






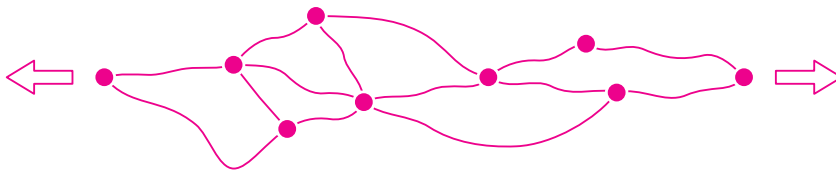
tel. 22 63 10 34 48  
7-21 11 59 2

## SPIS TREŚCI NUMERU 7 (470)

Kombinatoryka i nieskończoność <i>Wojciech Guzicki</i>	str. 2
Konstrukcja, która zmieniła definicję krzywej <i>Marta Szumańska</i>	str. 4
Czy nieskończoność <i>JEST</i> ? <i>Michał Szurek</i>	str. 6
Czy nieskończoność jest potrzebna? <i>Bronisław Wajnryb</i>	str. 7
Pochwała nieskończoności? <i>Mariusz Skalba</i>	str. 8
Po co mi nieskończoność? <i>Jerry Tyszkiewicz</i>	str.10
 Zadania	str.10
Niezbędna <i>persona non grata</i> <i>Witold Sadowski</i>	str.11
Nieskończoność – nieskończenie użyteczna <i>Mirosław Lachowicz</i>	str.12
Tako rzecze Arystoteles <i>Marek Kordos</i>	str.13
Strumienie, czyli pochwała lenistwa <i>Marcin Benke</i>	str.14
W pół drogi do nieskończoności <i>Maciej Lisicki</i>	str.16
Kaskady i swaty <i>Przemysław Kiciak</i>	str.19
Aktualności	str.20
 Genetyczne rocznice <i>Magdalena Fikus</i>	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Zdalne mierzenie temperatury <i>Michał Bejger</i>	str.24
Niebo jak własna kieszeń: Lipiec	str.24
 Równe i różne $\infty$ <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

## W następnym numerze polecamy DUALNOŚĆ

Czy wiesz, jak znaleźć najkrótszą drogę z miasta *A* do miasta *B*? Wystarczy zbudować model sieci drogowej ze sznurka: dla każdej drogi bierzemy sznurek o długości proporcjonalnej do przejazdu tą drogą, a następnie wszystkie drogi wychodzące z danego miasta łączymy w jeden supeł. W końcu chwytamy za supeły reprezentujące miasta *A* i *B* i rozciągamy. Supeły na napiętej części sznurka odpowiadają miastom na najkrótszej trasie!



Co ciekawe, aby znaleźć *najkrótszą* trasę, wyznaczyliśmy *największą* odległość między dwoma supełami, przy danych ograniczeniach sznurka.

**Ta intrygująca zależność jest nieprzypadkowa.**

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.  
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**Pol-Perfect:** [www.polperfect.com.pl](http://www.polperfect.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2013 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)

lub kontaktując się z Telefonicznym Biurem Obsługi Klienta

pod numerem: 801 800 803 lub 22 717 59 59 – czynne w godzinach 7<sup>00</sup> – 18<sup>00</sup>.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**



Młody nasz uczonec miał przed oczyma geometrię Kartezjusza, analizę Harriota, dzieła Fermata i Roberval'a. Spostrzegł jasno, że ci geniusze, torując drogę nauce, postępowali przecież niepewnym krokiem. Zebrał razem wszystkie ich odkrycia, dołączył wnioski, o jakich dotąd nie pomyślano i przedstawił poprawki do używanych naówczas logarytmów. Hervas przeszło rok pracował nad swoim dziełem. W owym czasie książki o geometrii pisano wyłącznie po łacinie; Hervas, dla większego upowszechnienia, napisał swoją po hiszpańsku, dla zaostrzenia zaś ogólnej ciekawości nadał jej tytuł: „Odsłonięte tajemnice analizy wraz z wiadomością o nieskończonościach w każdym wymiarze”.

Gdy rękopis był ukończony [...] podał rękopis do cenzury. Cenzorowie z wydziału teologicznego zaczęli robić niejaki trudności, ponieważ analiza nieskończenie małych wielkości zdawała się prowadzić do atomów Epikura, którą to naukę Kościół potępił. Wy tłumaczono im, że chodzi o wielkości oderwane, a nie o cząstki materialne, i cofnęli swój sprzeciw.

Z cenzury dzieło przeszło do drukarza. Był to wielki tom in quarto, do którego trzeba było ułać brakujące czcionki algebraiczne, a nawet sporządzić nowe patryce. [...] Druk trwał ponad sześć miesięcy.

[...] Nazajutrz Hervas [...] ruszył drogą do Madrytu. Przybywszy do stolicy, zasiadł przed księgarzem Moreno i rzekł mu: [...] Sto egzemplarzy możesz señor sprzedać na własną korzyść za trzysta pistołów, z pozostałych zaś raczysz zdać rachunek. Pochlebiam sobie, że wydanie w przeciągu kilku tygodni będzie wyczerpane i że będę mógł przedsięwziąć drugie, do którego dodam pewne objaśnienia, jakie podczas druku przyszły mi do głowy.

[...] Po upływie trzech tygodni nasz geometra osądził, że czas udać się do Morena [...] i z niesłychanym zmartwieniem dowiedział się, że dotąd nie sprzedano ani jednego egzemplarza.

[...] przyczyna tego była następująca: Egzemplarze wystawione w księgarni u Morena wpadły wkrótce w ręce kilku ciekawców [...] Jeden z nich, przeczytawszy nagłówek: „Odsłonięte tajemnice analizy” rzekł, że musi to być jakiś paszkwil na rząd; drugi przypatrzawszy się bacznie tytułowi, dodał ze złośliwym uśmiechem, że niezawodnie jest to satyra na don Pedra de Alanyes, ministra skarbu, gdyż analiza jest anagramem nazwiska Alanyes, następna zaś część tytułu, „o nieskończonościach w każdym wymiarze”, wyraźnie stosuje się do tego ministra, który w istocie materialnie był nieskończenie mały i nieskończenie opasły, moralnie zaś nieskończenie wyniosły i nieskończenie prostacki.

[...] Odtąd nie nazywano inaczej ministra Alanyes jak señorem „Analizą nieskończoności”. Dygnitarz ten przyzwyczaił się już do niechęci, jaką wzbudzał w ludziach, i bynajmniej na nią nie zważał, ale uderzony często powtarzanym przezwiskiem, zapytał pewnego razu swego sekretarza o jego znaczenie. Otrzymał odpowiedź, że początek temu żartowi dała pewna książka matematyczna, którą sprzedawano u Morena. Minister, nie wchodząc w bliższe szczegóły, kazał naprzód uwieźć autora, następnie zaś skonfiskować wydanie.

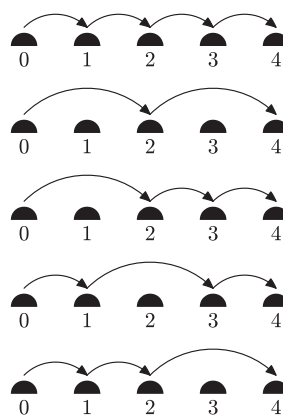
Jan Potocki *Rękopis znaleziony w Saragossie*  
Czytelnik, 1965;  
w oparciu o przekład Edmunda Chojeckiego z 1847 roku  
tekst przygotował Leszek Kukulski

# Kombinatoryka i nieskończoność

Wojciech GUZICKI\*

Kombinatoryka zajmuje się własnościami zbiorów skończonych, w szczególności zagadnieniem zliczania elementów takich zbiorów. Czy może zatem w kombinatoryce znaleźć się miejsce dla nieskończoności? Okazuje się, że tak – pokażę jedno z takich zastosowań nieskończoności: funkcje tworzące. Zacznę od następującego zadania:

**Zadanie.** Żaba skacze z kamienia na kamień. Kamienie leżą jeden za drugim i są ponumerowane liczbami naturalnymi od zera; żaba startuje z kamienia zerowego. W jednym skoku potrafi ona przeskoczyć z jednego kamienia na następny lub o dwa kamienie dalej. Żaba może wykonywać kolejne skoki różnych długości. Na przykład, na czwarty kamień może dostać się, skacząc cztery razy na odległość jednego kamienia lub skacząc dwa razy, za każdym razem na odległość dwóch kamieni, lub też skacząc raz na odległość dwóch kamieni i dwa razy na odległość jednego kamienia. Tę ostatnią możliwość może zrealizować na trzy sposoby: skok podwójny może być pierwszym, drugim lub trzecim skokiem. Oto możliwe drogi żaby na czwarty kamień:

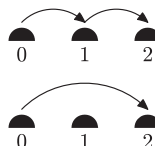


Łącznie ma więc pięć różnych sposobów dostania się na czwarty kamień. A ile istnieje sposobów dostania się na  $n$ -ty kamień?

Oznaczmy przez  $F_n$  liczbę dróg żaby na  $n$ -ty kamień. Oczywiście,  $F_1 = 1$ . Na kamień z numerem 1 żaba może bowiem dostać się tylko w jeden sposób – ma wykonać jeden pojedynczy skok:



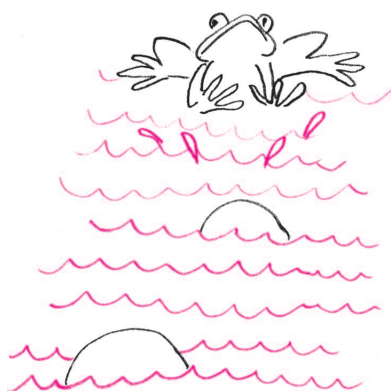
Następnie  $F_2 = 2$ . Na kamień z numerem 2 żaba może dostać się dwoma sposobami – wykonać dwa skoki pojedyncze lub jeden podwójny:



Zobaczymy teraz, na ile sposobów żaba może się dostać na kamień o numerze  $n + 2$ . Ma ona  $F_n$  różnych dróg na kamień o numerze  $n$  i  $F_{n+1}$  dróg na kamień o numerze  $n + 1$ . Ponieważ ostatni skok żaby jest skokiem podwójnym z kamienia o numerze  $n$  lub pojedynczym z kamienia o numerze  $n + 1$ , więc łącznie istnieje  $F_n + F_{n+1}$  dróg żaby na kamień  $n + 2$ . A więc  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . Zatem na trzeci kamień żaba może dostać się na  $1 + 2 = 3$  sposoby, na czwarty na  $2 + 3 = 5$  sposobów i tak dalej. Zauważmy, że jeśli przyjmiemy  $F_0 = 1$  (co jest całkiem naturalne: istnieje jeden sposób dostania się na kamień o numerze 0, mianowicie nie robić nic), to okaże się, że  $F_2 = F_0 + F_1$ . Zatem ciąg  $(F_n)$  jest określony wzorami

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{dla } n \geq 0.$$

\*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Ten ciąg jest dobrze znany w matematyce: jest to tzw. **ciąg Fibonacciego**. Powyższy wzór definiujący ten ciąg jest wzorem **rekurencyjnym**: kolejny wyraz ciągu nie jest zdefiniowany wzorem uzależniającym ten wyraz od indeksu  $n$ , ale w zależności od wyrazów poprzednich. Powstaje pytanie, czy możemy znaleźć wzór ogólny, zależny tylko od  $n$ . Jedną z metod otrzymywania wzorów ogólnych korzysta z tzw. funkcji tworzących.

Definiujemy funkcję tworzącą dla ciągu Fibonacciego wzorem

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Mamy teraz

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n = \\ &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} = \\ &= 1 + x + x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + x \cdot (F(x) - 1) + x^2 \cdot F(x) = \\ &= 1 + x + xF(x) - x + x^2 F(x) = 1 + xF(x) + x^2 F(x). \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równanie

$$F(x) = 1 + xF(x) + x^2 F(x),$$

z którego dostajemy wzór na  $F(x)$ :

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Teraz otrzymaną funkcję tworzącą rozwijamy w szereg potęgowy. W tym celu rozkładamy ułamek

$$\frac{1}{1 - x - x^2}$$

na tzw. ułamki proste. Szczegóły obliczeń pominię tutaj; Czytelnik może się natomiast łatwo przekonać (dodając ułamki), że

$$F(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{\beta}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \beta x},$$

gdzie

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{oraz} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Korzystamy teraz ze znanego wzoru na sumę nieskończonego szeregu geometrycznego. Mianowicie dla dowolnej liczby  $\gamma$  i takiej liczby  $x$ , że  $|\gamma x| < 1$ , mamy

$$\frac{1}{1 - \gamma x} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n x^n.$$

Stąd dostajemy rozwinięcie funkcji  $F(x)$  w szereg potęgowy

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n - \frac{\beta}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} \cdot x^n.$$

Porównując współczynniki przy kolejnych potęgach  $x$ , dostajemy następujący wzór ogólny:

$$F_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Ten wzór jest nazywany **wzorem Bineta**.

Zauważmy, że w tej metodzie otrzymywania wzoru ogólnego konieczne było rozwijanie funkcji w nieskończony szereg potęgowy. Tak więc nieskończoność została użyta nie tylko w znaczeniu potencjalnym (wzór obowiązuje dla każdej, dowolnie dużej, ale skończonej liczby  $n$ ), ale w znaczeniu aktualnym: mamy do czynienia z rzeczywiście nieskończonym szeregiem potęgowym.



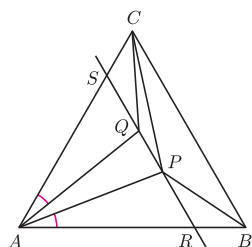
#### Rozwiązanie zadania M 1390.

Bez utraty ogólności możemy założyć, że  $\sphericalangle PAB < \sphericalangle PAC$ . Odbijmy symetrycznie  $P$  względem dwusiecznej kąta  $A$ , otrzymując punkt  $Q$ . Niech  $PQ$  przecina  $AB$  i  $AC$  odpowiednio w punktach  $R$  i  $S$ . Oczywiście

$$\sphericalangle PAC - \sphericalangle PAB = \sphericalangle PAQ$$

oraz

$$\begin{aligned} \sphericalangle PBC - \sphericalangle PCB &= \sphericalangle QCB - \sphericalangle PCB = \\ &= \sphericalangle PCQ. \end{aligned}$$



Wykażemy teraz, że  $\sphericalangle PAQ > \sphericalangle PCQ$ . Rozważmy obraz  $A'$  punktu  $A$  przy symetrii względem  $RS$ . Zauważmy, że punkt  $C$  leży na zewnątrz okręgu opisanego na trójkącie równobocznym  $A'RS$ , gdyż  $\sphericalangle RCS < \sphericalangle BCS = 60^\circ$ . W szczególności, punkt  $C$  leży na zewnątrz okręgu opisanego na trójkącie  $A'PQ$ , gdyż ten okrąg leży wewnątrz poprzedniego. Stąd  $\sphericalangle PCQ < \sphericalangle PA'Q$ .

# Konstrukcja, która zmieniła definicję krzywej

Marta SZUMAŃSKA\*

Ciąg punktów na płaszczyźnie  $(x_n)$  jest zbieżny do  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg ich odległości od  $x$ ,  $d(x_n, x)$  jest zbieżny do zera.

Na nieskończoności opierają się konstrukcje większości obiektów analizy matematycznej, choć często w niejawnym sposób. Przyjrzyjmy się choćby ciągłości – pojęciu na pierwszy rzut oka z nieskończonością niezwiązanemu. Można powiedzieć, że funkcja jest ciągła, jeśli „nie rozrywa” dziedziny. Jednak gdy chcemy ciągłość wyrazić precyzyjnie, chętnie sięgniemy do szufladki z nieskończonością, by posłużyć się pojęciem zbieżności i podać definicję: funkcja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest ciągła w punkcie  $t \in [0, 1]$ , jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(t)$  dla każdego ciągu  $(t_n)$  o wyrazach w  $[0, 1]$  zbieżnego do  $t$ .

Powyższy przykład pokazuje, że nieskończoność może być użytecznym narzędziem przy budowaniu ścisłych definicji opartych na mniej precyzyjnych intuicjach. Czasem jednak, przez nieskończoność właśnie, rozsądna, zdawałoby się, definicja może okazać się nieodpowiednia.

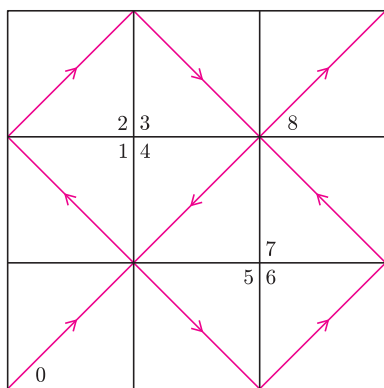
Spróbujmy zdefiniować krzywą na płaszczyźnie. Definicja powinna obejmować np. wykres funkcji kwadratowej, łamaną, czy tor ruchu punktu materialnego. Chcielibyśmy, by krzywa była obiektem ciągłym i jednowymiarowym, zatem naturalnie byłoby przyjąć, że *krzywa to ciągły obraz odcinka*. Taką też definicję zaproponował w XIX wieku Camille Jordan. Okazuje się jednak, że tak opisana klasa nie do końca odpowiada intuicjom związanym z pojęciem krzywej, gdyż należy do niej obiekt o dodatnim polu – istnieje bowiem funkcja ciągła, która przekształca odcinek  $[0, 1]$  na kwadrat. Przykład takiej funkcji jako pierwszy podał Peano w 1890 roku.

Jak skonstruować taką nietypową „krzywą”? Należy odpowiednio dobrać nieskończony ciąg funkcji ciągłych określonych na  $[0, 1]$ . Obraz każdej z funkcji w ciągu jest łamaną o skończonej liczbie odcinków, jednak dopuszczenie do konstrukcji nieskończoności pod postacią przejścia granicznego prowadzi do funkcji, której obrazem jest pełen kwadrat.

