



tel. 22 63 10 34 46 fax 22 63 15 92

18 lipca 2013 roku  
zmarł  
**Profesor Władysław M. Turski**  
współtwórca polskiej informatyki  
autor *Delty*

## SPIS TREŚCI NUMERU 9 (472)

Wielościany drżące  
i wielościany multistabilne  
*Aleksandra Flis*



Zadania

O polowaniu na pchłę  
i czekaniu na dwa orły, czyli  
trochę o łańcuchach Markowa  
*Katarzyna Pietruska-Paluba*

O tym, co się da,  
a czego nie da się rozwiązać  
*Maciej Bryński*

Lekcja rysunku (8):  
Dwunastościan wielki  
*Zdzisław Pogoda*

Olimpiady 2013/2014

Bioetyka. Dla kogo to  
jest ważne?  
*Magdalena Fikus*

Stowarzyszenie na rzecz  
Edukacji Matematycznej

Siatka czworościanu  
*Marcin E. Kuczma*

Informatyczny kącik olimpijski  
(64): Dwa torty  
*Tomasz Idziaszek*

Aktualności

Klub 44

Prosto z nieba: Futbol  
w przestrzeni kosmicznej  
*Michał Bejger*

Niebo jak własna kieszeń:  
Wrzesień

Sześciiany i wielomiany  
*Joanna Jaszewska*

str. 1

str. 3

str. 4

str. 6

str. 8

str.10

str.16

str.17

str.18

str.20

str.21

str.22

str.24

str.24

str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.  
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**Pol-Perfect:** [www.polperfect.com.pl](http://www.polperfect.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)

lub kontaktując się z Telefonicznym Biurem Obsługi Klienta

pod numerem: 801 800 803 lub 22 717 59 59 – czynne w godzinach 7<sup>00</sup> – 18<sup>00</sup>.

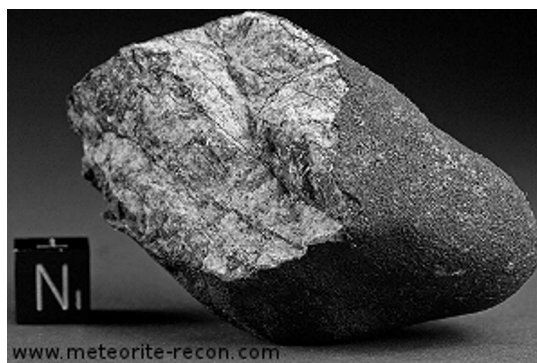
Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

**Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):** [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**



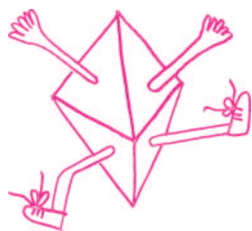
[www.meteorite-recon.com](http://www.meteorite-recon.com)

**W następnym numerze  
polecamy meteory**

stugramowy odłamek meteorytu czelabińskiego

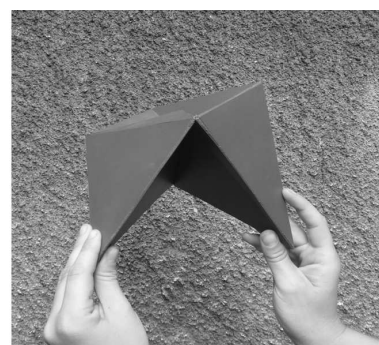
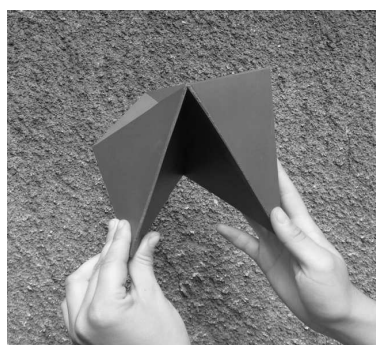
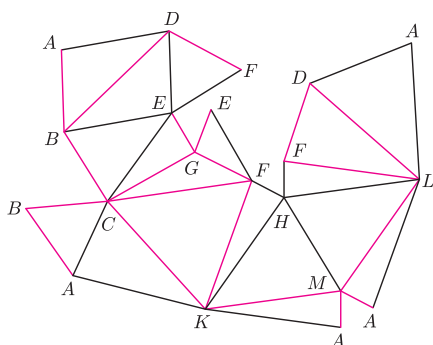
# Wielościany drżące i wielościany multistabilne

Aleksandra FLIS\*



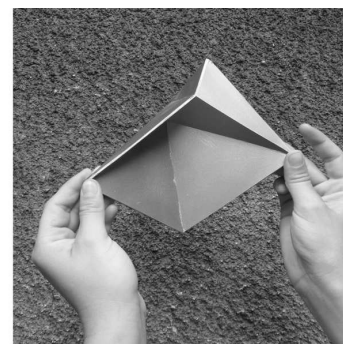
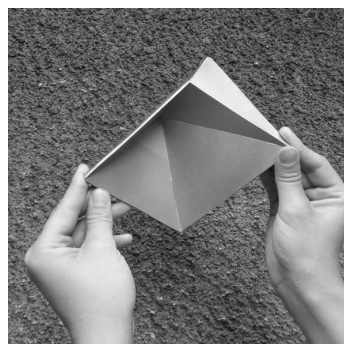
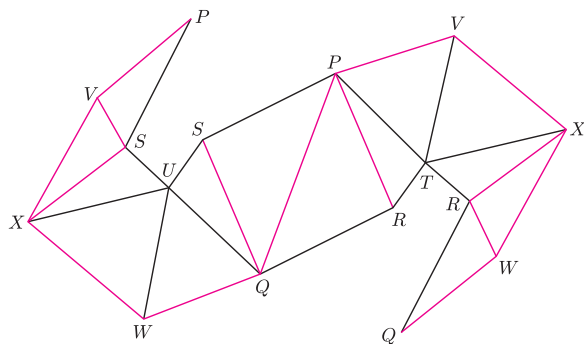
W *Delcie* była już mowa o ruchomych wielościanach, nazywanych też fleksorami; artykuły o nich ukazały się w 1987 i 1997 roku. Ruchomość wielościanu polega na tym, że gdybyśmy zbudowali model o sztywnych ścianach, a krawędziach poruszających się jak zawiasy, to moglibyśmy nim poruszać bez odkształcania ścian. Choć wydaje się to zaskakujące, ruchome wielościany rzeczywiście istnieją i zbudowanie takich brył, choćby z papieru, nie jest bardzo trudne.

Wielościany ruchome zostały odkryte w 1978 roku przez Roberta Connelly'ego, który skonstruował pierwszy przykład fleksora.



Siatka fleksora Connelly'ego (należy ją kleić tak, by kolorowe krawędzie były ostrzem na zewnątrz) i poruszanie gotowym fleksorem.

Drugi, prostszy przykład podał wkrótce potem Klaus Steffen.



I znów siatka i gotowy fleksor.

Jak dotąd są to wszystkie znane fleksory.

Istnieją też wielościany, które co prawda nie mogą się poruszać na tej samej zasadzie jak fleksory, mają jednak bardzo podobne własności. Ich ruch jest możliwy dzięki temu, że papier nie jest idealnie sztywny. Na jakiej zasadzie ów ruch się odbywa? Otóż najpierw należy zauważyć, że czasami wielościany o przystających ścianach i narożach mają kilka form różniących się kątami dwuściennymi. Jeśli dwie z nich są dość podobne, to możliwa jest nieniszcząca ścian zmiana z jednej pozycji na drugą, wykorzystująca elastyczność materiału, z którego jest wykonany model. Takie wielościany nazywamy multistabilnymi.

Jednym z najprostszych multistabilnych wielościanów jest dwustabilny „skaczący ośmiościan” (*bistable jumping octahedron*) opisany przez Waltera Wunderlicha i Caspara Schwabego w 1986 roku w pracy *Eine Familie von geschlossenen gleichflächigen Polyedern, die fast beweglich sind*. Wielościan ten ma dwie formy, które możemy zmieniać przez skrócenie jednej podstawy względem drugiej (patrz obrazki na następnej stronie). We wspomnianej pracy autorzy scharakteryzowali wszystkie istniejące wielościany multistabilne.



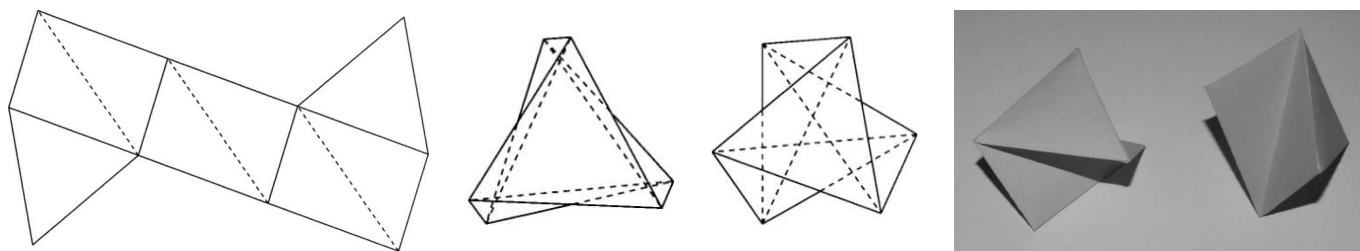
## Rozwiązanie zadania M 1398.

Przyjmijmy, że  $A_1, A_2, A_3$  to podzbiory zbioru  $\{1, 2, \dots, 19\}$  oznaczające składy drużyn na pierwszym treningu, a  $B_1, B_2, B_3$  – na drugim. Chcemy udowodnić, że dla pewnych  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  mamy  $|A_i \cap B_j| \geq 3$ . Przypuśćmy, że nie ma takiej pary zbiorów. Ponieważ  $A_1, A_2, A_3$  są parami rozłączne i  $B_1, B_2, B_3$  także, więc mamy

$$19 = |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)| = \left| \bigcup_{i,j=1}^3 A_i \cap B_j \right| = \sum_{i,j=1}^3 |A_i \cap B_j| \leq 2 \cdot 9 = 18,$$

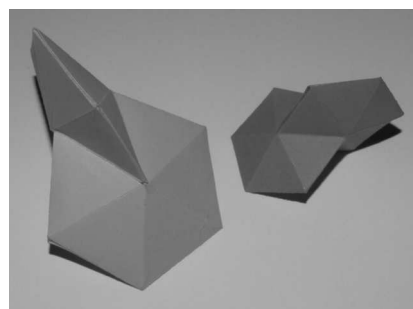
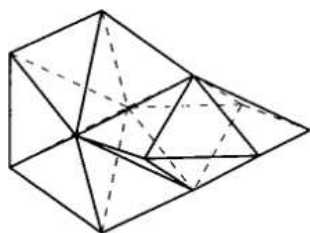
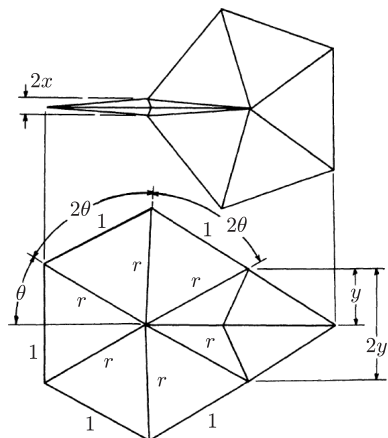
co daje sprzeczność.

\*nauczycielka matematyki, absolwentka Uniwersytetu Jagiellońskiego 2012



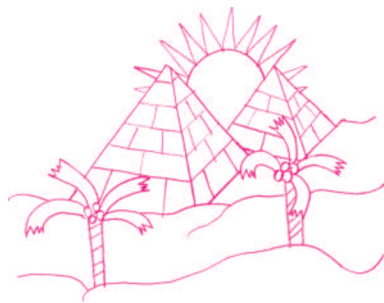
Siatka skaczącego wielościanu, widok z góry obu możliwych pozycji tego wielościanu oraz zdjęcie obu jego form.

Jednakże o istnieniu wielościanów multistabilnych wiedzano trochę wcześniej. W roku 1978 opublikowany został artykuł Michaela Goldberga *Unstable polyhedral structures*, w którym autor opisał liczne przykłady niestandardowych wielościanów, w tym wielościan multistabilny nazwany „dwupiramidami syjamskimi” (*Siamese dipyramids*). Wielościan ten składa się z dwóch podwójnych piramid złączonych wspólną podstawą. Każda dwupiramida ma 10 ścian, które są trójkątami równobocznymi.

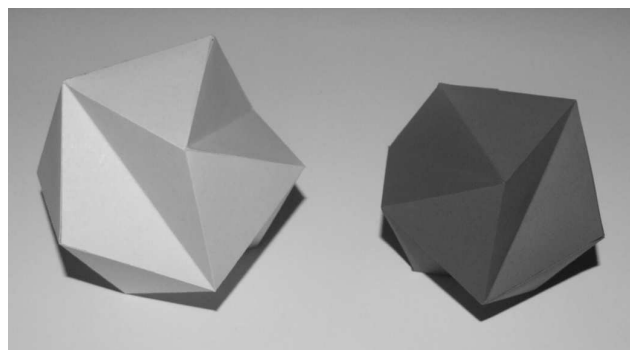


Rysunki i zdjęcie dwupiramid syjamskich.

Mimo iż narysowanie siatki takiego wielościanu (ewentualnie np. w czterech częściach) jest bardzo łatwe, to zbudowanie jego modelu jest dość trudne, ponieważ już przy małej niedokładności zmienia się charakter bryły. Jeśli równoboczne trójkąty zastąpimy przez równoramienne, których kąt przy wierzchołku równy jest  $59^\circ$  zamiast  $60^\circ$ , otrzymamy dwupiramidy, które w dwóch pozycjach całkowicie się złożą. Jeśli natomiast kąt przy wierzchołku powiększymy do  $62^\circ$ , stabilne pozycje pokryją się i otrzymamy wielościan innego rodzaju, mianowicie dwudziestościan drżący. W artykule Goldberga była mowa również o drżących wielościanach.



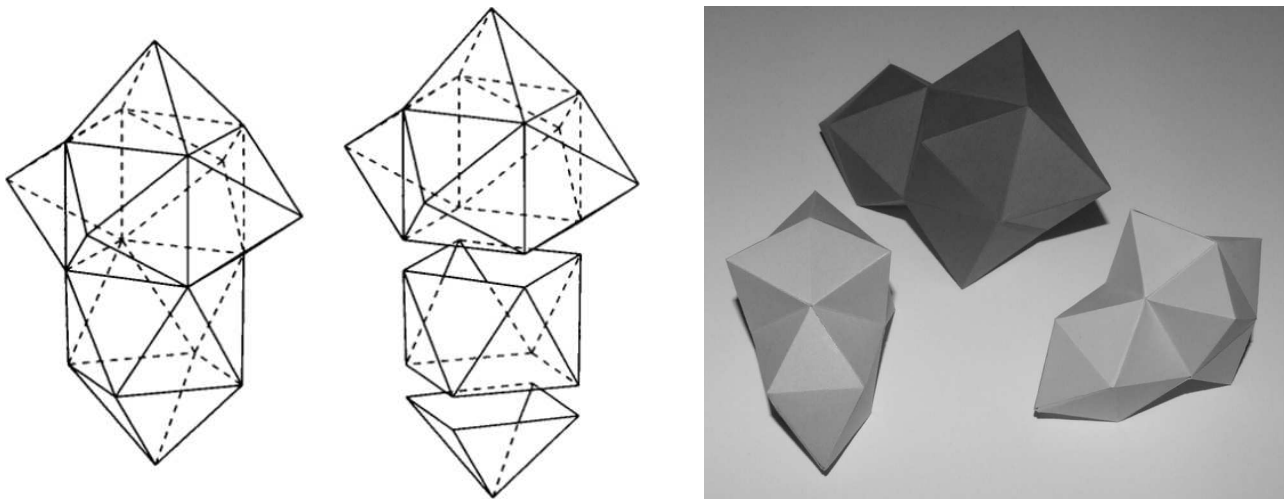
W wielościanach ruchomych możliwy jest płynny ruch między różnymi pozycjami. Wielościany multistabilne mają tylko kilka stabilnych form, a przejścia pomiędzy nimi następują w sposób skokowy. Wielościany drżące stanowią jeszcze inną grupę. Obserwując ruch modelu, nie można powiedzieć, ile stabilnych pozycji ma wielościan; tym wielościan drżący różni się od wielościanów multistabilnych, w których liczba stabilnych pozycji jest skończona.



Dwudziestościany Jessena.

Można jednak za pomocą obliczeń udowodnić, że podczas ruchu drżącego wielościanu jego ściany są nieznacznie zniekształcane, więc nie jest to fleksor.

Dwudziestościan foremny jest wypukły i sztywny. Jeśli jednak sześć par ścian o wspólnej krawędzi zastąpimy parami równoramiennych trójkątów, tworząc niewypukły dwudziestościan, otrzymamy wielościan Jessena. Każdy kąt dwuścienny to  $\frac{\pi}{2}$  lub  $\frac{\pi}{3}$ . Ten wielościan może poruszać się w niewielkim stopniu, zmieniając kąty dwuścienne wzdłuż dłuższych krawędzi.



Rysunek i zdjęcie wielościanów Masona.

Drżący jest też wielościan (odkryty przez Paula Masona), którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi. Powstaje on przez wzniesienie ostrosłupów prawidłowych czworokątnych na każdej ścianie sześcianu oraz antygraniastosłupa, który oddziela jedną z tych piramid i sześcian.

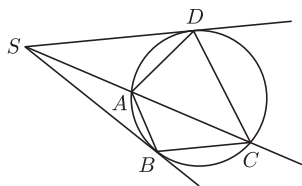
Na zakończenie warto zauważyć, że opisane powyżej zjawiska możliwe są wyłącznie w przypadku wielościanów niewypukłych. Wielościany wypukłe są sztywne, co wynika z twierdzenia Cauchy'ego o sztywności.

W 1766 roku Leonhard Euler postawił hipotezę, że każdy wielościan jest sztywny. Dopiero w 1813 roku Augustin Louis Cauchy wykazał, że jest to prawda dla wielościanów wypukłych. Cauchy w swoim dowodzie popełnił zresztą błąd, ponieważ nie rozważył wszystkich przypadków. Pomyłka Cauchy'ego pozostała niezauważona przez ponad 50 lat, jednak później dowód uzupełniono.



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



**M 1396.** Czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w okrąg. Styczne do okręgu w punktach  $B$  i  $D$  przecinają się w punkcie  $S$  (rysunek). Udowodnić, że punkt  $S$  leży na prostej  $AC$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ .

Rozwiązanie na str. 23

**M 1397.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby dodatniej  $x$  i liczby całkowitej  $n \geq 1$  prawdziwa jest nierówność

$$(1+x)^{n+1} \geq \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} x.$$

Rozwiązanie na str. 20

**M 1398.** Do klubu siatkarskiego należy 19 osób. Na ostatnich dwóch treningach wszyscy zawodnicy byli obecni i na każdym z nich podzielono ich na trzy zespoły: dwa sześciuosobowe i jeden siedmioosobowy. Udowodnić, że można wskazać 3 osoby, które na obu treningach były w jednej drużynie.

Rozwiązanie na str. 1

Przygotowali Andrzej MAJHOFER i Michał NAWROCKI

**F 839.** Podczas remontu wymieniono silnik samochodu na nowy o tej samej masie, ale dwa razy większej maksymalnej mocy. Ile razy wzrośnie maksymalna prędkość, z jaką może jechać ten samochód?

Rozwiązanie na str. 20

**F 840.** W środku sfery całkowicie pochłaniającej dochodzące do niej światło umieszczono lampę sodową. Lampa emituje światło z mocą 100 W. Przyjmując, że emitowane jest wyłącznie światło o długości fali 590 nm, obliczyć, ile fotonów w jednostce czasu pochłania sfera.

