



tel: 22 632 10 33, 448 77-24 11 53 92

## SPIS TREŚCI NUMERU 8 (471)

Programy liniowe, gry  
i algorytmy  
*Lukasz Kowalik* str. 1

Tachiony, czyli absolutna  
synchronizacja zegarów  
*Jacek Ciborowski,*  
*Marta Włodarczyk* str. 4


Wcale  
*Andrzej Dragan* str. 6

Diagramy Woronoja,  
czyli co widać z góry?  
*Mirosław Kowaluk* str. 9


Lekcja rysunku (7):  
Dwunastościan  
gwiazdzisty mały  
*Zdzisław Pogoda* str.12

Sortowanie biegunowe  
a dualizacja  
*Grzegorz Jakacki* str.14

Symetralna i dwusieczna –  
bliźnięta jedno- czy dwujajowe?  
*Marek Kordos* str.17

 Gauss, cel, pal!  
*Stanisław Bednarek* str.18

 Zadania str.19


 Genetycy na  
średniowiecznych  
cmentarzach  
*Magdalena Fikus* str.20

Aktualności str.21

Klub 44 str.22

Prosto z nieba: Ciemna materia  
w gromadach galaktyk  
*Michał Bejger* str.24

Niebo jak własna kieszeń:  
Sierpień str.24

 Identyczne rysunki  
*Joanna Jaszewska* str.25

W następnym numerze polecamy



drżące wielościany

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**Pol-Perfect:** [www.polperfect.com.pl](http://www.polperfect.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2013 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)

lub kontaktując się z Telefonicznym Biurem Obsługi Klienta

pod numerem: 801 800 803 lub 22 717 59 59 – czynne w godzinach 7<sup>00</sup> – 18<sup>00</sup>.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**

# Programy liniowe, gry i algorytmy

Łukasz KOWALIK Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

**1. Bliźniacze programy liniowe.** Program liniowy jest to minimalizacja (maksymalizacja) liniowej funkcji celu o  $n$  argumentach  $x_1, x_2, \dots, x_n$  przy zachowaniu pewnej liczby równości lub nierówności liniowych zawierających zmienne  $x_i$ . Oto przykład:

$$(1) \quad \begin{aligned} &\text{zmaksymalizuj } x_1 + 2x_2 \\ &\text{z zachowaniem warunków } \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ponieważ w powyższym przykładzie mamy tylko dwie zmienne, możemy łatwo wyobrazić sobie *zbiór rozwiązań dopuszczalnych*, tzn. zbiór punktów w przestrzeni dwuwymiarowej spełniających podane nierówności. Jest to czworokąt o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(0, 3)$  i  $(3, 2)$ . Interesują nas *rozwiązania optymalne*, czyli rozwiązania dopuszczalne, które minimalizują (maksymalizują) funkcję celu. W szczególności, jeśli zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest nieograniczony, rozwiązanie optymalne może nie istnieć. Dla programów o wszystkich zmiennych nieujemnych można dość łatwo wykazać (zachęcam Czytelnika, aby spróbował swoich sił dla dwóch wymiarów), że jeśli jakieś rozwiązanie optymalne istnieje, to istnieje też takie, które jest wierzchołkiem zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Po sprawdzeniu wszystkich wierzchołków okazuje się, że rozwiązanie optymalne dla powyższego przykładu to  $(3, 2)$ .

Czy programy liniowe mają coś wspólnego z informatyką? Okazuje się, że bardzo wiele. Po pierwsze, istnieją (bardzo ciekawie!) efektywne algorytmy rozwiązujące programy liniowe. Ponadto, programy liniowe są kluczowym narzędziem w optymalizacji kombinatorycznej, algorytmach aproksymacyjnych czy algorytmach online. Dla przykładu, problem maksymalnego przepływu jest szczególnym przypadkiem programu liniowego (dla sieci o  $n$  wierzchołkach i  $m$  krawędziach taki program ma  $m$  zmiennych i  $O(n + m)$  ograniczeń).

Przejdźmy teraz do głównego tematu tego artykułu: każdy program liniowy ma swojego **brata bliźniaka**. Aby się o tym przekonać, spróbujmy znaleźć jakiś prosty (istotnie prostszy niż dowodzenie twierdzenia o wierzchołkach) sposób, żeby przekonać kolegę, że rozwiązanie  $(3, 2)$ , o wartości funkcji celu 7, jest faktycznie rozwiązaniem optymalnym, albo chociaż że jest bliskie optymalnemu. Innymi słowy, szukamy *oszacowania górnego* na wartość funkcji celu rozwiązań dopuszczalnych. Zauważmy, że tak się szczęśliwie złożyło, iż rozwiązania dopuszczalne naszego programu są nieujemne. Dlatego proste oszacowanie możemy dostać już na podstawie pierwszej nierówności:  $x_1 + 2x_2 \leq x_1 + 3x_2 \leq 9$ . Dodając pierwsze dwie nierówności pomnożone przez  $\frac{1}{2}$ , otrzymujemy jeszcze lepsze oszacowanie:  $x_1 + 2x_2 \leq \frac{3}{2}x_1 + 2x_2 \leq 8\frac{1}{2}$ . Spróbujmy pójść tą drogą jeszcze dalej. Mianowicie, chcemy znaleźć takie liczby  $y_1, y_2 \geq 0$ , że mnożąc  $i$ -tą nierówność przez  $y_i$  i dodając otrzymane nierówności, dostaniemy jak najlepsze oszacowanie na wartość funkcji celu. Żeby wartość funkcji celu faktycznie szacowała się z góry przez taką sumę, musi zachodzić  $1 \leq 1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2$  oraz  $2 \leq 3 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2$ . A więc otrzymaliśmy pewne

zadanie do rozwiązania. Spostrzegawczy Czytelnik zapewne zauważył już, że jest to zadanie programowania liniowego! Możemy je zapisać następująco:

$$(2) \quad \begin{aligned} &\text{zminimalizuj } 9y_1 + 8y_2 \\ &\text{z zachowaniem warunków } \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 1, \\ 3y_1 + y_2 \geq 2, \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ponownie stosując trik z wyznaczeniem wierzchołków wielokąta, otrzymujemy, że  $(y_1, y_2) = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$  jest rozwiązaniem optymalnym naszego nowego programu. A jaką otrzymaliśmy wartość funkcji celu? Mamy  $9y_1 + 8y_2 = 7$ , czyli idealnie! Możemy więc łatwo przekonać kolegę, że rozwiązanie  $(3, 2)$  oryginalnego problemu jest nie tylko bliskie optymalnemu, ale nawet że jest optymalne.

Program (2) nazywamy programem *dualnym* do programu (1), który z kolei nazywamy programem *prymalnym*. Rozumowanie, które zastosowaliśmy powyżej, można łatwo przenieść na dowolny program maksymalizacyjny, w którym wszystkie zmienne są nieujemne. Jeśli dodatkowo zapiszemy wszystkie  $m$  nierówności (oprócz „nieujemnościowych”) w postaci  $\sum_j a_{i,j}x_j \leq b_i$ , mamy do czynienia z programem *w postaci standardowej*. Dla takich programów „przepis” na program dualny jest wyjątkowo prosty: transponujemy macierz współczynników (tzn. zamieniamy wiersze z kolumnami), zamieniamy maksymalizację na minimalizację i odwracamy kierunek nierówności.

$$\begin{aligned} &\max c_1x_1 + \dots + c_nx_n, \\ &\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \\ &x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &\min b_1y_1 + \dots + b_my_m, \\ &\begin{cases} a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ \vdots \\ a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases} \\ &y_1, \dots, y_m \geq 0. \end{aligned}$$

Widzimy, że dla programów w postaci standardowej zmienne nieujemne w programie prymalnym odpowiadają nierównościom w programie dualnym i nierówności w programie prymalnym odpowiadają zmiennym nieujemnym w programie dualnym. Za pomocą nieco bardziej skomplikowanych reguł możemy dla *dowolnego* programu napisać program dualny. Mianowicie, zmienne bez warunku nieujemności generują równość, a równości generują zmienne bez warunku nieujemności (w dalszej części artykułu pojawi się przykład).

Zapraszam w tym miejscu Czytelnika, aby stosując podobne rozumowanie jak powyżej, poszukał ograniczenia *dolnego* na rozwiązania programu (2). Jak można się domyślić, to ograniczenie otrzymujemy jako kombinację liniową nierówności o współczynnikach będących rozwiązaniem optymalnym programu (1). Tak więc dla programu minimalizacyjnego również możemy określić program dualny. Ponadto, program dualny do programu dualnego to program prymalny.

Niech  $v_P$  będzie wartością funkcji celu dla rozwiązania optymalnego programu maksymalizacyjnego  $P$  oraz niech  $v_D$  będzie wartością funkcji celu dla rozwiązania optymalnego programu dualnego do  $P$ . Z konstrukcji wiemy, że  $v_P \leq v_D$ . Tę własność nazywamy *slabą dualnością*. W naszym przykładzie okazało się jednak, że  $v_P = v_D$ . Czy to był przypadek? Okazuje się, że nie, równość zachodzi *zawsze!* Tę mocniejszą własność nazywamy twierdzeniem o (silnej) dualności. Jego dowód wykracza poza ramy tego artykułu. Silna dualność ma wiele pasjonujących konsekwencji. W szczególności, liczne tzw. twierdzenia minimaksowe w kombinatoryce (np. twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju czy twierdzenie Königa-Egerváry’ego) są szczególnymi przypadkami twierdzenia o dualności.

**2. Bliźniacze strategie.** Za odkrywcę dualności programów liniowych uważa się Johna von Neumanna. Odkrycia tego dokonał niejako „przy okazji”, badając zagadnienia teorii gier. Przyjrzyjmy się teraz związkom tych dwóch teorii.

Wojtek i Kasia grają w następującą grę. Wojtek ma dwie monety: 1 zł i 2 zł. Kasia również ma dwie monety: 5 zł i 10 zł. Każde z nich niezależnie wybiera jedną ze swoich monet i kładzie ją na stół. Jeśli suma wartości monet na stole jest parzysta, to zabiera je Wojtek, w przeciwnym przypadku zabiera je Kasia.

Możemy uogólnić tę grę w następujący sposób. Dana jest dowolna (niekoniecznie kwadratowa) macierz  $A = [a_{ij}]$  liczb rzeczywistych oraz dwóch graczy:  $W$  (gracz wierszowy) i  $K$  (gracz kolumnowy). Gracz  $W$  wybiera wiersz  $w$  macierzy  $A$ , natomiast gracz  $K$  niezależnie wybiera kolumnę  $k$  macierzy  $A$ . Następnie równocześnie ujawniają sobie swoje wybory i gracz  $W$  dostaje  $a_{wk}$  złotych od gracza  $K$ . Jest to tzw. *gra o sumie zerowej* (tzn. suma zysków graczy wynosi 0). Dla przykładu, następująca macierz odpowiada opisanej wcześniej grze:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Jak mogą wyglądać strategie w grze tego typu? *Strategią mieszaną* gracza  $W$  nazywamy dowolny rozkład prawdopodobieństwa na wierszach macierzy  $A$ . Np. gracz  $W$  mógłby z prawdopodobieństwem  $p_1 = \frac{1}{4}$  wybierać wiersz 1 i z prawdopodobieństwem  $p_2 = \frac{3}{4}$  wybierać wiersz 2. (Analogicznie definiujemy strategię mieszaną dla gracza  $K$ ). Jak wygląda *optymalna* strategia mieszaną dla  $W$ ? Gracz  $W$  maksymalizuje wartość oczekiwaną swojej wygranej. Gracz  $K$  ma do wyboru 2 ruchy. Gdy wybierze kolumnę 1, wartość oczekiwana kwoty, którą zapłaci graczowi  $W$ , wynosi  $5 \cdot p_1 - 2 \cdot p_2$ . Gdy wybierze kolumnę 2, ta wartość wynosi  $(-1) \cdot p_1 + 10 \cdot p_2$ . Gracz  $K$  chce zapłacić jak najmniej, a więc wybierze bardziej korzystną opcję i zapłaci  $\min\{5p_1 - 2p_2, -p_1 + 10p_2\}$ . Teoretycznie  $K$  mógłby grać przeciwko  $W$ , również używając strategii mieszaną. Zauważmy jednak, że jeśli, tak jak w powyższej analizie,  $K$  zna  $p_1$  i  $p_2$ , to opłaca mu się grać jedną z dwóch strategii czystych, tzn. zapłacić

$$\min_{\substack{q_1+q_2=1 \\ q_1, q_2 \geq 0}} (q_1(5p_1 - 2p_2) + q_2(-p_1 + 10p_2)) = \min\{5p_1 - 2p_2, -p_1 + 10p_2\}.$$

Stąd, chcąc mieć optymalną strategię dla  $W$ , musimy rozwiązać następujące zadanie:

$$\begin{aligned} &\text{zmaksymalizuj } \min\{5p_1 - 2p_2, -p_1 + 10p_2\} \\ &\text{z zachowaniem warunków } p_1 + p_2 = 1, \\ & \quad p_1, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie spełnia równanie  $5p_1 - 2p_2 = -p_1 + 10p_2$ , a więc  $p_1 = \frac{2}{3}$ ,  $p_2 = \frac{1}{3}$ . Taka strategia mieszaną gwarantuje graczowi  $W$  średnią wygraną o wartości  $\frac{8}{3}$  zł.

A jaka jest optymalna strategia  $(q_1, q_2)$  dla gracza  $K$ ? Z analogicznego rozumowania jak dla  $W$  dostajemy

$$\begin{aligned} &\text{zminimalizuj } \max\{5q_1 - q_2, -2q_1 + 10q_2\} \\ &\text{z zachowaniem warunków } q_1 + q_2 = 1, \\ & \quad q_1, q_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Otrzymujemy  $q_1 = \frac{11}{18}$ ,  $q_2 = \frac{7}{18}$ . Wówczas  $K$  ma gwarancję, że nie straci średnio więcej niż  $\frac{8}{3}$  zł (no cóż, to nie jest sprawiedliwa gra). Zauważmy, że w obu przypadkach dostaliśmy tę samą liczbę. To oznacza, że jeśli  $W$  i  $K$  obiorą znalezione przez nas strategie, to nawet jeśli je wyjawiają sobie nawzajem, i tak żadnemu z nich nie będzie się opłacało zmienić obranej strategii. Jak to się stało? Odpowiedź będzie jasna, jeśli zauważymy, że powyższe dwa zadania optymalizacyjne możemy przedstawić za pomocą programów liniowych:

$$\begin{aligned} &\text{zmaksymalizuj } t \\ &\text{z zachowaniem warunków } t \leq 5p_1 - 2p_2, \\ & \quad t \leq -p_1 + 10p_2, \\ & \quad p_1 + p_2 = 1, \\ & \quad p_1, p_2 \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{zminimalizuj } r \\ &\text{z zachowaniem warunków } r \geq 5q_1 - q_2, \\ & \quad r \geq -2q_1 + 10q_2, \\ & \quad q_1 + q_2 = 1, \\ & \quad q_1, q_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Te programy są do siebie dualne! A więc fakt, że mają takie same optymalne wartości funkcji celu, wynika z twierdzenia o silnej dualności. W ten sposób „udowodniliśmy” (na konkretnym przykładzie) słynne twierdzenie minimaksowe von Neumanna.

**Twierdzenie 1.** *W każdej dwuosobowej grze o sumie zerowej istnieją strategie dla graczy  $W$  i  $K$  oraz taka liczba  $V \in \mathbb{R}$ , że strategia gracza  $W$  gwarantuje mu średnią wygraną  $V$  niezależnie od strategii  $K$  oraz strategia  $K$  gwarantuje mu średnią wygraną  $-V$  niezależnie od strategii  $W$ . Innymi słowy, dla dowolnej macierzy  $A$  o wymiarach  $n \times m$  mamy*

$$\begin{aligned} \max_{\substack{\sum p_j=1 \\ p_j \geq 0}} \min_{\substack{\sum q_i=1 \\ q_i \geq 0}} \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} p_j q_i a_{ji} &= \min_{\substack{\sum q_i=1 \\ q_i \geq 0}} \max_{\substack{\sum p_j=1 \\ p_j \geq 0}} \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} p_j q_i a_{ji}. \end{aligned}$$

### 3. Dolne granice dla algorytmów randomizowanych.

Do czego może przydać się nam twierdzenie von Neumanna? Okazuje się, że pojęcie gry pojawia się częściej, niż mogłoby się wydawać. Na przykład złożoność algorytmu możemy interpretować jako wynik gry między algorytmem a przeciwnikiem, który generuje „złośliwe” instancje (tj. dane wejściowe) problemu. Algorytm deterministyczny nie może wykonać w takiej grze żadnego ruchu, czeka

jedynie na posunięcie przeciwnika. Często większe szanse ma algorytm randomizowany, czyli taki, który pewne decyzje podejmuje na podstawie wyniku rzutu monetą. Zajmiemy się tu algorytmami typu Las Vegas, tzn. takimi, które zawsze zwracają poprawną odpowiedź, ale wykorzystują losowość i czas ich działania jest zmienną losową. W 1977 r. Andrew Yao odkrył, jak zastosować twierdzenie von Neumanna, aby wykazywać ograniczenia algorytmów Las Vegas. Zobaczmy, na czym polega odkrycie Yao.

Rozważmy abstrakcyjny problem algorytmiczny. Niech  $\mathcal{A}$  oznacza zbiór wszystkich algorytmów deterministycznych dla danych rozmiaru  $n$  oraz niech  $\mathcal{I}$  oznacza zbiór wszystkich instancji problemu rozmiaru  $n$ . Wówczas zbiór  $\mathcal{I}$  jest skończony. Zbiór  $\mathcal{A}$  nie jest skończony, ale możemy rozważać jedynie algorytmy, których pesymistyczny czas nie przekracza jakiejś określonej (dostatecznie dużej) wartości, i tak ograniczony zbiór jest już skończony. Niech  $T$  będzie macierzą o kolumnach indeksowanych elementami zbioru  $\mathcal{A}$  i wierszach indeksowanych elementami zbioru  $\mathcal{I}$ , w której element  $t_{A,I} = T(A, I)$  ma wartość równą liczbie kroków, które wykonuje algorytm  $A$  na instancji  $I$ . Ponadto, dla rozkładu prawdopodobieństwa  $\alpha$  na algorytmach ze zbioru  $\mathcal{A}$  niech zmienna losowa  $A_\alpha$  oznacza algorytm wylosowany zgodnie z rozkładem  $\alpha$ . Podobnie, dla rozkładu prawdopodobieństwa  $\beta$  na instancjach ze zbioru  $\mathcal{I}$  niech zmienna losowa  $I_\beta$  oznacza instancję wylosowaną zgodnie z rozkładem  $\beta$ .

Zastosujmy do tej macierzy twierdzenie von Neumanna. Ponieważ

$$\min\{a, b\} = \min_{0 \leq q \leq 1} \{qa + (1-q)b\},$$

więc równość w tym twierdzeniu możemy zapisać w równoważnej, prostszej postaci:

$$\max_{\substack{\sum p_j = 1 \\ p_j \geq 0}} \min_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n p_j a_{ji} = \min_{\substack{\sum q_i = 1 \\ q_i \geq 0}} \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m q_i a_{ji}.$$

Stąd

$$\min_{\alpha} \max_{I \in \mathcal{I}} \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{P}[A_\alpha = A] t_{A,I} = \max_{\beta} \min_{A \in \mathcal{A}} \sum_{I \in \mathcal{I}} \mathbb{P}[I_\beta = I] t_{A,I}.$$

Równoważnie

$$(3) \quad \min_{\alpha} \max_{I \in \mathcal{I}} \mathbb{E}[T(A_\alpha, I)] = \max_{\beta} \min_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[T(A, I_\beta)].$$

Teraz zastanówmy się, co tak naprawdę dostaliśmy. Jak możemy interpretować zmienną losową  $A_\alpha$  dla danego rozkładu  $\alpha$ ? Każdy randomizowany algorytm Las Vegas dla naszego problemu możemy traktować jako pewien rozkład prawdopodobieństwa na algorytmach ze zbioru  $\mathcal{A}$ . Istotnie, każdy taki algorytm korzysta z pewnej liczby bitów losowych. Możemy wartości tych bitów wylosować na samym początku algorytmu, a wówczas jego dalsze działanie jest już zdeterminowane przez te bity (a więc jest zgodne z pewnym algorytmem ze zbioru  $\mathcal{A}$ ).

Skoro  $A_\alpha$  oznacza pewien algorytm randomizowany, to lewa strona naszej równości oznacza *czas najlepszego*

(w sensie oczekiwanej złożoności na najgorszych danych) algorytmu randomizowanego Las Vegas dla naszego problemu.

Natomiast z prawej strony wybieramy taki rozkład na instancjach, który zmaksymalizuje oczekiwany czas najlepszego algorytmu *deterministycznego*.