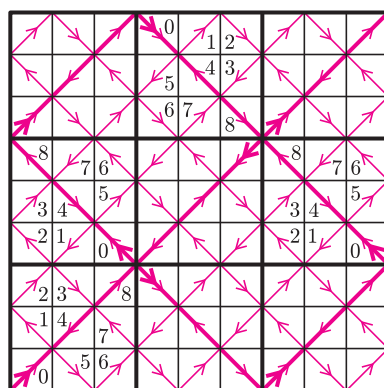
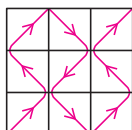
Przyjrzyjmy się dokładniej konstrukcji odpowiedniego ciągu funkcyjnego. Niech  $K$  będzie kwadratem o boku 1. Kwadrat  $K$  dzielimy na 9 przystających kwadratów, które numerujemy od 0 do 8 (kwadrat o numerze  $i$  oznaczamy  $K_i$ ), następnie tworzymy łamaną  $l_1$ , której odcinkami są wybrane przekątne kolejnych kwadratów (patrz rys. 1). Funkcja  $f_1 : [0, 1] \rightarrow K$  opisuje położenie w chwili  $t$  punktu poruszającego się po łamanej zgodnie z zadanym przez strzałki na rysunku kierunkiem i stałą prędkością równą  $3\sqrt{2}$ . Zauważmy jeszcze, że gdy  $t \in [\frac{i}{9}, \frac{i+1}{9}]$ , to  $f_1(t)$  znajduje się w kwadracie  $K_i$ .

Aby skonstruować łamaną  $l_2$ , zastąpimy każdy z odcinków łamanej  $l_1$  jej trzykrotnie pomniejszoną kopią, w taki sposób, by początek pomniejszonej łamanej pokrywał się z początkiem zastępowanego odcinka (rys. 2). Następny wyraz naszego ciągu, funkcja  $f_2 : [0, 1] \rightarrow K$ , opisuje położenie punktu poruszającego się po krzywej  $l_2$  z prędkością  $9\sqrt{2}$  zgodnie z kierunkiem wskazanym przez strzałki na rysunku 2. Przyjmijmy, że wraz z łamaną  $l_1$  takim samym operacjom (pomniejszenia i odpowiedniego wklejania) podlega cały rysunek 1. Otrzymujemy w ten sposób rodzinę 81 kwadratów o boku  $1/9$ , przy czym każdemu z nich przypisana jest pewna liczba  $i_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$ . Każdemu z kwadratów nadajemy unikalny „numer katalogowy” złożony z dwóch liczb umożliwiających jego odnalezienie: pierwsza liczba jest równa  $i_1$ , jeśli kwadrat znajduje się w kwadracie  $K_{i_1}$ , zaś druga,  $i_2$ , to wspomniana wcześniej liczba przypisana kwadratowi w wyniku konstrukcji. Kwadrat o numerze  $i_1, i_2$  będziemy oznaczać przez  $K_{i_1, i_2}$ . Podobnie jak w pierwszym kroku, obserwujemy, że jeśli  $t \in [\frac{i_1}{9} + \frac{i_2}{9^2}, \frac{i_1}{9} + \frac{i_2+1}{9^2}]$ , to  $f_2(t)$  zawarte jest w kwadracie  $K_{i_1, i_2} \subset K_{i_1}$ .

Kolejne łamane i funkcje generujemy, powtarzając powyższe operacje. Łamana  $l_3$  powstaje w wyniku trzykrotnego pomniejszenia łamanej  $l_2$  i zastąpienia nią w opisany uprzednio sposób wszystkich odcinków wyjściowej krzywej  $l_1$ .

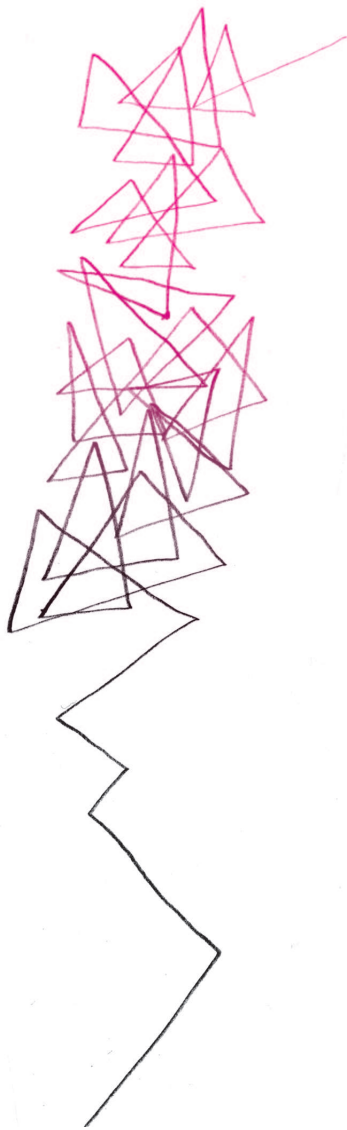


Rys. 1. Łamana  $l_1$  i kwadraty pierwszego podziału; poniżej krzywa odwiedzająca kwadraty w tej samej kolejności co  $l_1$ .



Rys. 2. Łamana  $l_2$  i kwadraty drugiego podziału.

\*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



W razie potrzeby skończone rozwinięcie uzupełniamy zerami lub ostatnią niezerową cyfrę rozwinięcia zmniejszamy o jeden i dopisujemy nieskończenie wiele cyfr 8.

Czytelnik, któremu znane jest pojęcie zbieżności jednostajnej, z łatwością zauważy, że rozumowanie, które przeprowadziliśmy, dowodzi zbieżności jednostajnej ciągu  $f_n$ , skąd, dzięki ciągłości funkcji  $f_n$ , wynika ciągłość funkcji granicznej  $x$ .

Dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  funkcja  $f_n : [0, 1] \rightarrow K$  opisuje położenie punktu poruszającego się z prędkością  $3^n \sqrt{2}$  po łamanej  $l_n$  powstałej przez zastąpienie odcinków łamanej  $l_1$  trzykrotnie pomniejszonymi kopiami łamanej  $l_{n-1}$ .

W każdym kroku konstrukcji otrzymujemy również rodzinę coraz drobniejszych kwadratów, którym przypisujemy odpowiednie numery katalogowe. W  $n$ -tym kroku konstrukcji dostajemy  $9^n$  kwadratów o boku  $3^{-n}$ , których numer katalogowy składa się z  $n$  cyfr ze zbioru  $\{0, 1, \dots, 8\}$ . Kwadrat o numerze  $i_1, i_2, \dots, i_n$  łatwo odnaleźć – wybieramy kwadrat pierwszego podziału o numerze  $i_1$ , wewnątrz którego znajdujemy kwadrat drugiego podziału z numerem  $i_2$  i tak dalej – z każdym kolejnym indeksem zawężając obszar poszukiwań, by w  $n$ -tym kroku dotrzeć do odpowiedniego kwadratu  $n$ -tego podziału.

Warto zauważyć, że

$$\text{jeśli } t \in \left[ \frac{i_1}{9} + \frac{i_2}{9^2} + \dots + \frac{i_n}{9^n}, \frac{i_1}{9} + \frac{i_2}{9^2} + \dots + \frac{i_n + 1}{9^n} \right], \text{ to } f_n(t) \in K_{i_1, i_2, \dots, i_n},$$

skąd można wywnioskować, że  $f_k(t) \in K_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  dla wszystkich  $k > n$ .

Wykażemy, że tak skonstruowany ciąg funkcyjny jest zbieżny, funkcja  $x(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  ciągła, a każdy punkt kwadratu jest postaci  $x(t)$ . Zaczniemy od dowodu tej ostatniej własności. Zauważmy, że każdy  $x \in K$  możemy opisać (niejednoznacznie) jako przecięcie pewnej nieskończonej rodziny kwadratów powstałych w kolejnych krokach konstrukcji. Zatem każdemu punktowi  $x$  możemy przypisać nieskończony numer katalogowy  $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ ; wówczas  $x \in K_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  dla każdego  $k \in \mathbb{N}$ . Niech

$$t = \frac{i_1}{9} + \frac{i_2}{9^2} + \dots + \frac{i_n}{9^n} + \dots,$$

co oznacza, że następujące po przecinku cyfry rozwinięcia  $t$  w systemie dziesiętnym to  $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ . Pokażemy, że  $f_n(t)$  zbiega do punktu  $x$ . Ponieważ  $t \in \left[ \frac{i_1}{9}, \frac{i_1+1}{9} \right]$ , to dla  $n \geq 1$ ,  $f_n(t) \in K_{i_1}$ ; analogicznie, ponieważ  $t \in \left[ \frac{i_1}{9} + \frac{i_2}{9^2}, \frac{i_1}{9} + \frac{i_2+1}{9^2} \right]$ , to dla  $n \geq 2$ ,  $f_n(t) \in K_{i_1, i_2}$ , i ogólnie, jeśli  $n \geq k$ , to  $f_n(t) \in K_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ . Zatem dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$ , dla  $n \geq k$ ,  $f_n(t)$  i  $x$  należą do tego samego kwadratu  $k$ -tego podziału, czyli ich odległość  $d(f_n(t), x) \leq 3^{-k} \sqrt{2}$ . To dowodzi żądanej zbieżności.

Powyższe rozumowanie dowodzi zbieżności ciągu  $f_n(t)$  tylko dla wybranych  $t$ . Aby wykazać ją dla wszystkich  $t \in [0, 1]$ , wystarczy zauważyć, że każdą liczbę można wyrazić w systemie dziesiętnym, zatem każdemu  $t \in [0, 1]$  możemy przypisać punkt  $x(t) \in K$  o nieskończonym indeksie odpowiadającym rozwinięciu dziesiętnemu  $t$ . Powtarzając poprzednie rozumowanie, stwierdzamy, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = x(t)$ . Pozostaje wykazać ciągłość funkcji  $x(t)$ .

Zauważmy, że dzięki ciągłości każdej z funkcji  $f_n$ , dla  $m \in \{1, 2, \dots, 9^n - 1\}$  obraz przedziału  $\left[ \frac{m-1}{9^n}, \frac{m+1}{9^n} \right]$  należy do dwóch sąsiadujących kwadratów  $n$ -tego podziału. Z wcześniejszych obserwacji wynika, że jeśli  $f_n(t)$  należy do pewnego kwadratu  $n$ -tego podziału, to  $x(t)$  również. Weźmy teraz dowolny ciąg  $(t_k)$  zbieżny do  $t$ . Jeśli  $t \in \left( \frac{m-1}{9^n}, \frac{m+1}{9^n} \right)$ , to począwszy od pewnego  $k$  – oznaczmy je przez  $k_n$  – wszystkie wyrazy ciągu  $(t_k)$  również należą do tego przedziału, zatem dla  $k \geq k_n$  wszystkie wyrazy ciągu  $x(t_k)$  należą do dwóch sąsiadujących kwadratów  $n$ -tego podziału, przy czym do jednego z nich należy również  $x(t)$ . Oznacza to, że dla  $k > k_n$  odległość  $d(x(t_k), x(t)) \leq 2 \cdot 3^{-n} \sqrt{2}$ , zatem  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = x(t)$ , czyli funkcja  $x : [0, 1] \rightarrow K$  jest ciągła.

Istnienie krzywych wypełniających kwadrat spowodowało konieczność poszukiwania przez matematyków innych definicji krzywych, lepiej oddających intuicję. Jedną z dróg prowadzących do celu jest zabezpieczenie się przed zgubnymi efektami działania nieskończoności – można zastrzec, by krzywa miała skończoną długość, żądając, by funkcja z pierwotnej definicji była nie tylko ciągła, ale by nie pozwoliła na zbyt szybkie rozciąganie odcinka  $[0, 1]$ , czyli była np. funkcją o ciągłej pochodnej.



**Rozwiązanie zadania M 1391.**  
Zastosujemy metodę tzw. nieskończonego schodzenia (zob. L. Kurlyandchik, *Złote rybki w oceanie matematyki*, TUTOR 2005).

Przypuśćmy przeciwnie, że  $x_0, y_0, z_0$  to liczby całkowite dodatnie, takie że  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2x_0y_0z_0$ . Ponieważ prawa strona jest liczbą parzystą, to dokładnie dwie z liczb  $x_0, y_0, z_0$  są nieparzyste lub żadna nieparzysta nie jest. Pierwszy przypadek nie może mieć miejsca, gdyż wówczas lewa strona przy dzieleniu przez 4 dałaby resztę 2, zaś prawa 0. Dlatego  $x_0 = 2x_1, y_0 = 2y_1, z_0 = 2z_1$  dla pewnych liczb całkowitych dodatnich  $x_1, y_1, z_1$ , mniejszych od  $x_0, y_0, z_0$  odpowiednio. Po wstawieniu do równania otrzymujemy zależność  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$ . Powtarzając całe rozumowanie, dostajemy malejące ciągi liczb całkowitych dodatnich  $(x_n), (y_n), (z_n)$ , przy czym  $x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 2^{n+1}x_ny_nz_n \geq 2^{n+1}$ , co jest niemożliwe.



Konsekwencją tak pojętego aktualizmu byłoby też odrzucenie reguły odrywania, czyli najbardziej podstawowej reguły wnioskowania, wyodrębnionej już w średniowieczu reguły *modus ponens*:  
*Jeżeli prawdziwe jest zdanie  $\alpha$  oraz prawdziwa jest implikacja ( $\alpha$  to  $\beta$ ), to prawdziwe jest też zdanie  $\beta$ .*  
Można sobie przecież wyobrazić, że długość dowodu formuły  $\alpha$ , jak i długość dowodu implikacji ( $\alpha$  to  $\beta$ ), są dostępnymi liczbami naturalnymi, a ich suma już nie.

## Czy nieskończoność *JEST*?

Michał SZUREK\*

Wacław Sierpiński polecił, by na jego grobie wyryto napis *Badacz nieskończoności*. André Weil, matematyk francuski, 1906–1998, założyciel i faktyczny lider tzw. grupy Bourbaki, a więc grupy odpowiedzialnej za wprowadzenie do szkół na całym świecie „nowej matematyki” lat siedemdziesiątych, powiedział, że gdyby ktoś chciał mieć jednozdaniową definicję matematyki, to należałoby powiedzieć, że jest to nauka o nieskończoności. Wyraził tym zgodną opinię, dominującą co najmniej przez trzy czwarte poprzedniego stulecia.

Matematycy lubią zbiory nieskończone do tego stopnia, że wyróżniają zbiory mniej i bardziej nieskończone. Oto prosta konstrukcja myślowa. Dla danego zbioru  $X$  utwórzmy zbiór jego podzbiorów,  $\mathcal{P}(X)$ . Na przykład dla  $X = \{1, 2, 3\}$  mamy osiem podzbiorów: pusty,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ . Gdy  $X$  jest zbiorem skończonym o  $n$  elementach, to  $\mathcal{P}(X)$  ma aż  $2^n$  elementów. Matematycy robią z tego twierdzenie: **nie ma odpowiedniości (tj. funkcji) wzajemnie jednoznacznej między elementami zbioru a wszystkimi jego podziorami** i fakt, że 3 jest mniejsze od 8, uogólniają tak, by dał się zastosować do dowolnych zbiorów. Podzbiorów jest „bardzo więcej” niż elementów.

To twierdzenie dobrze działa na dusze matematyków – pokazuje im (tzn. nam) nieskończoną liczbę piętér nieskończoności, coraz obfitszych, coraz tłustszych, nie tak, jak chudziutki  $\aleph_0$ , oznaczające najprostszą nieskończoność – tę, która jest udziałem ciągu liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, 5, ...

Równie ciepło myślimy o dowodzie, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Przypomnę. Gdyby liczb pierwszych było skończenie wiele, to ich iloczyn, powiększony o jedynkę, byłby... nową liczbą pierwszą, albo przynajmniej przez jakąś nową liczbę pierwszą by się dzielił.

W roku 2012 miałem semestralny wykład o matematyce dla wybranych studentów Instytutu Kultury Polskiej Uniwersytetu Warszawskiego. Instytut ma ambicje przyciągania najlepszych studentów, kształcących się w kierunkach humanistycznych. Nikt z nich, ale dosłownie nikt, nie zrozumiał tego dowodu nieskończoności zbioru liczb pierwszych, nie pojął, o co chodzi w tym przecież pięknym rozumowaniu. Bodaż najlepszy ze studentów, germanista, powiedział szczerze: *Każde ogniwo wnioskowania rozumiem, ale w cały dowód nie wierzę. Nie rozumiem, jak czegoś może BYĆ nieskończenie wiele.*

Poza problemem ontologicznym podnosił też pragmatyczny – przecież liczby w rodzaju 75295728956265922905722202572957 to nie jest rzeczywistość, to jeno nieodpowiedzialne konstrukcje myślowe, więc może jeśli nawet czegoś tam jest nieskończenie wiele, to te dalekie obiekty nie mają już znaczenia, można je zaniedbać.

Z refleksji nad tym, że bardzo wielkie liczby jawią nam się jako nieco inne twory, pojawiła się idea rozważania matematyki opartej na naszych aktualnych możliwościach poznawczych. W tej teorii operacje arytmetyczne nie są zawsze określone, bardzo wielkie liczby są „naturalne”, ale nie można ich interpretować jako zbiór jednostek (kropek, kresek, punktów, misiów pluszowych i tak dalej). Ponadto w zbiorze liczb „naturalnych” mogą być „luki” – nie wszystkie napisy to „naturalnie istniejące” liczby. Taki kierunek w podstawach matematyki nazywany jest *aktualizmem*. Zdecydowane próby stworzenia takiej matematyki podjął w latach sześćdziesiątych dwudziestego wieku Aleksandr Sergejewicz Jesienin-Wołpin. Podważył on tak niewzruszone prawdy matematyczne, jak na przykład to, że operację „dodaj jeden” można stosować nieskończoną liczbę razy. Wszyscy bowiem wiemy, że następujące rozumowanie jest teoretycznie poprawne, ale... nic z tego nie wynika. Mianowicie można bez odpoczynku dojść piechotą z Lizbony do Białegostoku. Dowód: pierwszy krok oczywiście łatwo postawić. Jeżeli jednak postawię już dowolną liczbę kroków, to jeszcze jeden mały kroczek na pewno będę w stanie postawić. Tego typu rozumowania właśnie próbował zanegować Jesienin-Wołpin. Kiedyś nie zdołamy tego kroku postawić.