Rozwiązanie na str. 5



# O polowaniu na pchłę i czekaniu na dwa orły, czyli trochę o łańcuchach Markowa



Katarzyna PIETRUSKA-PALUBA\*

Zacznijmy od prostego przykładu. Pchła skacze między ziemią, kotem i człowiekiem. Za każdym razem wybiera miejsce docelowe z takim samym prawdopodobieństwem (równym  $\frac{1}{2}$ ). Mogłaby tak skakać w nieskończoność, gdyby nie to, że po wskoczeniu na człowieka ginie. Ile średnio skoków pchła wykona przed śmiercią, jeżeli zaczyna na ziemi?

Zadanie rozwiążemy bez trudu, pamiętając, że średnia wartość zmiennej losowej to suma wszystkich iloczynów postaci

$$(liczba\ skoków) \cdot (\text{prawdopodobieństwo tej liczby}).$$

Po prostu wypiszemy wszystkie możliwe drogi pchły: zginie ona po 1 skoku, jeżeli od razu skoczy na człowieka, co zapisujemy  $C$ ; po 2 skokach –  $KC$  (najpierw na kota, potem na człowieka), po 3 skokach –  $KZC$ , po 4 skokach –  $KZKC$ , i tak dalej. Każdy taki ciąg długości  $r$  ma prawdopodobieństwo  $\frac{1}{2^r}$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , a zatem średnio pchła wykona  $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{2^r}$  skoków. Oznaczając  $s = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} = 2$ , średnią ilość skoków pchły możemy wyznaczyć, sumując poniższe wyrażenie kolumnami:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{2^r} &= \frac{1}{2} + \\ &+ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \\ &+ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \\ &+ \dots = \\ &= \frac{s}{2} + \frac{s}{4} + \frac{s}{8} + \dots = \\ &= \frac{s}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = 2. \end{aligned}$$

A zatem pchła wykona średnio 2 skoki.

Rozbudujmy ten przykład i wpuśćmy do pokoju psa. Zasady skoków pchły pozostają takie same, ale teraz prawdopodobieństwo wyboru każdego docelowego miejsca skoku to  $\frac{1}{3}$ . Możemy rozwiązywać zadanie tak samo jak przedtem – będzie to nieco dłuższe, ale nadal wykonalne.

Można też nieco inaczej. W obu powyższych zagadnieniach miejsce kolejnego przeskoku zależy tylko od tego, gdzie pchła znajduje się w danej chwili, a nie od jej przeszłej podróży. Ponadto z góry wiadomo, jakie są możliwe położenia pchły, tak zwane *stany* –  $\{Z, K, C\}$  lub  $\{Z, K, P, C\}$ , oraz jakie są reguły poruszania się między stanami. Oznacza to, że w obu przypadkach mamy do czynienia z *łańcuchem Markowa*. Reguły przeskoku to *prawdopodobieństwa przejścia* między stanami. Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu  $i$  do stanu  $j$  oznaczamy przez  $p_{ij}$ .

W zagadnieniu I mamy:

$$p_{ZC} = p_{ZK} = p_{KZ} = p_{KC} = \frac{1}{2},$$

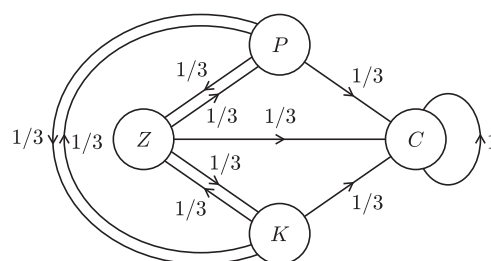
dla kompletności przyjmujemy jeszcze  $p_{CC} = 1$ .

W zagadnieniu II jest podobnie:

$$p_{ZC} = p_{ZK} = p_{ZP} = p_{KZ} = p_{KP} = p_{PC} = \\ = p_{PZ} = p_{PK} = p_{PC} = \frac{1}{3}$$

oraz  $p_{CC} = 1$ . Wygodnie jest zapisać takie prawdopodobieństwa w macierzy albo wyrysować je jako graf. Na przykład dla właściciela dwóch zwierząt macierz oraz graf będą wyglądać następująco:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



W ogólnej sytuacji powiemy, że ciąg zmiennych losowych  $X_0, X_1, X_2, \dots$  tworzy jednorodny łańcuch Markowa o przestrzeni stanów  $S = \{E_1, \dots, E_N\}$ , jeżeli dla dowolnego  $n = 0, 1, 2, \dots$  i dowolnego ciągu stanów  $E_{i_0}, \dots, E_{i_n}, E_{i_{n+1}}$  mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = E_{i_{n+1}} | X_n = E_{i_n}) &= \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = E_{i_{n+1}} | X_n = E_{i_n}, \dots, X_0 = E_{i_0}). \end{aligned}$$

Oznacza to, że dochodząc do każdego stanu, łańcuch „zapomina”, skąd przyszedł, a prawdopodobieństwa przejścia w następnym ruchu zależą tylko od położenia bieżącego. Własność tę nazywamy *własnością Markowa* i tak właśnie jest w powyższych przykładach.

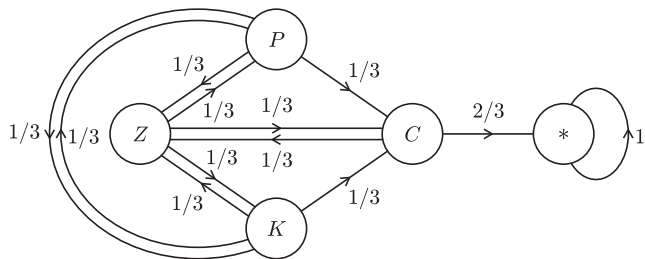
Teraz rozwiążemy zadanie o średnim czasie życia pchły dla łańcucha Markowa o grafie jak wyżej. Niech  $t_Z, t_K, t_P, t_C$  oznaczają średnie czasy życia pchły startującej odpowiednio z ziemi, kota, psa, człowieka. Oczywiście, mamy  $t_C = 0$ , a pozostałe czasy życia możemy związać układem równań, wykorzystując wzór na prawdopodobieństwo całkowite i własność Markowa. Na przykład, jeżeli startujemy z ziemi, to po wykonaniu jednego skoku przechodzimy do jednego ze stanów  $K, P, C$  z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$  i kontynuujemy skoki z tych nowych stanów, zapominając o przeszłości, ale za to zwiększając „odczyt licznika” o 1, bo jeden skok już wykonaliśmy. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} t_Z = 1 + \frac{1}{3}t_K + \frac{1}{3}t_P + \frac{1}{3}t_C, \\ t_K = 1 + \frac{1}{3}t_Z + \frac{1}{3}t_P + \frac{1}{3}t_C, \\ t_P = 1 + \frac{1}{3}t_Z + \frac{1}{3}t_K + \frac{1}{3}t_C. \end{cases}$$

\*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Rozwiązując go, natychmiast dostaniemy, że  $t_Z = t_K = t_P = 3$ .

A jeśli człowiek ma gorszy refleks i szansa na to, że zabije pchłę, która na niego wskoczyła, wynosi  $\frac{2}{3}$ ? Jeżeli pchła przeżyje kontakt z człowiekiem, to przerażona (czy pchła się boi?) nie zastanawia się już, co ma zrobić (czy pchła się zastanawia?) i zeskakuje na ziemię. Dla opisu ruchu pchły dodamy osobny stan \* (po angielsku nazywany *cemetery state*), do którego można dojść tylko z C i z którego nie można już wyjść. Graf będzie teraz taki.



Uważny Czytelnik zauważy, że powyższy graf nie do końca odpowiada omawianej sytuacji. Graf ten uwzględnia dodatkowy krok między wskoczeniem na człowieka a śmiercią pchły, którego w rzeczywistości nie dodaje się do czasu jej życia.

Postępując jak wcześniej, wypiszemy układ równań na czasy dojścia do \*, odpowiadający grafowi 2:

$$\begin{cases} t_Z = 1 + \frac{1}{3}t_K + \frac{1}{3}t_P + \frac{1}{3}t_C, \\ t_K = 1 + \frac{1}{3}t_Z + \frac{1}{3}t_P + \frac{1}{3}t_C, \\ t_P = 1 + \frac{1}{3}t_Z + \frac{1}{3}t_K + \frac{1}{3}t_C, \\ t_C = 1 + \frac{2}{3}t_* + \frac{1}{3}t_Z. \end{cases}$$

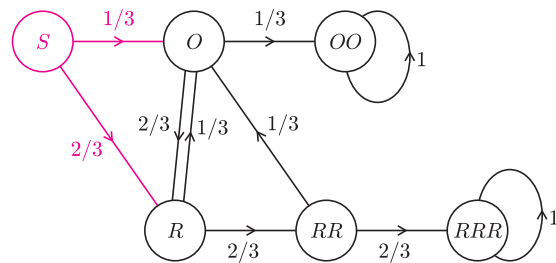
Zwróćmy uwagę, że teraz zamiast  $t_C = 0$  będziemy mieli  $t_* = 0$ . Rozwiązując ten układ, dostaniemy  $t_Z = t_K = t_P = 6$ ;  $t_C = 3$ . Liczba  $t_Z$  nie jest jednak średnim czasem życia pchły – czas życia będzie o 1 mniejszy, bo przecież dodaliśmy jeden krok na przejście  $C \rightarrow *$ . Zatem pchła średnio wykona 5 skoków, zanim zginie.

Rozważmy teraz pozornie zupełnie inne zagadnienie. Adaś i Bolek obserwują wyniki kolejnych rzutów niesymetryczną monetą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła to  $\frac{1}{3}$ . Założyli się o czekoladę: Adaś wygra, jeżeli dwa orły pod rząd wypadną, zanim Bolek doczeka się serii trzech reszek, a Bolek – jeżeli to trzy reszki pojawią się wcześniej. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wygra Adaś?

Czy wiesz, Czytelniku, czemu ta gra z prawdopodobieństwem 1 zakończy się po skończonej liczbie rzutów?

Zastanówmy się, gdzie można w tym zagadnieniu dopatrzeć się łańcucha Markowa. Otóż będziemy rozważali tylko takie końcówki ciągów, które mogą być kontynuowane jako rozstrzygające grę OO albo RRR.

Na przykład, jeżeli wykonano 5 rzutów, w których po kolei wypadło RRORO, to układ będzie w stanie O, bo O jest początkiem pożądanego ciągu OO. Gdyby natomiast wynikiem było RORRR, to układ byłby w stanie RRR – byłaby to wygrana Bolka i koniec zabawy. Możliwe stany układu są więc następujące: O, R, RR, OO, RRR, a prawdopodobieństwa przejścia to  $p_{O,OO} = \frac{1}{3}$ ,  $p_{O,R} = \frac{2}{3}$ ,  $p_{R,O} = \frac{1}{3}$ ,  $p_{R,RR} = \frac{2}{3}$ ,  $p_{RR,O} = \frac{1}{3}$ ,  $p_{RR,RR} = \frac{2}{3}$ ,  $p_{OO,OO} = 1$ ,  $p_{RRR,RRR} = 1$ . Musimy jeszcze dopowiedzieć, że po pierwszym rzucie z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$  wchodzimy w stan O, a z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{3}$  – w stan R, i to określa pierwszy krok. Adaś wygra, jeżeli uda się dojść do stanu OO. Graf układu wygląda następująco.



Analogicznie jak w zadaniu o średnim czasie życia pchły, możemy ułożyć układ równań, w którym powiążemy prawdopodobieństwa wygranej Adasia przy starcie ze stanów O, R, RR, OO, RRR, oznaczone odpowiednio przez  $x_O, x_R, x_{RR}, x_{OO}, x_{RRR}$ . Wykonujemy krok w przód, patrzymy, gdzie dotarliśmy, korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, a następnie z własności Markowa (tj. zapominamy, skąd przyszliśmy), i rozważamy prawdopodobieństwa wygranej Adasia przy starcie z nowych położeń. Na przykład, ze stanu O przechodzimy z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$  do stanu OO i z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{3}$  do stanu R. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x_O = \frac{1}{3}x_{OO} + \frac{2}{3}x_R, \\ x_R = \frac{1}{3}x_O + \frac{2}{3}x_{RR}, \\ x_{RR} = \frac{1}{3}x_O + \frac{2}{3}x_{RRR}, \end{cases}$$

przy czym mamy  $x_{OO} = 1$  i  $x_{RRR} = 0$ . Rozwiązaniem układu są liczby:

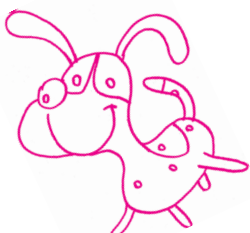
$$x_O = \frac{9}{17}, \quad x_R = \frac{5}{17}, \quad x_{RR} = \frac{3}{17}.$$

Ponieważ po pierwszym kroku znajdziemy się w stanie O lub R (z prawdopodobieństwem odpowiednio  $\frac{1}{3}$  i  $\frac{2}{3}$ ), to prawdopodobieństwo wygranej Adasia wynosi

$$p = \frac{1}{3}x_O + \frac{2}{3}x_R = \frac{19}{51}.$$

Może Adaś nie lubi czekolady?

Pozostawiamy Czytelnikowi do samodzielnego rozwiązania zadanie: jeżeli moneta jest symetryczna, to jaki będzie średni czas trwania gry? Odpowiedź w numerze.



#### Rozwiązanie zadania F 840.

Sfera pochłania wszystkie emitowane przez lampę fotony. Tempo emisji fotonów jest równe stosunkowi mocy lampy  $P_E$  do energii  $E$  emitowanego fotonu. Ponieważ  $E = h\nu$ , więc  $n = n_e = P_E/h\nu$ , gdzie  $h$  jest stałą Plancka, a  $\nu$  częstotliwością emitowanego światła. Podstawiając  $\nu = c/\lambda$ , gdzie  $c$  jest prędkością światła, a  $\lambda$  długością jego fali, otrzymujemy ostatecznie  $n = P_E \cdot \lambda/hc$ , co dla wielkości danych w zadaniu daje  $2,97 \cdot 10^{20}$  fotonów na sekundę.

# O tym, co się da, a czego nie da się rozwiązać

Maciej BRYŃSKI Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Rozwiąż równanie! – to jedno z najczęściej słyszanych przez ucznia poleceń nauczyciela matematyki. Gdy usłyszymy to polecenie, nie wątpimy, że otrzymane równanie można rozwiązać i że my potrafimy to zrobić. Zresztą o każdym zadaniu matematycznym, na które natrafimy, uważamy, że można je rozwiązać. Jeśli nie widzimy rozwiązania od razu, to pewnie trzeba jeszcze trochę pomyśleć, pokombinować, wynaleźć jakiś sprytny sposób, może poczytać w mądrych książkach i rozwiązanie musi się znaleźć. Czy na pewno tak jest? Okazuje się, że istnieją zadania, niedające się rozwiązać, choć są ludożaco podobne do innych, które rozwiązujemy bez trudu.

Weźmy pod uwagę równanie

$$(*) \quad x^5 - 6x + 2 = 0.$$

Wygląda całkiem niewinnie. Szkolny sposób na takie równania podpowiada: sprawdź, czy któryś spośród dzielników wyrazu wolnego nie jest rozwiązaniem, bo tylko takie liczby mogą być rozwiązaniami wymiernymi równania. Tymi dzielnikami są liczby  $-2, -1, 1, 2$ . Oznaczamy  $f(x) = x^5 - 6x + 2$  i obliczamy

$$f(-2) = -32 + 12 + 2 = -18, \quad f(1) = 1 - 6 + 2 = -3, \\ f(-1) = -1 + 6 + 2 = 7, \quad f(2) = 32 - 12 + 2 = 22.$$

Możemy stwierdzić, że żadna liczba wymierna nie jest rozwiązaniem równania (\*). Jednocześnie widzimy, że nasze równanie ma co najmniej trzy rozwiązania rzeczywiste leżące odpowiednio w przedziałach  $(-2, -1)$ ,  $(-1, 1)$  i  $(1, 2)$ , gdyż funkcja  $f$  jest ciągła i na końcach każdego z przedziałów przyjmuje wartości przeciwnych znaków, więc wewnątrz przedziału ma miejsce zerowe. Badając przebieg zmienności funkcji  $f$ , można stwierdzić, że nie ma ona więcej miejsc zerowych. Oznacza to, że równanie (\*) ma trzy pierwiastki rzeczywiste i dwa zespolone. Te informacje pozwalają stwierdzić, że równania tego nie można rozwiązać „przez pierwiastniki”, tj. nie można wyrazić jego pierwiastków przez wzory, w których na liczbach wymiernych byłyby wykonywane operacje wyciągania pierwiastków dowolnych stopni oraz działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, wielokrotnie iterowane. Niestety, dowód tego faktu nie zmieściłby się na stronach tego numeru *Delty*; można go znaleźć w literaturze (np. Jerzy Browkin, *Wybrane zagadnienia algebry*, czy Maciej Bryński, *Elementy teorii Galois*). Wiemy z nauki szkolnej, że pierwiastki równania kwadratowego  $ax^2 + bx + c = 0$  wyrażają się przez pierwiastniki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Istnieją też wzory pozwalające wyrazić przez pierwiastniki pierwiastki dowolnego równania stopnia trzeciego, a także czwartego. Wzory te są jednak na tyle skomplikowane, że niezbyt nadają się do praktycznego stosowania. Niestety, dla równań wyższych stopni wzory takie nie istnieją, co ilustruje przykład równania (\*).

Nie znaczy to jednak, że żadnego równania stopnia piątego lub wyższego nie potrafimy rozwiązać.

**Przykład 1.** Rozwiążemy równanie

$$(**) \quad 2x^5 - 11x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 11x + 2 = 0.$$

Zauważmy, że równanie to ma pierwiastek  $x_1 = -1$ . Istotnie  $2 \cdot (-1)^5 - 11 \cdot (-1)^4 + 11 \cdot (-1)^3 + 11 \cdot (-1)^2 - 11 \cdot (-1) + 2 = -2 - 11 - 11 + 11 + 11 + 2 = 0$ .

Dzielimy wielomian  $2x^5 - 11x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 11x + 2$  przez

$x + 1$  i dostajemy wielomian  $2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2$ . Aby rozwiązać równanie  $2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2 = 0$ , podzielimy obie strony przez  $x^2$  (możemy to zrobić bezkarnie, gdyż 0 nie jest pierwiastkiem tego równania) i do otrzymanego równania  $2x^2 - 13x + 24 - 13 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$  zastosujemy podstawienie  $t = x + \frac{1}{x}$ . Ponieważ  $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ , więc równanie przyjmuje postać  $2t^2 - 13t + 20 = 0$ . Rozwiązujemy:  $\Delta = 13^2 - 4 \cdot 2 \cdot 20 = 169 - 160 = 9$ ,  $\sqrt{\Delta} = 3$ ,  $t_1 = \frac{13-3}{4} = 2\frac{1}{2}$ ,  $t_2 = \frac{13+3}{4} = 4$ . Dostajemy stąd dwa równania  $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$  i  $x + \frac{1}{x} = 4$ , które przekształcamy do postaci równoważnych  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  i  $x^2 - 4x + 1 = 0$ . Rozwiązujemy je kolejno:  $\Delta = 25 - 16 = 9$ ,  $\sqrt{\Delta} = 3$ ,  $x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ ,  $x_3 = 2$ ;  $\Delta = 16 - 4 = 12$ ,  $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$ ,  $x_4 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$ ,  $x_5 = 2 + \sqrt{3}$ . Ostatecznie więc pierwiastkami równania (\*\*) są liczby  $-1, \frac{1}{2}, 2, \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ .

Do nierozwiązalności równań algebraicznych przez pierwiastniki podobna jest sytuacja z niewykonalnością pewnych konstrukcji geometrycznych. Klasyczna konstrukcja geometryczna na płaszczyźnie, gdy dany jest pewien zbiór punktów, polega na wielokrotnym iterowaniu następujących czynności:

- przez dwa punkty z tego zbioru możemy poprowadzić prostą,
- możemy wykreślić okrąg, którego środkiem jest punkt dany, a promień jest równy odległości dwóch danych punktów,
- punkty przecięcia takich prostych i okręgów dodajemy do zbioru danych.

Zauważmy, że punkt przecięcia dwóch prostych ma współrzędne będące rozwiązaniem układu dwóch równań liniowych (mianowicie równań tych prostych). Wynika stąd, że współrzędne tego punktu należą do tego samego ciała liczbowego, z którego pochodzą współczynniki równań, a zatem do tego ciała liczbowego, do którego należą współrzędne punktów wyznaczających rozważane proste.

**Ciało liczbowe to zbiór liczb zawierający wszystkie liczby wymierne i mający tę własność, że wynik dodawania, odejmowania lub dzielenia liczb z tego zbioru również do niego należy (oczywiście, przez 0 nie dzielimy).**

Inaczej jest w przypadku punktu przecięcia prostej i okręgu albo punktu przecięcia dwóch okręgów. Równanie prostej jest równaniem liniowym postaci  $ax + by = c$ , równanie okręgu – równaniem kwadratowym  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ . Wyznaczając jedną z niewiadomych  $x$  lub  $y$  z pierwszego równania i podstawiając do drugiego, otrzymamy równanie kwadratowe, którego współczynniki należą do ciała liczbowego, z którego pochodzą współczynniki rozważanych równań prostej i okręgu. Pierwiastki równania kwadratowego mogą nie należeć do ciała liczbowego, z którego pochodzą współczynniki tego równania, gdyż do ich obliczenia trzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z wyróżnika  $\Delta$ . Na przykład, równanie  $x^2 + x - 1 = 0$  ma współczynniki wymierne, ale  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$ ,  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$ ,  $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ , a więc pierwiastki należą do ciała liczbowego  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ , zawierającego liczby postaci  $m + n\sqrt{5}$ , gdzie  $m, n$  są liczbami wymiernymi.

Podobnie w przypadku punktów przecięcia dwóch okręgów. Układ równań dwóch okręgów  $(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = r_1^2$  i  $(x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 = r_2^2$  jest równoważny układowi powstałemu przez pozostawienie jednego z danych równań

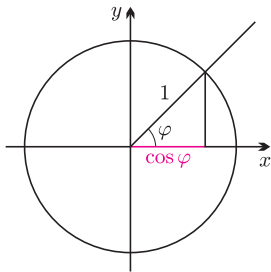
i zastąpienie drugiego przez ich różnicę. Różnica równań dwóch przecinających się okręgów jest równaniem prostej przechodzącej przez punkty przecięcia tych okręgów. Sprowadziliśmy w ten sposób wyznaczanie punktów przecięcia dwóch okręgów do przypadku wyznaczania punktów przecięcia okręgu i prostej. Tu więc również współrzędne tych punktów należą albo do ciała liczbowego zawierającego współczynniki równań, albo do rozszerzenia tego ciała o pierwiastek kwadratowy z pewnego elementu tego ciała.

Biorąc pod uwagę te obserwacje, możemy stwierdzić, że jeśli  $K$  jest ciałem liczbowym, do którego należą współrzędne wszystkich punktów danych do wykonania pewnej konstrukcji, i możemy skonstruować punkt  $P = (x, y)$ , to liczby  $x, y$  należą do pewnego ciała, które powstaje przez rozszerzenie ciała  $K$  w wyniku skończonej liczby dołączania pierwiastków kwadratowych (mówimy, że liczby  $x, y$  wyrażają się przez pierwiastki kwadratowe). Na tej podstawie możemy wywnioskować, że pewnych konstrukcji nie można wykonać cyrklem i linijką.

Należy tu wymienić trzy zadania wywodzące się ze starożytności: trysekcja kąta, podwojenie sześcianu, kwadratura koła. Zajmijmy się bliżej pierwszym z tych zadań.

**Przykład 2.** Zadanie trysekcji kąta: dany kąt podzielić konstrukcyjnie na trzy równe części. (Pytanie o wykonalność tej konstrukcji jest naturalne, bo podział kąta na dwie lub cztery równe części jest jedną z najprostszych konstrukcji: należy podzielić kąt jego dwusieczną i ewentualnie dwusieczną połowy danego kąta.)

Mając dany kąt, możemy skonstruować jego kosinus. Umieścimy w tym celu dany kąt  $\varphi$  w układzie współrzędnych w ten sposób, by jedno ramię pokrywało się z dodatnią półosią osi  $OX$ , i wykreślmy okrąg o środku w początku układu i promieniu 1, a następnie rzutujemy punkt przecięcia drugiego ramienia kąta z okręgiem na oś  $OX$ .



Współrzędna  $x$  tego rzutu jest kosinusem kąta  $\varphi$ . Podobnie mając daną liczbę  $x \in (-1, 1)$ , możemy skonstruować kąt, którego kosinus jest równy  $x$ . Wystarczy z punktu  $x$ , leżącego na osi  $OX$ , wystawić prostą do tej osi i przez punkt przecięcia tej prostej z okręgiem jednostkowym poprowadzić półprostą o początku w punkcie  $(0, 0)$ . Ta półprosta wraz z dodatnią półosią osi  $OX$  wyznacza kąt  $\varphi$ . Wobec tego pytanie o wykonalność trysekcji kąta  $\varphi$  jest równoważne pytaniu o konstruowalność liczby  $\cos \frac{\varphi}{3}$ . Ze znanych wzorów trygonometrycznych mamy

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

więc  $\cos \frac{\varphi}{3} = x$  spełnia zależność

$$\cos \varphi = 4x^3 - 3x,$$

jest więc pierwiastkiem wielomianu

$$w = 4x^3 - 3x - \cos \varphi,$$

którego współczynniki należą do ciała liczbowego zawierającego liczbę wymierne i liczbę  $\cos \varphi$ .

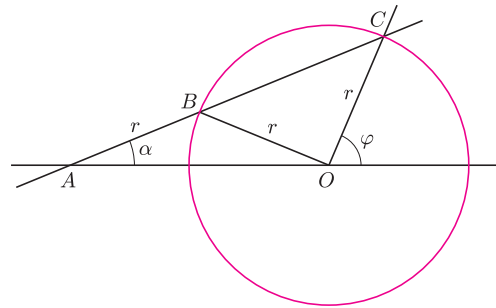
Jeśli wielomian  $w$  jest nierozkładalny nad tym ciałem, to ponieważ jest stopnia trzeciego, więc jego pierwiastków nie można wyrazić przez pierwiastki kwadratowe. To oznacza niewykonalność trysekcji.

Najprostszym przykładem kąta, którego trysekcja jest niewykonalna, jest kąt  $60^\circ$ . Istotnie,  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ . Wielomian  $4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$  ma współczynniki z ciała liczb wymiernych i jest nierozkładalny nad tym ciałem. Gdyby bowiem był rozkładalny, to również wielomian  $8x^3 - 6x - 1$  byłby rozkładalny, jeden z czynników tego rozkładu byłby stopnia pierwszego, skąd wynikałoby, że wielomian miałby pierwiastek wymierny. Pierwiastkami wymiernymi tego wielomianu mogłyby być liczby  $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}$ , a jak można bezpośrednio sprawdzić, żadna z tych liczb nie jest pierwiastkiem wielomianu.

Inaczej jest z kątem  $90^\circ$ . Ponieważ  $\cos 90^\circ = 0$ , więc wielomian  $4x^3 - 3x - \cos \varphi = 4x^3 - 3x = x(4x^2 - 3)$  jest rozkładalny. Zatem trysekcję kąta  $90^\circ$  można przeprowadzić, choć zamiast konstrukcji podziału tego kąta na trzy równe części możemy podać bezpośrednio konstrukcję kąta  $30^\circ$ : konstruujemy trójkąt równoboczny i prowadzimy dwusieczną jego kąta wewnętrznego.

Niewykonalność trysekcji kąta oznacza tyle: nie można za pomocą cyrkla i linijki podzielić dowolnego kąta na trzy równe części. Powtórzmy: w konstrukcji klasycznej linijki wolno używać jedynie do kreślenia prostej przez dane dwa punkty, cyrkla – do kreślenia okręgu o środku w danym punkcie i promieniu równym odległości dwóch danych punktów.

Okazuje się, że nieznacznie wzbogacając możliwości wykorzystania cyrkla i linijki, można wykonać konstrukcje niewykonalne w sensie klasycznym. Archimedes zaproponował wykonanie trysekcji dowolnego kąta za pomocą cyrkla i linijki, na której zaznaczono dwa punkty. Robi się to tak. Mając dany dowolny kąt  $\varphi$  o wierzchołku  $O$ , przedłużmy jedno z jego ramion do prostej i wykreślmy okrąg o środku  $O$  i promieniu równym odległości  $r$  punktów zaznaczonych na linijce. Następnie przyłożymy linijkę tak, by przeszła przez punkt  $C$  przecięcia okręgu z drugim ramieniem kąta, a z dwóch zaznaczonych na linijce punktów punkt  $A$  wypadł na przedłużeniu pierwszego ramienia, zaś punkt  $B$  był różnym od  $C$  punktem okręgu.



Prosta przechodząca przez punkty  $A, B, C$  tworzy z przedłużeniem pierwszego ramienia kąt  $\alpha$ . Wykażemy, że  $\alpha = \varphi/3$ . Trójkąt  $ABO$  jest równoramienny, bo  $AB = BO = r$ , skąd wynika, że  $\sphericalangle ABO = 180^\circ - 2\alpha$ , a więc  $\sphericalangle OBC = 2\alpha$ . Trójkąt  $BCO$  również jest równoramienny, bo  $BO = CO = r$ , stąd  $\sphericalangle BCO = 2\alpha$ . Wobec tego  $\sphericalangle BOC = 180^\circ - 4\alpha$ . Trzy kąty o wierzchołku  $O$  dają w sumie kąt półpełny, a zatem

$$\alpha + (180^\circ - 4\alpha) + \varphi = 180^\circ,$$

skąd wynika, że  $\varphi = 3\alpha$ .

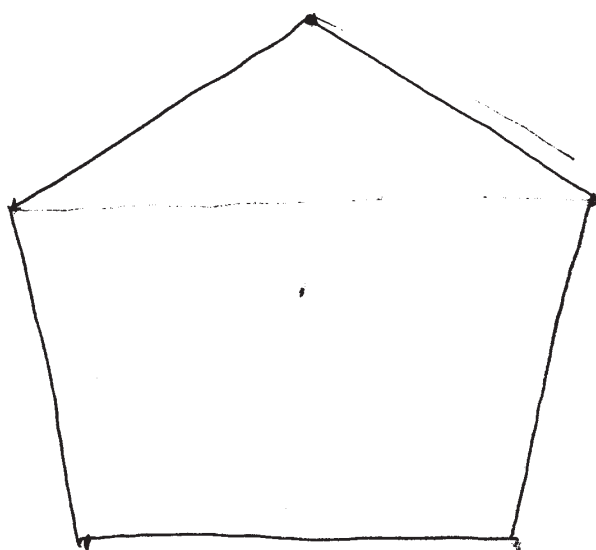


# 5

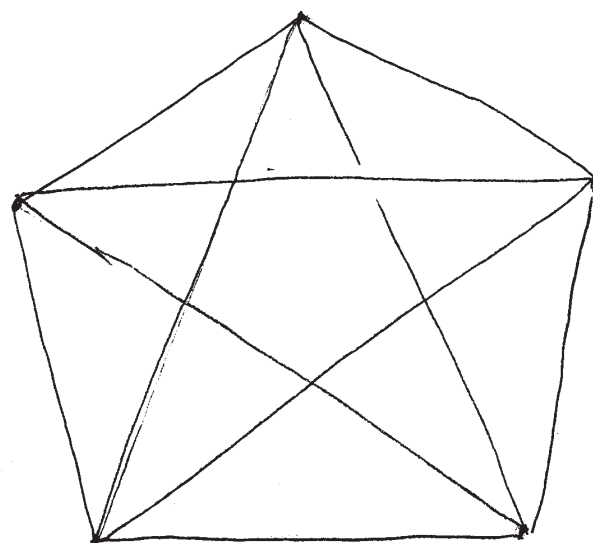
# mała delta

## Lekcja rysunku (8): Dwunastościan wielki

Dwunastościan wielki jest jednym z czterech niewypukłych wielościanów foremnych. Jego ścianami są przenikające się pięciokąty foremne (pentagony). Oczywiście, jest ich dwanaście. I w tym przypadku jest w miarę prosty sposób rysowania.

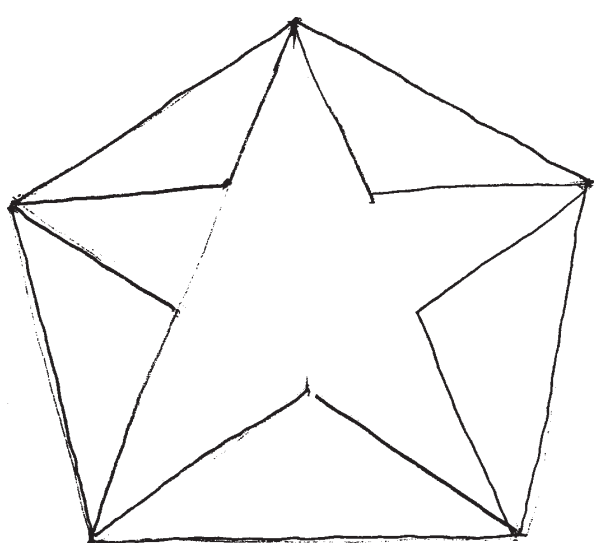


Rys. 1

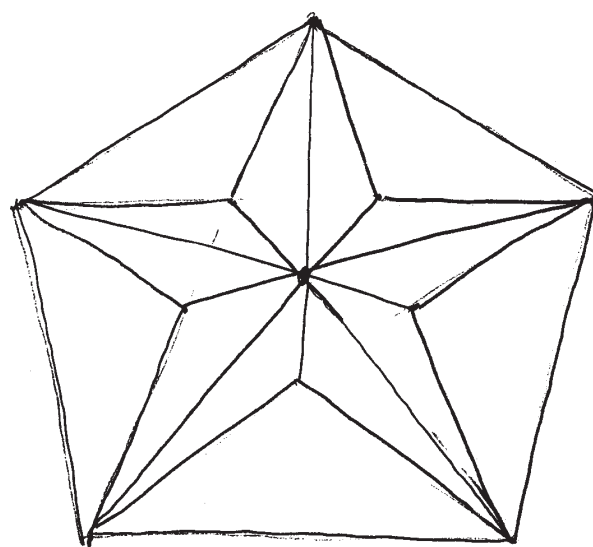


Rys. 2

Startujemy od pięciokąta w przybliżeniu foremnego (rys. 1). Będzie to jedna ze ścian dwunastościanu wielkiego, którą będą przenikać inne. Następnie rysujemy w nim przekątne, czyli pentagram (rys. 2). Robimy to jednak delikatnie, bo nie wszystkie fragmenty pentagramu będą później widoczne.

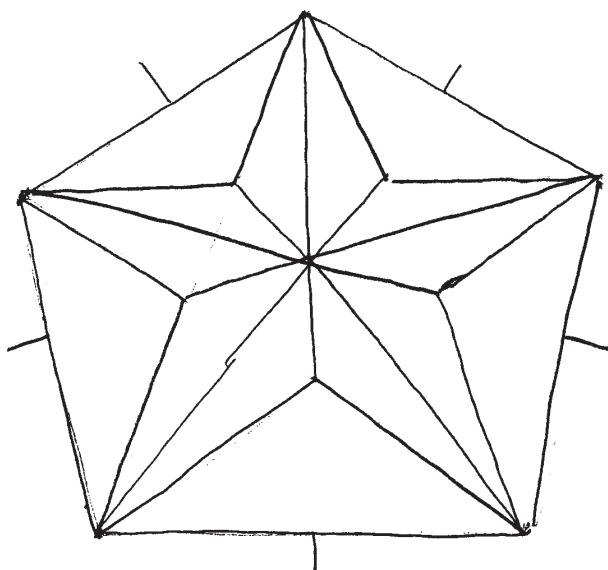


Rys. 3

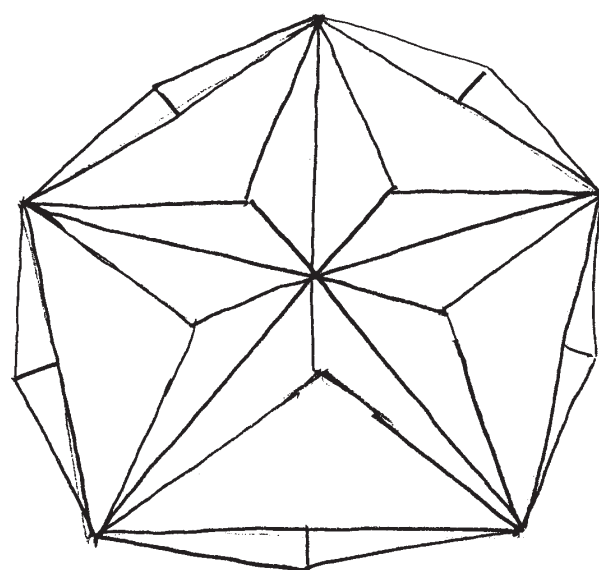


Rys. 4

Wykorzystamy tylko zewnętrzne linie (rys. 3). Z wierzchołków prowadzimy odcinki do przeciwległego punktu przecięcia boków (rys. 4) – są to fragmenty osi symetrii pentagramu.



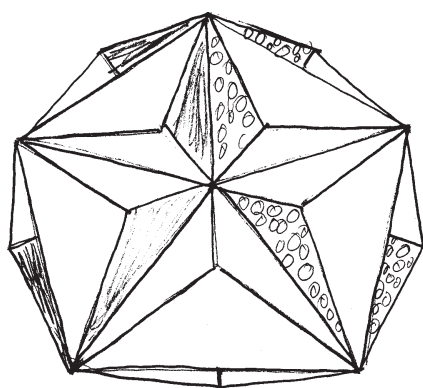
Rys. 5



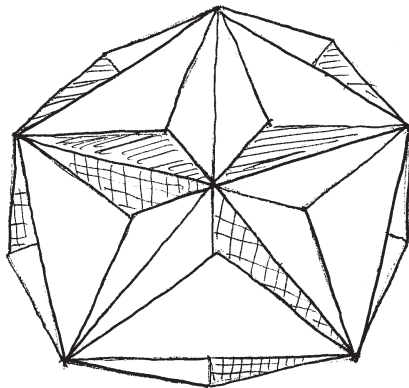
Rys. 6

Odcinki te przedłużamy nieznacznie, ale dopiero poza pięciokątem (rys. 5) i końce łączymy z sąsiednimi wierzchołkami wyjściowego pięciokąta (rys. 6). W rzeczywistości niektóre z wypustek są widoczne bardziej, inne mniej albo wcale.

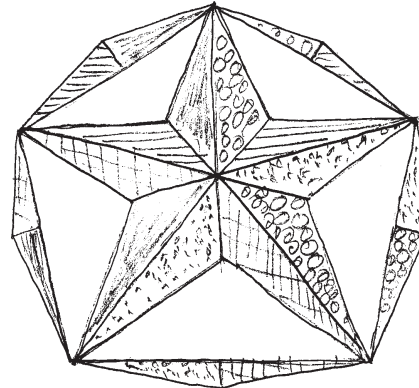
Na koniec można pokolorować odpowiednie fragmenty pięciokątów. Trzeba to robić uważnie (rys. 7, 8, 9).



