delta

SPIS TREŚCI
NUMERU 11 (474)

Skojarzenia...
Tomasz Idziaszek str. 1

Informatyczny kącik olimpijski (66): Dwóch generałów
Tomasz Idziaszek str. 3

W grafach dwudzielnych jest łatwiej
Jakub Radoszewski str. 4

Ukryte skojarzenia
Karol Pokorski str. 6

Zadania str. 7

Superbolidy: obiekt czelabiński
Tadeusz J. Jopek str. 8

O naukowcach słów kilka
Magdalena Fikus str.10

Olimpiada Informatyczna 2013/2014 str.11

Aktualności str.15

Obliczenia: rachunki, dowody i gry
Filip Murlak str.16

Ze świata USOS. Część 2 – Każdy student nosi w kieszeni... komputer, czyli o Elektronicznej Legitymacji Studenckiej
Janina Mincer-Daszkiewicz str.20

Twierdzenie Morleya str.22

Klub 44 str.23

Prosto z nieba: Woda na Jowiszu?
Michał Bejger str.24

Niebo jak własna kieszeń: Listopad str.24

Teoria czy praktyka?
Joanna Jaszuńska str.25

W następnym numerze mucha

Drosophila melanogaster

rozwiązuje trudne problemy informatyczne

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nacz., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nacz., Piotr Zalewski.
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: `delta@mimuw.edu.pl` tel. 22-55-44-402.

Skład systemem TEX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA
Garmond Press: `www.garmondpress.pl`
Kolporter: `www.kolporter.com.pl`
Pol-Perfect: `www.polperfect.com.pl`
RUCH S.A.: `www.ruch.com.pl`, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:
Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie `www.prenumerata.ruch.com.pl`

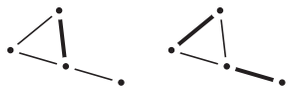
Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: `prenumerata@ruch.com.pl` lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7^{00}–18^{00}. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.
Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): `deltami.edu.pl`
Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

Warsaw Center of Mathematics and Computer Science
`wcmcs.edu.pl`

Skojarzenia...

Tomasz IDZIASZEK



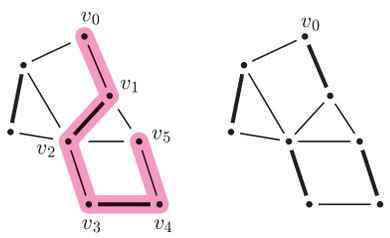
Rys. 1. Po lewej: przykładowe skojarzenie w grafie (pogrubiona krawędź). Po prawej: jedyne najliczniejsze skojarzenie w tym samym grafie.

Ten numer *Delty* jest zdominowany przez tematykę skojarzeń w grafach. Dla przypomnienia: graf nieskierowany to zbiór wierzchołków połączonych krawędziami, *skojarzenie* zaś w tym grafie to taki podzbiór krawędzi M, że każdy wierzchołek grafu jest incydentny z co najwyżej jedną krawędzią z M (rys. 1).

W wielu zastosowaniach interesować nas będzie wyznaczenie *najliczniejszego* skojarzenia w grafie, tzn. skojarzenia, które zawiera możliwie najwięcej krawędzi. W tym artykule pokażemy, jak znajdować takie skojarzenia.

Nasze algorytmy będą działały metodą przyrostową: dla danego grafu G i wyróżnionego w nim skojarzenia M będą znajdować skojarzenie o jedną krawędź większe bądź też będą stwierdzać, że M jest już najliczniejszym skojarzeniem. W jaki sposób można powiększyć skojarzenie? Zauważmy, że jeśli w grafie istnieją dwa nieskojarzone wierzchołki połączone krawędzią, to można tę krawędź dodać do skojarzenia. Pomysł ten można uogólnić: jeśli w grafie istnieją dwa nieskojarzone wierzchołki v_0, v_{2k+1} połączone ścieżką, na której dokładnie co druga krawędź jest skojarzona, tzn. ścieżką

$$v_0 — v_1 — v_2 — \ldots — v_{2k+1}, \qquad v_i v_{i+1} \in M \text{ jeśli } i \text{ jest nieparzyste},$$



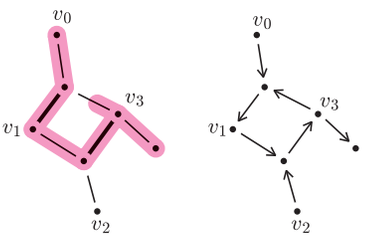
Rys. 2. Graf z wyróżnioną ścieżką powiększającą skojarzenie (kolor) oraz graf po powiększeniu skojarzenia wzdłuż tej ścieżki.

to można wyrzucić ze skojarzenia k krawędzi $v_i v_{i+1}$ dla i nieparzystego i dorzucić do niego $k+1$ krawędzi $v_i v_{i+1}$ dla i parzystego (rys. 2). Taką ścieżkę, wzdłuż której powiększamy skojarzenie, nazywamy *ścieżką powiększającą* to skojarzenie. Jasne jest, że jeśli taka ścieżka w grafie istnieje, to możemy powiększyć skojarzenie. Okazuje się, że implikacja w przeciwną stronę również zachodzi i jest tezą twierdzenia sformułowanego i udowodnionego przez francuskiego matematyka Claude'a Berge'a:

Skojarzenie w grafie jest najliczniejsze wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje ścieżka powiększająca to skojarzenie.

Tak więc to, czego potrzebujemy, to procedura znajdowania ścieżki powiększającej lub stwierdzania, że takowa nie istnieje. Dla ustalenia uwagi możemy skupić się na poszukiwaniu ścieżki powiększającej zaczynającej się w ustalonym nieskojarzonym wierzchołku v_0 – wystarczy przejrzeć wszystkie takie wierzchołki. Oczywiście, moglibyśmy wyznaczyć wszystkie ścieżki wychodzące z tego wierzchołka, korzystając z przeszukiwania z nawrotami. Taka metoda będzie jednak wymagać czasu wykładniczego, zatem potrzebujemy czegoś sprytniejszego.

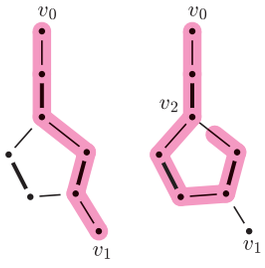
Na początek zajmiemy się grafami *dwudzielnymi*, tzn. takimi, których zbiór wierzchołków możemy podzielić na takie dwa podzbiory V_A, V_B, że każda krawędź łączy wierzchołki należące do różnych podzbiorów. Spróbujmy usprawnić przeszukiwanie z nawrotami, tak aby odwiedzić każdy wierzchołek co najwyżej raz. A konkretnie: zaczynając z wierzchołka $v_0 \in V_A$, wykonujemy przeszukiwanie grafu w głąb, z tym że w każdym wierzchołku na głębokości parzystej przeglądamy nieskojarzone krawędzie wychodzące z tego wierzchołka, w każdym zaś wierzchołku na głębokości nieparzystej idziemy krawędzią skojarzoną (może być co najwyżej jedna). Jeśli trafimy na wierzchołek nieskojarzony, to znaczy, że znaleźliśmy ścieżkę powiększającą (rys. 3). Co ciekawe, jeśli na niego nie trafiliśmy, to znaczy, że ścieżki powiększającej nie ma. Jak to udowodnić?



Rys. 3. Graf dwudzielny G z wyróżnionymi krawędziami odwiedzonymi podczas przeszukiwania w głąb oraz graf skierowany G'. W obu grafach podpisano wierzchołki ze zbioru V_A.

Rozważmy graf skierowany G' o zbiorze wierzchołków $V_A \cup V_B$. Dla każdej krawędzi $v_A v_B$, $v_A \in V_A$, $v_B \in V_B$, z naszego G dodajmy do G' skierowaną krawędź: $v_A \to v_B$, jeśli $v_A v_B \notin M$, albo $v_B \to v_A$, jeśli $v_A v_B \in M$. Zauważmy, że w grafie G istnieje ścieżka powiększająca wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G' da się dojść (zgodnie ze skierowaniem krawędzi) z wierzchołka v_0 do innego wierzchołka nieskojarzonego. A powyższy algorytm to nic innego jak zwykłe przeszukiwanie w głąb grafu G'.

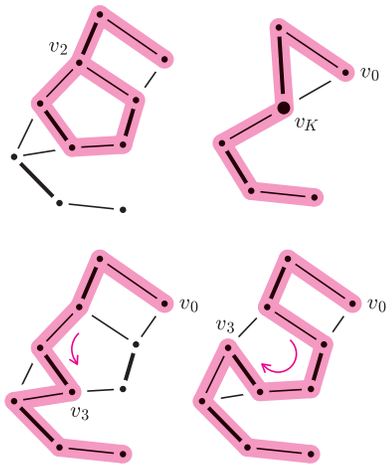
Przeszukiwanie to działa w czasie $O(m)$, zatem znalezienie ścieżki powiększającej zajmie czas $O(nm)$, jeśli zaczynamy przeszukiwanie z każdego wierzchołka nieskojarzonego od nowa, lub $O(m)$, jeśli zaczynamy naraz z wszystkich wierzchołków nieskojarzonych z V_A (dlaczego możemy tak zrobić?). Skojarzenie może być powiększone co najwyżej $n/2$ razy, zatem cały algorytm działa w czasie $O(nm)$. Dodajmy, że w praktyce nie opłaca się zaczynać z pustego skojarzenia, ale z jakiegoś skojarzenia znalezionego prostszą metodą (przykładowo, algorytm zachłannie dodający kolejne krawędzie do skojarzenia zawsze znajdzie skojarzenie o liczności równej co najmniej połowie liczności najliczniejszego skojarzenia).



Rys. 4. Po lewej: graf ze skojarzeniem (pogrubione krawędzie) i ścieżką powiększającą (kolor). Po prawej: ten sam graf z krawędziami odwiedzonymi przez algorytm.

Okazuje się, że w przypadku grafów, które nie są dwudzielne, sprawa się komplikuje, a nasz algorytm nie działa. Istotnie, spójrzmy na graf z rysunku 4. Pomimo tego, że istnieje w nim ścieżka powiększająca z wierzchołka v_0 do wierzchołka v_1, to algorytm nigdy jej nie znajdzie, jeśli zacznie obchodzić cykl od lewej strony (w szczególności nigdy nie odwiedzi wierzchołka v_1).

Cały kłopot jest powodowany przez cykle, które znajdujemy, przeszukując graf. Problematyczne okazują się mianowicie cykle *nieparzystej* długości, które są połączone z wierzchołkiem v_0 ścieżką o parzystej długości. Taki cykl nazwiemy *kielichem* (ang. *blossom*), a ścieżkę *łodygą* (ang. *stem*). Kanadyjski matematyk Jack Edmonds podał następujący sposób, w jaki można sobie z nimi radzić: ściągnąć, czyli zastąpić jednym wierzchołkiem, a następnie rekurencyjnie poszukać ścieżki powiększającej w mniejszym grafie. Przyjrzyjmy się temu pomysłowi bliżej.



Rys. 5. Na górze po lewej: graf G z zaznaczonym kielichem. Na górze po prawej: graf G_K z zaznaczoną ścieżką powiększającą. Na dole: dwie możliwości uzupełnienia ścieżki powiększającej w grafie G.

Operacja ściągnięcia kielicha wygląda następująco (rys. 5): zastępujemy wszystkie wierzchołki kielicha jednym wierzchołkiem v_K, który jest połączony krawędziami z wszystkimi sąsiadami kielicha, otrzymując graf G_K. Zauważmy, że na rysunku wierzchołek v_2, który łączył kielich z łodygą, był jedynym wierzchołkiem spośród wierzchołków kielicha skojarzonym z wierzchołkiem poza kielichem, zatem wierzchołek v_K będzie również skojarzony z dokładnie jednym wierzchołkiem. Wynika z tego, że po ściągnięciu nowo utworzone skojarzenie M_K nadal jest poprawne. Okazuje się, że prawdziwy jest następujący lemat:

W grafie G istnieje ścieżka powiększająca skojarzenie M wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G_K istnieje ścieżka powiększająca skojarzenie M_K.

Dla dowodu lematu załóżmy, że w grafie G_K znaleźliśmy ścieżkę powiększającą S. Pokażemy, jak dzięki niej znaleźć ścieżkę w grafie G. Jeśli ścieżka S nie zawiera wierzchołka v_K, to w oczywisty sposób jest ona również ścieżką powiększającą w G. W przeciwnym przypadku można ją uzupełnić krawędziami z kielicha, przechodząc go w lewo lub w prawo, w zależności od położenia wierzchołka v_3, którym wchodzi druga krawędź ścieżki (rys. 5). Ponadto każda ścieżka powiększająca w G musi być takiej postaci (tzn. jeśli przecina kielich, to wchodzi do niego krawędzią łodygi), zatem jest również ścieżką powiększającą w G_K.

Jako zadanie dla Czytelnika pozostawiamy wykazanie, że jeśli w G istnieje ścieżka powiększająca, to nasz algorytm wyszukujący ścieżki powiększające albo ją znajdzie, albo znajdzie kielich, który można ściągnąć.

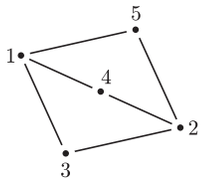
Znalezienie ścieżki powiększającej z ustalonego wierzchołka zajmuje czas $O(nm)$, gdyż potencjalnie aż $n/2$ razy będziemy musieli wykonać ściągnięcie kielicha. Zatem cały algorytm działa w czasie $O(n^3m)$.

Na koniec zaznaczmy, że opisane algorytmy nie są najlepszymi znanymi algorytmami znajdującymi najliczniejsze skojarzenia w grafach, są za to niezbyt skomplikowane. Przykładowo algorytm Hopcrofta–Karpa dla grafów dwudzielnych oraz algorytm Micalego–Vaziraniego dla grafów dowolnych działają w czasie $O(\sqrt{n}m)$, zaś randomizowany algorytm Muchy–Sankowskiego sprowadza znajdowanie skojarzenia w grafie dowolnym do problemu mnożenia macierzy i działa w czasie $O(n^{2,37})$.

Informatyczny kącik olimpijski (66): Dwóch generałów

W tym kąciku zajmiemy się zadaniem *Dwóch generałów*, które pochodzi z Uniwersyteckich Zawodów Informatycznych organizowanych przez Uniwersytet Jagielloński, a konkretnie z konkursu z października 2009 roku.

Generałowie A i B rywalizują ze sobą, na przemian dyktując ruchy bajtockiej armii, która prowadzi kampanię wojenną w Bitlandii. W kraju tym jest n miast połączonych między sobą dwukierunkowymi drogami. Ruch armii polega na przesunięciu jej z miasta, w którym stacjonuje, wzdłuż drogi, do jednego z miast sąsiednich. Każde miasto, w którym znajdzie się armia, zostaje złupione i spalone – nie można go więc odwiedzić ponownie. Jeśli generał nie będzie mógł wykonać ruchu, to ośmieszy się przed armią i przegra rywalizację. Dla każdej początkowej pozycji armii należy rozstrzygnąć, który z generałów wygra, zakładając, że generał A zaczyna i że obaj generałowie grają optymalnie (patrz rys. 1).



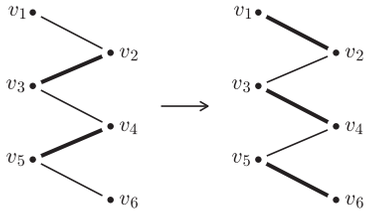
Rys. 1. Dla powyższego planu Bitlandii, jeśli armia zaczyna w mieście 1, to generał A może przesunąć ją do miasta 3, 4 lub 5. Niezależnie od jego wyboru generałowi B pozostaje jedyny ruch do miasta 2. Generał A rusza wtedy do jeszcze nieodwiedzonego miasta ze zbioru $\{3, 4, 5\}$ i wygrywa. Jeśli armia zaczyna w mieście 3, to wygra generał B.