\*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Teoria Jesienina-Wołpina jest, owszem, ambitną próbą intelektualną, a jednak nie mamy wątpliwości, że jest udziwniona. Czy nie lepiej, np. zbierając grzyby, wierzyć, że ZAWSZE znajdzie się następny? Taką koncepcję nieustannego stawania się nazywamy nieskończonością potencjalną.

A przecież nieskończoności używamy też praktycznie, wierząc, że choćby woda ma strukturę ciągłą (bo inaczej, jak pływać?), mimo iż mędrcy wmawiają nam, że to zbiorowisko oddzielnych cząstek.

Nasze zmysły nie są cyfrowe, są analogowe – a zatem dopuszczają nieskończoną ilość stanów. Bez pojęcia nieskończoności bylibyśmy tak bezbronni jak... komputery bez systemu operacyjnego, jak dzieci we mgle.

Nieskończoność. Cóż za pojęcie! *Si non è vero, è ben trovato*. Jeśli to nawet nie jest prawdziwe, to jednak dobrze wymyślone.

Tak, jak i cała matematyka...



## Czy nieskończoność jest potrzebna?

Bronisław WAJNRYB

Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska

Dla mnie odpowiedź nie jest oczywista. W pierwszej chwili pomyślałem, że nie jest potrzebna, ale to było sprowokowane samym pytaniem.

Potem zacząłem szukać argumentów za nieskończonością. W teorii liczb szukamy nieskończenie wielu liczb pierwszych bliźniaczych. W analizie mówimy o ciągach zbieżnych. Wiele twierzeń o istnieniu jest prawdziwych tylko w przestrzeniach zupełnych, które trudno zdefiniować bez nieskończoności.

Ale co by było, gdyby nieskończoność zamienić na jakąś dużą liczbę, np.  $\infty = 9^{9^9}$ ?

Przecież w obserwowalnym wszechświecie jest tylko skończona liczba atomów. Na prostej jest „fizycznie” tylko skończona ilość punktów. Rachunki robione za pomocą komputerów są skończone, dalekie od powyższej nieskończoności, a coraz częściej się na nich opieramy.

Jeśli chcemy coś udowodnić dla tak dużych liczb, musimy nadal korzystać z indukcji matematycznej. W topologii bardzo wiele problemów sprowadza się do obiektów kawałkami liniowych, które są określone przez skończoną ilość danych.

W końcu skłaniam się ku stwierdzeniu, że nieskończoność nie jest bardzo ważna, ale nie wypędzałbym jej całkowicie, dałbym jej żyć na uboczu, choćby ze względu na teorię zbiorów, która bez nieskończoności i bez różnych mocy i porządków strasznie by zubożała. Też najróżniejsze kontrprzykłady, które pozwalają lepiej zrozumieć matematykę, są bardzo często oparte na nieskończoności.

Mniej więcej tak napisałbym pół roku temu. Może dodałbym jeszcze kilka przykładów za i przeciw nieskończoności. Ale pół roku temu zacząłem

zajmować się problemem średniowalności (*amenability*) dla niektórych grup skończenie generowanych.

Próbuję rozstrzygnąć, czy dla danej grupy  $G$  istnieje miara skończona, skończenie addytywna, która jest określona dla wszystkich podzbiorów grupy  $G$  i jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia z lewej strony (to znaczy gdy mnożymy wszystkie elementy podzbioru  $A$  z lewej strony przez dowolny ustalony element grupy  $G$ , to miara nowego zbioru jest taka jak miara zbioru  $A$ ).

Dla grup skończonych wystarczy wziąć ilość elementów  $|A|$  zbioru  $A$  jako jego miarę.

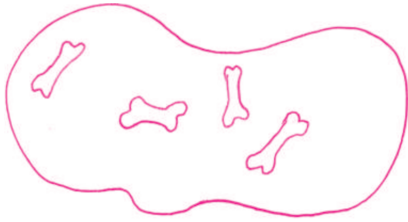
Dla grup nieskończonych, na przykład dla  $\mathbb{Z}$ , problem jest trudny. Dla  $\mathbb{Z}$  byłoby naturalne wziąć gęstość zbioru  $A$ , to znaczy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [-n, n]|}{2n+1}$ , ale nie każdy zbiór ma gęstość, granica może nie istnieć, a górna granica nie jest addytywna. Żeby udowodnić istnienie takiej miary na  $\mathbb{Z}$ , musimy korzystać z ultrafiltrów, w szczególności z lematu Zorna–Kuratowskiego.

Zafascynował mnie ten problem (choć jest on dosyć daleki od tego, czym się zwykle zajmuję) i wielu innych matematyków zajmuje się tym problemem od wielu lat, a bez nieskończoności problem by nie istniał.

Oczywiście, można zapytać, po co zajmować się takim problemem? Wtedy życie nieskończoności znów zawisłoby na włosku. Ale ja nie rozważam pytania, czy nieskończoność potrzebna jest „zwykłym ludziom”, tylko czy potrzebna jest matematykom, na przykład mnie. Dla matematyka fascynacja problemem jest bardzo dobrym powodem, żeby się nim zajmować. Więc głosuję TAK:

**nieskończoność jest potrzebna.**





# Pochwała nieskończoności?

Mariusz SKAŁBA\*

A w ósmy dzień Bóg stworzył liczby pierwsze. I stworzył ich nieskończenie wiele. I widział, że to było dobre. (apokryf z XXI wieku)

1. Niech  $\pi(x)$  oznacza liczbę liczb pierwszych nie większych od  $x$ . Tak więc  $\pi(x) \geq 1$  dla  $x \geq 2$  oraz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) = \infty,$$

co udowodnił już Euklides. Natomiast Czebyszew w połowie XIX wieku wykazał między innymi, że

$$\pi(2x) - \pi(x) \geq 1 \quad \text{dla } x \geq 1.$$

Jeszcze wcześniej Legendre udowodnił, że

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0.$$

I tu zaczyna się nasza historia. Z (1) wynika mianowicie, że dla każdego  $x \geq 2$  istnieje  $y > x$ , takie że

$$\frac{\pi(y)}{y} < \frac{\pi(x)}{x}.$$

Czy dla dostatecznie dużych  $x$  można przyjąć  $y = 2x$ ? Głównym celem tej notki jest uzasadnienie odpowiedzi twierdzącej na to pytanie – okaże się, że wymaga to użycia dość subtelnych metod. Mamy więc udowodnić, że istnieje  $x_0 > 0$ , takie że dla  $x \geq x_0$  zachodzi nierówność

$$\frac{\pi(2x)}{2x} < \frac{\pi(x)}{x},$$

lub, co na jedno wychodzi, nierówność jej równoważna

$$(2) \quad \pi(2x) < 2\pi(x).$$

Nierówność (2) można wysłowić w ten sposób:

dla  $x \geq x_0$  w przedziale  $(0, x]$  jest więcej liczb pierwszych niż w przedziale  $(x, 2x]$ .

Pokażemy najpierw, że (2) nie wynika z następującej popularnej wersji twierdzenia o liczbach pierwszych

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Na mocy (3) możemy bowiem napisać

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right) \quad \text{oraz} \quad \pi(2x) = \frac{2x}{\log 2x} + o\left(\frac{2x}{\log 2x}\right),$$

skąd otrzymujemy

$$2\pi(x) - \pi(2x) = \frac{(2 \log 2)x}{\log x(\log x + \log 2)} + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Widać, że wyraz główny może być zdominowany przez człon resztowy  $o(\dots)$ , a więc nie można wnioskować, że lewa strona jest dodatnia dla dostatecznie dużych  $x$ . Z powyższego oszacowania wynika „tylko”, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(2x)}{2\pi(x)} = 1.$$

Aby wykazać (2), trzeba skorzystać z następującej mocniejszej wersji twierdzenia o liczbach pierwszych

$$(4) \quad \pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + o\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Po prostych rachunkach otrzymujemy stąd

$$2\pi(x) - \pi(2x) = \frac{(2 \log 2)x}{\log x(\log x + \log 2)} + o\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right),$$

co daje

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi(x) - \pi(2x)}{x/(\log x)^2} = 2 \log 2 > 0,$$



## Rozwiązanie zadania F 836.

Masa  $m$  przelewającej się wody zależy od wysokości  $h$ , na jakiej znajduje się jej powierzchnia nad poziomą krawędzią tamy, od przyspieszenia ziemskiego  $g$ , gęstości wody  $d$  i jest proporcjonalna do długości tamy  $L$ . Mamy:

$$\frac{dm}{dt} \propto h^\alpha g^\beta d^\delta L.$$

Porównanie wymiarów lewej i prawej strony równania prowadzi do wniosku, że  $\alpha = 3/2$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\delta = 1$ . Ostatecznie ilość wody (jej masa) przelewająca się w jednostce czasu wzrośnie  $k^{3/2}$  razy.

\*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



a z tego (2) wynika natychmiast. Obie powyższe wersje twierdzenia o liczbach pierwszych (oszacowania (3) oraz (4)) są wnioskami z twierdzenia o liczbach pierwszych Hadamarda–de la Vallée-Poussina, udowodnionego przez tych matematyków niezależnie w 1896 roku w postaci

$$(5) \quad \pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}),$$

gdzie  $c > 0$  jest stałą absolutną. Rzeczywiście, dwukrotne całkowanie przez części prowadzi do

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + O\left(\frac{x}{(\log x)^3}\right),$$

co na mocy (5) i prostej obserwacji

$$O(xe^{-c\sqrt{\log x}}) = O\left(\frac{x}{(\log x)^3}\right)$$

proceedzi do (4). Na zakończenie części 1. zauważmy, że hipotetyczne ulepszenie (5)

$$(6) \quad \pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(x^{1-\delta})$$

nie zostało, póki co, udowodnione dla żadnego  $\delta > 0$ . Natomiast to, że (6) zachodzi dla każdego  $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ , jest równoważne hipotezie Riemanna, co udowodnił von Koch w 1901 roku.

2. To, że wielu interesujących pytań dotyczących liczb pierwszych nie można by w ogóle postawić, gdyby było ich tylko skończenie wiele, wykazano powyżej. Krótko mówiąc: analityczna teoria liczb nie miałaby racji bytu. W punkcie 2. pokażemy pokrótce, że algebraiczna teoria liczb byłaby też dużo mniej pasjonująca. Z ogólnej teorii pierścieni Dedekinda wynika bowiem, że jeśli w takim pierścieniu jest tylko skończenie wiele ideałów pierwszych, to obowiązuje w nim twierdzenie o jednoznaczności rozkładu. To wygodne twierdzenie zachodziłoby więc w szczególności w pierścieniach cyklotomicznych  $\mathbb{Z}[\omega_p]$ , które są zbiorami liczb postaci

$$\mathbb{Z}[\omega_p] = \{a_0 + a_1\omega_p + \dots + a_{p-2}\omega_p^{p-2} \mid a_0, a_1, \dots, a_{p-2} \in \mathbb{Z}\},$$

gdzie  $p$  jest ustaloną liczbą pierwszą, a  $\omega_p = \cos(2\pi/p) + i \sin(2\pi/p)$  jest pierwiastkiem pierwotnym  $p$ -tego stopnia z 1. Już Kummer udowodnił w połowie XIX wieku wspaniałe, ogólne twierdzenie o równaniu Fermata

$$(7) \quad x^p + y^p + z^p = 0,$$

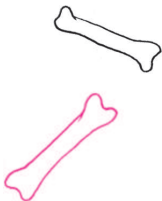
z którego wynika, między innymi, że w przypadku jednoznaczności rozkładu w pierścieniu  $\mathbb{Z}[\omega_p]$ , równanie (7) możliwe jest tylko dla  $xyz = 0$ . Tak więc historia Wielkiego Twierdzenia Fermata *zakończyłaby się* ponad 150 lat temu i to niezależnie od tego, jak wielka *byłaby rzekomo skończona* moc zbioru wszystkich liczb pierwszych! Ale na szczęście (?) jest inaczej: liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, a największą liczbą pierwszą  $p$ , taką, że w  $\mathbb{Z}[\omega_p]$  zachodzi twierdzenie o jednoznaczności rozkładu, jest  $p = 19$ . Kummer, co prawda, we wspomnianym wyżej wspaniałym twierdzeniu zadowala się założeniem znacznie słabszym niż założenie o jednoznaczności rozkładu: aby udowodnić, że równanie (7) nie ma nietrywialnych rozwiązań, wystarczy mu założenie, iż tzw. *liczba klas ideałów* pierścienia  $\mathbb{Z}[\omega_p]$  nie jest podzielna przez  $p$ . Warto wspomnieć, że metoda Kummera opiera się na następującym rozkładzie liczby  $-z^p$  na czynniki:

$$-z^p = x^p + y^p = \prod_{k=0}^{p-1} (x + \omega_p^k y) \quad \text{dla } p > 2$$

oraz że na tej drodze nie udało się uzyskać pełnego dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata! Dowód Andrew Wilesa z 1995 r. opiera się na wnikliwym badaniu konsekwencji istnienia nietrywialnego rozwiązania równania (7) w nowoczesnej teorii krzywych eliptycznych – w ten sposób uzyskuje się upragnioną sprzeczność.



Można się z nią zapoznać, na przykład, z książek: J. Browkin, *Teoria ciał*, Warszawa 1978 oraz Z.I. Borewicz, I.R. Szafarewicz, *Teoria ciał*, Moskwa 1985.



A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. of Math. 141 (1995), 443–551.

# Po co mi nieskończoność?

Jerzy TYSZKIEWICZ

Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki,  
Uniwersytet Warszawski

Po to, żeby twierdzenie o pełności zachodziło.

Wiem, że po tej deklaracji nie mam wyjścia i muszę wytłumaczyć, o co chodzi.

Zajmuję się logiką. Logika dla matematyków to trochę jak gramatyka historyczna dla polonistów: nauka o języku, którym się posługują. Język ten jest złożony z formuł, będących napisami, które z kolei wyrażają własności struktur matematycznych, na przykład podzbiorów prostych (których jest nieskończenie wiele) albo algebry wartości logicznych **prawda** i **fałsz**, która jest skończona.

Jednym z najważniejszych w logice jest twierdzenie o pełności dla logiki pierwszego rzędu, które udowodnił jako pierwszy Kurt Gödel.

Orzeka ono, że każdą własność struktur matematycznych, którą da się wyrazić w logice pierwszego rzędu i która przysługuje wszystkim bez wyjątku strukturom, można także udowodnić, posługując się formalnym systemem dowodowym. Własności przysługujące wszystkim strukturom nazywa się tautologiami i można o nich myśleć jako o fundamentalnych prawach matematycznego świata, sformułowanych za pomocą sztywnego, skodyfikowanego języka logiki. Z kolei system dowodowy opiera się na ściśle

określonych manipulacjach na napisach, którymi są formuły logiki, w oderwaniu od wszelkich intuicji czy odwołań do świata struktur. Formułę, dla której znajdzie się dowód w tym systemie, nazywa się twierdzeniem.

Twierdzenie o pełności mówi, że zbiory tautologii i twierdzeń są identyczne: jak coś jest prawdziwe w każdej strukturze, to ma także formalny dowód, a jak ma dowód, to jest prawdziwe we wszystkich strukturach.

Nieformalnie, matematyk ścisły formalista (tak sobie wyobrażam użytkowników systemu dowodowego) i matematyk odwołujący się do rozumienia i znaczenia formuł (powiedzmy o nim, że to matematyk platonista) tworzą i badają **tę samą** matematykę.

Kluczowe dla twierdzenia o pełności jest to, że dopuszczone są w nim także struktury nieskończone jako obiekty, których własności wyraża logika. Z twierdzenia Trachtenbrota wynika, że dla zbioru formuł prawdziwych we wszystkich strukturach skończonych (ale niekoniecznie prawdziwych w strukturach nieskończonych) nie dałoby się stworzyć stosownego systemu dowodowego. W świecie bez struktur nieskończonych drogi matematyka-formalisty i matematyka-platonisty by się rozeszły.



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

**M 1390.** Dany jest punkt  $P$  wewnątrz trójkąta równobocznego  $ABC$  (rys. 1). Udowodnić, że

$$|\sphericalangle PAB - \sphericalangle PAC| \geq |\sphericalangle PBC - \sphericalangle PCB|.$$

Rozwiązanie na str. 3

**M 1391.** Udowodnić, że równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich.

Rozwiązanie na str. 6

**M 1392.** Pokolorowano pewne odcinki okręgu o łącznej długości większej niż połowa obwodu tego okręgu (rys. 2). Udowodnić, że istnieją dwa punkty antypodyczne, tzn. symetryczne względem środka okręgu, które są pokolorowane.

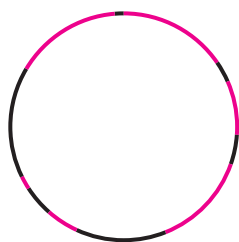
Rozwiązanie na str. 13

Przygotowali Andrzej MAJHOFER i Michał NAWROCKI

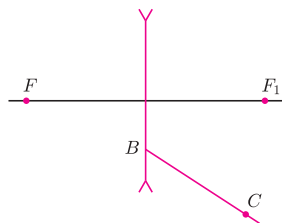
**F 835.** Na rysunku 3 przedstawiono bieg promienia  $BC$  wychodzącego z soczewki rozpraszającej, której ogniska znajdują się w punktach  $F$  i  $F_1$ . Znaleźć metodą geometryczną bieg promienia padającego na soczewkę w punkcie  $B$ .

