \frac{1}{4} |x - y|,$$

więc na podstawie twierdzenia Banacha F ma dokładnie jeden punkt stały $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, gdzie $x_n = F(x_{n-1}) = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}$, $n \geq 2$. Rozwiązując równanie $x^* = 2 + \frac{1}{x^*}$, otrzymujemy $x^* = 1 + \sqrt{2}$.

Uwaga. Każda liczba niewymierna ma dokładnie jedno rozwinięcie na ułamek łańcuchowy arytmetyczny (wszystkie liczniki są równe 1) nieskończony:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}} =: a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + 1/\dots$$

Leonhard Euler wykazał, że

$$e = 2 + 1/1 + 1/2 + 1/1 + 1/1 + 1/4 + 1/1 + \dots + 1/1 + 1/2k + 1/1 + / \dots$$

Dla liczby π takie rozwinięcie nie jest znane! Wiadomo jedynie, jaka jest wartość a_k dla $k \leq 5\,821\,569\,425$ (Eric Weisstein, 2011 r.):

$$\pi = 3 + 1/7 + 1/15 + 1/1 + 1/292 + 1/1 + 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/1 + 1/14 + / \dots$$

Od wiedzy, że „coś” istnieje, do wiedzy, jak to „coś” wygląda, droga czasem jest bardzo długa (jeśli w ogóle można ją przebyć).

Zadanie 2. Na płaszczyźnie euklidesowej danych jest $n \geq 2$ prostych l_1, l_2, \dots, l_n . Niech $A_1 \in l_1$. Rzut prostopadły punktu A_1 na prostą l_2 wyznacza punkt $A_2 \in l_2$, rzut prostopadły punktu A_2 na prostą l_3 wyznacza punkt $A_3 \in l_3$, itd. Rzut prostopadły punktu $A_n \in l_n$ na prostą l_1 wyznacza punkt $A_{n+1} \in l_1$. Czy istnieje taki punkt $A_1 \in l_1$, że $A_1 = A_{n+1}$?

Jeśli proste l_1, l_2, \dots, l_n są równoległe, to każdy punkt $A_1 \in l_1$ spełnia warunki zadania. Gdy istnieje para kolejnych prostych l_k i l_{k+1} , które nie są równoległe, to rzutowanie prostopadłe l_k na l_{k+1} jest przekształceniem zwężającym (rys. 3)

$$|P(a) - P(b)| = |a - b| \cdot \cos \alpha.$$

W tym przypadku przekształcenie $F : l_k \rightarrow l_{k+1}$, opisanie w zadaniu, jest zwężające ze stałą $k = \cos \gamma$, gdzie $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2})$ jest miarą jednego z kątów między dwiema kolejnymi nierównoległymi prostymi. Zatem na podstawie twierdzenia Banacha istnieje taki punkt $A_1 \in l_1$, że $A_1 = A_{n+1}$.

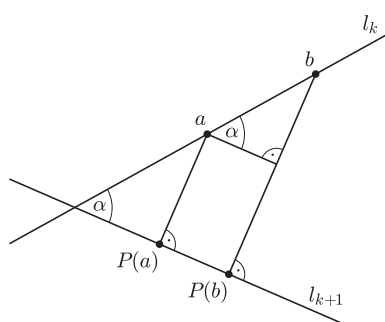
Kolejne zadanie jest (chyba?) trudniejsze. Skoro łatwo wskazać przekształcenie ciągle koła z dziurą (pierścienia) na siebie bez punktu stałego, to dla koła z większą liczbą dziur...

Zadanie 3. Niech D_n oznacza figurę domkniętą otrzymaną z koła, w którym zrobiono $n \geq 2$ dziur (rys. 4). Wskazać przekształcenie ciągle zbioru D_n na siebie bez punktu stałego.

Rozwiązanie jest na odwrocie tej kartki, ale najpierw spróbuj rozwiązać je sam.

* * *

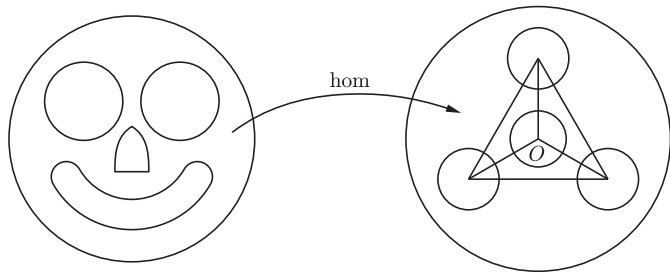
Zastosowania twierdzeń Brouwera i Banacha w zaawansowanych działach matematyki, m.in. w teorii równań różniczkowych, całkowych, przyczyniły się do pojawienia się kolejnych wyników Juliusza Schaudera, Solomona Lefschetza, Karola Borsuka i wielu innych. Doprowadziło to do powstania użytecznej teorii punktów stałych, na którą dzisiaj można patrzeć z topologicznego lub metrycznego punktu widzenia.



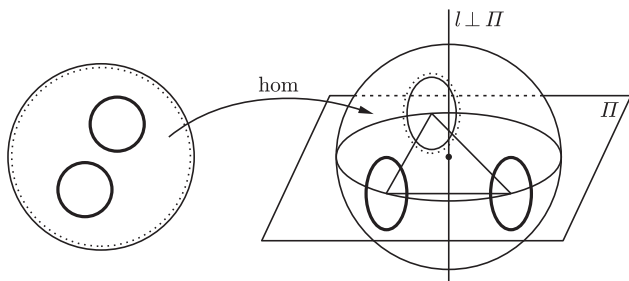
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



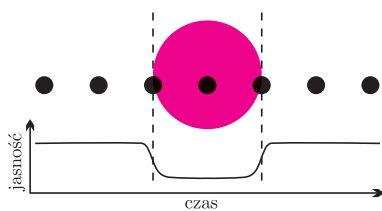
Rys. 6

Rozwiązanie zadania 3. Oznaczmy przez O środek koła D_n . Jeżeli $n \geq 3$, to za sprawą przekształcenia homeomorficznego możemy przyjąć, że dziury są kołami tej samej wielkości, środek jednego z nich pokrywa się ze środkiem koła D_n , a środki pozostałych $(n - 1)$ kół (= dziur) rozmieszczone są symetrycznie względem punktu O lub są wierzchołkami $(n - 1)$ -kąta foremnego (rys. 5). Obrót figury D_n wokół punktu O o kąt $\frac{2\pi}{n-1}$ przekształca w sposób ciągły figurę D_n na siebie i przemieszcza każdy punkt figury D_n .

Gdy dziury są dwie, możemy postąpić inaczej. Figurę D_2 nadajemy kształt sfery (rys. 6) z trzema kolistymi dziurami tej samej wielkości, których środki znajdują się na równiku i leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego (ponownie korzystamy z przekształceń homeomorficznych). Tak otrzymana powierzchnia jest symetryczna względem płaszczyzny równika Π . Złożenie symetrii względem płaszczyzny Π z obrotem sfery o kąt $\frac{2\pi}{3}$ wokół osi $l \perp \Pi$ i przechodzącej przez środek sfery przekształca figurę D_2 na siebie, przemieszczając jej każdy punkt.

Odkryj własną egzoplanetę

Jakub BOCHIŃSKI*



Rys. 1. Podczas zaćmienia dysk planety zasłania część gwiazdy, co powoduje czasowe zmniejszenie jasności gwiazdy.

Jedną z pierwszych odkrytych planet pozasłonecznych, 51 Pegasi b, znaleziono w 1995 roku przez Michaela Mayora i Didier Queloz'a z Obserwatorium Genewskiego, okazała się gazowym gigantem o temperaturze powierzchniowej ponad dwukrotnie wyższej niż na jakiegokolwiek planecie w Układzie Słonecznym (ponad 1500 K), obiegającym podobną do Słońca gwiazdę 51 Pegasi w ciągu zaledwie 4 dni. W późniejszych latach znaleziono więcej tego rodzaju planet i ukuto dla nich wspólną kategorię „gorących Jowiszów”.

Zaćmienia Słońca towarzyszą nam od zarania dziejów. Już w czwartym wieku przed naszą erą chiński astronom Shi Shen zauważył, że da się powiązać je z pozycją Księżyca na niebie i tym sposobem przewidywać tego rodzaju wydarzenia. W dzisiejszych czasach zaćmienia odległych gwiazd pomagają astronomom w poszukiwaniu i badaniach ciał niebieskich poza Układem Słonecznym.

W trakcie zaćmienia dysk planety (lub innego ciała niebieskiego) zasłania część macierzystej gwiazdy, zmniejszając czasowo jej obserwowaną jasność. Jako że większość ciał niebieskich krąży po stałych orbitach, zaćmienia te powinny być obserwowalne w stałych odstępach czasowych. Oczywiście, żeby zaćmienie w ogóle mogło mieć miejsce, gwiazda macierzysta, orbita poszukiwanej planety i nasza Ziemia muszą znajdować się w jednej płaszczyźnie. Szanse na taką konfigurację są niskie (około 10% dla większości gorących Jowiszów i mniej niż 1% dla planety takiej jak Ziemia), więc naukowcy szukający egzoplanet metodą zaćmieniową obserwują tysiące gwiazd jednocześnie, by zwiększyć szansę dokonania odkrycia.

Dotychczas metoda zaćmieniowa przyczyniła się do odkrycia ponad 300 egzoplanet. Większość odkryć została dokonana przez zaledwie dwie grupy naukowców: jedna związana jest z amerykańską sondą kosmiczną Kepler, a druga z europejskim konsorcjum uniwersytetów SuperWASP. Obie grupy starają się obserwować możliwie dużą liczbę gwiazd jednocześnie, choć wykorzystują do tego zupełnie różne techniki. Kepler koncentruje się na jednym fragmencie nieba, obserwując 150 tysięcy gwiazd wzdłuż galaktycznego Ramienia Oriona (w którym leży też nasze Słońce), aż do odległości około 3000 lat świetlnych od Ziemi. SuperWASP zbiera dane, korzystając z szesnastu małych teleskopów umiejscowionych w dwóch grupach na północnej i południowej półkuli Ziemi. Obie grupy teleskopów, pracując wspólnie, są w stanie sfotografować całe nocne niebo w ciągu zaledwie siedmiu minut, obserwując setki tysięcy jasnych gwiazd do odległości około 1000 lat świetlnych. W żargonie astronomicznym pierwsza grupa naukowców szuka planet „wąsko i głęboko” a druga „szeroko i płytko”.

*doktorant w grupie egzoplanetarnej, Open University w Milton Keynes, Wielka Brytania



Rozwiązanie zadania M 1413.

Odpowiedź: Nie!

