





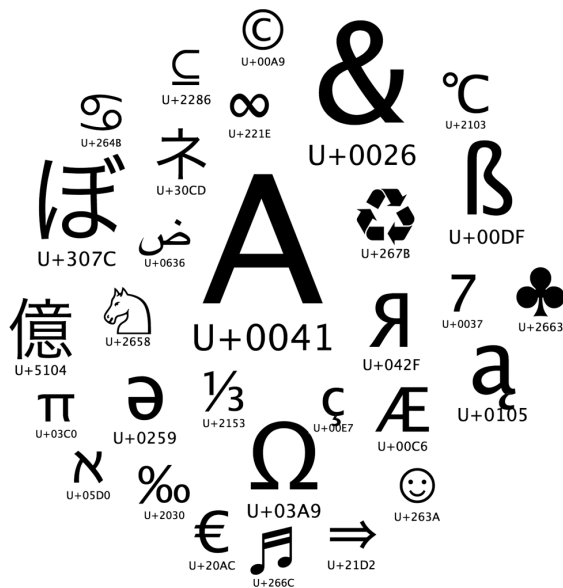


ISSN 1643-1992
PISMA
DELTA

SPIS TREŚCI NUMERU 5 (468)

Problemy 3SUM-trudne w geometrii <i>Jakub Radoszewski</i>	str. 1
Zawieramy wielokąt <i>Tomasz Idziaszek</i>	str. 4
Pojedynek, symetrie i potwór – klasyfikacja grup prostych <i>Gabriela Majewska</i>	str. 5
Dziewięć twarzy płaszczyzny rzutowej <i>Marek Kordos</i>	str. 8
 Odkrywanie tajemnic ewolucji nie ma końca <i>Magdalena Fikus</i>	str.11
 Opowieści o podróżach w Kosmos <i>Michał Bejger</i>	str.12
Informatyczny kącik olimpijski (62): Infiltracja <i>Karol Pokorski</i>	str.15
Splątanie kwantowe na tropie fal grawitacyjnych <i>Jan Kolodźński</i>	str.16
Aktualności	str.19
Kącik przestrzenny (17): Punkt Fermata–Torricellego <i>Michał Kieza</i>	str.20
 Zadania	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Pocztówki z Saturna <i>Michał Bejger</i>	str.24
Niebo jak własna kieszeń: Maj	str.24
 W krzywym zwierciadle <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

W następnym numerze polecamy



krzaczkę na ekranie

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2013 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Telefonicznym Biurem Obsługi Klienta pod numerem: 801 800 803 lub 22 717 59 59 – czynne w godzinach 7⁰⁰ – 18⁰⁰. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

30 marca 2013 roku
zmarł

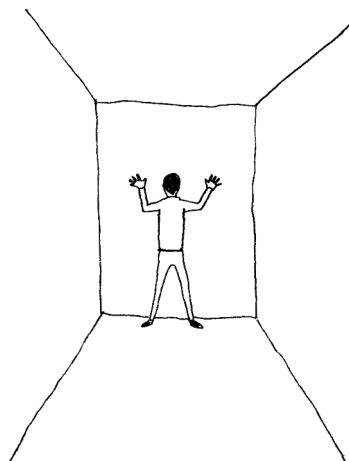
Krzysztof Biesaga

poligraf

wieloletni członek kolegium *Delty*

Problemy 3SUM-trudne w geometrii

Jakub RADOSZEWSKI



Zad. 1. Jak rozwiązać problem 3SUM w czasie $O(n^2)$? (Albo chociaż w czasie $O(n^2 \log n)$?)

Zad. 2. W problemie 3SUM elementy a, b, c mogą się powtarzać. Nie ma to jednak większego znaczenia, gdyż w czasie $O(n \log n)$ można łatwo identyfikować instancje problemu, dla których istnieje rozwiązanie z powtarzającymi się elementami. Jak to zrobić?

Algorytm ten jest opisany w pracy: I. Baran, E.D. Demaine, M. Patrascu, *Subquadratic algorithms for 3SUM*, WADS 2005.

Zad. 3. Udowodnij, że $3SUM =_n 3SUM'$, tzn. pokaż, jak wykonać obie redukcje. Przykłady różnych redukcji znajdziesz w dalszej części artykułu.

Wiele z opisanych dalej problemów pochodzi z przystępnej i łatwo dostępnej pracy przeglądowej: J. King, *A survey of 3SUM-hard problems*, 2004.

Kiedy rozwiązujemy jakiś problem informatyczny, często naszym celem jest podanie jak najefektywniejszego algorytmu. Jednak czasem możemy natknąć się przy tym na „ścianę” – danego problemu nie da się rozwiązać tak efektywnie, jak byśmy tego chcieli. Najpowszechniej znanym przykładem opisanego zjawiska jest klasa problemów NP-zupełnych. O problemach z tej klasy (a należy do niej wiele naturalnych i praktycznych zagadnień) podejrzewa się, że nie da się ich rozwiązać w czasie wielomianowym względem rozmiaru danych wejściowych. Niestety, tylko *podejrzewa się*, a rozstrzygnięcie tej hipotezy (znanej też jako „ $P \neq NP$?”) jest obecnie najsłynniejszym otwartym problemem informatyki teoretycznej.