Rys. 7



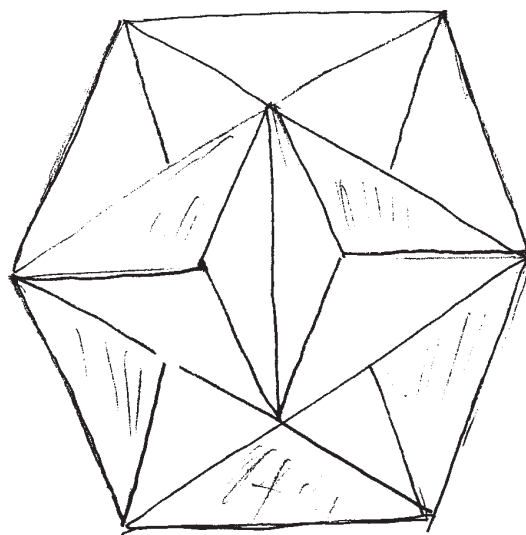
Rys. 8



Rys. 9

Dwunastościan wielki można narysować jeszcze inaczej, startując od sześciokąta.

Przedstawiamy gotowy rysunek (rys. 10), a Czytelnikowi proponujemy odtworzenie szczegółów.



Rys. 10

*pisal i rysował Zdzisław POGODA*

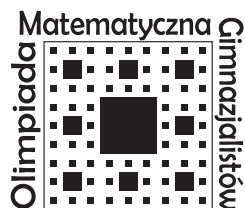


# Olimpiada

## Zadania zawodów I stopnia Olimpiad: Fizycznej, Matematycznej oraz Matematycznej Gimnazjalistów 2013/2014

### IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część korespondencyjna  
(1 września – 21 października 2013 r.)



Rozwiązania powyższych zadań powinny zostać wysłane najpóźniej dnia 21 października 2013 r. na adres właściwego Komitetu Okręgowego OMG. Dokładne adresy Komitetów oraz szczegółowe informacje dotyczące sposobu zapisu rozwiązań dostępne są na stronie internetowej Olimpiady: [www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl).

Uwaga: Wynik uzyskany w zawodach pierwszego stopnia jest sumą punktów części korespondencyjnej i testowej zawodów. Część testowa odbędzie się w szkole uczestnika w dniu 3 października 2013 r.

1. Do pociągu, który może pomieścić co najwyżej 404 pasażerów, wsiadła na początkowej stacji pewna liczba podróżnych. Na następnej stacji liczba pasażerów tego pociągu zwiększyła się o 1,5%. Ilu podróżnych wsiadło do pociągu na początkowej stacji? Odpowiedź uzasadnij.

2. Czy istnieją takie liczby całkowite  $a, b, c, d$ , że liczby

$$a - b, \quad b - c, \quad c - d, \quad d - a,$$

wypisane w podanym porządku, są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

3. Punkty  $E$  i  $F$  leżą odpowiednio na bokach  $BC$  i  $CD$  prostokąta  $ABCD$ , przy czym trójkąt  $AEF$  jest równoboczny. Punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $AF$ . Wykaż, że trójkąt  $BCM$  jest równoboczny.

4. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 4, \\ 2xy - 2x = -5. \end{cases}$$

5. Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ . Punkty  $K$  i  $L$  są środkami odpowiednio boków  $AB$  i  $CD$ . Wykaż, że jeżeli pola czworokątów  $BCLK$  i  $DAKL$  są równe, to czworokąt  $ABCD$  jest trapezem.

6. Punkt  $P$  leży na sferze opisanej na sześcianie. Wykaż, że suma kwadratów odległości punktu  $P$  od wierzchołków sześcianu nie zależy od wyboru punktu  $P$ .

7. Czy kwadrat o wymiarach  $2013 \times 2013$  można podzielić na prostokąty o wymiarach  $1 \times 3$  w taki sposób, aby liczba prostokątów ułożonych pionowo różniła się o 1 od liczby prostokątów ułożonych poziomo? Odpowiedź uzasadnij.



# LXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

**30 września 2013 r. – I seria,**

**4 listopada 2013 r. – II seria,**

**4 grudnia 2013 r. – III seria**

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



Adresy Komitetów Okręgowych oraz bieżące informacje, a także zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych można znaleźć w Internecie pod adresem: [www.om.edu.pl](http://www.om.edu.pl).

## Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

### I seria

(1 września 2013 r. –  
– 30 września 2013 r.)

1. Wykazać, że jeśli liczby całkowite  $a, b, c$  spełniają równanie

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 - (c+5)^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$

to wspólna wartość obu stron jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Dane są trzy różne liczby całkowite  $a, b, c > 1$  spełniające warunek  $\text{NWD}(a, b, c) = 1$ . Znaleźć wszystkie możliwe wartości liczby

$$\text{NWD}(a^2b + b^2c + c^2a, ab^2 + bc^2 + ca^2, a + b + c).$$

3. Na tablicy napisano słowo  $abcd$ . W jednym ruchu możemy dopisać lub usunąć (na początku, w środku lub na końcu) palindrom parzystej długości utworzony z liter  $a, b, c, d$ . Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów możemy uzyskać słowo  $bacd$ . (*Uwaga:* Palindromem nazywamy słowo, które czytane od lewej do prawej jest takie samo jak czytane od prawej do lewej, np.  $abba, cc, daaad$ .)

4. Na bokach  $BC, CA, AB$  trójkąta ostrokątnego  $ABC$  leżą odpowiednio punkty  $D, E, F$ , przy czym  $FA = FE$  oraz  $FB = FD$ . Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta  $ABC$  leży na okręgu przechodzącym przez punkty  $C, D, E$ .

### II seria

(1 października 2013 r. –  
– 4 listopada 2013 r.)

5. Wyznaczyć wszystkie funkcje  $f$  określone na zbiorze liczb całkowitych i przyjmujące wartości całkowite, spełniające warunek

$$f(a+b)^3 - f(a)^3 - f(b)^3 = 3f(a)f(b)f(a+b)$$

dla każdej pary liczb całkowitych  $a, b$ .

6. Dowieść, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite  $x, y, z$ , dla których

$$(3x + 4y)(4x + 5y) = 7^z.$$

7. Dany jest okrąg  $o$  i jego cięciwa  $AB$  niebędąca średnicą. Na okręgu  $o$  wybieramy punkt  $P$ , różny od punktów  $A$  i  $B$ . Punkty  $Q$  i  $R$  leżą odpowiednio na prostych  $PA$  i  $PB$ , przy czym  $QP = QB$  oraz  $RP = RA$ . Punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $QR$ . Wykazać, że wszystkie uzyskane w ten sposób proste  $PM$  (odpowiadające różnym położeniom punktu  $P$  na okręgu  $o$ ) mają punkt wspólny.

8. W czworoboku  $ABCD$  płaszczyzna dwusieczna kąta dwusiecznego o krawędzi  $BC$  przecina krawędź  $AD$  w punkcie  $P$ , zaś punkt  $Q$  jest rzutem prostokątnym punktu  $P$  na prostą  $BC$ . Udowodnić, że  $\sphericalangle AQP = \sphericalangle PQD$ .

### III seria

(1 listopada 2013 r. –  
– 4 grudnia 2013 r.)

9. Udowodnić, że dla każdej trójki różnych liczb dodatnich  $a, b, c$  z odcinków o długościach

$$\sqrt[3]{(a^2 - b^2)(a - b)}, \quad \sqrt[3]{(b^2 - c^2)(b - c)}, \quad \sqrt[3]{(c^2 - a^2)(c - a)}$$

można zbudować trójkąt.

10. Ciąg  $x_0, x_1, x_2, \dots$  określamy wzorami:  $x_0 = 1, x_1 = 3$  oraz

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Udowodnić, że dla każdego  $n$  istnieją takie liczby całkowite  $a, b$ , że

$$x_n = a^2 + 2b^2.$$

11. Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $AB \neq AC$ . Okrąg  $o$  wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków  $BC, CA, AB$  odpowiednio w punktach  $D, E, F$ . Punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $EF$ . Okrąg o średnicy  $MD$  przecina okrąg  $o$  w punktach  $D$  i  $P$  oraz przecina odcinek  $EF$  w punktach  $M$  i  $Q$ . Wykazać, że prosta  $PQ$  połowi odcinek  $AM$ .

12. W prostokącie  $P$  zaznaczono  $n^2$  różnych punktów. Dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 2$  znaleźć największą możliwą liczbę prostokątów, w których każdy wierzchołek jest jednym z zaznaczonych punktów, a boki są równoległe do boków prostokąta  $P$ .



# LXIII Olimpiada Fizyczna

## Zadania zawodów I stopnia

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach:

**część I – do 11 października br.**

**część II – do 15 listopada br.**

O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II.

Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl>.

### Krótką informacją na temat poprawnej redakcji rozwiązań zadań Olimpiady Fizycznej

Zadania powinny być rozwiązane jasno, przejrzysto i czytelnie. Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce papieru. Poszczególne etapy rozumowania należy opisać, a wszelkie zależności fizyczne, które nie są wprost podane w podręcznikach szkolnych – udowodnić. Należy również objaśnić wszelkie oznaczenia występujące w rozwiązaniach zadań. Rysunki mogą być wykonane odręcznie – muszą być jednak przejrzyste i czytelne oraz dobrze opisane w tekście.

Rozumowanie przedstawione w rozwiązaniach nie może zawierać luk logicznych. Każdy krok rozumowania powinien być zwięźle opisany, a przyjęte założenia – klarownie uzasadnione. Rozwlekłość jest uznawana za ujemną cechę pracy.

Rozwiązanie zadania teoretycznego powinno być poprzedzone analizą problemu poruszanego w zadaniu, a zakończone dyskusją wyników. Rozwiązania zadań teoretycznych powinny odnosić się do ogólnej sytuacji opisanej w treści, dane liczbowe (o ile podane) powinny być podstawione dopiero do ostatecznych wzorów.

W zadaniach doświadczalnych należy wyraźnie rozgraniczyć część teoretyczną i doświadczalną. Część teoretyczna zadania doświadczalnego powinna zawierać analizę problemu wraz z wyprowadzeniem niezbędnych wzorów (o ile nie ma ich wprost w podręcznikach szkolnych) oraz sugestie metody doświadczalnej. Część doświadczalna powinna zawierać m.in. opis układu doświadczalnego ilustrowany rysunkiem, opis wykonanych pomiarów, wyniki pomiarów, analizę czynników mogących wpływać na wyniki (jak np. rozpraszanie energii lub opory wewnętrzne mierników), opracowanie wyników wraz z dyskusją niepewności pomiarowych. Wykresy do zadania doświadczalnego powinny być starannie wykonane, najlepiej na papierze milimetrowym. Ocenie podlegają wyłącznie elementy rozwiązania opisane w pracy. W zadaniach doświadczalnych osobno oceniana jest część teoretyczna i część doświadczalna.

W rozwiązaniach można posługiwać się dowolnym układem jednostek, chyba że tekst zadania mówi wyraźnie inaczej.

### Część I (termin wysyłania rozwiązań – 11 października 2013 r.)

**Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki.**

**Podaj i krótko uzasadnij odpowiedź. Za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty.**

1. Rozważmy balon w kształcie bryły obrotowej o wydłużonym kształcie. Powłoka balonu jest jednakowo gruba w każdym miejscu. Jak zmienia się proporcje balonu po dalszym dopompowywaniu: będzie on bardziej wydłużony, bliższy kształtem kuli, czy proporcje się nie zmienią?

Dla uproszczenia przyjmij, że początkowo balon ma kształt walca zakończonego półsferami, a ciśnienie w jego wnętrzu jest równe ciśnieniu na zewnątrz.

2. Ujemny biegun akumulatora samochodowego jest zwykle podłączony do karoserii (masy). Chcemy wymontować taki akumulator, odłączając przewody przy pomocy niez izolowanych metalowych narzędzi. Biorąc pod uwagę względy bezpieczeństwa, od którego bieguna powinniśmy najpierw odłączyć przewód? W jakiej kolejności powinniśmy podłączać przewody montując akumulator z powrotem?

3. Stojąc na podłodze, jedną ręką podtrzymujemy lekko rower, żeby się nie przewrócił, a drugą ciągniemy w kierunku tyłu roweru za pedał znajdujący się w najniższym położeniu. W którą stronę – do przodu, czy do tyłu – przesunie się rower? Czy dla każdego roweru odpowiedź jest taka sama?

4. Rurka obraca się w płaszczyźnie poziomej podłogi ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . W odległości  $r$  od osi obrotu, wewnątrz rurki znajduje się kulka o średnicy nieco mniejszej od wewnętrznej średnicy rurki, utrzymywana w tej odległości za pomocą nitki.

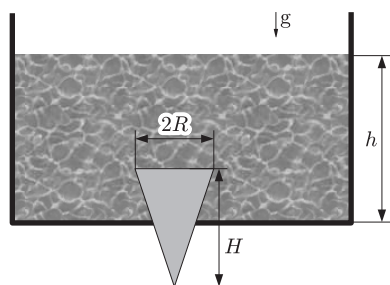
Ile będzie wynosić według nieruchomego obserwatora przyspieszenie kulki tuż po pęknięciu nitki?

Pomiń tarcie kulki o rurkę.

5. Kartka papieru leży na równym poziomym stole. Przez środek kartki w stół wbito szpilkę, a do rogu kartki przyłożono siłę skierowaną równoległe do krótszego boku. Maksymalna wartość tej siły, przy której kartka jeszcze się nie obraca, to  $F_1$ . Ile wynosi maksymalna wartość siły nie powodującej jeszcze obrotu kartki, jeśli jest ona tak samo skierowana jak poprzednio i przyłożona w tym samym punkcie, a szpilka jest wbita w kartkę tuż przy rogu przeciwnym do punktu przyłożenia siły?

6. Rozważmy dwie identyczne kulki, znajdujące się początkowo na tej samej wysokości. W tym samym momencie jedną z nich rzucono poziomo, a drugą upuszczono z zerową prędkością początkową. Siła oporu powietrza działająca na kulki jest proporcjonalna do kwadratu prędkości. Która kulka wcześniej spadnie na ziemię? Jaka powinna być zależność siły oporu od prędkości, żeby kulki spadły jednocześnie?

7. Powiększenie w aparacie fotograficznym można uzyskać na dwa sposoby: zmieniając ogniskową (powiększenie optyczne) oraz powiększając do wymiarów zdjęcia jedynie fragment obrazu padającego na matrycę aparatu (powiększenie cyfrowe). Rozpatrzmy prosty model pierwszego przypadku: soczewka o ogniskowej  $f_1$  znajdująca się w przybliżeniu w odległości  $f_1$  od matrycy zostaje zastąpiona przez soczewkę o identycznej średnicy jak poprzednia (ta sama wielkość otworu, przez który przechodzi światło) o ogniskowej  $f_2 > f_1$  znajdującą się w przybliżeniu w odległości  $f_2$  od matrycy. Który przypadek – powiększenie optyczne, czy cyfrowe – jest bardziej korzystny z punktu widzenia teoretycznej przydatności do robienia zdjęć przy słabym świetle (tzn. w którym przypadku na obszar matrycy, z którego powstanie zdjęcie, w tym samym czasie pada więcej światła)?



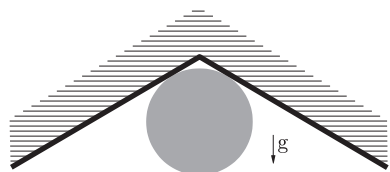
Rys. 1

Przyjmij, że przedmiot znajduje się w odległości od soczewki znacznie większej od ogniskowej, a ogniskowa jest znacznie większa od średnicy soczewki.

8. Maksymalna możliwa zdolność rozdzielcza układu optycznego jest określona przez efekty dyfrakcyjne. Dla aparatu fotograficznego możemy ją określić jako wielkość na zdjęciu plamki będącej obrazem odległego, punktowego źródła światła. Rozważając wprowadzone w zadaniu 7. metody powiększenia (optyczne i cyfrowe) ustal, która metoda prowadzi do lepszej teoretycznej zdolności rozdzielczej aparatu.

Przyjmij takie same założenia jak w zadaniu 7.

9. Mamy dwa trójkołowe rowery o jednym kole sterującym z przodu i dwóch kołach z tyłu. Przednie koła są takie same, natomiast tylne w pierwszym rowerze są duże, a w drugim małe. Który z rowerów jest stabilniejszy przy szybkiej jeździe na zakręcie o małym promieniu, tzn. w którym przypadku niebezpieczeństwo przewrócenia się na bok jest mniejsze?



Rys. 2

Przyjmij, że położenie punktów styczności kół z podłożem, położenie środka masy oraz masa roweru z rowerzystą są takie same w obu przypadkach. Droga jest równa i pozioma. Koła rowerów nie są amortyzowane, a ich masa w obu przypadkach jest taka sama. Przyjmij, że większość masy koła znajduje się w pobliżu jego obwodu.

10. W płaskim dnie naczynia znajduje się okrągły otwór o promieniu  $R/2$ . Otwór zatkało korkiem w kształcie stożka o wysokości  $H$  i promieniu podstawy  $R$  (patrz rysunek 1). Wysokość poziomu cieczy w naczyniu wynosi  $h$ . Jakie co najmniej musi być  $h$ , aby korek nie wyskoczył z otworu?

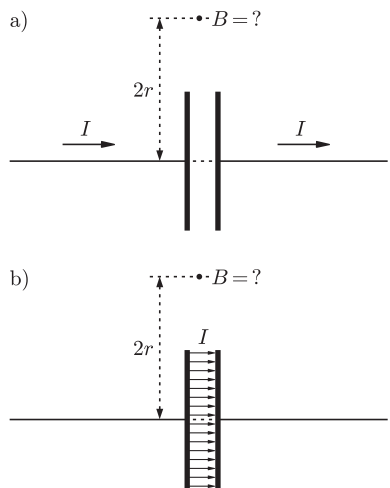
Średnia gęstość korka jest znacznie mniejsza od gęstości cieczy. Między korkiem a otworem nie występuje tarcie.

11. Robert kopnął piłkę tak, że ugrzęzła w załamaniu – o kącie  $120^\circ$  – skośnego sufitu (patrz rysunek 2). Ile co najmniej musi wynosić współczynnik tarcia piłki o sufit, aby to było możliwe?

Piłki nie przykleja się do sufitu.

12. Rozważmy kondensator płaski, którego okładki są kołami o promieniu  $r$ , a odległość między nimi wynosi  $d$ . Do kondensatora dochodzą długie, prostoliniowe przewody. Wyznacz pole magnetyczne w punkcie znajdującym się w równej odległości od każdej z okładek, w odległości  $R = 2r$  od osi kondensatora, gdy

- przez przewody płynie prąd  $I$ ,
- przez przewody nie płynie prąd, ale ośrodek między okładkami ma pewne przewodnictwo elektryczne i między okładkami płynie jednorodny prąd o całkowitej wartości  $I$  (kondensator się rozładowuje).



Rys. 3

13. Przez gęsto nawiniętą cewkę o  $N$  zwojach, długości  $L$  i promieniu  $R \ll L$  płynie prąd o natężeniu  $I$ . Rozważmy płaszczyznę przechodzącą przez środek cewki i prostopadłą do jej osi. Ile wynosi strumień indukcji pola magnetycznego przez część tej płaszczyzny, znajdującą się na zewnątrz cewki?