Rozwiązanie na str. 17

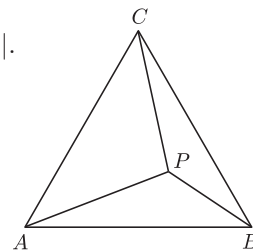
**F 836.** Podniesienie stanu wody w zbiorniku prowadzi do jej „przelania się” przez tamę. Ile razy wzrośnie masa wody przelewającej się przez tamę w jednostce czasu, jeśli poziom wody nad krawędzią tamy wzrośnie  $k$  razy? Zakładamy, że w obu przypadkach poziom wody nieznacznie przewyższa tamę. Rozwiązanie na str. 8



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 1



## Niezbędna *persona non grata*

Witold SADOWSKI\*

Pojęcie nieskończoności można rozpatrywać z rozmaitych perspektyw. Poniżej spojrzymy na nie przez pryzmat równania Naviera–Stokesa, które opisuje przepływ nieściśliwych płynów. Niewiadomą w tym równaniu jest prędkość (a także ciśnienie) w dowolnej chwili  $t > 0$ , przy czym zakładamy, że prędkość płynu w chwili  $t = 0$  jest nam dana, podobnie jak prędkość płynu na brzegu obszaru (przyjmujemy zwykle, że jest ona stale zerowa). Cały opis przepływu opiera się na założeniu, że w każdej chwili (a jest ich, oczywiście, nieskończenie wiele) i w każdym punkcie obszaru (a punktów takich jest także nieskończenie wiele) można określić wektor prędkości płynu. To, co chcielibyśmy od naszego modelu, to

- 1) jednoznaczność, która zakłada, że gdy określony jest z całą dokładnością przepływ w chwili  $t = 0$ , to przypisanie wektorów prędkości w każdej chwili  $t > 0$  można zrobić tylko na jeden sposób;
- 2) brak wybuchów: jeśli początkowa prędkość jest ograniczona i zmienia się w gładki sposób od punktu do punktu (tzn. prędkość i jej pochodne są ciągłe), to w każdym momencie w przyszłości prędkość jest ograniczona.

Warunki 1) oraz 2) wydają się niezbyt restrykcyjne, a mimo to od niemal 200 lat nie udało się wykazać, że istotnie są one spełnione (wiadomo, że jest tak dla przepływów dwuwymiarowych, ale nas, oczywiście, interesuje świat trójwymiarowy).

Już z tego pobieżnego opisu widać, że w opisywanej tu dziedzinie stosunek do nieskończoności jest dość ambiwalentny. Z jednej strony chętnie akceptujemy fakt, że nasz opis przepływu opiera się na założeniu, że płyn stanowi continuum złożone z nieskończenie wielu punktów, a czas płynie w sposób ciągły. Akceptacja ta jest radosna, bo raczej nikt nie bierze na poważnie możliwości śledzenia ruchu pojedynczych cząsteczek płynu: ich liczba, choć skończona, wydaje się dużo bardziej przerażająca od nieskończoności. Z drugiej strony nerwowo reagujemy na sugestie, że przepływ mógłby wygenerować (lokalnie) nieskończoną prędkość. Ponieważ mówimy tu o podstawowym równaniu hydrodynamiki, więc nie jest zaskakujące, że niedawno ogłoszono nawet nagrodę dla tego, kto raz na zawsze wyeliminuje nieskończone wektory prędkości z równania Naviera–Stokesa (lub wykaże, że takowe jednak mogą się pojawić – wtedy cały model stanie pod znakiem zapytania).

Zanim jednak nastąpi ostateczne rozwiązanie tego problemu, warto wspomnieć o tym, jak do tej pory niechcianą nieskończoność próbowano poddać rozmaitym ograniczeniom. Po pierwsze (to stary wynik Leraya z 1934 roku), okazało się, że hipotetyczny zbiór czasów  $\mathcal{T}$ , w których prędkość wybuchła, nawet jeśli jest niepusty, to przynajmniej jest bardzo mały w następującym sensie: dla dowolnie małej liczby  $\varepsilon > 0$  można znaleźć serię odcinków o długościach:  $r_1, r_2, r_3, \dots$ , które łącznie przykrywają zbiór  $\mathcal{T}$ , a przy tym

$$\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} + \dots < \varepsilon.$$

Po drugie, wykazano (dużo później, bo w 1982 roku; to wynik Caffarellego, Kohna i Nirenberga), że zbiór  $\mathcal{R}$  punktów czasoprzestrzeni, w których ewentualnie dochodzi do wybuchu prędkości, też jest bardzo mały, tak że dla dowolnie małej liczby  $\varepsilon > 0$  można znaleźć serię czterowymiarowych walców mających w „podstawie” kulę o promieniu  $r_i$  oraz o „wysokości” w czasie równej  $r_i^2$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , które łącznie przykrywają zbiór  $\mathcal{R}$ , a przy tym

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots < \varepsilon.$$

W ten sposób niechciana nieskończoność w równaniu Naviera–Stokesa została częściowo ograniczona w swej wolności. Czy zostanie całkiem wyeliminowana – pokaże przyszłość.



\*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

# Nieskończoność – nieskończenie użyteczna

Mirosław LACHOWICZ\*

Czy nieskończoność jest potrzebna matematykowi stosowanemu, tzn. takiemu, który chce, by jego struktury matematyczne opisywały świat? Matematyka stosowana to budowanie (tworzenie) i analizowanie modeli matematycznych, czyli takich struktur (najczęściej równań), które ujmują pewne aspekty opisywanej rzeczywistości.

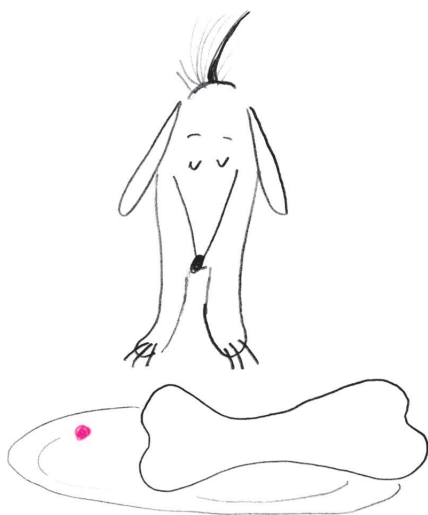
Zatem prędzej czy później musimy w tym procesie przejść od konkretów świata rzeczywistego do świata abstraktów – świata idei matematycznych odzwierciedlających świat rzeczywisty. Świat rzeczywisty tłumaczymy (można powiedzieć: rzutujemy) na świat idei matematycznych – abstraktów. Analizujemy związki występujące w tym świecie abstrakcji i na tej podstawie wnioskujemy o świecie rzeczywistym. To działa! Nie jest jednak całkiem oczywiste dlaczego – por. [W] i [BM].

W świecie abstraktów mamy do czynienia z punktami, odcinkami, okręgami, płaszczyznami itd. ... i właśnie z nieskończonością. Żadnego z tych obiektów nie obserwujemy w świecie rzeczywistym, a jednak dobrze nam służą do zrozumienia tego świata. Zapewne należałoby uściślić powyższe zdanie, dodając, że nie obserwujemy łatwo i bezpośrednio, gdyż niejedno potrafią eksperymentatorzy w swoich laboratoriach.

Punkt wyraża ideę czegoś małego, bazowego, tworzącego większą całość, a nieskończoność wyraża coś, co jest „bardzo duże”. Bez tych idei nie udałoby się opisać świata. W tym sensie, jak powiedział Andrzej Lasota, *matematyka jest strukturą świata* ([L1]). Za Theodorem Roethke, amerykańskim poetą, możemy powiedzieć, że (w dość swobodnym tłumaczeniu) *wszystkie rzeczy skończone ujawniają nieskończoność* [R].

Gdy matematyk (stosowany, oczywiście) tworzy równania mające opisywać, na przykład, walkę układu immunologicznego z nowotworem, i gdy już wie, że jego równania mają rozwiązania, a te rozwiązania są jedyne (jednoznaczne), to zaczyna się interesować *zachowaniem długoczasowym (asymptotyką czasową)*. Oznacza to, że bada zachowanie rozwiązań, gdy czas zbiega do nieskończoności. Jest to pierwszy krok do wyciśnięcia podstawowej informacji z równania: dla jakich parametrów zwycięży układ immunologiczny, a dla jakich nowotwór. Gdy w końcu mu się uda wyodrębnić warunki, dla których układ immunologiczny zwycięża, i tę radosną wieść przekaże lekarzowi-onkologowi, to może się spotkać z pewnym lekceważeniem: *no tak, gdy poczekamy do nieskończoności, to i tak problem nowotworu przestanie być istotny*. Jednakże w tych działaniach matematyka jest głęboki sens niezaskładający na lekceważenie. To czekanie do nieskończoności to nic innego niż czekanie odpowiednio długo: 5 lat to przecież bardzo długo. Innymi słowy, to przejście do nieskończoności pozwala zbadać tendencje biorące górę w równaniu. Takie triki intelektualne są najczęściej bardzo dobrze zrozumiałe dla fizyków (tak dobrze, że się nawet nad nimi nie zastanawiają), ale wymagają dużo cierpliwości i tolerancji z obu stron, by zostać zauważone np. przez lekarza. Jednak pewnie taka jest przyszłość nauki. Matematyka już wchodzi, i będzie jeszcze bardziej wchodzić, do nauk stosowanych, w tym biologicznych i społecznych. Może z tego wyjdzie wspanialsza (bo prawdziwsza) wizja świata.

Na nagrobku wielkiego matematyka (teoretyka), Wacława Sierpińskiego, wryty jest napis *Badacz nieskończoności*. Jak pokazałem powyżej, nieskończoność jest również ważna dla matematyka stosowanego. Jednakże właściwszym wydawałby się dla niego (tego stosowanego) napis *Badacz skończoności*, co zostawiam ewentualnym chętnym do wykorzystania.



## Literatura

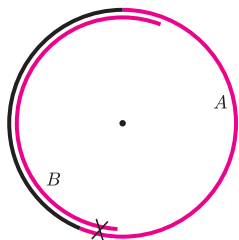
- [BM] F.E. Browder, S. MacLane, *The relevance of mathematics*, w: Mathematics Today, pod redakcją L.A. Steen, Springer, New York, 1978, 323–350 (polskie tłumaczenie: *Doniosłość matematyki*, w: Matematyka współczesna, WN-T, Warszawa, 1983, 345–376).
- [L1] A. Lasota, *Wprowadzenie do dyskusji: matematyka a filozofia*, w: Otwarta nauka i jej zwolennicy, OBI, Kraków, i BIBLOS, Tarnów, 1996, 50–71.
- [L2] A. Lasota, *Determinizm, indeterminizm a matematyka*, w: Granice nauki, pod red. M. Hellera, J. Mączki i J. Urbańca, OBI, Kraków, i BIBLOS, Tarnów, 1997, 76–82.
- [R] Th. Roethke, wiersz *The Far Fields* (... *All finite things reveal infinitude* ...).
- [W] E.P. Wigner, *The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 1–14 (polskie tłumaczenie: *Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych*, w: Zagad. Filozof. w Nauce, XIII, Ośrodek Badań Interdyscyplinarnych, Kraków, 1991, 5–18).

\*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

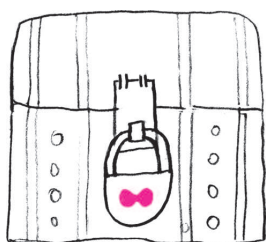


### Rozwiązanie zadania M 1392.

Idea rozwiązania polega na zastosowaniu zasady szufladkowej Dirichleta dla zbiorów nieskończonych, których rozmiar zmierzmy długością łuku.



Niech  $A$  oznacza podzbiór wszystkich pokolorowanych punktów na okręgu, zaś  $B$  niech oznacza podzbiór wszystkich tych punktów, których antypody są pokolorowane. Chcemy udowodnić, że  $A \cap B \neq \emptyset$ . Załóżmy przeciwnie, że są rozłączne. W tej sytuacji  $B$  składa się z odcinków o łącznej długości takiej jak  $A$ , więc łączna długość odcinków składających się na sumę  $A \cup B$  jest większa niż obwód okręgu, co daje sprzeczność.



Widzę to, ale w to nie wierzę, pisał Cantor do Dedekinda.

## Tako rzecze Arystoteles

Marek KORDOS

W –V wieku Parmenides stworzył szkołę filozoficzną, która postawiła sobie za cel zbadanie, jak ma się rozpowszechniona w tamtych czasach opinia, iż matematyka głosi najgłębszą prawdę o świecie, do rzeczywistości. Bez trudu dało się bowiem zauważyć, że pojęcia matematyki – taka, na przykład, prosta, albo – jeszcze bardziej – punkt, nijakich materialnych odpowiedników nie mają. Obiekt materialny można dzielić na mniejsze kawałki, ale przecież w końcu gdzieś będziemy musieli się zatrzymać, choćby z tego powodu, że nie można w skończonym czasie wykonać nieskończenie wielu czynności. Tymczasem matematyka pozwala choćby na odcinanie od odcinka stale połowy tego, co jeszcze zostało do dyspozycji, bez końca, a nawet pozwala stwierdzić, że w końcu z tego odcinka nic nie zostanie, nawet koniec.

Uczniowie Parmenidesa, zwani eleatami (od miejscowości w Italii, gdzie nauczał), ułożyli szereg aporii, czyli trudności, zalecając matematykom, by się nad nimi zastanawiali i by dopiero po ich pokonaniu brali się za uprawianie swojej dyscypliny. Powszechnie znane są aporie Zenona.

Problem był natury bardziej filozoficznej niż matematycznej i takie też było od początku jego rozumienie. Chodziło mianowicie o to, czy matematyka, której używamy do opisu realnego świata, Natury, jak wolano mówić, musi (względnie powinna) mieć taką samą strukturę, jak to, co nią opisujemy.

Oczywistą odpowiedź, że **nie**, dał Arystoteles. Ale uznał, iż nie każda konstrukcja myślowa jest, jako element służebnej dla przyrodników matematyki, dopuszczalna.

W szczególności odniósł się do łatwego do wypowiedzenia, ale trudnego do zdefiniowania, terminu *nieskończoność*. Tu zauważył, że nieskończoność może oznaczać coś płynącego, jak czas, albo też coś stabilnego, jak zawartość skarbcza. I uznał, że te nieskończoności w istocie nie mają ze sobą wiele, a może nawet nic, wspólnego.

Pierwszą z nich nazwał nieskończonością *potencjalną*, utożsamiał ją z możliwością kontynuowania jakiegoś procesu bez końca. Za jej pomocą rozwiązał prawie wszystkie aporie Zenona i uznał, że jej poprawne używanie nie grozi wpadnięciem w sprzeczności.

Drugą zaś – dysponowanie w jednej chwili nieskończoną liczbą obiektów – nazwał nieskończonością *aktualną* i stosowania jej odradzał, a nawet zabraniał.

Matematycy przez dwa tysiące lat jego dyrektyw przestrzegali, co nie przeszkodziło im w zbudowaniu potężnego gmachu analizy matematycznej, nieskończonością wręcz naładowanego.

Wszelako znalazł się śmiałek, który zakaz Arystotelesa złamał. Georg Cantor w dziele *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (1883) stworzył teorię mnogości, która w sposób oczywisty głosiła istnienie i sensowność zbiorów nieskończonych. I to różnie nieskończonych.

Zerwanie jabłka z drzewa wiadomości dobrego i złego wyгнаło ludzi z raju. Tu było podobnie. Sam Cantor z przerażeniem stwierdził, że umie udowodnić twierdzenia, które, jego zdaniem, powinny być nieprawdziwe – na przykład, że odcinek ma tyle samo punktów, co kwadrat, i co sześciąt. Wpędziło go to we wzmagającą się paranoję, bo tych twierdzeń, przeciw którym protestował, dowodził coraz więcej. Ale wywołane przez niego zło pleniło się bujnie, co matematykom przynosiło coraz więcej kompletnie nienormalnych obiektów do kontemplacji i badań, a zwykłych ludzi skazało na naukę o zbiorach już od zerówki.

A nie lepiej było mieć jedną nieskończoność, przyzwoitą  $\infty$ , i nie puszczać się na eksperymenty z różnymi kontinuumi, alefami i innymi niestworzonymi dziwnościami?

# Strumienie, czyli pochwała lenistwa

Marcin BENKE

Instytut Informatyki,  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki,  
Uniwersytet Warszawski



Hasło jego brzmiało: „Poznanie nieskończoności wymaga nieskończonego czasu. Toteż wszystko jedno czy się pracuje, czy nie”.

Arkadiusz i Borys Strugaccy  
Poniedziałek zaczyna się w sobotę

„Tato, jak policzyć do nieskończoności?” – takie pytanie zadał mi niedawno mój czteroletni syn. Odpowiedziałem coś w stylu „nigdy nie skończysz”. W każdym razie liczenie do nieskończoności może się relatywnie szybko znudzić, może więc to zadanie, jak wiele innych monotonicznych zadań, powierzyć komputerowi? A czy komputer potrafi policzyć do nieskończoności? Łatwo sprawić, aby komputer wypisywał coraz większe liczby – może nie w nieskończoność, ale tak długo, aż przestanie działać albo znudzi nam się ta zabawa.

```
> [0..]
[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,...
3647506,3647507,3647508,3647509,^CInterrupted.
```

(wydawane polecenia poprzedzane są w tym artykule znakiem „>”; posługujemy się tu językiem Haskell, głównie jego interaktywnym interpreterem `ghci`).