Plan Bitlandii możemy traktować jako graf nieskierowany G o n wierzchołkach i m krawędziach. Na początek spróbujmy rozwiązać prostszą wersję tego zadania, w której graf G jest dwudzielny (wierzchołki reprezentujące miasta możemy podzielić na dwa zbiory V_A, V_B tak, że każda krawędź-droga łączy wierzchołki znajdujące się w różnych zbiorach). Niech miasto początkowe będzie w V_A. W tej sytuacji ruch generała A zawsze prowadzi z V_A do V_B, zaś ruch generała B – przeciwnie. Rozważmy pewną rozgrywkę między generałami, w której zwycięża generał A oraz wszystkie miasta Bitlandii zostały odwiedzone. W rozgrywce tej dla każdego miasta $v \in V_A$ generał A wybrał pewne miasto $f(v) \in V_B$, do którego ruszył się z v. Z warunków zadania wynika, że funkcja f jest bijekcją. Ponadto, zbiór krawędzi, którymi poruszał się generał A, jest doskonałym skojarzeniem w grafie G.

Skojarzenie jest *doskonałe*, jeśli z każdego wierzchołka wychodzi krawędź z M (tzn. każdy wierzchołek jest skojarzony w M).

Zauważmy więc, że jeśli w grafie G istnieje doskonałe skojarzenie M, to generał A wygrywa, startując z dowolnego miasta, a jego strategia polega na poruszaniu się po krawędziach ze skojarzenia M. Generał B nigdy nie będzie mógł zrobić ruchu krawędzią z M.

No dobrze, ale co w przypadku, gdy w G nie istnieje doskonałe skojarzenie? Niech M będzie pewnym najliczniejszym skojarzeniem w G, zaś $v_1 \in V_A$ będzie wierzchołkiem początkowym, który nie jest skojarzony w M. Zauważmy, że jakikolwiek ruch generała A musi prowadzić do wierzchołka $v_2 \in V_B$, który jest skojarzony w M, inaczej bowiem moglibyśmy powiększyć M, dokładając do niego krawędź v_1v_2. Generał B może wtedy odpowiedzieć ruchem wzdłuż krawędzi z M. Okazuje się, że będzie mógł tak zrobić zawsze. Załóżmy bowiem, że w k-tym ruchu generał B trafia na nieskojarzony wierzchołek, czyli $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$ jest ciągiem odwiedzonych wierzchołków, $v_iv_{i+1} \in M$ wtedy gdy i jest parzyste, oraz v_1 i v_{2k} są nieskojarzone w M (rys. 2). Wówczas możemy usunąć ze skojarzenia $k-1$ krawędzi v_iv_{i+1} dla i parzystego, a zamiast tego dołożyć k krawędzi v_iv_{i+1} dla i nieparzystego, co daje skojarzenie liczniejsze niż M – sprzeczność. Wynika z tego, że jeśli w grafie G pewne najliczniejsze skojarzenie nie kojarzy wierzchołka początkowego, to skojarzenie to wyznacza strategię wygrywającą dla generała B.

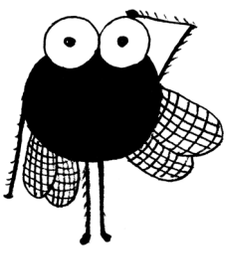


Rys. 2. Ilustracja przypadku dla $k = 3$. Krawędzie należące do M są pogrubione.

Pozostał do rozważenia przypadek, w którym wierzchołek początkowy v_1 jest skojarzony w każdym najliczniejszym skojarzeniu. Niech M będzie pewnym takim skojarzeniem. Pokażemy, że wygrywa generał A, a jego strategią jest poruszanie się wzdłuż krawędzi skojarzenia M. Argument jest podobny jak poprzednio: gdyby w pewnym momencie dla ciągu odwiedzonych wierzchołków $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}$, wierzchołek v_{2k+1} był nieskojarzony w M, to wymieniając k krawędzi v_iv_{i+1} dla i nieparzystego na k krawędzi v_iv_{i+1} dla i parzystego, dostajemy nowe skojarzenie (równoliczne z M, a więc o największej liczności), które nie kojarzy wierzchołka v_1. Znów dochodzimy do sprzeczności.

Dla grafu z rysunku 1 mamy sześć najliczniejszych skojarzeń, z których każde kojarzy wierzchołek 1 oraz 2 i pozostawia jeden nieskojarzony wierzchołek ze zbioru $\{3, 4, 5\}$.

Wystarczy zatem dla każdego wierzchołka v sprawdzić, czy każde najliczniejsze skojarzenie kojarzy ten wierzchołek. Dowolne najliczniejsze skojarzenie M możemy wyznaczyć np. w czasie $O(nm)$, poprzez n-krotne wyszukanie ścieżki powiększającej. Wierzchołek v jest kojarzony w każdym najliczniejszym skojarzeniu, jeśli jest skojarzony w M oraz, po usunięciu v z grafu, liczność najliczniejszego skojarzenia się zmniejsza. Zauważmy, że szukając skojarzenia, nie musimy zaczynać zawsze od nowa, wystarczy w skojarzeniu M usunąć krawędź kojarzącą v oraz poszukać jednej ścieżki powiększającej. Zatem cały algorytm działa w czasie $O(nm)$.



W tym momencie Czytelnik może pokręcić z powątpiewaniem głową, że, owszem, zrobiliśmy rozgrzewkę i rozwiązaliśmy zadanie dla grafów dwudzielnych – ale jak nasze rozważania mają się do rozwiązania dla grafów dowolnych? I będzie miał słuszność, gdyż w istocie wiele problemów, które umiemy sprawnie rozwiązać dla grafów dwudzielnych, staje się trudne dla grafów niemających tej własności. Zachęcam jednak Czytelnika do przeczytania jeszcze raz powyższego rozwiązania i przekonania się, że tak naprawdę nigdzie nie korzystamy z założenia, że graf G jest dwudzielny. Zatem nasze rozwiązanie działa również w ogólnym przypadku, pod warunkiem że umiemy znajdować najliczniejsze skojarzenia w dowolnych grafach. Można to zrobić w czasie $O(n^3m)$ algorytmem Edmondsa i w takim też czasie działa całe rozwiązanie.

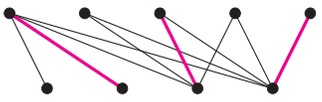
Tomasz IDZIASZEK

W grafach dwudzielnych jest łatwiej

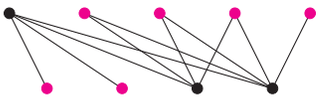
Jakub RADOSZEWSKI

Cztery parametry. Tym, co najczęściej robi się w grafach dwudzielnych, jest znajdowanie najliczniejszego skojarzenia. Można jednak rozważać aż cztery – parami dualne – parametry powiązane z najliczniejszym skojarzeniem. Oto one:

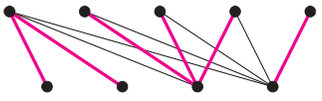
Najliczniejszy zbiór niezależny krawędzi (**nk**)
to najliczniejszy podzbiór krawędzi, w którym żadne dwie nie są incydentne, czyli właśnie najliczniejsze skojarzenie w grafie.



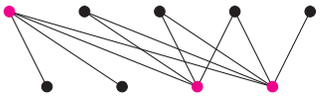
Najliczniejszy zbiór niezależny wierzchołków (**nw**)
to najliczniejszy podzbiór wierzchołków, w którym żadne dwa nie są sąsiednie, czyli żadne dwa nie są połączone krawędzią.



Najmniejsze pokrycie krawędziowe (**pk**)
to najmniej liczny podzbiór krawędzi, taki, że każdy wierzchołek jest incydentny z co najmniej jedną z nich.



Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe (**pw**)
to najmniej liczny podzbiór wierzchołków, taki, że każda krawędź jest incydentna z co najmniej jednym z nich.

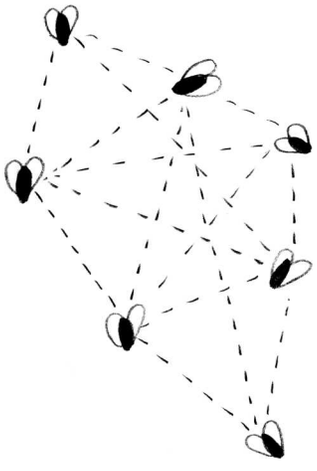


Jak łatwo zauważyć, powyższe definicje można również odnieść do zupełnie dowolnego grafu, a nie tylko do grafu dwudzielnego. Jednak w przypadku grafów dwudzielnych związki między podanymi pojęciami okażą się o wiele bardziej widoczne.

Oznaczmy przez n łączną liczbę wierzchołków w grafie. Odtąd założymy, że w grafie nie występują wierzchołki izolowane, czyli wierzchołki nieincydentne z żadną krawędzią. Wówczas zachodzą następujące równości, wiążące rozważane parametry w pary. Są to tzw. równości Gallaia. Są one prawdziwe w dowolnym grafie, jednak Czytelnikowi może być łatwiej je sobie wyobrazić w kontekście grafu dwudzielnego.

Założenie o braku wierzchołków izolowanych będzie nam potrzebne w dowodzie dokładnie jednej równości. Czy potrafisz, Drogi Czytelniku, odnaleźć ten fragment dowodu?

pw + nw = *n*. Niech X oznacza dowolne pokrycie wierzchołkowe w grafie. Rozważmy zbiór $Y = V \setminus X$. Wówczas żadne dwa wierzchołki ze zbioru Y nie mogą być połączone krawędzią, gdyż byłaby to krawędź niepokryta przez wierzchołki ze zbioru X. Stąd zbiór Y jest zbiorem niezależnym wierzchołków (patrz też rysunki powyżej). Przyjmując jako X najmniejsze pokrycie wierzchołkowe, otrzymujemy nierówność $\mathbf{nw} \geqslant n - \mathbf{pw}$.



Podobnie widzimy, że jeśli Y' jest dowolnym zbiorem niezależnym wierzchołków, to $X' = V \setminus Y'$ jest pokryciem wierzchołkowym w grafie. Stąd $\mathbf{pw} \leqslant n - \mathbf{nw}$. Z połączenia otrzymanych nierówności uzyskujemy żądaną równość.

pk + nk = *n*. Znów wykażemy tak naprawdę dwie nierówności. Zacznijmy od nierówności $\mathbf{pk} \leqslant n - \mathbf{nk}$. Niech M oznacza najliczniejsze skojarzenie w grafie, o liczności **nk**. Będziemy chcieli dołożyć pewne krawędzie do M, tak aby otrzymać pokrycie krawędziowe P. Skojarzenie M pokrywa $2 \cdot \mathbf{nk}$ wierzchołków, do pokrycia pozostaje więc $n - 2 \cdot \mathbf{nk}$ wierzchołków. Każdy z nich jest incydentny z jakąś krawędzią – dodajmy zatem do P po jednej takiej krawędzi na każdy z tych wierzchołków (wcześniejsze rysunki stanowią tego dobrą ilustrację). Łącznie $|P| = \mathbf{nk} + (n - 2 \cdot \mathbf{nk}) = n - \mathbf{nk}$, skąd $\mathbf{pk} \leqslant n - \mathbf{nk}$.

Uzasadnimy teraz nierówność $\mathbf{nk} \geqslant n - \mathbf{pk}$. Niech P' oznacza najmniejsze pokrycie krawędziowe w grafie. Wówczas graf $G' = (V, P')$ jest *lasem*, czyli grafem acyklicznym. Faktycznie, gdyby jakieś krawędzie w P' tworzyły cykl, to po usunięciu dowolnej z nich P' wciąż byłoby pokryciem krawędziowym, tyle że mniej licznym. Znanym faktem jest, że las o n wierzchołkach i k krawędziach składa się z $n - k$ spójnych składowych. Tak więc graf G' składa się z $n - |P'|$ spójnych składowych, z których każda zawiera co najmniej jedną krawędź (inaczej P' nie pokrywałoby wszystkich wierzchołków). Z każdej ze spójnych

Podobnie można uzasadnić, że G' jest lasem *gwiazd*, czyli że każda jego spójna składowa zawiera wierzchołek centralny połączony z wszystkimi pozostałymi.

Rozwiązanie zadania M 1404.
Załóżmy, że $|AB| = x + y$, gdzie y to długość odcinka z ruchomą taśmą. Jeśli Jaś zaszznuruje but poza taśmą, to pokona trasę w czasie

$$t_1 = t + \frac{x}{v} + \frac{y}{v+u}.$$

Jeśli natomiast zaszznuruje but na taśmie, to przejście trasy zajmie czas

$$t_2 = \frac{x}{v} + t + \frac{y-tu}{v+u} = t_1 - \frac{tu}{v+u} < t_1.$$

Wobec tego powinien zaszznurować but na taśmie.

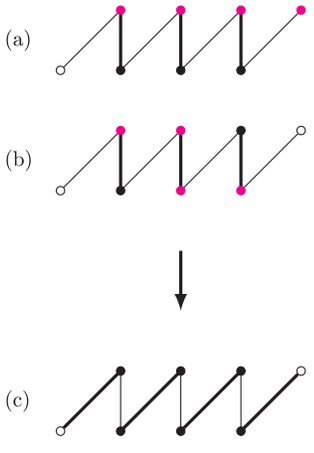
składowych G' możemy teraz wybrać po jednej krawędzi. Otrzymany zbiór krawędzi na pewno będzie skojarzeniem, gdyż każda z krawędzi pochodzi z innej spójnej składowej. Stąd $\mathbf{nk} \geqslant n - \mathbf{pk}$. Obie nierówności dają łącznie równość, którą chcieliśmy uzyskać.

Dotychczasowe równości zachodziły w dowolnych grafach. Poniższa równość, znana także pod nazwą twierdzenia Königa, jest jedną z najlepiej znanych własności grafów dwudzielnych.

nk = pw. W tym przypadku nierówność $\mathbf{pw} \geqslant \mathbf{nk}$ otrzymujemy za darmo – wszak aby pokryć krawędzie z najliczniejszego skojarzenia, trzeba na każdej z nich wybrać jakiś wierzchołek. Natomiast dużo ciekawsze jest uzasadnienie, że taka liczba wierzchołków zawsze wystarczy. Przeprowadzimy je, podając algorytm wyboru wierzchołków do pokrycia. Dowód przez algorytm – to w sumie ciekawe!

Algorytm działa na zasadzie wymuszeń. Do konstruowanego pokrycia możemy wziąć tylko **nk** wierzchołków, możemy więc wybierać jedynie wierzchołki będące końcami krawędzi z pewnego najliczniejszego skojarzenia. Jeśli więc jakaś krawędź w grafie prowadzi do wierzchołka nieskojarzonego, to jej drugi koniec – będący z pewnością wierzchołkiem skojarzonym – musimy wybrać do pokrycia.

W ten sposób wybierzemy do pokrycia pewien zbiór wierzchołków skojarzonych. Niech u będzie jednym z tych wierzchołków i niech v będzie wierzchołkiem, który jest połączony z u krawędzią ze skojarzenia. Jeśli z v wychodzi jakaś krawędź do innego wierzchołka w, który jeszcze nie jest w pokryciu, to wiemy, że w musimy umieścić w pokryciu. Dokładamy zatem w do pokrycia. W wyniku tego sąsiad wierzchołka w w skojarzeniu może spowodować kolejne wymuszenia itd.