Wynika stąd, że równanie (3) daje nam sposób na dowodzenie *dolnych granic* na złożoność algorytmów randomizowanych. Wystarczy mianowicie znaleźć jakiś zestaw „trudnych” instancji i podać taki rozkład prawdopodobieństwa na tym zestawie, że żaden algorytm deterministyczny nie poradzi sobie z nim zbyt dobrze. Ten wniosek znany jest jako twierdzenie Yao.

**Twierdzenie 2 (Twierdzenie Yao).** Niech  $A_\alpha$  będzie pewnym algorytmem Las Vegas. Niech  $\beta$  będzie pewnym rozkładem prawdopodobieństwa na instancjach problemu. Wówczas

$$\max_{I \in \mathcal{I}} \mathbb{E}[T(A_\alpha, I)] \geq \min_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[T(A, I_\beta)].$$

**Przykład: sortowanie.** Chyba najbardziej znanym algorytmem randomizowanym typu Las Vegas jest algorytm sortowania Quicksort, który działa w oczekiwanym czasie  $O(n \log n)$ . Pokażemy, że żaden inny algorytm Las Vegas nie może działać szybciej, w sensie złożoności asymptotycznej.

Przypomnijmy znany dowód, że każdy *deterministyczny* algorytm sortujący  $n$  różnych liczb przez porównania wymaga  $\Omega(n \log n)$  porównań. Każdy taki algorytm możemy modelować jako drzewo binarne. Węzły wewnętrzne drzewa odpowiadają wykonywanym porównaniom, każde wykonanie algorytmu odpowiada ścieżce od korzenia do liścia (będąc w liściu, algorytm na podstawie wyników wcześniejszych porównań może jednoznacznie wyznaczyć szukaną permutację liczb). Jeśli  $h$  jest długością najdłuższej ścieżki w drzewie, to ma ono nie więcej niż  $2^h$  liści. Ale liści musi być co najmniej  $n!$  (bo tyle jest możliwych permutacji), czyli

$$h \geq \log_2(n!) \geq \log_2((n/2)^{n/2}) = \Omega(n \log n),$$

co kończy dowód.

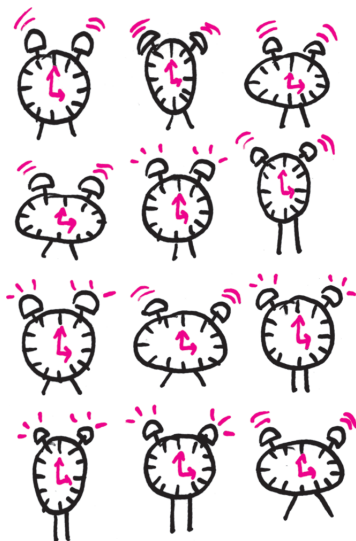
Zauważmy teraz, że liści na głębokości co najwyżej  $\log_2(n!) - 1$  jest nie więcej niż  $2^{\lfloor \log_2(n!) \rfloor - 1} \leq n!/2$ . A więc dla każdego algorytmu deterministycznego jest co najmniej  $n!/2$  permutacji, dla których ten algorytm wykona co najmniej  $\log_2(n!) - 1$  kroków. Stąd, jeśli wylosujemy permutację na wejściu z rozkładem jednostajnym (tzn. każda permutacja może się pojawić z prawdopodobieństwem  $1/n!$ ), to dla dowolnego algorytmu deterministycznego wartość oczekiwana liczby wykonanych porównań wynosi co najmniej  $(\log_2(n!) - 1)/2$ . Na podstawie twierdzenia Yao wnioskujemy więc, że dla dowolnego algorytmu Las Vegas sortującego  $n$  liczb, dla pewnej instancji oczekiwana liczba wykonanych porównań wynosi co najmniej

$$(\log_2(n!) - 1)/2 = \Omega(n \log n).$$

Pokazaliśmy więc, że Quicksort jest optymalny w klasie algorytmów Las Vegas sortujących przez porównania. Kto by pomyślał, że do tego wniosku doprowadzi nas pewna teoria dotycząca nierówności liniowych?

# Tachiony, czyli absolutna synchronizacja zegarów

Jacek CIBOROWSKI\*, Marta WŁODARCZYK\*\*



Michelson i Morley próbowali zmierzyć prędkość Ziemi względem eteru – hipotetycznego ośrodka, w którym miało rozchodzić się światło. W tym celu chcieli wykorzystać fakt, że światło w eterze rozchodzi się izotropowo. Jeśli więc Ziemia porusza się względem eteru, można to zweryfikować, porównując prędkość światła w różnych kierunkach. Do weryfikacji zbudowany został przyrząd zwany teraz interferometrem Michelsona. Składał się z dwóch prostopadłych ramion, w których biegły wiązki światła. Po odbiciu od zwierciadeł na końcach ramion wiązki wracały i interferowały ze sobą. W wyniku interferencji powstawał układ jasnych i ciemnych prążków, z których położenia można było odczytać różnicę prędkości światła w każdym z ramion. Eksperyment Michelsona–Morleya pokazał, że w obu ramionach światło porusza się z taką samą prędkością, należy jednak zwrócić uwagę, że *de facto* był to pomiar prędkości światła po drodze zamkniętej.

**Efekt Dopplera a względność ruchu.** Efekt Dopplera dla dźwięku jest powszechnie znanym zjawiskiem. Polega on na zmianie częstotliwości fali dźwiękowej odbieranej przez obserwatora wskutek wzajemnego ruchu źródła i odbiornika dźwięku. Jednak zmiana ta jest całkiem zastanawiająca. Gdy przyjrzymy się uważnie równaniom, okaże się, że jeżeli źródło dźwięku zbliża się do nieruchomego obserwatora z prędkością  $V$ , emitując dźwięk o częstotliwości  $f$ , obserwator zarejestruje częstotliwość  $f' = f \frac{c}{c-V}$  (gdzie  $c$  jest prędkością dźwięku w nieruchomym powietrzu). Natomiast gdy to obserwator będzie zbliżał się, z tą samą prędkością, do nieruchomego źródła, częstotliwość odebrana będzie wyrażona wzorem  $f' = f \frac{c+V}{c}$ . Czy ten wynik nie stoi w sprzeczności z zasadą względności ruchu? Przecież już w szkole podstawowej uczono nas, że na zjawiska fizyczne nie powinno mieć wpływu, który obiekt uznamy za ruchomy, a który potraktujemy jako punkt odniesienia?

Kluczem do rozwiązania tego problemu jest spostrzeżenie, że w przypadku rozważania ruchu fali dźwiękowej nie wszystkie układy odniesienia są równoprawne. Istnieje pewien *układ wyróżniony* – jest nim nieruchome powietrze. Wyróżnia go – w sensie fizycznym – fakt, że to właśnie powietrze jest ośrodkiem, w którym porusza się dźwięk. Jeśli układ odniesienia porusza się względem powietrza, ruch ten wpływać musi na prędkość rozchodzenia się dźwięku w tym układzie. A zatem, mierząc prędkość dźwięku w przeciwnych kierunkach, jesteśmy w stanie jednoznacznie stwierdzić, czy i z jaką prędkością poruszamy się względem układu wyróżnionego.

W podobny sposób Michelson i Morley próbowali ustalić, z jaką prędkością Ziemia porusza się względem eteru, hipotetycznego ośrodka, który miał być nośnikiem fal elektromagnetycznych. Jednak ich pomiar pokazał, że prędkość światła jest stała i izotropowa, w efekcie doprowadzając do powstania szczególnej teorii względności (STW) oraz odrzucenia hipotezy eteru. Czy słusznie?

**Prędkość dźwięku po drodze otwartej.** Zastanówmy się, w jaki sposób można wyznaczyć prędkość dźwięku w jedną stronę. Niech będzie dana platforma kolejowa o długości  $L$ , poruszająca się w nieruchomym powietrzu z prędkością  $V$  względem torów. Prędkość dźwięku w układzie odniesienia spoczywającym względem powietrza wynosi  $c$  – jest stała i izotropowa. Na przeciwległych krańcach platformy umieszczono nadajniki oraz odbiorniki dźwięku, emitujące i odbierające fale dźwiękowe przesyłane w obydwu kierunkach.

Przyjmijmy, że  $V \ll c$  oraz że obserwator na platformie ma znikający wymiar prostopadły do kierunku jej ruchu (jest dwuwymiarowy). Ruch powietrza nie będzie więc przez niego wyczuwalny. Dlatego taki obserwator, nie mając żadnych zewnętrznych punktów odniesienia, nie jest świadom faktu, że platforma porusza się względem torów ani że powietrze jest ruchome względem platformy. Czy może mimo wszystko ustalić to, wykonując pomiar prędkości dźwięku?

**Światło i dźwięk.** Załóżmy na początek, że obserwator na platformie ma do swojej dyspozycji laser. Ponieważ prędkość światła jest nieporównanie większa od prędkości dźwięku, może on dokonać w zasadzie *absolutnej* (natychmiastowej) *synchronizacji zegarów* na obu końcach platformy. Wystarczy, że ze środka platformy wyśle w kierunku obu zegarów impuls światła, ustawiający ich wskazania na 0. Po zsynchronizowaniu zegarów mierzy czas przelotu fali dźwiękowej w kierunku ruchu platformy oraz w kierunku przeciwnym i otrzymuje odpowiednio  $\Delta T_+$  i  $\Delta T_-$ . Porównując odczyty zegarów, wnioskuje, że prędkość dźwięku w kierunkach przeciwnych jest różna. Używając równań fizyki galileuszowskiej, nasz obserwator szuka metody ustalenia prędkości platformy względem powietrza. Zapisuje równania:

$$\frac{L \pm V \Delta T_{\pm}}{c} = \Delta T_{\pm} \quad \text{i} \quad c_{\pm} = \frac{L}{\Delta T_{\pm}},$$

\*Wydział Fizyki

Uniwersytetu Warszawskiego

\*\*Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej  
Uniwersytetu Łódzkiego

gdzie  $c_{\pm}$  to prędkość dźwięku, odpowiednio, w kierunku ruchu platformy i w przeciwnym. Rozwiązanie powyższych równań daje:

$$c_{\pm} = c \left( 1 \mp \frac{V}{c} \right) \quad \text{i ostatecznie:} \quad V = \frac{c_- - c_+}{2}.$$

Zauważmy, że w tym przypadku:

$$c = \frac{c_- + c_+}{2},$$

czyli prędkość dźwięku w nieruchomym powietrzu jest średnią prędkości  $c_+$  i  $c_-$ .

**Tylko dźwięk.** A jak sobie poradzić, gdy obserwator nie ma do dyspozycji lasera? Może wówczas użyć jedynie fal dźwiękowych, wiedząc, że prędkość dźwięku w nieruchomym powietrzu jest stała i izotropowa. Można spróbować zsynchronizować zegary analogicznie, umieszczając źródło fali pośrodku (punkt  $O$ ) platformy i wysyłając sygnał dźwiękowy jednocześnie w kierunku obu zegarów (nazwijmy je odpowiednio  $A$  i  $B$ ). W momencie dotarcia dźwięku do zegara zostaje on ustawiony na czas równy 0. Załóżmy, że (nieznane) prędkości dźwięku w jedną stronę spełniają zależność:  $c_+ < c_-$  (jak powyżej). Oczywiście jest, że sygnał dźwiękowy wyemitowany z  $O$  do  $B$  dotrze do celu później niż z  $O$  do  $A$ . W momencie gdy sygnał dźwiękowy restartuje zegar  $B$ , zegar  $A$  wskazuje:

$$\Delta t_A^{(0)} = \frac{L}{2} \left( \frac{1}{c_+} - \frac{1}{c_-} \right).$$

Założmy, że w chwili, gdy  $B$  jest zresetowany, sygnał dźwiękowy zostaje wysłany z  $B$  do  $A$ , w celu pomiaru prędkości dźwięku z  $B$  do  $A$ . Gdy sygnał ten osiągnie zegar  $A$ , odczyt zegara będzie równy:

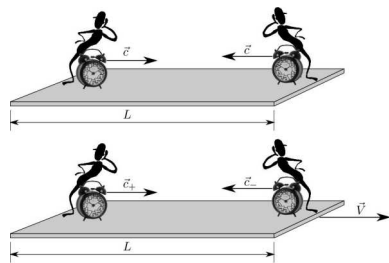
$$\Delta t_A^{(1)} = \Delta t_A^{(0)} + \frac{L}{c_-} = \frac{L}{2} \left( \frac{1}{c_+} - \frac{1}{c_-} \right) + \frac{L}{c_-}.$$

Zatem zmierzona prędkość od  $B$  do  $A$  wynosi:  $c_{BA} = L/\Delta t_A^{(1)}$ . Po elementarnych rachunkach otrzymujemy:

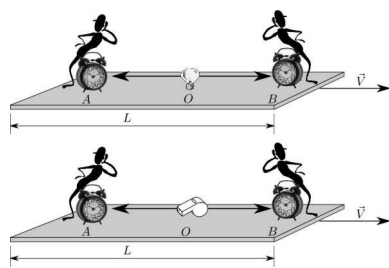
$$\frac{1}{c_{BA}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c_+} + \frac{1}{c_-} \right).$$

Widzimy zatem, że eksperymentalnie zmierzona prędkość w jedną stronę jest w rzeczywistości średnią harmoniczną prędkości z  $A$  do  $B$  oraz z  $B$  do  $A$ , czyli prędkością po drodze zamkniętej  $ABA$  (mierząc prędkość z  $A$  do  $B$ , otrzymalibyśmy identyczny rezultat). Oznacza to, że niemożliwe jest zmierzenie prędkości  $V$  platformy względem torów czy nieruchomego powietrza przy użyciu jedynie sygnałów dźwiękowych, gdyż nie są one wystarczające do zmierzenia prędkości dźwięku w jedną stronę  $c_{\pm}$ . Obserwator, mający do dyspozycji jedynie falę dźwiękową, nie byłby w stanie eksperymentalnie zweryfikować, czy porusza się względem ośrodka, w którym ta fala się rozchodzi (układu preferowanego), czy też nie. Podobnie nie można na podstawie wyniku doświadczenia Michelsona–Morleya wyciągnąć wniosku, że układ wyróżniony nie istnieje. Dysponując jedynie falami świetlnymi, nie możemy tego zweryfikować, a wszystkie pomiary prędkości światła są *de facto* pomiarami po drodze zamkniętej.

**Podsumowanie.** Czy Natura wybrała układ wyróżniony? Odpowiedź na to pytanie jest na razie nieznana, choć istnieją przesłanki świadczące o tym, że może tak być. Kolejne pytanie, jakie się pojawia, brzmi: czy Natura dała nam narzędzia, dzięki którym możemy to zweryfikować? Aby znaleźć układ wyróżniony, trzeba dokonać pomiaru prędkości światła w przynajmniej dwóch kierunkach. Nie da się tego zrobić, mając do dyspozycji jedynie sygnały świetlne (lub obiekty poruszające się z prędkościami mniejszymi lub równymi prędkości światła). Jednak gdyby istniały tachiony, hipotetyczne cząstki nadświetlne, mogłyby one zostać wykorzystane do absolutnej (natychmiastowej) synchronizacji zegarów z dowolną dokładnością i pomiaru prędkości światła po drodze otwartej. Spełniałyby one podobną rolę jak wiązka światła laserowego przy pomiarze prędkości dźwięku w ruchomym powietrzu. Czy tachiony istnieją? Na to pytanie na razie również nie znamy odpowiedzi. Ale czy Natura byłaby na tyle złośliwa, by dać nam zjawisko bez narzędzi do jego zbadania?



Rys. 1. W nieruchomym powietrzu prędkość dźwięku jest stała i izotropowa, równa  $c$ . Ruch platformy wpływa na prędkość dźwięku w kierunkach zgodnym i przeciwnym do jej ruchu, mierzona w układzie odniesienia związanym z platformą.



Rys. 2. Synchronizacja zegarów za pomocą światła i dźwięku.



Tachiony to hipotetyczne cząstki poruszające się zawsze z prędkością większą niż światło względem dowolnego układu odniesienia. Aby je poprawnie opisać, trzeba posłużyć się inną konwencją synchronizacji zegarów (zwaną absolutną) niż powszechnie znana metoda Einsteina, prowadzącą do wyróżnienia pewnego układu odniesienia. Wówczas – inaczej niż w zazwyczaj rozważanej relatywistycznej mechanice kwantowej – można jednoznacznie zdefiniować kowariantny operator spinu.



## Wcale

Andrzej DRAGAN\*

Od wielu lat się dziwię, jak to możliwe, że szczególna teoria względności czasem nawet w uczonych głowach sieje ogromny zamęt. Jest to najprostsza teoria znana fizyce. Jest niemal równoważna zasadzie względności Galileusza. Ba, nie jest to w zasadzie nawet teoria z prawdziwego zdarzenia, a jedynie elementarny schemat, szkielet, na którym dopiero buduje się mięsiste teorie fizyczne, takie jak elektrodynamika klasyczna lub kwantowa. Więc skąd te schody? Czy to przez niechęć wywołaną zaskoczeniem pojawiającym się przy pierwszym zetknięciu z teorią względności? Brak wysiłku włożonego w głębsze zastanowienie nad sensem kilku prostych zasad obowiązujących w szczególnej teorii względności?

Całkiem niedawno odbył się niezwykle spektakl, który w całej okazałości ukazał tę sprawę. Otóż grupa uczonych badających prędkość poruszania się neutrin stwierdziła ku zaskoczeniu ogółu, że cząstki te mają prędkość przekraczającą prędkość światła. Eksperyment wkrótce okazał się błędny, a wszystko za sprawą zbyt luźno wetkniętego kabla gdzieś w układzie elektronicznym urządzeń pomiarowych. Niemniej, zanim sprawa się wyjaśniła, działy się rzeczy niestworzone. W całym świecie naukowym ziemia zdrząła, aż szyszki spadały. Tegie umysły przewidywały, że jeśli eksperyment okazałby się prawdziwy, zaprzeczyłyby podstawom teorii względności, którą należałoby stworzyć od nowa. Na własne oczy, uszy i pozostałe receptory słyszałem, sam zresztą złośliwie dopytując, że słynna „teoria Einsteina” musiałaby zostać odstawiona do lamusa. No bo przecież „nic nie może poruszać się szybciej od światła”. Większość fizyków „oczywiście” nie wierzyła w poprawność rezultatów doświadczalnych, ale mimo wszystko spekulacje „co by to było, gdyby” wyraźnie dało się słyszeć.

A zatem na moment oderwijmy się intelektualnie od żucia gumy i zabawmy się w grę „co by to było, gdyby”. Wyobraźmy sobie, że wszystkie kable w laboratorium podoczepiano poprawnie, żaden biedny laborant winny zaniedbania nie siwieje z wyrzutów sumienia, a eksperyment wskazuje jak wół: neutrina są cząstkami nadświatłymi. Jak by się wówczas musiała do tego „brzydkiego” faktu dostosować szczególna teoria względności? Odpowiedź jest prosta: **wcale**. Jasiu, podkreśl wężykiem: **wcale**. Teoria względności pozostałaby absolutnie niezmienniona.

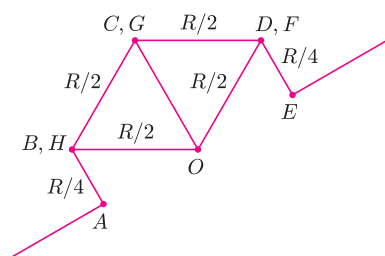
A jest tak: szczególna teoria względności nie rozstrzyga, jaki świat jest, jakie rządzą nim prawa. Nie mówi o tym, jakie cząstki mogą istnieć, jakie są ich właściwości. Nie informuje nas o kolorze trawy ani smaku herbaty. Nie wynika z niej, jaka jest masa i ładunek elektronu. Szczególna teoria względności mówi tylko o jednym: jak przebieg określonej sytuacji fizycznej transformuje się z jednego inercjalnego układu odniesienia do innego. Dla przykładu wyobraźmy sobie pewien układ inercjalny, w którym jest różowe, kwadratowe Słońce na niebie w pomarańczowe paski i spadają z niego z nadświatłą prędkością kanapki skierowane masłem w górę. Transformacja Lorentza, stanowiąca trzon szczególnej teorii względności, pozwoli nam dokładnie opisać, jak historyjka ta wyglądać będzie z punktu widzenia obserwatora jadącego rowerem z prędkością  $V$  wzdłuż osi  $x$ . Bez rozstrzygnięcia, czy historyjka może się wydarzyć, czy nie. Nie będzie żadnych sprzeczności, nie będzie żadnych zgrzytów. Co prawda, opisana sytuacja w ruchomym układzie może być jeszcze dziwniejsza niż w spoczywającym, ale cóż, zdziwienie to często jedynie oznaka ignorancji. Teoria względności jest jak tłumacz, który przekłada opis świata według jednego obserwatora inercjalnego na język dowolnego innego obserwatora. Do samego opisu się zaś nadmiernie nie wtrąca.