Może lepiej zadać jednak inne pytanie: czy komputer potrafi policzyć do nieskończoności, a potem jeszcze coś zrobić? Na przykład: stworzyć listę wszystkich liczb naturalnych, a potem wybrać z niej liczby parzyste (albo pierwsze)?

Otóż potrafi, a metodą, która pozwala na obliczenia na obiektach nieskończonych (przy czym doskonale sprawdza się też dla skończonych), jest lenistwo: obliczenia leniwe są wykonywane dopiero wtedy, gdy potrzebne są ich wyniki:

```
> let nats = [0..]
```

Oto polecieliśmy stworzyć listę wszystkich liczb naturalnych i nazwać ją `nats`; komputer „wykonał” to zadanie błyskawicznie, jako że nie musiał ich wszystkich wypisywać. Niech więc wypisze choć kilka:

```
> let few = take 5
> few nats
[0,1,2,3,4]
```

Teraz wybierzmy tylko parzyste:

```
> let evens = [x | x <- nats, even x]
> few evens
[0,2,4,6,8]
```

Haskell pozwala na budowanie list za pomocą notacji podobnej do tej, której w matematyce używa się dla zbiorów. Zbiór liczb parzystych możemy zapisać jako

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, x \equiv 0 \pmod{2}\}$$

albo

$$\{2x \mid x \in \mathbb{N}\}.$$

Podobnie możemy zdefiniować strumień liczb parzystych w Haskellu:

```
> [x | x <- nats, x `mod` 2 == 0]
```

Analogiczny efekt można uzyskać za pomocą funkcji `filter`, która wybiera z listy elementy spełniające podany warunek, oraz predykatu `even`, spełnianego przez liczby parzyste:

```
> let evens = filter even nats
```

Może jeszcze, żeby sprawdzić, czy lista `evens` naprawdę zawiera więcej niż pięć elementów, zażyczymy sobie wypisania jej dziesięciomilionowego elementu:

```
> evens !! (10^7)
20000000
```

Za pierwszym razem to może chwilę potrwać, bo – jak pamiętamy – obliczenia w naszym systemie są leniwe i obliczenie dziesięciu milionów elementów strumienia wykona się właśnie teraz. System pamięta jednak raz obliczone wartości, więc za drugim razem ten sam wynik dostaniemy już błyskawicznie.

```
> evens !! (10^7)
20000000
(1.12 secs, 360844064 bytes)
> evens !! (10^7)
20000000
(0.06 secs, 521804 bytes)
```

Nieskończone listy zwykle nazywa się *strumieniami*. Co możemy jeszcze z nimi zrobić?

Możemy, na przykład, zastosować jakąś transformację do każdego elementu listy.

```
> let odds = map (+1) evens
> few odds
[1,3,5,7,9]
```

Funkcja `map` daje listę będącą wynikiem zastosowania funkcji przekazanej jako pierwszy argument do każdego elementu listy będącej drugim argumentem. Funkcja `(+1)`, jak łatwo się domyślić, daje w wyniku swój argument plus jeden.

Listy definiujemy zwykle w terminach głowy (pierwszy element listy) i ogona (cała reszta). Listę złożoną z głowy `x` i ogona `xs` zapisujemy jako `x : xs`. W językach funkcyjnych definicje zapisujemy w postaci ciągów równań (często rekurencyjnych). W ten sposób możemy zapisać definicję strumienia liczb naturalnych:

```
> let nats = from 0 where
  from n = n : from (n+1)
```

Strumienie możemy łączyć, np.:

```
> let zipped = zip evens odds
> few zipped
[(0,1), (2,3), (4,5), (6,7), (8,9)]
```

Funkcja *zip* niejako „spina” dwie listy, łącząc ich elementy w pary (podobnie do działania zamka błyskawicznego – stąd jej nazwa):

```
> let zip (a:as) (b:bs) = (a,b) : zip as bs
```

Podobnie możemy zdefiniować funkcję, która doda dwa strumienie, element po elemencie:

```
> let add (a:as) (b:bs) = (a+b) : add as bs
> few (add evens odds)
[1,5,9,13,17]
```

Do tej pory „nieskończoności” nie bardzo było widać, większość powyższych operacji działała w rzeczywistości na kilkuelementowych listach. Zbiory i listy nieskończone mają natomiast pewne ciekawe własności, np. lista nieskończona jest równoliczna ze swoim ogonem i możemy je połączyć:

```
> let odds = add nats (tail nats)
> few odds
[1,3,5,7,9]
```

Tym sposobem możemy uzyskać nowe definicje *nats* oraz *evens*:

```
> let nats = 0:map (+1) nats
> let evens = add nats nats
```

Dla listy liczb naturalnych głową jest 0, ogon zaś jest taki jak cała lista, „podwyższona” o 1.

Analogicznie możemy zdefiniować strumień liczb Fibonacciego: zachodzi równość

$$f + (\text{tail } f) = \text{drop } 2 \text{ } f,$$

gdzie *drop n f* pomija pierwszych *n* elementów listy

```
> let fibs = 0:1:add fibs (tail fibs)
> take 10 fibs
[0,1,1,2,3,5,8,13,21,34]
> fibs !! 200
280571172992510140037611932413038677189525
```

Funkcja *drop* jest niejako dualna do funkcji *take*, która wybiera z listy pierwszych *n* elementów, pomijając resztę; użyte wcześniej *few* zdefiniowałem na potrzeby tego artykułu jako *take 5*.

Pierwsze dwa elementy to 0 i 1, po czym następuje suma ciągu ze swoim ogonem.

Tak na marginesie, tę definicję zapisuje się zwykle nie za pomocą *add*, ale wbudowanej funkcji *zipWith* (i taką definicję można najczęściej spotkać):

```
> let fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)
```

Funkcja *zipWith* łączy listy za pomocą wskazanej funkcji

```
> let zipWith f (a:as) (b:bs) =
  f a b : zipWith f as bs
```

Stąd *zipWith (+)* oznacza po prostu sumę dwóch list.

Liczyby pierwsze budzą zwykle więcej emocji niż liczby Fibonacciego; tak jest i w środowisku funkcyjnym – napisano na ten temat wiele artykułów. Tu ograniczymy się do kilku prostych sposobów.

Najpierw zdefiniujemy relację „*x* nie jest podzielne przez *y*”:

```
> let x -/ y = x 'mod' y > 0
```

Pierwsza próba może wyglądać tak:

- pierwszym elementem listy jest 2,
- dalej z ciągu liczb naturalnych większych niż 2 wybieramy liczby, które nie są podzielne przez żadną z wcześniejszych.

```
> let primes1 = sieve [2..] where
  sieve (p:xs) = p : sieve [x | x <- xs, x -/ p]
```

```
> primes1 !! 10000
104743
(6.29 secs, 4296827576 bytes)
```

Można próbować usprawnić tę definicję, zauważając, że powyżej 2 możemy się ograniczyć do liczb nieparzystych:

```
> let primes2 = 2:sieve [3,5..] where
  sieve (p:xs) = p : sieve [x | x <- xs, x -/ p]
```

... ale okazuje się, że usprawnienie jest mniejsze, niż by się można spodziewać:

```
> primes2 !! 10000
104743
(6.20 secs, 4286105612 bytes)
```

Rzeczywiste usprawnienie możemy uzyskać, zauważając, że dla sprawdzenia pierwszości *x* wystarczy sprawdzać dzielniki nie większe niż  $\sqrt{x}$ :

```
> let primes3 = 2:[x | x <- [3,5..], isPrime x] where
  isPrime x = all (x -/) (factorsToTry x) where
  factorsToTry x = takeWhile (\p -> p*p <= x) primes3
```

```
> primes3 !! 10000
104743
(0.04 secs, 24043288 bytes)
```

Definicja *primes3* jest nieco bardziej złożona i zapewne wymaga kilku wyjaśnień. Użyta w definicji *isPrime* funkcja *all* sprawdza, czy podany predykat (tu „*x* nie jest podzielne przez...”) jest spełniony przez wszystkie elementy listy. Zatem liczbę *x* uznajemy za pierwszą, gdy nie dzieli się ona przez żaden z potencjalnych dzielników. Listę tych ostatnich uzyskujemy zaś, biorąc (*takeWhile*) kolejne liczby pierwsze tak długo, jak ich kwadraty są mniejsze od *x*.

W tym miejscu kuszące mogłoby być użycie funkcji *filter*, ale, niestety, taki sposób wybierania podzbiorów wymaga nieskończonego czasu, nawet gdy rzeczony podzbiór jest skończony (skąd mamy wiedzieć, czy może jeszcze gdzieś tam daleko w ciągu pojawi się element spełniający warunek). Zauważmy jednak, że wszystkie



nasze dotychczasowe strumienie są rosnące, dzięki czemu podzbiór ograniczony możemy zawsze wybrać w ograniczonym czasie.

Ogólniej, strumienie rosnące nadają się do reprezentacji nieskończonych zbiorów liczb: w ograniczonym czasie potrafimy rozstrzygnąć, czy dana liczba  $x$  jest elementem zbioru:

```
> let member x (y:ys)
  | x == y = True
  | x < y = False
  | x > y = member x ys

> member 104743 primes3
True
```

Przeglądamy kolejne elementy strumienia; gdy napotkamy liczbę większą od  $x$ , to wiemy, że  $x$  już dalej się nie pojawi (strumień jest rosnący, zatem wszystkie dalsze elementy są większe od  $x$ ).

Podobnie możemy zdefiniować sumę (a także przecięcie i różnicę) zbiorów:

```
> let union (x:xs) (y:ys)
  | x < y = x:union xs (y:ys)
  | x == y = x:union xs ys
  | x > y = y:union (x:xs) ys
```

Możemy pójść o krok dalej i rozważać strumienie wyższego rzędu, czyli nieskończone strumienie nieskończonych strumieni. Spróbujmy, na przykład,

stworzyć rosnący strumień liczb postaci  $p^n$ , gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą. Gdybyśmy potrafili obliczyć strumień liczb stanowiący sumę teoriomnościową strumienia strumieni, rozwiązanie mogłoby być proste:

```
> let primePowers = mergeAll [powers p | p <- primes]
```

gdzie  $powers\ p$  jest strumieniem kolejnych potęg  $p$ , zaś  $mergeAll$  jest funkcją, która scala strumień strumieni. Tylko czy potrafimy ją zdefiniować? Okazuje się, że tak (zainteresowanych odsyłam do modułu **Data.List.Ordered**; zob. <http://hackage.haskell.org/packages/archive/data-ordlist/0.4.5/doc/html/Data-List-Ordered.html>), jednakże pod pewnymi warunkami:

1. strumień głów strumieni składowych musi być niemalejący (w naszym przypadku jest to strumień liczb pierwszych);
2. każdy element wyniku będzie powtórzony tyle razy, ile razy łącznie powtarza się we wszystkich strumieniach wejściowych; funkcja  $mergeAll$  realizuje sumę multizbiorów, zaś sumę zbiorów, gdy strumienie wejściowe są parami rozłączne, który to przypadek także zachodzi dla naszego problemu.

```
> take 20 primePowers
[2,3,4,5,7,8,9,11,13,16,17,19,
 23,25,27,29,31,32,37,41]
(0.00 secs, 527380 bytes)
```

## W pół drogi do nieskończoności



Maciej LISICKI

doktorant, Instytut Fizyki Teoretycznej,  
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

*Chmura składa się z obłoków złożonych z obłoków,  
które składają się z obłoków,  
które wyglądają jak chmury.  
Ale kiedy zbliżasz się do chmury,  
nie widzisz gładkości,  
tylko nieregularności w drobniejszej skali.*

Benoît Mandelbrot (1924–2010)

W termodynamice charakteryzujemy równowagowy układ za pomocą pewnego zbioru parametrów (np. ciśnienia, objętości i temperatury) i związków pomiędzy nimi (np. równania stanu gazu). Wielkości te są funkcjami stanu, a więc są jednoznacznie przyporządkowane danemu stanowi układu i nie zmieniają się w czasie. Jeśli jednak spojrzymy na układ z punktu widzenia jego struktury mikroskopowej, na cząsteczki gazu w ciągłym ruchu, powstaje pytanie: jak powiązać charakterystyki termodynamiczne układu z jego mikroskopową dynamiką? Odpowiedzi na to pytanie udziela mechanika statystyczna, w myśl której układ wielu cząsteczek podlega prawom statystycznym, a parametry makroskopowe są średnimi wartościami odpowiednich wyrażeń mikroskopowych. Przykładowo, średnia energia kinetyczna cząsteczek gazu doskonałego, w którym prędkości cząsteczek opisane są rozkładem Maxwella, jest

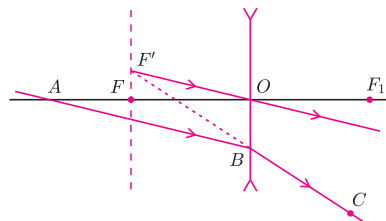
Pojęcie prawdopodobieństwa pojawia się w fizyce nader często i praktycznie w każdej jej dziedzinie; obszernym wprowadzeniem może być książka R. Nowaka pt. *Statystyka dla fizyków*, PWN, Warszawa, 2002.

Rozwiązanie polega na „wylosowaniu”  $N$  spośród  $N_0$  cząsteczek. Jak wygląda wykres tej gęstości prawdopodobieństwa w zależności od  $N$  dla różnych wartości parametrów  $N_0$ ,  $V_0$  i  $V$ ?



**Rozwiązanie zadania F 835.**

Przyjmijmy, że promień wychodzący  $BC$  (rysunek) pochodzi z wiązki promieni równoległych padających na soczewkę.



Wtedy jego przedłużenie na stronę przedmiotową przetnie się z przedłużeniami innych promieni pochodzących z padającej wiązki równoległej w płaszczyźnie ogniskowej soczewki ( $F'F'$ ). W tym samym punkcie  $F'$  przetnie więc płaszczyznę ogniskową, pochodzący z tej samej wiązki równoległej, promień  $F'O$ , który nie zmienia swojego kierunku bo przechodzi przez środek soczewki. Ponieważ promienie  $AB$  i  $F'O$  pochodzą z tej samej wiązki równoległej, więc bieg promienia  $AB$  znajdujemy, wykreślając prostą równoległą do  $F'O$  przechodzącą przez punkt  $B$ .

powiązana z temperaturą gazu poprzez relację

$$(1) \quad \langle E_k \rangle = \frac{3}{2} k_B T,$$

gdzie  $k_B$  jest stałą Boltzmanna. W naturalny sposób w grze pojawia się więc pojęcie prawdopodobieństwa. Ze względu na statystyczną naturę opisywanych zagadnień w skończonym układzie parametry termodynamiczne podlegają zmianom w czasie, przyjmując wartości zbliżone do średniej. Zmiany te nazywamy *fluktuacjami*. Oszacowanie wielkości fluktuacji jest równoznaczne z badaniem odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa. Dopiero gdy dysponujemy oszacowaniem wartości średniej i średnim odchyleniem od tej wartości, jesteśmy w stanie zinterpretować wyniki pomiaru – wszak informacja, że średnia roczna temperatura w Warszawie wynosi  $8,2^\circ\text{C}$ , nie mówi jeszcze nic o charakterystyce klimatu i występujących tam różnicach temperatur.

Przyjrzyjmy się dokładniej fluktuacjom „w działaniu” w fizycznym układzie. Przykładem wielkości fluktuującej wokół swojej średniej wartości może być liczba cząsteczek gazu (doskonałego) w pewnej objętości  $V$ , wyodrębnionej z większego układu o objętości  $V_0$ , zawierającego  $N_0$  cząsteczek. Wybierając przypadkowy obszar o objętości  $V \ll V_0$ , przyjmijmy, że prawdopodobieństwo znalezienia cząsteczki gazu wewnątrz  $V$  jest dane przez

$$(2) \quad P_1 = \frac{V}{V_0}$$

i jest niezależne od kształtu pojemnika z gazem i położenia innych cząsteczek. Założyliśmy przy tym, że z równym prawdopodobieństwem każda z cząsteczek gazu przebywa w każdej części układu ze względu na swój ruch termiczny. Na podstawie tego postulatu Czytelnik może łatwo wykazać, że rozkład prawdopodobieństwa znalezienia  $N$  cząsteczek w objętości  $V$  jest rozkładem dwumianowym, ma więc postać

$$(3) \quad P_N = \frac{N_0!}{N!(N_0 - N)!} \left(\frac{V}{V_0}\right)^N \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0 - N}.$$

Jeśli teraz rozważymy granicę, gdy układ jest bardzo duży (a zatem  $N_0 \rightarrow \infty$  i  $V_0 \rightarrow \infty$ ), ale jednocześnie średnia gęstość gazu  $\rho_0 = N_0/V_0$  jest stała, możemy znaleźć średnią wartość  $\langle N \rangle$  liczby cząstek w objętości  $V$

$$(4) \quad \langle N \rangle = \sum_{N=0}^{N_0} N P_N = \rho_0 V$$

oraz jej odchylenie standardowe będące miarą odchylenia od wartości średniej jako  $\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \rho_0 V$  (w granicy). Zbadajmy teraz względne fluktuacje, czyli stosunek odchylenia od średniej do samej wartości średniej

$$(5) \quad \frac{\sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}}{\langle N \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}}.$$

Wnioskujemy stąd, w zgodzie z intuicją, że względne fluktuacje są tym mniejsze, im większy jest badany podukład (im więcej cząstek zawiera). Wykorzystując równanie stanu gazu doskonałego  $pV = \langle N \rangle k_B T$ , gdzie  $p$  i  $T$  oznaczają ciśnienie i temperaturę gazu w podukładzie, przepiszmy równanie (5) w postaci

$$(6) \quad \frac{\sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}}{\langle N \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{pV}}.$$

Otrzymana zależność nie jest zbyt użyteczna, bo zawiera parametry charakteryzujące podukład, o którym niewiele wiemy. Pamiętajmy jednak, że objętość  $V$  została myślowo wyodrębniona z większego układu o ustalonej temperaturze  $T_0$  i ciśnieniu  $p_0$ , a więc żadne fizyczne bariery nie oddzielają go od pozostałej objętości, w której spełnione jest równanie  $p_0 = \rho_0 k_B T_0$ .