Zauważmy najpierw, że punkt $v = \frac{1}{2}(v_1 + \dots + v_n)$ jest środkiem symetrii zbioru $F = F(v_1, \dots, v_n)$. Istotnie, symetria S_v o środku v przeprowadza wektor x na $2v - x$. Dla dowolnego $x \in F$ w postaci $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ mamy

$$S_v(x) = 2v - x = (1 - \lambda_1)v_1 + \dots + (1 - \lambda_n)v_n \in F.$$

Przypuśćmy, że dla pewnych wektorów v_1, \dots, v_n zbiór $F(v_1, \dots, v_n)$ to ośmiościan foremny \mathcal{A} i że n jest najmniejsze możliwe (oczywiście $n > 2$). Zauważmy, że wtedy $F(v_1, \dots, v_{n-1})$ jest ścianą \mathcal{A} , czyli trójkątem równobocznym, który nie ma środka symetrii – sprzeczność.

Kilka innych przykładów pożytku amatorskich obserwacji dla rozwoju nauki podała Bożena Czerny w *Delcie* 9/2012.

Informacji dotyczących większości odkrytych dotychczasowo planet zaćmieniowych wygodnie szukać na stronie Exoplanets Transit Database (ETD) Czeskiego Towarzystwa Astronomicznego (<http://var2.astro.cz/ETD>).



Planety zaćmieniowe są niezwykle interesujące z punktu widzenia astronomii, gdyż pozwalają nam poznać zarówno swoją masę, jak i rozmiar, a więc również gęstość. Znając ten parametr, naukowcy zajmujący się modelowaniem wnętrza egzoplanet potrafią rozróżnić planety gazowe, skalne i lodowe, dając nam wgląd pod skorupy światów oddalonych o setki lat świetlnych. Co jeszcze ciekawsze, część światła wyemitowanego przez gwiazdę macierzystą jest w trakcie zaćmienia „filtrowana” przez atmosferę obserwowanej planety i w efekcie niesie w sobie informację na temat jej składu chemicznego. Odkrycie dużej ilości tlenu w atmosferze egzoplanety o odpowiedniej temperaturze mogłoby wskazywać na istnienie życia na jej powierzchni, przybliżając nas do odpowiedzi na odwieczne pytanie: czy jesteśmy sami we Wszechświecie?

Choć niewielu z nas zdaje sobie z tego sprawę, obserwowanie planet metodą zaćmieniową nie jest wcale bardzo trudne. Studenci astronomii nierzadko zajmują się tym samodzielnie w ramach ćwiczeń już na pierwszym lub drugim roku studiów. Wystarczy mały teleskop na zrobotyzowanym montażu z aparatem podłączonym do komputera i parę godzin czystego nocnego nieba. Poszukiwania można prowadzić nawet z dużego miasta. Trzy lata temu grupa studentów nauk przyrodniczych i pasjonatów astronomii dokonała pierwszej obserwacji zaćmienia planety HD80606b z wykorzystaniem teleskopu o średnicy zaledwie 35 cm z obserwatorium w Londynie! Podobnym wyposażeniem dysponuje większość amatorskich klubów astronomicznych w Polsce i na świecie. Poniżej opisuję, krok po kroku, w jaki sposób rozpocząć przygodę z obserwowaniem egzoplanet metodą zaćmieniową. Kto wie, może i Ty, drogi Czytelniku, przyczynisz się do odkrycia kolejnego nowego świata gdzieś na rubieżach naszej Galaktyki. . .

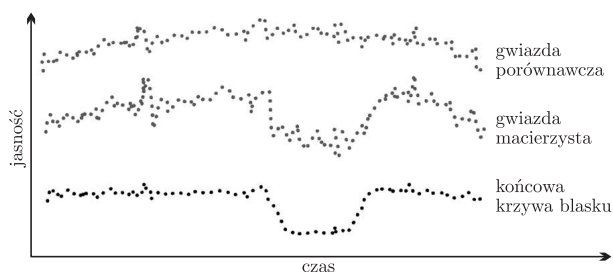
Krok 1. Przygotowanie sprzętu. Do obserwacji egzoplanet będą potrzebne: teleskop, najlepiej o średnicy przynajmniej 20 cm, montaż teleskopowy z silnikiem kompensującym ruch wirowy Ziemi, detektor CCD podłączony do komputera oraz parę godzin czystego nocnego nieba. Część z wymienionego powyżej sprzętu może być poza zasięgiem niektórych amatorów astronomii, za to na pewno w posiadaniu jednego z lokalnych klubów astronomicznych.

Krok 2. Planowanie obserwacji. Naszą przygodę z egzoplanetami najlepiej rozpocząć od obserwacji tych już odkrytych, których efemerydy (czasy) przyszłych zaćmień oraz ich przewidywane długości i głębokości można znaleźć opublikowane w ogólnie dostępnych bazach danych. Im głębsze zaćmienie i jaśniejsza gwiazda, tym łatwiejsze obserwacje. Dobrym celem na start, wybieranym często przez początkujących, jest doskonale widoczna z Polski gwiazda HD189733, której głębokie zaćmienie da się zaobserwować nawet parę razy na tydzień (w zależności od pory roku).

W trakcie przygotowywania obserwacji warto zwrócić uwagę na kilka podstawowych spraw. Pierwszą z nich jest pozycja obiektu na niebie w noc obserwacji. Czy nie jest zbyt nisko nad horyzontem i czy Księżyc lub inne jasne ciała niebieskie nie znajdują się zbyt blisko (potencjalnie prowadząc do prześwietlonych zdjęć)? Ważna jest też jasność obserwowanej gwiazdy. Czy nie jest zbyt jasna dla naszego teleskopu? Lub przeciwnie, zbyt mało jasna? Czy (co byłoby wskazane) w okolicy znajdują się inne gwiazdy o podobnej jasności? Wreszcie, istotną sprawą jest czas trwania zaćmienia. Czy noc jest wystarczająco długa, by dokonać obserwacji całego zaćmienia? O której godzinie należy rozpocząć i zakończyć obserwacje?

W udzieleniu odpowiedzi na większość powyższych pytań pomoc może darmowy program *Stellarium*, wyświetlający realistycznie wyglądającą mapę nieba, wraz ze szczegółowymi informacjami na temat większości gwiazd widocznych przez małe teleskopy.

Krok 3. Obserwacje. To akurat najprostsza część całego procesu. Wystarczy skierować teleskop na właściwą gwiazdę, ustalić optymalny czas naświetlania i rozpocząć fotografowanie. W zależności od sprzętu jedna noc obserwacji powinna prowadzić do uzyskania między 30 a 100 zdjęć tej samej gwiazdy.

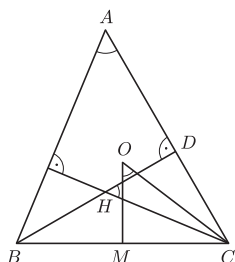


Rys. 2. Krzywą blasku obserwowanej gwiazdy zmiennej można wyznaczyć, porównując jej jasność z jasnością znajdującą się w pobliżu gwiazdy odniesienia.

Istnieje wiele programów komputerowych pozwalających na analizę danych pod kątem fotometrii wizualnej. Dwa najbardziej polecane to płatny *Maxim DL* i bezpłatny *Aperture Photometry Tool*. Ten ostatni dostępny jest pod adresem <http://www.aperturephotometry.org/>.



Rozwiązanie zadania M 1411. Niech M będzie środkiem boku BC , a D – spodkiem wysokości z wierzchołka B .



Ponieważ O jest środkiem okręgu opisanego, więc kąt CMO jest prosty oraz $\sphericalangle COM = \frac{1}{2} \sphericalangle COB = \sphericalangle CAB$ (kąt środkowy i wpisany). Oczywiście $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DHC$, więc trójkąty COM i CHD są podobne. Trójkąt CBD jest połową trójkąta równobocznego, mamy więc $CD = \frac{1}{2} BC = CM$. Stąd trójkąty COM i CHD są przystające, a dokładniej jeden jest obrazem drugiego w symetrii względem dwusiecznej kąta C , co daje tezę.

Krok 4. Analiza danych. Planeta zaćmieniowa ujawnia swoją obecność przez czasowe obniżenie jasności gwiazdy przez nią zasłanianej. Poszukiwanie owej egzoplanety trzeba więc rozpocząć od wyrysowania wykresu zmian jasności obserwowanej gwiazdy macierzystej w czasie (tzw. krzywej blasku). Dane potrzebne do nakreślenia takiej krzywej zbiera się, mierząc ilość fotonów zarejestrowanych przez detektor CCD dla dwóch obiektów: gwiazdy macierzystej oraz jednej stałej gwiazdy porównawczej. Zmierzone jasności porównuje się, korzystając z techniki zwanej fotometrią porównawczą.

Obydwa ciała niebieskie zmieniają jasności w podobny sposób. Następuje to w wyniku zmian atmosferycznych, przemieszczania się chmur, i tym podobnych efektów związanych z umiejscowieniem teleskopu na powierzchni Ziemi. Jednakże po odjęciu zmierzonego natężenia światła zarejestrowanego dla obydwu obiektów, wszystkie takie efekty powinny zniknąć, a pozostała krzywa blasku winna zawierać już tylko faktyczną, spowodowaną zaćmieniem, utratę jasności gwiazdy macierzystej.

Krok 5. Interpretacja wyników. Docieramy do najbardziej interesującego fragmentu całego procesu. Po uzyskaniu krzywej blasku gwiazdy macierzystej, która wyraźnie wskazuje na obecność orbitującego dookoła niej innego ciała niebieskiego, pora przyjrzeć się samej planecie. Wykres jasności obserwowanego zaćmienia zawiera informacje na temat rozmiaru planety i jej orbity, pozwalając na wyobrażenie sobie, jak wygląda ten niedostępny ludzkim oczom odległy system słoneczny.

Wspomniane parametry planetarne wydobywa się z zebranych danych, dopasowując do nich skomplikowany model astrofizyczny. Dostosowując się do potrzeb amatorów astronomii, Czeskie Towarzystwo Astronomiczne zamieściło na wcześniej wspomnianej stronie ETD formularz, który pozwala na dopasowanie modelu do swoich danych za pomocą zwykłej przeglądarki internetowej. Co więcej, narzędzie to umożliwi również publikację swoich obserwacji w bazie danych ETD oraz automatyczne porównanie ich do wyników uzyskanych w innych obserwatoriach, tak amatorskich, jak i profesjonalnych. Korzystając z dużej ilości danych zbieranych przez amatorów z całego świata, Towarzystwo ma nadzieję przyczynić się do odkryć kolejnych egzoplanet oraz pomóc w zrozumieniu mechanizmów ich powstawania.

Wszystkim łowcom egzoplanet autor życzy owocnych obserwacji, postara się także odpowiedzieć na ewentualne pytania lub rozwiązać wątpliwości przesłane na adres Jakub.Bochinski@open.ac.uk.