Na szczęście wiele ważnych problemów obliczeniowych umiemy rozwiązywać w czasie wielomianowym. Jednak w praktyce wielomian wielomianowi nierówny – jest przecież istotne, czy dany problem umiemy rozwiązać w czasie $\Theta(n)$, czy też w czasie $\Theta(n^{10})$. Okazuje się, że także w przypadku problemów rozwiązywalnych w czasie wielomianowym (tzw. klasa problemów P) znane są pewne narzędzia pozwalające stwierdzić, że danego problemu *zapeune* nie da się rozwiązać w czasie szybszym niż taki a taki, a jeśli nawet się da, to jest to bardzo trudne.

W tym artykule skupimy naszą uwagę na następującym problemie 3SUM:

Dany jest zbiór S złożony z n liczb całkowitych. Czy istnieją takie liczby $a, b, c \in S$, że $a + b + c = 0$?

Wszystkie omawiane w tym artykule problemy mają charakter decyzyjny, tzn. odpowiedzią w każdym z nich jest pojedyncza wartość logiczna. Na potrzeby naszego artykułu przyjmujemy następującą definicję *redukcji* problemu: Powiemy, że problem A można zredukować do problemu B w czasie $O(f(n))$, jeśli dowolną instancję (czyli dane wejściowe) problemu A o rozmiarze n można przekształcić w czasie $O(f(n))$ w stałą liczbę instancji problemu B o rozmiarze $O(n)$ tak, żeby na podstawie odpowiedzi dla wyznaczonych instancji problemu B można było udzielić odpowiedzi dla rozważanej instancji problemu A . Będziemy wówczas pisać, że $A \preceq_{f(n)} B$, co oznacza tyle, że problem B jest co najmniej tak trudny jak problem A , gdyż jeśli umiemy w czasie $O(f(n))$ rozwiązać problem B , to umiemy w takim samym czasie rozwiązać problem A . Jeśli $A \preceq_{f(n)} B$ oraz $B \preceq_{f(n)} A$, to będziemy pisać, że $A =_{f(n)} B$.

Problemem, który będziemy redukować do innych zagadnień, jest wspomniany już problem 3SUM. Przez wiele lat znany był algorytm rozwiązujący ten problem w czasie $\Theta(n^2)$ (patrz zadanie 1 na marginesie) i uważano, że nie da się go rozwiązać w złożoności mniejszej niż $\Theta(n^2)$. Wprowadzono też klasę problemów 3SUM-trudnych, czyli problemów, do których można zredukować problem 3SUM w czasie $o(n^2)$. Od 2005 roku wiadomo jednak, że problem 3SUM można rozwiązać *trochę* szybciej, a mianowicie w czasie

$$O\left(\frac{n^2(\log \log n)^2}{\log^2 n}\right).$$

Mimo tego usprawnienia wciąż nie widać nadziei na znalezienie algorytmu rozwiązującego ten problem w czasie *istotnie* lepszym niż $\Theta(n^2)$.

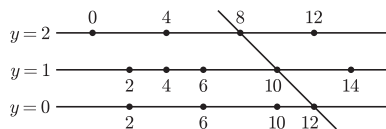
Będziemy także używać następującego bliźniaczego problemu 3SUM', który jest równoważny z problemem 3SUM (tj. $3SUM =_n 3SUM'$):

Dane są trzy zbiory liczb całkowitych A, B, C , zawierające łącznie n elementów. Czy istnieją liczby $a \in A, b \in B$ i $c \in C$, takie że $a + b = c$?

Problemy, które będziemy rozważać w dalszej części tekstu, mają charakter geometryczny. Jako pierwszy rozpatrzmy problem nazywany GEOMBASE – podstawowy problem 3SUM-trudny w geometrii, służący jako narzędzie

do dowodzenia 3SUM-trudności innych problemów. Jest on określony następująco:

Punkt kratowy to punkt o współrzędnych całkowitych.



Rys. 1. Instancja problemu GEOMBASE otrzymana z instancji $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$, $C = \{2, 4, 6, 10, 14\}$ problemu 3SUM'. Wynikiem jest $a = 6$, $b = 4$, $c = 10$.

Danych jest n punktów kratowych położonych na prostych $y = 0$, $y = 1$ i $y = 2$. Czy istnieje prosta inna niż pozioma przechodząca przez jakies trzy spośród tych punktów?

Po chwili namysłu nietrudno dostrzec tu podobieństwo do problemu 3SUM'. Nie jest to przypadek; zachodzi bowiem $3SUM' =_n GEOMBASE$. Przeprowadzimy tylko redukcję $3SUM' \preceq_n GEOMBASE$, redukcja w drugą stronę jest właściwie taka sama. Wystarczy mianowicie dla każdej liczby $a \in A$ wybrać punkt $(2a, 0)$ na prostej $y = 0$, dla każdej liczby $b \in B$ – punkt $(2b, 2)$, a dla każdej liczby $c \in C$ – punkt $(c, 1)$, patrz rysunek 1. Punkty $(2a, 0)$, $(c, 1)$ i $(2b, 2)$ są współliniowe, gdy

$$c - 2a = 2b - c,$$

czyli dokładnie gdy $c = a + b$. Stąd odpowiedź dla otrzymanej instancji problemu GEOMBASE jest pozytywna wtedy i tylko wtedy, gdy pozytywna jest odpowiedź dla odpowiadającej jej instancji problemu 3SUM', a to jest dokładnie to, co chcieliśmy uzyskać.