Stąd otrzymujemy

$$(7) \quad \frac{\sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}}{\langle N \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T_0}{p_0 V}}.$$

Gdy zwiększamy objętość podukładu, względne fluktuacje zanikają, co jest spodziewane z punktu widzenia termodynamiki.

Przywołajmy kontekst fizyczny otrzymanej zależności – rozważmy obszar o rozmiarach rzędu długości fali niebieskiego światła, którego długość fali  $\lambda$  leży w przedziale od 450 do 500 nm. W warunkach normalnych zawiera on około 3 mln cząsteczek, a względne fluktuacje są na poziomie 0,057%. Odpowiednia wartość fluktuacji dla światła czerwonego ( $\lambda$  między 610 a 780 nm) to 0,035%. Fluktuacje tego rzędu wielkości są z pozoru niewielkie, ale wystarczające, by wywołać niewielkie różnice współczynnika załamania ośrodka, które z kolei powodują rozpraszanie światła na tychże fluktuacjach. Jak wskazują obliczone wyżej wartości, efekt ten jest znacznie silniejszy dla światła niebieskiego, które jest „bardziej” rozpraszane (konkretnie, natężenie rozproszonego światła jest proporcjonalne do  $1/\lambda^4$ ). Zjawisko to stoi u podstaw wyjaśnienia niebieskiego koloru nieba, czego dokonali niezależnie Albert Einstein i Marian Smoluchowski. Przyjrzyjmy się jeszcze jednej makroskopowej wielkości, mierzonej bezpośrednio w doświadczeniach. Ścisłość izotermiczna  $\kappa$ , która jest miarą względnej zmiany objętości gazu przy zmianie ciśnienia i przy stałej temperaturze, dla gazu doskonałego wyraża się przez

$$(8) \quad \kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{\rho_0 k_B T}.$$

Wynik ten, otrzymany w ramach termodynamiki, możemy teraz porównać z zależnością dla skończonego układu, uzyskaną w ramach mechaniki statystycznej:

$$(9) \quad \rho_0 k_B T \kappa(V) = \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle},$$

która pozwala zapisać ściśłość jako

$$(10) \quad \kappa = \frac{1}{\rho_0 k_B T} \left( 1 - \frac{V}{V_0} \right),$$

gdzie poprawka jest efektem skończonej objętości podukładu. Efekty skończoności układu (ang. *finite-size effects*) odgrywają istotną rolę w symulacjach komputerowych. Komputery są potężnym narzędziem, pozwalającym na badanie dynamiki dużych układów; można dziś np. numerycznie rozwiązać równania ruchu 500 000 atomów w ciągu 500 ns. Trzeba jednak zawsze pamiętać, że symulujemy skończony podukład, a nie układ w granicy termodynamicznej, a badane przez nas wielkości (np. ściśłość) zależą od wielkości układu. Mówiąc obrazowo, do „nieskończoności” trzeba podejść najbliżej, jak tylko się da, a dalej można tylko zastanowić się, na ile skończoność układu wpływa na wynik pomiaru.

Operacja powiększania układu (objętości, liczby cząsteczek) przy jednoczesnym utrzymaniu lokalnych wielkości (np. średniej gęstości) prowadzi do *granicy termodynamicznej* – przy przejściu do tej granicy w układzie zanikają fluktuacje, a zatem wielkości, które charakteryzują jego stan (takie jak temperatura czy ciśnienie), nie zmieniają się w czasie. Wówczas termodynamika fenomenologiczna staje się ścisłą teorią. Dla typowych układów makroskopowych (gdzie  $N$  jest rzędu liczby Avogadra  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ ) fluktuacje są pomijalne, dlatego opis fenomenologiczny pozwala tak dokładnie przewidzieć własności termodynamiczne wielu substancji.

Bardzo przystępne wyjaśnienie błękitu nieba znaleźć można również w artykule A. Hryczuka i R. Żaka (*Delta* 8/2003), jednak samo zagadnienie ma bardzo bogatą historię – tym ciekawszą, że nasz znakomity rodak odegrał w niej dużą rolę – to jednak temat na osobną opowieść...

W miarę rozwoju technik symulacji powstały również metody oszacowania efektów skończoności układu i korygowania uzyskanych wyników; bardzo dobre wprowadzenie można znaleźć w: F.L. Román, A. González, J.A. White, S. Velasco, *Fluctuations in the number of particles of the ideal gas: A simple example of explicit finite-size effects*, Amer. J. Phys **67**, 1149 (1999).



Często pojawiające się w matematyce zadanie polega na skonstruowaniu funkcji  $f: A \rightarrow B$ , spełniającej pewne warunki. Między innymi możemy chcieć, aby funkcja ta była różnowartościowa i „na”, co gdyby miało miejsce, oznaczałoby równoliczność zbiorów  $A$  i  $B$ . Punktem wyjścia bywa inna funkcja  $g$ , która potrzebnych warunków nie spełnia, ale wystarczy ją tylko trochę zmienić.

Przypuśćmy, że mamy taką funkcję  $g$ , dla której istnieje tylko jedna para elementów  $x_1 \neq x_2 \in A$ , taka że  $g(x_1) = g(x_2)$ . Wtedy możemy wybrać  $y_2 \neq y_1 = g(x_1)$  i przyjąć  $f(x_1) = y_1$  i  $f(x_2) = y_2$ . Jeśli istnieje  $x_3 \notin \{x_1, x_2\}$ , takie że  $g(x_3) = y_2$ , to wybieramy  $y_3 \in B \setminus \{y_1, y_2\}$  i przyjmujemy  $f(x_3) = y_3$ , itd. Przyjęcie wartości  $f$  dla pewnego  $x_k$  „strąca” przywiązanie elementu  $x_{k+1}$  do elementu  $y_k$ , będącego wartością funkcji  $g$ . Nazwiemy to **kaskadą**.

Najprostszym zastosowaniem przedstawionego wyżej sposobu jest udowodnienie, że odcinki  $[0, 1]$  i  $(0, 1]$  mają tyle samo punktów. Zaczynając od funkcji  $g$ , takiej że  $g(0) = 1$  oraz  $g(x) = x$  dla każdego  $x > 0$ , określamy funkcję  $f$ , taką że dla każdego  $x_k = 1/k$ , gdzie  $k$  jest liczbą naturalną, przyjmujemy  $f(x_k) = x_{k+1}$ , a dla każdego  $x \in [0, 1]$ , które nie jest tej postaci, przyjmujemy  $f(x) = g(x)$ .

Użyjemy metody kaskadowej do udowodnienia **twierdzenia Halla**, znanego też pod nazwą twierdzenia o małżeństwach. Najpierw przypomnijmy problem.

Mamy dane dwa zbiory skończone  $C$  i  $D$ , których elementy możemy wyobrazić sobie jako chłopców i dziewczyny. Mamy wyswatać chłopców, przy czym każdy z nich ma określony zbiór kandydatek na żonę (upraszczając, powiemy, że je zna), będący podzbiorem zbioru  $D$ . Żonę, oczywiście, można mieć tylko jedną, podobnie żadna dziewczyna nie może mieć więcej niż jednego męża. Potrzebna jest zatem funkcja różnowartościowa  $f: C \rightarrow D$ , taka że każdy chłopiec  $x$  zna dziewczynę  $f(x)$ . Taką funkcję  $f$  nazywamy **skojarzeniem** o liczności równej liczbie chłopców  $n$ .

Znajdowanie skojarzenia jest oczywiście problemem grafowym; mamy tu graf dwudzielny, którego każda krawędź łączy chłopca i dziewczynę, którzy się znają. Skojarzenie można utożsamić z odpowiednim podzbiorem krawędzi. Twierdzenie Halla mówi, że skojarzenie o liczności  $n$  istnieje (czyli wszystkich chłopców można wyswatać) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $k \leq n$ ,  $k$  dowolnie wybranych chłopców zna w sumie co najmniej  $k$  dziewczyn.

Konieczność tego warunku (oznaczymy go  $(*)$ ) dla istnienia skojarzenia o liczności  $n$  jest oczywista (kto nie jest tego pewny, może przypomni sobie o zasadzie szufladkowej Dirichleta). Udowodnimy, że warunek  $(*)$  jest wystarczający, używając indukcji.

Jeśli  $n = 1$  i chłopiec zna co najmniej jedną dziewczynę, to można go wyswatać. Przypuśćmy zatem, że  $n > 1$  i twierdzenie jest prawdziwe dla  $n - 1$  chłopców, a ponadto dla ustalonego zbioru  $n$  chłopców

warunek  $(*)$  jest spełniony. Tym bardziej jest on spełniony, jeśli pominiemy jednego (dowolnego) chłopca. Możemy więc znaleźć dziewczyny dla pozostałych  $n - 1$  chłopców. Pary na razie zaręczamy (zaręczyny, jeśli trzeba, będzie można zerwać). Spróbujemy teraz wyswatać  $n$ -tego chłopca; utworzymy z niego zbiór jednoelementowy  $C_0$ . Niech  $D_1$  oznacza zbiór tych dziewczyn, które  $n$ -ty chłopiec zna. Zbiór  $D_1$  jest niepusty z uwagi na warunek  $(*)$ . Jeśli jedna z tych dziewczyn nie ma narzeczonego, to możemy ją zaręczyć z  $n$ -tym chłopcem. W przeciwnym razie niech  $C_1$  oznacza zbiór chłopców zaręczonych z dziewczynami z  $D_1$ . Niech teraz  $D_2$  oznacza zbiór tych dziewczyn, które znają chłopców ze zbioru  $C_1$ , ale nie są z nimi zaręczone.

Jeśli któraś z nich nie ma narzeczonego, to możemy znaleźć w  $C_1$  chłopca, który ją zna, odwołać jego dotychczasowe zaręczyny i zaręczyć z tą dziewczyną. Wtedy w zbiorze  $D_1$  pojawia się dziewczyna niezaręczona, którą można zaręczyć z  $n$ -tym chłopcem.

W przeciwnym razie kolejne zbiory  $C_i$  (chłopców zaręczonych z dziewczynami z  $D_i$ ) oraz  $D_{i+1}$  (dziewczyn, które znają chłopców z  $C_i$ , ale nie są z nimi zaręczone) możemy określać podobnie. Jest jasne, że dla każdego  $i$  zbiory  $C_i$  i  $D_i$  są **równoliczne**. Jeśli dla pewnego  $i$  w zbiorze  $D_i$  znajdzie się niezaręczona dziewczyna, to zaczynając od niej, możemy utworzyć kaskadę. Zrywamy zaręczyny chłopca z  $C_{i-1}$ , który ją zna, i z nim ją zaręczamy, a jego dotychczasowa naręczona z  $D_{i-1}$  zostanie nową naręczoną chłopca z  $C_{i-2}$ , itd.

Jeśli nie możemy znaleźć niezaręczonej dziewczyny, to określamy kolejne zbiory chłopców i dziewczyn, ale ten proces musi się zakończyć; chłopców jest skończenie wielu, a więc dla pewnego  $i$  otrzymamy  $D_i = C_i = \emptyset$ . Wtedy nie możemy wszystkich chłopców wyswatać, ale to oznacza, że istnieje zbiór chłopców  $C_0 \cup \dots \cup C_{i-1}$ , dla którego zbiór znanych im dziewczyn  $D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}$  ma o przynajmniej jedną dziewczynę mniej. No i już. Choć zapewne działalność prawdziwego biura matrymonialnego jest znacznie bardziej skomplikowana.

## Pierwsza rocznica odkrycia

Czwartego lipca 2012 roku zespoły badawcze ATLAS i CMS wspólnie ogłosiły odkrycie nowej cząstki, znalezionej w trakcie poszukiwania bozonu Higgsa, ostatniego nieodkrytego obiektu przewidywanego przez Model Standardowy oddziaływań elementarnych (MS). W marcu bieżącego roku, podczas cyklu konferencji *Rencontres de Moriond 2013*, uznano, że przeprowadzone do tego czasu analizy materiału dowodowego zebranego w sprawie są wystarczające, żeby przestać mówić o „higgsopodobnej” nowej cząstce i zacząć ją nazywać po prostu bozonem Higgsa. Nadal pozostaje jednak nadzieja, że nie jest to ta jedyna cząstka przewidywana przez MS, tylko jeden z przedstawicieli większej rodziny, której różne wersje występują w rozszerzeniach MS, a której członków na razie nie widzimy, bo mają zbyt dużą masę lub zbyt słabo sprzęgają się do tego, co zderzenia protonów oferują.

Przyznanie nowej cząstce statusu bozonu Higgsa wiąże się z potwierdzeniem jej oddziaływania z tym, z czym oddziaływać powinna. Pozytywną obserwację uzyskano nie tylko w dwóch „odkrywczych” kanałach (fotonowym:  $H \rightarrow \gamma\gamma$  oraz cztero-leptonowym:  $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow \ell_1^+ \ell_1^- \ell_2^+ \ell_2^-$ ), za pomocą których zmierzono masę  $125,7 \pm 0,4 \text{ GeV}/c^2$  (CMS) oraz  $125,5 \pm 0,5 \text{ GeV}/c^2$  (ATLAS), lecz również w pozostałych trzech, w których sygnał powinien być już widoczny przy tej ilości danych, które zostały zebrane (przed zaplanowaną dwuletnią przerwą techniczną w działaniu LHC mającą umożliwić działanie przy zaprojektowanej energii 14 TeV oraz większej o czynnik około 5 świetności czyli liczbie zderzeń w jednostce czasu).

Tymi trzema kanałami, które masę określają tylko zgrubnie (trudniej jest odróżnić sygnał od tła) są:  $H \rightarrow WW^* \rightarrow \ell_1^+ \nu_{\ell_1} \ell_2^- \bar{\nu}_{\ell_2}$ , w którym w stanie końcowym widzimy dwa przeciwnie naładowane leptyony oraz brak bilansowania się rzutów pędów na płaszczyźnie poprzecznej do kierunku wyznaczonego przez wiązki protonowe (ze względu na nierejestrowane neutrino);  $H \rightarrow \tau^+ \tau^-$ , w którym w analizie odtwarzamy leptyony tau z produktów ich rozpadów (wśród których znów są nierejestrowane neutrino);  $H \rightarrow b\bar{b}$ , w którym niezwykle trudno jest wyłuskać sygnał spod przytłaczającego, wiele rzędów wielkości większego tła.

Właśnie w tym ostatnim kanale wynik LHC jest mało przekonujący (choć, w granicach niepewności, zgodny z oczekiwaniami opartymi na MS), ale CERN jest tutaj wspierany przez amerykański Tevatron, który zderzał protony z antyprotonami przy cztery razy mniejszej energii. Tam sygnał w tym kanale jest lepiej widoczny (pomimo mniejszej ilości danych i mniejszej energii), bo silniej reprezentowane są kanały, w których bozon Higgsa produkuje się np. z dodatkowym bozonem pośredniczącym (zderzana była antymateria z materią) ułatwiającym odróżnienie sygnału od tła.

W sumie, w każdym z tych pięciu kanałów połączona istotność statystyczna jest na poziomie przekraczającym  $3\sigma$  (prawdopodobieństwo testowe hipotezy braku sygnału poniżej  $10^{-3}$ , a w kanałach  $4\ell$  oraz  $\gamma\gamma$  poniżej  $10^{-11}$ ).

Porównywanie różnych kanałów produkcji i rozpadu (każdy bozon Higgsa ma „dwa końce”, jakoś musi zostać wyprodukowany i jakoś się rozpaść) również, w granicach niepewności, zgadza się z przewidywaniami MS.

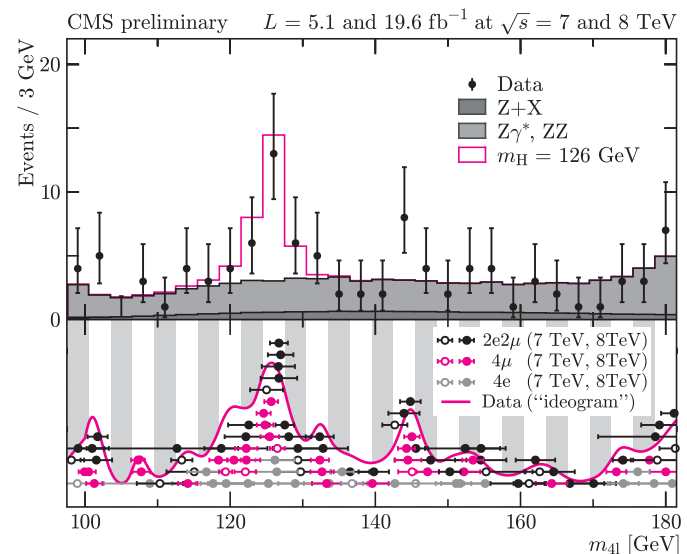
Dodatkowym testem jest badanie spinu  $J$  i parzystości  $P$  nowej cząstki. Bozon Higgsa powinien mieć  $J^P = 0^+$ . Można to sprawdzić, porównując obserwowane oraz oczekiwane (dla poszczególnych hipotez) rozkłady kątowe produktów

jego rozpadu, do czego najlepiej nadaje się kanał  $4\ell$ . W tym przypadku rozkłady można opisać przez podanie mas dwóch par leptonów oraz sześciu kątów (dwuciałowe rozpad rozpatrywane w układzie masy rozpadającej się cząstki dają cząstki o przeciwnych pędach). Zebrany materiał pozwala na odrzucenie (w zasadzie) wszystkich konkurencyjnych hipotez na poziomie istotności przekraczającym  $3\sigma$ .