* * *

Od Redakcji

Istnienie planet poza Układem Słonecznym jest potwierdzone obserwacjami od 25 lat. Pierwsze egzoplanety znajdowano w najdziwniejszych miejscach, o czym świadczy odkryty w 1992 r. za pomocą obserwacji radioteleskopowych przez A. Wolszczana i współpracowników układ planeta-pulsar. Postęp technologiczny, a zwłaszcza upowszechnienie się techniki CCD, która zastąpiła kliszę fotograficzną, i stabilny wzrost mocy obliczeniowej potrzebnej do obróbki danych, umożliwił powstanie projektów dedykowanych maszynowym przeglądowi nieba. Dla przykładu, polski projekt OGLE na początku lat 90. prowadził regularny przegląd około miliona gwiazd – obecnie OGLE IV monitoruje w czasie rzeczywistym miliardy gwiazd. Na efekty nie trzeba było długo czekać – zadziałał efekt śniegowej kuli. Pierwsze odkrycia były na tyle interesujące, że wkrótce zaczęto budować poświęcone odkrywaniu planet teleskopy kosmiczne, takie jak Kepler. Niebagatelny wpływ ma również stała współpraca naukowców z amatorami astronomii, którzy pomagają analizować dane obserwacyjne, współuczestnicząc w odkryciach (planethunters.org). Obecnie znamy ponad 1000 egzoplanet, w większości odkrytych za pomocą analizy krzywych prędkości radialnych (spektroskopowo) oraz opisanej w artykule analizy zaćmień (tranzyt).

M. B.

5

mała delta

Samą linijką można narysować okrąg...

... jeśli ma się 5 jego punktów. No, może trochę przesadziłem... Okręgu tak dosłownie narysować nie można, ale można narysować jego kolejne kilka punktów, nawet gdy te kilka to np. 100 – oczywiście, im większa będzie to liczba, tym dłużej będzie to trwało, bo rysować będziemy te punkty kolejno, po jednym.

Konkretnie będzie tak: przez jeden z danych punktów poprowadzimy dowolną prostą nieprzechodzącą przez żaden z pozostałych i na niej znajdziemy drugi punkt jej przecięcia z (nienarysowanym!) okręgiem, na którym leży danych pięć punktów. Ponieważ prostą możemy zmieniać, więc będzie nam za każdym razem przybywać nowy punkt na okręgu.

Przepis jest na rysunkach. Jeśli dane są punkty A, B, C, D, E i prosta k przechodząca przez A i nieprzechodząca przez żaden z pozostałych (rys. 1), rysujemy łamaną $ADCEB$. Przecięcie prostej AD z prostą EB oznaczmy przez P , przecięcie EC z k przez Q (rys. 2) i przecięcie PQ z DC przez R . Przecięcie X prostej BR z k (rys. 3) to punkt okręgu.

Dlaczego?

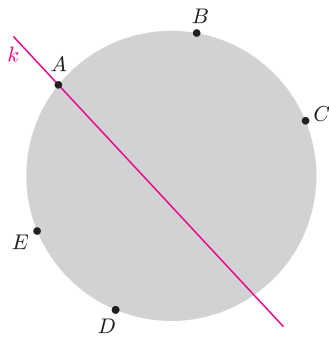
A czy to nie wszystko jedno? – Można cyrklem sprawdzić, że się zgadza.

Powstają jednak techniczne pytania, co będzie wynikiem konstrukcji, gdy

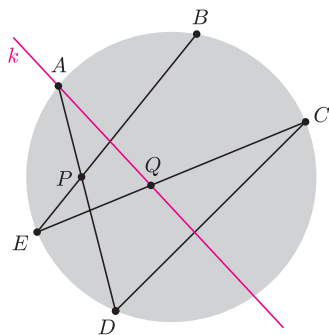
- jako k obierzemy prostą styczną do okręgu?
- punkty A, B, C, D, E nie będą leżały na jednym okręgu?

Ciekawe, prawda?

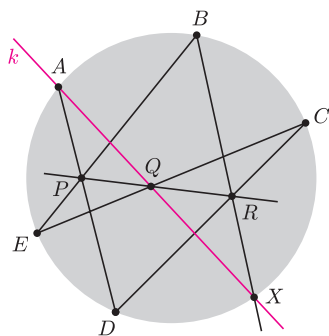
Małą Deltę przygotował Marek KORDOS



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Konstrukcja jest poprawna dzięki twierdzeniu Pascala:
Przeciwległe boki sześciokąta wpisanego w stożkową przecinają się w punktach leżących na jednej prostej.
Stożkowa to elipsa (w szczególności przypadku okręgu), parabola lub hiperbola. Tak więc, biorąc pięć punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, otrzymamy coraz więcej punktów leżących na jednej z tych krzywych, bowiem – jak głosi twierdzenie Braikeniidge'a–Maclaurina –
przez dowolne pięć punktów trójkami niewspółliniowych przechodzi dokładnie jedna stożkowa.
A gdy k będzie styczną – punkt X okaże się punktem A .

Odejście giganta

Frederick Sanger urodził się 13 sierpnia 1918 r., zmarł 19 listopada 2013 r. Przeżył 95 lat, w tych czasach i w polityce, i w życiu społecznym, i w nauce epoki następowały szybko, jedna po drugiej. Pytania naukowe, na które uzyskiwał odpowiedź, dziś są wiedzą z podręczników dla szkół podstawowych.

Po doktoracie, w 1943 roku, Sanger wystąpił o dofinansowanie pracy nad strukturą chemiczną białek. Nie uzyskał poparcia, ponieważ w tym czasie było „wiedzą” powszechną, że kolejność, w której w łańcuchu białka leżą jego składowe cząsteczki, aminokwasy, jest przypadkowa. Nie jest jednak przypadkiem, że umysły wielkie kwestionują prawdy oczywiste – Sanger nie zrezygnował ze swojego projektu, a do badań wybrał małe, medycznie istotne białko – insulinę. Stosując nowy odczynnik, dziś znany jako odczynnik Sangera, podzielił cząsteczkę insuliny na małe fragmenty, ustalił ich wzajemne położenie w całym białku, a potem każdy z osobna analizował nowo odkrytymi metodami. Już (!) po 10 latach mógł w 1953 roku ogłosić, jaka jest – nieprzypadkowa – kolejność aminokwasów w insulinie bydłowej, i jakie warianty tej sekwencji występują w insulinach innych gatunków ssaków. Za te odkrycia uzyskał w 1958 roku Nagrodę Nobla. Praca Sangera ujawniła także podstawową, najważniejszą w chemii białek cechę: kolejność aminokwasów (sekwencja) w nici białkowej jednoznacznie definiuje jej strukturę przestrzenną, a od tej struktury zależy aktywność biologiczna danego białka. Ta teza i ta prawda są nadal potwierdzane najbardziej wyszukanyymi metodami.

Było nieuniknione, że Sanger zainteresuje się pracami Jima Watsona i Francis Cricka nad strukturą przestrzenną DNA, ponieważ stanowiły one bezpośredni łącznik chemii dziedziczenia z produktami genów – białkami. Jeśli białka mają zdefiniowaną sekwencję, to musi ona wynikać z zasad kodu genetycznego, o którym pisali Watson i Crick w swoich pierwszych artykułach o podwójnej helisie. Nadszedł czas na rozwikłanie tajemnicy kolejnych sekwencji: nukleotydów w DNA.

W stosunku do chemii białek zadanie było trudniejsze, ponieważ biologicznie aktywne cząsteczki DNA są o wiele dłuższymi łańcuchami od łańcuchów białek. Ale sposób myślenia Sanger zastosował podobny: trzeba podzielić długą nić DNA na krótsze fragmenty i sekwencjonować te krótsze.

Pierwotna metoda Sangera wymagała niezwyklej biegłości, chirurgicznej precyzji. Wybrane odczynniki do badań były bardzo kosztowne i nietrwałe. Rozdzielenia fragmentów dokonywano techniką dotychczas nie stosowaną, znów ze względu na wymagania precyzji od wykonawców. W dodatku w Cambridge dowiedziano się, że podobnego zadania podjął się Walter Gilbert, po drugiej stronie Atlantyku. Trzeba się było spieszyć z uzyskiwaniem wyników, trzeba było „być pierwszym”. W nauce, podobnie jak w sporcie, miejsce drugie to miejsce pokonanego.

Ciekawe, że obie metody powstały dzięki RÓŻNYM FILOZOFIOM: Sanger dzielił DNA na mniejsze fragmenty, Gilbert dobudowywał w kontrolowanych warunkach brakujące fragmenty helisy. Metoda Gilberta była łatwiejsza w wykonaniu – doświadczyłam tego osobiście na warsztatach, na których nikt z uczestników nie dokonał pomiarów metodą Sangera, a wszyscy – metodą Gilberta. I mimo to metoda Sangera trwa do dziś, metoda Gilberta należy do historii nauki z tej przyczyny, że tylko ta pierwsza nadawała się do adaptacji dla sekwencjonujących robotów.

W pracowni Sangera sekwencjonowano po raz pierwszy na świecie „żywy” genom, wirusa Φ X 174 i mitochondrialny ludzki DNA. Drugiego Nobla dostał w 1980 roku razem z Walterem Gilbertem – obaj „zdążyli” wejść na to podium, żaden nie został „tym drugim”, a Sanger jest jedynym do dziś chemikiem z dwiema Nagrodami Nobla. Trzeci w tym samym roku, Paul Berg, uzyskał tę nagrodę za podwaliny inżynierii genetycznej, która bezpośrednio zawdzięcza swoje powstanie Frederickowi Sangerowi.

Sanger zdecydował się na emeryturę w 1983 roku. W 1993 roku otworzono w Cambridge Instytut Sangera, który odegrał pierwszorzędną rolę w oznaczaniu sekwencji ludzkiego DNA (2000).

W 2006 poszłam na spotkanie z Wally Gilbertem w Kawiarni „Czuły barbarzyńca”. Okazało się, że to TEN SAM Gilbert. W Warszawie robił zdjęcia w nieprodukującej fabryce Norblina. Potem w Krakowie miał wystawę zdjęć właściwie abstrakcyjnych. Te abstrakcje pokazuje i sprzedaje na całym świecie.

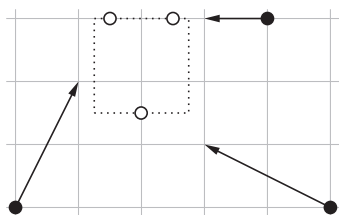
http://www.youtube.com/watch?v=C0s6-dYhPB8&feature=player_embedded

Magdalena FIKUS





Informatyczny kącik olimpijski (69): Świetliki



Czarne kropki to trzy świetliki znajdujące się w chwili $t = 0$ w punktach $(0, 0)$, $(5, 0)$ i $(4, 3)$, poruszające się z prędkościami $(1, 2)$, $(-2, 1)$ i $(-1, 0)$. Zaznaczono też kwadrat o minimalnym boku $1,5$, w którym znajdują się świetliki w chwili $t = 1,5$.



Rozwiązanie zadania F 849.