Problem GEOMBASE, jakkolwiek użyteczny, nie jest sam w sobie nadmiernie interesujący. Dużo ciekawszy jest podobny do niego następujący problem 3POINTSONLINE:

Na płaszczyźnie danych jest n punktów. Czy istnieje prosta przechodząca przez jakies trzy spośród tych punktów?

Ciekawe, ilu spośród Czytelników próbowało kiedykolwiek rozwiązać ten problem w czasie zbliżonym do $\Theta(n \log n)$ (sam autor wielokrotnie próbował).

Ten problem także jest 3SUM-trudny; tym razem redukcję przeprowadzimy wprost z problemu 3SUM. Niech S będzie instancją problemu 3SUM. Dla każdej liczby $x \in S$ rysujemy na płaszczyźnie punkt (x, x^3) . Zbadajmy, kiedy trzy różne tak otrzymane punkty (a, a^3) , (b, b^3) i (c, c^3) są współliniowe:

$$\begin{aligned} \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{c^3 - b^3}{c - b} &\Leftrightarrow \frac{(b - a)(b^2 + ab + a^2)}{b - a} = \frac{(c - b)(c^2 + bc + b^2)}{c - b} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b^2 + ab + a^2 = c^2 + bc + b^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 - c^2 + ab - bc = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a - c)(a + c) + b(a - c) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a - c)(a + b + c) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a + b + c = 0. \end{aligned}$$

Okazuje się zatem, że punkty (a, a^3) , (b, b^3) i (c, c^3) są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a, b, c stanowią rozwiązanie problemu 3SUM.

W ten sposób otrzymujemy żadaną redukcję problemu 3SUM do problemu 3POINTSONLINE, pod warunkiem, że w tym pierwszym problemie interesują nas tylko trójki różnych liczb. To jednak możemy zapewnić (patrz zad. 2).

Wytrawny znawca geometrii natychmiast zauważy, że 3SUM-trudność problemu 3POINTSONLINE implikuje bezpośrednio 3SUM-trudność dualnego problemu POINTON3LINES:

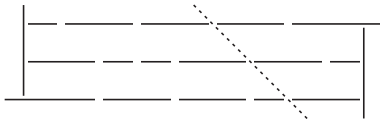
Na płaszczyźnie danych jest n prostych. Czy któreś trzy proste przecinają się w jednym punkcie?

Wróćmy teraz do problemu GEOMBASE. Skoro reklamowaliśmy go jako przydatne narzędzie w geometrii, to najwyższy czas, aby podać kilka jego zastosowań. Wykazaliśmy już, że jest to problem 3SUM-trudny. Jeśli zatem pokażemy redukcję z tego problemu do jakiegoś innego problemu geometrycznego działającą w czasie $o(n^2)$, to w ten sposób wykażemy, że ów drugi problem również jest 3SUM-trudny. Pierwszym problemem z tej serii, który weźmiemy pod lupę, jest problem o nazwie SEPARATOR:

Na płaszczyźnie danych jest n odcinków. Czy istnieje prosta nieprzecinająca żadnego z nich, dzieląca zbiór tych odcinków na dwa niepuste podzbiory? Jeśli chcemy, możemy założyć, że podane odcinki są parami rozłączne.

Głównym zastosowaniem problemu 3POINTSONLINE wydaje się weryfikowanie częstego w problemach geometrycznych założenia, że żadne trzy spośród zadanych punktów nie leżą na jednej prostej.

Zad. 4. Określmy przekształcenie geometryczne T , które punktowi $p = (a, b)$ przyporządkowuje prostą $T(p) : y = ax - b$, a prostej $l : y = kx + d$ przyporządkowuje punkt $T(l) = (k, -d)$. Udowodnij, że punkt p leży na prostej l wtedy i tylko wtedy, gdy prosta $T(p)$ przechodzi przez punkt $T(l)$. (Więcej na temat tej dualności Czytelnik znajdzie w numerze 8/2013 *Delty*.)



Rys. 2. Redukcja instancji problemu GEOMBASE z rysunku 1 do instancji problemu SEPARATOR.

Zad. 5. Jak dobrać ε w opisanej redukcji?

Sprowadzimy problem GEOMBASE do problemu SEPARATOR. Tym razem redukcja będzie działać w czasie $O(n \log n)$, gdyż wymagać będzie sortowania. Posortujemy punkty na każdej z prostych poziomych i połączymy pary kolejnych punktów odcinkami w taki sposób, żeby między każdymi dwoma kolejnymi odcinkami występował bardzo mały odstęp, o długości równej $\varepsilon > 0$. Widzimy już, że przy tej konstrukcji prosta rozdzielająca zbiór odcinków, przechodząca przez trzy odstępy, odpowiada trójce punktów współliniowych należących do różnych prostych poziomych. Należy jeszcze zadbać o wyeliminowanie poziomych prostych rozdzielających. Wystarczy w tym celu umieścić dwa pionowe odcinki po bokach konstrukcji i ustawić je „na zakładkę” z odcinkami poziomymi, tak aby z kolei wyeliminować trywialne proste rozdzielające pionowe (rys. 2). W ten sposób wykazaliśmy, że $\text{GEOMBASE} \preceq_{n \log n} \text{SEPARATOR}$.