Jakie zmiany w naszym rozumieniu świata zaszyłyby zatem, gdyby eksperyment neutrinowy był poprawny? Zmiany byłyby bardzo poważne, o tym za chwilę, ale akurat nie teoria względności by im uległa. Szczególna teoria względności została dotąd przebadana tak dogłębnie, a jej przewidywania sprawdzone z taką precyzją, że można by nawet uznać ją za teorię fenomenologiczną. Rzeczywistość ma charakter relatywistyczny, po prostu wiemy to z doświadczenia. O ile z hipotezami polemizować można, a wręcz należy, to z faktami empirycznymi byłoby już dość niemądre.

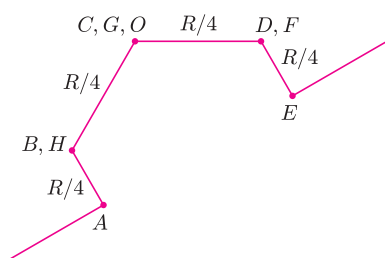
Prześledźmy typową argumentację używaną do odrzucenia hipotezy istnienia nadświatłych cząstek. Rozważmy hipotetyczny sygnał wysłany z nadświatłą prędkością przez Alicję (zdarzenie A) do odległego odbiorcy, Boba, który rejestruje sygnał chwilę później (zdarzenie B), jak przedstawiliśmy to na rysunku (a), na którym

### Rozwiązanie zadania F 838.

Układ oporów jest symetryczny względem prostej, przechodzącej przez punkty A i E. Wynika stąd, że potencjał odpowiadających sobie punktów leżących powyżej i poniżej tej prostej jest taki sam, tzn.  $V_C = V_G, V_D = V_F, V_B = V_H$ . Łącząc punkty o jednakowym potencjale i zastępując równocześnie opory, które zostaną przy tym połączone równolegle, dostaniemy obwód zastępczy:



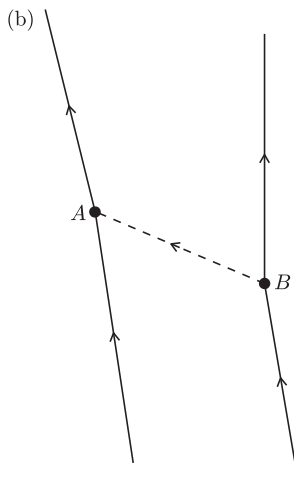
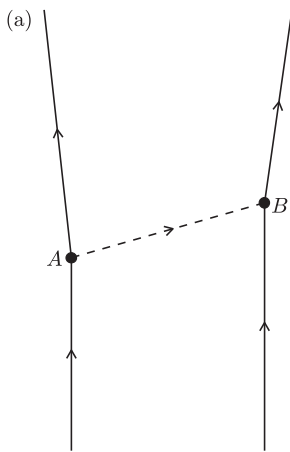
Korzystając z kolei z symetrii części obwodu w kształcie rombu, dostajemy obwód zastępczy:



a stąd znajdujemy poszukiwaną oporność zastępczą

$$R_{AE} = R/4 + R/4 + R/4 + R/4 = R.$$

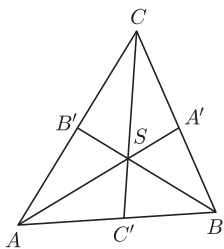
\*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski



Schemat przekazywania cząstki nadświetlnej między Alicją (zdarzenie A) i Bobem (zdarzenie B) w dwóch układach odniesienia różniących się kolejnością oddziaływania cząstki z Alicją i Bobem.

**Odpowiedź na pytanie dlaczego? ze strony 17.**

Dlatego, że dwusieczne kątów trójkąta dzielą płaszczyznę na kąty ostre.



Gdyby  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  były dwusiecznymi kątów trójkąta  $ABC$  i kąt  $A'SB$  byłby rozwarty, to byłoby  $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA = 2(\sphericalangle SAB + \sphericalangle SBA) = 2\sphericalangle A'SB > \pi$ , czyli dwa kąty trójkąta miałyby sumę większą od sumy wszystkich trzech – sprzeczność.

Konstrukcja opisana w artykule daje w przypadku, gdy nie wszystkie kąty są ostre, dwie dwusieczne kątów zewnętrznych.

czas płynie z dołu do góry, a przestrzeń rozciąga się poziomo. Przypuśćmy, że sygnał ten informuje Boba, jakie liczby padły przed momentem w losowaniu totalotka, które odbyło się w pobliżu zdarzenia A. Zgodnie z przewidywaniami teorii względności istnieje inny układ inercjalny – przedstawiony na rysunku (b) – w którym przebieg zdarzeń jest zgoła inny. W tym drugim układzie kolejność zdarzeń ulega odwróceniu, czyli najpierw następuje zdarzenie B, a dopiero po chwili zdarzenie A. Przebieg sytuacji wygląda tak, jakby odbiorca stawał się nadawcą, a nadawca odbiorcą. Abstrahując od tego, jak dziwna byłaby to sytuacja, widzimy, że w tym układzie Bob zna wyniki losowania, jeszcze zanim zostanie o nich poinformowany. A wręcz zanim w ogóle zostanie przeprowadzone losowanie! Fakt ten jest rzeczywiście dziwny, ale fizyka przewidywania przyszłości przecież nie zabrania. Ba, fizyka to właściwie nic innego, jak metoda przepowiadania przyszłości! W końcu prawa fizyki służą właśnie do tego, by przewidywać wyniki eksperymentów naukowych. Zatem widzimy, że możliwość wysyłania nadświetlnej informacji przez Alicję pozwoliłaby odległemu obserwatorowi Bobowi przewidzieć jej przyszłość (definiowaną w pewnych układach odniesienia).

A zatem Bob mógłby w zasadzie użyć drugiego sygnału, by poinformować Alicję o wynikach zbliżającego się u niej losowania. Tego typu możliwość wysyłania informacji wstecz w czasie była dla nas wystarczającym powodem, by odrzucić nadświetlne sygnały precz sprzed naszego zatroskanego oblicza. I jest to standardowy argument, którego używa się, by nadświetlne sygnały w fizyce nie rozważać. Argument ten ma jednak kilka słabości. Zaczniemy od tego, że pierwotnie w spoczywającym układzie odniesienia rozważaliśmy pojedynczy sygnał wysłany z A do B. Natomiast ażeby ukazać paradoks, potrzeba było wprowadzić kolejny sygnał wysłany z B do A, co uczyniliśmy w ruchomym układzie odniesienia. Musimy jednak pamiętać, że nie wolno nam rozważać różnych scenariuszy w różnych układach odniesienia! Jeśli w pierwszym układzie był tylko jeden sygnał, to w drugim również musi być tylko jeden sygnał. Jeśli zaś chcemy, ażeby były dwa sygnały, wówczas oba muszą być obecne w każdym układzie odniesienia, a zatem również w układzie spoczywającym, od którego zaczęliśmy. No i całą historijkę musieliśmy przeanalizować od początku z dwoma sygnałami, a wówczas wcale nie byłoby jasne, czy paradoks w ogóle się pojawia.

Są tu jednak ciekawsze rzeczy, które przeoczyliśmy. Zaczniemy rozumowanie od początku. Pisząc o wysyłanym sygnale, zakładamy dwie rzeczy: istnienie nadświetlnych obiektów, które mogą być emitowane i pochłaniane, oraz to, że Alicja potrafi ich emisję kontrolować. Nie da się przecież tworzyć sygnałów bez możliwości kontroli przesyłanej treści. Jeśli zatem Alicja wysłała zero-jedynkowe sygnały (sygnał jest lub go nie ma), wówczas musi ona umieć emitować ciąg takich sygnałów w kontrolowanych przez siebie chwilach. Założenie, że chwilę emisji nadświetlnych cząstek w pełni kontrolujemy, jest szczególnie interesujące, o czym się za chwilę przekonamy. Wynika z niego, że w linii świata Alicji przebiega jakiś lokalny i kontrolowalny, a zatem deterministyczny proces, który określa chwilę emisji nadświetlnego obiektu, którego używamy do sygnalizacji. Istnieje zatem pewien parametr ukryty (bądź jawny), nazwijmy go  $\lambda$ , którym możemy sterować i od którego uzależniona jest emisja nadświetlnej cząstki w danej chwili. Możemy, na przykład, wyobrazić sobie, że Alicja ma pistolet strzelający takimi cząstkami. W przypadku pociągnięcia za spust ciąg przyczynowo-skutkowy byłby następujący: cząstka opuściła zdarzenie A, bo wybuchła spłonka naboju, bo Alicja nacisnęła spust pistoletu. W tym przypadku nasz parametr  $\lambda$  może odnosić się, na przykład, do reakcji chemicznej zachodzącej w wybuchającej spłonce, którą kontroluje Alicja trzymająca pistolet. Zakładamy ponadto, że odległy odbiorca Bob nic nie wie o parametrze  $\lambda$  i aż do momentu zarejestrowania wystrzelonej przez Alicję cząstki nie ma z nim absolutnie nic wspólnego. Prześledźmy teraz powyższy scenariusz okiem innego obserwatora inercjalnego, którego wersja wydarzeń znajduje się na rysunku (b). Według tego obserwatora emisja ma miejsce w zdarzeniu B, a nie zdarzeniu A! Wszystko wygląda tak, jak gdyby to Bob wysłał nadświetlny sygnał do Alicji (pamiętajmy, że czas płynie na diagramie z dołu do góry)! Zastanówmy się teraz nad następującym pytaniem: co w tym układzie odniesienia spowodowało emisję B? Spora przerwa na zastanowienie. Powód taki nie może być „zlokalizowany” w linii świata poprzedzającej zdarzenie B, bo założyliśmy w układzie spoczywającym, że odbiorca Bob nie wie nic o tym, że ma za moment zostać potraktowany cząstką wystrzeloną przez Alicję. Skoro w pierwszym układzie





**Rozwiązanie zadania F 837.**

W gazie spełniającym równanie stanu gazu doskonałego,  $pV = nRT$  ( $p$  – ciśnienie,  $V$  – objętość,  $n$  – całkowita liczba moli gazu), dźwięk rozchodzi się z prędkością daną równaniem

$$c^2 = \frac{c_p RT}{c_V m},$$

gdzie  $c_p$  i  $c_V$  oznaczają ciepła molowe, odpowiednio w stałej objętości i pod stałym ciśnieniem, a  $m$  masę jednego mola tego gazu. Mieszanina gazów doskonałych spełnia równanie gazu doskonałego, masa i ciepło są tzw. wielkościami ekstensywnymi, a więc odpowiednio wielkość dla mieszaniny to

$$m = x m_A + (1 - x) m_B,$$

$$c_V = x c_{V A} + (1 - x) c_{V B}$$

$$c_p = x c_{p A} + (1 - x) c_{p B}.$$

Ostatecznie więc  $c^2$  wynosi

$$\frac{(x c_{p A} + (1 - x) c_{p B}) RT}{(x c_{V A} + (1 - x) c_{V B})(x m_A + (1 - x) m_B)}$$

Wzór ten bywa w praktyce wykorzystywany do określania zawartości domieszki gazowej. Jest to możliwe, gdy gaz-domieszka ma istotnie różne właściwości od gazu, z którym jest zmieszany (np. CO<sub>2</sub> w azocie).

nic po stronie Boba nie zapowiada zdarzenia B, to nic nie może go również zapowiadać w drugim układzie odniesienia (zasada względności!).

Jest dobrze, ale nie beznadziejnie. Są trzy możliwe rozwiązania tego „problemu”. Po pierwsze, możemy odrzucić możliwość wysyłania nadświetlnych obiektów. Snujemy jednak hipotezę o eksperymencie z neutrinami, który mógłby być przecież poprawny, co zmusza nas do poszukania innej możliwości wykaraskania się z problemów, w które zabrnęliśmy. Są jeszcze dwa wyjścia wymagające zmodyfikowania naszego rozumienia rzeczywistości (żadne jednak niewymagające modyfikacji teorii względności). Jesteśmy przyzwyczajeni do tego, że przyczyny zdarzeń zachodzą w ich przeszłości. Jest to jeden z fundamentów przyczynowości. Jeśli się jednak nad tym zastanowić, to przesłanki tego założenia są kompletnie niejasne. Przecież prawa fizyki pozwalają nam nie tylko przepowiadać przyszłość przy użyciu znanych warunków początkowych, ale także przewidywać przeszłość przy znajomości warunków końcowych! Jeśli znamy chwilową prędkość i położenie lecącego w powietrzu kamienia, możemy przecież przewidzieć, gdzie znajdzie się on za moment, ale także ustalić, gdzie znajdował się przed chwilą. Tak czy inaczej, zazwyczaj przyjmuje się, że zdarzenia determinowane są w przeszłości. Jednakże, aby wskazać przyczynę zdarzenia B w ruchomym układzie odniesienia, moglibyśmy zmodyfikować tę zasadę, przyjmując, że przyczyna zdarzenia B w ruchomym układzie odniesienia znajduje się w przyszłości, w odległym zdarzeniu A! Faktycznie, gdyby eksperyment z neutrinami był prawdziwy, musielibyśmy przyjąć, że przyczyny pewnych zdarzeń dopiero nastąpią, a nie, jak jesteśmy przyzwyczajeni, już nastąpiły. Nasze rozumienie świata musiałoby zostać gruntownie zreformowane, ale, jeszcze raz podkreślmy, prawa transformacyjne, stanowiące treść szczególnej teorii względności, nie uległyby najmniejszej zmianie. Nie jest to zresztą pierwsza próba zmodyfikowania fizyki w ten sposób. Dawno temu podobną hipotezę w odniesieniu do elektrodynamiki klasycznej sformułował Dirac. A zainspirowani tym pomysłem Feynman i Wheeler rozwinęli go w formie tzw. teorii potencjałów opóźniono-przyspieszonych. Balony próbne zostały więc już w tę stronę wypuszczone i teorii względności nikt modyfikować wcale nie musiał. Zatem o co było aż tyle krzyku?

Zauważmy jednak, że hipoteza o przyczynie zdarzenia B w przyszłości (a w dodatku poza jego stożkiem świetlnym!) zaburza symetrię pomiędzy dwoma rozważanymi układami odniesienia. Bowiem w pierwszym układzie wszystkie przyczyny zdarzeń są w przeszłości, w drugim zaś mogą być też w przyszłości. Dla ruchomego obserwatora przyglądającego się Bobowi (i jego linii świata), którego punkt widzenia ilustruje rysunek (b), zdarzenie B będzie zupełnie zaskakujące: nagle dojdzie do wystrzelenia sygnału przez Boba w sposób kompletnie (w przeszłości) niezapowiedziany. Będzie to zdarzenie czysto spontaniczne, niemające w lokalnej przeszłości żadnej przyczyny. Tu pojawia się jeszcze jedno możliwe wyjaśnienie, moim zdaniem o wiele ciekawsze. Jeśli nie chcemy w żaden sposób wyróżniać jakiegokolwiek układu odniesienia, musielibyśmy stwierdzić, że emisja nadświetlnego obiektu w sposób nieuchronny musi być równie spontaniczna w każdym układzie odniesienia. Mogłaby przecież zawsze dziać się bez żadnej przyczyny, w sposób nieprzewidywalny! Dokładnie tak, jak zgodnie z prawami mechaniki kwantowej nieprzewidywalna jest chwila zarejestrowania wyemitowanego przez wzbudzony atom fotonu. Nadświetlne cząstki mogłyby zatem istnieć, pod warunkiem że emitowane byłyby w losowych, niemożliwych do ścisłego przewidzenia chwilach. Zwróćmy uwagę, że źródło takich cząstek marnie nadawałoby się do komunikacji, gdyż nie moglibyśmy go kontrolować. A zgodnie z tym, co ustaliliśmy wcześniej, niemożność kontroli źródła skutecznie uniemożliwia komunikację za jego pomocą. Nie byłoby zatem żadnego „paradoksu” formułowanego, by podważyć możliwość istnienia nadświetlnych cząstek.

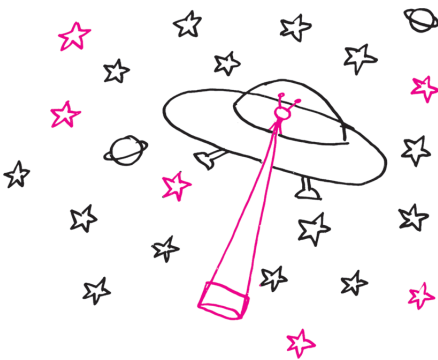
Ostatni scenariusz jest jednak inny, niż wynikałoby z omawianego eksperymentu, w którym emisja neutrin z rozpędzonej wiązki protonów jest dobrze kontrolowana i może zostać zainicjowana w dowolnie wybranym momencie. Wspominamy o tym wariantcie dlatego, że, być może, kiedyś nadświetlne cząstki zostaną odkryte i wówczas, zgodnie z naszym przewidywaniem, powinny one powstawać i ginąć w sposób losowy i niekontrolowany. A zatem w sposób dokładnie taki, w jaki zachowują się znane nam cząstki elementarne. Czyżby zatem istniał jakiś nieznan, fundamentalny łącznik pomiędzy dwiema znanymi nam teoriami: teorią względności i teorią kwantów?

# Diagramy Woronoja, czyli co widać z góry?

Mirosław KOWALUK\*

Georgij Woronoj (1868–1908) urodził się na Ukrainie, studiował w Sankt Petersburgu, a znaczną część swojego krótkiego życia spędził w Warszawie, wykładając na tutejszym Uniwersytecie.

Wprowadzając w naszych rozważaniach ograniczenia do przestrzeni euklidesowej, ale diagram Woronoja jest pojęciem znacznie szerszym – można go zdefiniować w dowolnej metryce  $L_p$  dla  $1 \leq p \leq \infty$ , w wyższych wymiarach, dla centrów będących odcinkami, okręgami, punktami z wagami mającymi wpływ na odległość itp.

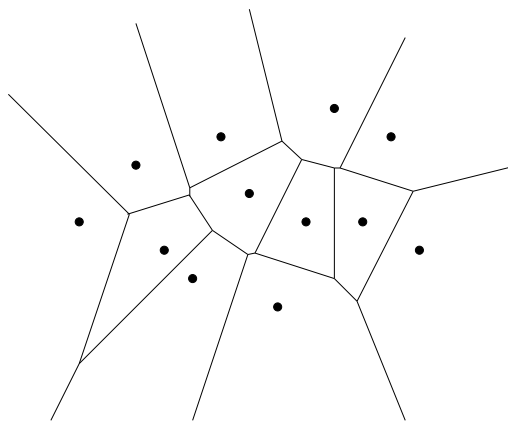


Kiedy wędrujemy po pustyni i pocujemy zmęczenie, poszukujemy najbliższej oazy, w której moglibyśmy zregenerować siły. Jeśli mamy szczęście, możemy spotkać na pustyni beduina, który wskaże nam właściwy kierunek do oazy. Czy rzeczywiście właściwy?

Gdybyśmy mogli unieść się w górę, zobaczylibyśmy interesujące nas obiekty znajdujące się w okolicy. Jak szybko określić, który z nich jest najbliższy? W tym celu moglibyśmy wykorzystać diagram Woronoja.

Załóżmy, że obiektom, którymi jesteśmy zainteresowani, odpowiada zbiór  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  punktów na płaszczyźnie, które będziemy nazywać *centrami*. Odległość między punktami  $p, q \in P$ ,  $p = (x, y)$ ,  $q = (x', y')$ , definiujemy jako  $d(p, q) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ .

**Definicja 1.** Dla każdego centrum  $p_i \in P$  **obszar Woronoja** ( $V(p_i)$ ) składa się z tych punktów płaszczyzny, dla których żadne inne centrum nie znajduje się bliżej niż  $p_i$ , tzn.  $V(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \forall_{j \neq i} d(x, p_j) \geq d(x, p_i)\}$ . Punkty należące do brzegów obszarów Woronoja tworzą **diagram Woronoja**.



Rys. 1. Diagram Woronoja.

Zauważmy, że centrum zawsze należy do odpowiadającego mu obszaru. Co więcej, do każdego obszaru należy tylko jedno centrum. Granicę między obszarami dla dwóch centrów  $p$  i  $q$  wyznacza symetralna odcinka  $pq$ . Zatem obszar Woronoja dla  $p_i$  jest częścią wspólną półpłaszczyzn wyznaczanych przez symetralne odcinków  $p_i p_j$  (dla  $i \neq j$ ) i zawierających  $p_i$ . Stąd wniosek, że obszary Woronoja są wielokątami wypukłymi (ograniczonymi lub nie), a krawędzie diagramu Woronoja są odcinkami lub półprostymi. Liczba krawędzi diagramu Woronoja jest liniowa względem liczby centrów, co uzasadnimy nieco dalej.