Początkowo obręcz ślizga się po parkiecie. Jej ruch jest ruchem jednostajnie opóźnionym wskutek działania stałej siły tarcia $F_T = \mu mg$ skierowanej przeciwnie do kierunku ruchu, a jej ruch obrotowy także jest jednostajnie opóźniony wskutek działania stałego momentu siły tarcia $M_T = \mu mgR$. Obręcz zatrzyma się zatem w ruchu postępowym po czasie

$$\Delta t_1 = \frac{v_0}{\mu g},$$

przebywszy w tym czasie drogę

$$d_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g},$$

a jej prędkość kątowa będzie wynosiła wówczas

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{M_T}{I} \Delta t_1 = \omega_0 - \frac{V_0}{R}.$$

Od tego momentu obręcz będzie poruszać się z przyspieszeniem wywołanym siłą tarcia, a ruch obrotowy będzie nadal spowalniał. Dla dostatecznie dużych ω_0 prędkość punktu styczności obręczy z podłożem będzie różna od zera i obręcz wróci do baletnicy w czasie $\Delta t_2 = \Delta t_1$ z prędkością kątową

$$\omega_2 = \omega_0 - \frac{2V_0}{R};$$

prędkość punktu styczności z podłożem będzie wtedy równa $-v_0 + R\omega_2 = R\omega_0 - 3v_0$. Oznacza to, że szukany warunek to

$$\frac{\omega_0}{v_0} \geq \frac{3}{R}.$$

Dla mniejszych wartości ω_0 przy zerowaniu się prędkości punktu styczności z podłożem rozpocznie się ruch bez poślizgu; ruch ten będzie się odbywał ze stałą prędkością i warunek $\Delta t_1 = \Delta t_2$ nie będzie spełniony.



Tym razem w kąciku zadanie *Świetliki*, z którym mierzyli się finaliści Potyczek Algorytmicznych 2013. Po płaszczyźnie porusza się n świetlików. Dla każdego z owadów znamy punkt płaszczyzny, w którym znajdował się początkowo, oraz wiemy, że porusza się on ze stałym (i znanym nam) wektorem prędkości. Należy wyznaczyć minimalną długość, jaką może mieć bok kwadratu, który będzie w pewnej chwili zawierał wszystkie świetliki, przy czym boki kwadratu muszą być ustawione równoległe do osi układu współrzędnych (rysunek). Oznaczmy jeszcze przez M ograniczenie na zakres liczb danych w zadaniu.

Zacznijmy od wykorzystania technik standardowych przy tego typu zadaniach. Bok kwadratu możemy wyznaczyć, stosując wyszukiwanie binarne, zatem $O(\log M)$ razy będziemy musieli odpowiedzieć na pytanie „czy istnieje taka chwila t , że wszystkie świetliki zmieszczą się w kwadracie o boku d ?”.

Kolejne standardowe spostrzeżenie: istnieje optymalne rozwiązanie, w którym skrajnie lewy świetlik znajduje się na lewym boku kwadratu. Dla ustalonego świetlika i możemy w czasie $O(n)$ wyznaczyć przedział czasu, w którym znajduje się on po lewej stronie od każdego innego świetlika. Ograniczywszy się do tego przedziału czasu, unieruchamiamy tego świetlika, zaczepiając w nim układ współrzędnych (tzn. odejmujemy jego prędkość i pozycję od prędkości i pozycji wszystkich pozostałych świetlików).

Znamy bok i położenie kwadratu w poziomie, musimy teraz sprawdzić, czy istnieje taka chwila t i takie jego położenie w pionie y ($0 \leq y \leq d$), które zawiera wszystkie owady. Nietrudno się przekonać, że dla ustalonego świetlika zbiór punktów (t, y) , dla których świetlik ten znajduje się w chwili t w kwadracie przesuniętym o y , jest równoległobokiem. A konkretnie: jeśli świetlik j znajduje się w punkcie (d, y_1) w chwili t_1 , a w punkcie $(0, y_2)$ w chwili t_2 , to wierzchołkami szukanego równoległoboku są punkty (t_1, y_1) , $(t_1, y_1 + d)$, $(t_2, y_2 + d)$ i (t_2, y_2) . Wyznaczenie równoległoboków dla wszystkich owadów zajmie nam czas $O(n)$, a następnie sprawdzenie, czy ich przecięcie jest niepuste – czas $O(n \log n)$.

Ostatecznie nasze rozwiązanie działa w czasie $O(n^2 \log n \log M)$.

Istnieje szybsze (i prostsze do zaimplementowania) rozwiązanie działające w czasie $O(n \log M)$, wymaga ono jednak pewnej nie do końca oczywistej obserwacji. Oznaczmy przez $F(t)$ najmniejszy bok kwadratu dla ustalonej chwili t . Czy możemy coś powiedzieć o funkcji F ? Jasne jest, że powyżej pewnej granicy wraz ze wzrostem wartości bezwzględnej argumentu t funkcja F będzie rosła. Okazuje się, że możemy powiedzieć dużo więcej – funkcja F jest wypukła. Dzięki temu możemy znaleźć jej minimum, stosując *wyszukiwanie ternarne*, co będzie wymagało obliczenia jej wartości w $O(\log M)$ punktach. Dla ustalonego t obliczenie $F(t)$ jest bardzo proste (wyznaczamy pozycje świetlików i znajdujemy prostokąt otaczający) i wymaga czasu $O(n)$. Musimy tylko pamiętać, że rozwiązaniem zadania jest $F(0)$, jeśli minimum F znajdzie się w punkcie $t < 0$.

Pozostaje udowodnić kluczowy fakt o wypukłości funkcji F . Oznaczmy przez $F_{i,j}(t)$ rozmiar najmniejszego kwadratu zawierającego świetliki i oraz j . Ponieważ w każdej chwili wynikowy kwadrat opiera się na dwóch świetlikach po jego przeciwnych stronach, to

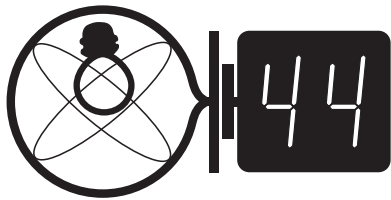
$$F(t) = \max_{i,j} F_{i,j}(t).$$

Funkcja $F_{i,j}(t)$ jest wypukła (łatwo to zobaczyć, jeśli znów zaczepimy układ współrzędnych w świetliku i). Tak więc funkcja F jest również wypukła, jako maksimum funkcji wypukłych.

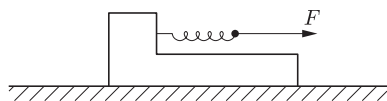
Tomasz IDZIASZEK

Skrót regulaminu

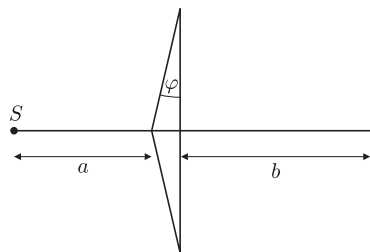
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



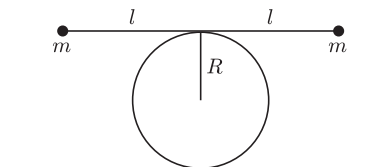
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2014



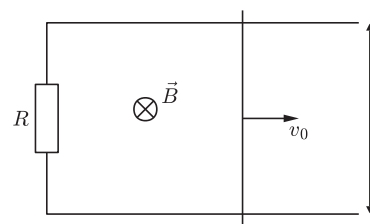
Rys. 1



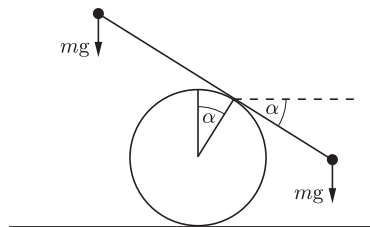
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Zadania z fizyki nr 572, 573

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

572. Dynamometr ciągnięty jest po gładkim poziomym stole siłą $F = 4N$ (rys. 1). Co wskazuje dynamometr, jeżeli masa sprężyny równa jest masie obudowy? Dynamometr został wyskalowany w położeniu poziomym.

573. Na bipryzmat przedstawiony na rysunku 2 pada światło monochromatyczne ze źródła punkowego S . Na ekranie powstaje obraz interferencyjny. Znaleźć odległość pierwszego maksimum interferencyjnego od środka ekranu. Dane są: a – odległość źródła od bipryzmatu, b – odległość bipryzmatu od ekranu, φ – kąt łamiący każdego z przyzmatów, który jest bardzo mały, n – współczynnik załamania szkła, z którego wykonany jest bipryzmat, λ – długość fali światła emitowanego przez źródło. Promienie interferujące padają na ekran prawie prostopadle.

Wskazówka. Należy wykazać, że każdy z przyzmatów daje pozorny obraz źródła światła, którego przybliżona odległość od przyzmatu jest taka sama jak źródła.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2013

Przypominamy treść zadań:

564. Na nieruchomym walcu o promieniu R leży nieważki pręt o długości $2l$, na którego końcach znajdują się małe kulki o masach m (rys. 3). Znaleźć okres małych drgań pręta wokół położenia równowagi. Nie ma poślizgu między walcem a prętem.

565. Po równoległych, poziomych szynach spiętych oporem R może poruszać się bez tarcia pręt o masie m . Układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B . Linie pola magnetycznego są prostopadle do płaszczyzny szyn (rys. 4). Odległość między szynami wynosi l . W chwili początkowej prętowi nadano prędkość v_0 , równoległą do szyn. Jaką drogę przebędzie pręt do momentu zatrzymania? Jaki ładunek przepłynie w tym czasie przez opór R ? Opór szyn i pręta zaniedbujemy.

564. Po wychyleniu pręta o kąt α z położenia równowagi (rys. 5) działa na niego moment skręcający do położenia równowagi $M = mg[(l - R\alpha) - (l + R\alpha)] \cos \alpha$. Dla małych wychyleń z położenia równowagi $M \approx -2mgR\alpha$. Ponieważ nie ma poślizgu, ruch pręta jest czystym obrotem względem chwilowej osi przechodzącej przez punkt styczności pręta z walcem, a jego moment bezwładności względem tej osi to $I \approx 2ml^2$. Równanie ruchu obrotowego ma postać $I\varepsilon = M$, gdzie $\varepsilon = d^2\alpha/dt^2$ jest przyspieszeniem kątowym. Jest to równanie ruchu harmonicznego: $d^2\alpha/dt^2 + GR\alpha/l^2 = 0$. Częstość drgań wynosi $\omega = gR/l^2$, szukany okres drgań $T = 2\pi l/\sqrt{gR}$.