Warto zastanowić się nad tym, jak może skończyć się ta sekwencja wymuszeń. Na pewno byłoby źle, gdyby w pokryciu znalazł się jakiś wierzchołek nieskojarzony, jak w przypadku (a), lub para wierzchołków skojarzonych, jak w przypadku (b). Przypadki te zostały zilustrowane na marginesie. W każdym z nich mamy do czynienia ze ścieżką, której końcami są wierzchołki nieskojarzone (puste kółka) i w której naprzemiennie występują krawędzie ze skojarzenia i spoza skojarzenia. Jest to tzw. *ścieżka powiększająca*; pojęcie to pojawiło się już w artykule Tomasza Idziaszka. Jeśli zamienić w takiej ścieżce krawędzie skojarzone na nieskojarzone i odwrotnie (sytuacja (c)), otrzyma się skojarzenie liczniejsze od obecnego, co nie jest możliwe, ponieważ zaczęliśmy od skojarzenia najliczniejszego.

Wiemy zatem, że w wyniku wymuszeń z każdej pary wierzchołków skojarzonych wybierzemy do pokrycia wierzchołkowego co najwyżej jeden oraz że w pokryciu nie będzie żadnych innych wierzchołków. A co z pozostałymi krawędziami ze skojarzenia – tymi, z których nie został wybrany żaden wierzchołek? Czy możemy w każdej z nich po prostu wybrać do pokrycia po jednym, dowolnym wierzchołku? Niestety nie, co pokazuje rysunek na marginesie. Możemy jednak w każdej parze wybrać wierzchołek po tej samej stronie grafu dwudzielnego. Wówczas już otrzymamy poprawne pokrycie wierzchołkowe, czego nietrudne sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikowi. To koniec dowodu twierdzenia Königa – nasz algorytm poprawnie konstruuje pokrycie wierzchołkowe o liczności **nk**.

Z połączenia wszystkich równości, jakie otrzymaliśmy po drodze, uzyskujemy jeszcze jedną do kompletu: **pk = nw.** Oto pełny diagram:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{nk} & + & \mathbf{pk} & = & n \\ \| & & \| & & \\ \mathbf{pw} & + & \mathbf{nw} & = & n \end{array}$$

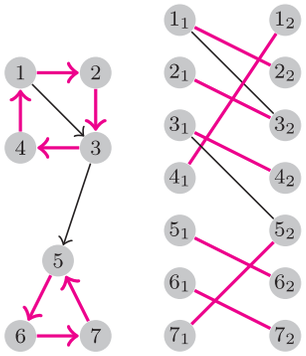
Zadanie na deser. Kliką dwudzielną nazywamy podzbiór wierzchołków grafu dwudzielnego, w którym każde dwa wierzchołki leżące po różnych stronach grafu są połączone krawędzią. Jak znaleźć najliczniejszą klikę dwudzielną w danym grafie dwudzielnym?

Ukryte skojarzenia

Karol POKORSKI[*]

Przedstawimy tu dwa zagadnienia, w których pojawia się problem znajdowania najliczniejszego skojarzenia w grafie dwudzielnym, jednak trochę ukryty.

W pierwszym problemie mamy znaleźć tzw. *pokrycie cyklowe* grafu skierowanego. Pokrycie cyklowe grafu G jest to zbiór cykli skierowanych C, takich że każdy wierzchołek należy do dokładnie jednego cyklu z C. Chcielibyśmy szybko (tj. w czasie wielomianowym) odpowiadać na pytanie, czy dany graf ma pokrycie cyklowe, a jeśli tak, chcielibyśmy umieć wyznaczyć przykład takiego pokrycia.



Rozwiązanie jest zaskakująco proste. Stwórzmy nowy graf G' w następujący sposób: każdy wierzchołek v oryginalnego grafu G rozbijamy w G' na dwa wierzchołki, v_1 i v_2, i jeśli w G istniała krawędź z a do b, to w G' tworzymy krawędź z a_1 do b_2.

Okazuje się teraz, że jeśli najliczniejsze skojarzenie w G' jest *doskonałe* (każdy wierzchołek jest skojarzony), to graf G ma pokrycie cyklowe. Formalne udowodnienie tego faktu jest dość proste: wystarczy pokazać bijekcję ze zbioru pokryć cyklowych w G w zbiór skojarzeń doskonałych w G. Szczegóły tego dowodu pozostawiam Czytelnikowi. Rysunek na marginesie podpowiada, jak tej bijekcji szukać.

Kolejnym przykładem zastosowania skojarzeń w rozwiązywaniu problemów jest wypełnianie *kwadratów łacińskich*. Kwadratem łacińskim nazywamy macierz (tabelkę) $n \times n$, w której każdy wiersz i każda kolumna jest permutacją ciągu $(1, 2, \ldots, n)$. Przykłady kwadratów łacińskich poniżej:

2	1	3
1	3	2
3	2	1

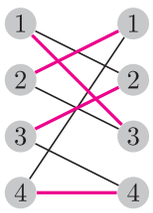
1	4	3	2
4	2	1	3
3	1	2	4
2	3	4	1

Rozważmy następujący problem: mamy kwadrat łaciński rozmiaru $n \times n$, w którym pokazano nam tylko k górnych wierszy (taki nie do końca wypełniony kwadrat nazywamy prostokątem łacińskim rozmiaru $k \times n$). Chcemy zrekonstruować cały kwadrat łaciński, oczywiście możliwie najszybciej.

Zamiast próbować rozwiązać ten problem w pełnej ogólności, spróbujmy najpierw rozwiązać jego mniejszą część (informatycy tak lubią!). Taką częścią problemu mogłoby być poprawne uzupełnienie wiersza $k+1$. Jak to zrobić?

Konstruujemy graf dwudzielny G, w którym wierzchołki z jednej grupy będą reprezentować kolumny, natomiast wierzchołki z drugiej grupy reprezentować będą liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, które będziemy wpisywać do kolejnego wiersza. Jest już chyba jasne, że krawędź między i-tą kolumną a liczbą j należy stworzyć wtedy i tylko wtedy, gdy liczba j nie wystąpiła w i-tej kolumnie. W takim grafie szukamy najliczniejszego skojarzenia. Jeśli jest ono doskonałe, wyznacza ono pewien poprawny sposób wypełnienia wiersza $k+1$:

1	4	3	2
4	2	1	3
?	?	?	?
?	?	?	?



1	4	3	2
4	2	1	3
3	**1**	**2**	**4**
?	?	?	?

A co, jeśli w G nie znajdziemy skojarzenia doskonałego? Okazuje się, że taka sytuacja nigdy nie wystąpi! Zanim jednak udowodnimy ten fakt, zauważmy, że właśnie uzyskaliśmy algorytm uzupełniający prostokąt do kwadratu łacińskiego: wystarczy wypełniać kolejne wiersze poprzez znajdowanie kolejnych skojarzeń doskonałych, a użyte krawędzie wyrzucać z grafu. Po wyrzuceniu z grafu wszystkich krawędzi kwadrat łaciński będzie uzupełniony.

[*]student, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

Nadszedł czas na dowód faktu, że w skonstruowanym zgodnie z powyższą metodą grafie G zawsze istnieje skojarzenie doskonałe. Zauważmy, że graf G jest grafem *regularnym*, czyli stopnie wszystkich wierzchołków są w nim takie same (są one równe $d = n - k$). Okazuje się, że w dwudzielnym grafie regularnym zawsze istnieje skojarzenie doskonałe.

O twierdzeniu Halla pisaliśmy w *Delcie* 7/2013.

Aby to wykazać, skorzystamy z *twierdzenia Halla o małżeństwach*. Twierdzenie to głosi, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na istnienie doskonałego skojarzenia w grafie dwudzielnym jest, aby każdy podzbiór wierzchołków z jednej grupy (załóżmy, że jest on mocy p) miał połączenie łącznie z co najmniej p wierzchołkami z drugiej grupy (jest to tzw. warunek Halla). Dowód naszego faktu wykorzystujący twierdzenie Halla jest bardzo prosty: rozważmy dowolny podzbiór p kolumn. Z każdego wierzchołka odpowiadającego tym kolumnom wychodzi d krawędzi, a więc łącznie mamy $p \cdot d$ krawędzi. Gdyby warunek Halla dla rozważanego podzbioru nie był prawdziwy, tzn. gdyby rozważany podzbiór był połączony krawędziami z mniej niż p wierzchołkami z drugiej grupy, to na mocy zasady szufladkowej Dirichleta do pewnego z tych wierzchołków musiałoby prowadzić więcej niż d krawędzi. To jednak jest niemożliwe, gdyż graf jest regularny. Stąd dla grafu G warunek Halla jest rzeczywiście spełniony, więc G ma skojarzenie doskonałe.

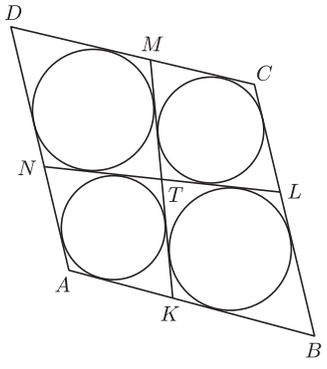
1	2	?
2	1	?
?	?	?

Warto jeszcze dodać, że gdybyśmy dostali do uzupełnienia prostokąt łaciński wymiaru nie $k \times n$, tylko $k \times l$ $(k, l < n)$, jego uzupełnienie do kwadratu $n \times n$ mogłoby okazać się niemożliwe. Obrazuje to podany obok przykład.

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1402. Na bokach AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$ dane są odpowiednio punkty K, L, M, N. Odcinki KM i LN przecinają się w punkcie T. Udowodnić, że jeśli w każdy z czworokątów $AKTN, KBLT, LCMT, MDNT$ można wpisać okrąg, to w czworokąt $ABCD$ także.
Rozwiązanie na str. 23

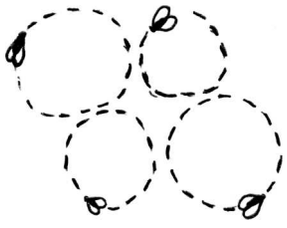


M 1403. Udowodnić, że dla malejącego ciągu $(x_i)_{i=1}^n$ liczb rzeczywistych dodatnich prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \leqslant \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

Rozwiązanie na str. 23

M 1404. Na lotnisku Jaś chce jak najszybciej przejść z punktu A do punktu B (w linii prostej). Idzie z prędkością v, a na swojej trasie ma odcinek, który pokonuje na ruchomej taśmie poruszającej się z prędkością u (czyli idąc po taśmie, Jaś porusza się z prędkością $v + u$ względem ziemi). Jaś musi po drodze zasznurować but, co powoduje, że stoi przez czas t. Czy powinien zasznurować but na ruchomej taśmie, czy poza nią? (Zakładamy dla uproszczenia, że taśma jest na tyle długa, że Jaś zdąży zasznurować na niej but, tzn. długość taśmy jest większa niż $u \cdot t$.)
Rozwiązanie na str. 5



Przygotował Michał NAWROCKI

F 843. Wykonana z przewodnika obręcz o promieniu r znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego indukcja magnetyczna jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej obręcz i zmienia się z czasem t zgodnie ze wzorem $B = kt$, gdzie k jest stałym współczynnikiem proporcjonalności. Na skutek zmian pola magnetycznego wytworzone zostaje pole elektryczne. Znaleźć natężenie pola elektrycznego E na obręczy.
Rozwiązanie na str. 19

F 844. Promień światła monochromatycznego wpada do wnętrza jednorodnej, przezroczystej kuli. Rozchodząc się wewnątrz kuli, promień dochodzi do jej granicy i tam częściowo odbija się, a częściowo, po załamaniu, wychodzi na zewnątrz. Jego odbita część biegnie wewnątrz kuli dalej i proces powtarza się wielokrotnie. Znaleźć kąt między kierunkiem promienia wpadającego do kuli i kierunkiem części promienia wychodzącej z kuli po k odbiciach.
Rozwiązanie na str. 9

Superbolidy: obiekt czelabiński

*Tadeusz J. JOPEK**

*Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Adama Mickiwwicza w Poznaniu

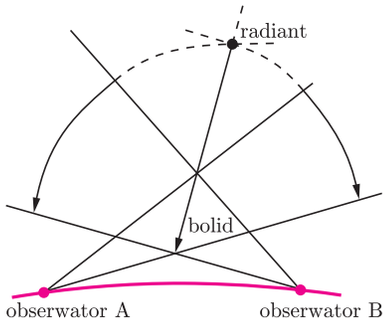
Bolid tunguski i związana z nim eksplozja miały miejsce w roku 1908 w niezamieszkałym rejonie centralnej Syberii. Pomimo pewnej liczby świadków zjawiska bolidu wiadomość o tym zdarzeniu powoli docierała do świata nauki. Pierwsza naukowa ekspedycja dotarła w rejon katastrofy dopiero po dziewiętnastu latach, w roku 1927. Na to, by wyniki kolejnych wypraw przeniknęły do wiadomości publicznej, potrzeba było kolejnych wielu lat.

Fot. 1. Superbolid zarejestrowany przez przypadkowego obserwatora pod Czelabińskiem.

Jakże inaczej miała się sprawa z niedawnym spadkiem meteorytu pod Czelabińskiem w Rosji! 15 lutego 2013 roku o godzinie 9:20 czasu lokalnego (4:20 naszego czasu zimowego), do ziemskiej atmosfery wtargnął blisko dwudziestometrowej średnicy meteoroid, wywołując zjawisko superbolidu (bardzo jasnej „spadającej gwiazdy"). Wiadomość o tym zdarzeniu niemal natychmiast dotarła do opinii publicznej, a niespełna 12 godzin później rejestracje wideo bolidu oglądane były miliony razy na całym świecie. Natychmiast również zainteresowało się nim kilka grup naukowców z całego świata. W badaniach wykorzystano wykonane w różnych miejscach nagrania wideo bolidu, rejestracje wygenerowanych wybuchami fal atmosferycznych oraz obserwacje satelitarne. Poniżej podajemy niektóre rezultaty tych analiz uzyskane przez wytrawnych badaczy spadków meteorytowych z Obserwatorium Astronomicznego w Ondrzejowie w Czechach [1].

Moment pojawienia	15 lutego 2013, 03:20 UT
Parametry geocentryczne	
Współrzędne geograficzne początku bolidu	$\phi = 54{,}508$ N, $\lambda = 64{,}913$ E
Współrzędne geograficzne końca bolidu	$\phi = 54{,}922$ N, $\lambda = 60{,}606$ E
Azymut trajektorii w punkcie końcowym	$A = 279{,}5°$
Nachylenie trajektorii do horyzontu w punkcie końcowym	$H = 16{,}5°$
Radiant geocentryczny: rektascensja i deklinacja	$\alpha = 334{,}7°$, $\delta = -1{,}0°$
Szybkość geocentryczna	$V = 13{,}2$ km/s
Elementy orbity (J2000)	
Półoś wielka	$a = 1{,}55$ j.a.
Mimośród	$e = 0{,}5$
Argument peryhelium	$\omega = 109{,}7°$
Długość węzła wstępującego	$\Omega = 326{,}41°$
Nachylenie do ekliptyki	$i = 3{,}6°$

Podana wartość azymutu liczona jest od punktu południa na lokalnym horyzoncie w kierunku punktu zachodu. Skala czasu UT odpowiada południkowi o zerowej długości geograficznej. W okresie zimowym momenty czasu na tym południku są przesunięte o +1 godzinę w stosunku do skali czasu obowiązującej w naszym kraju.



Radiant (czyli punkt przecięcia przedłużenia – po linii prostej – trajektorii ze sferą niebieską) bolidu obserwowanego przez dwóch obserwatorów. Płaszczyzny zawierające ślad bolidu i obserwatora przecinają się wzdłuż trajektorii bolidu.