Wierzchołki diagramu Woronoja znajdują się w tej samej odległości od co najmniej trzech najbliższych centrów. Aby uprościć dalsze rozważania, przyjmijmy, że wierzchołek diagramu jest częścią wspólną dokładnie trzech obszarów Woronoja. Wtedy centra obszarów mających wspólny wierzchołek wyznaczają trójkąt. Ponieważ przeciwległe wierzchołki czworokąta nie mogą wyznaczać dwóch par sąsiadujących obszarów Woronoja, więc dwie różne krawędzie takich trójkątów nie mają innych punktów wspólnych niż końce. Wszystkie zdefiniowane w ten sposób trójkąty tworzą tzw. triangulację Delaunay.

**Definicja 2.** **Triangulacja Delaunay** to graf dualny do diagramu Woronoja. Wierzchołki triangulacji (centra obszarów) odpowiadają ścianom diagramu Woronoja (obszarami Woronoja). Natomiast odpowiednikami krawędzi triangulacji są krawędzie diagramu.

Zauważmy, że odpowiadające sobie krawędzie nie muszą się przecinać.



Pominięcie założenia, że wierzchołek diagramu jest częścią wspólną dokładnie trzech obszarów, może w niektórych przypadkach prowadzić jedynie do niejednoznaczności rozwiązań, czego chcieliśmy uniknąć w tym artykule.

Boris Delaunay (1890–1980) był Rosjaninem, a nazwisko odziedziczył po francuskich przodkach.

\*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

### Inne rozwiązanie zadania M 1389

W *Delcie* 6/2013 opublikowane zostało interesujące zadanie **M 1389** wraz z ciekawym rozwiązaniem. Chciałbym zaproponować inne rozwiązanie tego zadania.

**M 1389.** Dana jest liczba wymierna  $a_1 = 0,(b_1b_2 \dots b_n)$ , w której zapisie dziesiętnym blok cyfr  $b_1b_2 \dots b_n$  powtarza się okresowo po przecinku. Rozważmy liczby

$$\begin{aligned} a_2 &= 0,(b_2b_3 \dots b_nb_1), \\ a_3 &= 0,(b_3b_4 \dots b_nb_1b_2), \dots, \\ a_n &= 0,(b_nb_1 \dots b_{n-1}) \end{aligned}$$

powstałe z  $a_1$  przez cykliczne przesunięcia cyfr w bloku. Udowodnić, że

$$b_1 + \dots + b_n = 9(a_1 + \dots + a_n).$$

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że

$$\begin{aligned} (1) \quad 10a_1 &= 10 \cdot 0,(b_1b_2 \dots b_n) = \\ &= 10 \cdot 0,b_1(b_2 \dots b_nb_1) = \\ &= b_1,(b_2b_3 \dots b_nb_1) = \\ &= b_1 + 0,(b_2b_3 \dots b_nb_1). \end{aligned}$$

Zatem  $10a_1 = b_1 + a_2$ .

Analogicznie dostajemy

$$(2) \div (n-1) \quad 10a_i = b_i + a_{i+1}$$

oraz

$$(n) \quad 10a_n = b_n + a_1.$$

Dodając stronami równości (1)  $\div$  (n), otrzymujemy

$$\begin{aligned} 10(a_1 + a_2 + \dots + a_n) &= \\ = b_1 + b_2 + \dots + b_n + (a_1 + a_2 + \dots + a_n), \end{aligned}$$

a stąd

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = 9(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Marian MACIOCHA



### Rozwiązanie zadania M 1393.

Oznaczmy przez  $\sigma_k$  operację polegającą na zmianie znaku na  $k$ -tej współrzędnej

$$\begin{aligned} \sigma_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) &= \\ = (x_1, \dots, -x_k, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla dowolnego punktu  $x \in \{-1, 1\}^n$  zachodzi równość

$$f(x) - f(\sigma_k(x)) = 2a_k x_k.$$

Z drugiej strony, skoro  $f$  przyjmuje tylko wartości 1 i  $-1$ , to ta różnica może przyjmować tylko trzy wartości:  $-2, 0$  i  $2$ . Zatem dla tych  $a_k$ , które są niezerowe, musi być  $a_k \in \{-1, 1\}$ .

Wykażemy teraz, że funkcja  $f$  ma dokładnie jeden niezerowy współczynnik. Załóżmy przeciwnie, że ma przynajmniej dwa, np.  $a_1$  i  $a_2$ . Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że  $a_1 = 1 = a_2$ . Wówczas, oznaczając przez  $c = a_3 + \dots + a_n$ , mamy

$$f(1, 1, 1, \dots, 1) = 2 + c,$$

$$f(1, -1, 1, \dots, 1) = c,$$

$$f(-1, -1, 1, \dots, 1) = -2 + c.$$

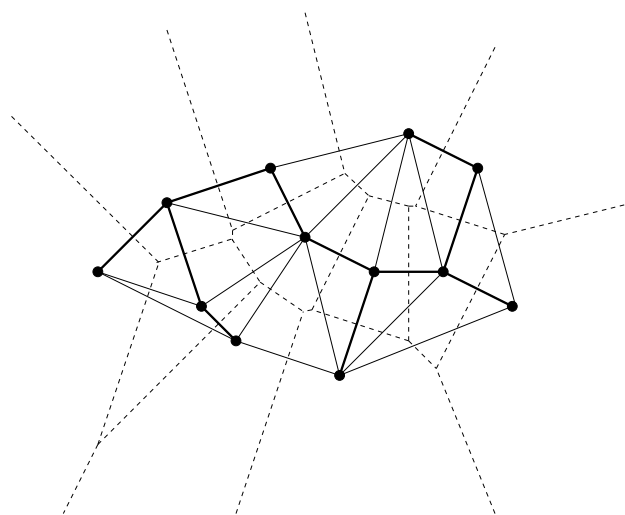
Innymi słowy,  $f$  przyjmuje w tych trzech punktach trzy różne wartości, co przeczy temu, że wartości  $f$  należą do zbioru dwuelementowego. Zatem  $f$  jest postaci  $\pm x_k$  dla pewnego  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

Triangulacja Delaunay jest grafem planarnym, a krawędzie ściany zewnętrznej wyznaczają otoczkę wypukłą zbioru  $P$ , tzn. brzeg najmniejszego zbioru wypukłego zawierającego  $P$ . Innymi słowy, wierzchołkami tej otoczki wypukłej są centra nieograniczonych obszarów Woronoja zbioru  $P$ . Z własności grafów planarnych (twierdzenie Eulera) otrzymujemy, że liczba krawędzi triangulacji Delaunay jest liniowa względem liczby centrów. To pokazuje zarazem, że liczba krawędzi diagramu Woronoja jest liniowa względem liczby centrów.

Wierzchołki trójkąta należącego do triangulacji Delaunay wyznaczają okrąg o środku w wierzchołku diagramu Woronoja (gdyby na okręgu znajdowało się więcej centrów z  $P$ , to wyznaczany przez nie wielokąt moglibyśmy sstriangulować na różne sposoby). Spróbujmy uogólnić ten fakt.

**Twierdzenie 1.** *Odcinek  $\overline{p_i p_j}$ , gdzie  $p_i, p_j \in P$ , należy do triangulacji Delaunay wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje okrąg przechodzący przez  $p_i$  i  $p_j$ , który nie zawiera w swoim wnętrzu punktów z  $P$ .*

*Dowód.* Implikacja w prawą stronę wynika z konstrukcji triangulacji Delaunay. Musimy wykazać implikację w przeciwnym kierunku. Środek okręgu przechodzącego przez  $p_i$  i  $p_j$ , który nie zawiera w swoim wnętrzu punktów z  $P$ , z definicji należy do krawędzi diagramu Woronoja oddzielającej  $V(p_i)$  i  $V(p_j)$ . Zatem odcinek  $\overline{p_i p_j}$  jest krawędzią triangulacji Delaunay.  $\square$



Rys. 2. Triangulacja Delaunay i euklidesowe minimalne drzewo rozpinające.

Pokażmy jeszcze jedną ciekawą własność triangulacji Delaunay.

**Definicja 3.** **Euklidesowe minimalne drzewo rozpinające** dla zbioru punktów  $P$ , które oznaczamy przez  $\text{EMST}(P)$ , jest drzewem łączącym wszystkie punkty z  $P$  i minimalizującym całkowitą długość krawędzi.

**Twierdzenie 2.**  $\text{EMST}(P)$  jest podgrafem triangulacji Delaunay zbioru  $P$ .

*Dowód.* Załóżmy, że teza nie jest prawdziwa. Niech  $ab$  będzie krawędzią  $\text{EMST}(P)$ , która nie należy do triangulacji Delaunay zbioru  $P$ . Wtedy, zgodnie z poprzednim twierdzeniem, okrąg o średnicy  $\overline{ab}$  zawiera w swoim wnętrzu punkt  $p \in P$ . Odcinki  $\overline{ap}$  i  $\overline{bp}$  są krótsze od  $\overline{ab}$ . Zatem krawędź  $\overline{ab}$  możemy zastąpić jednym z nich, nie niszcząc spójności grafu i zmniejszając całkowitą długość jego krawędzi. Jest to sprzeczne z założeniem, że  $ab \in \text{EMST}(P)$ .  $\square$

W obliczeniach numerycznych ma zastosowanie jeszcze jedna, znacznie trudniejsza do udowodnienia, własność triangulacji Delaunay. Uporządkujmy niemalejąco kąty wszystkich trójkątów tworzących dowolną triangulację  $T$  zbioru  $P$ . Następnie uporządkujmy leksykograficznie wszystkie triangulacje zbioru  $P$  (tzn. dla  $T_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  oraz  $T_j = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ , zachodzi  $T_i < T_j \Leftrightarrow \exists_{k \in \{1, \dots, m\}} (\forall_{h < k} \alpha_h = \beta_h \wedge \alpha_k < \beta_k)$  i  $T_i = T_j \Leftrightarrow \forall_{k \in \{1, \dots, m\}} \alpha_k = \beta_k$ ). Wtedy triangulacja Delaunay będzie ostatnim elementem tego porządku, tzn. triangulacja ta maksymalizuje minimalny kąt w tworzących ją trójkątach.

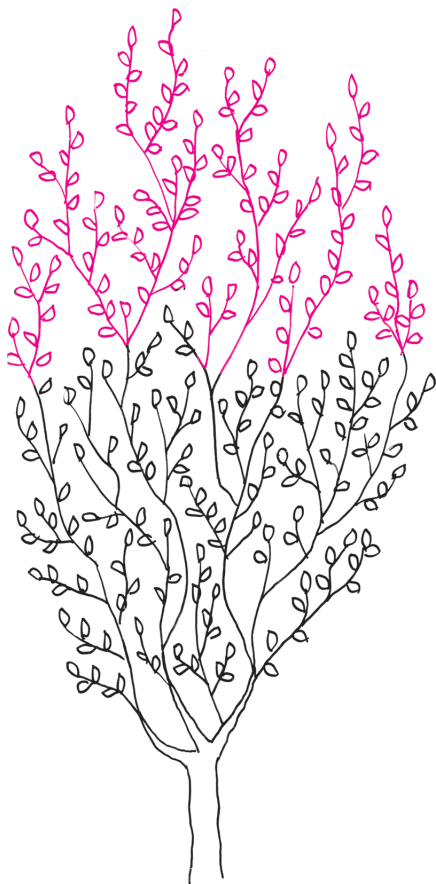
**Odpowiedź na pytanie czy zawsze?  
ze strony 17.**

Zawsze, choć konstrukcja może się nie udać, gdy dwie z prostych  $k, l, m$  są prostopadłe, a my wybierzemy prostą  $b$  prostopadłą do trzeciej z nich. Ale wybór jako  $b$  prostej prostopadłej do jednej z prostych prostopadłych pozwala konstrukcję wykonać.

Przyczyna opisanego tu niepowodzenia polega na tym, że gdy dwie symetralne są prostopadłe, to trójkąt jest prostokątny i jeden z jego boków przechodzi przez punkt przecięcia symetralnych.

Wiedząc, że diagram Woronoja i triangulacja Delaunay mają tyle interesujących własności, spróbujmy skonstruować te grafy. Oczywiście, na mocy ich dualności wystarczy znaleźć tylko jeden z nich. Aby wyznaczyć diagram Woronoja, można zastosować pewne standardowe metody, np. „dziel i zwyciężaj” lub zamiatanie.

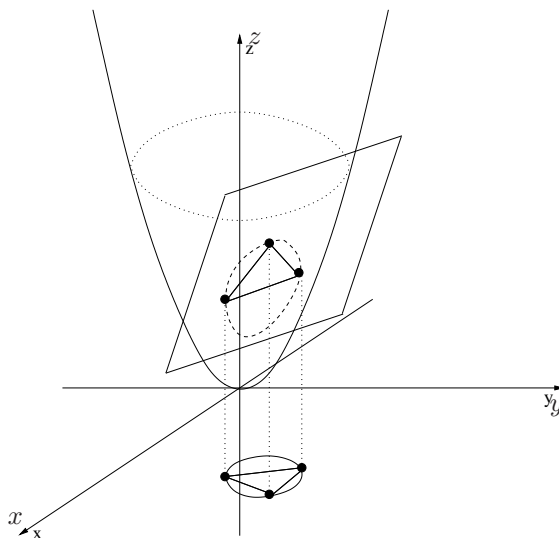
Ale my znów spróbujemy unieść się w górę. Mianowicie, załóżmy, że punkty ze zbioru  $P$  należą do płaszczyzny  $z = 0$ . Zrzućmy zbiór  $P$  równoległe do osi  $z$  na paraboloidę obrotową  $z = x^2 + y^2$ . Zauważmy, że obrazy punktów należących do okręgu zawartego w płaszczyźnie  $z = 0$  będą współpłaszczyznowe. Rzeczywiście, jeśli punkt  $(x, y)$  spełnia równanie  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , to w przestrzeni trójwymiarowej punkt  $(x, y, x^2 + y^2)$  należy do płaszczyzny  $z = 2ax + 2by + r^2 - a^2 - b^2$ . Zatem rzuty okręgów opisanych na trójkątach triangulacji Delaunay wyznaczają płaszczyzny przecinające paraboloidę i zawierające rzuty wierzchołków odpowiednich trójkątów. Co więcej, na mocy wypukłości paraboloidy obrotowej płaszczyzny te nie rozdzielają obrazów punktów z  $P$ , gdyż wnętrza okręgów opisanych na trójkątach triangulacji Delaunay (których rzuty są odcinane z paraboloidy przez omawiane płaszczyzny) nie zawierają punktów z  $P$ . Zatem rzuty ścian triangulacji Delaunay są ścianami otoczki wypukłej obrazów punktów z  $P$ , a rzuty krawędzi triangulacji są krawędziami otoczki wypukłej.



Gdyby wymyślenie takiego algorytmu „dziel i zwyciężaj” sprawiło komuś trudność, to jego opis można znaleźć np. w książce F.P. Preparaty i M.I. Shamosa *Geometria obliczeniowa. Wprowadzenie*.



Jeśli  $z = p_v(x, y)$  jest równaniem płaszczyzny stycznej do paraboloidy w punkcie będącym obrazem punktu  $v \in P$ , to brzeg  $W$  tworzą punkty ze zbioru  $\{(x, y, z) : z = \max_{v \in P} \{p_v(x, y)\}\}$ .



Rys. 3. Rzut trójkąta triangulacji Delaunay na paraboloidę.

Zatem nie pozostaje nam nic innego, jak znaleźć otoczkę wypukłą zbioru punktów w przestrzeni trójwymiarowej. Możemy to zrobić, stosując np. metodę „dziel i zwyciężaj”. Złożoność obliczeniowa tego algorytmu wynosi  $O(n \log n)$ . Następnie rzutujemy z powrotem na płaszczyznę  $z = 0$  ściany otoczki wypukłej ograniczające ją od dołu i w ten sposób otrzymujemy triangulację Delaunay zbioru  $P$ . Ponieważ wszystkie rzutowania możemy wykonać w czasie  $O(n)$ , więc całkowita złożoność tego algorytmu wynosi  $O(n \log n)$ . Jest on więc nie tylko prosty, ale też efektywny.

**Algorytm**

**Dane:** Zbiór  $n$  punktów  $P$  na płaszczyźnie  $z = 0$ .

**Wynik:** Triangulacja Delaunay zbioru  $P$ .

Zrzućmy zbiór  $P$  równoległe do osi  $z$  na paraboloidę  $z = x^2 + y^2$ ;

Znajdź otoczkę wypukłą zbioru obrazów punktów z  $P$ ;

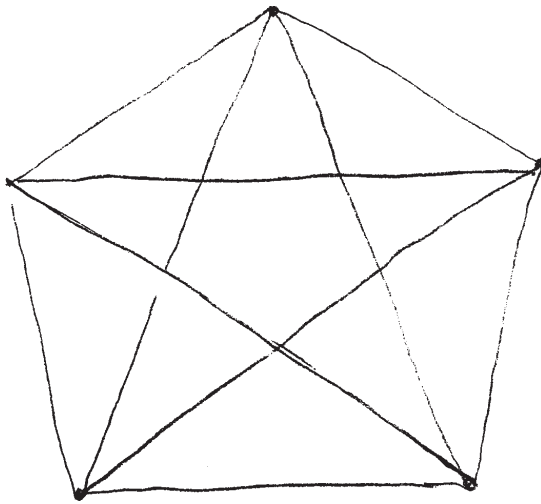
Zrzućmy prostopadłe ściany otoczki wypukłej ograniczające ją od dołu na płaszczyznę  $z = 0$ ;

**return** Graf powstały na płaszczyźnie  $z = 0$ ;

Można również wykazać, że rzut prostopadły na płaszczyznę  $z = 0$  minimalnego wielościanu wypukłego  $W$  zawierającego paraboloidę  $z = x^2 + y^2$ , którego ściany zawierają się w płaszczyznach stycznych do tej paraboloidy w obrazach punktów z  $P$ , jest diagramem Woronoja zbioru  $P$ . Dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

## Lekcja rysunku (7): Dwunastościan gwiaździsty mały

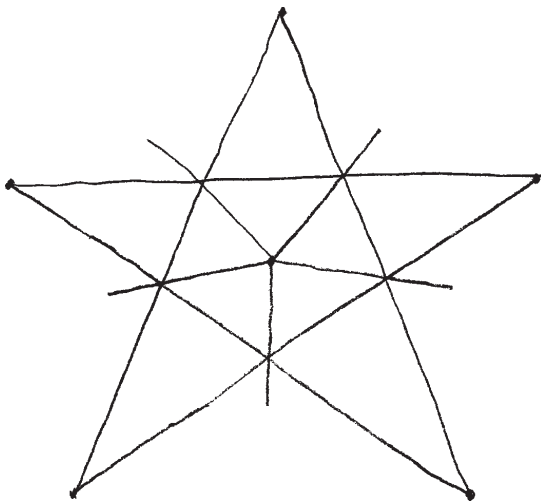
Dwunastościan gwiaździsty mały wygląda bardzo ładnie, jakby ktoś dokleił odpowiednie piramidy do dwunastościanu foremego. Jego ścianami są pięciokąty gwiaździste przenikające się i, jak sugeruje nazwa, powinno ich być 12. Czy da się to narysować? Naturalnie, przecież rysunek to skończony ciąg kresek...



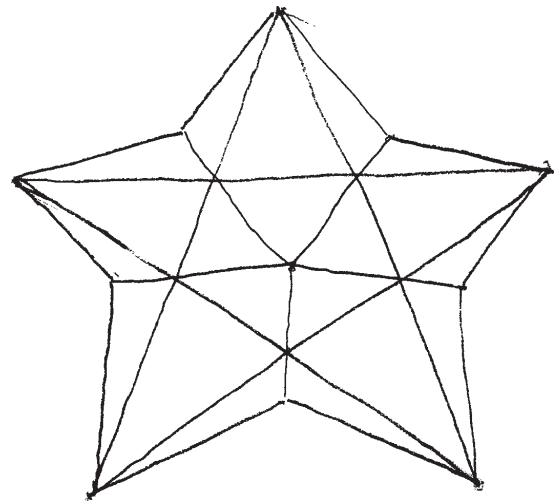
Rys. 1

Zacznijmy od narysowania pomocniczo, a więc delikatnie, pięciokąta „prawie” foremego. Narysujmy w nim przekątne, czyli pentagram (rys. 1). Dla nas w dalszym ciągu ważny będzie właśnie ten pentagram. On jest podstawą do narysowania dwunastościanu, dlatego zapominamy o pierwotnym pięciokącie. Służył on tylko do narysowania w miarę foremego pentagramu.