565. W poruszającym się pręcie indukuje się siła elektromotoryczna indukcji. Jej wartość, zgodnie z prawem Faradaya, wynosi $\varepsilon = Blv$, gdzie v jest chwilową prędkością pręta. Na pręt, w którym płynie prąd indukcyjny, działa hamująca siła elektrodynamiczna o wartości $F = B^2l^2v/R$. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki $F\Delta t = \Delta p$ i możemy napisać: $B^2l^2v\Delta t/R = m\Delta v$. Wyrażenie $\Delta s = v\Delta t$ jest drogą przebytą w przedziale czasu Δt . Po zsumowaniu otrzymujemy $B^2l^2s/R = mv_0$. Szukana droga przebyta przez pręt wynosi $s = mv_0R/(B^2l^2)$. Chwilowe natężenie prądu indukcyjnego w obwodzie dane jest wzorem $I = Bvl/R$, a z definicji natężenia prądu $I = \Delta Q/\Delta t$, gdzie ΔQ jest ładunkiem przepływającym w czasie Δt przez opór. Stąd dla krótkich przedziałów czasowych mamy $\Delta Q = Bl\Delta s/R$. Po zsumowaniu i uwzględnieniu poprzednich wyników otrzymujemy szukany ładunek równy $Q = mv_0/(Bl)$.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po 541 zadaniach

Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	2 – 43,72
Krzysztof Magiera (Łosiów)	2 – 37,67
Tomasz Rudny (Warszawa)	35,20
Dariusz Wilk (Rzeszów)	26,57
Jacek Konieczny (Poznań)	24,15
Tomasz Wietecha (Tarnów)	9 – 17,44
Marian Łupieżowiec (Gliwice)	1 – 12,68

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2011–2013 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 11 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (11), T. Wietecha (9), J. Łazuka, M. Wójcicki, J. Witkowski (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: M. Koźlik, J. Lipkowski, K. Magiera, A. Nowogrodzki, P. Perkowski, J. Piotrowski;

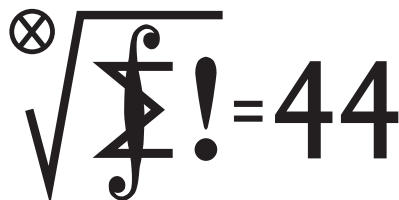
„jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Kapcia, M. Łącki, M. Łupieżowiec, B. Mikielwicz, L. Motyka, R. Musiał, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.

W ostatnich latach zakres umiejętności matematycznych nabywanych w liceum bardzo się skurczył, w szczególności dotyczy to rachunku różniczkowego. Dlatego wszystkie zadania z fizyki zaproponowane w ubiegłym roku w Klubie 44F można było rozwiązać, posługując się elementarną matematyką. Wymagało to czasami wyboru odpowiedniego układu odniesienia. Na przykład, w zadaniu 543, gdzie należało wyznaczyć naprężenie ograniczającej ruch biegnącego psa linki zakończonej pierścieniem przesuwającym się po drucie, wygodnie było wybrać układ odniesienia związany z pierścieniem, co pozwalało sprowadzić problem do ruchu jednego ciała. Podobnie w zadaniu 561 z kondensatorem w polu magnetycznym najwygodniej było prowadzić rozważania w układzie odniesienia, w którym nie ma pola elektrycznego. Niekiedy potrzebny był sprytny pomysł, jak w zadaniu 546 z wodą wyciekającą spod naczynia. Okazuje się jednak, że większość uczestników ligi rachunkiem różniczkowym i całkowym posługuje się biegle, toteż przysyłane rozwiązania często różniły się od firmowych – i były bardziej pracowite.

W konkurencji „najwyższy stopień trudności” pierwsze miejsce ($WT = 2,7$) zajęło zadanie 553 (ładowanie kondensatora przez diodę o znanej charakterystyce). Błędy były tu dosyć urozmaiczone, najczęściej nie uwzględniano faktu, że podczas pierwszego etapu ładowania na diodzie jest niezerowe napięcie. Zaskoczeniem był stosunkowo wysoki stopień trudności ($WT = 2,44$) zadania 554 (zsuwanie się pierścienia z gumowego kabla), gdzie w kilku rozwiązaniach nie uwzględniono w bilansie energetycznym zmiany energii sprężystości kabla rozciąganego podczas ruchu pierścienia.

Na szczególne uznanie zasługuje sposób prezentacji rozumowań przez Tomasza Wietechę, który przysłał propozycje rozwiązań wszystkich zadań, konkurując w poszczególnych seriach o palmę pierwszeństwa z Andrzejem Idzikiem i Michałem Koźlikiem.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2014

Zadania z matematyki nr 675, 676

Redaguje Marcin E. KUCZMA

675. Alfabet liczy 24 litery; dwie z nich to alfa oraz omega. Spośród wszystkich słów (ciągów liter) długości n wybieramy losowo jedno. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n , dla której bardziej prawdopodobne jest wylosowanie słowa, w którym litery alfa i omega co najmniej raz sąsiadują, niż słowa bez tej własności.

676. W trójkącie o bokach długości a, b, c , o wszystkich kątach wewnętrznych mniejszych od 120° , znajduje się punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest minimalna i wynosi d . Dowieść, że zachodzi równość $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)$.

Zadanie 676 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2013

Przypominamy treść zadań:

667. Kwadratowa plansza o rozmiarach $n \times n$ ma pola pokolorowane jak szachownica; n jest ustaloną liczbą parzystą. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu wybieramy dowolny prostokąt, złożony z pól planszy, i zmieniamy kolory wszystkich pól w obrębie tego prostokąta (białe na czarne, czarne na białe). Wyznaczyć najmniejszą liczbę ruchów wystarczającą, by wszystkie pola planszy uzyskały jednakowy kolor.

668. Czy istnieje podzbiór właściwy zbioru liczb wymiernych dodatnich, w którym wykonalne są działania mnożenia i dzielenia, nie zawierający się w żadnym innym podzbiorku właściwym zbioru liczb wymiernych dodatnich, w którym wykonalne są powyższe działania?

667. Rozważamy pola brzegowe (przylegające co najmniej jednym bokiem do brzegu szachownicy). Zliczamy pary sąsiadujących pól brzegowych, mających różne kolory. Na starcie liczba takich par wynosi $4(n - 1)$; w stanie docelowym wynosi 0. Jeden ruch może zmniejszyć liczbę takich par co najwyżej o 4. Zatem liczba ruchów, po których plansza może stać się jednokolorowa, jest nie mniejsza niż $n - 1$.



Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
 po zakończeniu sezonu
 (roku szkolnego) 2012/13

Rami Marcin Ayoush	–	41,55
Adam Dzedzej	–	1–40,33
Marek Spychała	–	1–39,37
Janusz Fiett	–	38,75
Andrzej Idzik	–	1–37,70
Marcin Małogrosz	–	37,48
Wojciech Maciak	–	36,72
Zbigniew Sewartowski	–	1–35,45
Jędrzej Garnek	–	1–32,90
Tomasz Kochanek	–	32,40
Grzegorz Karpowicz	–	1–31,51
Janusz Olszewski	–	14–27,53
Jerzy Witkowski	–	5–27,02
Paweł Duch	–	26,60
Tomasz Wietecha	–	9–26,56
Michał Koźlik	–	26,46
Stanisław Bednarek	–	25,92
Franciszek Salezy Sikorski	–	1–24,69
Michał Miodek	–	1–24,39
Wojciech Tobiś	–	21,08
Bartłomiej Dyda	–	5–20,18
Janusz Wojtal	–	16,17

Legenda (przykładowo): stan konta 9–26,56 oznacza, że uczestnik już dziewięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziesiątej) rundzie ma 26,56 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 15 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2011, 2012 lub 2013.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (11), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (14), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (9), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczański, M. Adamaszek, P. Kubit (5), J. Cisko (10), W. Bednarek (6), D. Kurpiel, P. Najman (6), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”:

Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, Z. Skalik, S. Solecik, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

Pola narożne mają na starcie różne kolory, więc w którymś ruchu musimy użyć prostokąta, zawierającego jakieś pole narożne. Wszelako taki ruch zmniejszy rozważaną wielkość co najwyżej o 2. W takim razie $n - 1$ ruchów nie wystarczy do uzyskania żądanego celu, potrzeba co najmniej n ruchów.

Pozostaje zauważyć, że n ruchów faktycznie już wystarczy: w początkowych $n/2$ ruchach zmieniamy kolory w co drugim wierszu, wszystkie kolumny stają się jednokolorowe (plansza „w zebry”). W kolejnych $n/2$ ruchach zmieniamy kolory w co drugiej kolumnie i gotowe.

668. Maksymalna podgrupa właściwa grupy mnożeniowej liczb wymiernych dodatnich – tak się w języku algebry nazywa obiekt, którego istnienie należy rozstrzygnąć. Podamy przykład takiej podgrupy. Każda liczba $q \in \mathbb{Q}^+$ (wymierna dodatnia) daje się przedstawić w postaci

$$(1) \quad q = 2^k \cdot \frac{\ell}{m}; \quad k, \ell, m \text{ całkowite; } \ell, m > 0 \text{ nieparzyste;}$$

wykładnik $k \in \mathbb{Z}$ jest wyznaczony jednoznacznie.

Określamy zbiór G , zaliczając doń te liczby powyższej postaci, które mają wykładnik k parzysty. Nie wszystkie liczby $q \in \mathbb{Q}^+$ się tu znalazły, więc G jest podzbiorem właściwym zbioru \mathbb{Q}^+ . Jest on zamknięty względem działań mnożenia i dzielenia (tworzy podgrupę grupy \mathbb{Q}^+) – to jasne. Trzeba jeszcze wykazać, że jeżeli \tilde{G} jest podgrupą grupy \mathbb{Q}^+ , zawierającą G i nie identyczną z G , to $\tilde{G} = \mathbb{Q}^+$.

Wybermy więc i ustalmy dowolny element $q_0 \in \tilde{G} \setminus G$. Jest to liczba postaci (1):

$$q_0 = 2^{k_0} \cdot \frac{\ell_0}{m_0}; \quad \ell_0, m_0 > 0 \text{ nieparzyste,}$$

przy czym wykładnik k_0 jest nieparzysty. Wszystkie iloczyny q_0q , gdzie $q \in G$, należą do \tilde{G} . Pisząc q w postaci (1), z parzystym k , mamy

$$(2) \quad q_0q = 2^{k_0+k} \cdot \frac{\ell_0\ell}{m_0m}.$$

Gdy k przebiega zbiór wszystkich liczb parzystych, $k_0 + k$ przebiega zbiór wszystkich liczb nieparzystych. Ponadto każdy ułamek L/M o liczniku i mianowniku dodatnim nieparzystym możemy uzyskać jako drugi czynnik przedstawienia (2), biorąc $\ell = Lm_0$, $m = M\ell_0$.

To znaczy, że w zbiorze \tilde{G} znajdują się wszystkie liczby wymierne dodatnie z nieparzystą potęgą dwójki. Liczby z parzystą potęgą dwójki, czyli elementy zbioru G , też się w \tilde{G} znajdują. Zatem, istotnie, $\tilde{G} = \mathbb{Q}^+$.

[Nieco ogólniej, można było wziąć dowolne liczby pierwsze p, p' (różne lub nie) i określić G jako zbiór wszystkich ułamków $p^k \cdot \ell/m$, gdzie $\ell, m > 0$ są niepodzielne przez p , zaś wykładnik $k \in \mathbb{Z}$ jest podzielny przez p' ; takie ułamki również tworzą maksymalną podgrupę właściwą (w podanym przykładzie przyjęliśmy $p = p' = 2$).]