Meteoroid czelabiński nadleciał z kierunku wschodniego, około 10 stopni na południe od punktu wschodu na horyzoncie, i „zapłonął" (początek zjawiska bolidu) 92 km nad powierzchnią Ziemi. Bolid poruszał się na północny zachód po trajektorii nachylonej do horyzontu w Czelabińsku pod kątem 16,5°. Długość obserwowanej trajektorii wynosiła 254 km, bolid przebył ją w 16,2 sekundy. W momencie początkowym szybkość meteoroidu wynosiła 17,5 km/s, w momencie końcowym zmniejszyła się do 4,3 km/s, kiedy to obiekt znajdował się na wysokości 15 km. Zaprezentowane wyniki mają charakter wstępny, jednak są na tyle dokładne, by móc stwierdzić, że meteoroid czelabiński poruszał się wokół Słońca po orbicie typowej dla tej klasy obiektów.

Jej rozmiary są półtora razy większe od orbity Ziemi, z mimośrodem (ekliptycznością) dużo większym od mimośrodu orbity ziemskiej; w porównaniu z kometami orbita meteoroidu czelabińskiego nie jest jednak bardzo wydłużona. Podobnie do orbit innych superbolidów, jej nachylenie

do płaszczyzny orbity Ziemi jest niewielkie. Dwudziestometrowy obiekt, który wpadł do atmosfery, miał stosunkowo niewielką wytrzymałość mechaniczną, przez co w efekcie oddziaływania z atmosferą ulegał silnemu rozdrabnianiu. Towarzyszyły temu eksplozje atmosferyczne. Najsilniejszy rozbłysk i gwałtowna fragmentacja miały miejsce na wysokości 32 km. Były one wywołane ciśnieniem dynamicznym około 4 MPa. Zdaniem badaczy z Ondrzejowa największy fragment, który wpadł do Jeziora Czebarkulskiego, ma masę 200–500 kg. Inne, mniejsze odłamki w formie deszczu meteorytów rozproszone zostały wzdłuż rzutu trajektorii bolidu na obszarze 65 × 6 km.

Fot. 2. Stugramowy odłamek meteorytu czelabińskiego.

Na odłamku pokazanym na fotografii 2 widzimy ślady po ablacji, czyli powierzchniowym topieniu i wydmuchiwaniu materii z powierzchni meteoroidu. Widoczne są zaokrąglone krawędzie, a także ciemna skorupka o grubości 0,2–0,5 mm utworzona w wyniku ablacji. Na egzemplarzach, które powstały w trakcie fragmentacji głównej masy po ustaniu świecenia bolidu, czyli w trakcie ciemnej fazy przelotu, skorupka jest znacznie cieńsza lub niewidoczna. Według wstępnej klasyfikacji mineralogicznej [5] meteoryt czelabiński jest meteorytem kamiennym, tzw. chondrytem zwyczajnym z grupy chemiczno-petrograficznej LL5. (Więcej szczegółów na temat klasyfikacji meteoroidów można odnaleźć w książce [6].) Jeśli chodzi o skład mineralogiczny oraz parametry orbitalne, meteoroid czelabiński niczym szczególnym się nie wyróżnia. Jednak jest na drugim miejscu po obiekcie tunguskim co do skutków eksplozji. Przyjmując podane wyżej rozmiary meteoroidu, jego szybkość w punkcie początkowym zjawiska bolidu, oraz zakładając gęstość około 3 g/cm^3, możemy oszacować energię kinetyczną obiektu. Jest ona równoważna energii eksplozji około 460 kT trotylu (TNT), czyli 20–30 razy więcej niż ilość energii uwolnionej podczas eksplozji bomby atomowej nad Hiroszimą. Podobnego oszacowania dokonano na podstawie infradźwięków wygenerowanych przelotem i eksplozją obiektu, a rejestrowanych przez czujniki umieszczone w różnych miejscach globu. Ciekawe, że wywołane eksplozją fale ciśnienia zdołały obiec dookoła całą Ziemię. Energia obiektu czelabińskiego nie została uwolniona w całości w jednym momencie: znaczną część zaabsorbowała atmosfera. Niemniej pośród obserwowanych superbolidów jedynie w trakcie katastrofy tunguskiej uwolniona została większa ilość energii. W rezultacie w Czelabińsku i okolicy fala uderzeniowa wywołana ruchem i eksplozją obiektu dokonała znacznych zniszczeń. Były to głównie wybite szyby okienne, a niekiedy uszkodzenia budynków. Jednak w następstwie tych zniszczeń ponad tysiąc osób zostało rannych. Nigdy wcześniej nie obserwowano bolidu, któremu towarzyszyłyby tak tragiczne wydarzenia. Na nasze szczęście obiekty podobne do meteoroidu czelabińskiego zderzają się z Ziemią niezbyt często, bo raz na około 75 lat [3].

Dodatkową i bardzo ważną konsekwencją superbolidu czelabińskiego jest zmiana, jakiej to wydarzenie dokonało w opinii publicznej (a także u niektórych naukowców) na temat konieczności uruchomienia intensywnych badań i projektów pozwalających na przewidywanie i zapobieganie przyszłym tego rodzaju zdarzeniom.

Rozwiązanie zadania F 844.
Załamanie promienia przy wejściu do kuli przy kącie padania α i kącie załamania β spowoduje jego odchylenie od kierunku padania o kąt $\alpha - \beta$. Każde odbicie wewnątrz kuli spowoduje odchylenie jego kierunku o kat $\pi - 2\beta$, zawsze w tę samą stronę. Wreszcie przy wyjściu z kuli promień w wyniku załamania odchyli się o kąt $\alpha - \beta$. Stąd całkowita kąt odchylenia po k odbiciach będzie równy:

$$d = 2(\alpha - \beta) + k(\pi - 2\beta) = \\ = k\pi + 2\alpha - 2(k+1)\beta.$$

Literatura

[1] J. Borovicka, P. Spurny, L. Shrbeny, 2013, C.B.A.T., Electronic Telegram No 3423.
[2] J.I. Zuluaga, I. Ferrin, 2013, arXiv:1302.5377v1 [astro-ph.EP] 21 Feb. 2013.
[3] P. Brown, 2013, WGN, Journal of the IMO, 41:1, 22.
[4] NASA news, `http://www.nasa.gov/mission_pages/asteroids/news/asteroid20130215.html`.
[5] Svend Buh, `http://www.meteorite-recon.com/en/Meteorite_Chelyabinsk_1.html`.
[6] B. i H. Hurnik, *Materia kosmiczna na Ziemi, jej źródła i ewolucja*, UAM Wyd. Naukowe, 2005.

O naukowcach słów kilka

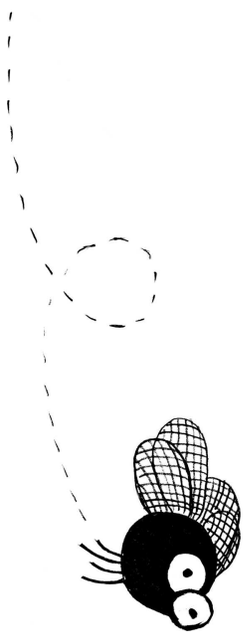
Twórcy Pikniku Naukowego Centrum Nauki Kopernik i Polskiego Radia S.A. zapytali tegorocznych uczestników, dlaczego przychodzą na Piknik i o czym chcieliby się dowiedzieć. Jedną z najczęściej udzielanych odpowiedzi było, że interesuje ich, **jak** pracuje naukowiec.

Przeżyłam to osobiście w swojej rodzinie. Byłam naukowcem laboratoryjnym, robiłam codziennie jakieś probówkowo-płytkowe doświadczenia. Przychodziłam zmęczona i siadałam w naszej miłej kuchni, narzekając na opór materii – moja córka nazywa to jednym zdaniem: moja mama mówiła, że znowu jej „nie wyszło". Dzieci chętnie przychodziły do mnie do pracy, gdzie oglądały stoły laboratoryjne, szukając na nich odpowiedzi na pytanie: na czym ta praca, która nie wychodzi, polega. Stąd nie dziwi mnie to piknikowe pytanie.

Jesteśmy w Warszawie w szczególnie korzystnej sytuacji: po wiosennym Pikniku, pełnym wesołych doświadczeń w namiotach (w tym roku po raz pierwszy na sportowym Stadionie Narodowym), na którym słowo „Nauka" jest oswajane i przybliżane laikom, przychodzi we wrześniu czas na Festiwal Nauki, w 2013 roku był już XVII!

MUSZĘ to dodać, nie mogę zmilczeć, że warszawski Festiwal Nauki był pierwszym w Polsce, a dziś jest ich ponad 20 w miastach uniwersyteckich i wiele rozrzuconych po szkołach wszelkiego poziomu edukacji.

Otóż na Festiwalu ludzie przychodzą do uczelni, pracowni, warsztatów technicznych i innych. Mogą tam popatrzeć na wybrane doświadczenia, które się im pokazuje, więcej – mogą także sami proste doświadczenia zrobić. Mogą zobaczyć naukowców i zadać im każde, jakie im przychodzi do głowy, pytanie: o pracę, ale też dlaczego to lubią, dlaczego tak spędzają życie, jak widzą swoją przyszłość. Na Festiwalu dostają odpowiedź na pytanie zadane na Pikniku. Przy okazji ci przysłowiowi „ludzie" widzą, w jakich warunkach się pracuje, gdy się jest naukowcem. Od paru lat (tych, od kiedy jesteśmy w Unii) te warunki się poprawiły, szczególnie jeżeli chodzi o piękne budynki i o aparaturę, która pracuje w eksperymentalnych laboratoriach. Naukowcy, z którymi się spotykają, rzadko wypowiadają się co do uposażenia i nie widzimy ich na ulicznych manifestacjach, w których mogliby zająć poczesne miejsce wśród protestujących. Tacy to już dziwni ludzie, których bardzo pasjonuje proces odkrywania. Stanisław Ossowski napisał kiedyś, że naukowiec to taki człowiek, którego charakteryzuje **brak posłuszeństwa w myśleniu**.



Naukowcy mają też potrzebę wzajemnych kontaktów. Oczywiście, realizują ją na konferencjach i kongresach, na których „donosi się" o najnowszych odkryciach. Ale można iść w zaspokajaniu tej potrzeby dalej: organizować zjazdy badaczy z dziedzin pokrewnych, nauk „dwuczłonowych": *bio*fizyki, *bio*chemii, *bio*reologii, *bio*etyki (że pozostanę przy naukach *bio*). Można też organizować spotkania z laikami – na wspomnianych już festiwalach, piknikach, w kawiarniach naukowych, a nawet przy „naukowym ognisku" (czy ktoś o takim słyszał? – chętnie przy takim zasiądę). Na tym ostatnim typie spotkań naukowcy **upowszechniają**. Proszę mi wierzyć, bo mam w tej dziedzinie doświadczenie – upowszechnianie, zaraz po pracy własnej w nauce, jest jedną z największych przyjemności życiowych. No, a upowszechnianie dzieciom i młodzieży to dopiero frajda!

To wszystko przyszło mi do głowy na sesji zamykającej I Kongres Polskich Towarzystw Naukowych (wrzesień 2013). Dowiedzieliśmy się, we własnym – co prawda – gronie, że jest w Polsce ponad 300 takich Towarzystw i zrzeszają one kilkadziesiąt tysięcy członków. A jakie mają ciekawe zainteresowania... Poza dużymi, o znanych nazwach i ustalonej reputacji, są też Towarzystwa: Mykologiczne, Kalorymetrii i Analizy Termicznej, Wzrostu Kryształów, Miłośników Dawnej Broni i Barwy, Magnezologiczne, Tribologiczne, Próżniowe. Ileż ciekawych informacji niosą ze sobą te Towarzystwa, które w swojej nazwie sygnalizują nieznane ogółowi zagadnienia.

Może jeszcze kiedyś o Towarzystwach napiszę, był to przecież Pierwszy Kongres!

Magdalena FIKUS

Wątpliwość Darwina rozwiana?

Jedną z głównych wątpliwości Karola Darwina co do idei ewolucji poprzez naturalną selekcję były skamieniałości z okresu kambru, trwającego około 50 milionów lat, a zakończonego 485 milionów lat temu. Ich niezwykłe bogactwo, skondensowane w stosunkowo krótkim z geologicznego punktu widzenia czasie, zdawało się podawać w wątpliwość czysto ewolucyjne pochodzenie. Z biegiem czasu wątpliwości wcale się nie zmniejszały. Wprost przeciwnie.

Nie jest to, co prawda, jedyna znana tzw. eksplozja planów budowy zwierząt (typów, łac. *phyla*). Jednak żadne inne podobne zdarzenie nie obejmuje takiego zróżnicowania tych tzw. linii rodowych.

Jest kilka aspektów, które trochę obniżają poziom wyjątkowości zjawiska. To z tego okresu pochodzą pierwsze znaleziska egzoszkieletów. Organizmy w nie wyposażone zachowują się lepiej od tych pozbawionych takich twardych części. Skoro wcześniejsze organizmy były bezszkieletowe, to nic dziwnego, że się ich mniej zachowało. Znane są jednak stanowiska, w których nastąpiła fosylizacja tkanek miękkich organizmów kambryjskich (np. łupki z Burgess w Kanadzie), co osłabia szkielet argumentu.

W skrócie: uczeni od czasów Darwina dyskutują, jak zinterpretować obserwowane, prawie jednoczesne, pojawienie się 530 milionów lat temu większości zarówno współczesnych, jak i znanych, spośród wymarłych, typów królestwa zwierząt (w szczególności z tego właśnie okresu pochodzą pierwsze skamieliny strunowców, do których należymy).

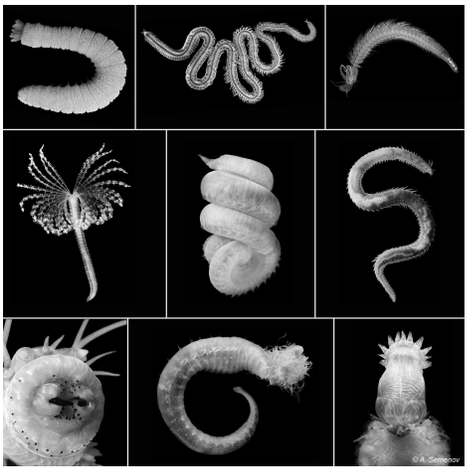
Autorzy pracy [1] twierdzą, że problem rozwiązali. Użyli tzw. zegara filogenetycznego oraz obfitych źródeł dotyczących danych anatomicznych oraz genetycznych współczesnych oraz kopalnych stawonogów (najbardziej rozgałęziony typ, tak w przeszłości, jak i obecnie; znanych gatunków stawonogów jest prawie rząd wielkości więcej niż pozostałych gatunków zwierząt). Kręcąc zaawansowaną statystycznie korbą, uzyskali oszacowanie, że tempo fenotypowej ewolucji w kambrze było cztery razy, a genetycznej pięć i pół raza szybsze niż w pozostałych okresach fanerozoiku (eon od początku paleozoiku, czyli od kambru do dziś). Oszacowania te są w miarę niewrażliwe na zakładany moment wyodrębnienia się typu stawonogów. Autorzy twierdzą, że choć oszacowane tempo jest wyjątkowo duże oraz obejmuje wyjątkowo dużo linii rodowych, to jest w zupełnej zgodzie z teorią ewolucji.

Czego było trzeba, żeby stać się drapieżnikiem i co z tego wynikło?

Najskuteczniejszy jest *homo sapiens sapiens*, oczywiście jako gatunek, bo obecnie pojedyncze osobniki, w średniej, nie są wystarczająco sprawne. Zastępczą aktywnością niektórych z nich jest wszelka rywalizacja, np. sportowa. Przykład występu naszej reprezentacji w narodowym namiocie beztlenowym pokazuje, jak ważna jest odpowiednia koncentracja (tego pierwiastka).

Być może tego typu obserwacją zainspirowani autorzy pracy [2] postanowili to uzasadnić i powiązać z gwałtownym różnicowaniem się organizmów na przełomie proterozoiku i fanerozoiku. Tym razem chodzi o próbę znalezienia przyczyny eksplozji kambryjskiej.