Warto przypomnieć, że w tym roku obchodzimy więcej rocznic związanych z MS. Pierwsze doniesienie o odkryciu tzw. (słabych) prądów neutralnych, czyli oddziaływania neutrino z materią za pomocą neutralnego bozonu  $Z^0$  (w odróżnieniu od słabych prądów naładowanych przenoszonych przez  $W^+$  ( $W^-$ ), za pomocą których neutrino, oddziałując z materią, zamienia się na odpowiedni lepton naładowany), pojawiło się 40 lat temu, dzięki komorze pęcherzykowej Gargamelle zbierającej dane w CERN-ie, rozpoczynając karierę Modelu Standardowego (Nagrody Nobla dla Sheldona Glashowa, Abdusa Salama i Stevena Weinberga, a później również dla Martinusa Veltmana i Gerarda 't Hoofta). Zaledwie dziesięć lat później bozony pośredniczące  $W^+$ ,  $W^-$  i  $Z^0$  zostały odkryte, również w CERN-ie, za pomocą zderzacza  $Sp\bar{p}S$  (a rok później przyznano Nagrodę Nobla Carlo Rubii oraz Simonowi van der Meerowi).

Ciekawe czy sam bozon Higgsa, pozostałość nadającego masę bozonom pośredniczącym mechanizmu Brouta-Englerta-Higgsa (taka nazwa chyba będzie obowiązywać, można jeszcze dodać na końcu Guralnika-Hagena-Kibble'a, z przodu Andersona, a na samym końcu sam Peter Higgs dodaje 't Hoofta; sam bozon chyba się obroni i pozostanie bozonem Higgsa), oprócz masy będzie zdolny wygenerować Nagrodę Nobla rok po odkryciu.

Piotr ZALEWSKI



Rozkład masy układu czterech leptonów zawierający sygnał pochodzący od rozpadu bozonu Higgsa, wstępnie opublikowany przez eksperyment CMS. Dane (ang. *Data*) pokazane są za pomocą czarnych punktów z zaznaczoną niepewnością statystyczną (liczba przypadków rejestrowana w danym binie histogramu traktowana jest jako estymata średniej procesu Poissona), spodziewane tło – odcieniami szarości, a spodziewany sygnał bozonu Higgsa o masie  $126 \text{ GeV}/c^2$  – kolorem. (Na rysunku używany jest tzw. naturalny układ jednostek, w którym  $c = \hbar = 1$ ). W części dolnej pokazany jest tzw. ideogram oraz budujące go przypadki (punkty) wraz z zaznaczoną precyzją estymaty masy, z podziałem na dane przy dwóch energiach LHC (odpowiednio otwarte oraz pełne kółka). Dodatkowo punkty odpowiadające trzem różnym stanom końcowym pokazano na czarno, kolorem oraz na szaro.

## Genetyczne rocznice

Nawet w bardzo „młodych” gałęziach nauki zaczynają gromadzić się długoletnie rocznice, których nie wolno przegapić. Niepostrzeżenie, na przykład, okazuje się, że to już 60 lat minęło od ogłoszenia (wówczas) hipotezy o strukturze DNA. W samym odkryciu, oprócz tego, że okazało się prawdziwe, fascynuje mnie parę okoliczności.

W momencie ukazania się historycznej dziś publikacji genetyka była prawie czcigodną, ustabilizowaną nauką. Dyskutowano o tym, czym jest gen. Dogłębnie badano zjawisko mutacji i jego skutki. Skutkami były, jeżeli umiano je znaleźć – zmiany w strukturze i funkcji określonych białek. Stąd już krótka droga do założenia, że substancją dziedziczości powinny być białka, ponieważ one są najbardziej różnorodną grupą cząsteczek obecnych w komórkach. Głoszono jednocześnie tezę, że DNA składa się z powtarzającego się wielokrotnie tetranukleotydu (tzn. bloku czterech małych cząsteczek), pełniącego rolę strukturotwórczą. Chyba nikt nie sądził, że cały gmach rozumowania gen = białko nagle runie bezpowrotnie – nie w wyniku kosmetycznych poprawek, ale zmiany założeń podstawowych.

Znaleźli się jednak uczeni, którzy postanowili podstawy genetyki zweryfikować doświadczalnie. Wymyśleli doświadczenia, zakładając, że zasady dziedziczenia są wspólne dla całego żywego świata. W eksperymentach badali proste organizmy, wirusy i bakterie, którym starali się przekazać cechy dziedziczne przez oczyszczone cząsteczki: albo białka, albo DNA. W obu typach organizmów TYLKO DNA przenosił informację genetyczną – bingo – warto było zająć się bardziej szczegółowo tą cząsteczką. Zrobili to James Watson, Francis Crick, Maurice Wilkins i Rosalind Franklin.

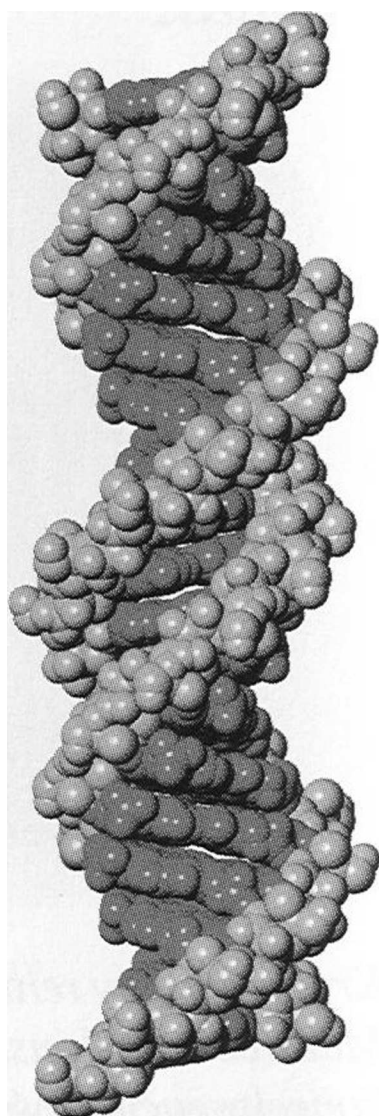
Bardzo lubię książeczkę Watsona *Podwójna helisa* (Amerykanin, „cudowny” intelektualnie nastolatek, ornitolog, 25 lat, „post-doc” w Cambridge), w której opisał szczegółowo, jak razem z Crickiem (Brytyjczyk, fizyk, 37 lat, w czasie wojny w Laboratorium Admiralicji pracował nad konstrukcją akustycznych i magnetycznych min) odkryli zasadę ogólną przestrzennej struktury DNA, sądząc, że jest to wynik na miarę historyczną (no i był, nikt go nie zdołał obalić, wszyscy potwierdzali). Być może Watson trochę przesadził, przedstawiając głównie swój punkt widzenia, ale mam wrażenie, że dość wiernie odtworzył atmosferę tamtych lat oraz to, jak może wyglądać codzienna praca badacza.

W opisie tych badań zadziwia mnie to, że obaj panowie (bez wątplenia każdy miał o sobie dobre zdanie) sami nie wykonali żadnego doświadczenia. Znaleźli w Kings College w Londynie świetną badaczkę, Franklin, (Brytyjka, 53 lata, biofizyczka) pracującą wspólnie z Wilkinsem (Brytyjczyk, 37 lat, fizyk), która wykonała trudne i wykonawczo, i interpretacyjnie pomiary, mierząc ugięcie promieni X przez włókna DNA. Wkład Franklin w całość odkryć był odtąd dyskutowany, nie tylko przez feministki. Sam Wilkins przyznał, że wywiózł wyniki do Cambridge bez jej świadomości, w dodatku potem, w całym czteroosobowym składzie, wystąpił spór co do wielu szczegółów budowy helisy, z których najważniejsze dotyczyły liczby nici w helisie i kierunku ich przebiegu. Na dobitkę doszły wieści z USA, że noblista, Linus Pauling, który zasłynął z tego, że ustalił istnienie w białkach  $\alpha$ -helisy, już WIE, jak zbudowany jest DNA. Trzeba się było śpieszyć, a nikt nie chciał wystawiać się na pośmiewisko innych uczonych.

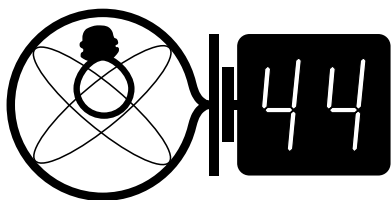
W jakimś sensie, choć brzmi to strasznie cynicznie, panowie mieli szczęście: w 1962 roku, kiedy przyznawana była Nagroda Nobla (najwyżej trzech żyjących laureatów), Rosalind Franklin już nie żyła.

Pozostałe dane użyteczne w tworzeniu modelu podwójnej helisy Watson i Crick czerpali z opublikowanych wcześniej prac innych fizyków i chemików. Genialną cechą ich rozumowania było to, że z osobno opisywanych faktów tylko oni potrafili wyciągnąć uogólniające wnioski, z drucików zbudować model podwójnej, przeciwrównoległej helisy. Ot tak, na kliknięcie palcami naraz wszystkie elementy puzzla połączyły się i powstał ten jedyny, dla mnie jeden z najpiękniejszych, modeli naukowych. Crick tak wspominał to „kliknięcie”: *... wróciłem do domu i powiedziałem żonie, że dokonaliśmy epokowego odkrycia, ale ona nie zwróciła na to uwagi, bo nie po raz pierwszy to ode mnie usłyszała ...*

Magdalena FIKUS



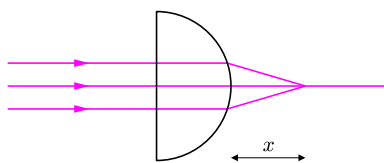
## Klub 44



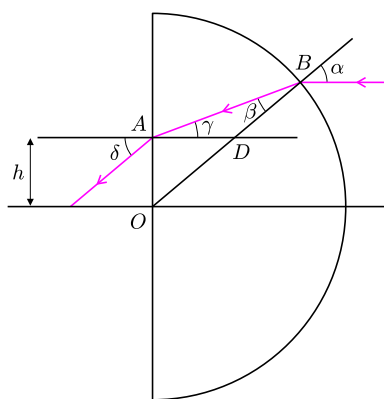
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
550 ( $WT = 1,24$ ) i 551 ( $WT = 2,32$ )  
z numeru 1/2013

Tomasz Wietecha	Tarnów	44,48
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	43,72
Andrzej Idzik	Bolesławiec	35,06
Krzysztof Magiera	Łosiów	33,91
Michał Koźlik	Gliwice	24,63

Po raz dziewiąty liczbę 44 punktów  
przekroczył Tomasz Wietecha.  
Gratulujemy!



Rys. 1



Rys. 2

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2013

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

Przypominamy treść zadań:

**554.** Wzdłuż gumowego sznura o długości  $l$  i współczynniku sprężystości  $k$  zsuwa się w kierunku pionowym żelazny pierścień o masie  $m$ . Siła tarcia między powierzchnią sznura a pierścieniem wynosi  $T$ . Wyznacz ciepło, które się przy tym wydzielą.

**555.** Wąska wiązka światła po przejściu przez półkulę ze szkła o współczynniku załamania  $n$  skupia się w odległości  $x$  od powierzchni wypukłej (rys. 1). W jakiej odległości od powierzchni płaskiej skupią się promienie, jeżeli wiązkę światła przepuścimy przez półkulę z drugiej strony?

**554.** Oznaczmy przez  $\Delta l$  maksymalne wydłużenie sznura. Stwierdzenie, że pierścień jest żelazny, wskazuje, że masę sznura możemy zaniedbać w porównaniu z masą pierścienia. Wtedy mamy  $T - k\Delta l \approx 0$ . Na sznur działa siła tarcia, która powoduje jego wydłużenie, czyli wzrost energii sprężystości oraz wydzielanie się ciepła  $Q$ :  $T(l + \Delta l) = Q + k(\Delta l)^2/2$ . Wiedząc, że  $\Delta l = T/k$ , otrzymujemy:

$$Q = T \left( l + \frac{T}{2k} \right).$$

Zadanie można też rozwiązać, rozważając siły działające na pierścień. Zmiana energii kinetycznej pierścienia równa jest pracy wypadkowej sił ciężkości i tarcia:  $\frac{mv^2}{2} = (mg - T)(l + \Delta l)$ , natomiast zasada zachowania energii dla całego układu sznur–pierścień ma postać:  $\frac{mv^2}{2} + \frac{k(\Delta l)^2}{2} + Q = mg(l + \Delta l)$ . Odejmując te równania stronami, otrzymujemy taki sam wynik jak poprzednio.

**555.** Oznaczmy promień krzywizny półkuli przez  $R$ . Gdy wiązka pada prostopadle na płaską powierzchnię szkła, biegnie przez szkło bez zmiany kierunku. Odległość  $x$  nie zmieni się, gdy wiązkę przepuścimy przez ciekłą soczewkę płasko-wypukłą ze szkła o promieniu krzywizny  $R$  umieszczoną w powietrzu (rys. 1). Ogniskowa tej soczewki jest równa  $x$ , mamy więc związek  $R = (n - 1)x$ .

Rozważmy wiązkę padającą na półkulę od strony wypukłej. Oznaczmy przez  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  kąty padania i załamania przy przechodzeniu światła z jednego ośrodka do drugiego, jak na rysunku 2. Założenie, że wiązka światła jest wąska, oznacza, że odległości promieni od osi optycznej są małe w porównaniu z promieniem krzywizny i możemy stosować przybliżenia właściwe dla małych kątów. Korzystając z prawa załamania, otrzymujemy:

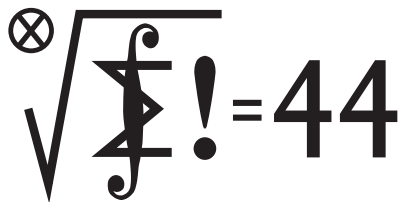
$$\frac{\sin \delta}{\sin \gamma} = n \approx \frac{\delta}{\gamma} \quad \text{oraz} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{n} \approx \frac{\beta}{\alpha}.$$

Kąt  $\alpha$  jest kątem zewnętrznym w trójkącie  $ABD$ , zatem  $\alpha = \beta + \gamma$ . Niech  $h$  będzie odległością promienia wychodzącego z półkuli od osi optycznej. Stosując twierdzenie sinusów do trójkąta  $OAB$ , otrzymujemy:  $\frac{h}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} + \delta)}$ ,

a w przybliżeniu  $h/R \approx \beta$ . Szukaną odległość  $f$  punktu skupienia promieni od powierzchni płaskiej dostajemy ze związków:

$$h/f = \delta = n\gamma = n(\alpha - \beta) = n\beta(n - 1) = n(n - 1)h/R.$$

Ostatecznie  $f = x/n$ .



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
651 ( $WT = 1,95$ ) i 652 ( $WT = 2,45$ )  
z numeru 12/2012

Wojciech Nadara	Warszawa	42,43
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,25
Witold Bednarek	Łódź	40,94
Paweł Łabędzki	Kielce	37,95
Krzysztof Kamiński	Pabianice	37,84
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	35,45
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,72
Jerzy Cisło	Wrocław	34,66

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2013

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

**657.** W ośmiokątniku prostokątnej, mającej  $m$  kolumn i  $n$  wierszy, wpisujemy liczby 0 lub 1 tak, by w każdym kwadracie  $2 \times 2$ , złożonym z czterech pól mających wspólny wierzchołek, suma czterech wpisanych liczb była nieparzysta. Dla zadanej liczby naturalnej  $m \geq 2$  znaleźć wszystkie liczby naturalne  $n \geq 2$ , dla których da się w taką tabelę wpisać zera i jedynki w opisany sposób tak, by żadne dwa wiersze nie były identyczne.

**658.** W przestrzeni dany jest czworościan foremny o krawędzi długości  $a$  oraz dowolny punkt  $P$ . Niech  $d_1, d_2, d_3, d_4$  będą odległościami punktu  $P$  od wierzchołków czworościanu. Wykazać, że

$$(a^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2)^2 = 4(a^4 + d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4).$$

**657.** W każdym wierszu numerujemy pola od lewej strony kolejno od 1 do  $m$ . Podany warunek (nieparzyste sumy w kwadratach  $2 \times 2$ ) oznacza, że w dowolnych dwóch sąsiednich wierszach pola o numerach parzystych są wypełnione jednakowo, a pola o numerach nieparzystych są wypełnione różnie – lub że jest odwrotnie. Pomalujmy linię poziomą, która te wiersze rozdziela, na szaro w pierwszym przypadku, a na żółto w drugim.

Jeżeli istnieją dwie kolejne linie pomalowane tym samym kolorem, to zawarty pomiędzy nimi wiersz rozdziela dwa wiersze, które są wypełnione identycznie. Stąd wynika, że jeśli chcemy mieć  $n$  wierszy parami różnych,  $n > 2$ , to jednakowo pomalowane linie nie mogą sąsiadować. Linie szare i żółte występują wówczas na przemian, więc każde dwa wiersze o numerach różniących się o 2 są wypełnione dokładnie przeciwnie (w kolumnach, gdzie górny ma zera, dolny ma jedynki, i na odwrót). Wobec tego wiersze o numerach różniących się o 4 są już wypełnione identycznie.

Wniosek: niezależnie od  $m$ , maksymalna liczba parami nieidentycznych wierszy nie przekracza 4. Przy tym łatwo wskazać przykład takiej macierzy z dokładnie 4 wierszami:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{array}$$

Zatem liczby  $n$ , o które pyta zadanie – to 2, 3, 4.

**658.** Umieszczamy czworościan w przestrzeni czterowymiarowej, tak, by jego wierzchołkami były punkty

$$A_1 = (1, 0, 0, 0), \quad A_2 = (0, 1, 0, 0), \quad A_3 = (0, 0, 1, 0), \quad A_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Dla  $i \neq j$  mamy wówczas

$$|A_i A_j|^2 = (1 - 0)^2 + (0 - 1)^2 = 2,$$

co się zgadza z treścią zadania, gdy  $a = \sqrt{2}$ . Nie ogranicza to ogólności rozumowania, bo równość podana do udowodnienia ma po obu stronach wyrażenia jednorodnie stopnia 4.