Kolejny przykład. Okazuje się, że problem GEOMBASE możemy zredukować do następującego, całkiem naturalnego i mającego liczne zastosowania praktyczne problemu **PLANARMOTIONPLANNING**:

Na płaszczyźnie danych jest n odcinków-przeszkód i jeden odcinek reprezentujący robota. Czy robot może się przedostać z zadanej pozycji początkowej do zadanej pozycji końcowej, przemieszczając się jedynie za pomocą ciągłych przesunięć i obrotów bez dotykania żadnej z przeszkód? Znow, jeśli chcemy, możemy założyć, że odcinki-przeszkody są parami rozłączne.

Redukcja jest tutaj podobna jak poprzednio. Przeszkodami będą odcinki poziome z wcześniejszej redukcji. Robota umieścimy poniżej całej konstrukcji, a jego celem będzie przedostanie się powyżej konstrukcji. Sam robot będzie na tyle długi, żeby nie mógł przedostać się na drugą stronę inaczej niż tylko przez trzy odstępy naraz. Należy jeszcze zadbać, aby robot nie mógł ominąć całej konstrukcji bokiem. W tym celu trzeba poniżej i powyżej konstrukcji zbudować „klatki” uniemożliwiające ucieczkę robota do „nieskończoności”. W ten sposób otrzymujemy wniosek, że $\text{GEOMBASE} \preceq_{n \log n} \text{PLANARMOTIONPLANNING}$.

Zad. 6. Jak zbudować klatki w opisanej redukcji? (Narysuj!)

To, co przedstawiliśmy do tej pory, to tylko niewielka grupa znanych problemów 3SUM-trudnych. Dla Niestrudzonych Czytelników mamy w zanadrzu jeszcze kilka innych takich problemów – tym razem już dowody pominiemy. Zaczniemy od jeszcze jednego pomocniczego problemu 3SUM-trudnego **SEGMENTSCONTAINPOINTS**:

Na prostej danych jest n punktów i $m = O(n)$ parami rozłącznych przedziałów. Czy istnieje wektor, o który można przesunąć wszystkie zadane punkty, tak aby każdy z nich znalazł się w jakimś przedziale?

Problem ten można zredukować do każdego z następujących zagadnień typu **POLYGONCONTAINMENT**:

Na płaszczyźnie dane są dwa wielokąty, odpowiednio o n i $m = O(n)$ bokach. Mamy do dyspozycji pewien zestaw izometrii płaszczyzny. Czy za pomocą tych izometrii możemy pierwszy z tych wielokątów umieścić wewnątrz drugiego, przy założeniu, że:

- wielokąty są dowolne i dopuszczamy dowolne przesunięcia;
- wielokąty są wypukłe i dopuszczamy dowolne obroty;
- wielokąty są wypukłe i dopuszczamy dowolne obroty i przesunięcia?

A już na sam koniec kilka problemów 3SUM-trudnych typu **COVERING**:

- Czy dany zbiór n dwustronnie nieskończonych pasków (o różnych szerokościach i kierunkach) pokrywa zadany prostokąt?
- Czy dany zbiór n trójkątów pokrywa zadany trójkąt?
- Czy pole sumy danych n trójkątów jest mniejsze od ustalonej liczby?
- Czy suma danych n trójkątów zawiera jakąś dziurę?
- Danych jest n półpłaszczyzn. Czy istnieje punkt płaszczyzny pokryty przez co najmniej k spośród tych półpłaszczyzn?

Redukcje dotyczące problemów **SEGMENTSCONTAINPOINTS** i **POLYGONCONTAINMENT** są opisane w pracy: G. Barequet, S. Har-Peled, *Polygon-containment and translational min-Hausdorff-distance between segment sets are 3SUM-hard*, SODA 1999.

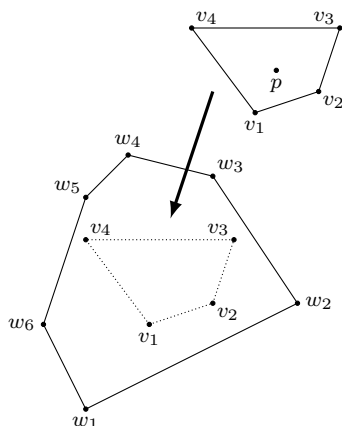
Zad. 7. Opisz redukcję problemu **SEGMENTSCONTAINPOINTS** do problemu **POLYGONCONTAINMENT** w wersji (a). Redukcja powinna działać w czasie $O(n \log n)$. Wskazówka: szukane wielokąty mają kształt grzebieni.

Zad. 8. Opisz redukcję wariantu (a) problemu **COVERING** do wariantu (b).

Redukcje do problemów typu **COVERING** można znaleźć w podstawowej (tj. pionierskiej) pracy dotyczącej 3SUM-trudności: A. Gajentaan, M.H. Overmars, *On a class of $O(n^2)$ problems in computational geometry*, Comp. Geom. 5(3), 1995.

Na poprzedniej stronie podano trzy wersje problemu POLYGONCONTAINMENT, które są uważane za trudne – nie umiemy ich rozwiązać w czasie (istotnie) lepszym niż kwadratowy. Uważni Czytelnicy na pewno zauważyli, że nie jest tam wspomniane o wersji, w której wielokąty są wypukłe i dopuszczamy dowolne przesunięcia (ale nie obroty). Ten brak jest w pełni uzasadniony, gdyż tę wersję problemu można rozwiązać w czasie liniowym względem liczby wierzchołków wielokątów, co pokażemy poniżej.