Uwzględnij, że płaszczyzna jest nieskończona (tzn. jej rozmiary są znacznie większe od  $L$ ).

14. Marek używa elektronicznej wagi łazienkowej. Ze zdziwieniem stwierdził, że gdy waży się w łazience, której podłoga wyłożona jest płytkami ceramicznymi, to waga wskazuje 60 kg, a gdy waży się w pokoju wyłożonym miękką wykładziną, to waga wskazuje 55 kg. Jak to jest możliwe?

15. Wyniki eksperymentów przeprowadzonych w Wielkim Zderzaczu Hadronów (LHC) Europejskiej Organizacji Badań Jądrowych (CERN) potwierdzają hipotezę, że istnieje cząstka nazwana bozonem Higgsa i że masa tej cząstki wynosi ok.  $125 \text{ GeV}/c^2$ .

Jedną z możliwości rozpadu bozonu Higgsa jest rozpad na cztery miony (dwa  $\mu^+$  i dwa  $\mu^-$ ) o masie  $106 \text{ MeV}/c^2$  i średnim czasie życia  $\tau = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  każdy. Jaką średnio drogę w układzie bozonu Higgsa przebędzie do momentu swojego rozpadu każdy z mionów przy założeniu, że nie zderzy się z innymi cząstkami?

W przypadku relatywistycznym obowiązują wzory:  $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ ,  $v = pc^2/E$ ,  $T = T_0 \cdot E/(mc^2)$ , gdzie  $E$ ,  $p$ ,  $m$ ,  $v$  oraz  $c$  to odpowiednio energia całkowita, pęd, masa, prędkość oraz prędkość światła,  $T_0$  to średni czas życia cząstki we własnym układzie odniesienia,  $T$  to średni czas życia tej cząstki dla obserwatora, względem którego ma ona energię  $E$ .

Uwaga: Pierwszym etapem opisanego rozpadu bozonu Higgsa są dwa bozony  $Z$ , a dopiero one rozpadają się na miony. Średni czas życia bozonu  $Z$  jest jednak tak mały, że ten etap został powyżej pominięty.

## Część II (termin wysyłania rozwiązań – 15 listopada 2013 r.)

**Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy, a także nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.**

### Zadania teoretyczne

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

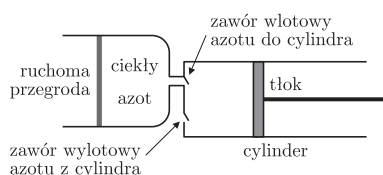
**T1.** Astronomowie zaobserwowali zbliżającą się do Ziemi planetoidę. Ustalono, że planetoida znajdowała się w odległości  $r_0 = 50000 \text{ km}$  od środka Ziemi, zbliżała się się do niego z prędkością  $v_0 = 20 \text{ km/s}$ , a jej prędkość kątowna względem tego środka, mierzona w układzie inercjalnym, wynosiła  $\omega_0 = 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ .

Pomijając wpływ Słońca, Księżyca i innych ciał niebieskich ustal, czy planetoida ominie Ziemię.

**T2.** Skonstruowano samochód napędzany ciekłym azotem. Silnik samochodu działa wieloetapowo. W pierwszym etapie porcja azotu wrze w temperaturze  $T_1$  i pod ciśnieniem  $p_1$ , a powstająca para przesuwając tłok. Po odparowaniu całej porcji azotu jest on jednocześnie ogrzewany i rozprężany, tak, że ciśnienie maleje liniowo ze wzrostem objętości, a w końcowym punkcie tego etapu ciśnienie i temperatura azotu są równe ciśnieniu otoczenia  $p_0$  i temperaturze otoczenia  $T_0$ . Następnie tłok wypychając azot do otoczenia powraca do położenia początkowego i pobierana jest kolejna porcja ciekłego azotu. Zbiornik posiada przegrodę, przesuwającą się w trakcie pobierania tej porcji tak, by ciśnienie w zbiorniku pozostawało stałe (całkowita praca wykonywana w tym etapie jest równa zero – praca zużywana na przesunięcie przegrody jest równa pracy uzyskiwanej przy przesuwaniu tłoka).

Gęstość ciekłego azotu w temperaturze  $T_1$  i pod ciśnieniem  $p_1$  wynosi  $\rho_1$ , a ciepło parowania –  $q_1$ .

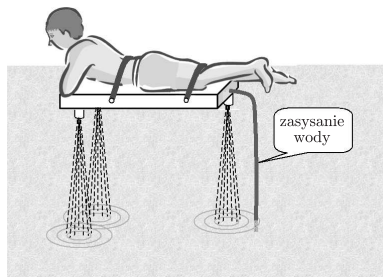
Jaką średnią moc  $P$  ma silnik samochodu, jeśli zużywa on masę  $\Delta m$  azotu w ciągu czasu  $\Delta t$ ?



Rys. 4

Podaj wartość liczbową tej mocy dla  $T_1 = 107 \text{ K}$ ,  $p_1 = 1,23 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ ,  $\rho_1 = 644 \text{ kg/m}^3$ ,  $T_0 = 300 \text{ K}$ ,  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $\Delta m = 10 \text{ kg}$ ,  $\Delta t = 3600 \text{ s}$ .

Przyjmij, że gazowy azot jest gazem doskonałym o stałym cieple właściwym. Masa molowa gazowego azotu to  $\mu = 0,028 \text{ kg/mol}$ . Uniwersalna stała gazowa  $R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ .



Rys. 5

**T3.** Skonstruowano urządzenie, które przypięte do człowieka, umożliwia unoszenie się go nad powierzchnią wody. Posiada ono dysze, z których pionowo w dół wytryskuje woda, przy czym całkowita powierzchnia przekroju poprzecznego wytryskujących strumieni wynosi  $s_1$ . Woda jest zasysana rurą o przekroju poprzecznym  $s_2$ . Gęstość wody wynosi  $\rho$ , przyspieszenie ziemskie wynosi  $g$ .

Jaka powinna być prędkość wypływu wody  $v$ , aby to urządzenie wraz przypiętą osobą utrzymało się nad powierzchnią wody, jeśli całkowita masa (urządzenie, człowiek, woda w rurach) wynosi  $m$ ?

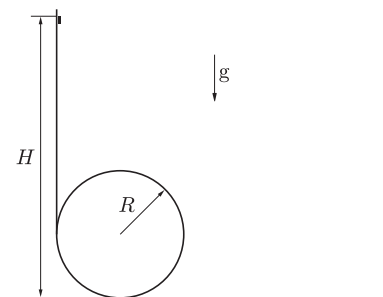
Pomijając straty energii przy zasysaniu wody oraz na dalszych etapach jej przepływu, wyznacz moc  $P$ , jaka jest wydatkowana, gdy urządzenie unosi się na wysokości  $h$  (jest to odległość wylotów dysz od powierzchni wody).

Przyjmując  $m = 150 \text{ kg}$ ,  $s_1 = 0,005 \text{ m}^2$ ,  $s_2 = 0,005 \text{ m}^2$ ,  $h = 5 \text{ m}$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  wyznacz  $v$  oraz  $P$ .

**T4 (zadanie numeryczne).** Rozważmy tor składający się z bardzo długiego pionowego odcinka oraz pętli o promieniu  $R$  i kącie  $45^\circ$  przechodzącej w poziomy odcinek.

Z pewnej wysokości, po pionowym odcinku toru puszczamy mały klocek, którego współczynnik tarcia o tor wynosi  $\mu$ . Niech  $H$  będzie minimalną wysokością, z której puszczony klocek przebędzie całą pętlę nie odrywając się od niej.

Wyznacz  $H$  dla  $\mu$  od 0 do 0,5 co 0,05.



Rys. 6

Pomiń opór powietrza.

**Uwaga:** Wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

### Zadania doświadczalne

**Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.**

**D1.** Na ciecz przepływającą przez wąską rurkę działa siła oporu  $F_{op}$  proporcjonalna do iloczynu długości rurki  $L$  oraz przepływu cieczy  $Q$  (masy cieczy wypływającej z rurki w jednostce czasu). Możemy zatem zapisać  $F_{op} = \alpha \cdot Q \cdot L$ , gdzie  $\alpha$  jest pewnym współczynnikiem. Masz do dyspozycji:

- plastikową butelkę o pojemności około 1 litra,
- menzurkę o pojemności około 1 litra,
- olej spożywczy (np. słonecznikowy),
- linijkę lub papier milimetrowy,
- słomkę do napojów o średnicy  $5 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}$ ,
- plastelinę i taśmę klejącą,
- nożyczki do cięcia butelki i słomki,
- statyw,
- kamerę internetową podłączoną do komputera z programem umożliwiającym odczytanie dokładnego czasu danej klatki filmu.

Wyznacz zależność przepływu oleju przez słomkę od ciśnienia na wysokości wlotu słomki. Pomiar przeprowadź w zakresie ciśnień od 0 do 1200 Pa ponad ciśnienie atmosferyczne. Na tej podstawie wyznacz współczynnik  $\alpha$ . Przyjmij, że gęstość oleju wynosi  $\rho = 0,9 \text{ g/cm}^3$ .

**D2.** Podczas działania latarki wolframowe włókno żaróweczki znaczną część dostarczanej energii emituje w postaci promieniowania elektromagnetycznego. Jeśli jednak stłuc szklaną bańkę i umieścić żaróweczkę w cieczy, dominujące

stają się inne mechanizmy chłodzenia. Odprowadzana moc  $P$  jest w znacznym zakresie temperatur proporcjonalna do różnicy temperatury włókna  $T$  i temperatury otoczenia  $T_0$ :

$$P = \alpha \cdot (T - T_0).$$

Wyznacz współczynnik  $\alpha$  dla trzech różnych cieczy: wody, gliceryny i oleju jadalnego. Masz do dyspozycji:

- żaróweczkę od latarki na napięcie z zakresu 3 V do 6 V,
- regulowane źródło napięcia stałego (np. zasilacz lub baterię z opornicą),
- woltomierz i amperomierz (np. dwa mierniki uniwersalne),
- kable połączeniowe,
- zlewkę,
- wodę, glicerynę i olej jadalny (np. słonecznikowy).

Przyjmij następującą zależność oporu właściwego wolframu  $\rho$  od temperatury

$$\rho = \rho_0 \cdot [1 + \beta \cdot (T - T_0)]$$

gdzie  $\rho_0$  jest pewnym współczynnikiem, a  $\beta = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ . W rozwiązaniu podaj dane techniczne użytej żaróweczki.

**D3.** Masz do dyspozycji:

- dwie lampy z odsłoniętymi identycznymi żarówkami (bez klosza ani reflektora),
- linijkę lub taśmę mierniczą,
- 10 mikroskopowych płytek szklanych (podstawowych),
- kartkę papieru z niewielką tłustą plamą.

Wyznacz, jaka część światła padającego prawie prostopadle na pojedynczą płytkę szklaną ulega odbiciu. Zaniedbaj absorpcję światła w szkle.



## Bioetyka. Dla kogo to jest ważne?

Wiele lat temu profesor Politechniki Warszawskiej, były jej Rektor, Marek Dietrich, zorganizował przy Instytucie Problemów Współczesnej Cywilizacji, którym kierował (piękna nazwa, dość skromny zespół działający twórczo w małym i ładnym budyneczku przy Koszykowej), cykl wykładów międzyuczelnianych na różne tematy, niekoniecznie bezpośrednio związane z techniką. Zostałam tam zaproszona, początkowo do wykładania tajników budowy i funkcji kwasów nukleinowych. Po pewnym czasie postanowiliśmy tematykę rozszerzyć – stało się to przy udziale młodego doktora Instytutu Filozofii UW, Pawła Łukowa, a nasz wspólny przedmiot nazwaliśmy „Gen-etyką”. Wykład cieszył się zainteresowaniem studentów i pracowników wielu warszawskich uczelni. Nic więc dziwnego, że kiedy spotkałam „w przejściu” wpływowego uczonego z Wydziału Biologii UW – zasugerowałam mu możliwość wprowadzenia takiej tematyki właśnie na tym wydziale, który to pomysł, też „w przejściu”, Pan Profesor odrzucił, jako niepotrzebną propozycję. Do dziś tej reakcji nie rozumiem, dlatego Pan Profesor pozostanie w mojej opowieści anonimowy.

Życie jednak zadecydowało inaczej i na Wydziale wprowadzono, uwzględniając potrzeby studentów, wykład „Bioetyka” prowadzony przez (już) profesora Łukowa i prof. Piotra Stępnia z Instytutu Genetyki UW. Wprowadzono bioetykę, początkowo jako zajęcia fakultatywne, dopiero w 2005 roku, choć w tym czasie w świecie cywilizowanym była to już od lat odrębna nauka, prezentowana także studentom w uczelniach medycznych i wydziałach przyrodniczych uniwersytetów. W 2013 roku Wydział Filozofii UW uruchomił pierwsze w Polsce unikatowe, interdyscyplinarne dzienne studia magisterskie na kierunku BIOETYKA, <[bioetyka.uw.edu.pl](http://bioetyka.uw.edu.pl)>.

Bioetyka wydaje mi się nieodzowna jako dojrzały, przemyślany komentarz do takich zjawisk i procesów, jak zdrowie i choroba, zachowania kliniczne (eksperymentalne terapie, w tym w stosunku do chorób dotychczas nieuleczalnych), prokreacji, końca życia, nowych biotechnologii, stosunku do środowiska, przyszłości człowieka i życia, dobrostanu zwierząt, poszukiwania nowych leków. Z uznaniem witam decyzje twórców nowej specjalności o wymaganiach w zakresie znajomości angielskiego. Przewiduje się konferencje, seminaria, praktyki zawodowe. Projekt kierowany jest do ludzi intelektualnie dorosłych, otwartych na różnorodną argumentację. Twórcy projektu zakładają, że absolwenci będą mieć interdyscyplinarną wiedzę z zakresu etyki i wybranych działów filozofii, prawa, socjologii, antropologii i nauk politycznych.

Słabością tego nowego projektu edukacyjnego wydaje mi się brak w nim wiedzy, której dopracowaliśmy się z Pawłem Łukowem w naszym dwuczłonowym haśle: gen-etyka. Nie jestem pewna, oglądając program przyszłych zajęć, czy dobrze jest uczyć o podejściu filozoficznym do materii, która jest dla uczącego się literackim pojęciem: genu, fizjologii rozrodu, fizjologii śmierci, nowych technik biotechnologicznych. Zajęcia prowadzić będą filozofowie, socjologowie, prawnicy. A BIOLOGOWIE?

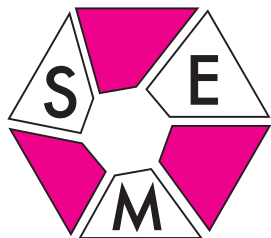
Oczywiście, można i tak. Podobnie jak posłowie debatujący o dopuszczeniu GMO, którzy tego skrótu nie są w stanie rozszyfrować, jak również nie wiedzą, co pod rozszyfrowanymi pojęciami się kryje. No, ale w tej sprawie to ja bym z Sejmu przykładu nie radziła brać.

A zachowując tradycję dobrej i miłej współpracy z Pawłem Łukowem, poprosiłam go o komentarz. Oto on: *Biologów – podobnie jak np. lekarzy – wśród wykładowców bioetyki nie ma dlatego, że bioetyka jest komentarzem do nauk o życiu i do ich zastosowań. Studiowanie bioetyki będzie zaś uczeniem się tego komentowania, między innymi, na zajęciach z etyki nowych technologii czy środowiska naturalnego. Część studentów, którzy mają już za sobą studia pierwszego stopnia, wiedzę z zakresu nauk biologicznych czy medycznych przyniesie ze sobą. Inni w celu zdobycia podstaw takiej wiedzy będą uczęszczać na zajęcia ogólnouniwersyteckie, które wybiorą z tutorami. Każdy z nich będzie zdobywać wiedzę z zakresu nauk, których dotyczyć będą jego poszukiwania naukowe. A w czasie obowiązkowych zajęć praktycznych dowie się, jak „od kuchni” wygląda praca biologów, lekarzy, organizacji pozarządowych czy urzędów.*

Magdalena FIKUS

# Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl



W LXIV Olimpiadzie Matematycznej wzięło udział 1464 uczniów. Do zawodów drugiego stopnia zakwalifikowano 572 osoby, a do finału zorganizowanego przez I Liceum Ogólnokształcące im. Józefa Bema w Ostrołęce, obchodzące stulecie swego istnienia, zaproszono 121 młodych ludzi. Wszystkie zadania wraz z rozwiązaniami są dostępne na stronie internetowej Olimpiady: [www.om.edu.pl](http://www.om.edu.pl). W pierwszym stopniu najtrudniejsze było zadanie ósme, ale i tak rozwiązało je poprawnie ponad 125 osób. Nie było więc zadania bardzo trudnego, bo takie są rozwiązywane jedynie przez kilka osób w kraju.

W zawodach okręgowych najtrudniejsze było zadanie szóste:

*Rozstrzygnąć, czy istnieją takie czworościany  $T, T'$  o ścianach odpowiednio  $S_1, S_2, S_3, S_4$  oraz  $S'_1, S'_2, S'_3, S'_4$ , że dla  $i = 1, 2, 3, 4$  trójkąt  $S_i$  jest podobny do trójkąta  $S'_i$ , ale mimo to czworościan  $T$  nie jest podobny do czworościanu  $T'$ .*

Rozwiązało je poprawnie czternastu zawodników. Nie przytaczamy rozwiązania tego zadania, bo jest mu poświęcony artykuł Marcina Kuczmy na stronie 18. Warto jednak nadmienić, że wielu uczestników opisywało nieistniejące czworościany, podając np. długości ich krawędzi. Nie troszczyli się o to, by suma kątów płaskich przy jednym wierzchołku była mniejsza od  $360^\circ$  lub by suma dwóch kątów płaskich przy jednym wierzchołku była większa od trzeciego kąta płaskiego przy nim. Jest to zapewne częściowo związane z praktyczną rezygnacją z nauczania stereometrii w szkołach.

Nieco łatwiejsze było zadanie piąte, rozwiązane przez dziewiętnastu uczniów. Należało rozstrzygnąć, *czy wielomian o współczynnikach całkowitych, który jest funkcją różnowartościową na zbiorze liczb wymiernych, musi też przyjmować różne wartości dla różnych argumentów rzeczywistych.*

Wspólną cechą obu tych zadań, decydującą o ich trudności, było to, że najpierw należało sformułować tezę, a dopiero potem ją uzasadnić. Niestety, oba pojawiły się w sobotę (byłem za), czyniąc drugi dzień zawodów bardzo trudnym.

W finale pojawiły się dwa bardzo trudne zadania: trzecie (dwie szóstki i 119 zer) i szóste (dwie szóstki, cztery piątki, dwie dwójki i 113 zer). Oba wymagały właściwego pomysłu, a wiedzy tylko z gimnazjum!