Właśnie wtedy wzrósł (do poziomu około 65% współczesnej wartości) i ustabilizował się poziom tlenu. Naukowcy porównali biozróżnicowanie oraz preferencje żywieniowe wieloszczetów żyjących obecnie w strefach o niskiej koncentracji tlenu, wykazując korelację między liczbą gatunków drapieżnych i ich wielkością a poziomem tlenu.



Wieloszczety

Беломорская биологическая станция, http://wsbs-msu.ru

Zdaniem autorów to właśnie użyteczność drapieżnictwa, która pojawiła się dopiero w kambrze, doprowadziła do zróżnicowania organizmów. Żeby być drapieżnikiem, trzeba ofiarę namierzyć (rozwój zmysłów) i dogonić (mięśnie). A mięśnie nie mogą obyć się bez tlenu. Przed kambrem występowały jedynie dwuwarstwowce (parzydełkowce i żebropławy), a zwierzęta dwubocznie symetryczne (np. wieloszczety) rozwinęły się, gdy poziom tlenu wzrósł i się ustabilizował. Wtórnie było to również impulsem wymuszającym różnicowanie się ofiar drapieżników, które albo stawały się zdolne do ukrywania, uciekania lub obrony, albo znikały ze stołu.

W ten sposób wyścig zbrojeń między drapieżnikami a ofiarami, prawdopodobnie leżący u podstaw różnicowania się organizmów, znajduje uzasadnienie w zmianie środowiska. Nadal jednak nie ma pełnej zgody co do przyczyny dość gwałtownej zmiany koncentracji tlenu.

Piotr ZALEWSKI

[1] M.S.Y. Lee, J. Soubrier oraz G.D. Edgecombe, *Rates of phenotypic and genomic evolution during the Cambrian explosion*, Current Biology, doi: 10.1016/j.cub.2013.07.055.

[2] E.A. Sperling, C.A. Frieder, A.V. Raman, P.R. Girguis, L.A. Levin oraz A.H. Knoll, *Oxygen, ecology, and the Cambrian radiation of animals*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA (PNAS), doi: 10.1073/pnas.1312778110.

Obliczenia: rachunki, dowody i gry

Filip MURLAK[*]

Co da się obliczyć, a czego się nie da? Dziś informatycy pytają o to rutynowo w kontekście przeróżnych problemów, jednak pierwsza odpowiedź na to pytanie pojawiła się na dobrą sprawę, jeszcze zanim ktokolwiek zdążył je zadać, i wprawiła środowisko naukowe w zakłopotanie.

Na początku XX wieku matematycy wierzyli, że każdy problem matematyczny da się rozstrzygnąć za pomocą obliczeń. U szczytu tego optymizmu, w 1928 roku, David Hilbert postulował opracowanie uniwersalnej metody pozwalającej na obliczenie prawdziwości dowolnego stwierdzenia sformułowanego w języku logiki pierwszego rzędu – czyli za pomocą spójników logicznych *i*, *lub*, *nie* oraz kwantyfikatorów *istnieje* i *dla każdego*. Niecałe 10 lat później Alan Turing udowodnił, że taki algorytm nie istnieje. A więc są rzeczy, których obliczyć się nie da! Ale co to właściwie znaczy? Wydaje się, że wiemy, co to znaczy *obliczyć*. Jednak aby wykazać, że czegoś obliczyć się nie da, potrzebujemy więcej niż tylko nieformalnej intuicji. Potrzebujemy *definicji* obliczenia.

Praca Alana Turinga ukazała się w 1937 roku. Rok wcześniej taki sam wynik osiągnął Alonzo Church dla innej formalizacji pojęcia obliczenia, która potem okazała się równoważna.

Rachunek jako obliczenie. Aby sformułować definicję obliczenia, Alan Turing przeanalizował pracę rachmistrza, czyli człowieka przeprowadzającego rachunki. Rachmistrz, mówi Turing, prowadzi obliczenia na papierze. Papier jest wprawdzie dwuwymiarowy, ale podczas obliczeń nie czynimy z tego użytku. Przyjmiemy więc, że obliczenie prowadzimy na papierze jednowymiarowym, czyli *taśmie*. Taśma ta jest podzielona na *komórki*, odpowiadające kratkom na papierze. W każdej komórce można napisać *symbol*. Komórka ma ograniczoną powierzchnię, a oko ludzkie ma ograniczoną rozdzielczość, więc bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że symbole pochodzą ze *skończonego alfabetu*. Działania rachmistrza zależą od obserwowanych symboli i jego *stanu umysłu*. Umysł ludzki jest obiektem skończonym i liczba odróżnialnych stanów, które może przyjmować, jest skończona (choć wielka i trudna do oszacowania). Rachmistrz jest w stanie jednocześnie obserwować jedynie pewną niewielką liczbę komórek, powiedzmy K.

Jakie działania wykonuje rachmistrz? Spróbujmy je opisać w terminach możliwie najprostszych, niepodzielnych akcji. Rachmistrz może *napisać symbol* w obserwowanej komórce taśmy. Może też *zmienić obserwowaną komórkę* na dowolną inną, jeśli tylko potrafi ją natychmiast zidentyfikować. Jakie komórki mogą być natychmiast zidentyfikowane? Komórki, która jest bardzo daleko od wszystkich obserwowanych komórek, nie da się łatwo odróżnić od jej sąsiadów. Rachmistrz jest w stanie dokładnie określić odległość jednym rzutem oka tylko wtedy, gdy odległość ta nie jest zbyt duża, powiedzmy nie większa niż D. Przyjmijmy, że rachmistrz może przesunąć każdą obserwowaną komórkę o co najwyżej D pozycji w lewo lub w prawo. Ponadto, w czasie prowadzenia obliczeń rachmistrz *zmienia stan umysłu*. Reasumując, pojedynczy krok obliczenia obejmuje napisanie symbolu w niektórych obserwowanych komórkach, przesunięcie niektórych obserwowanych komórek o co najwyżej D pozycji oraz zmianę stanu umysłu.

Nasz rachmistrz jest profesjonalistą, który bezbłędnie opanował reguły prowadzenia rachunków, ale nie ma własnej inwencji: każdy kolejny krok jego rachunku jest całkowicie zdeterminowany przez zawartość obserwowanych komórek i stan umysłu. Reguły stosowane przez rachmistrza można opisać funkcją, która ciągowi symboli $a_1, a_2, \ldots, a_K$ znajdujących się w obserwowanych komórkach i stanowi umysłu p przyporządkowuje nowy ciąg symboli $b_1, b_2, \ldots, b_K$, ciąg przesunięć obserwowanych komórek

[*]Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

$d_1, d_2, \ldots, d_K$ oraz nowy stan q. To znaczy, że rachmistrz w pierwszej obserwowanej komórce pisze symbol b_1 (jeśli $a_1 = b_1$, to rachmistrz nic nie pisze), a następnie zmienia obserwowaną komórkę na komórkę znajdującą się o d_1 pozycji w prawo, jeśli $d_1 > 0$, lub o $-d_1$ pozycji w lewo, jeśli $d_1 < 0$ (jeśli $d_1 = 0$, obserwowana komórka się nie zmienia). Następnie rachmistrz postępuje podobnie dla komórek $2, 3, \ldots, K$, po czym zmienia stan umysłu na q. Rachmistrz zaczyna obliczenie w pewnym ustalonym stanie umysłu, mając na taśmie zapisane dane początkowe i obserwując pierwszych K komórek taśmy. Potem wykonuje akcje wskazywane przez reguły. Obliczenie kończy się, gdy rachmistrz osiągnie odpowiedni stan umysłu, również z góry ustalony. Wynik obliczenia jest zapisany na taśmie.

Zwróćmy uwagę, że pracę rachmistrza może wykonać każdy, jeśli tylko dostanie odpowiednie instrukcje: listę symboli alfabetu, listę możliwych stanów, stan początkowy, stan końcowy oraz powyższą funkcję. A skoro tak, to dlaczego nie mogłaby tej pracy wykonywać maszyna? W ciągu 10 lat od ogłoszenia koncepcji maszyny Turinga pierwsze programowalne komputery zostaną skonstruowane w Niemczech, Wielkiej Brytanii i Stanach Zjednoczonych...

Wróćmy jednak do problemu obliczalności. Alan Turing przyjął, że uniwersalna metoda obliczania odpowiedzi na pytanie to po prostu taki zestaw instrukcji dla rachmistrza: wymagamy jedynie tego, żeby dla każdych danych początkowych rachmistrz kończył obliczenie i zapisywał na taśmie poprawną odpowiedź. W przypadku problemu postawionego przez Hilberta dane początkowe to stwierdzenie zapisane za pomocą symboli logicznych, a odpowiedź brzmi *tak* lub *nie*, zależnie od tego, czy dane stwierdzenie jest prawdziwe, czy fałszywe. Turing udowodnił, że istnieją problemy, dla których nie ma uniwersalnej metody obliczania odpowiedzi i że zagadnienie opisane przez Hilberta jest jednym z takich problemów.

O problemach takich mówimy, że są *nierozstrzygalne*. Innym słynnym problemem nierozstrzygalnym jest *problem stopu*, tzn. problem stwierdzenia, czy dla danego zestawu instrukcji i danych początkowych obliczenie zakończy się, czy też będzie trwało w nieskończoność.

Dowód jako obliczenie. Wyniki Turinga zdają się obnażać słabość matematyki: oto są rzeczy, których nie da się obliczyć. Ale przecież matematyka to nie tylko rachunki! Czym różni się praca matematyka próbującego udowodnić twierdzenie od pracy rachmistrza? Rachmistrz działa zgodnie z instrukcjami, jednoznacznie wskazującymi każdy kolejny krok obliczeń. Matematyk, prowadząc rozumowanie, również kieruje się pewnymi regułami, jednak reguły te nie mówią, jaki krok należy wykonać, ale raczej jakie są możliwe kroki. Spośród wielu możliwych kroków za każdym razem trzeba wybrać jeden i nie ma żadnej gwarancji, że akurat ten doprowadzi nas do celu. Aby uwzględnić to zjawisko w modelu maszyny Turinga, wystarczy zmodyfikować funkcję opisującą reguły obliczenia. Funkcja opisująca pracę rachmistrza wskazywała kolejną akcję na podstawie symboli w obserwowanych komórkach i bieżącego stanu umysłu. Funkcja opisująca pracę matematyka będzie wskazywała *zbiór możliwych akcji*. Taki model obliczeń nazywamy *niedeterministyczną* maszyną Turinga. Model opisany wcześniej to maszyna *deterministyczna*.

Dla uproszczenia rozważań przyjmijmy, że interesują nas wyłącznie pytania typu *tak*/*nie*. Nawet dla takich pytań różne ciągi wyborów maszyny niedeterministycznej mogą prowadzić do różnych odpowiedzi. Co zatem jest wynikiem obliczeń? Wróćmy na chwilę do zjawiska, które usiłujemy modelować, czyli do dowodzenia twierdzeń. Twierdzenie uznajemy za udowodnione, gdy odkryjemy ciąg kroków prowadzący do celu. Nie przejmujemy się tym, że wiele wyborów okazuje się złych i kolejne próby dowodu lądują w koszu... Wypada nam zatem przyjąć, że wynikiem obliczenia niedeterministycznej maszyny Turinga dla ustalonych danych początkowych jest *tak*, jeśli choć jeden ciąg wyborów prowadzi do odpowiedzi *tak*. Jeśli wszystkie ciągi wyborów prowadzą do odpowiedzi *nie*, wtedy przyjmujemy, że wynikiem obliczenia jest *nie*.

Innymi słowy, maszyna konstruuje dowód na to, że odpowiedź brzmi *tak*: należy odpowiedzieć *tak* wtedy, gdy istnieje choć jeden dowód.

Wydawać by się mogło, że niedeterministyczne maszyny potrafią rozwiązać więcej problemów niż deterministyczne. Okazuje się jednak, że tak nie jest: każdą niedeterministyczną maszynę Turinga $\mathcal{N}$ można zasymulować za pomocą maszyny deterministycznej $\mathcal{D}$. Symulacja ta nie jest trudna do wyobrażenia: wystarczy równolegle rozważać wszystkie możliwe wybory maszyny $\mathcal{N}$. Obliczenia obu maszyn rozpoczynają się tak samo: na taśmie zapisane są dane początkowe, maszyny znajdują się w stanie początkowym, obserwują pierwsze K komórek taśmy. Maszyna $\mathcal{N}$ w tym momencie wybiera jedną z kilku możliwych akcji. Maszyna $\mathcal{D}$ natomiast kopiuje zawartość taśmy tyle razy, ile możliwych akcji ma maszyna $\mathcal{N}$ (kolejne kopie oddziela dodatkowym symbolem, nieużywanym przez $\mathcal{N}$). Ponadto, w każdej kopii zaznacza pozycję komórek obserwowanych przez $\mathcal{N}$ oraz stan maszyny $\mathcal{N}$. Następnie, w każdej z tych kopii $\mathcal{D}$ symuluje inny wybór $\mathcal{N}$: modyfikuje zawartość taśmy, przesuwa obserwowane komórki i zmienia stan maszyny zgodnie z opisem akcji znajdującym się w zbiorze reguł maszyny $\mathcal{N}$. W ten sposób $\mathcal{D}$ ma na taśmie wszystkie możliwe rezultaty obliczenia $\mathcal{N}$ po jednym kroku. Dalej symulacja przebiega podobnie: dla każdego rezultatu obliczenia wykonujemy tyle kopii, ile maszyna $\mathcal{N}$ ma możliwości do wyboru, a potem w każdej kopii wykonujemy inną akcję. Po kolejnych rundach symulacji mamy na taśmie zapisane wszystkie możliwe rezultaty obliczenia $\mathcal{N}$ po $2, 3, 4, \ldots$ krokach. Jeśli w dowolnym momencie otrzymamy wynik *tak*, to kończymy symulację i udzielamy odpowiedzi *tak*. Jeśli natomiast dojdziemy do sytuacji, w której wszystkie rezultaty odpowiadają zakończonemu obliczeniu $\mathcal{N}$ z wynikiem *nie*, to kończymy obliczenie z odpowiedzią *nie*.

Czytelnik Dociekliwy spyta, czy mamy gwarancję, że nasza symulacja zawsze się zakończy. Jeśli istnieje ciąg wyborów $\mathcal{N}$ prowadzący do wyniku *tak*, to w końcu się na niego natkniemy. Ale co, jeśli taki ciąg wyborów nie istnieje? Wtedy wiemy, że każdy ciąg wyborów maszyny $\mathcal{N}$ prowadzi do odpowiedzi *nie* w skończenie wielu krokach. Czy z tego wynika, że nasza symulacja też się skończy po skończenie wielu krokach? Okazuje się, że tak. Gwarancji udziela nam następujący lemat Königa: *jeśli każdy wierzchołek w drzewie ma skończenie wiele dzieci i każda gałąź jest skończona, to całe drzewo też jest skończone.*

Gra jako obliczenie. Wiemy już, że dodanie niedeterministycznych wyborów do naszego modelu obliczeń nie pozwala na rozwiązywanie nowych problemów. Spróbujmy więc czegoś więcej. Wyobraźmy sobie, że matematyk próbuje przekonać swoją sceptyczną koleżankę, że potrafi udowodnić pewne twierdzenie. Przypuśćmy, że matematyk mówi: „Aby udowodnić twierdzenie, dowodzę lemat A, potem lemat B, a z nich otrzymuję twierdzenie jako wniosek C". Koleżanka mogłaby odpowiedzieć: „Dobrze, ale jak dowodzisz lemat B?". Matematyk na to: „Robię najpierw obserwację B.1, potem korzystam z ogólnego faktu B.2 i dostaję lemat jako wniosek B.3". Koleżanka: „W porządku, pokaż, jak dostajesz wniosek B.3". Matematyk podaje dowód wniosku. Po takiej wymianie zdań sceptyczna koleżanka przyjmuje, że matematyk faktycznie zna dowód twierdzenia, choć nie zobaczyła go w całości. Koleżanka wierzy bowiem, że matematyk nie tylko potrafił odpowiedzieć na pytania, które usłyszał, ale że ma kompletną *strategię* odpowiedzi na wszystkie możliwe pytania.