Niech P będzie wielokątem o wierzchołkach v_1, \dots, v_n , który chcemy umieścić wewnątrz wielokąta Q o wierzchołkach w_1, \dots, w_m (przyjmujemy, że $v_{n+1} = v_1$ i $w_{m+1} = w_1$). Niech p będzie dowolnym punktem wewnątrz wielokąta P (rys. 1). Załóżmy dla uproszczenia, że żadna para boków wielokątów nie jest równoległa oraz żaden bok nie jest pionowy.



Rys. 1. Wielokąt $P = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ można umieścić wewnątrz wielokąta $Q = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$.

Przez H_i (dla $1 \leq i \leq m$) oznaczmy tę półpłaszczyznę wyznaczoną przez prostą $w_i w_{i+1}$, która zawiera wielokąt Q . Przesuńmy teraz wielokąt P tak, aby zawierał się w H_i i aby odległość punktu p od prostej $w_i w_{i+1}$ była jak najmniejsza; oznaczmy tę odległość przez d_i . Zauważmy, że d_i możemy obliczyć bez kłopotu, jeśli wyznaczmy wierzchołek przesuniętego wielokąta P , który leży na brzegu półpłaszczyzny H_i ; nazwiemy ten wierzchołek *krytycznym dla boku $w_i w_{i+1}$* (rys. 2).

Zauważmy, że wielokąt P zawiera się w H_i dokładnie wtedy, gdy punkt p zawiera się w półpłaszczyźnie H'_i , która jest wyznaczona przez prostą równoległą do $w_i w_{i+1}$ w odległości d_i . Jest jasne, że P znajduje się wewnątrz Q dokładnie wtedy, gdy znajduje się w każdej z półpłaszczyzn H_i , innymi słowy wtedy, gdy punkt p należy do przecięcia półpłaszczyzn H'_i . Co więcej, przecięcie półpłaszczyzn zawiera wszystkie możliwe położenia punktu p .

Do pełnego rozwiązania pozostaje zatem pokazanie, jak efektywnie wyznaczyć wierzchołki krytyczne, a następnie przecięcie półpłaszczyzn.

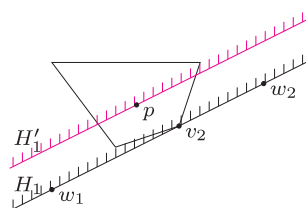
Wyznaczanie wierzchołków krytycznych. Narysujmy okrąg i zaznaczmy na nim, dla $j = 1, \dots, n$, punkt styczności \hat{v}_j prostej stycznej do okręgu i równoległej do prostej $v_j v_{j+1}$. Analogicznie zaznaczamy punkt \hat{w}_i dla prostej $w_i w_{i+1}$ (rys. 3). Zauważmy, że wierzchołek v_j jest krytyczny dla boku $w_i w_{i+1}$, jeśli na okręgu punkt \hat{w}_i leży pomiędzy punktami \hat{v}_{j-1} oraz \hat{v}_j . Wystarczy zatem wyznaczyć kolejność punktów na okręgu – to można zrobić w czasie $O(n + m)$, gdyż należy scalić dwa posortowane ciągi punktów (zakładamy przy tym, że znamy kolejność wierzchołków na obwodach wielokątów).

Na ten problem można spojrzeć też inaczej. Wyobraźmy sobie dwie proste równoległe, które jednocześnie obracają się wokół wielokątów, będąc do nich stycznymi. Ilekroć prosta styczna do Q zawiera pewien jego bok, to prosta styczna do P przechodzi przez wierzchołek krytyczny dla tego boku. Pozostawiamy Czytelnikowi zaimplementowanie tego pomysłu, tak by działał w czasie $O(n + m)$. Metoda prostych równoległych pozwala rozwiązać wiele problemów dotyczących wielokątów wypukłych – zainteresowani Czytelnicy więcej szczegółów mogą znaleźć w Internecie pod hasłem *rotating calipers*.

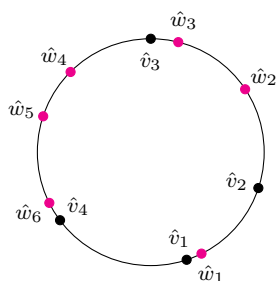
Wyznaczanie przecięcia półpłaszczyzn. W ogólności problem ten dla m półpłaszczyzn wymaga czasu $O(m \log m)$, ale my znowu skorzystamy z tego, że znamy kolejność wierzchołków w wielokącie Q , zatem nasze półpłaszczyzny H'_i są posortowane według współczynników kierunkowych ich brzegów (prostych ℓ_i), co pozwala nam rozwiązać ten problem w czasie $O(m)$.

Najpierw pokażemy, jak wyznaczyć „dolne” przecięcie, tzn. dla półpłaszczyzn, które mogą stanowić dolny brzeg wielokąta będącego przecięciem. Przeglądamy półpłaszczyzny w kolejności rosnących współczynników kierunkowych prostych ℓ_i . Będziemy utrzymywać następujący niezmiennik: po rozpatrzeniu prostej ℓ_i na stosie znajdują się te proste z ciągu ℓ_1, \dots, ℓ_i , które mają nietrywialne przecięcie z brzegiem zbioru $H'_1 \cap \dots \cap H'_i$. Rozpatrując ℓ_i , robimy co następuje: dopóki punkt przecięcia prostych ℓ_p i ℓ_o (przedostatniej i ostatniej prostej na stosie) znajduje się na prawo od punktu przecięcia prostych ℓ_o i ℓ_i , usuwamy ostatnią prostą ze stosu. Na końcu dodajemy prostą ℓ_i na stos (patrz rys. 4).