* * *

Odnotujmy małe odświeżenie w *Regulamini*: rozwiązania zadań oraz wszelką korespondencję w sprawach ligi można przysyłać, jak dotychczas, pocztą tradycyjną (do czego zachęcamy); można też pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (co zresztą część uczestników już od jakiegoś czasu robi, *Regulamin* zaś goni życie; wprowadzony retusz jedynie afirmuje istniejący stan rzeczy).

* * *

Geometria w lidze coś słaba. Gdy przejrzeć zadania z kilkunastu niedawnych numerów (oraz ich rozwiązania), rzuci się w oczy, że te geometryczne przedziwnie łatwe. W czym rzecz? Nieodżałowany trener Kazimierz Górski zwykł mawiać: tak się gra, jak przeciwnik pozwala.

Otóż wydaje się, że upodobania geometryczne u regularnych uczestników ligi znajdują się na dalszym planie. Regularnych – kto to? Grono uczestników,

„jednokrotni”:

T. Biegański, W. Boratyński,
M. Czerniakowska, A. Dzedzej,
P. Figurny, M. Fiszer, Ł. Garncarek,
J. Garnek, L. Gasiński, A. Gluza,
T. Grzesiak, K. Hryniewiecki,
A. Idzik, K. Jachacy, M. Jastrzębski,
A. Jóźwik, G. Karpowicz, J. Klisowski,
J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz,
T. Kulpa, A. Langer, R. Latała,
P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki,
M. Łupieżowiec, J. Mańdziuk,
B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga,
R. Mazurek, H. Mikołajczak,
M. Mikucki, J. Milczarek, M. Miodek,
R. Mitraszewski, M. Mostowski,
W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikuła,
B. Piotrowska, W. Pompe,
M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel,
Z. Sewartowski, F. S. Sikorski,
R. Słowik, A. Smolczyk, P. Sobczak,
M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk,
W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach,
K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus,
K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Zadanie 648 [$F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \Rightarrow$ ciąg $(F_{n+2}^{1/n})$ jest malejący] ($WT = 2,68$; $LPR = 7$). Dla rutyniarzy (**J. Cisło**, **M. Małogrosz**, **J. Olszewski**, **W. Bednarek**, **K. Kamiński**, a także redaktor ligi w rozwiązaniu firmowym) było jasne, że należy użyć wzoru Bineta

$$\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2, \quad F_n = (\varphi^n - (-\varphi)^{-n})/\sqrt{5},$$

i dalej prowadzić stosowne szacowania, stopniowo redukując tezę zadania – mniej lub bardziej zręcznie – do prostszych nierówności. To teraz popatrzmy, jak na tym tle wygląda rozwiązanie, które przysłała **Karolina Cynk**, uczennica liceum (niestety praca otrzymała ocenę nieco niższą od maksymalnej, z powodu usterki, o której niżej).

Dowodzona nierówność

$$(1) \quad F_{n+2}^{n+1} > F_{n+3}^n$$

wynika dla n nieparzystych wprost stąd, że $F_{n+2} > \varphi^{n+2}/\sqrt{5}$, $F_{n+3} < \varphi^{n+3}/\sqrt{5}$. Ciekawy moment następuje teraz: dla n parzystych Autorka rezygnuje z Bineta i dowodzi (1) przez indukcję ze skokiem 2, startując od $n = 2$ ($F_4^3 = 27 > F_5^2 = 25$); dla parzystego $n > 2$ zakłada indukcyjnie, że $F_n^{n-1} > F_{n+1}^{n-2}$, po czym korzysta (tu jest istota pomysłu!) z dwóch nierówności pomocniczych:

$$(2) \quad F_{n+1}F_{n+2} > F_nF_{n+3} \quad \text{oraz} \quad F_{n+2}^3 > F_nF_{n+3}^2$$

– wystarczy podnieść pierwszą z nich do potęgi $n - 2$, pomnożyć przez drugą i przez tę z założenia indukcyjnego, by dostać tezę (1). Pierwsza nierówność (2) jest znana i łatwa (lewa strona jest o 1 większa od prawej); drugą można zaś uzasadnić na przykład tak:

$$\begin{aligned} F_{n+2}^3 - F_nF_{n+3}^2 &= \\ &= F_{n+2}^3 - (F_{n+2} - F_{n+1})(F_{n+2} + F_{n+1})^2 = \\ &= F_{n+1}^3 - F_{n+2}F_{n+1}(F_{n+2} - F_{n+1}) = \\ &= F_{n+1}(F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2}) = F_{n+1} \end{aligned}$$

rzecz jasna, ewoluuje – jedni z wolna wycofują się z zabawy, nowi dochodzą, ale istnieje wyraźny trzon sympatycznego grona tych, którzy są z nami stale, od dość dawna lub od bardzo dawna (maksimum stażu wynosi tyle, co wiek ligi) i nie wydają się znużeni. I widać, że w większości czują się zdecydowanie lepiej w tematyce niegeometrycznej.

W każdym numerze jedno zadanie pochodzi z nadsyłanych propozycji. Algebra i analiza są tam reprezentowane bardzo mocno; liczby całkowite i szeroko rozumiana kombinatoryka – też nie najgorzej. Okręgów, trójkątów, przekształceń płaszczyzny – raczej nie widać. Te zadania musi wyszukiwać redaktor ligi. Gdy więc decyduje się zamieścić jedno z proponowanych zadań algebraicznych, ono zaś sprawia wrażenie rzetelnie trudnego, trzeba je dopełnić do pary zadaniem znacznie łatwiejszym, no i z odmiennej tematyki. Korelacja: [geometria \leftrightarrow łatwa] staje się nieunikniona...

Popatrzmy niżej. Do corocznego przeglądu zostały wybrane zadania ciekawsze i trudniejsze (zręczne rozwiązania, znaczące uogólnienia, wysoki współczynnik trudności, niewielka liczba rozwiązań). Są tu wyłącznie zadania o numerach parzystych, a więc proponowane przez Czytelników – i jest to prawie wyłącznie algebra z analizą (zadanie 658, mimo formalnie geometrycznej treści, to też czysta algebra).

(różnica w ostatnim nawiasie ma wartość 1, wobec parzystości n); w tym fragmencie była w pracy pomyłka – po jej poprawieniu rozumowanie przebiega prostotą wszystkie pozostałe!

Tomasz Wietecha wykazał nierówność (1) w obu przypadkach indukcyjnie, co jednak dla n nieparzystych okazało się bardziej uciążliwe niż skorzystanie ze wzoru Bineta.

Interesującą interpretację kombinatoryczną tezy zadania wskazał **Jerzy Cisło**: rozważamy macierze zero-jedynkowe o rozmiarach: n wierszy, $n+1$ kolumn. Lewa i prawa strona nierówności (1) – to odpowiednio liczba takich macierzy, w których nie ma dwóch jedynek jedna tuż nad drugą oraz liczba takich, gdzie nie ma dwóch jedynek jedna obok drugiej. W takiej macierzy jest mniej par klatek sąsiadujących pionowo niż par sąsiadujących poziomo, dlatego pierwszy z tych warunków jest „łatwiejszy” do spełnienia niż drugi. To przekonująca *agitacja* za słuszością tezy (1)... ale *wykazać* jej słuszość – to to samo, co zrobić zadanie.

Zadanie 650 [Ile maksymalnie wież można ustawić na szachownicy $n \times n$, by wśród dowolnych k wież były dwie, które się atakują?] ($WT = 2,51$; $LPR = 10$). Łatwo ustawić $n(k - 1)$ wież; wystarczy zapelnąć nimi prostokąt $n \times (k - 1)$. Więcej się nie da – chyba wszyscy rozwiązujący pokazali to prościej, niż rozwiązanie firmowe. Szczególnie urzekło nas takie oto, banalnie proste, rozumowanie (**J. Garnek**, **M. Małogrosz**, **J. Olszewski**): w pola pierwszego wiersza planszy wpisujemy kolejno liczby $[1, \dots, n]$; w pola drugiego wiersza: $[2, \dots, n, 1]$; i tak dalej, cyklicznie; ostatni wiersz: $[n, 1, \dots, n - 1]$; gdy na planszy postawimy więcej niż $n(k - 1)$ wież, to dla pewnego $r \in \{1, \dots, n\}$ w polach z wpisaną liczbą r znajdzie się więcej niż $k - 1$ wież; a więc co najmniej k wież; i żadne dwie z nich nie atakują się wzajemnie!

Zadanie **652** [$a, b, c > 0, n \geq 1 \Rightarrow \sum \frac{a^{n+1}}{a+b} \geq \sum \frac{a^n}{2}$] ($WT = 2,45; LPR = 13$). Użyte oznaczenie – to *sumy cykliczne* (na przykład lewą stronę nierówności należy odczytać jako $\frac{a^{n+1}}{a+b} + \frac{b^{n+1}}{b+c} + \frac{c^{n+1}}{c+a}$).

Rozwiązanie, które zaproponował **Witold Bednarek**, autor zadania (wydrukowane jako firmowe) wydało się prowadzącemu ligę tak trikowe, że zakwalifikował zadanie jako trudne. Jednakże – robione inną metodą – wcale się takim nie okazało, o czym świadczy spora liczba dobrych prac. We wszystkich (prawie) tych pracach istotne jest spostrzeżenie, że trójki (a, b, c) , $(a^{n-1}, b^{n-1}, c^{n-1})$ są jednakowo uporządkowane, więc w myśl twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych:

$$\sum a^n \geq \sum a^{n-1}b.$$

Rozumowanie, które z wykorzystaniem tego spostrzeżenia prowadzi do tezy zadania, było w każdej pracy inne (nierówności między średnimi, wypukłość, pochodne; rozbiecie na przypadki lub nie). Redaktor ligi wybrał po jednym pomysłem z kilku przeczytanych prac i teraz może z ich użyciem zaproponować takie rozwiązanie: dzięki łatwej do sprawdzenia nierówności $\frac{a(a-b)}{a+b} \geq \frac{a-b}{2}$ dla $a, b > 0$, jeśli L i P oznaczają lewą i prawą stronę nierówności danej do udowodnienia, to

$$\begin{aligned} L - P &= \sum \left(\frac{a^{n+1}}{a+b} - \frac{a^n}{2} \right) = \sum \frac{a^{n-1}}{2} \cdot \frac{a(a-b)}{a+b} \geq \\ &\geq \sum \frac{a^{n-1}}{2} \cdot \frac{a-b}{2} = \frac{1}{4} \left(\sum a^n - \sum a^{n-1}b \right) \geq 0 \end{aligned}$$

i gotowe. Rachunek w takiej dokładnie postaci nie pojawił się w żadnej pojedynczej pracy uczestnika – to emanacja mądrości zbiorowej.

A zmyślne rozwiązanie firmowe – czy ktoś znalazł? Ależ tak: **Janusz Olszewski**.