Taki sposób weryfikacji istnienia dowodu modelujemy za pomocą *alternujących* maszyn Turinga. Stany maszyny alternującej są podzielone na dwa zbiory: stany egzystencjalne, kontrolowane przez matematyka, oraz stany uniwersalne, kontrolowane przez jego sceptyczną koleżankę. Poza tym maszyna alternująca wygląda tak jak niedeterministyczna, tzn. obliczenie wymaga dokonywania wyborów spośród dostępnych kroków. Jeśli bieżący stan jest egzystencjalny, to matematyk wybiera kolejny krok obliczenia. Jeśli jednak stan jest uniwersalny, to kolejny krok wybiera sceptyczna koleżanka, a matematyk musi umieć poradzić sobie niezależnie od wyboru koleżanki. Maszyna udziela odpowiedzi *tak*, jeśli matematyk ma strategię prowadzącą do wyniku *tak*, niezależnie od wyborów koleżanki.

Czy w tak poszerzonym modelu da się rozwiązać więcej problemów? Okazuje się, że odpowiedź znowu jest negatywna. Dość łatwo jest symulować maszynę alternującą $\mathcal{A}$ za pomocą maszyny niedeterministycznej $\mathcal{N}$. Symulacja jest

Rozwiązanie zadania F 843.
Zgodnie z prawem Faradaya siła elektromotoryczna jest równa

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t},$$

gdzie ϕ to strumień wektora indukcji magnetycznej. Z warunków zadania mamy $\phi = ktS$, a więc $\mathcal{E} = kS$, gdzie S jest polem powierzchni ograniczonej obręczą. Ze względu na symetrię zagadnienia wartość pola elektrycznego w każdym punkcie obręczy jest taka sama. Ponieważ wartość liczbowa siły elektromotorycznej indukcji jest z definicji równa wykonanej przez zewnętrzne źródło energii pracy potrzebnej na jednokrotny obieg obwodu przez jednostkowy ładunek elektryczny, więc zachodzi związek $\mathcal{E} = 2\pi r E$. Stąd

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

i ostatecznie

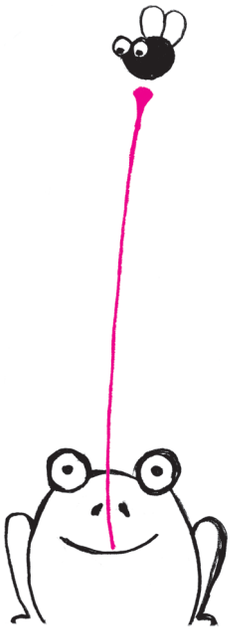
$$E = k\frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{kr}{2}.$$

podobna do poprzedniej: na taśmie trzymamy częściowe rezultaty obliczeń $\mathcal{A}$, ale tym razem tylko niektóre. Mianowicie, jeśli w rozważanym częściowym rezultacie maszyna $\mathcal{A}$ jest w stanie egzystencjalnym, to maszyna $\mathcal{N}$ niedeterministycznie wybiera jeden z możliwych ruchów maszyny $\mathcal{A}$. Jeśli natomiast $\mathcal{A}$ jest w stanie uniwersalnym, to $\mathcal{N}$ wykonuje wszystkie możliwe ruchy w oddzielnych kopiach częściowego rezultatu, podobnie jak wcześniej. Maszyna $\mathcal{N}$ akceptuje, jeśli wszystkie częściowe rezultaty odpowiadają ukończonemu obliczeniu maszyny $\mathcal{A}$ z wynikiem *tak*.

Pożytki z niedeterminizmu i alternacji. Pokazaliśmy, że zarówno maszyny niedeterministyczne, jak i alternujące rozwiązują dokładnie te same problemy co maszyny deterministyczne. Czy to znaczy, że z niedeterminizmu i alternacji nie ma żadnego pożytku? Dotychczas interesowaliśmy się wyłącznie tym, czy odpowiedź na pytanie da się obliczyć, czy też nie. Jednak dużo istotniejsze jest pytanie, czy odpowiedź da się obliczyć szybko. Rozważmy następujący problem: spośród 400 uczniów należy wybrać 100, którzy będą spali w jednej dużej sali podczas wycieczki szkolnej, należy jednak przestrzegać reguły, aby pewne pary uczniów nie znalazły się jednocześnie w tej sali; lista takich zakazanych par jest również częścią danych początkowych. Jak można taki problem rozwiązać? Można rozważyć po kolei wszystkie możliwe podzbiory 100 uczniów i dla każdego zbioru sprawdzić, czy zawiera zakazaną parę, czy nie. Ale czy ta metoda jest praktyczna? Wymaga ona rozważenia $\binom{400}{100} \approx 2{,}2 \cdot 10^{96}$ podzbiorów. Ta liczba na papierze wygląda niegroźnie, ale wedle szacunków kosmologów wielokrotnie przekracza liczbę atomów w obserwowalnym wszechświecie. Trudno więc sobie wyobrazić, że tą metodą można uzyskać wynik nawet przy użyciu bardzo szybkiego komputera...

Z drugiej strony, niedeterministyczna maszyna Turinga mogłaby po prostu przejrzeć listę uczniów i niedeterministycznie zaznaczyć 100 spośród nich, a następnie sprawdzić, czy wybrany podzbiór nie zawiera żadnej zakazanej pary. Ta metoda wymaga przejrzenia listy uczniów raz dla każdej zakazanej pary, a więc nie więcej niż $\binom{400}{2} = 79800$ razy. Większości współczesnych komputerów nie zajęłoby to nawet sekundy. Kłopot polega na tym, że komputery są realizacją deterministycznej maszyny Turinga, a więc nie mogą po prostu niedeterministycznie wygenerować podzbioru uczniów.

Pytanie brzmi więc: jak szybko można symulować maszyny niedeterministyczne (lub alternujące) za pomocą maszyn deterministycznych. Obie opisane przez nas symulacje są wykładnicze: jeśli maszyna niedeterministyczna o Q stanach wykonuje N kroków, to symulująca maszyna deterministyczna wykonuje mniej więcej Q^N kroków. Na przykład dla niedeterministycznej maszyny rozwiązującej problem wyboru 100 uczniów taka symulacja zajęłaby więcej czasu niż bezpośrednie przejrzenie wszystkich możliwych podzbiorów. Czy da się to zrobić lepiej? Konkretnie, czy da się zasymulować obliczenie niedeterministyczne długości N za pomocą deterministycznego obliczenia długości N^d, dla pewnej stałej d? Na to pytanie do dziś nikomu nie udało się udzielić odpowiedzi. Odpowiedź twierdząca oznaczałaby, że problemy rozwiązywalne w wielomianowo wielu krokach na maszynie niedeterministycznej da się rozwiązać w wielomianowo wielu krokach na maszynie deterministycznej, czyli że $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$. Odpowiedź przecząca nie dawałaby bezpośrednich wniosków dotyczących problemu $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, ale byłaby nie mniej sensacyjna. Problemy rozwiązywalne na maszynie alternującej w wielomianowo wielu krokach tworzą tzw. klasę PSPACE (nazwa pochodzi od równoważnej charakteryzacji przez maszyny deterministyczne używające wielomianowej liczby komórek taśmy). O tej klasie również nie wiadomo, czy jest równa klasie NP, czy też jest od niej większa. Choć pytanie to jest mniej słynne, rozstrzygnięcie tego problemu byłoby również wielkim przełomem.



Problem ustalenia, czy $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, jest jednym z kilku najważniejszych problemów otwartych współczesnej matematyki i prawdopodobnie najistotniejszym pytaniem w teoretycznej informatyce.

Ze świata USOS. Część 2 – Każdy student nosi w kieszeni… komputer, czyli o Elektronicznej Legitymacji Studenckiej

Mówi się, że każdy nosi w plecaku buławę. Akurat w odniesieniu do studenta prawdziwe jest powiedzenie, że każdy nosi w kieszeni komputer i wcale to nie oznacza, że studiuje informatykę. Może określenie „komputer" jest nieco na wyrost, choć to całkiem sprawny „komputerek", z własnym procesorem, pamięcią, magistralą i systemem operacyjnym. Mowa o **ELS**, czyli *Elektronicznej Legitymacji Studenckiej*. Takie legitymacje są wydawane na polskich uczelniach od kilku lat (dokładniej od 2006 roku). ELS to plastikowa karta, która od strony graficznej na wszystkich uczelniach wygląda tak samo, gdyż wygląd ten jest określony przez rozporządzenie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego. W plastiku są osadzone układy elektroniczne, które mogą się różnić. Rozporządzenie wymaga, aby ELS była wyposażona w **układ stykowy**, a nawet precyzuje, jakie informacje mają tam być zapisane i w jakim formacie.

Układ stykowy widać gołym okiem, w podobny są wyposażone te lepsze karty płatnicze. Większość ELS ma dodatkowo (opcjonalny) **układ bezstykowy**.

Pamięć układu stykowego zwykle ma pojemność do 90 kilobajtów. Pamięć układu bezstykowego zwykle ma pojemność 1 kilobajta.

Ten układ obejmuje chip oraz antenkę do komunikacji. Jedno i drugie jest zatopione w plastiku i wypatrzyć je może tylko sprawne oko. Taki układ jest elementem np. Warszawskiej Karty Miejskiej.

Proces przygotowania ELS jest dość złożony i wymaga specjalnych urządzeń i oprogramowania. Ważną rolę pełni w nim USOS. Gdy do USOS trafią dane nowego studenta oraz zdjęcie w odpowiednim formacie (widoczne lewe ucho), pracownik dziekanatu zleca wydruk ELS. USOS sprawdza poprawność zlecenia – na raz może być aktywne tylko jedno, student nie może mieć ważnej legitymacji, musi być aktualnie zapisany na studia, a osoba zlecająca wydruk musi mieć odpowiednie uprawnienia. Zlecenia napływają równocześnie z różnych dziekanatów (na UW jest ich ponad 50), ale trafiają do centralnej bazy USOS, skąd odczytuje je pracownik **Centrum Personalizacji**. Centrum jest zwykle jedno, a podstawowym jego wyposażeniem jest komputer i drukarka. Drukarka to nie byle jaka, bo przecież ma drukować na plastiku i zapisywać dane w układzie stykowym ELS. Różne są technologie druku na plastiku, akurat na UW stosuje się **technologię termosublimacyjno-retransferową**.

Termosublimacja oznacza zmianę stanu skupienia ciała stałego bezpośrednio w stan gazowy pod wpływem bardzo wysokiej temperatury.

Termosublimacja polega na tym, że barwnik ze specjalnej kolorowej taśmy zamontowanej wewnątrz drukarki jest odrywany i przenoszony na legitymację. Taśma ma trzy kolorowe barwne prostokąty, służące do wydruku zdjęcia, oraz dwa czarne, do wydruku tekstu po obu stronach legitymacji. Retransferowość oznacza, że barwniki nie są przenoszone bezpośrednio na legitymację, tylko najpierw na przezroczystą taśmę, a dopiero z niej na plastik. Dzięki temu jakość nadruku jest lepsza, a legitymacja nie jest narażona na uszkodzenia spowodowane bardzo wysoką temperaturą potrzebną do termosublimacji. W USOSowni (ten portal informacyjny UW reklamowaliśmy w poprzednim numerze) można znaleźć artykuł o ELS ze zdjęciami ilustrującymi przebieg wydruku oraz uczestniczące w tym urządzenia (`http://ususownia.uw.edu.pl/node/292`).

Na awersie legitymacji jest kolorowe zdjęcie, na rewersie, w białym prostokącie, zwykle jest drukowany tzw. **kod kreskowy**. Taki kod kreskowy to nic innego tylko specjalny rodzaj czcionki, w której poszczególne znaki mają postać kresek i odstępów różnej szerokości. Kod kreskowy może być zbudowany na bazie numeru układu bezstykowego, numeru legitymacji studenckiej lub dowolnego innego unikatowego identyfikatora, jaki uczelnia przypisze studentowi. Do odczytywania kodów kreskowych służą specjalne czytniki, na uczelni z tej części ELS korzystają głównie biblioteki.

Personalizacja, czyli nadruk graficzny ELS, to tylko jedno z zadań drukarki. Równie ważne jest wpisanie odpowiedniej informacji na układ stykowy karty. Są to dane osobowe studenta, nazwa uczelni oraz data ważności legitymacji. Dane te są podpisane **podpisem elektronicznym**. Każdy pracownik uczelni, który zapisuje coś na karcie, czyli drukarz lub pracownik dziekanatu przedłużający ważność ELS (o tym będzie później), musi posiadać podpis elektroniczny, w celu cyfrowego poświadczenia zapisywanej informacji.

Jak działa taki podpis elektroniczny? W technologii **PKI** (ang. *Public Key Infrastructure* – infrastruktura klucza publicznego; inna nazwa to **kryptografia asymetryczna**) każdemu użytkownikowi przydziela się parę kluczy oraz wirtualny dokument potwierdzający fakt posiadania konkretnych kluczy przez konkretną osobę (czyli **certyfikat**), wydawany przez **urząd certyfikacji**. W Polsce jest ich tylko kilka. Urząd certyfikacji musi nie tylko dbać o wiarygodność wydawanych podpisów, ale także informować publicznie o tych podpisach, które straciły ważność. Te klucze to dwie liczby – jedna z nich, nazywana **kluczem publicznym**, jest dostępna publicznie, drugą, nazywaną **kluczem prywatnym**, trzeba chronić równie mocno jak PIN do karty płatniczej czy hasło do CAS. Oczywiście, ta para liczb musi mieć odpowiednie własności matematyczne, w szczególności uzyskanie klucza prywatnego na podstawie klucza publicznego musi być **obliczeniowo trudne**. Podpisywanie dokumentu elektronicznego polega na wykonaniu następujących czynności:

1. Tworzony jest skrót dokumentu za pomocą jednokierunkowej funkcji skrótu, czyli charakterystyczna dla niego liczba o określonej długości zależna od użytej funkcji skrótu (o takich funkcjach była mowa w poprzednim odcinku).
2. Uzyskany skrót jest szyfrowany przy wykorzystaniu klucza prywatnego osoby podpisującej. Podczas składania podpisu osoba ta wyraża zgodę na takie użycie, podając kod PIN karty, na której znajdują się klucze. Po zaszyfrowaniu skrótu dokument elektroniczny jest już podpisany.

Weryfikacja podpisanego dokumentu wygląda następująco:

1. Tworzony jest skrót dokumentu (dokładnie tak samo jak podczas podpisywania).
2. Zaszyfrowany skrót dokumentu jest deszyfrowany przy wykorzystaniu klucza publicznego osoby podpisującej.
3. Obie wyliczone wartości porównuje się. Jeśli są równe, to mamy pewność, że dokument został podpisany kluczem prywatnym pasującym do użytego klucza publicznego.

I po co ta cała zabawa z kluczami i podpisywaniem? Po to, żeby nikt nie mógł zapisanej na ELS informacji podrobić, przykładowo wpisując dłuższy termin ważności legitymacji. Taki podpis elektroniczny zapewnia: autentyczność, niezaprzeczalność i integralność dokumentu elektronicznego.

Pytanie do Czytelnika – jak wykorzystać tę samą parę kluczy w celu wysłania do kogoś tajnego listu, który tylko adresat będzie mógł odczytać?