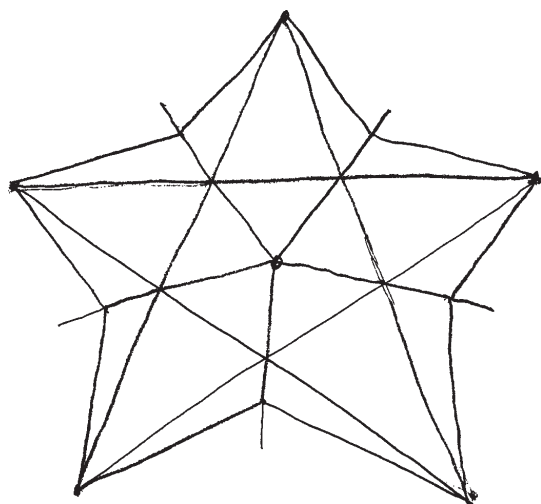
Teraz mniej więcej w środku pentagramu wybierzmy punkt i połączmy go z wierzchołkami wewnętrznego pięciokąta. Jest to ważny moment decydujący o całości rysunku. Po przedłużeniu będą to ważne dla rysunku krawędzie innych ścian. Przedłużmy nieco poza pentagram każdy z tych odcinków (rys. 2), a następnie sąsiednie wierzchołki pentagramu połączmy z wystającymi końcami przedłużonych odcinków, tworząc takie „ptaszki” (rys. 3).



Rys. 2



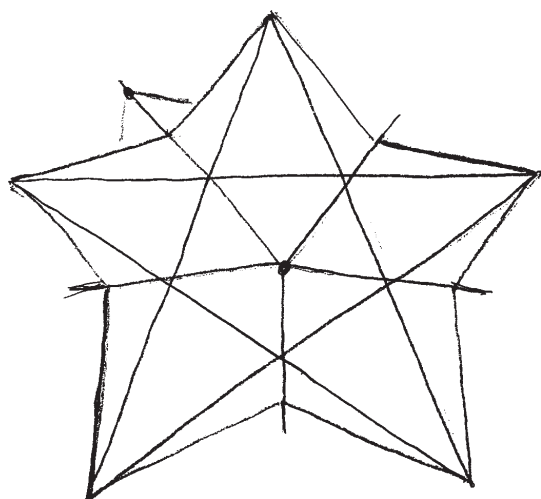
Rys. 3



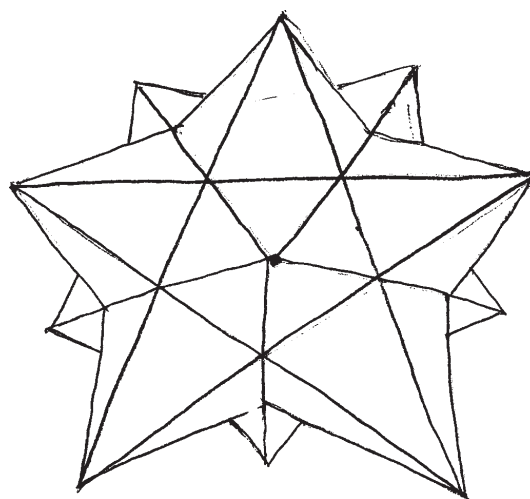
Rys. 4

Znów odrobinę przedłużamy wyprowadzone ze środka pentagramu odcinki (rys. 4).

Aby zakończyć rysunek, musimy na nowych przedłużeniach dorysować „dzióbki”. W zasadzie możemy je dorysowywać uznaniowo, choć w rzeczywistości powstają one z przedłużenia odpowiednich odcinków dorysowywanych „ptaszków”. Dokładniej, z dwóch sąsiednich „ptaszków” wybieramy odcinki, których przedłużenia przetną wyróżnione wcześniej przedłużenie (rys. 5). Wszystkie trzy powinny się przeciąć w jednym punkcie, ale ze względu na brak precyzji w rysunku odręcznym mogą się minąć. Postarajmy się więc przynajmniej, żeby dorysowywane odcinki „dzióbek” były równoległe do odpowiednich odcinków „ptaszków” (rys. 6). Dwunastościan gwiaździsty mały gotowy.

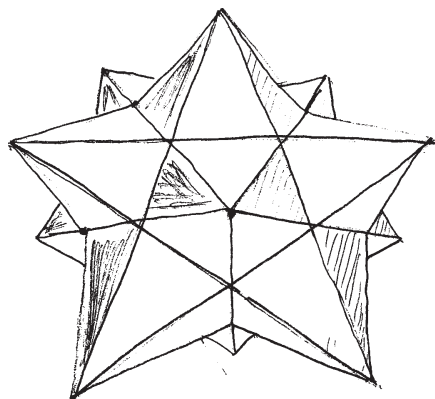


Rys. 5

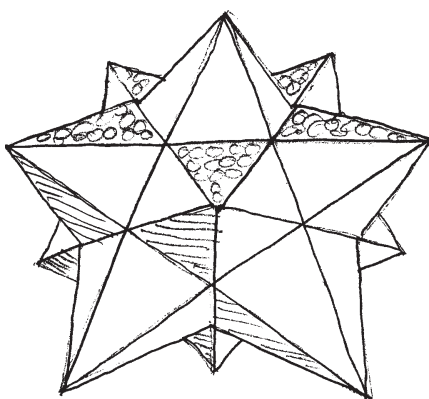


Rys. 6

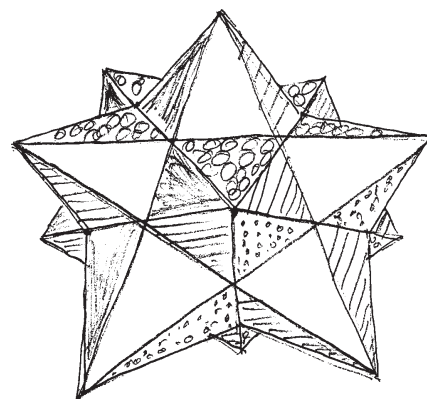
Dla wzmocnienia efektu dobrze jest pokolorować odpowiednie ściany-pentagramy. Sugestia jest taka, żeby zacząć od kolorowania trójkątów wewnątrz wyjściowego pentagramu (rys. 7, 8). Każdy z nich jest ramieniem innej gwiazdy pięcioramiennej. Następnie trzeba się przyglądać, jak układają się przedłużenia (rys. 9).



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

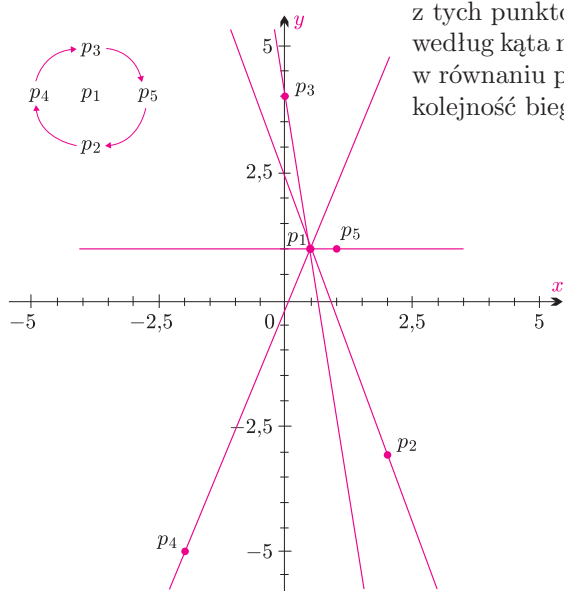
*Pisał i rysował Zdzisław POGODA*

Artykuł powstał na podstawie tekstu autora w książce *W poszukiwaniu wyzwań. Wybór zadań z konkursów programistycznych Uniwersytetu Warszawskiego*.

Przykłady problemów, w których należy wykonać sortowanie względem każdego punktu, można znaleźć np. w *Delcie* 4/2013 (zliczanie czworokątów wypukłych w Informatycznym Kąciku Olimpijskim) i 5/2013 (problem 3POINTS ONLINE w artykule o problemach 3SUM-trudnych).

Jedną z najczęściej wykonywanych operacji w geometrii obliczeniowej jest sortowanie biegunowe (zwane też kątowym) zbioru  $n$  punktów na płaszczyźnie względem wybranego punktu. Innymi słowy, chcemy uporządkować punkty  $p_1, \dots, p_n$  według współrzędnej kątowej w układzie biegunowym zaczepionym w wybranym punkcie  $p$ . Stosując jeden z efektywnych algorytmów sortowania, operację tę można zrealizować w czasie  $O(n \log n)$ . W wielu zastosowaniach musimy jednak pójść o krok dalej i wyznaczyć uporządkowanie biegunowe punktów  $p_1, \dots, p_n$  najpierw w układzie biegunowym zaczepionym w  $p_1$ , potem zaczepionym w  $p_2$  itd. Mamy zatem do wykonania  $n$  sortowań, co łącznie możemy zrealizować w czasie  $O(n^2 \log n)$ . Okazuje się jednak, że istnieje algorytm pozwalający wyznaczyć wszystkie potrzebne porządki biegunowe w czasie  $O(n^2)$ . Jest on ciekawy, jednak dosyć trudny – w tym artykule przedstawimy szkic tego algorytmu.

**Punkty i proste.** Pomyślmy o zbiorze punktów  $p_1, \dots, p_n$  na płaszczyźnie. Wybierzmy jeden z nich, na przykład  $p_1$ . Poprowadźmy proste przez  $p_1$  tak, by połączyć go ze wszystkimi pozostałymi punktami  $p_2, \dots, p_n$  (rys. 1). Każdemu z tych punktów odpowiada jedna prosta. Gdybyśmy umieli posortować te proste według kąta nachylenia lub, inaczej mówiąc, według współczynnika kierunkowego  $a$  w równaniu prostej  $y = ax + b$ , to takie uporządkowanie pozwoliłoby nam uzyskać kolejność biegunową punktów  $p_2, \dots, p_n$  w układzie o środku w  $p_1$ .



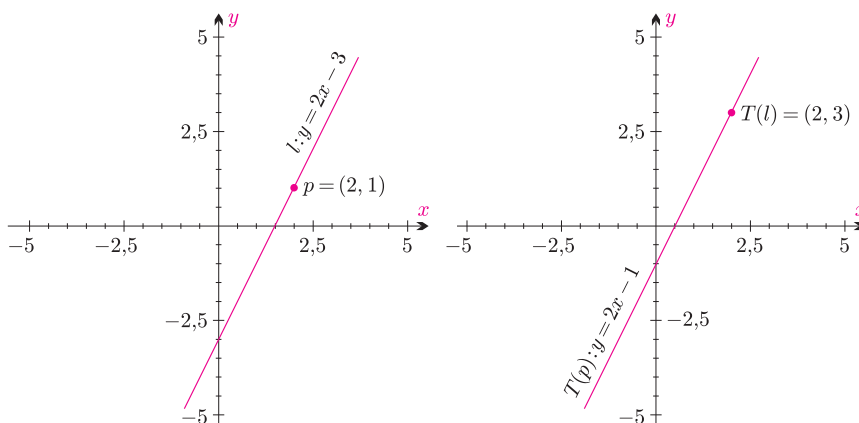
Rys. 1. Proste z  $p_1$  oraz porządek biegunowy punktów względem  $p_1$ .

Spójrzmy teraz na wszystkie proste przechodzące przez pary punktów ze zbioru  $p_1, \dots, p_n$ . Jest ich nie więcej niż  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Jeśli uda nam się skonstruować algorytm, który dla każdego z punktów posortuje  $n - 1$  przechodzących przez niego prostych w sumarycznym czasie lepszym niż  $O(n^2 \log n)$ , to dostaniemy lepsze rozwiązanie całego zadania. Algorytm nie może jednak działać szybciej niż  $O(n^2)$ , bo taka jest liczba prostych, które ma posortować. Okazuje się, że algorytm działający w czasie kwadratowym istnieje i opiera się na bardzo ciekawej konstrukcji myślowej zwanej dualizacją.

**Dualizacja.** Wyobraźmy sobie przekształcenie geometryczne  $T$ , które punktowi  $p$  przyporządkowuje prostą  $T(p)$ , a prostej  $l$  punkt  $T(l)$  w następujący sposób:

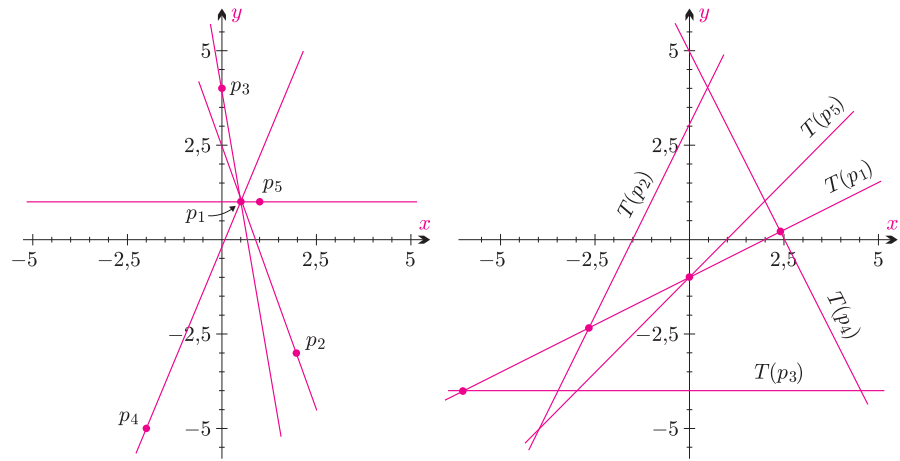
$$p = (a, b) \mapsto T(p) : y = ax - b, \quad l : y = kx + d \mapsto T(l) = (k, -d),$$

czyli punktowi o współrzędnych  $(a, b)$  odpowiada prosta o równaniu  $y = ax - b$ , a prostej o równaniu  $y = kx + d$  odpowiada punkt o współrzędnych  $(k, -d)$ . Punkty i proste oraz ich obrazy leżą w płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ . Płaszczyznę, z której bierzemy argumenty przekształcenia  $T$ , nazywamy przestrzenią pierwotną, natomiast płaszczyznę, w której znajdują się jego wartości – przestrzenią dualną. Opisane przekształcenie ma bardzo ciekawą właściwość: punkt  $p$  leży na prostej  $l$  wtedy i tylko wtedy, gdy prosta  $T(p)$  przechodzi przez punkt  $T(l)$ .



Rys. 2. Przestrzeń pierwotna (po lewej) oraz odpowiadająca jej przestrzeń dualna (po prawej).

\*firma Codility



Rys. 3. Wszystkie proste z rysunku 1.

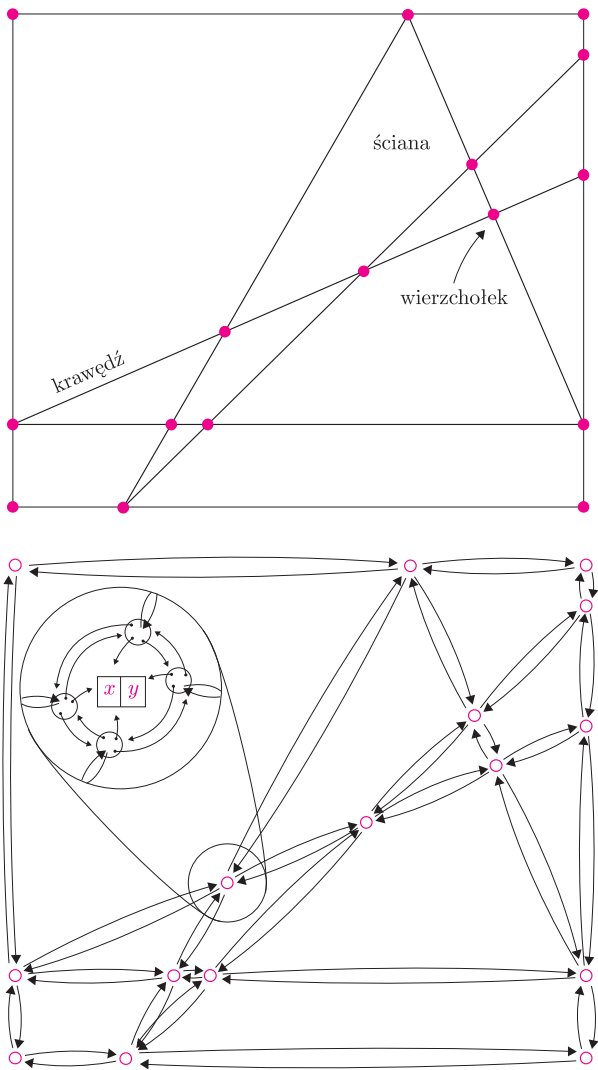
Zbiór punktów  $p_1, \dots, p_n$  oraz prostych łączących je w pary możemy odwzorować w zbiór prostych  $T(p_1), \dots, T(p_n)$ . W przestrzeni dualnej proste, które łączą np.  $p_1$  z pozostałymi punktami, odpowiadają punktom przecięcia prostej  $T(p_1)$  z prostymi  $T(p_2), \dots, T(p_n)$ . Od tej własności jest jednak mały wyjątek. Gdy pewne punkty  $p_i$  i  $p_j$  mają tę samą pierwszą współrzędną, to w przestrzeni dualnej proste  $T(p_j)$  oraz  $T(p_i)$  będą równoległe. Taką sytuacją zajmiemy się jednak za chwilę.

Dotarliśmy zatem do następującego problemu. Danych jest  $n$  prostych na płaszczyźnie. Dla każdej prostej należy obliczyć, w jakiej kolejności (względem pierwszej współrzędnej) będą się z nią przecinały pozostałe proste. Z konstrukcji przestrzeni dualnej wynika, że żadna prosta nie będzie pionowa. Znając porządek przecięć dla prostej  $T(p)$  w przestrzeni dualnej, możemy odtworzyć porządek prostych przechodzących przez punkt  $p$  w przestrzeni pierwotnej, a z niego porządek biegunowy wszystkich punktów względem  $p$ .

Jak wykonać ostatni z tych kroków? Wystarczy dwa razy przejrzeć proste w niemalejącej kolejności współczynników kierunkowych i przy pierwszym przejściu wypisać tylko punkty leżące na lewo od  $p_1$  (tj. mające mniejszą pierwszą współrzędną), a przy drugim przejściu – wypisać pozostałe. Musimy jeszcze osobno rozważyć wszystkie punkty mające tę samą pierwszą współrzędną co  $p_1$ , jednak bardzo łatwo możemy umieścić je w odpowiednim miejscu w porządku biegunowym wokół  $p_1$ . Ten proces powtarzamy dla każdego punktu wśród  $p_1, \dots, p_n$ .

**Wyznaczanie przecięć prostych.** Spójrzmy na rysunek 4. Przedstawia on strukturę danych, która reprezentuje układ odcinków stykających się jedynie końcami. Co więcej, każdy koniec odcinka jest jednocześnie końcem jakiegoś innego odcinka. Każdy punkt styku reprezentujemy za pomocą listy cyklicznej. Element listy odpowiada końcowi odcinka i oprócz wskaźników do następnika i poprzednika zawiera także wskaźnik do elementu innej listy, który reprezentuje drugi koniec tego samego odcinka. Ponadto elementy listy reprezentującej punkt styku zawierają jego współrzędne. Kolejność elementów na liście jest istotna i musi odpowiadać kolejności występowania odcinków na płaszczyźnie, na przykład być zgodna z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

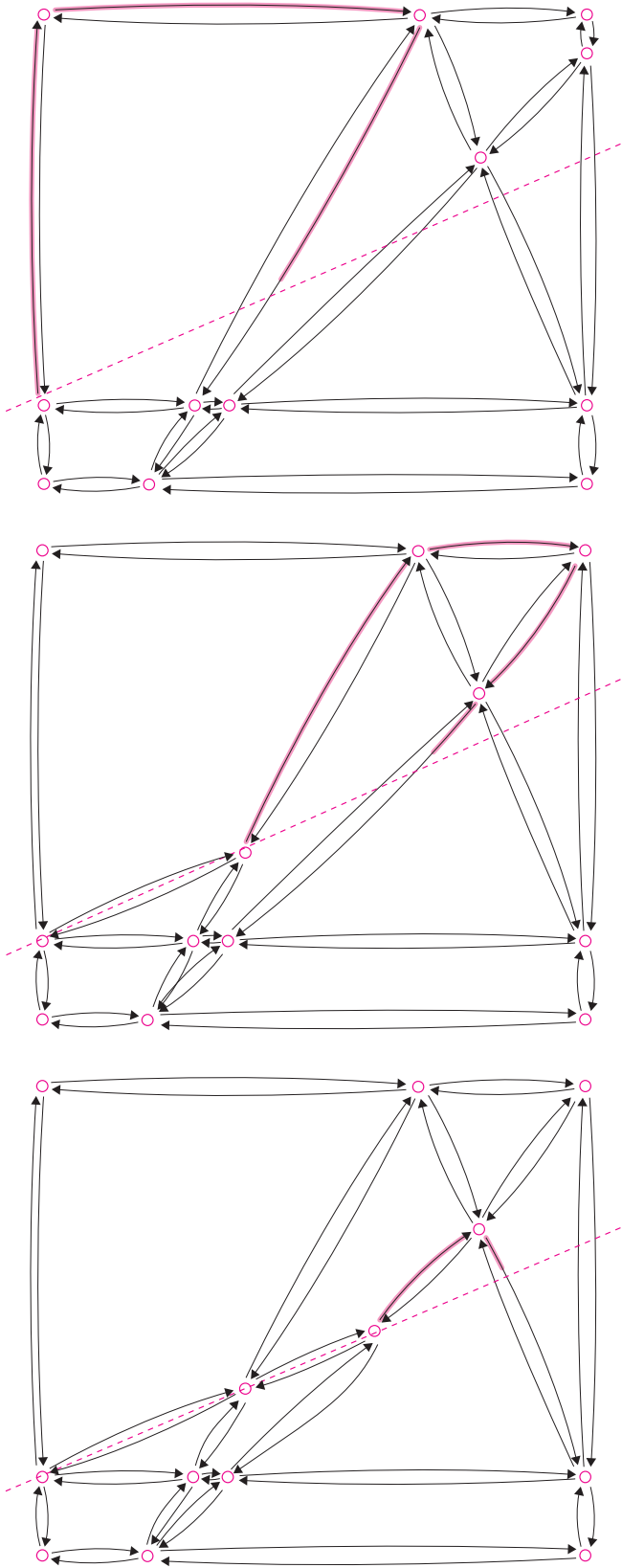
Opisana struktura jest wariantem tzw. *doubly-connected edge list*. Pozwala ona szybko dodawać nowe odcinki



Rys. 4. Struktura danych u dołu reprezentuje układ odcinków przedstawiony u góry. Został on zbudowany przez otoczenie prostokątną ramką prostych z rysunku 3.



do istniejącego układu. Zauważmy też, że dzięki wskaźnikom do sąsiedniego odcinka oraz dzięki odpowiedniemu uporządkowaniu elementów na listach cyklicznych, odpowiadających punktom styku, możemy w prosty sposób obchodzić dookoła obszary (ściany) wyznaczone przez układ odcinków. Rysunek 5 przedstawia kolejne fazy dodawania odcinków prostej do układu.