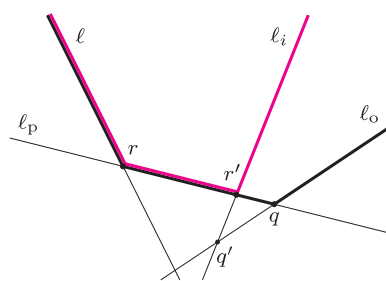
Analogicznie wyznaczamy przecięcie „górných” półpłaszczyzn. Obliczenie przecięcia powstałych zbiorów w czasie $O(m)$ pozostawimy jako ćwiczenie dla Czytelnika.



Rys. 2. Wierzchołek v_2 jest wierzchołkiem krytycznym dla boku $w_1 w_2$.



Rys. 3. Nachylenia boków wielokątów naniesione na okrąg.

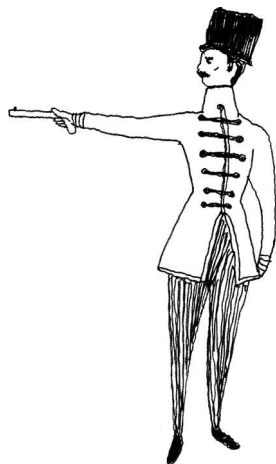


Rys. 4. Rozpatrujemy prostą ℓ_i , na stosie znajdują się proste ℓ, ℓ_p, ℓ_o . Punkt $q = \ell_p \cap \ell_o$ znajduje się na prawo od punktu $q' = \ell_o \cap \ell_i$, zatem usuwamy ze stosu prostą ℓ_o . Punkt r jest na lewo od r' , zatem na stosie pozostaną proste ℓ, ℓ_p, ℓ_i .

Pojedynek, symetrie i potwór – klasyfikacja grup prostych

Gabriela MAJEWSKA*

Jedną z wersji tych zdarzeń zawiera powieść Leopolda Infelda *Wybrańcy bogów*. Infeld, wybitny polski fizyk, napisał ją w celach zarobkowych, gdy za młodu był nieetatowym współpracownikiem Einsteina.



Zamiast objaśniać, co to jest grupa prosta, łatwiej jest pokazać, co to znaczy, że grupa nie jest prosta. Oto przykład.

Trójkąt równoboczny można z powrotem położyć na tym samym miejscu na 6 sposobów. Te przemieszczenia, zwane grupą izometrii własnych trójkąta równobocznego, to trzy symetrie względem prostych zawierających wysokości i trzy obroty o 0° , 120° i 240° względem punktu ich przecięcia. Te obroty tworzą mniejszą, trójelementową grupę obrotów, symetrie zaś grupy nie tworzą. Możemy natomiast rozważyć grupę dwuelementową, której elementami będą: zbiór \mathcal{R} obrotów i zbiór \mathcal{S} symetrii. Działanie w tej grupie określa tabelka

\times	\mathcal{R}	\mathcal{S}
\mathcal{R}	\mathcal{R}	\mathcal{S}
\mathcal{S}	\mathcal{S}	\mathcal{R}

bowiem złożenie dowolnego przekształcenia z \mathcal{R} z dowolnym przekształceniem z \mathcal{R} daje przekształcenie z \mathcal{R} , złożenie dowolnego przekształcenia z \mathcal{R} z dowolnym przekształceniem z \mathcal{S} daje przekształcenie z \mathcal{S} i tak dalej.

Można więc powiedzieć, że grupę izometrii własnych trójkąta równobocznego rozłożyliśmy na grupę trój- i dwuelementową.

Śmierć młodego geniusza. 30 maja 1832 roku w Paryżu zginął w pojedynku młody matematyk, Evariste Galois. Nie ma pewności, czy pojedynek ten miał podłoże polityczne, czy też Galois bronił honoru pewnej młodej damy. W pożegnalnym liście poprosił on, by jego notatki wysłać Jacobiemu albo Gaussowi. Żaden z tych wielkich matematyków nigdy nie zobaczył jednak zapisków Galois.

Czternaście lat później inny znany matematyk, Liouville, opublikował wyniki Galois razem z komentarzami. Co jednak było w nich aż tak interesującego? Galois zajmował się problemem istnienia wzorów na pierwiastki równań danych przez wielomiany. Większość Czytelników zna wzór na pierwiastki równania drugiego stopnia, słynne *be kwadrat minus cztery a ce*, a nieliczni słyszeli również o wzorach Cardano na rozwiązanie równania stopnia trzeciego, czy Ferrariego, które stosujemy przy równaniach stopnia czwartego. Czy można w podobny sposób opisać rozwiązania dowolnego równania stopnia piątego?

Galois zauważył, że mimo iż na mocy Zasadniczego Twierdzenia Algebry równanie piątego stopnia ma aż pięć pierwiastków, to pierwiastki te nie są całkowicie niezależne – tworzą one grupy, a w każdej takiej grupie można zaobserwować pewne zależności, symetrie między pierwiastkami. Geniusz Galois polegał na tym, że skupił się on na tych symetriach, a nie na samych pierwiastkach.