W układzie stykowym karty jest zapisany zarówno podpisany rekord z danymi studenta, jak i certyfikat potrzebny do poświadczenia użytego podpisu cyfrowego. Odczytując dane z układu stykowego karty, można także odczytać certyfikat, czyli dowiedzieć się, kto zapisał te dane.

No tak, ale przecież konduktor w pociągu czy kontroler w tramwaju nie ma przy sobie urządzenia do odczytu danych z układu stykowego (no, przynajmniej jeszcze nie ma). Jak zatem ma sprawdzić ważność legitymacji i uprawnienia studenta do zniżki? MNiSW przewidziało ten problem i wymaga dodatkowo umieszczenia na rewersie ELS **hologramu** z datą ważności. Taki hologram to specjalny rodzaj „znaczka", trudny do podrobienia (technika wytwarzania podobna jest do produkcji banknotów). Zatem ważność legitymacji jest poświadczana na dwa sposoby: poprzez datę wpisaną cyfrowo na układzie stykowym i naklejony na ELS hologram z datą.

A to jeszcze nie koniec! Przecież na większości ELS jest także układ bezstykowy. Układ ten może zawierać 16 sektorów, służących do zapisu informacji. W pewnych miastach niektóre z tych sektorów są wykorzystywane jako nośnik karty miejskiej (tak jest np. w Warszawie, Poznaniu, Wrocławiu czy Krakowie). Dlatego właśnie blankiety ELS, nim od producenta trafią na uczelnię, najpierw wędrują do MZK, gdzie przygotowuje się sektory układu bezstykowego do pełnienia roli karty miejskiej.

Numer układu stykowego i układu bezstykowego jest unikatowy dla każdej karty na świecie. Oba te numery trafiają, oczywiście, do USOS-a wraz z informacją o wydaniu studentowi ELS i o użytym certyfikacie.

Uff, ELS gotowa, teraz może trafić do rąk studenta. Student może się nią cieszyć… przez semestr, bo po semestrze traci ważność. Na szczęście przedłużanie ważności ELS jest prostsze od jej drukowania, bo nie wymaga zmian w części graficznej. Nie potrzeba do tego drukarki, dzięki temu można to zrobić w dowolnym dziekanacie. Potrzebny jest jedynie czytnik układu stykowego i podpis cyfrowy. Pracownik dziekanatu wkłada ELS do jednego czytnika, a swoją kartę z certyfikatem do drugiego (często jest on wbudowany w klawiaturę). USOS odczytuje informacje z ELS, zmienia datę ważności, podpisuje zmieniony rekord (oczywiście pyta o PIN) i zapisuje go na legitymacji. Przy okazji upewnia się, że ma do czynienia z aktywnym studentem, a także, że nikt niepowołany nie próbował gmerać w układzie stykowym karty.

Blankiety używane jako nośniki ELS są dodatkowo zabezpieczane różnego rodzaju kluczami. Wymienimy tylko niektóre. Każda partia kart jest zabezpieczona tzw. **transportowym kluczem systemowym**. Przed wykonaniem na karcie jakiejkolwiek operacji trzeba zdjąć blokadę. Każda uczelnia posługuje się własnym **kluczem macierzystym** – ściśle tajnym kluczem zabezpieczającym karty wydawane przez uczelnię przed zapisem. Ten klucz zna tylko USOS. Każda karta jest jeszcze chroniona unikatowym **kluczem zabezpieczającym** pliki legitymacji studenckiej przed zapisem, stworzonym przez zastosowanie odpowiedniego algorytmu do klucza macierzystego uczelni i numeru seryjnego karty. Osobnymi kluczami chronione są sektory układu bezstykowego.

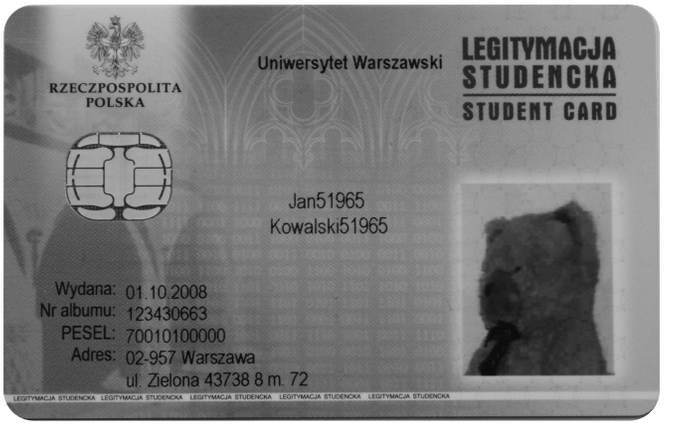
Dziś ELS najczęściej pełni rolę legitymacji studenckiej, karty bibliotecznej, nośnika karty miejskiej. A w przyszłości? Możliwości jest wiele – może to być karta dostępowa, karta lojalnościowa, karta do realizacji mikropłatności, nośnik kwalifikowanego podpisu cyfrowego (żeby i student mógł czasem coś cyfrowo podpisać), a potencjalnie dowolnej aplikacji napisanej w Javie.

Java to język programowania często wykorzystywany do pisania aplikacji na karty stykowe czy komórki.

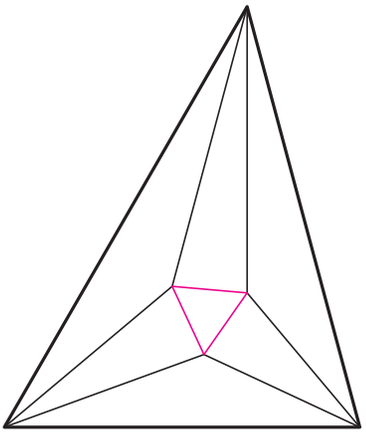
Przykładowo, na UW w niektórych akademikach ELS otwiera drzwi wejściowe do budynku (oczywiście pod warunkiem, że student jest zakwaterowany w tym akademiku). Także bramka w Bibliotece Uniwersyteckiej przepuszcza studentów z ważną ELS.

Do obsługi ELS w USOS-ie powstał specjalny duży moduł. Zlecanie wydruku, sterowanie pracą drukarki, przedłużanie ważności, zapis i odczyt z układu stykowego i bezstykowego, obsługa podpisów cyfrowych – to tylko część realizowanych funkcji. Trzon oprogramowania powstał jako praca magisterska dwóch studentów Wydziału MIM. Zgadnij, Czytelniku, czyje pierwsze dwie legitymacje zostały wydrukowane na UW.

Janina MINCER-DASZKIEWICZ



Twierdzenie Morleya

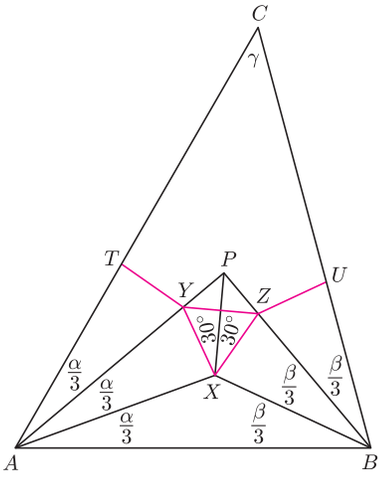


Rys. 1

Każdy wie, co to są dwusieczne kątów – tutaj będziemy mówili o *trójsiecznych*, czyli prostych dzielących kąt (i jego kąt wierzchołkowy) na trzy równe części. Zatem trójsieczne są dwie. Mają one dziwną własność zwaną twierdzeniem Morleya.

Punkty przeciecięcia tych trójsiecznych kątów trójkąta, które sąsiadują z którymś z boków trójkąta, są wierzchołkami trójkąta równobocznego (rys. 1).

Dowieść można go np. tak. Niech trójsieczne kątów przy wierzchołkach A i B, sąsiadujące z AB, przecinają się w punkcie X, a pozostałe trójsieczne tych kątów w punkcie P. Po obu stronach odcinka PX odłóżmy kąt 30° o wierzchołku X. Przecięcia ramion tego kąta z AP i BP oznaczmy, odpowiednio, przez Y i Z (rys. 2). Wykażemy, że trójkąt XYZ jest równoboczny i proste CY i CZ są trójsiecznymi kąta przy wierzchołku C, co zakończy dowód twierdzenia.



Rys. 2

W tym celu zauważmy najpierw, że PX jest dwusieczną kąta APB. Wynika to z faktu, że AX i BX są dwusiecznymi, odpowiednio, kątów PAB i PBA trójkąta ABP, a trzy dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Okazało się więc, że czworokąt $XYPZ$ jest deltoidem, z czego wynika, że $XY = XZ$, co dowodzi, że trójkąt XYZ jest równoramienny.

Ponadto mamy też $PY = PZ$, a skoro tak, to

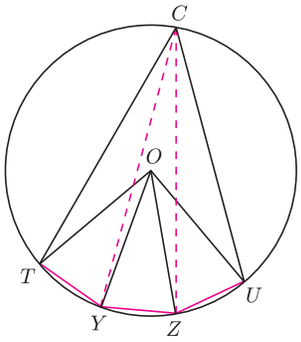
$$\sphericalangle PYZ = \sphericalangle PZY = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle YPZ) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta\right) = \frac{1}{3}(\alpha + \beta).$$

Oznaczmy teraz obrazy symetryczne punktu X względem prostych AP i BP, odpowiednio, przez T i U (oczywiście, leżą one na AC i BC). Mamy więc $TY = YZ = ZU$.

Ponieważ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, więc

$$\begin{aligned}\sphericalangle TYZ &= \sphericalangle TYP + \sphericalangle PYZ = 60^\circ + 2\sphericalangle PYZ = \\ &= 60^\circ + \frac{2}{3}(\alpha + \beta) = 60^\circ + \frac{2}{3}(180^\circ - \gamma) = 180^\circ - \frac{2}{3}\gamma.\end{aligned}$$

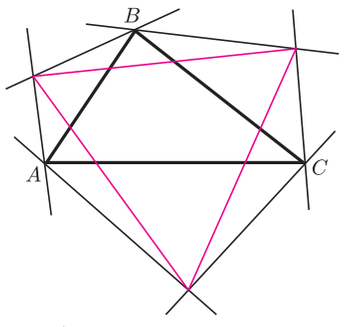
Podobnie $\sphericalangle UZY = 180^\circ - \frac{2}{3}\gamma$. Na podstawie równości tych kątów i ich ramion można stwierdzić, że punkty T, Y, Z, U leżą na jednym okręgu (rys. 3). Jego środkiem jest mianowicie punkt O przecięcia dwusiecznych kątów TYZ i UZY. Każdy z odcinków TY, YZ i ZU jest cięciwą odpowiadającą kątowi środkowemu $\frac{2}{3}\gamma$. Ponieważ rozwartość kąta ACB (czyli TCU) jest równa γ, więc punkt C leży również na tym samym okręgu, a kąty TCY i UCZ, jako równe połowom kątów TOY i UOZ, mają rozwartość $\frac{1}{3}\gamma$, co kończy dowód.



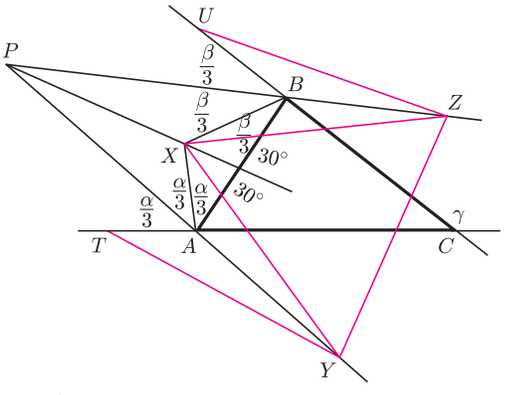
Rys. 3

W sformułowaniu twierdzenia nie było mowy o tym, że chodzi o kąty wewnętrzne, choć z tego korzystałem – rzecz w tym, że twierdzenie Morleya jest prawdziwe również dla kątów zewnętrznych i ma praktycznie taki sam dowód (trzeba tylko pamiętać, że suma kątów zewnętrznych jest równa 360°). Poniżej są rysunki do tego dowodu.

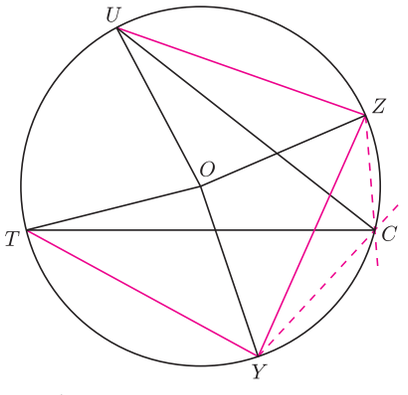
M. K.



Rys. 1′

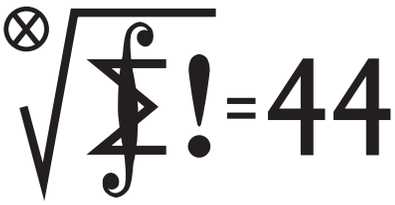


Rys. 2′



Rys. 3′

Klub 44

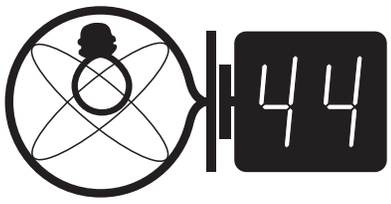


Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2014

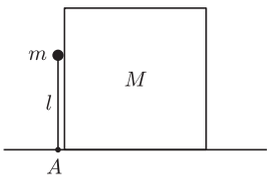
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 659 ($WT = 1{,}61$) i 660 ($WT = 1{,}26$) z numeru 4/2013

Paweł Łabędzki	Kielce	46,24
Krzysztof Kamiński	Pabianice	42,89
Paweł Najman	Kraków	42,58
Rami Marcin Ayoush	Szelków	41,55
Marek Spychała	Warszawa	39,37
Janusz Fiett	Warszawa	37,62
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Andrzej Idzik	Bolesławiec	35,50

Pan Paweł Łabędzki: witamy w Klubie 44 !



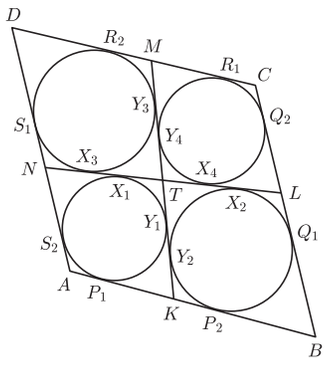
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2014



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 554 ($WT = 2{,}44$), 555 ($WT = 1{,}98$) 556 ($WT = 2{,}58$) i 557 ($WT = 2{,}13$) z numerów 3–4/2013

Andrzej Idzik	Bolesławiec	44,26
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	43,72
Krzysztof Magiera	Łosiów	37,67
Michał Koźlik	Gliwice	33,75

Po raz jedenasty liczbę 44 punktów uzyskał Andrzej Idzik – gratulujemy!



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 669, 670

Redaguje Marcin E. KUCZMA

669. W trójkącie ABC okrąg wpisany jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty X, Y, Z zostały obrane odpowiednio na bokach BC, CA, AB tak, że $|AY| = |AZ|$, $|BX| = |BZ|$. Dowieść, że prosta DE połowi odcinek XY.

670. Udowodnić nierówność

$$\frac{a^2+1}{b^2+c+1} + \frac{b^2+1}{c^2+a+1} + \frac{c^2+1}{a^2+b+1} \geqslant 2$$

dla liczb rzeczywistych $a, b, c > -1$.