Zadanie piąte: *Wykazać, że  $(k - \frac{1}{k})(m - \frac{1}{m})(n - \frac{1}{n}) \leq kmn - (k + m + n)$  dla dowolnych trzech różnych liczb całkowitych  $k, m, n > 0$ , sprawdzano najdłużej.*

W niektórych pracach pojawiły się tak długie przekształcenia, że sprawdzaliśmy je za pomocą komputera. A po „wyczyszczeniu” straciły na „powadze”, co zaraz pokażemy. Niech

$$\begin{aligned} f(k, m, n) &= 2kmn \left( kmn - (k + m + n) - \left( k - \frac{1}{k} \right) \left( m - \frac{1}{m} \right) \left( n - \frac{1}{n} \right) \right) = \\ &= 2kmn \left( \frac{km}{n} + \frac{mn}{k} + \frac{nk}{m} - k - m - n - \frac{k}{mn} - \frac{m}{nk} - \frac{n}{km} + \frac{1}{kmn} \right) = \\ &= 2k^2m^2 + 2m^2n^2 + 2n^2k^2 - 2k^2mn - 2km^2n - 2kmn^2 - 2k^2 - 2m^2 - 2n^2 + 2 = \\ &= (km - kn)^2 + (mn - mk)^2 + (nk - nm)^2 - 2k^2 - 2m^2 - 2n^2 + 2 = \\ &= k^2((m - n)^2 - 2) + m^2((n - k)^2 - 2) + n^2((k - m)^2 - 2) + 2. \end{aligned}$$

Symetria pozwala założyć, że  $k > m > n$ . Jeśli  $k - m \geq 2$  i  $m - n \geq 2$ , to

$$f(k, m, n) \geq k^2(2^2 - 2) + m^2(2^2 - 2) + n^2(2^2 - 2) + 2 > 0,$$

więc nierówność zachodzi w tej sytuacji. Niech  $m = n + 1$ . Wtedy:

$$\begin{aligned} f(k, n + 1, n) &= -k^2 + (n + 1)^2((k - n)^2 - 2) + n^2((k - n - 1)^2 - 2) + 2 = \\ &= k^2(-1 + (n + 1)^2 + n^2) - 2k(n(n + 1)^2 + n^2(n + 1)) + 2(n^2(n + 1)^2 - (n + 1)^2 - n^2 + 1) = \\ &= 2n(n + 1)k^2 - 2n(n + 1)(2n + 1)k + 2(n^2 - 1)((n + 1)^2 - 1) = \\ &= 2n(n + 1)(k^2 - (2n + 1)k + (n - 1)(n + 2)) = 2n(n + 1)(k - n + 1)(k - n - 2). \end{aligned}$$

Ponieważ  $k > m$ , więc  $k \geq m + 1 = n + 2$ , zatem:  $2n(n + 1)(k - n + 1)(k - n - 2) \geq 0$ . Analogicznie prawdziwy jest wzór:

$$\begin{aligned} f(m + 1, m, n) &= 2m(m + 1)(n - m + 1)(n - m - 2) = \\ &= 2m(m + 1)(m - n - 1)(m + 2 - n) \geq 0. \end{aligned}$$

Nierówność jest prawdziwa dla każdej trójki liczb całkowitych  $k > m > n$ . A dla niecałkowitych liczb czasem nie jest, np. gdy  $k = 1,2$ ,  $m = 1,1$  i  $n = 1$ , to prawa strona jest równa  $1,32 - 3,3 < 0$ , a lewa  $- 0$ .

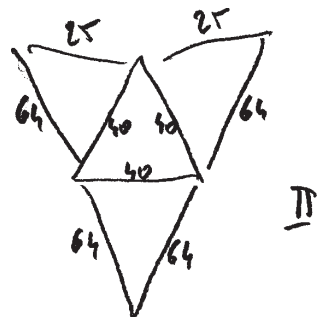
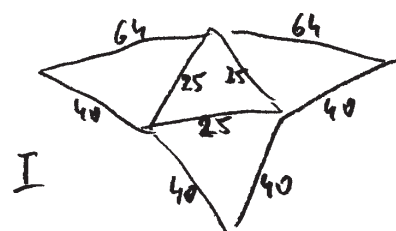
Michał KRYCH

Czworościan to ostrosłup. Wybieramy jedną ścianę – „podstawę”; trzy ściany „boczne” odchylamy na zewnątrz, jakby były na zawiasach. Gdy się ułożą w płaszczyźnie podstawy, uzyskamy układ czterech trójkątów – płaską *siatkę* czworościanu; może ona ułatwić (lub utrudnić) jego wizualizację.

W zawodach okręgowych LXIV Olimpiady Matematycznej pojawiło się zadanie: Czy istnieje para czworościanów, których ściany można ponumerować odpowiednio  $S_1, S_2, S_3, S_4$  oraz  $S'_1, S'_2, S'_3, S'_4$  tak, by dla  $i = 1, 2, 3, 4$  ściana  $S_i$  była trójkątem podobnym do  $S'_i$ , a przy tym te czworościany nie są bryłami podobnymi?

Pomysł zadania: Jerzy Bednarczuk.

Nietrudno zgadnąć, że takie pary istnieją. Uczestnicy zawodów wskazywali różne przykłady. Najczęściej rysowali siatki czworościanów, podając długości krawędzi. Rysunki – bez zachowania proporcji – należało traktować wyłącznie jako schematy, jak tu obok. Widzimy jedną parę siatek, I i II, oraz inną parę, III i IV. W obu tych parach podobieństwa  $S_i \sim S'_i$  są jasne; przy tym skala podobieństwa pewnych par trójkątów jest różna od skali innych par, dlatego siatki reprezentują bryły niepodobne.



Który przykład lepszy? Istotnej różnicy niby nie widać. Gdyby rysunki były staranne, może dostrzeżlibyśmy, że różnica jest zasadnicza. Z trójkątów w schematach I i II nie da się w przestrzeni złożyć czworościanów! Z siatek III i IV – da się. Jak to uzasadnić?

Są różne sposoby – na przykład tak: wysokości dwóch trójkątów równoramiennych, widocznych w siatce III, wynoszą  $h_1 = 12\sqrt{3}$  i  $h_2 = 24\sqrt{2}$ ; deltoid utworzony przez te trójkąty zaczynamy zginać wzdłuż przekątnej i chcemy, by poruszające się wierzchołki znalazły się w odległości  $d = 54$ ; do tego potrzeba i wystarcza, by był spełniony warunek  $|h_1 - h_2| < d < h_1 + h_2$ , co dla tych wartości szczęśliwie ma miejsce. Podobnie w układzie IV – ale nie w układach I i II; one *nie są* siatkami czworościanów.

Obejrzenie licznych przykładów – dobrych i złych – w sposób naturalny rodzi pytanie: dany trójkąt o bokach  $a, b, c$  oraz trzy odcinki o długościach  $p, q, r$ ; znaleźć warunek algebraiczny konieczny i dostateczny, by istniał czworościan o podstawie  $(a, b, c)$  i krawędziach  $p, q, r$ , odpowiednio przeciwległych do  $a, b, c$ . Otóż da się (być może, nieoczekiwanie) uzyskać ów warunek, rachując na liczbach zespolonych – w płaszczyźnie podstawy.

Nie tracimy ogólności przyjmując, że wierzchołki podstawy są reprezentowane przez liczby zespolone o module  $|x| = |y| = |z| = 1$  (zysk dobrze znany:  $\bar{x} = 1/x$ ). Wówczas

$$(1) \quad a^2 = |y - z|^2 = (y - z)(\bar{y} - \bar{z}) = -\frac{(y - z)^2}{yz}, \quad b^2 = -\frac{(z - x)^2}{zx}, \quad c^2 = -\frac{(x - y)^2}{xy}.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$(2) \quad w = (x - y)(y - z)(z - x); \quad \text{wtedy} \quad \bar{w} = -\frac{w}{(xyz)^2}; \quad |w| = abc.$$

Dalej przydadzą się jeszcze takie zależności (oszczędzimy Czytelnikom szczegółowych rachunków, zachęcając do samodzielnego ich uzupełnienia):

$$(3) \quad b^2 + c^2 - a^2 = \frac{(z - x)(x - y)(y + z)}{xyz}, \quad a^2(b^2 + c^2 - a^2) = \frac{wx(z^2 - y^2)}{(xyz)^2}.$$

Teraz trochę geometrii. Okręgi  $o_x, o_y, o_z$  o środkach  $x, y, z$  i promieniach  $p, q, r$  są okręgami wielkimi trzech sfer w przestrzeni. Nasze pytanie brzmi: czy te sfery mają punkt wspólny? Punkt ów byłby wierzchołkiem szukanego ostrosłupa. Spodek opuszczonej z niego wysokości musi leżeć na prostej przechodzącej przez punkty przecięcia okręgów  $o_x, o_y$ ; również na analogicznej prostej dla okręgów  $o_x, o_z$  i dla  $o_y, o_z$  (jeżeli któreś dwa okręgi się nie przecinają, to sfery na pewno się nie spotkają).

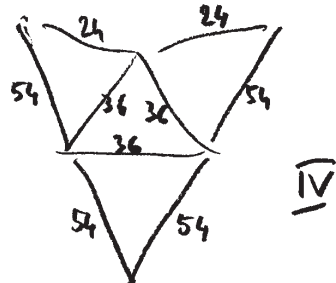
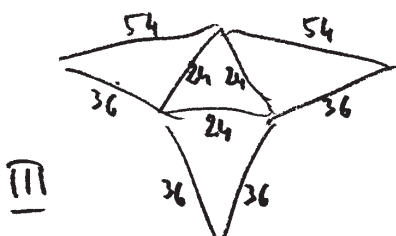
Problem sprowadza się do pytania płaskiego: czy trzy osie potęgowe, utworzone dla trzech par z tej trójki okręgów, przecinają się w punkcie, leżącym *wewnątrz* nich?

Punkt ów jest reprezentowany przez liczbę zespoloną  $f$ , scharakteryzowaną równościami

$$(4) \quad |f - x|^2 - p^2 = |f - y|^2 - q^2 = |f - z|^2 - r^2.$$

Oznaczmy tę wspólną wartość przez  $e$ ; to potęga punktu  $f$  względem każdego z trzech okręgów. Czworościan, o który chodzi, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy  $e < 0$ .

Gdy zapiszemy  $|f - x|^2$  jako  $(f - x)(\bar{f} - 1/x)$  (podobnie  $|f - y|^2, |f - z|^2$ ) i wymnożymy nawiasy, składnik  $f \cdot \bar{f}$  w równaniach (4) ulegnie redukcji, pozostawiając układ dwóch równań liniowych z niewiadomymi  $f, \bar{f}$ .



\*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

To są *sumy cykliczne* (w trójkach  $(x, y, z)$ ,  $(p, q, r)$ ,  $(a, b, c)$ ). Na przykład napis

$$\sum \frac{fpxy}{3wb}$$

należałoby odczytać jako

$$\frac{fpxy}{3wb} + \frac{fqyz}{3wc} + \frac{frzx}{3wa}.$$

Zamiast prowadzić wymyślne przekształcenia według podanych wskazówek, wystarczy po prostu sprawdzić (ręcznie lub komputerowo), że różnica prawych stron wzorów (6) i (7), po podstawieniu wyrażeń (1), (2), (5), jest równa 0.

Jego rozwiązanie jest natychmiastowe i daje wynik

$$(5) \quad f = \frac{xyz}{w} \sum p^2(y-z), \quad \bar{f} = \frac{1}{w} \sum p^2 x(y-z).$$

Liczba  $e$ , równa każdemu z trzech wyrażeń, występujących w (4), jest oczywiście także ich średnią arytmetyczną:

$$(6) \quad e = \frac{1}{3} \sum (|f-x|^2 - p^2) = f\bar{f} - \frac{1}{3} \sum (x\bar{f} + \frac{f}{x}) + 1 - \frac{1}{3} \sum p^2.$$

Po wprowadzeniu wzorów (5) i uporządkowaniu wszystkiego według potęg  $p, q, r$  dostaniemy wielomian względem  $p^2, q^2, r^2$ , w którym jako współczynniki pojawią się – po krótkich przekształceniach – wyrażenia, napisane po prawych stronach równości (3), mnożone lub dzielone przez pewne potęgi liczby  $w$  oraz iloczynu  $xyz$ . Uwzględniając jeszcze związki (2), pozbywamy się w ogóle liter  $x, y, z, w$  i doprowadzamy do wyniku

$$(7) \quad e = -\frac{L}{(abc)^2}, \quad L = -(abc)^2 + \sum ((b^2 + c^2 - a^2)(a^2 p^2 + q^2 r^2) - a^2 p^4).$$

Licznik  $L$  można zapisać w równoważnych postaciach (Czytelniku, sprawdź!):

$$(8) \quad L = \sum a^2 p^2 (b^2 + c^2 - a^2 + q^2 + r^2 - p^2) + \frac{1}{2} \prod (p^2 - a^2) - \frac{1}{2} \prod (p^2 + a^2) = \\ = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 0 & p^2 & q^2 & r^2 & 1 \\ p^2 & 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ r^2 & b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

zaś warunek istnienia czworościanu brzmi:  $L > 0$ .

Jego ściany to trójkąty o bokach  $(a, b, c)$ ,  $(a, q, r)$ ,  $(b, r, p)$ ,  $(c, p, q)$ . Z postaci wyznaczkowej wzoru (8) widać, że nic się nie zmieni, gdy inną z tych trójek – np.  $(b, r, p)$  – przyjmiemy za ścianę podstawy. Dokładniej: po zastąpieniu szóstki uporządkowanej  $(a, b, c, p, q, r)$  przez  $(b, r, p, q, c, a)$  wartość  $L$  będzie taka sama; w wyznaczniku nastąpi jednoczesna permutacja wierszy i kolumn.

Zaczęliśmy od trójkąta o bokach  $a, b, c$  oraz trójki liczb  $p, q, r$ . Gdyby mówić, bardziej abstrakcyjnie, o szóstce liczb dodatnich  $(a, b, c, p, q, r)$ , należałoby jeszcze dołączyć warunek trójkąta dla trójki  $(a, b, c)$ : wówczas jeśli  $L > 0$ , to czworościan istnieje, więc automatycznie w każdej z trójek  $(a, q, r)$ ,  $(b, r, p)$ ,  $(c, p, q)$  warunek trójkąta jest spełniony. Podsumowując:

*Dla liczb  $a, b, c, p, q, r > 0$ , czworościan o ścianach  $(a, b, c)$ ,  $(a, q, r)$ ,  $(b, r, p)$ ,  $(c, p, q)$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy  $L > 0$  oraz w co najmniej jednej z tych trójek (równoważnie: we wszystkich) spełniony jest warunek trójkąta.*

Całe rozumowanie można też prowadzić inną metodą. Wymaga ona jednak wstępnego założenia, że istnieją trzy z czterech wymienionych trójkątów – na przykład trójkąty  $(a, q, r)$ ,  $(b, r, p)$ ,  $(c, p, q)$ . Gdy miary ich kątów między bokami  $(q, r)$ ,  $(r, p)$ ,  $(p, q)$  mają sumę mniejszą od  $360^\circ$  oraz spełniają warunek trójkąta (a to można kontrolować wzorem kosinusów), wówczas da się zaczepić odcinki  $p, q, r$  w jednym punkcie przestrzeni i zbudować żądany czworościan. Rzecz jasna, wychodzi znów warunek  $L > 0$ .

Trygonometryczne wyprowadzenie warunku  $L > 0$  znajduje się w pracy: K. Wirth, A. S. Dreidling, *Edge lengths determining tetrahedrons*, *Elemente d. Math.* 64 (2009) 160-170.

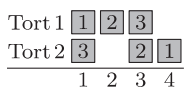
Wróćmy jeszcze do wzoru (4):  $e = |f-x|^2 - p^2$ . Gdy czworościan istnieje, twierdzenie Pitagorasa pokazuje, że liczba  $-e$  jest kwadratem wysokości  $h$ , opuszczonej na płaszczyznę ściany  $(a, b, c)$ . Ale iloraz we wzorze (7) ma w liczniku i w mianowniku wyrażenia jednakowego stopnia – coś się nie zgadza? To proste – jednorodność została utracona, gdy przyjęliśmy, że trójkąt  $(a, b, c)$  jest wpisany w okrąg o promieniu 1. Przyjmując, że ten okrąg ma promień  $R$  i prowadząc analogiczne rachunki, doszlibyśmy do równości

$$-e = \frac{R^2}{(abc)^2} \cdot L \quad (= h^2);$$

wymiar już jest, jak trzeba.

Zważywszy, że pole  $S$  trójkąta  $(a, b, c)$  jest dane wzorem  $S = abc/4R$ , zaś objętość ostrosłupa wzorem  $V = Sh/3$ , dochodzimy do konkluzji, że wielkość  $L$  we wzorach (7), (8) wyraża, z dokładnością do czynnika, kwadrat objętości rozważanego czworościanu:  $L = 144V^2$ . To analogon wzoru Herona dla pola trójkąta.

**Na zakończenie** słów parę o ocenianiu prac uczestników olimpiady. Przykład „siatki”, która nie jest siatką (nie skleja się w przestrzeni, jak I lub II), był oceniany na zero – trudno inaczej. Przykłady dobrych siatek (jak III i IV, jedynie bez uzasadnienia, że się dadzą skleić) otrzymywały ocenę niezerową – znów: trudno inaczej. Ta niezerowa ocena była jednak daleka od maksymalnej, co wywołało pretensje wielu zawodników: przecież część koncepcyjna została wykonana, zabrakło prostego sprawdzenia. No tak; ale zawodnicy, którzy dali przykłady nieistniejących brył, także wykonali ową pracę koncepcyjną, im też zabrakło jedynie prostego sprawdzenia – tyle, że niewykonalnego. Wszelako autorzy i tych, i tych prac, byli w większości zupełnie nieświadomi problemu realizacji przestrzennej, i jedynie kwestią szczęścia/pecha było znalezienie siatek jak (III,IV)/(I,II). Te prace należało w zasadzie ocenić jednakowo. Na zero? nonsens; na ocenę dodatnią? nonsens. Dedykujemy tę opowiastkę głosicielom opinii, że system punktowy jest świetnym narzędziem, pozwalającym ustalać wyniki konkursów i egzaminów rzetelnie, sprawiedliwie i obiektywnie.

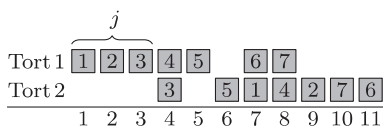


Rys. 1. Dla  $n = 3$  i tortów o warstwach 1, 2, 3 oraz 3, 2, 1 potrzebujemy czterech minut.



**Rozwiązanie zadania F 839.**

Podczas jazdy z dużymi prędkościami niemal cała moc silnika zużywana jest na przewyżczenie oporu powietrza. Siła oporu aerodynamicznego jest proporcjonalna do kwadratu prędkości pojazdu. Moc zużywana do utrzymania stałej prędkości jest więc proporcjonalna do trzeciej potęgi tej prędkości. Po wymianie silnika maksymalna prędkość wzrośnie  $2^{1/3} = 1,26$  raza.



Rys. 2. Przykład dla  $j = 3$ . Potrzebujemy  $n = 7$  minut dla pierwszego tortu i dodatkowo  $j + p(j) = 4$  minut dla pozostałych warstw drugiego tortu.



**Rozwiązanie zadania M 1397.**  
Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$\left(\frac{1+x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n \cdot \frac{1}{n} + x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{1}{n}\right)^n \cdot x.$$

Dla pełności dodajmy, że wynik  $n + \sqrt{n}$  uzyskujemy dla tortu 1, 2, ...,  $n$  oraz tortu, w którym warstwy dzielimy na grupy kolejnych warstw o rozmiarach 1, 2, ...,  $\sqrt{n} - 1$ ,  $\sqrt{n}$ ,  $\sqrt{n} - 1$ ,  $\sqrt{n} - 2$ , ..., 1, a następnie odwracamy kolejność warstw w każdej grupie. Przykładowo, dla  $n = 16$  drugim tortem jest

$$1, 3, 2, 6, 5, 4, 10, 9, 8, 7, 13, 12, 11, 15, 14, 16.$$

Powyższe rozważania stają się nieistotne, jeśli przyjrzymy się dokładniej rekurencji definiującej tablicę  $d$ . Zauważmy, że obliczenie  $d[i, j]$  w przypadku  $a[i] \neq b[j]$  zależy tylko od jednej komórki tabeli. Zatem możemy rozwinąć wzór do  $d[i, j] = k + d[i - k, j - k]$ , gdzie  $k$  jest taką najmniejszą

## Informatyczny kącik olimpijski (64): Dwa torty

W tym kąciku omówimy *Dwa torty* – kolejne zadanie z finałowej rundy *Potyżczek Algorytmicznych 2012*. Torty oferowane przez cukiernię składają się z  $n$  różnych rodzajów warstw ułożonych w pewnej kolejności. Cukiernia ta zatrudnia  $n$  cukierników. Każdy z nich potrafi wykonać warstwę jednego rodzaju, co zajmuje mu dokładnie jedną minutę (i w tym czasie może zajmować się tylko jednym tortem). Warstwy na każdym torcie należy układać jedna po drugiej. Chcemy wyprodukować dwa torty, dla każdego z nich znamy wymaganą kolejność warstw. Należy obliczyć, jak najszybciej da się to zrobić (rys. 1).