Zadanie **658** [Czworościan foremny o krawędzi a ; punkt P w odległościach d_1, \dots, d_4 od wierzchołków $\Rightarrow (a^2 + \sum d_i^2)^2 = 4(a^4 + \sum d_i^4)$] ($WT = 1,81; LPR = 11$). Pan **Tomasz Ordowski** przysłał to zadanie wraz z rozwiązaniem, zaznaczając, że autorem rozwiązania jest **Jerzy Cisło**. Zostało ono zamieszczone jako firmowe w numerze 7/2013. Przypomnijmy, że dowód polegał na umieszczeniu czworościanu w przestrzeni \mathbb{R}^4 , z wierzchołkami na osiach, wzięciu punktu P , leżącego w jednej trójwymiarowej hiperpłaszczyźnie z owymi wierzchołkami, i rachowaniu na jego współrzędnych; przy takim ujęciu rachunki mocno zyskują na prostocie (rachunki w pracach uczestników ligi nie wychodziły poza \mathbb{R}^3 i już nie były tak proste...).

Autor rozwiązania zauważył, że przenosi się ono na $(n-1)$ -wymiarowy sympleks foremny o krawędzi a w przestrzeni \mathbb{R}^{n-1} i dowolny punkt $P \in \mathbb{R}^{n-1}$ w odległościach d_1, \dots, d_n od wierzchołków; wystarczy umieścić sympleks w \mathbb{R}^n , z wierzchołkami na osiach, by dokładnie takim samym rachunkiem uzyskać wzór

$$(3) \quad (a^2 + d_1^2 + \dots + d_n^2)^2 = n(a^4 + d_1^4 + \dots + d_n^4)$$

(oba wymienieni autorzy wspólnie zajmowali się tym zagadnieniem jeszcze przed zaproponowaniem go jako zadania dla ligi).

Autor zadania wskazał nieco szerszy kontekst: n -wymiarowa objętość V_n sympleksu n -wymiarowego o wierzchołkach A_1, \dots, A_{n+1} jest dana znanym wzorem $V_n^2 = c_n \det M$, gdzie M jest macierzą $(n+2) \times (n+2)$, w postaci blokowej

$$M = \begin{bmatrix} 0 & J \\ J^T & K \end{bmatrix},$$

K to macierz $(n+1) \times (n+1)$ o wyrazach $|A_i A_j|^2$, $J = [1, \dots, 1]$, zaś $c_n = (-1)^{n+1} 2^{-n} (n!)^{-2}$. Gdy punkty A_1, \dots, A_{n+1} leżą w jednej $(n-1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyźnie, sympleks (zdegenerowany) ma objętość zerową ($\det M = 0$); gdy ponadto punkty A_1, \dots, A_n są wierzchołkami $(n-1)$ -wymiarowego sympleksu *foremnego*, a punkt $A_{n+1} = P$ leży w jego hiperpłaszczyźnie, w odległościach d_i od wierzchołków, równanie $\det M = 0$ prowadzi do wzoru (3).

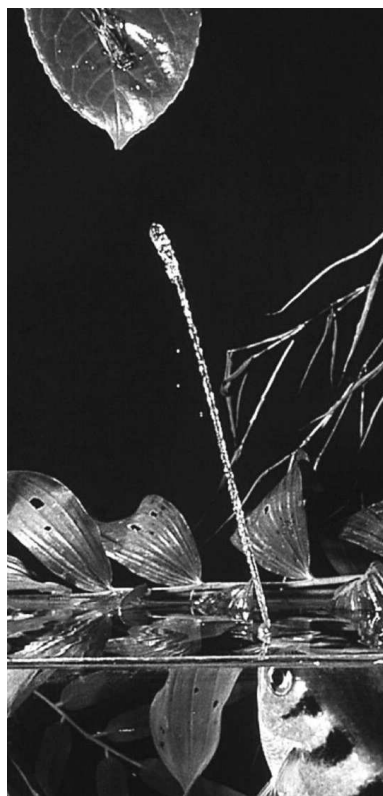
Wyprowadzenie wzoru $V_n^2 = c_n \det M$ (tzw. wyznacznik Cayleya–Mengera) można znaleźć na przykład pod www.mathpages.com/home/kmath664/kmath664.htm; dla $n = 3$ także w artykule *Siatka czworościanu* w numerze 9/2013 (przyp. redaktora ligi, który z niemalym zaciekawieniem wyczytał w zacytowanym materiale internetowym, że wzór ów dla $n = 3$ odkrył renesansowy malarz Piero della Francesca) (!).

Zadanie **662** [$x_0 > 0; x_{n+1} = x_n^2 / (e^{x_n} - 1); q_n = n(2 - nx_n) / \ln n; \lim q_n = ?$] ($WT = 2,84; LPR = 5$). Ten sam ciąg (x_n) był przedmiotem wcześniejszego zadania **654**, w którym należało obliczyć granicę $\lim nx_n$; wynik 2. Zatem ciąg $(2 - nx_n)$ dąży do zera; ale jak szybko? odpowiedź daje obliczenie granicy $\lim q_n = 4/3$; tak więc $2 - nx_n = O(\ln n/n)$. Kluczem do obliczenia był wzór Stolza – korzystali z niego wszyscy, którzy zadanie zrobili, a także rozwiązanie firmowe.

Paweł Najman proponował oba te obliczenia ($\lim nx_n = ?; \lim q_n = ?$) jako jedno zadanie. Rozbiecie na dwa zadania to już pomysł redaktora ligi. Rzecz w tym, że wzór Stolza jest dobrze znany zawodowym matematykom oraz studentom matematyki, ale niekoniecznie studentom innych kierunków oraz pozostałym Czytelnikom.

Granicę $\lim nx_n = 2$ można było wyznaczyć różnymi sposobami; zadanie 654 rozwiązało kilkanaście osób. Tam też *można było* użyć wzoru Stolza – i został on użyty w rozwiązaniu firmowym, wydrukowanym w tym samym numerze, co treść zadania 662 – właśnie po to, by obliczenie granicy ciągu (q_n) znalazło się w zasięgu szerszego grona uczestników ligi; by dać wszystkim oręż do ręki. Wystarczyło przed zaatakowaniem zadania 662 starannie zapoznać się z rozwiązaniem zadania 654, gdzie wzór Stolza został dokładnie sformułowany, a jego stosowanie – wyjaśnione. Mimo tak wyrazistej wskazówki, tylko pięciu uczestników uporało się z tym: **J. Garnek, K. Kamiński, M. Małogrosz, J. Olszewski, T. Wietecha**.

Naturalna skuteczność strzykania wyjaśniona



Występujące od Dalekiego Wschodu do Oceanii niewielkie ryby z rodziny strzelczykowatych (łac. *Toxotidae*), żyjące głównie w wodach lasów namorzynowych, wykształciły wyjątkowy sposób polowania. Odżywiają się owadami znajdującymi się na zwieszającej się nad wodą roślinności. Swoje ofiary zestrzeliwują za pomocą precyzyjnych strzyknięć wodą. Od wielu lat nie umiano jednak wyjaśnić, w jaki sposób udaje im się uzyskać strzyknięcie wystarczająco intensywne do oderwania bardzo mocno trzymających się podłoża owadów.

Rozwiązania poszukiwano w anatomicznej budowie ryby. Spodziewano się znaleźć coś podobnego do rozwiązań obecnych u kameleonów czy salamander. Zwierzęta te magazynują energię we włóknach kolagenowych, żeby ją uwolnić w jednej chwili, uzyskując przyspieszenia wyrzucanego języka dochodzące do 500 m/s^2 . Nic takiego jednak nie znaleziono.

Okazało się, że wyjaśnieniem jest dynamika strumienia wody już po jego wystrzeleniu. Czoło strumienia, zamiast zwalniać, jak można by było się tego spodziewać, przyspiesza. Zostało to ustalone za pomocą analizy kinematycznej zdjęć uzyskanych ultraszybką kamerą [1]. Żeby uzyskać zdjęcia bez błędu paralaksy, zaaranżowano sytuację, w której ryba ustawia się bokiem do kamery. Efekt uzyskano poprzez umieszczenie nad wodą szczeliny pozwalającej rybie widzieć obuocznie potencjalną zdobycz tylko przy pożądanym ustawieniu. Dzięki temu ryba sama przyjmuje pozycję optymalną do filmowania.

Zmierzona wylotowa prędkość strumienia wody wynosiła tylko około 2 m/s . W ciągu następnych 15 ms czoło przyspieszało z przyspieszeniem malejącym od $200\text{--}400 \text{ m/s}^2$ do zera, osiągając prędkość około 4 m/s . Jednocześnie wiodące zgrubienie strumienia stawało się coraz masywniejsze. Następnie występowała $20\text{--}30 \text{ ms}$ faza ruchu balistycznego zakończona uderzeniem w będący przedmiotem polowania kąsek (znajdujący się w odległości $97\text{--}153 \text{ mm}$ od miejsca strzyknięcia).

Taki ruch jest możliwy, tylko jeżeli ciągnący się za tym zgrubieniem wodny ogon porusza się szybciej od niego. Jest to związane z mechanizmem wyrzucania strumienia. Jego kolejne partie są poddawane coraz dłuższemu okresowi przyspieszenia. Strumień dzieli się na krople dzięki efektowi nazywanemu niestabilnością Plateau–Rayleigha. W jej wyniku stacjonarny walcowy strumień cieczy dzieli się na mniejsze części przy obecności jakiegokolwiek odstępstwa od idealnego walcowatego kształtu (które w praktyce zawsze występuje).

Współdziałanie tych dwóch mechanizmów, podziału na krople (głównie związanego z napięciem powierzchniowym) oraz kinematycznej kompresji (ang. *kinematic gathering*), daje odpowiednio dużą wiodącą kroplę (dobrze widoczną na górnym zdjęciu) poruszającą się odpowiednio szybko.

Lepsze zrozumienie tego mechanizmu może pomóc w rozwoju technologii posługiwania się strumieniami kropelek. Są one stosowane chociażby w drukarkach atramentowych. Również przemysłowe techniki malarskie oparte są na natryskiwaniu farby. Dla tego typu procesów nadal nie mamy pełnego analitycznego opisu. Posługujemy się rozważaniami modelowymi. Każdy dodatkowy zrozumiany element układanki może pomóc.

Piotr ZALEWSKI

[1] A. Vailati, L. Zinnato, R. Cerbino, *How Archer Fish Achieve a Powerful Impact: Hydrodynamic Instability of a Pulsed Jet in Toxotes Jaculatrix*, PLoS ONE, DOI: 10.1371/journal.pone.0047867.