Rys. 5. Fazy dodawania prostej do struktury danych.

Operacje na strukturze są dosyć intuicyjne. Nas interesuje odpowiedź na pytanie, jaki jest ich czas działania względem  $n$ , bo od tego zależy złożoność algorytmu. Widać, że nowo powstająca ściana może mieć bardzo wiele krawędzi, nawet liniowo wiele względem  $n$ . Okazuje się jednak, że sumaryczna liczba krawędzi, które trzeba odwiedzić przy dodawaniu odcinków jednej prostej, jest również rzędu  $O(n)$ . Dowód tego faktu pominiemy, choć nie jest bardzo trudny. Opiera się on na obserwacji, że odwiedzane krawędzie można przyporządkować do punktów przecięć przetwarzanej prostej w ten sposób, by na jeden punkt przypadało co najwyżej 10 krawędzi. Zainteresowani dowodem powinni szukać hasła *twierdzenie strefowe* lub *zone theorem*.

Powyższy fakt jest kluczowy dla analizy złożoności czasowej algorytmu, bo wynika z niego, że strukturę daje się zbudować w czasie  $O(n^2)$ . Ponadto przejście po kolejnych odcinkach jednej prostej można zrealizować w czasie  $O(n)$ . Zauważmy, że jeżeli zbiór punktów  $p_1, \dots, p_n$  na płaszczyźnie przekształcimy za pomocą dualizacji na zbiór prostych  $T(p_1), \dots, T(p_n)$ , a te proste otoczmy ramką, to otrzymamy układ odcinków podobny do tego z rysunku 4.

Prostokątną ramkę, obejmującą wszystkie punkty przecięcia układu  $n$  prostych, możemy obliczyć następująco. Sortujemy (w czasie  $O(n \log n)$ ) wszystkie proste względem ich współczynników kierunkowych i bierzemy pod uwagę tylko punkty przecięć prostych sąsiadujących w tym porządku oraz punkt przecięcia pierwszej i ostatniej prostej. Wszystkie pozostałe punkty przecięć znajdują się wewnątrz otoczki wypukłej tych punktów.

Dalej, za pomocą opisanego powyżej algorytmu konstrukcji struktury *doubly-connected edge list* jesteśmy w stanie w czasie  $O(n^2)$  wyznaczyć kolejność punktów przecięć dla wszystkich prostych. Jeśli teraz dla dowolnego punktu z  $p_1, \dots, p_n$  (np.  $p_1$ ) zapagniemy wyznaczyć porządek biegunowy pozostałych punktów  $p_2, \dots, p_n$ , to wystarczy odczytać porządek przecięć prostej  $T(p_1)$  z pozostałymi prostymi. Numery prostych w tym porządku wyznaczą kolejność punktów  $p_2, \dots, p_n$  w porządku biegunowym dookoła  $p_1$ , o czym pisaliśmy powyżej.

Za pomocą dualizacji udało nam się przyspieszyć algorytm sortowania biegunowego zbioru  $n$  punktów z czasu  $O(n^2 \log n)$  do czasu  $O(n^2)$ . Usprawnienie to nie ma dużego znaczenia w przypadku np. zadań opisywanych w Informatycznym Kąciku Olimpijskim, ponieważ jego implementacja jest bardzo skomplikowana, a przyspieszenia raczej nie dałoby się zauważyć na zbiorach danych o stosunkowo niewielkim rozmiarze. Przyspieszanie takich algorytmów ma jednak rację bytu w poważniejszych zastosowaniach geometrii obliczeniowej, takich jak generowanie grafiki lub projektowanie układów scalonych.

# Symetralna i dwusieczna

## – bliźnięta jedno- czy dwujajowe?

Symetralna to oś symetrii odcinka, a dwusieczna – kąta. W trójkącie tak symetralne, jak dwusieczne, przecinają się w jednym punkcie.

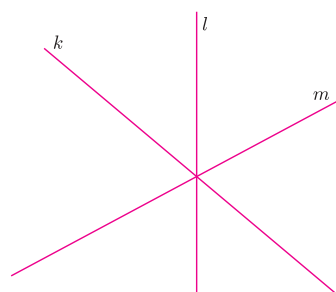
Rozwiążmy zadanie:

*Dane są trzy proste przecinające się w jednym punkcie (rys. 1).*

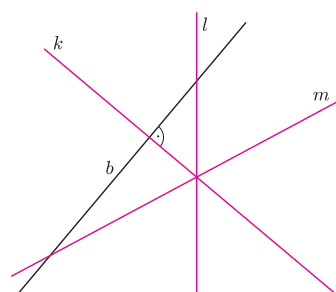
*Znaleźć trójkąt, dla którego są one*

*1° symetralnymi boków;*

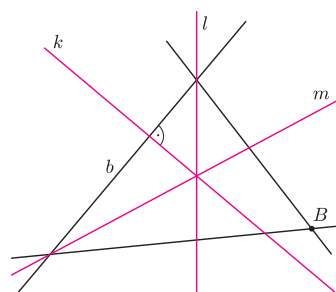
*2° dwusiecznymi kątów.*



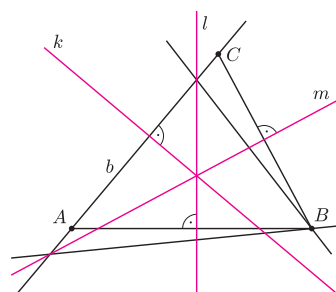
Rys. 1



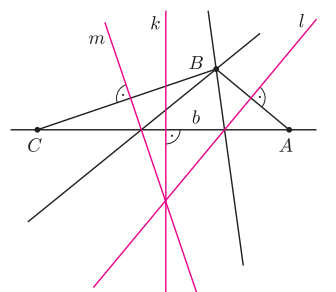
Rys. 2.1



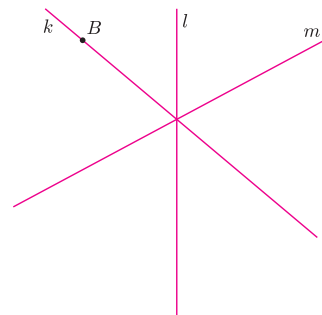
Rys. 3.1



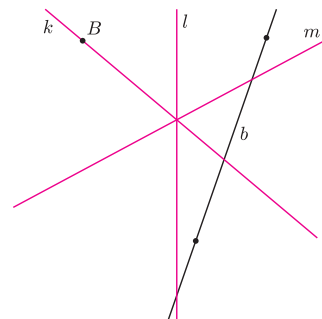
Rys. 4.1



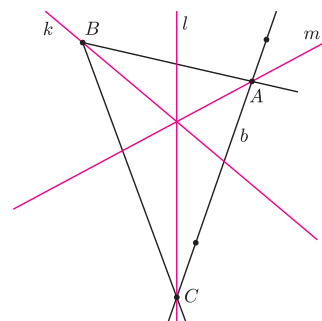
Rys. 5.1



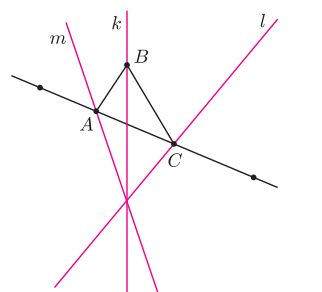
Rys. 2.2



Rys. 3.2



Rys. 4.2



Rys. 5.2

Oto jedno rozwiązanie obu tych zadań. Posłużymy się tutaj dualnością: tam gdzie dla 1° będzie mowa o prostej, w 2° będzie mowa o punktach. I przeciwnie.

Jeśli jakiś trójkąt rozwiązuje nasze zadanie, to każdy jednokładny do niego względem punktu wspólnego danych prostych też je rozwiązuje. Możemy więc jeden element trójkąta (w 1° prostą zawierającą bok, w 2° wierzchołek kąta) przyjąć dość dowolnie. Zatem do roboty!

### Obieramy

1° prostą  $b$  prostopadłą do  $k$

– będzie ona zawierała wierzchołki  $A$  i  $C$  szukanego trójkąta  $ABC$ ;

2° punkt  $B$  na prostej  $k$

– będzie on wierzchołkiem kąta  $ABC$  (rys. 2).

### Odbijamy symetrycznie względem $l$ i $m$

1° prostą  $b$

na każdej z otrzymanych prostych musi leżeć punkt  $B$ , bo jest on obrazem  $A$  względem jednej z symetralnych (powiedzmy  $l$ ) i obrazem  $C$  – względem drugiej;

2° punkt  $B$

prosta  $b$  łącząca otrzymane punkty musi zawierać wierzchołki  $A$  i  $C$ , bo obrazy tych prostych względem dwusiecznych  $l$  i  $m$  przechodzą przez punkt  $B$  (rys. 3).

### Odbijamy symetrycznie względem $l$ i $m$

1° punkt  $B$

– jego obrazami są punkty  $A$  i  $C$  (oczywiście, leżące na prostej  $b$ ), co kończy konstrukcję;

2° prostą  $b$

– jej obrazy (oczywiście, przechodzące przez  $B$ ) wraz z  $b$  tworzą poszukiwany trójkąt (rys. 4).

Ostatni krok w konstrukcji 2° można uprościć, znajdując „na skróty” i niedualnie punkty  $A$  i  $C$  – to przecięcia  $b$  z  $l$  i  $m$ .

Można więc odnieść wrażenie, że odpowiedź na tytułowe pytanie brzmi: jednojajowe.

Okazuje się jednak, że wrażenie takie jest mylne, co widać wyraźnie, gdy weźmiemy inne proste  $k, l, m$ .

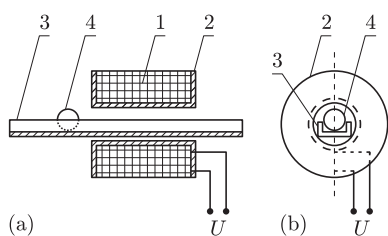
Dla pokazanych obok prostych w wyniku zaproponowanej konstrukcji otrzymujemy, co prawda, jakieś trójkąty (rys. 5), ale tylko ten, w którym proste mają być symetralnymi, spełnia nasze żądanie, ten drugi jest chyba bez sensu, bo przecięcie dwusiecznych to środek okręgu wpisanego w trójkąt, a ten nie może leżeć na zewnątrz trójkąta.

Powstają dwa pytania: **daczego tak jest?** oraz **czy konstrukcja w przypadku symetralnych zawsze prowadzi do uzyskania żądanego trójkąta?**

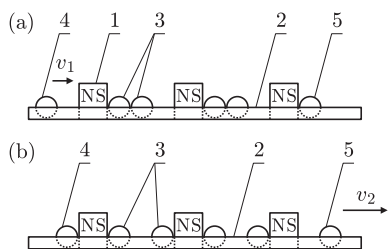
Odpowiedzi w numerze.

Marek KORDOS

Potrzebne materiały: plastikowe korytko kablowe – do kupienia w sklepie z materiałami elektroinstalacyjnymi (wystarczy kawałek o długości ok. 0,7 m i szerokości ok. 1 cm), cewka z otworem, umożliwiającym wsunięcie korytka (wypożyczona z pracowni fizycznej lub samodzielnie nawinięte kilkaset zwojów miedzianego drutu w emalii o średnicy ok. 0,5 mm na izolacyjnej szpuli), 4 baterie R20, pojemniki na baterie, wyłącznik, przewody połączeniowe, lutownica, wąska taśma klejąca, nożyczki, linijka, brzeszczot piłki do metalu, miernik uniwersalny, stoper, dostęp do czulej wagi (wystarczy tania, elektroniczna waga jubilerska), kilka walcowych magnesów neodymowych o średnicy ok. 1 cm i wysokości ok. 5 mm (do kupienia w sklepie z częściami elektronicznymi), stalowe kulki łożyskowe o średnicy kilku milimetrów w liczbie co najmniej dwa razy większej niż liczba magnesów.



Rys. 1. Budowa elektromagnetycznego działka Gaussa: (a) przekrój podłużny, (b) widok z przodu; 1 – uzwojenie, 2 – szpulka izolacyjna (karkas), 3 – korytko kablowe, 4 – kulka,  $U$  – impuls napięcia.

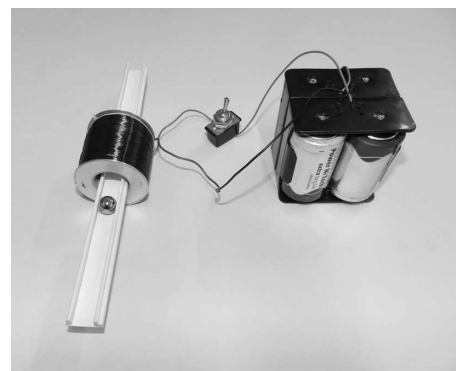


Rys. 2. Magnetyczne działko Gaussa widziane z boku: (a) przed wystrzałem, (b) po wystrzale; 1 – magnes walcowy, 2 – korytko kablowe, 3 – kulki pośrednie, 4 – kulka nalatująca, 5 – kulka wystrzelowana, N, S – bieguny magnesów,  $v_1, v_2$  – prędkości kulki nalatującej i wystrzelonej.

## Gauss, cel, pa!

Stanisław BEDNAREK

Klasyczne działa miotające pociski siłą wywieraną przez gazy wytwarzane podczas detonacji chemicznych materiałów wybuchowych znane są co najmniej od kilkuset lat. Tymczasem do rozpędzania pocisków można także użyć oddziaływań elektromagnetycznych – taką broń nazywamy działem Gaussa. Na pierwszy ogień naszych doświadczeń pójdzie elektromagnetyczne działko Gaussa. Żeby je zbudować, z dolnej części korytka kablowego odcinamy brzeszczotem piłki do metalu odcinek o długości około 15 cm i umieszczamy go w otworze cewki położonej na stole. Końcówki cewki łączymy przewodami poprzez otwarty wyłącznik z baterią, a w korytku kablowym, tuż przed otworem cewki, kładziemy kulę łożyskową. Zamykamy na chwilę wyłącznik i obserwujemy, że kulka potoczyła się do wnętrza cewki i wyleciała z drugiej strony ze znaczną prędkością. W ten sposób oddaliśmy pierwszy strzał z działka Gaussa.



Fot. 1. Elektromagnetyczne działko Gaussa.

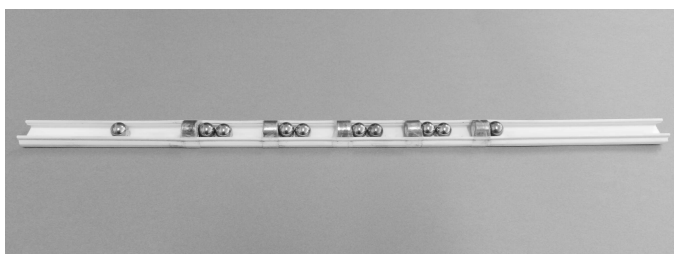
Kulka uzyskała energię kinetyczną w wyniku przemiany energii prądu elektrycznego, przepływającego przez cewkę, która z kolei zmieniła się na energię pola magnetycznego wciągającego kulkę do wnętrza cewki. Sprawność takiego działka jest jednak niewielka. Aby ją oszacować, powinniśmy zmierzyć natężenie prądu  $I$ , napięcie baterii  $U$  i czas zamknięcia wyłącznika  $t$  – następnie obliczamy energię prądu ze wzoru  $E = UIt$ . Energię kinetyczną kulki obliczamy ze wzoru  $E_K = \frac{mgz^2}{4h}$ , gdzie  $m$  jest masą kulki, z zasięgiem rzutu poziomego, a  $h$  wysokością, z której wystrzelujemy kulkę. Sprawność działka to stosunek  $E_K/E$ .

Znacznie większą prędkość nadaje kulkom magnetyczne działko Gaussa, które jeszcze łatwiej zbudować. Odcinamy kawałek dolnej części korytka kablowego o długości około 40 cm i w nim umieszczamy kilka walcowych magnesów neodymowych w odstępach około 3–4 cm. Magnesy przyklejamy przez owinięcie ich i korytka kilka razy taśmą klejącą. Wszystkie magnesy powinny mieć tak samo zorientowane bieguny magnetyczne, np. wszystkie bieguny S w prawo. Tak przygotowane korytko kładziemy poziomo i między magnesami umieszczamy po dwie kulki łożyskowe jak na rysunku 2(a). Żeby oddać strzał, umieszczamy jeszcze jedną kulkę w korytku przed pierwszym magnesem i lekko ją popychamy w stronę tego magnesu, nadając pewną prędkość  $v_1$ . Stwierdzimy wtedy, że kulka dotykająca ostatniego magnesu wyleci z korytka z prędkością  $v_2 \gg v_1$ . Zmieni się przy tym rozmieszczenie pozostałych kulek – popchnięta kulka (nalatująca) zostanie przyciągnięta do pierwszego magnesu, natomiast kulki między magnesami rozdzielią się i każda z nich będzie przylegała do innego magnesu (rys. 2(b)).

Aby oddać następny strzał, należy działko „naładować” przez przywrócenie rozmieszczenia kulek z rysunku 2(a). Ponieważ kulka wystrzelona ma znacznie większą energię kinetyczną niż kulka nalatująca, to zasadne jest pytanie, dlaczego ta wersja działka nie łamie zasady zachowania energii. Wzrost energii kinetycznej wystrzelonej kulki pochodzi z przemiany różnicy energii potencjalnej oddziaływania magnetycznego układu magnesów i kulek w konfiguracjach pokazanych na rysunkach 2(b) i 2(a). W czasie ładowania działka wykonujemy pewną pracę, pokonując siły oddziaływania magnetycznego. Właśnie ta praca zostaje zgromadzona w postaci energii potencjalnej układu. Magnetyczne działko Gaussa stanowi nie tylko atrakcyjną zabawkę, ale nadaje się również do badań ilościowych.

Rozpędzając kulkę nalatującą na równi pochyłej i mierząc zasięg kulki wystrzelonej z działa w celu wyznaczenia jej prędkości początkowej, możemy określić stosunek prędkości kulki nalatującej i wystrzelwanej, a także zbadać go w zależności od takich czynników jak: ilość magnesów, odległość między nimi, wysokość równi, czy ilość kulek między magnesami. Znaczny wzrost prędkości kulki wystrzelwanej można uzyskać, umieszczając za ostatnim magnesem dwie kulki.

Na koniec ważna uwaga. Ulepszone działa Gaussa mogą wyrządzić szkody – pistolety ze strzałkami magnetycznymi są używane jako tajna broń przez służby specjalne, m.in. ze względu na ciche działanie. Polskie prawo (ustawa o broni i amunicji) nie obejmuje stosownymi ograniczeniami urządzeń miotających pociski za pomocą pola elektromagnetycznego. Jak zawsze, należy jednak zachować ostrożność i zdrowy rozsądek.



Fot. 2. Testowane magnetyczne działo Gaussa.