Dość łatwo podać rozwiązanie tego zadania oparte na programowaniu dynamicznym i działające w czasie  $O(n^2)$ . Niech  $a[i], b[i]$  oznaczają rodzaj  $i$ -tej warstwy od dołu (dla  $1 \leq i \leq n$ ) odpowiednio dla pierwszego i drugiego tortu. Niech  $d[i, j]$  oznacza minimalny czas ułożenia dolnych  $i$  warstw na pierwszym torcie i dolnych  $j$  warstw na drugim torcie. Wtedy

$$d[i, j] = \begin{cases} i + j & \text{dla } i = 0 \text{ lub } j = 0, \\ 1 + d[i - 1, j - 1] & \text{dla } i, j \geq 1 \text{ i } a[i] \neq b[j], \\ 1 + \min(d[i - 1, j] + d[i, j - 1]) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zależność rekurencyjna wynika z tego, że warstwy  $a[i]$  i  $b[j]$  mogą być wykonane w tym samym czasie tylko wtedy, gdy są różnego rodzaju. W przeciwnym przypadku musimy się zdecydować, którą z nich wykonujemy najpierw. Wynikiem jest  $d[n, n]$ .

Oczywiste jest to, że wynik będzie w granicach od  $n$  do  $2n$ . Jednak Czytelnicy, którzy zechcą przeprowadzić kilka eksperymentów praktycznych, przekonają się, że znalezienie przykładu z wynikiem bliskim górnej granicy nie jest wcale łatwe. W istocie bowiem wynik nigdy nie jest większy niż  $n + \sqrt{n}$ . To pozwala nam przyspieszyć rozwiązanie kwadratowe do  $O(n\sqrt{n})$ , gdyż musimy jedynie wypełniać przekątne tablicy  $d$  leżące nie dalej niż  $\sqrt{n}$  od głównej przekątnej (tzn. możemy założyć, że  $d[i, j] = \infty$  dla  $|i - j| > \sqrt{n}$ ).

Musimy jeszcze wykazać, że zawsze istnieje strategia produkcji tortów, w której wystarczy  $n + \sqrt{n}$  minut. Dla uproszczenia założymy, że  $n$  jest kwadratem liczby naturalnej. Dla ustalonego  $j \geq 0$  możemy zastosować następującą strategię produkcji tortów: najpierw wykonujemy pierwsze  $j$  warstw pierwszego tortu, następnie  $n - j$  par warstw (warstwę  $a[i + j]$  równocześnie z warstwą  $b[i]$ , chyba że  $a[i + j] = b[i]$ , to wtedy po kolei), i w końcu ostatnie  $j$  warstw drugiego tortu (rys. 2). Będziemy potrzebowali  $n$  minut na wszystkie warstwy pierwszego tortu,  $j$  minut na ostatnie warstwy drugiego tortu oraz  $p(j)$  minut na te z pozostałych warstw drugiego tortu, które nie zostały „sparowane” z warstwami pierwszego tortu. Dla  $j < 0$  definiujemy analogiczną strategię, tylko zaczynamy od pierwszych  $-j$  warstw drugiego tortu.

Kluczową obserwacją jest to, że dla ustalonego rodzaju warstwy  $k$  warunek  $a[i + j] = k = b[i]$  jest spełniony dla dokładnie jednego  $j$ . Z tego wynika, że suma  $\sum_j p(j)$  jest równa  $n$ . Sumując czas potrzebny dla wszystkich strategii dla  $-\sqrt{n} \leq j \leq \sqrt{n}$ , dostajemy:

$$\sum_{-\sqrt{n} \leq j \leq \sqrt{n}} n + |j| + p(j) \leq n(2\sqrt{n} + 1) + 2(1 + 2 + \dots + \sqrt{n}) + n = (n + \sqrt{n})(2\sqrt{n} + 1),$$

czyli średnio na strategię potrzebujemy nie więcej niż  $n + \sqrt{n}$  minut, zatem istnieje takie  $j$ , dla którego tyle wystarczy.

liczbą, że  $a[i - k] = b[j - k]$  i  $0 < k \leq \min(i, j)$ , lub  $d[i, j] = i + j - \min(i, j)$ , gdy takie  $k$  nie istnieje.

Zatem obliczenie dowolnego  $d[i, j]$  sprowadza się do wyznaczenia wartości  $k$  (co można zrobić w czasie  $O(\log n)$ , wyszukując binarnie wśród par  $(i', j')$ , dla których  $a[i'] = b[j']$  oraz  $i - j = i' - j'$ ) i obliczenia  $d[i', j']$  dla przypadku  $a[i'] = b[j']$ . Zauważmy jednak, że mamy dokładnie  $n$  par  $(i', j')$ , dla których  $a[i'] = b[j']$ . Wyznaczając więc  $d[n, n]$  metodą rekurencji ze spamiętywaniem, dostajemy rozwiązanie działające w czasie  $O(n \log n)$ . Czytelnik Gorliwy zechce uzupełnić techniczne szczegóły, które przyspieszą powyższe rozwiązanie do optymalnego  $O(n)$ .

Tomasz IDZIASZEK

## Wyścig solitonów

W wyścigach, oprócz umiejętności, kondycji i taktyki, ważne są również efekty interakcji między zawodnikami. Przy czym niekoniecznie chodzi o to, któremu kolarzowi pompka pomoże wyjechać pierwszemu z bramy stadionu (anegdota ta jest starsza od autora i nie będzie tu przypominana).

Pozostając przy kolarstwie: nawet laicy wiedzą, że łatwiej jest jechać za kimś. Z kolei amatorzy żeglarstwa orientują się, jak trudno jest przegonić podobną łódkę płynącą kursem ostrym, ze względu na zakłócany przez nią wiatr.

Zawody są organizowane na różnych dystansach. Ostatnio jest moda na bardzo długie wyścigi. Dystans z Maratonu do Aten na siedzących przed telewizorem w kapciach widzach nie robi już wrażenia. Ciekawe, co by powiedzieli o wyścigu o długości rzędu jednostki astronomicznej.

A właśnie o zabawę na takim dystansie chodzi. Medialnie akceptowalny czas trwania długodystansowego wyścigu jest jednak mierzony w kwadransach, ewentualnie w godzinach. A ponieważ podzielenie takiej odległości przez taki czas daje nam prędkość rzędu prędkości światła, więc nic dziwnego, że właśnie impulsy świetlne wzięły w nim udział [1].

Zawody zostały rozegrane na stadionie o obwodzie około stu metrów zbudowanym z pętli światłowodu telekomunikacyjnego, w którym podtrzymywana była fala nośna. Na niej wzbudzani byli zawodnicy – solitony utrzymujące swoją formę dzięki nieliniowej zależności współczynnika załamania od intensywności. Dzięki utrzymywanej fali nośnej zawodnicy pozostawali w formie przez okres rzędu pół godziny, przemierzając dystans porównywalny ze średnicą orbity Ziemi (solitony poruszały się z prędkością około  $2c/3$ ). Ich podłużny rozmiar wynosił około pół mikrona.

Zawody miały charakter treningowy. Chodziło o sprawdzenie, czy drugi zawodnik (propagujący się za pierwszym) będzie go doganiał, czy raczej zostawał w tyle. Zjawiskiem odpowiedzialnym za interakcję jest zmiana współczynnika załamania światłowodu na skutek fali mechanicznej (dźwiękowej), generowanej przez pierwszy impuls, w wyniku zjawiska elektrostrykcji, czyli zmiany gęstości dielektryka pod wpływem pola elektrycznego. Dokładniej, chodziło o sprawdzenie, jak słaby sygnał jest w stanie wpłynąć na propagujący się jako drugi soliton, oraz czy teoretyczny opis zachodzącego zjawiska dobrze odtwarza obserwacje.

Zgodnie z przewidywaniami okazało się, że dla małych odległości drugi impuls jest hamowany, a dla większych przyspieszany. Graniczną, stabilną odległością (czasową) okazało się 420 pikosekund, czyli około 84 milimetrów. Przy czym tę stabilną odległość drugi soliton osiągał po kilkudziesięciu sekundach (szybciej ten spowalniany niż ten przyspieszany), czyli po przebyciu odległości rzędu 10 milionów kilometrów. Natomiast po przekroczeniu opóźnienia około 1500 pikosekund (577 tzw. połówkowych

szerokości solitonów, czyli około 30 centymetrów) drugi soliton zastawał w tyle, podwajając dystans w ciągu pół godziny.

Przy czym należy sobie zdawać sprawę, że zmiana prędkości drugiego solitonu jest rzeczywiście spowodowana propagowaniem się po zaburzonej przez pierwszy soliton torze. Drugi soliton porusza się względem pierwszego z prędkością rzędu centymetra na minutę, a oba pędzą dwieście tysięcy kilometrów na sekundę (czyli dwanaście milionów kilometrów na minutę). Stosunek wielu wielkości charakteryzujących to zjawisko jest rzędu biliona.

Przedstawione obserwacje są same w sobie ciekawe, ale można się zastanowić, jak sprawdzić, czy to rzeczywiście fala dźwiękowa jest odpowiedzialna za oddziaływanie solitonów. Oczekiwane różnice gęstości nia spowodowane są np. rzędy wielkości mniejsze od amplitudy niejednorodności światłowodu. Różnica jest taka, że jednorodności są rozłożone równomiernie po całym światłowodzie, a fala dźwiękowa ma swoje źródło. Używany światłowód miał płaszcz o grubości dwa razy większej od promienia rdzenia. Czas powrotu fali akustycznej do rdzenia (po odbiciu od brzegu światłowodu) został oszacowany na 21 nanosekund. Dlatego, jeżeli fala dźwiękowa jest odpowiedzialna za efekt, to powinien on występować również dla takiego właśnie opóźnienia. Oczekiwane jest, że będzie ono niestabilne, tzn. solitony będą z niego wypychane do stabilnego opóźnienia, które powinno znajdować się po obu stronach 21 nanosekund, w odległości (czasowej) około 1 nanosekundy. Badanie takie przeprowadzono i uzyskano wynik zgodny z przewidywaniami.

Autorzy zwracają jeszcze uwagę na różnice między wynikami obliczeń oraz pomiarami. Np. przewidywana (minimalna) stabilna odległość solitonów to około 500 ps zamiast zmierzonych 420 ps. Przypominają jednak, że za pomocą używanego modelu zazwyczaj otrzymuje się wartości różniące się od mierzonych. Otrzymane wyniki są bardzo precyzyjne i były możliwe do uzyskania dzięki bardzo długiemu okresowi utrzymywania się solitonów w pętli światłowodowej, dzięki podtrzymywaniu odpowiednio dostrojonej fali nośnej. Zostaną wykorzystane do poprawiania modelu. Zaobserwowany efekt może wyjaśniać wiele nie w pełni wyjaśnionych zjawisk związanych z przesyłaniem sygnałów przez światłowody.

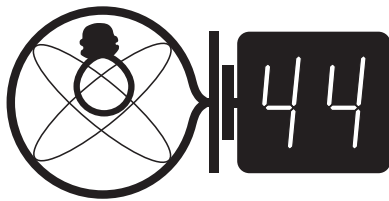
Przy okazji po raz kolejny uzyskano potwierdzenie nadzwyczajnej stabilności solitonów oraz zaobserwowano najslabsze, jak dotąd, oddziaływanie między nimi.

A wracając do początkowej analogii: wykazano nietrywialny wpływ wyzwalanego przez zawody hałasu na ich przebieg.

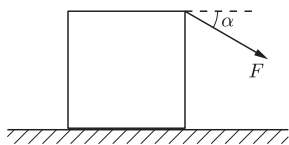
Piotr ZALEWSKI

[1] J.K. Jang, M. Erkintalo, S.G. Murdoch, S. Coen, *Ultraweak long-range interactions of solitons observed over astronomical distances*, Nature Photonics (2013), doi:10.1038/nphoton.2013.157.

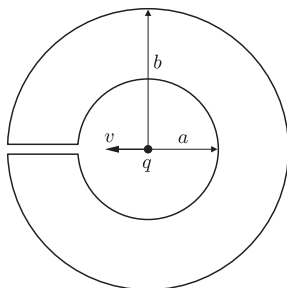
# Klub 44



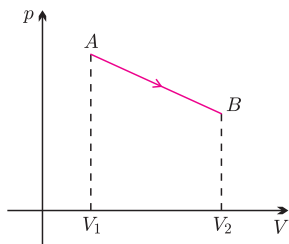
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2013



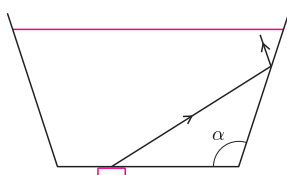
Rys. 1



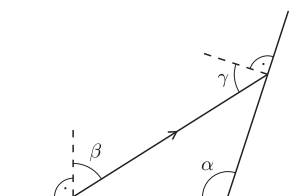
Rys. 2



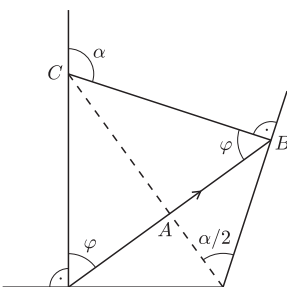
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

### Zadania z fizyki nr 562, 563

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

**562.** Sześcian o masie  $m$  stoi na powierzchni poziomej. Z jaką minimalną siłą  $F$  i pod jakim kątem  $\alpha$  do poziomu (rys. 1) należy ciągnąć sześcian za środek górnej krawędzi, żeby przewrócił się bez poślizgu, jeżeli współczynnik tarcia wynosi  $\mu$ ? Siła  $F$  jest prostopadła do górnej krawędzi sześcianu.

**563.** W środku nieruchomej, wydrążonej, przewodzącej kuli o promieniach wewnętrznym  $a$  i zewnętrznym  $b$  umieszczono cząstkę o masie  $m$  naładowaną ładunkiem  $q > 0$  (rys. 2). Jaką prędkość należy nadać cząstce, aby przez wąską szczelinę oddaliła się do nieskończoności? Przenikalność elektryczna próżni  $\epsilon_0$  jest dana.

### Rozwiązania zadań z numeru 5/2013

Przypominamy treść zadań:

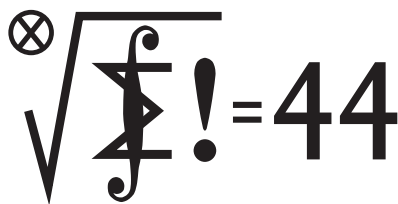
**558.** Jednoatomowy gaz doskonały poddano przemianie przedstawionej na wykresie  $pV$  (rys. 3). Końce odcinka  $AB$  leżą na tej samej izotermie, a odpowiadające im objętości wynoszą  $V_1$  i  $V_2$ . Jaka jest część odcinka  $AB$ , dla której gaz pobiera ciepło w tej przemianie?

**559.** Cienkie szklane naczynie ma w przekroju kształt trapezu, a jego dno ma kształt prostokąta (rys. 4). Do naczynia nalano wody o współczynniku załamania  $n = 1,33$ . Jaką wartość musi mieć kąt  $\alpha$  między podstawą a ścianką naczynia, aby przez boczną ściankę nie było widać monety umieszczonej pod dnem naczynia?

**558.** Ciśnienie w przemianie  $AB$  zmienia się liniowo zgodnie ze wzorem  $p = p_0 - \alpha V$ . Oznaczając przez  $T$  temperaturę w punktach  $A$  i  $B$ , otrzymujemy, korzystając z równania Clapeyrona  $p_0 = nRT/(V_1 + V_2)/(V_1 V_2)$ ,  $\alpha = nRT/(V_1 V_2)$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę moli gazu, a  $R$  jest stałą gazową. Rozważmy badaną przemianę w małym przedziale objętości  $\Delta V$ . Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki ciepło tam przekazane wynosi  $\Delta Q = \Delta U + p\Delta V$ . Zmiana energii wewnętrznej dana jest wzorem  $\Delta U = nc_V \Delta T$ , gdzie molowe ciepło właściwe  $c_V$  przy stałej objętości dla gazu jednoatomowego wynosi  $3R/2$ . Zmiana temperatury w badanym przedziale wynosi  $\Delta T = (p_0 - 2\alpha V)\Delta V/(nR)$ , gdzie pominęliśmy wyraz proporcjonalny do  $(\Delta V)^2$ . Gaz pobiera ciepło, gdy  $\Delta Q = (\frac{5}{2}p_0 - 4\alpha V)\Delta V > 0$ , czyli gdy  $V < 5p_0/(8\alpha)$ . Zatem ciepło w przemianie  $AB$  pobierane jest na odcinku  $AD$ , gdzie objętość, odpowiadająca punktowi  $D$ , wynosi  $V_D = 5(V_1 + V_2)/8$ .

**559.** Niech  $\beta$  będzie kątem załamania promienia przechodzącego z warstwy powietrza między monetą a dnem naczynia do wody (rys. 5). Dno naczynia powoduje tylko niewielkie, równoległe przesunięcie promienia padającego, co nie wpływa na wynik obserwacji. Ponieważ promień przeszedł z powietrza do wody, wartość  $\beta$  nie przekracza wartości kąta granicznego  $\varphi$ :  $\sin \beta \leq \sin \varphi = 1/n$ . Promień padający na boczną ściankę naczynia pod kątem  $\gamma$  nie wyjdzie na zewnątrz, gdy  $\gamma \geq \varphi$ . Zmniejszenie kąta  $\beta$  powoduje zwiększenie kąta  $\gamma$ , wystarczy więc rozważyć przypadek graniczny, gdy  $\beta = \gamma$ . Rozważmy sytuację, gdy oba kąty  $\beta$  i  $\gamma$  mają wartość graniczną. W trójkącie  $ABC$  na rysunku 6 mamy wtedy  $\varphi = \alpha/2$ . Zatem nie zobaczymy monety przez boczną ściankę, gdy  $\sin(\alpha/2) \geq 1/n = 0,752$ , czyli  $\alpha \geq 97^\circ 30'$ .

## Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2013

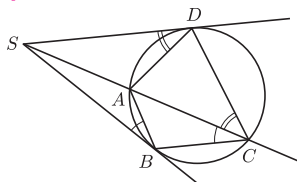
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 655 ( $WT = 2,33$ ) i 656 ( $WT = 1,39$ ) z numeru 2/2013

Zbigniew Skalik	Wrocław	47,37
Witold Bednarek	Łódź	44,73
Paweł Łabędzki	Kielce	42,05
Krzysztof Kamiński	Pabianice	41,63
Rami Marcin Ayoush	Szelków	41,55
Jerzy Cisko	Wrocław	41,06
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Marek Spychała	Warszawa	36,50
Paweł Najman	Kraków	36,37

Pan Zbigniew Skalik zalicza już drugą rundę. Zaś najwytrwalszy uczestnik Ligi – Witold Bednarek – także drugą, ale weterańską; to znaczy, „44” po raz szósty!