Weźmy dowolny punkt  $P = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ , leżący w tej samej przestrzeni trójwymiarowej, co punkty  $A_i$ , czyli taki, że  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ .

Przyjmijmy, że leży on w odległości  $r$  od początku układu współrzędnych:  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2$ . Obliczamy:

$$d_i^2 = |PA_i|^2 = (x_i - 1)^2 + \sum_{j \neq i} x_j^2 = r^2 + 1 - 2x_i,$$

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4(r^2 + 1) - 2,$$

$$d_i^4 = (r^2 + 1)^2 - 4(r^2 + 1)x_i + 4x_i^2,$$

$$d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 = 4(r^2 + 1)^2 - 4(r^2 + 1) + 4r^2 = 4(r^2 + 1)^2 - 4,$$

$$a^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4(r^2 + 1),$$

$$a^4 + d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 = 4(r^2 + 1)^2.$$

Dwie ostatnie równości dają tezę zadania.

(Autor rozwiązania: Jerzy Cisło.)

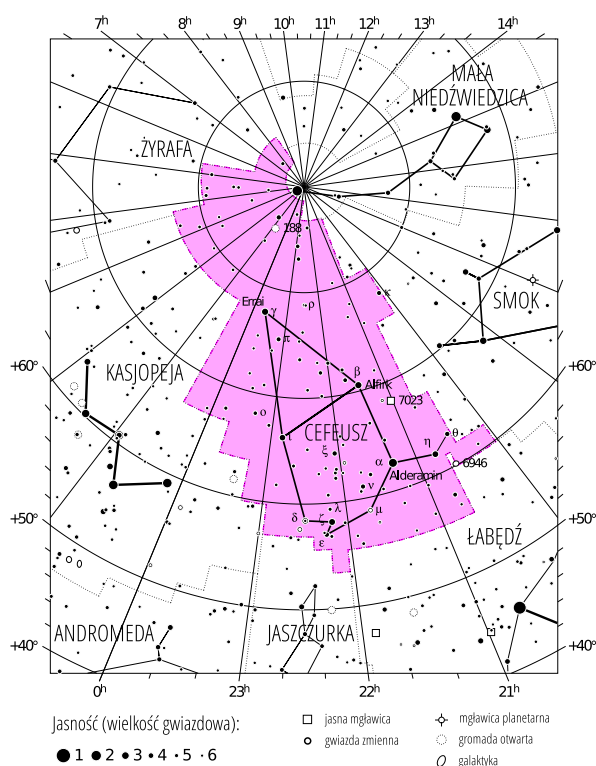
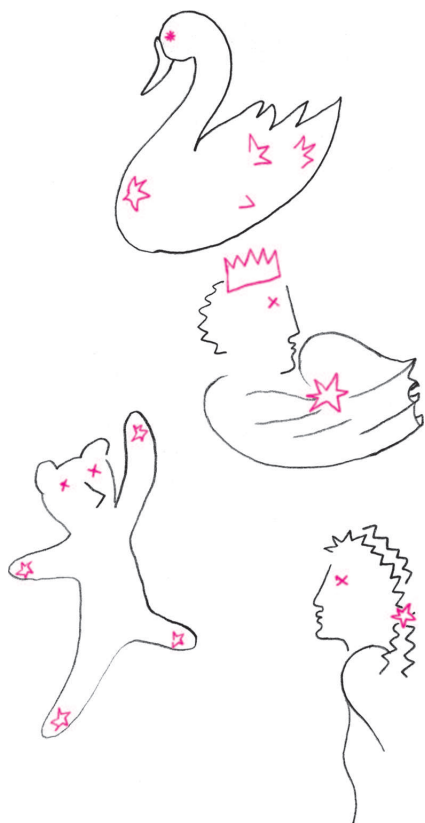


## Prosto z nieba: Zdalne mierzenie temperatury

Zgodnie z powszechnie akceptowaną teorią Wielkiego Wybuchu dawno temu Wszechświat był bardzo gęsty i gorący, a w wyniku rozszerzania się stał się duży i chłodny, czyli taki jak obecnie. Hipotezę Wielkiego Wybuchu potwierdzają obserwacje „uciekających” we wszystkie strony galaktyk oraz poczerwienienia ich światła. Za Wielkim Wybuchem przemawia także obserwacja *mikrofalowego promieniowania tła*, wypełniającego w miarę równomiernie przestrzeń kosmiczną. Historia jego powstania jest następująca: po epoce, w której Wszechświat był gorący i gęsty, temperatura spadła do poziomu, przy którym fotony nie mogły już jonizować atomów wodoru. Ta *rekombinacja*, tzn. łączenie się elektronów i protonów w atomy wodoru, zaszła w momencie, gdy Wszechświat miał około 400 tys. lat, a uwolnione wtedy promieniowanie tła temperaturę około 3000 K. Adiabatyczne rozszerzanie się Wszechświata sprawia jednak, że fotony promieniowania tła mają coraz mniejszą energię, czyli niższą temperaturę. Obecnie wynosi ona jedynie  $2,7260 \pm 0,0013$  K, a jej rozkład na niebie jest głównym źródłem informacji dla kosmologów pragnących niczym historycy starożytności dociec, co działo się w Ciemnych Wiekach.

Zespół obserwatorów radiowych, posługujących się zestawem teleskopów ATCA (*Australia Telescope Compact Array*), zmierzył ostatnio temperaturę promieniowania tła w odległym od Układu Słonecznego miejscu, w galaktyce o poczerwienieniu grawitacyjnym  $z = 0,89$ , co przekłada się na odległość 7,2 miliarda lat świetlnych. Naukowcy zbadali wpływ materii galaktyki na fale radiowe znajdujące się za nią jeszcze odleglejszego kwazara PKS1830-211. Galaktyczny gaz oddziałując z mikrofalowym promieniowaniem tła, wpływa na obserwacje radiowe i umożliwia zdalny pomiar temperatury fotonów tła. Uzyskany wynik,  $5,08 \pm 0,10$  K, jest wyższy o mniej więcej dwa stopnie od temperatury mierzonej w naszym sąsiedztwie. Nie powinno to dziwić, ponieważ patrząc w głąb przestrzeni kosmicznej, spoglądamy jednocześnie we wcześniejsze etapy życia Wszechświata. W granicach błędów pomiar jest zgodny ze standardowym modelem kosmologicznym, ale badacze nie wykluczają, że przyszłe obserwacje umożliwią bezpośrednie odkrycie ewentualnych egzotycznych efektów.

Michał BEJGER



Gwiazdozbiór Cefeusza. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

## Niebo jak własna kieszeń: Lipiec

W pobliżu północnego bieguna nieba, pomiędzy gwiazdozbiorami Małej Niedźwiedzicy, Kasjopei oraz Łabędzia znajduje się Cefeusz (łac. *Cepheus*). Starożytny kartograf Ptolemeusz przydzielił ten obszar nieba królowi Etiopii, krainy znajdującej się według mitu na terenach obecnego Egiptu, Izraela i Jordanii (w historii uwiecznionej na niebie biorą też udział: żona Cefeusza – Kasjopeja, córka Andromeda, groźny Wieloryb, oraz wybrane Andromedy, Perseusz). Najjaśniejszą gwiazdą Cefeusza jest  $\alpha$ , zwana Alderamin ( $2,5^m$ ), stanowiąca dobry punkt orientacyjny na niebie; znajdująca się w pobliżu  $\gamma$  Cephei stanie się za około 2000 lat Gwiazdą Polarną, zastępując w tej roli Polaris. Niektóre gwiazdy Cefeusza są modelowymi przedstawicielkami klas zmienności: typ  $\beta$  Cephei (Alfirk, średnia jasność  $3,3^m$ ) to gwiazdy Ciągu Głównego o masach od 7 do 20  $M_{\odot}$ , pulsujące z okresami około 0,1–0,6 dnia, natomiast  $\delta$  Cephei (średnia jasność  $4,07^m$ ) jest prototypową *cefeidą*; charakterystyczną zależność okres pulsacji–jasność wykorzystuje się do pomiarów odległości. W gwiazdozbiórce Cefeusza znajduje się także bardzo piękna mgławica refleksyjna Irys ( $6,8^m$ , tuż obok  $\beta$  Cephei), oświetlana przez znajdującą się w jej centrum gwiazdę; mgławica została odkryta i opisana przez słynnego astronoma i kompozytora, Williama Herschela.

W lipcu spodziewamy się roju  $\delta$  Akwaryd (początek 12 VII, maks. 27 VII, 20 zjawisk/h, radiant w gwiazdozbiórce Wodnika), pochodzącego z pozostałości muskających Słońce komet grupy Krachta. Księżyc będzie w pełni 22 VII (nów 8 VII), co może

trochę przeszkadzać w obserwacjach świecących bolidów. Pozycje planet prezentują się następująco: Merkury wstaje przed Słońcem, podobnie jak Mars ( $1,82^m$ ) i Jowisz ( $-1,5^m$ ), znajdujące się w gwiazdozbiórce Bliźniąt. Wenus ( $-3,4^m$ ) jest w tym okresie po wschodniej stronie Słońca w gwiazdozbiórce Lwa. Saturn będzie dobrze widoczny w pierwszej połowie nocy na zachodzie ( $0,86^m$ , Panna), a Uran ( $6,11^m$ ) tradycyjnie na granicy widoczności, w gwiazdozbiórce Ryb.

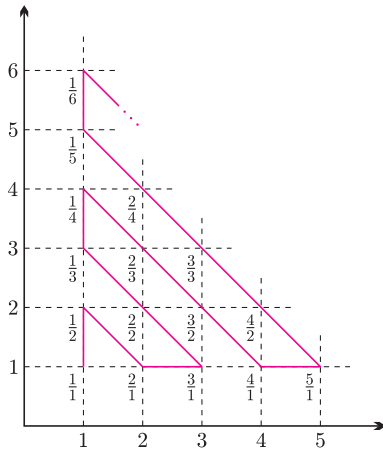
M. B.



## Równe i różne $\infty$

Joanna JASZUŃSKA

Zakładamy, że  $0 \in \mathbb{N}$ .  
 $\mathbb{Z}$  oznacza zbiór liczb całkowitych,  
 $\mathbb{Q}$  to zbiór liczb wymiernych,  
 $X^+$  oznacza zbiór dodatnich liczb z  $X$ .

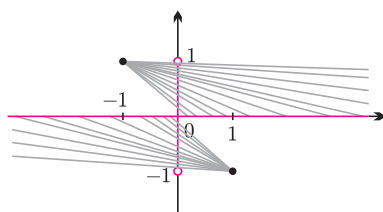


Rys. 1. Zygzak odwiedza dokładnie raz każdy punkt  $\langle x, y \rangle$  dla  $x, y \in \mathbb{Z}^+$ .

$x_0 = 0, 1 1 0 0 1 0 \dots$   
 $x_1 = 0, 0 1 0 1 1 1 \dots$   
 $x_2 = 0, 0 1 0 0 1 0 \dots$   
 $x_3 = 0, 1 0 1 1 0 0 \dots$   
 $x_4 = 0, 1 1 1 1 0 1 \dots$   
 $x_5 = 0, 0 1 1 0 1 0 \dots$   
 $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots$

Rys. 2. Przykładowe wartości ciągu  $x_0, x_1, x_2, \dots$  oraz przekątna tabeli. Tutaj  $x = 0,001011\dots$

Można dowieść, że  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$ .



Rys. 3

Czy nieskończoność jest tylko jedna? Nie, istnieją różne, większe i mniejsze! Zbiory  $A$  i  $B$  są *równoliczne*, gdy ich elementy można dobrać w pary (każdy element z  $A$  ma dokładnie jedną parę w  $B$  i na odwrót). Piszemy wtedy  $A \sim B$ . Jeśli  $A \sim \mathbb{N}$ , to zbiór  $A$  nazywamy *przeliczalnym*; dobranie w pary jego elementów z liczbami naturalnymi odpowiada ustawieniu ich w ciąg:  $a_0, a_1, a_2, \dots$  (element zbioru  $A$ , oznaczony jako  $a_k$ , jest w parze z liczbą naturalną  $k$ ).

$\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ . Udowodnimy, że liczb całkowitych, wbrew pozorom, nie jest wcale więcej, niż naturalnych, a dokładnie tyle samo. W tym celu ustawmy je w następujący ciąg:  $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \dots$ . Każda liczba całkowita występuje w tym ciągu dokładnie jeden raz, jest ich więc tyle samo, co liczb naturalnych.  $\square$

$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ . Wykażemy teraz, że również liczb wymiernych jest przeliczalnie wiele. Najpierw udowodnimy, że  $\mathbb{Q}^+ \sim \mathbb{N}$ . W tym celu rozważmy punkty płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych dodatnich. Każdemu takiemu punktowi  $\langle x, y \rangle$  przypiszmy dodatnią liczbę wymierną  $\frac{x}{y}$ . Następnie odwiedźmy po kolei wszystkie te punkty, spacerując po płaszczyźnie zygzakiem o początku w  $\frac{1}{1}$ , jak na rysunku 1. Spisujemy kolejno odwiedzane liczby wymierne  $\frac{x}{y}$ , ale bez powtórzeń (np. liczbę  $\frac{2}{2}$  pomijamy, bo wcześniej była  $\frac{1}{1}$ ). Otrzymujemy w ten sposób ciąg wszystkich dodatnich liczb wymiernych:  $1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

Aby wykazać, że  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ , zastosujemy podobny pomysł, jak przy dowodzie  $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$  – ustawmy na przemian liczby z powyższego ciągu i liczby do nich przeciwne, a na początku zero:  $0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, 3, -3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 4, \dots$   $\square$

$\mathbb{R} \approx \mathbb{N}$ . Liczb rzeczywistych jest więcej, niż liczb naturalnych, czyli *nieprzeliczalnie wiele*. Wykażemy, że nieprzeliczalny jest już podzbiór takich liczb z odcinka  $[0, 1)$ , których rozwinięcie dziesiętne składa się wyłącznie z cyfr 0 i 1.

Założmy, że podzbiór ten jest przeliczalny, czyli jego elementy można ustawić w ciąg  $x_0, x_1, x_2, \dots$ . Otrzymujemy tabelę (rys. 2); jest ona nieskończona w prawo (liczbom o skończonym rozwinięciu dziesiętnym dopisujemy dalej same zera) oraz w dół (liczb rozważanej postaci jest nieskończenie wiele, m.in.  $0,1, 0,01, 0,001, \dots$ ).

Zapisać ciąg cyfr z przekątnej tabeli, a następnie zamienić w nim wszystkie 0 na 1, a 1 na 0. Niech liczba  $x$  ma w zapisie dziesiętnym zero, a po przecinku uzyskany w ten sposób ciąg cyfr. Wtedy  $x \in [0, 1)$  oraz  $x$  ma w rozwinięciu dziesiętnym same 0 i 1, zatem z założenia występuje w naszym ciągu  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , czyli w którymś wierszu rozważanej tabeli. Nie jest on równy  $x_0$ , bo wskutek zamiany 0 i 1 z przekątnej, od liczby w pierwszym wierszu różni się na pierwszym miejscu po przecinku. Podobnie  $x \neq x_1$ , bo od liczby w drugim wierszu różni się na drugim miejscu po przecinku. Analogicznie  $x$  nie jest równy żadnej z pozostałych liczb z naszego ciągu, bo od liczby w  $k$ -tym wierszu różni się na  $k$ -tym miejscu po przecinku. Zbudowaliśmy więc liczbę z rozważanego zbioru, ale spoza ciągu, który miał zawierać wszystkie jego elementy. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że zbiór ten jest nieprzeliczalny, zatem także  $[0, 1) \approx \mathbb{N}$  oraz  $\mathbb{R} \approx \mathbb{N}$ .  $\square$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$ . Gdyby liczb niewymiernych było przeliczalnie wiele, można by ustawić je w ciąg  $t_0, t_1, t_2, \dots$ . Wykorzystując nasz ciąg liczb wymiernych, uzyskalibyśmy ciąg wszystkich liczb rzeczywistych:  $0, t_0, 1, t_1, -1, t_2, \frac{1}{2}, t_3, -\frac{1}{2}, t_4, 2, t_5, -2, t_6, 3, \dots$ . Wiemy jednak, że  $\mathbb{R} \approx \mathbb{N}$ , zatem to niemożliwe. Stąd  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$ .  $\square$

$(-1, 1) \approx \mathbb{R}$ . Pokażemy teraz, że odcinek zawiera tyle samo punktów, co prosta. Najpierw wykażemy, że  $(0, 1) \approx \mathbb{R}^+$ . Rozważmy odcinek  $(0, 1)$  na osi  $OY$  oraz dodatnią półoś  $OX$  (rys. 3). Zapalmy latarkę w punkcie  $\langle -1, 1 \rangle$  i każdemu punktowi z odcinka  $(0, 1)$  przydzielmy do pary jego cień na półprostej  $\mathbb{R}^+$ .

Analogicznie, punktom z odcinka  $(-1, 0]$  przydzielamy pary z niedodatniej półosi  $OX$  (latarka w punkcie  $\langle 1, -1 \rangle$ ), co wobec powyższego daje  $(-1, 1) \approx \mathbb{R}$ .  $\square$

**Twierdzenie Cantora** orzeka, że każdy zbiór ma więcej podzbiórów niż elementów. Stąd dla dowolnego zbioru nieskończonego istnieje zbiór jeszcze od niego większy! Opisane powyżej zbiory, równoliczne z  $\mathbb{N}$  lub  $\mathbb{R}$ , to tylko niektórzy, najczęściej spotykani przedstawiciele zbiorów nieskończonych.