Zadanie 670 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Zadania z fizyki nr 566, 567

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

566. Na dachu nachylonym do poziomu pod kątem φ leży ołowiana blacha. Współczynnik tarcia ołowiu o dach to $\mu > \operatorname{tg}\varphi$. Współczynnik rozszerzalności liniowej ołowiu wynosi α. Zakładamy, że temperatura w ciągu doby wzrasta od wartości t_1 do t_2, a potem ponownie obniża się do t_1. Długość blachy przy minimalnej temperaturze t_1 jest równa l. Na jaką odległość blacha spełznie z dachu w ciągu doby?

567. Nieważki pręt o długości l z niewielkim ciężarkiem o masie m na końcu może obracać się wokół punktu A i znajduje się w położeniu pionowym, dotykając klocka o masie M (rysunek). W wyniku lekkiego popchnięcia układ zostaje wprawiony w ruch. Jaki musi być stosunek mas m/M, aby w chwili utraty kontaktu ciężarka z klockiem pręt tworzył z poziomem kąt $\alpha_0 = \pi/6$? Ile będzie wynosić w tym momencie prędkość klocka? Tarcie zaniedbać.

Rozwiązanie zadania M 1403.

Zauważmy, że

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{k}}\Big)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{k}} \sum_{l=1}^{n} \frac{x_l}{\sqrt{l}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{k}} \sum_{l=1}^{k} \frac{x_l}{\sqrt{l}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{k}} k \frac{x_k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2,$$

gdzie w ostatniej nierówności skorzystaliśmy z tego, że ciągi $(x_j), (1/\sqrt{j})$ są malejące.

Rozwiązanie zadania M 1402.

Przyjmijmy oznaczenia punktów styczności okręgów wpisanych z bokami czworokątów jak na rysunku. Warunek $AB + CD = BC + AD$ jest równoważny $P_1P_2 + R_1R_2 = Q_1Q_2 + S_1S_2$, gdyż $AP_1 = AS_2$, $BQ_1 = BP_2$, $CQ_2 = CR_1$ i $DS_1 = DR_2$. Zauważmy, że

$$P_1P_2 = X_1X_2 = X_1T + TX_2 = Y_1T + TY_2, \qquad R_1R_2 = X_3X_4 = X_3T + TX_4 = TY_3 + TY_4.$$

Zatem

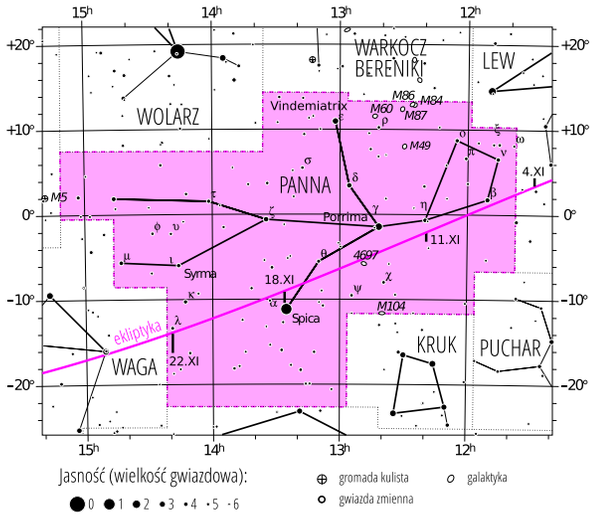
$$P_1P_2 + R_1R_2 = Y_1Y_3 + Y_2Y_4 = S_1S_2 + Q_1Q_2.$$

Prosto z nieba: Woda na Jowiszu?

Ponad dwadzieścia lat temu, w marcu 1993 r., astronomiczne małżeństwo łowców komet Carolyn i Eugene Shoemakerowie, oraz David Levy (także astronom) odkryli interesujący obiekt na orbicie wokół Jowisza. Analiza parametrów orbitalnych komety nazwanej Shoemaker–Levy 9 wykazała, że znajduje się ona pod wpływem grawitacji planety od co najmniej 20 lat oraz że orbita jest niestabilna, co może doprowadzić do kolizji. Rzeczywiście, w lipcu 1994 r., zanim kometa wpadła w zewnętrzne warstwy atmosfery południowej półkuli, dzięki siłom pływowym planety – jakby dla zwiększenia atrakcyjności zjawiska – rozpadła się na wiele części tak, że Jowisz został „ostrzelany" z wielu stron. Ślady upadku 21 fragmentów były widoczne w atmosferze przez wiele tygodni, a niektóre z nich wyróżniały się na powierzchni lepiej od Wielkiej Czerwonej Plamy. Spotkania małych ciał Układu Słonecznego z planetami (meteoryt czelabiński!) nie należą do rzadkości zwłaszcza w przypadku Jowisza, który jest – z racji masy – nazywany „kosmicznym odkurzaczem". Ściąga on w swoją sferę przyciągania okoliczne komety i planetki; całkiem niedawno, w lipcu 2009 r. na powierzchni Jowisza odkryto ciemną plamę powstałą najprawdopodobniej w wyniku zderzenia z anonimową asteroidą.

Choć przez teleskop optyczny nie sposób obecnie dostrzec pozostałości komety SL9, Jowisz wciąż pamięta o zderzeniu. Działająca w latach 1995–2006 europejska sonda ISO (*Infrared Space Observatory*) jako pierwsza odkryła cząsteczki wody w atmosferze Jowisza. Spekulowano wtedy, że zostały tam dostarczone przez kometę SL9, w większości składającą się z lodu, ale dopiero niedawne (i, niestety, jedne z ostatnich przed przejściem na emeryturę w kwietniu 2013 r.) dane teleskopu Herschel pozwoliły sprawdzić tę hipotezę. Obserwacje widmowe wykonane przez Herschela dowodzą, że wody jest wyraźnie więcej na południowej półkuli planety, w górnych warstwach atmosfery wokół miejsc upadku fragmentów komety; alternatywnym źródłem wody byłby jednorodny „deszcz" cząsteczek pyłu międzyplanetarnego, wtedy jednak spodziewalibyśmy się równie jednorodnego rozkładu cząsteczek wody na całej powierzchni planety. Wydaje się zatem, że dwudziestoletnia zagadka wody na Jowiszu została rozwiązana. Bardziej szczegółowych danych o okolicach największej planety Układu Słonecznego dostarczy planowana na początek następnego dziesięciolecia misja JUICE (*Jupiter Icy Moons Explorer*), której zadanie to m.in. dokładne obserwacje Ganimedesa, Kallisto i Europy w poszukiwaniu miejsc, w których mogło rozwinąć się życie.

Michał BEJGER



Gwiazdozbiór Panny. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. Znaczniki na ekliptyce przedstawiają przybliżoną pozycję komety C/2012 S1 (ISON, Nevski–Novichonok). [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

Niebo jak własna kieszeń: Listopad

W listopadzie do porannego wstawania zachęca możliwość obserwacji komety C/2012 S1 (ISON), odkrytej przez V. Nevskiego i A. Novichonoka we wrześniu 2012 przy użyciu teleskopu International Scientific Optical Network. Jest to jedna z bardziej ekscytujących komet tego roku; po raz pierwszy w Układzie Słonecznym, 28 XI znajdzie się w peryhelium, w odległości jedynie średnicy Słońca od jego powierzchni. Jeśli przetrwa przysłoneczne przejście, będzie ponownie widoczna w połowie stycznia 2014 roku. Przy okazji obserwacji komety można też zapoznać się z widocznym na wschodnim nieboskłonie gwiazdozbiorem Panny (łac. *Virgo*), przez który przechodzi trajektoria C/2012 S1; jak większość obiektów tego typu, kometa porusza się blisko ekliptyki. W pierwszej połowie miesiąca C/2012 S1, przekraczająca właśnie granicę między Panną a Lwem, będzie zbyt słaba do obserwacji gołym okiem, ale już 18 XI rano znajdzie się bardzo blisko α Virginis (Spica, $0{,}95^m$), z jasnością około $4{,}4^m$. W trzeciej dekadzie jej odległość do Słońca zmaleje na tyle, że kometa pojaśnieje do około 2^m. (Jak zawsze przy obserwacjach obiektów okołosłonecznych wskazana jest ostrożność!) Sam gwiazdozbiór Panny także stanowi ciekawy obiekt obserwacji. Wspomniana wcześniej Spica tworzy z najjaśniejszą gwiazdą Wolarza oraz dyszlem Wielkiego Wozu przydatny do orientacji na niebie łuk. Po zachodniej stronie tego łuku znajduje się obecnie planetka Vesta ($7{,}4^m$). Również w tej okolicy, przy granicy z Warkoczem Bereniki można przez teleskop dostrzec wiele obiektów głębokiego nieba należących do lokalnej grupy galaktyk w Pannie, np. eliptyczne galaktyki M84 i M87. Nieco poniżej Spiki znajduje się bardzo ładna spiralna galaktyka Sombrero (M104).

Niektóre planety znajdują się po zachodniej stronie Słońca, można je zatem obserwować rano, wraz z kometą: Mars ($1{,}56^m$) przebywa w gwiazdozbiorze Lwa. Merkury przekroczy 18 XI granicę Panna–Waga, by 26 XI spotkać się z Saturnem ($0{,}76^m$). Bardzo jasnego Jowisza ($-2{,}12^m$) trudno przegapić obok Polluksa w gwiazdozbiorze Bliźniąt, natomiast Wenus jest od początku listopada w Strzelcu i pod koniec miesiąca osiągnie $-4{,}35^m$. Z kolei 3 XI nastąpi dość rzadkie zjawisko hybrydowego zaćmienia Słońca, widoczne na Atlantyku i w centralnej Afryce; dla obserwatorów na pewnym obszarze będzie ono wyglądało jak zaćmienie całkowite, reszta zobaczy tylko zaćmienie obrączkowe (jedynie 5% zaćmień to zaćmienia hybrydowe, co wiąże się z odpowiednią odległością Księżyc–Ziemia).

M. B.

Teoria czy praktyka?

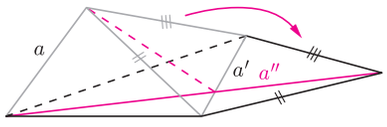
Joanna JASZUŃSKA

W wielu zadaniach geometrycznych należy wykazać, że z pewnych trzech odcinków można zbudować trójkąt. Rozwiązania są zazwyczaj jednego z dwóch rodzajów. Pierwszy to rozumowania *teoretyczne* – dowody niekonstruktywne, na ogół polegające na sprawdzeniu, że dane odcinki spełniają nierówność trójkąta. Drugi typ to dowody *praktyczne*, w których buduje się trójkąt o żądanych długościach boków. Każde z poniższych zadań można rozwiązać każdą z tych dwóch metod.

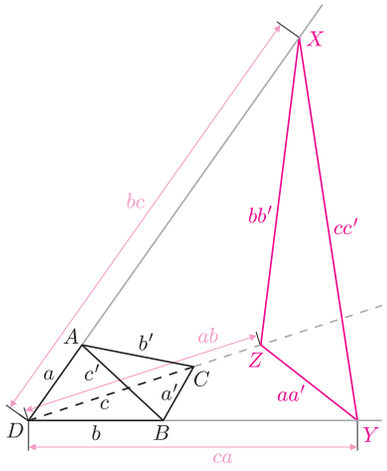
1. Wysokości pewnego trójkąta mają długości odpowiednio h_a, h_b, h_c. Wykaż, że z odcinków o długościach $1/h_a, 1/h_b, 1/h_c$ można zbudować trójkąt.

2. Przeciwległe krawędzie czworościanu mają długości odpowiednio a i a', b i b' oraz c i c'. Wykaż, że z odcinków o długościach aa', bb', cc' można zbudować trójkąt.

3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC. Wykaż, że z odcinków o długościach PA, PB, PC można zbudować trójkąt.



Rys. 1. Przeciwległe boki czarnego czworokąta mają długości b i b' oraz c i c'.



Rys. 2

Nierówność Ptolemeusza głosi, iż suma iloczynów długości przeciwległych boków czworokąta jest większa lub równa od iloczynu długości jego przekątnych. Przykłady jej zastosowań opisano w *deltoidzie* 6/2009.

Rozwiązania

R1. *Teoria.* Oznaczmy boki danego trójkąta przez a, b, c tak, by pole było równe $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$. Korzystając z nierówności $a + b > c$, uzyskujemy wtedy

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} = \frac{a}{2P} + \frac{b}{2P} > \frac{c}{2P} = \frac{1}{h_c}.$$

Dowody pozostałych dwóch nierówności trójkąta są analogiczne. □

R1. *Praktyka.* Oznaczmy boki i pole danego trójkąta jak powyżej. Żądane warunki spełnia trójkąt podobny do niego w skali $1 : 2P$, ma bowiem boki długości

$$\frac{a}{2P} = \frac{1}{h_a}, \qquad \frac{b}{2P} = \frac{1}{h_b}, \qquad \frac{c}{2P} = \frac{1}{h_c}. \ \square$$

R2. *Teoria.* Rozważmy krawędź o długości a' danego czworościanu i zawierające ją ściany. Obróćmy wokół niej jedną z tych ścian tak, aby znalazła się w tej samej płaszczyźnie, co druga, ale po przeciwnej stronie tej krawędzi (rys. 1).

Otrzymujemy w ten sposób fragment siatki danego czworościanu – czworokąt, którego jedną przekątną jest a'; oznaczmy drugą przez a''. W wyjściowym czworościanie odcinek a'' odpowiada łamanej łączącej końce krawędzi a (rys. 1), więc z nierówności trójkąta $a < a''$.

Stąd i z nierówności Ptolemeusza, $aa' < a''a' \leqslant bb' + cc'$. Analogicznie dowodzimy pozostałych dwóch nierówności trójkąta dla odcinków o długościach aa', bb', cc'. □

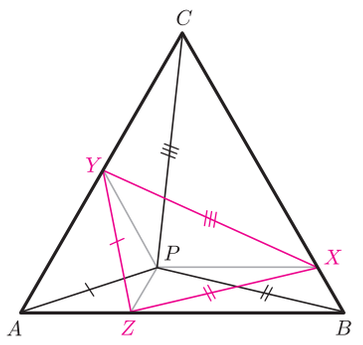
R2. *Praktyka.* Oznaczmy wierzchołki czworościanu przez A, B, C, D; z uwagi na przemienność iloczynów aa', bb', cc' możemy przyjąć, że $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$ (rys. 2). Na półprostych $DA^{\rightarrow}, DB^{\rightarrow}, DC^{\rightarrow}$ wybierzmy takie punkty odpowiednio X, Y, Z, aby $DX = bc$, $DY = ca$, $DZ = ab$. Punkty X, Y, Z nie są współliniowe, ponieważ rozważane półproste nie leżą w jednej płaszczyźnie.

Trójkąty DAB i DYX są podobne, bo mają wspólny kąt przy wierzchołku D oraz

$$\frac{DA}{DB} = \frac{a}{b} = \frac{ca}{bc} = \frac{DY}{DX}.$$

Wobec tego $\dfrac{XY}{BA} = \dfrac{DY}{DA} = \dfrac{ca}{a} = c$, czyli $XY = c \cdot BA = cc'$.

Analogicznie wykazujemy, że $YZ = aa'$ oraz $ZX = bb'$, więc trójkąt XYZ ma boki o żądanych długościach. □



Rys. 3

R3. *Praktyka.* Niech X, Y, Z będą takimi punktami odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, że $PX \parallel AB$, $PY \parallel BC$, $PZ \parallel CA$ (rys. 3). Wówczas trapezy $XCYP$, $YAZP$, $ZBXP$ są równoramienne (bo ich kąty to 60° i 120°). Wobec tego $YZ = PA$, $ZX = PB$, $XY = PC$, więc trójkąt XYZ jest zbudowany z odcinków o żądanych długościach. □

R3. *Teoria.* Dwa różne rozwiązania teoretyczne tego zadania opisano w *deltoidach* 6/2009 i 6/2012, przy drugim z nich przedstawiono także inne od powyższego rozwiązanie praktyczne.