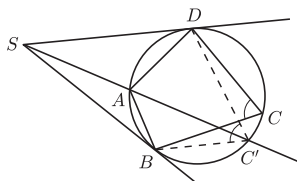


**Rozwiązanie zadania M 1396.**  
Zalóżmy najpierw, że  $S$  leży na prostej  $AC$ .



Jak wiadomo, kąt między styczną a cięciwą jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie, więc  $\sphericalangle SBA = \sphericalangle BCA$ . Zatem trójkąty  $BSA$  i  $CSB$  są podobne, więc  $AB/BC = AS/BS$ . Podobnie stwierdzimy, że  $AD/CD = AS/DS$ , ale  $BS = DS$ , więc  $AB/BC = AD/CD$ .

Zalóżmy teraz, że zachodzi  $AB/BC = AD/CD$ , ale  $S$  nie leży na  $AC$  (powiedzmy, że punkt  $A$  leży bliżej punktu  $S$  niż punkt  $C$ ).



Niech  $SA$  przecina okrąg w punkcie  $C'$ . Z poprzedniej części zadania wiadomo, że  $AB/BC' = AD/C'D$ , więc  $BC/CD = BC'/C'D$ , co wraz z równością kątów  $BCD$  i  $BC'D$  implikuje, że trójkąty  $BCD$  i  $BC'D$  są podobne, a że mają wspólny bok, to są przystające. Zatem  $C = C'$ .

## Zadania z matematyki nr 665, 666

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**665.** Dany jest równoległobok  $ABCD$ . Punkty  $P$  i  $Q$  leżą odpowiednio na bokach  $BC$  i  $DC$ , odcinki  $BP$  i  $DQ$  mają jednakową długość. Dowieść, że odcinki  $BQ$  i  $DP$  przecinają się w punkcie, leżącym na dwusiecznej kąta  $BAD$ .

**666.** Niech  $W$  będzie wielomianem stopnia  $k \geq 2$ , o współczynnikach całkowitych nieujemnych. Zakładamy, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  wartość  $W(n)$  jest  $k$ -tą potęgą liczby całkowitej nieujemnej. Udowodnić, że  $W$  ma postać  $W(x) = (ax + b)^k$ , gdzie  $a \geq 1$ ,  $b \geq 0$  są liczbami całkowitymi.

Zadanie 666 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

## Rozwiązania zadań z numeru 5/2013

Przypominamy treść zadań:

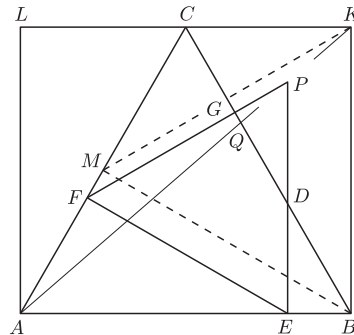
**661.** Dany jest trójkąt równoboczny  $ABC$  oraz punkt  $D$  na boku  $BC$ . Punkty  $E, F, G$ , leżące odpowiednio na bokach  $AB, CA, BC$ , są wyznaczone przez warunki  $DE \perp AB$ ,  $EF \perp CA$ ,  $FG \perp BC$ . Proste  $DE$  i  $FG$  przecinają się w punkcie  $P$ . W jakim stosunku prosta  $AP$  dzieli odcinek  $BC$ ?

**662.** Ciąg  $(x_n)$  jest określony wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{e^{x_n} - 1} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots;$$

wyraz początkowy  $x_0$  jest dowolną liczbą dodatnią. Obliczyć granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2 - nx_n)}{\ln n}$ .

**661.** Zbudujmy prostokąt  $ABKL$  tak, by punkt  $C$  był środkiem odcinka  $KL$ . Niech  $M$  będzie środkiem boku  $CA$ . Każdy z trójkątów  $EPF$ ,  $BKM$  ma boki prostopadłe do odpowiednich boków trójkąta  $ABC$  (rysunek); są to więc trójkąty o bokach odpowiednio równoległych – zatem jednokładne. Środkiem jednokładności jest punkt  $A$  (wspólniowy z  $B, E$  oraz z  $M, F$ ). Punktowi  $P$  odpowiada w tej jednokładności punkt  $K$ . To znaczy, że prosta  $AP$  przechodzi przez  $K$  (niezależnie od wyboru początkowego punktu  $D$ ) i przecina odcinek  $BC$  w takim punkcie  $Q$ , że trójkąty  $QAB$  i  $QKC$  są podobne. Stąd wynik:  $|BQ| : |CQ| = |AB| : |CK| = 2$ .



**662.** Jak w rozwiązaniu zadania 654, tak i teraz użyjemy wzoru Stolza:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

dla każdego ciągu  $(b_n)$ , rosnącego do nieskończoności, i dla każdego ciągu  $(a_n)$ , dla którego granica po prawej stronie istnieje.

Dany w zadaniu iloraz piszemy w postaci

$$(1) \quad q_n = \frac{n(2 - nx_n)}{\ln n} = nx_n \cdot \frac{2x_n^{-1} - n}{\ln n}.$$

Zgodnie z wynikiem zadania 654,  $nx_n \rightarrow 2$ ; pozostaje zająć się drugim czynnikiem. We wzorze Stolza przyjmijmy  $a_n = 2x_n^{-1} - n$ ,  $b_n = \ln n$ :

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n^{-1} - n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1}) - 1}{\ln(n+1) - \ln n},$$

jeśli tylko ta ostatnia granica istnieje.

W rozwiązaniu zadania 654 zostało użyte przekształcenie

$$x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1} = x_n^{-2}(e^{x_n} - 1 - x_n)$$

oraz fragment rozwinięcia potęgowego

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad (\text{przy } x \rightarrow 0).$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{2(x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1}) - 1}{\ln(n+1) - \ln n} &= \frac{2x_n^{-2}(e^{x_n} - 1 - x_n) - 1}{\ln(1 + \frac{1}{n})} = \\ &= \frac{e^{x_n} - 1 - x_n - \frac{1}{2}x_n^2}{x_n^3} \cdot \frac{2nx_n}{n \ln(1 + \frac{1}{n})}. \end{aligned}$$

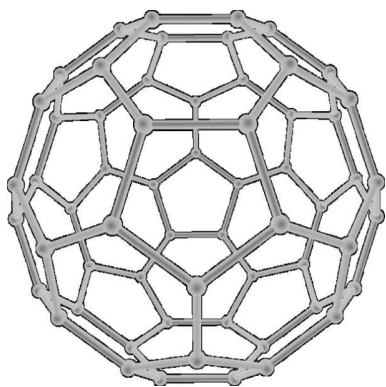
W tym ostatnim iloczynie pierwszy czynnik dąży do  $1/6$  (nieco dłuższy fragment rozwinięcia  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ ). Drugi czynnik: licznik dąży do 4, mianownik do 1. Cały iloczyn dąży do  $2/3$ . Tyle więc wynosi granica napisana po lewej stronie równości (2).

Wracamy do równości (1), pamiętając, że  $nx_n \rightarrow 2$ , i otrzymujemy ostatecznie  $\lim q_n = 4/3$ .



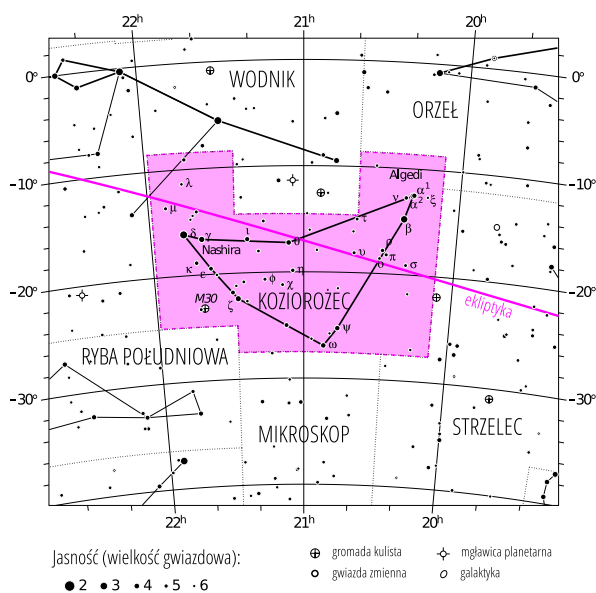
## Prosto z nieba: Futbol w przestrzeni kosmicznej

Węgiel, jak również wszystkie pozostałe pierwiastki cięższe od berylu obecne we Wszechświecie, powstał kiedyś we wnętrzach gwiazd (*we are made of star-stuff*, jak powiada Carl Sagan). Proces tworzenia się cięższych pierwiastków rozpoczął się około 500 mln lat po Wielkim Wybuchu i trwa do dzisiaj – temperatury rzędu milionów stopni sprzyjają łączeniu się lżejszych pierwiastków w cięższe w procesie fuzji jądrowej. Gwiazdy o masach większych od około  $8M_{\odot}$  tworzą w swych jądrach pierwiastki aż do niklu i żelaza, po czym wybuchają jako supernowe typu II.



W danych spektroskopowych pyłu mgławicy znaleziono linie emisyjne odpowiadające bardzo specjalnej formie węgla, *fulerenom*. Fullereny to, jak na przykład diament i grafit, alotropowa odmiana węgla; atomy węgla w tym stanie znajdują się w wierzchołkach wielościanu wypukłego (o kilkudziesięciu wierzchołkach). Fullereny wykryto także ostatnio, przy udziale połączonych sił teleskopów Spitzera, Subaru, VLT i obserwatorium Okayama, w pyłe w przestrzeni międzygwiazdowej w okolicy mgławicy M1-11. W obu przypadkach chodzi o cząsteczkę  $C_{60}$ , która wygląda jak miniaturowy model piłki nożnej (w tym miejscu wypada dodać, że cząsteczki tego typu zostały nazwane na cześć architekta Buckminstera Fullera, konstruktora przypominających  $C_{60}$  kopuł – to naprawdę fantastyczne, że podobne konstrukcje powstają spontanicznie w naturze!). Fullereny znajdują się w przestrzeni kosmicznej dzięki rozpraszającej je sile wiatrów i promieniowania pochodzącego od gwiazdy centralnej. Zachęceni odkryciami astronomowie planują wykonanie szczegółowych map zawartości związków organicznych w gwiazdowym pyłe – jest to istotne z punktu widzenia chemicznej ewolucji galaktyk i życia gwiazd, a także (a może przede wszystkim?) powstawania życia opartego na węglu.

Michał BEJGER



Gwiazdozbiór Koziorożca. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

Średni czas trwania gry symetryczną monetą to 21/5 ruchu.

## Niebo jak własna kieszeń: Wrzesień

Koniec lata i początek jesieni (moment równonocy jesiennej 22 IX o godzinie 22.44) wykorzystamy do obserwacji gwiazdozbioru Koziorożca (łac. *Capricornus*, skąd zapewne pochodzi swojski cap). Od czasów antyku, a nawet wcześniejszych, bo sięgających ery brązu, ten obszar nieba utożsamiany jest w wielu kulturach z postacią kozła z rybem ogonem. Okoliczne gwiazdozbiory są także związane z wodą: Wodnik, Ryby, Ryba Południowa, Wieloryb i rzeka Erydan, do której być może, według greckiej mitologii, salwował się ucieczką leśny bożek Pan: częściowa zamiana w rybę pozwoliła mu uniknąć gniewu potwora Tyfona. Konstelacja ta jest drugą od końca pod względem jasności, po Raku położonym dokładnie po drugiej stronie nieba, i najmniejszą z zodiakalnych gwiazdozbiorów; zawiera tylko jedną gwiazdę jaśniejszą od  $3^m$ :  $\delta$  Capricorni, Deneb Algedi (Ogon Kozła), która jest gwiazdą zaćmieniową typu  $\beta$  Lyrae. Zarówno Rak, jak i Koziorożec są związane ze *zwrotnikami*, tzn. miejscami na powierzchni Ziemi, nad którymi Słońce „zawraca” w swym rocznym ruchu na niebie. Zwrotnik Koziorożca to równoleżnik o szerokości geograficznej równej nachyleniu osi obrotu Ziemi do płaszczyzny orbity,  $23^{\circ}26'$ , położony po południowej stronie równika. Jeśli w dniu przesilenia zimowego znajdziemy się np. na Madagaskarze, to w południe Słońce będzie tam dokładnie w zenicie (co prawda z powodu precesji osi rotacji Ziemi Słońce w momencie przesilenia znajduje się w gwiazdozbiorze Strzelca, ale tradycyjna nazwa pozostała).

We wrześniu możemy liczyć na średnio aktywne Pyscydy (maks. 20 IX, radiant w pobliżu punktu Barana w gwiazdozbiorze Ryb) oraz Wrześniowe Perseidy (maks. 8 IX). Wieczorni obserwatorzy planet powinni skierować swe przyrządy optyczne w stronę gwiazdozbioru Panny (Wenus,  $-3,6^m$ ) oraz Wagi (Saturn,  $0,88^m$ ). Zapowiadają się dwie ciekawe koniunkcje: 8 IX Księżyc w postaci cienkiego sierpa przejdzie w odległości około  $0,5^{\circ}$  od Wenus, a 18 IX nastąpi koniunkcja Wenus i Saturna (odległość około  $3^{\circ}$ ), oba spotkania widoczne, oczywiście, wieczorem. Rano można natomiast zobaczyć Marsa ( $1,83^m$ ) w gwiazdozbiorze Raka, a także Jowisza ( $-1,7^m$ ) widocznego w drugiej połowie nocy w gwiazdozbiorze Bliźniąt. Księżyc znajdzie się dokładnie naprzeciwko Słońca 19 IX, a w nowiu 5 IX.

M. B.



## Sześciany i wielomiany Joanna JASZUŃSKA

Ile wierzchołków, krawędzi, ścian dwuwymiarowych, trójwymiarowych etc. ma  $n$ -wymiarowy sześcian? Przyjrzyjmy się dobrze znanym sześcianom zero-, jedno-, dwu- i trójwymiarowym. Sześcian zerowymiarowy to punkt – jeden wierzchołek. Sześcian jednowymiarowy to odcinek – dwa wierzchołki połączone krawędzią. Sześcian dwuwymiarowy to kwadrat – dwa odpowiednio połączone odcinki.

Można sobie wyobrazić, że sześcian  $n$ -wymiarowy powstaje z sześcianu  $(n - 1)$ -wymiarowego przez przesunięcie go w  $n$ -tym wymiarze (rys. 1). Ma więc dwukrotnie więcej wierzchołków, krawędzi i ścian każdego wymiaru (odpowiadających początkowemu i końcowemu położeniu przesuwanego sześcianu), a dodatkowo ma krawędzie i ściany otrzymane jako ślady przy przesuwaniu. Wierzchołek jako swój ślad pozostawia krawędź, śladem krawędzi jest ściana dwuwymiarowa i ogólniej, śladem ściany  $k$ -wymiarowej jest ściana  $(k + 1)$ -wymiarowa.

Istotnie, sześcian trójwymiarowy, otrzymany jako przesunięcie przedniej kwadratowej ściany tak, by uzyskać tylną, ma:

- $2 \cdot 4 = 8$  wierzchołków (dwukrotność tego, co kwadrat),
- $2 \cdot 4 + 4 = 12$  krawędzi (dwukrotność tego, co kwadrat, plus liczba wierzchołków kwadratu – powstały z nich krawędzie łączące przód i tył),
- $2 \cdot 1 + 4 = 6$  ścian dwuwymiarowych (dwukrotność tego, co kwadrat, plus liczba krawędzi kwadratu – powstały z nich ściany górna, dolna, prawa i lewa),
- jedną ścianę trójwymiarową (wnętrze, otrzymane jako ślad wnętrza przesuwanego kwadratu).

Podsumowując, stwórzmy tabelę (rys. 2). Wartości w kolejnym wierszu powstają przez podwojenie poprzednich i dodanie do tego poprzednich przesuniętych o jedno miejsce. Tą metodą otrzymujemy ostatni z wypisanych wierszy, dla sześcianu czterowymiarowego. Podobnie można wyznaczyć dalsze wartości, choć szukanie w ten sposób np. liczby 19-wymiarowych ścian w sześcianie 42-wymiarowym byłoby dość nużące.

Sumy liczb w kolejnych wierszach to 1, 3, 9, 27, 81 – potęgi trójki. Tak być musi, bo każdy wyraz poprzedniego wiersza wliczony jest w następnym wierszu trzykrotnie: raz podwojony i jeszcze raz, po przesunięciu, dodany.

Na przemian dodając i odejmując wyrazy, uzyskujemy w wierszach  $1, 2 - 1 = 1, 4 - 4 + 1 = 1, 8 - 12 + 6 - 1 = 1, 16 - 32 + 24 - 8 + 1 = 1, \dots$  Czy dalej też wychodzi 1?

Rozważmy wielomiany  $(2 + x)^n$ . Dla  $n = 0, 1, 2, 3$  mamy:

$$\begin{aligned} &1, \\ &2 + x, \\ &4 + 4x + x^2, \\ &8 + 12x + 6x^2 + x^3. \end{aligned}$$

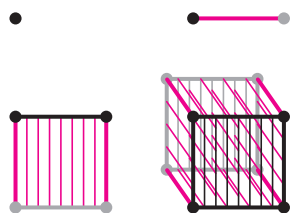
Następny wiersz powstaje z poprzedniego poprzez pomnożenie przez  $2 + x$ , czyli pomnożenie poprzedniego wiersza przez 2 oraz dodanie do tego poprzedniego wiersza pomnożonego przez  $x$ , a więc „przesuniętego”.

Współczynniki wyżej wypisanych wielomianów są takie same, jak liczby w początkowych wierszach tabeli z rysunku 2. W następnych wierszach też uzyskamy tutaj takie same liczby, jak tam, bo procedura ich tworzenia jest identyczna. Stąd **liczba  $k$ -wymiarowych ścian w  $n$ -wymiarowym sześcianie to współczynnik przy  $x^k$  w wielomianie  $(2 + x)^n$ , czyli  $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ .**

Sześcian 42-wymiarowy ma więc  $\binom{42}{19} 2^{42-19} = \frac{42!}{19! \cdot 23!} \cdot 2^{23} = 3\,747\,822\,946\,379\,366\,400$  ścian 19-wymiarowych.

Suma liczb w  $n$ -tym wierszu rysunku 2 to suma współczynników wielomianu  $(2 + x)^n$ , czyli jego wartość dla  $x = 1$ , a więc  $(2 + 1)^n = 3^n$ .

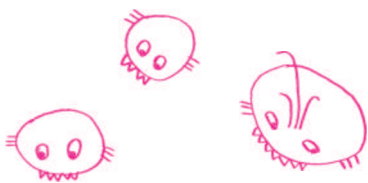
Z kolei naprzemienna suma liczb z  $n$ -tego wiersza to wartość tego wielomianu dla  $x = -1$ , czyli  $(2 - 1)^n = 1$ , zatem faktycznie zawsze równa jest 1.



Rys. 1. Kolejne sześciany  $n$ -wymiarowe. Na czarno i szaro narysowano poprzedni sześcian i jego drugi egzemplarz, kolorem zaznaczono ślad przy przesuwaniu.

$n$	$w_0$	$k_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$
0	1				
1	2	1			
2	4	4	1		
3	8	12	6	1	
4	16	32	24	8	1

Rys. 2.  $n$  – wymiar sześcianu,  $w_0$  – liczba wierzchołków,  $k_1$  – krawędzi,  $s_d$  – ścian  $d$ -wymiarowych.



Wzór  $\binom{n}{k} 2^{n-k}$  wynika z dwumianu

$$\text{Newtona: } (2 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} x^k.$$