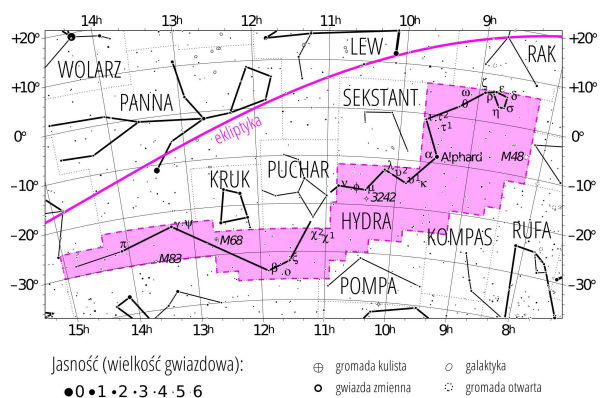
Prosto z nieba: Szybkie błyski radiowe

Podczas gdy wydawało się, że Wszechświat już nas niczym nie zaskoczy, a astronomowie „szlifują” tylko dawno zaakceptowane teorie, dodając tu i ówdzie drobne szczegóły, przegląd nieba przeprowadzony przez zespół australijskiego radioteleskopu Parkesa zarejestrował coś zupełnie niespodziewanego. Rutynowe poszukiwania pulsarów doprowadziło do odkrycia czterech różnych, bardzo krótkich błysków (czas trwania rzędu milisekund), nazwanych – jakżeby inaczej – szybkimi błyskami radiowymi (ang. *fast radio bursts*). Badacze twierdzą, że można wykluczyć ziemskie pochodzenie sygnałów. Źródła położone są z dala od płaszczyzny Galaktyki, a modele rozchodzenia się sygnału w przestrzeni międzygwiazdowej (ang. *dispersion measure*, „rozmywanie się” impulsu promieniowania zależne od ilości elektronów, które znajdują się na drodze od źródła do detektora) sugerują, że źródła błysków znajdują się w kosmologicznej odległości: poczerwienienie $z = 0,5-1$, czyli odległość 1,5–3 Gpc, są więc związane z emisją pokaźnej ilości energii. Cztery zjawiska pozwalają na zgrubne oszacowanie częstości ich występowania na całym niebie: 10^4 /dzień. Co jeszcze bardziej tajemnicze, w trakcie błysków radiowych satelity rentgenowskie i γ nie zarejestrowały

żadnej aktywności – nie ma zatem dowodu, że błyski radiowe są związane z np. błyskami γ . Nowy fenomen to gratka dla teoretyków, którzy w ostatnich miesiącach zaproponowali wiele modeli tłumaczących szybkie błyski. Przyczyną może zatem być układ podwójny zderzających się gwiazd neutronowych, w którym uwolnienie pola magnetycznego gwiazd skutkuje radiową erupcją. W podobny sposób w innym modelu zapadająca się do czarnej dziury masywna i szybko rotująca gwiazda neutronowa „pozbywa się włosów” pola magnetycznego (model ten został nazwany *blitzarem*). Inni badacze wyobrażają sobie, że szybki błysk jest skutkiem wybuchu na powierzchni magnetara, gwiazdy neutronowej o bardzo silnym polu magnetycznym, a jeszcze inni, że obserwacje można wytłumaczyć zlewaniem się układu podwójnego białych karłów.

Jeśli błyski istotnie pochodzą spoza Galaktyki, będą kolejną ciekawą, obok błysków γ , grupą obiektów kataklizmicznych. Oprócz wyjaśnienia samej istoty zjawiska interesujące wydaje się także proponowane wykorzystanie ich do próbkowania zawartości przestrzeni międzygalaktycznej i pomiarów ilości barionów w lokalnym Wszechświecie.

Michał BEJGER



Gwiazdozbiór Hydry. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

Alphard znajduje się na fladze Brazylii, symbolizując jeden ze stanów, Mato Grosso do Sul.



Niebo jak własna kieszeń: Luty

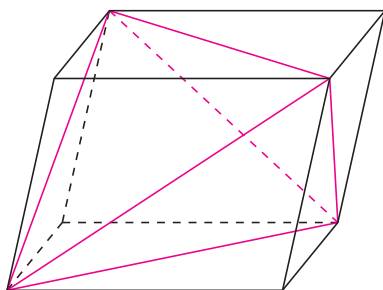
Gwiazdozbiór Hydry (łac. *Hydra*) jest największym pod względem powierzchni pośród osiemdziesięciu ośmiu gwiazdozbiorów – w lutym widoczny wieczorami na południu, tuż pod ekliptyką oraz konstelacjami Panny i Lwa.

Hydra została opisana po raz pierwszy w czasach antycznych przez Ptolemeusza; nie należy jej mylić ze znajdującym się w okolicy południowego bieguna, mającym podobną nazwę, ale o wiele mniejszym Wężem Wodnym (łac. *Hydrus*), który zdaniem specjalistów astrozoologów jest rodzaju męskiego.

Hydra zajmuje ponad 1300 stopni kwadratowych, lecz zawiera tylko jedną jasną gwiazdę, Alphard (α Hydrae, $1,98^m$, arab. Samotna). Ów olbrzym typu K o masie około $3 M_{\odot}$ jest obiektem badań sejsmologów gwiazdowych, ponieważ obserwacje spektroskopowe i pomiary prędkości radialnych dowodzą pulsacji wielomodalnych, podobnych w charakterze do oscylacji typu słonecznego. Wśród obiektów bardziej odległych Hydra zawiera trzy obiekty Messiera, w tym piękną galaktykę spiralną Południowy Wiatraczek (M83), a także mgławicę planetarną NGC 3242, odkrytą przez Williama Herschela, zwaną „Duchem Jowisza” z powodu podobieństwa do tej planety (jasność $7,7^m$, rozmiar około $1'$ łuku, czyli nieco tylko większy od maksymalnego rozmiaru Jowisza, $50''$).

Luty nie obfituje w zjawiska meteorytowe – do dyspozycji mamy δ Leonidy, niezbyt aktywny rój o maksimum 24 II i radiantcie w gwiazdozbiórze Lwa (meteory te wiąże się z planetoidą Pan, należąca do grupy Apollo). Wśród planet warty obserwacji jest wspomniany wcześniej Jowisz ($-2,1^m$) w gwiazdozbiórze Bliźniąt, obok którego 10 II znajdzie się Księżyc (pełnia 14 II), 26 II rano nastąpi natomiast malownicza koniunkcja jasnej Wenus ($-4,3^m$) z sierpem Księżyca (gwiazdozbiór Strzelca). Obserwacje Saturna ($0,7^m$) i Marsa ($0,19^m$) należy prowadzić po północy, gdy planety te pojawiają się ponad wschodnim horyzontem odpowiednio w gwiazdozbiórach Wagi i Panny.

M. B.



Zadania 1, 2, 3 pochodzą odpowiednio z Obozu Naukowego po VIII Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów, z XLII OM oraz z XLIV OM.

Postaw na krawędzi!

Joanna JASZUŃSKA

Postawmy czworościan na krawędzi i przez każdą jego krawędź poprowadźmy płaszczyznę równoległą do przeciwległej krawędzi. Takich sześć płaszczyzn wyznacza *równoległościan opisany* na czworościanie (rysunek).

Również na odwrót, wybierając cztery wierzchołki dowolnego równoległościanu tak, by żadne dwa nie były połączone krawędzią, otrzymamy *czworościan wpisany*. Pozostałe cztery wierzchołki wyznaczają przystający czworościan, symetryczny względem środka równoległościanu.

Czworościan wpisany można uzyskać z równoległościanu, odcinając od niego cztery przystające naroża; podstawą każdego z nich jest połowa podstawy równoległościanu, a wysokością – wysokość równoległościanu. Stąd objętość czworościanu wpisanego równa jest $\frac{1}{3}$ objętości równoległościanu.

1. Dany jest czworościan foremny o krawędzi 1 oraz punkt P w jego wnętrzu. Suma odległości punktu P od krawędzi tego czworościanu jest równa s . Wykaż, że $s \geq \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

2. Czy istnieją czworościany S i T o następujących dwóch własnościach:
(a) objętość czworościanu S jest większa od objętości czworościanu T ;
(b) pole każdej ściany czworościanu S nie przekracza pola żadnej ściany czworościanu T ?

3. Rozstrzygnij, czy można obliczyć objętość czworościanu, znając pola jego czterech ścian oraz promień kuli opisanej.

Wzór Herona pozwala obliczyć pole trójkąta, gdy znamy długości jego boków. Zadanie 3 dotyczy jednego z możliwych uogólnień tego wzoru – więcej o tym w następnym *deltoidzie*.

Rozwiązania

R1. Równoległościanem opisanym na czworościanie foremnym o krawędzi 1 jest sześcian o krawędzi $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Suma odległości punktu P od dwóch przeciwległych krawędzi czworościanu jest nie mniejsza od sumy odległości P od zawierających je przeciwległych ścian sześcianu, która z kolei jest większa lub równa odległości pomiędzy takimi ścianami, czyli długości krawędzi sześcianu. Czworościan ma trzy pary przeciwległych krawędzi, stąd $s \geq \frac{3}{2}\sqrt{2}$. \square

R2. Tak, dla każdego czworościanu S zbudujemy czworościan T o żądanych własnościach. Niech $a > 0$ będzie taką liczbą, aby liczba $\frac{1}{2}a^2$ była większa od pola każdej ściany czworościanu S . Niech $b > 0$ będzie taką liczbą, aby liczba $\frac{1}{3}a^2b$ była mniejsza od objętości czworościanu S .

Niech T będzie czworościanem wpisanym w prostopadłościan o podstawie $a \times a$ i wysokości b . Objętość T równa jest $\frac{1}{3}a^2b$. Każdą ścianę czworościanu T można zrzutować na połowę podstawy prostopadłościanu, więc jej pole przekracza $\frac{1}{2}a^2$. Z definicji liczb a i b , czworościany S i T spełniają żądane warunki. \square

R3. Wykażemy, że nie można. Rozważmy czworościany C_1 i C_2 wpisane odpowiednio w prostopadłościany o wymiarach $\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ oraz $\sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$.

Promienie opisanych na nich kul to połowy głównych przekątnych prostopadłościanów, więc są one równe: $R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2+5+5} = \sqrt{3}$ oraz $R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{6+3+3} = \sqrt{3}$.

Z twierdzenia Pitagorasa, każda ściana czworościanu C_1 jest trójkątem o bokach $\sqrt{2+5} = \sqrt{7}$, $\sqrt{2+5} = \sqrt{7}$ oraz $\sqrt{5+5} = \sqrt{10}$. Wysokość takiego trójkąta, opuszczona na bok o długości $\sqrt{10}$, równa jest

$$\sqrt{7 - \frac{10}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Stąd pole każdej ze ścian czworościanu C_1 równe jest

$$\frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

Analogicznie pole każdej ściany czworościanu C_2 też równe jest $\frac{3}{2}\sqrt{5}$.

Czworościany C_1 i C_2 mają więc równe pola ścian i promienie kul opisanych. Tymczasem ich objętości są różne: $V_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{5}{3}\sqrt{2}$ oraz $V_2 = \frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot 3 \cdot 3 = \sqrt{6}$. \square

Zadania domowe

4. Wyznacz promień kuli wpisanej w krawędzie czworościanu foremnego o objętości 1.

5. Wykaż, że jeśli w pewnym czworościanie dwie pary przeciwległych krawędzi są prostopadłe, to również trzecia para jest prostopadła.

Wskazówka. Ściany równoległościanu opisanego są rombami.