Zmianę kolejności elementów w zbiorze nazywamy permutacją. Galois zainteresował fakt, że jeśli użyjemy najpierw jednej permutacji, a potem drugiej, to możemy tej parze przypisać trzecią permutację, która da ten sam efekt. Galois nazwał taki system łączenia permutacji *grupą permutacji*. Kluczowym pomysłem jego pracy było rozkładanie grup permutacji na prostsze grupy, które współczesny matematyk, Mark Ronan (*Symmetry and the Monster*, Oxford University Press, 2006), nazywa *atomami symetrii*. Nazwa ta jest trafna – *atom* pochodzi od greckiego *niepodzielny*, więc to określenie pasuje do grup, których na prostsze rozłożyć się nie da. Mniej romantyczna nazwa tych atomów to *grupy proste*.

Powiemy, że zbiór permutacji P generuje grupę G , jeśli dowolną permutację z G możemy przedstawić jako złożenie potęg elementów zbioru P , gdzie *potęgą* permutacji p to jej wielokrotne złożenie. Grupa G jest cykliczna, jeśli generuje ją jeden element. *Rzędem grupy G* nazywamy liczbę jej elementów, zaś rząd elementu p to moc grupy generowanej przez ten element. Pierwsze atomy symetrii, jakie udało się znaleźć, to grupy cykliczne o rzędach będących liczbami pierwszymi. Jakie są inne atomy? Czy możemy te atomy w jakiś sposób sklasyfikować?

Grupy Liego, które powstały w związku z jego badaniami nad równaniami różniczkowymi, oraz pomysł Killinga na *układ okresowy* tych grup nadały kierunek poszukiwaniom. Udało się sklasyfikować istniejące atomy, umieszczając je w odpowiednich rodzinach. Okazało się jednak, że na tym nie koniec.

Puszka Pandory. W opowiadaniu *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture* autorstwa Apostolosa Doxiadisa pojawia się matematyk, który przez całą swoją karierę próbuje rozwiązać pewien stary problem. Mianowicie, czy każdą parzystą liczbę większą od 2 możemy przedstawić jako sumę dwóch liczb pierwszych? Jest to jedno z pytań, na które do tej pory nie udało się znaleźć odpowiedzi, chociaż poszukiwania trwają od dawna. Co sprawia, że niektóre problemy matematyczne są tak ciężkie do rozwiązania? Czy, tak jak w tym przypadku, trudność polega na tym, że nie wiemy, jak się do tego zabrać, czy może po prostu droga do rozwiązania jest długa i stroma?

*doktorantka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania F 832.

W ośrodku sprężystym lokalne zaburzenia gęstości rozprzestrzeniają się z prędkością dźwięku c . Dla wody $c = 1500$ m/s. Zmiana prędkości wody wywołana zamknięciem zaworu w czasie Δt dotrze na odległość $l = c\Delta t$, zatrzymana zostanie masa wody $m = l\rho S$, gdzie S jest polem przekroju rury, a $\rho = 10^3$ kg/m³ oznacza gęstość wody. Zmiana pędu wody wynosi mu . Ciśnienie p wody na zawór wyniesie więc

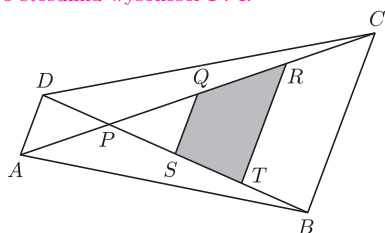
$$p = \frac{1}{S} \frac{mu}{\Delta t} = \rho cu.$$

Dla prędkości $u = 1$ m/s ciśnienie jest równe $p = 1,5 \cdot 10^6$ Pa = 15 atm.



Rozwiązanie zadania M 1384.

Z twierdzenia Talesa wynika, że $AD \parallel SQ \parallel TR \parallel BC$, więc $STRQ$ i $ABCD$ są trapezami o stosunku wysokości 1 : 4.



Przez a oznaczymy długość odcinka SQ . Wówczas $AD = a$, $TR = 2a$ oraz $BC = 3a$. Zatem

$$\frac{[STRQ]}{[ABCD]} = \frac{(a+2a) \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{(a+3a) \cdot 4h} = 3/16.$$

Do tej drugiej grupy problemów zdecydowanie należy zaliczyć (przynajmniej dziś) twierdzenie Feita-Thompsona o nieparzystym rzędzie. Jego sformułowanie jest bardzo proste:

Jeśli atom symetrii nie jest cykliczną grupą o rzędzie będącym liczbą pierwszą, to jego rząd jest parzysty.

Dowód miał jednak 255 stron i zajął cały numer *Pacific Journal of Mathematics*. Dlaczego jednak twierdzenie to było tak ważne przy poszukiwaniu atomów symetrii?

Cauchy udowodnił, że jeśli rząd grupy dzieli się przez liczbę pierwszą p , to w grupie tej istnieje element rzędu p . Jeśli więc rząd atomu symetrii jest liczbą parzystą, to atom ten musi zawierać element rzędu 2. Taki element (a dokładniej mnożenie przez niego) zachowuje się podobnie jak symetria lustrzana. Jeśli odbijemy przedmiot raz, to znajdzie się on po drugiej stronie lustra, a jeśli odbijemy go ponownie, to wróci na swoje miejsce. Składając tę symetrię z innymi, możemy otrzymać symetrię względem innego lustra. Znajdą się jednak takie symetrie, które utrzymają lustro w tym samym miejscu. Podgrupę permutacji niezmienniczą wybranego lustra będziemy nazywać *przekrojem poprzecznym*. Do czego potrzebny jest nam jednak taki twór?