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

**M 1393.** Znaleźć wszystkie funkcje  $f$  postaci

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

dla pewnych  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , które na zbiorze  $\{-1, 1\}^n$  przyjmują tylko dwie wartości:  $+1$  lub  $-1$ , tzn. takie, że jeśli  $x_i \in \{-1, 1\}$  dla  $i = 1, \dots, n$ , to  $f(x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}$ .

Rozwiązanie na str. 10

**M 1394.** Niech wielomian  $f$  postaci

$$(*) \quad f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) + \\ + (b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + \dots + b_{1n} x_1 x_n + \\ + b_{23} x_2 x_3 + \dots + b_{2n} x_2 x_n + \dots + b_{n-1, n} x_{n-1} x_n)$$

przyjmuje na zbiorze  $\{-1, 1\}^n$  tylko dwie wartości  $-1$  lub  $1$ . Udowodnić, że suma kwadratów jego współczynników wynosi  $1$ .

Rozwiązanie na str. 23

**M 1395.** Czy istnieje wielomian  $f$  zadany wzorem  $(*)$ , taki że dokładnie trzy spośród jego współczynników  $a_0, \dots, b_{n-1, n}$  są niezerowe, i o tej własności, że na zbiorze  $\{-1, 1\}^n$  przyjmuje on tylko wartości  $-1$  i  $1$ ? A jeśli założymy, że dokładnie cztery współczynniki mają być niezerowe?

Rozwiązanie na str. 22

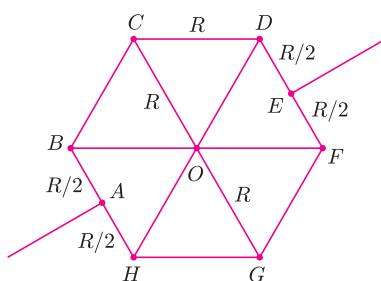
Przygotowali Andrzej MAJHOFER i Michał NAWROCKI

**F 837.** Mieszanina gazów doskonałych zawiera  $0 < x < 1$  moli gazu  $A$  i  $1 - x$  moli gazu  $B$ . Molowe masy gazów oraz ich molowe ciepła właściwe w stałej objętości i pod stałym ciśnieniem wynoszą odpowiednio  $m_A, c_{VA}, c_{pA}$  oraz  $m_B, c_{VB}, c_{pB}$ . Ile wynosi prędkość dźwięku  $c$  w tej mieszaninie w temperaturze  $T$ ? Uniwersalna stała gazowa wynosi  $R$ .

Rozwiązanie na str. 8

**F 838.** Znaleźć oporność zastępczą pomiędzy punktami  $A$  i  $E$  układu oporników w kształcie sześciokąta foremnego z przekątnymi (rysunek), zbudowanego z 12 jednakowych elementów, o oporze  $R$  każdy.

Rozwiązanie na str. 6



W książce „Księga Sądu Ostatecznego” Connie Willis wymyśliła podróż w czasie studentki historii z połowy XXI wieku. Zadaniem tej konkretnej dziewczyny, realizującej projekt naukowy swojego promotora, była wizyta w Londynie w pierwszej połowie XIV wieku. Studentkę zaszczepiono przeciw różnym chorobom zakaźnym, których na Ziemi wówczas już nie znano i wyprawiono machiną czasu, która, niestety, pomyliła się i dostarczyła podróżniczkę we właściwe miejsce, ale o 20 lat później, niż to zaplanował promotor. Trafiła na początek epidemii, którą obrazowo nazwano „czarną śmiercią”. Umierają prawie wszyscy średniowieczni przyjaciele dzielnej dziewczyny, a jej nie wolno im powiedzieć, skąd przybyła, ani w żaden współczesny sobie sposób pomóc. Znając liczbę zgłoszeń ziemian, którym obecnie proponuje się jednokierunkową podróż na Marsa, myślę, że i ten projekt spotkałby się z naszym zainteresowaniem.

W szczytowym okresie epidemii przez 2 lata umarła połowa mieszkańców Londynu, dziennie mogło to być i 200 osób. W 1384 roku biskup Londynu wyznaczył teren do chowania zmarłych na nieznaną, a straszną chorobę. W latach 80. XX wieku na ten teren wkroczyli paleogenetycy.

Zwłoki układano starannie, w kierunku wschód–zachód. Często nosiły amulety lub zaopatrzone były w monety. W kościach (głównie zębach) genetycy szukali mikroorganizmu – znaleźli *Yersinia pestis*, bakterię wywołującą dżumę. Do dziś nie do końca rozstrzygnięto spór, czy inne średniowieczne epidemie spowodowała ta sama bakteria, czy też „konkurowała” z nią cholera (wywoływana przez *Vibrio cholerae*). Opisy trybu umierania nie są jednoznaczne, a wyniki poszukiwania kilku tysięcy genów w bardzo już zniszczonym materiale, zanieczyszczonym setkami tysięcy genów ludzi i glebowych bakterii przypominają poszukiwanie igły w stogu siana. Ulepszone metody wyławiania z pomocą sond określonych fragmentów DNA współczesnej *Yersinii* świadczą jednak bez wątpliwości o tym, że w przypadku tej epidemii zabójcą była *Yersinia pestis*. Z tego pokolenia bakterii wyewoluowało 17 współczesnych szczepów chorobotwórczych, niewiele się różniących od średniowiecznego. Pozostaje pytanie, dlaczego ten z XIV wieku był tak straszliwie zjadliwy?

Podobną historię opowiadają genetycy, którzy odtworzyli wirusa grypy zwanej hiszpanką. Zabił on w 1918 roku dwa razy więcej ludzi, niż poległo w I wojnie światowej, co dziś czyni go szczególnie interesującym dla lekarzy i biologów. Ginęli ludzie młodzi, głównie na zapalenie płuc. I oto w kontrolowanych, bezpiecznych warunkach, wirus ten został odtworzony (wyodrębniono go ze zwłok pochowanych w Arktyce) i zidentyfikowany jako typ A, podtyp H1N1. I w tym przypadku pada pytanie o znaczną zjadliwość szczepu, który obecnie tak śmiertelności nie jest.

Paleogenetycy mają też coś do powiedzenia o czasie, w którym w Europie pojawił się syfilis,

o sprowadzenie którego chyba niesłusznie oskarża się odkrywców Ameryki. Badania na cmentarzu szpitala Świętej Marii we wschodnim Londynie ujawniły dwanaście szkieletów z lat 1200–1250, które mają zwyrodnienia charakterystyczne dla kiły. Szkielety z Londynu wzmacniają hipotezę, że syfilis nękał mieszkańców Brytanii na długo przed wyprawą Kolumba.

Najświeższym ważnym badaniem paleogenetyków jest ogłoszony w 2013 roku wynik oznaczenia genomu organizmu grzybopodobnego *Phytophthora infestans*, który w połowie XIX wieku zaatakował monokultury ziemniaków w Irlandii. W wyniku powszechnego głodu zmarło na wyspie ponad milion ludzi, setki tysięcy wyemigrowało (do Ameryki głównie), a ci, co pozostali, w prostracji rozpoczęli wojnę domową z Anglikami. Do dziś w Irlandii mieszka mniej ludzi niż na początku XIX wieku.

Genetycy wyizolowali z muzealnych okazów liści ziemniaków szczep *Phytophthora* i oznaczyli jego genom. W badaniach porównawczych stwierdzili, że zaraza przyplęnęła statkiem do Antwerpii z centralnego Meksyku, a zjadliwy szczep powstał zapewne w początkach XIX wieku. Dziś nie znajduje się go w hodowlach ziemniaków europejskich, a jego zjadliwość oznaczona w laboratorium jest niższa niż szczepów współczesnych. Czemu więc okazał się tak skutecznym zabójcą roślin, pośrednio ludzi?

Odpowiedzi na te pytania zasługują na wnikliwe potraktowanie. Ogólnie sądzi się, że na zjadliwość różnych mikroorganizmów wpływają nie tylko ich geny, ale też warunki zewnętrzne: odporność ludzi (okresy wojen, głodu), konkretne warunki klimatyczne, zwyczaje żywieniowe i higieniczne. *Phytophthorze*, być może, pomogła też szczególna wrażliwość danej odmiany ziemniaka.

Przy okazji zbierania tych wiadomości dowiedziałam się, że człowiek może żyć, żywiąc się jedynie mlekiem i ziemniakami. Ale co to za życie. . .

Magdalena FIKUS

## Ekspansja pod ciśnieniem

Materiały porowate robią coraz większą karierę. Jednym z bardziej popularnych haseł jest MOF (*Metal-Organic Framework*), czyli struktura(y) metaliczno-organiczna. Wiele zespołów zajmuje się twórczością w tej dziedzinie. Dosłownie. Tworzone są nowe materiały z nadzieją uzyskania filtrów, schowków na wodór, ditlenek węgla, radon.

Metody badawcze są bardzo zaawansowane, ale nieodmiennie wykorzystują również najstarszą z nich: metodę prób i błędów.

Właśnie w trakcie takich badań dokonano dość zaskakującego odkrycia. Mianowicie cyjanek cynku,  $Zn(CN)_2$ , pod wpływem bardzo dużego ciśnienia może zwiększyć (prawie) dwukrotnie swoją objętość [1].

Wbrew pozorom, nie jest to wcale takie zaskakujące. Jego struktura krystaliczna to samoprzenikające się dwie diamentopodobne siatki. Pod wpływem ciśnienia hydrostatycznego, przyłożonego przez ciecz o dużych molekułach, nic specjalnie dziwnego się nie dzieje. Natomiast jeżeli medium, przez które aplikowane jest ciśnienie, będzie cieczą o małych molekułach, np. wodą, to cząsteczki wciskają się w strukturę, powodując rozjechanie się dwóch samoprzenikających się siatek. Cudów nie ma, łączna gęstość rośnie, a nie maleje. Wynik zależy od tego, jakiej cieczy się używa.

Naukowcy otrzymali pięć różnych struktur cyjanek cynku, w dodatku dwie z nich pozostają w tym nowym stanie nawet wtedy, gdy wróci się do ciśnienia normalnego.

## Kosmokinematografia

Została popołniona oryginalna publikacja [2]. Autorzy przekonują w niej, że kinematograficzna prezentacja wyników jest metodą naukową.

Znajomość okolicy często okazuje się bezcenna. Posługując się mapą, można sobie wyobrazić, jak wygląda nieznaną okolicę. Jednak każdy, kto używał np. *Google Street View*, wie, jaka jest różnica między planem, czy nawet zdjęciem, a możliwością wędrówki przez wirtualną rzeczywistość.

Poprzez link [2] można dostać się do filmowej prezentacji naszej najbliższej okolicy, rozciągającej się po kilka megaparseków w każdą stronę. Animacja prawdziwych danych wziętych z przeglądów przesunięć ku czerwieni jest na pewno warta obejrzenia. Dodatkowo, dla niektórych galaktyk znane są rzeczywiste odległości, więc możliwe jest odtworzenie pola prędkości galaktyk, a z niego – potencjału grawitacyjnego, który jest zdeterminowany przez ciemną materię. Potencjał, z kolei, można znów porównać do rozkładu galaktyk. Według autorów wszystko się zgadza ze standardowym modelem kosmologicznym. Autorzy obiecują, że na jednym filmie się nie skończy.

[1] S.H. Lapidus, G.J. Halder, P.J. Chupas, K.W. Chapman, *Exploiting high pressures to generate porosity, polymorphism, and lattice expansion in the nonporous molecular framework  $Zn(CN)_2$* , J. Amer. Chem. Soc. 135 (20) (2013), 7621–7628.

[2] H.M. Courtois, D. Pomarede, R.B. Tully, Y. Hoffman, D. Courtois, *Cosmography of the local universe*, <http://arxiv.org/abs/1306.0091>.

## Praktyczne zastosowanie komputerów kwantowych

Od dłuższego czasu słyszymy o wspaniałej przyszłości komputerów kwantowych, a i naszej przy okazji. Sytuacja wydaje się podobna do fuzji termojądrowej, która od pół wieku za pół wieku ma rozwiązać nasze problemy energetyczne.

A jednak jest różnica. Udało się właśnie za pomocą komputera kwantowego rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi [3]. Co prawda, właściwe rozwiązanie znajdowane jest dziewięć razy na dziesięć prób, ale to już immanentna własność komputerów kwantowych.

## Czapka-niewidka

Wraz z wynalezieniem meta-materiałów o ujemnym współczynniku załamania ukrywanie się pod czapką-niewidką (a raczej peleryną-niewidką) z bajek, fantastyki czy magii przechodzi do rzeczywistości. Żyjemy jednak w czasoprzestrzeni, więc można pomyśleć o ukryciu się również w czasie, a nie tylko w przestrzeni. Chodziłoby np. o ukrycie procesu przesyłania (przetwarzania) informacji. Jak można by było to zrealizować?

Bardzo prosto. Zakładamy czaso-czapkę-niewidkę, i co? I robimy wrażenie, że jesteśmy zupełnie bezmyślni. Cóż, mówicie, że po naszym sukcesie edukacyjnym (dzięki któremu już niedługo studiować będzie 110% młodzieży w wieku poborowym) znacznej frakcji polskich studentów udaje się to nawet bez czapki i to bez jakiegokolwiek widocznego wysiłku? Możliwe, ale świat idzie trochę inną, bardziej pokrętną drogą.

Do wyważania tych otwartych drzwi zamiast typowego studenta Wyższej Szkoły Tańca i Różańca używa się Talbota. Efektu Talbota, a dokładniej jego czasowego odpowiednika. Efekt Talbota polega na odtwarzaniu frontu fali w skwantowanych odległościach od siatki dyfrakcyjnej. W czasowym odpowiedniku używa się tzw. grzebienia częstości.

Szczegóły można znaleźć w publikacji [4]. Autorzy demonstrują, że są w stanie ukryć przesyłany sygnał poprzez destruktywną interferencję, a następnie go odtworzyć. Dla podsłuchującego wyglądałoby to jak brak przesyłania jakiegokolwiek sygnału. Oczywiście, nie jest to możliwe dla ciągłej transmisji. Ukrywanie nośnej sygnału wykazuje rodzaj dudnienia. Na razie udało się otrzymać stosunek czasu ukrycia do czasu nieukrywania około 50% przy użyciu standardowego sprzętu stosowanego w telekomunikacji.

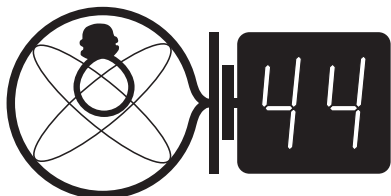
Piotr ZALEWSKI

[3] X.-D. Cai, C. Weedbrook, Z.-E. Su, M.-C. Chen, Mile Gu, M.-J. Zhu, Li Li, Nai-Le Liu, Chao-Yang Lu, Jian-Wei Pan, *Experimental quantum computing to solve systems of linear equations*, Phys. Rev. Lett. 110 (2013), 230501.

[4] J.M. Lukens, D.E. Leaird, A.M. Weiner, *A temporal cloak at telecommunication data rate*, Nature 498 (2013), 205–208.

### Skrót regulaminu

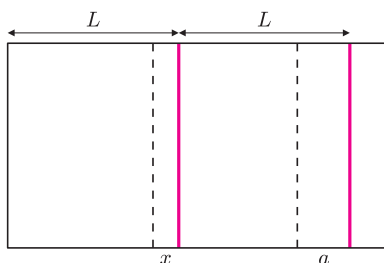
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2013

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Przypominamy treść zadań:



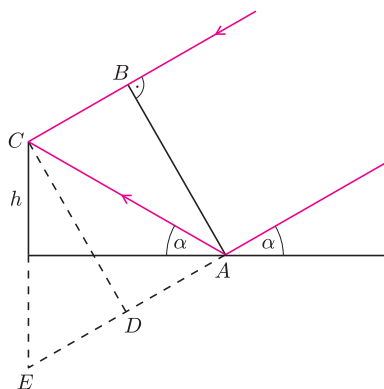
Rys. 1

**556.** W poziomym cylindrze, w odległościach  $L$  i  $2L$  na prawo od zamkniętego końca znajdują się dwa tłoki (rys. 1), które mogą przemieszczać się bez tarcia (grubości tłoków pomijamy). W lewej części znajduje się para wodna pod ciśnieniem  $p_0$ , w prawej powietrze o takim samym ciśnieniu. Ciśnienie pary nasyconej wody w danej temperaturze wynosi  $2p_0$ . Prawy tłok został wolno wepchnięty na odległość  $a$ . O ile przesunął się lewy tłok? Temperatura jest stała.

**557.** Detektor fal radiowych znajduje się na brzegu jeziora na wysokości  $h$  nad poziomem wody. Rejestruje on sygnały wysyłane przez satelitę wznoszącego się nad horyzontem. Przy jakich kątach wzniesienia satelity nad horyzontem obserwuje się maksima sygnału? Długość fali emitowanej przez satelitę wynosi  $\lambda$ . Przyjmujemy, że powierzchnia jeziora jest idealnie gładka.

**556.** Rozważmy proces do chwili, gdy para wodna osiągnie stan nasycenia. Traktując oba gazy jako doskonałe, możemy dla każdego z nich napisać prawo przemiany izotermicznej:  $p_0L = p_1(L - a + x) = p_1(L - x)$ , gdzie  $x$  jest przesunięciem tłoka lewego, zatem  $x = a/2$ . Ciśnienie  $p_1$  nie przekracza ciśnienia pary nasyconej:  $p_0L \leq 2p_0(L - a/2)$ , stąd  $a \leq L$ ,  $x \leq L/2$ .

Gdy  $a > L$ , para wodna w lewej komorze zaczyna się skraplać, ciśnienie ma stałą wartość  $p = 2p_0$ , a objętości gazów w obu częściach są takie same (zaniedbujemy objętości wody powstałej w wyniku skroplenia w porównaniu z objętością pary nasyconej o tej samej masie). Oznaczając dodatkowo przesunięcia obu tłoków przez  $\Delta x$ , możemy napisać:  $\Delta x = a - L = x - L/2$ , stąd  $x = a - L/2$ . Ostatecznie:  $x = a/2$  dla  $a \leq L$ ,  $x = a - L/2$  dla  $L < a \leq 3L/2$ ,  $x = L$  dla  $3L/2 < a \leq 2L$ .



Rys. 2

**557.** Ponieważ odległość satelity od detektora jest dużo większa niż  $h$ , możemy przyjąć, że wiązka promieniowania wysyłanego przez satelitę jest równoległa. Do odbiornika w punkcie  $C$  docierają promienie biegnące bezpośrednio od satelity i odbite od powierzchni jeziora, jak na rysunku 2. Punkty  $A$  i  $B$  leżą na tej samej powierzchni falowej i mają zgodną fazę. Ich różnica dróg jest równa  $\Delta s = |AC| - |BC| = |ED| = 2h \sin \alpha$ . Jeden z promieni odbija się od ośrodka, w którym prędkość rozchodzenia się fali jest mniejsza niż w powietrzu. Powoduje to zmianę fazy o  $\pi$ , odpowiadającą przebytej drodze  $\lambda/2$ . Uwzględniając to, otrzymujemy wzór na maksima interferencyjne:

$$\sin \alpha = \frac{(2k + 1)\lambda}{4h}, \quad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, \dots \text{ i } k \leq \frac{4h}{\lambda} - 1.$$



### Rozwiązanie zadania M 1395.

Niech tymi niezerowymi współczynnikami będą  $a$ ,  $b$  i  $c$ , stojące zaś przy nich jednomiany nazwijmy odpowiednio  $u$ ,  $v$  i  $w$ . Załóżmy, że wśród tych jednomianów najwyższy stopień ma  $w$ . Istnieje wtedy zmienna, która występuje w  $w$ , ale nie występuje w  $u$  lub  $v$  – bez utraty ogólności możemy przyjąć, że  $x_1$  ma tę własność. Wówczas

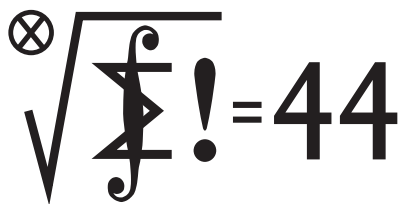
$$f(1, 1, \dots, 1) = a + b + c,$$

$$f(-1, 1, \dots, 1) = \begin{cases} a + b - c, & \text{gdzy } x_1 \text{ nie występuje ani w } u, \text{ ani w } v, \\ -a + b - c, & \text{gdzy } x_1 \text{ występuje w } u, \text{ ale nie w } v, \\ a - b - c, & \text{gdzy } x_1 \text{ występuje w } v, \text{ ale nie w } u. \end{cases}$$

W pierwszym przypadku mamy  $f(1, 1, \dots, 1) - f(-1, 1, \dots, 1) = 2c$ , ale z drugiej strony, skoro  $f(\pm 1, 1, \dots, 1) \in \{-1, 1\}$ , to  $c \in \{-1, 1\}$ . Z zadania 1394 wiemy, że  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , otrzymujemy więc  $a = b = 0$  wbrew założeniu. Pozostałe przypadki wymagają analogicznego rozumowania.

Wielomianem o dokładnie czterech niezerowych współczynnikach spełniającym warunki zadania jest np.  $\frac{1}{2}(1 + x_1 + x_2 - x_1x_2)$ .

## Klub 44



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 653 ( $WT = 1,77$ ) i 654 ( $WT = 2,40$ ) z numeru 1/2013

Wojciech Nadara	Warszawa	46,60
Zbigniew Skalik	Wrocław	43,65
Witold Bednarek	Łódź	43,34
Krzysztof Kamiński	Pabianice	40,24
Paweł Łabędzki	Kielce	39,72
Rami Marcin Ayoush	Szelków	37,83
Jerzy Cisko	Wrocław	37,34
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72

Witamy w Klubie 44 nową postać: Wojtek Nadara.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2013

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

**659.** Wierzchołki  $n$ -kąta foremnego są pokolorowane dwoma kolorami. Co jednostkę czasu pokolorowanie zmienia się: każdy wierzchołek przyjmuje kolor, który bezpośrednio przed tym momentem miała większość z trójki wierzchołków: sam rozważany wierzchołek oraz dwa z nim sąsiadujące. Proces kończy się, gdy nowe pokolorowanie okaże się identyczne z poprzednim (tzn. gdy nic się już nie zmienia). Dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 3$  wyjaśnić, dla jakich początkowych konfiguracji kolorów proces będzie trwał nieskończenie.

**660.** Dana jest liczba naturalna  $k > 1$ . Znaleźć wszystkie liczby naturalne  $n > 1$ , spełniające nierówność  $d(n^k) \leq k \cdot d(n)$ , gdzie  $d(x)$  oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby naturalnej  $x$ .

**659.** Wierzchołek, sąsiadujący z dwoma wierzchołkami innego koloru niż on sam, nazwijmy *izolowanym*. Wierzchołki, które są (w danym momencie gry) izolowane, i tylko one, zmieniają kolor w najbliższym ruchu. Wierzchołki nieizolowane tworzą bloki (długości co najmniej 2); ich kolor już się nie zmienia – do końca pozostają nieizolowane.

Przypuśćmy, że w jakimś momencie są zarówno wierzchołki izolowane, jak i nieizolowane. Pewien wierzchołek izolowany musi sąsiadować z nieizolowanym. W kolejnym ruchu przejmuje kolor sąsiada i staje się nieizolowanym. Zatem w każdym ruchu liczba wierzchołków izolowanych zmniejsza się. Gdy zejdzie do zera, kolory się ustabilizują.

Proces może więc trwać nieskończenie tylko wtedy, gdy na starcie wszystkie wierzchołki są izolowane – czyli gdy są pokolorowane na przemian (co jest możliwe tylko dla  $n$  parzystych). Wówczas po pierwszym ruchu wszystkie kolory zmienią się, po drugim powróci sytuacja początkowa, i ten cykl stale będzie się powtarzał. To jest ta konfiguracja początkowa, o jaką pyta zadanie.

**660.** Przypuśćmy, że  $n$  ma co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze  $p, q$ . Napiszmy  $n = p^\alpha q^\beta m$ , gdzie  $\alpha, \beta \geq 1$ , zaś czynnik  $m$  jest niepodzielny przez  $p$  ani  $q$ . Iloczyn  $p^\alpha q^\beta$  ma  $(\alpha + 1)(\beta + 1)$  dzielników dodatnich; iloczyn  $p^{k\alpha} q^{k\beta}$  ma  $(k\alpha + 1)(k\beta + 1)$  dzielników dodatnich. Zatem

$$d(n) = (\alpha + 1)(\beta + 1)d(m), \quad d(n^k) = (k\alpha + 1)(k\beta + 1)d(m^k).$$

Jasne, że  $d(m^k) \geq d(m)$ . Jeśli więc zachodzi postulowana nierówność  $d(n^k) \leq k \cdot d(n)$ , to

$$(k\alpha + 1)(k\beta + 1) \leq k(\alpha + 1)(\beta + 1);$$

po przekształceniu:  $k(k - 1)\alpha\beta \leq k - 1$ ; a to jest niemożliwe, skoro  $k > 1$ .

Pozostają do rozważenia liczby  $n$ , będące potęgami liczb pierwszych. Każda taka liczba spełnia wymagany warunek; jeśli bowiem  $n = p^\alpha$ ,  $\alpha \geq 1$ , to

$$d(n^k) = k\alpha + 1 < k(\alpha + 1) = k \cdot d(n).$$



### Rozwiązanie zadania M 1394.

Z założenia  $(f(x))^2 = 1$  dla każdego punktu  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n$ . Z drugiej strony

$$1 = (f(x))^2 = \left( a_0 + \sum a_i x_i + \sum b_{ij} x_i x_j \right)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}^2 + w(x),$$

gdzie  $w(x)$  to suma jednomianów postaci  $x_i$  i  $x_i x_j$  z pewnymi współczynnikami. Kluczem do rozwiązania zadania jest wysumowanie tej równości po wszystkich  $2^n$  punktach kostki dyskretnej. Ponieważ dla ustalonego  $i$  zachodzi

$$\sum_{x \in \{-1, 1\}^n} x_i = \sum_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \{-1, 1\}} \left( \sum_{x_i \in \{-1, 1\}} x_i \right) = 0$$

i podobnie dla ustalonych  $i < j$  mamy  $\sum_{x \in \{-1, 1\}^n} x_i x_j = 0$ , więc również

$$\sum_{x \in \{-1, 1\}^n} w(x) = 0.$$

Zatem

$$2^n = \sum_{x \in \{-1, 1\}^n} \left( \sum a_i^2 + \sum b_{ij}^2 \right) = 2^n \left( \sum a_i^2 + \sum b_{ij}^2 \right).$$



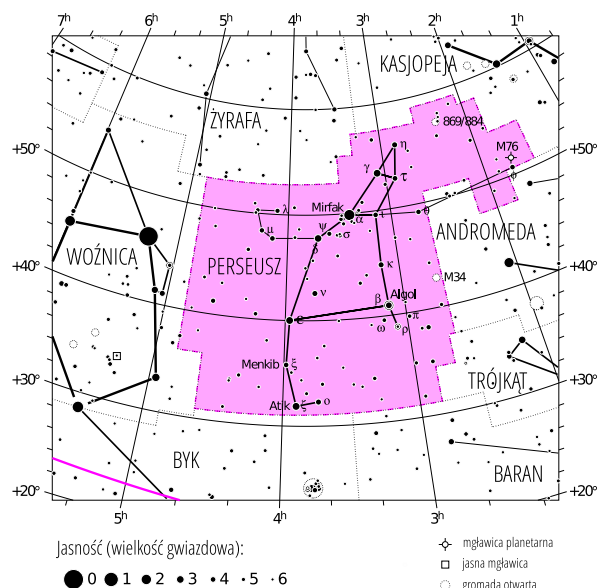
## Prosto z nieba: Ciemna materia w gromadach galaktyk

Nagrodę Nobla w 2011 otrzymali Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt oraz Adam G. Riess za „odkrycie przyspieszonego rozszerzania się Wszechświata”.



Interpretacja wyników obserwacji wybuchów odległych supernowych typu Ia, uhonorowana w 2011 roku Nagrodą Nobla z fizyki, skłania do melancholijnych rozmyślań. Od pewnego czasu wiadomo bowiem, że widoczne na niebie gwiazdy stanowią tylko niewielki ułamek całej masy/energii znajdującej się we Wszechświecie. Według teorii reszta to tajemnicza *ciemna energia* (69% całkowitej masy) o przedziwnych własnościach, takich jak ujemne ciśnienie i stała, niezależna od rozmiaru Wszechświata gęstość (ciemna energia jest czasami zwana kwintesencją lub stałą kosmologiczną). Reszta składa się z równie tajemniczej, oddziałującej tylko grawitacyjnie ciemnej materii (około 26%) i dobrze nam znanej materii barionowej, złożonej z protonów i neutronów (5%, z czego połowa świeci, niestety, zbyt słabo, by mogła być bezpośrednio obserwowana). Astronomom niełatwo jest pogodzić się z takim stanem rzeczy, dlatego nie ustają w staraniach, by dowiedzieć się więcej o tych niewidocznych składnikach. Jedną z niedawnych analiz dotyczyła ciemnej materii, którą, być może, tworzą nieodkryte jeszcze cząstki elementarne. Obserwacja dotyczy kolizji w gromadzie galaktyk Abel 520 i została wykonana przez rentgenowski teleskop Chandra oraz, w dziedzinie optycznej, teleskop Hubble’a i kanadyjsko-francuski teleskop CFHT umieszczony na Hawajach. Obserwacje w różnych długościach fali były niezbędne do precyzyjnego ustalenia położenia gorącego gazu pozostałego po zderzeniu oraz gwiazd wchodzących w skład galaktyk. Kluczową składową analizy jest detekcja światła pochodzącego od położonych za gromadą obiektów, soczewkowanego w jej polu grawitacyjnym. Skupione przez gromadę światło służy tu do odwzorowania rozkładu ciemnej materii; obserwacje wskazują, że znajduje się ona głównie poza skupiskami materii świecącej – stanowi to problem dla teoretycznych modeli tworzenia się galaktyk, przewidujących bliski związek świecącej i ciemnej materii. Badania tego typu to, jak na razie, jedyne użyteczne narzędzie w studiowaniu ciemnej materii; prowadzi się również bezpośrednie próby wykrycia jej w warunkach laboratoryjnych w oddziaływaniu ze schłodzonymi blisko zera absolutnego atomami (jak dotąd, bezskutecznie).

Michał BEJGER



Gwiazdozbiór Perseusza. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

## Niebo jak własna kieszeń: Sierpień

Sierpień jest idealnym czasem do zapoznania się z gwiazdozbiorem Perseusza. W lipcowym numerze wspominaliśmy o królu Cefeuszu, z którym nasz obecny bohater jest związany poprzez małżeństwo z jego córką, królową Andromedą. W gwiazdozbiore Perseusza odnajdziemy kilka dobrze widocznych gwiazd, np.  $\alpha$  Persei (Mirfak) o jasności  $1,79^m$  i kolorze podobnym do Słońca. Najsłynniejszą gwiazdą w tej konstelacji jest jednak Algol ( $\beta$  Persei, arab. *Ra's al-Ghul*, Głowa Demona, o jasności  $2,12^m$ ; według mitologii Algol jest jedną z Gorgon, trzech siostr o przerażającym wyglądzie – być może Meduzą, którą zabił nieustraszony Perseusz), podręcznikowy przykład rozdzielonego układu podwójnego z doskonale zaznaczonymi w krzywej zmian blasku zaćmieniami. Algol jest słynny także z powodu *paradoksu Algola* w teorii ewolucji gwiazd, o którym pisaliśmy w *Delcie* dokładnie rok temu. Za pomocą lornetki można w Perseuszu obserwować Gromadę Podwójną (znajdujące się obok siebie gromady otwarte  $\chi$  i  $h$  Persei), położone na niebie obok Andromedy. Do obserwacji pobliskiego obiektu Messiera M76 (Mgławicy Małe Hantle,  $10,1^m$ ) potrzebny będzie już mały teleskop. Główną atrakcją Perseusza jest powszechnie znany i tradycyjnie obfitujący w zjawiska deszcz Perseidów, o maksimum

12 VIII, pochodzący z komety Swifta-Tuttle’a. Nów Księżyca nastąpi 6 VIII, natomiast pełnia 21 VIII, pierwsza połowa miesiąca nadaje się więc do obserwacji.

Zazwyczaj nieobecna w naszej rubryce najdalsza planeta Układu Słonecznego, Neptun, pojawia się w tym miesiącu w związku z Perseuszem: to właśnie bóg mórz i oceanów wysłał Wieloryba, który miał pożreć córkę pięknej (lecz nazbyt próżnej) Kasjopei. Dodatkowo, niewidoczny gołym okiem (ok.  $8^m$ ) Neptun znajdzie się w sierpniu w opozycji, czyli optymalnie do wykonywania (teleskopowych) obserwacji i zdjęć. Saturn jest widoczny na krótko przed zachodem Słońca ( $0,88^m$ , Panna), podobnie jak Wenus ( $-3,44^m$ , Lew, a w drugiej połowie miesiąca Panna), natomiast Jowisz ( $-1,53^m$ ) i Mars ( $1,83^m$ ) wschodzą po północy wraz z gwiazdozbiorem Bliźniąt.

M. B.



## Identyczne rysunki

Joanna JASZUŃSKA

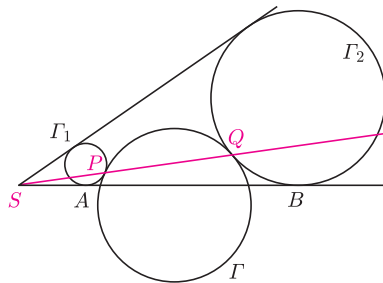
Obrazem punktu  $A \neq S$  w inwersji względem okręgu  $\Gamma = \mathcal{O}(S, r)$  jest taki punkt  $A^*$  na półprostej  $SA^\rightarrow$ , że  $SA \cdot SA^* = r^2$ . Niektóre własności inwersji:

- obrazem punktu  $A^*$  jest punkt  $A$ ,
- jeśli  $A$  leży na okręgu  $\Gamma$ , to  $A^* = A$ ,
- obraz figury zawartej w pewnym kącie  $\angle XSY$  też jest wewnątrz tego kąta,
- obrazem prostej przechodzącej przez punkt  $S$  jest ta sama prosta,
- obrazem okręgu przechodzącego przez punkt  $S$  jest prosta nieprzechodząca przez  $S$  (i na odwrót),
- obrazem okręgu nieprzechodzącego przez  $S$  jest okrąg nieprzechodzący przez  $S$ ; może to być ten sam okrąg.

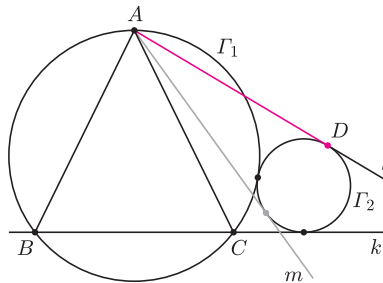
Punkt  $S$  nazywa się *środkiem inwersji*. Nie definiujemy jego obrazu  $S^*$ .

O inwersji przeczytać można m.in. w *deltoidzie* 5/2013.

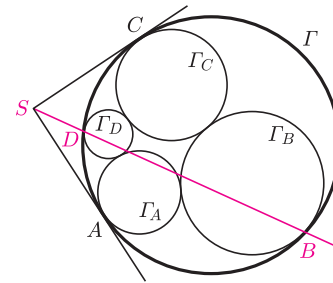
Inne rozwiązanie tego zadania opisano w *deltoidzie* 3/2010.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Wszystkie rysunki są takie same przed inwersją i po, zmieniają się jedynie oznaczenia na nich (pojawia się  $B^*$  zamiast  $A$  itp.).

Czy dwa identyczne rysunki mogą się przydać w jednym zadaniu? Mogą, na przykład gdy drugi jest obrazem pierwszego po pewnej, sprytnie dobranej inwersji (na marginesie przypomnienie głównych własności tego przekształcenia).

1. Okręgi  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  są rozłączne zewnętrznie, a ich wspólne styczne zewnętrzne przecinają się w punkcie  $S$ . Okrąg  $\Gamma$  jest styczny zewnętrznie do okręgów  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  odpowiednio w punktach  $P$  i  $Q$ . Wykaż, że punkty  $S, P, Q$  są współliniowe.
2. Dany jest trójkąt równoramienny  $ABC$  o podstawie  $BC$  i okrąg  $\Gamma_1$  opisany na tym trójkącie. Okrąg  $\Gamma_2$  jest styczny do prostej  $BC$ , ale nie do odcinka  $BC$ , oraz do tego łuku  $BC$  okręgu  $\Gamma_1$ , do którego należy punkt  $A$ . Prosta  $l$ , przechodząca przez punkt  $A$ , jest styczna do okręgu  $\Gamma_2$  w punkcie  $D$ . Wykaż, że  $AD = AB$ .
3. Okręgi  $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C, \Gamma_D$  są styczne wewnętrznie do okręgu  $\Gamma$  odpowiednio w punktach  $A, B, C, D$ . Ponadto okręgi  $\Gamma_A$  i  $\Gamma_C$  są styczne zewnętrznie do obu okręgów  $\Gamma_B$  i  $\Gamma_D$ . Proste styczne do okręgu  $\Gamma$  w punktach  $A$  i  $C$  przecinają się w punkcie  $S$ . Udowodnij, że punkty  $S, B, D$  leżą na jednej prostej.
4. Okręgi  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  są styczne zewnętrznie i styczne do prostej  $k$  odpowiednio w punktach  $A$  i  $B$ . Odcinek  $AC$  jest średnicą okręgu  $\Gamma_1$ . Prosta  $l$  przechodzi przez punkt  $C$  i jest styczna do okręgu  $\Gamma_2$  w punkcie  $D$ . Wykaż, że  $CA = CD$ .

### Rozwiązania i wskazówki

**R1.** Niech  $A$  i  $B$  będą punktami styczności okręgów odpowiednio  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  do jednej z danych prostych (rys. 1). Rozważmy inwersję względem okręgu o środku  $S$  i promieniu  $\sqrt{SA \cdot SB}$ . Obie rozpatrywane proste styczne są stałe, bo przechodzą przez środek inwersji  $S$ . Punkt  $A^*$  leży na półprostej  $SA^\rightarrow$  i spełnia warunek  $SA \cdot SA^* = \sqrt{SA \cdot SB}^2$ , stąd  $A^* = B$ . Obrazem okręgu  $\Gamma_1$  jest okrąg (bo  $\Gamma_1$  nie przechodzi przez punkt  $S$ ), styczny do danych prostych (bo są one stałe) i przechodzący przez punkt  $A^* = B$ . Wobec tego  $\Gamma_1^* = \Gamma_2$ , stąd także  $\Gamma_2^* = \Gamma_1$ .

Punkt  $S$  leży na zewnątrz okręgu  $\Gamma$ ; niech  $k$  i  $l$  będą prostymi stycznymi do  $\Gamma$ , poprowadzonymi z  $S$ . Obrazem  $\Gamma$  jest okrąg styczny do  $\Gamma_1^* = \Gamma_2$ ,  $\Gamma_2^* = \Gamma_1$ ,  $k^* = k$  oraz  $l^* = l$ . Jedynym takim okręgiem jest właśnie  $\Gamma$ , czyli  $\Gamma^* = \Gamma$ .

Punkt  $P$  to punkt styczności  $\Gamma_1$  i  $\Gamma$ , więc jego obrazem jest punkt styczności  $\Gamma_1^* = \Gamma_2$  i  $\Gamma^* = \Gamma$ , czyli  $Q$ . Środek inwersji  $S$ , punkt  $P$  i jego obraz  $Q$  są współliniowe.  $\square$

**R2.** Rozważmy inwersję względem okręgu o środku  $A$  i promieniu  $AB$  (rys. 2). Obrazem okręgu  $\Gamma_1$ , przechodzącego przez środek inwersji  $A$  oraz przez punkty  $B$  i  $C$ , jest prosta przez punkty  $B^* = B$  i  $C^* = C$ , czyli prosta  $k = BC$ . Stąd też  $k^* = \Gamma_1$ .

Niech  $m \neq l$  będzie prostą przechodzącą przez punkt  $A$  i styczną do  $\Gamma_2$ . Obrazem okręgu  $\Gamma_2$ , nieprzechodzącego przez środek inwersji, jest okrąg styczny do  $\Gamma_1^* = k$ ,  $k^* = \Gamma_1$ ,  $l^* = l$  oraz  $m^* = m$ . Jedynym takim okręgiem jest  $\Gamma_2$ , stąd  $\Gamma_2^* = \Gamma_2$ .

Punkt  $D$  to punkt styczności prostej  $l$  i okręgu  $\Gamma_2$ , więc jego obrazem jest punkt styczności  $l^* = l$  oraz  $\Gamma_2^* = \Gamma_2$ , czyli on sam:  $D^* = D$ . Wobec tego z warunku  $AD \cdot AD^* = AB^2$  wynika, że  $AD = AB$ .  $\square$

**Wskazówka 3.** W inwersji względem okręgu o środku  $S$  i promieniu  $SA$  (rys. 3), okręgi  $\Gamma_A, \Gamma_C$  i  $\Gamma$  są stałe. Stąd  $\Gamma_B^* = \Gamma_D$  oraz  $B^* = D$ , co daje tezę.

**Wskazówka 4.** Okrąg  $\Gamma_2$  jest stały przy inwersji względem  $\mathcal{O}(C, CA)$ .

Zadanie 4 pochodzi z obozu naukowego Olimpiady Matematycznej z roku 2004.