Pomysł jest prosty. Zamiast szukać atomów symetrii, spróbujemy zrozumieć ich przekroje poprzeczne. Zaczniemy od przekrojów znanych nam atomów i pokażemy, że nie mogą istnieć inne, mające te same przekroje. Okazało się jednak, że to nie takie proste.

Nowe atomy. W połowie XIX wieku, kiedy opublikowane zostały prace Galois, wielu matematyków zainteresowało się teorią grup, a w szczególności grupami permutacji. Powstało wtedy pojęcie *tranzytywnej* (*przechodniej*) grupy permutacji. Grupa ta, działając na zbiorze obiektów, spełniała warunek, że dowolnie wybrany obiekt możemy zamienić miejscami z dowolnym innym obiektem. W podobny sposób możemy zdefiniować grupy wielokrotnie przechodnie. Grupa k -przechodnia to taka, która dla dwóch dowolnych podzbiorów złożonych z k obiektów zawiera przekształcenie, które zamienia miejscami odpowiednie pary tych obiektów. Badając grupy 5-przechodnie, francuski matematyk Mathieu wpadł na ślad dwóch nowych atomów, które oznaczył odpowiednio $M12$ i $M24$. Nie udało mu się jednak udowodnić istnienia tych grup. W końcu, ponad 70 lat później, na seminarium w Hamburgu, niemiecki matematyk Ernst Witt zdefiniował 24 symbole, których grupa symetrii to właśnie $M24$.

Interesujące jest, że atomy Mathieu nie należą do żadnej ze znanych rodzin atomów. Skoro jednak znaleźliśmy kilka samotnych atomów (takie samotne atomy zostały nazwane *grupami sporadycznymi*), to czy może być ich więcej?

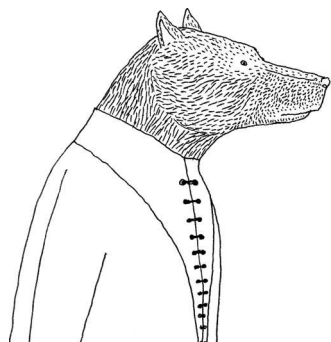
Odpowiedź brzmi: tak. Korzystając z opisanych wcześniej przekrojów poprzecznych, matematycy Janko i Thompson odnaleźli grupy, nazwane na cześć Janko $J1$, $J2$ i $J3$.

Radio i sieci. Pierwsze odkryte grupy sporadyczne miały nadspodziewanie dużo elementów. Na przykład, najmniej liczna spośród grup odkrytych przez Mathieu miała ich 7920. Powstało pytanie, jakie to obiekty mogą mieć tak liczne i nietypowe grupy symetrii.

Inspiracja przysłała od strony radia. W czasach pierwszych transmisji radiowych często zdarzało się, że dźwięki zakłócały się przez szumy, mimo że stacje radiowe starały się zachowywać jak najwyższą jakość transmisji. Szukając rozwiązania problemu, Claude Shannon z Bell Labs zaproponował, by sygnał radiowy wysyłany był jako seria krótkich dźwięków kodujących informację w taki sposób, żeby niewielkie zakłócenia mogły być natychmiast poprawiane, co zwiększyłyby jakość przekazu.

Dogodnym modelem takich sytuacji są gęsto upakowane sieci o ustalonej odległości między węzłami, na dodatek w wielowymiarowej przestrzeni.

Badając przestrzeń o wymiarze równym 24, matematyk John Leech zdefiniował nową sieć tego typu (nazywaną kratą Leecha). Doszedł on również do wniosku, że jest to struktura na tyle ciekawa, że warto sprawdzić, co kryje grupa jej symetrii. Udało mu się przekonać innego matematyka, Johna Conwaya, by zajął się badaniem możliwości otrzymania z niej kolejnych atomów symetrii, co doprowadziło Conwaya do uzyskania trzech nowych atomów $Co1$, $Co2$ i $Co3$.



Potwór Fischera. Matematyk Bernd Fischer postanowił zająć się problemem, którego sformułowanie było proste: jakie grupy permutacji, generowane przez permutacje rzędu 2, zachowują się podobnie jak transpozycje? *Transpozycja* to permutacja, która zamienia miejscami dwa ustalone elementy. Łatwo jest wykazać, że złożenie dwóch transpozycji ma albo rząd 2, albo rząd 3. Te permutacje, tak zbliżone do transpozycji, nazywamy *transpozycjami Fischera*. Fischerowi udało się udowodnić następujące twierdzenie:

Jeśli atom symetrii (albo coś bardzo do niego podobnego) jest generowany przez transpozycje Fischera, to może on być tylko jednym z 6 typów obiektów.

Analizując te typy obiektów, Fischer uzyskał trzy nowe interesujące grupy, blisko związane z grupami Mathieu $M22$, $M23$, $M24$. Oznaczył je jako $Fi22$, $Fi23$ i $Fi24$. $Fi22$ i $Fi23$ są atomami, zaś $Fi24$ zawiera olbrzymi atom rozmiaru 1 255 205 709 190 661 721 292 800.

Możemy porównać transpozycje Fischera do luster, które odbijają część obiektów, a resztę pozostawiają niezmienną. Jeśli ustawimy dwa lustra pod kątem α , to złożenie odbić w tych lustrach będzie obrotem o kąt 2α . Jeśli rząd złożenia dwóch symetrii lustrzanych ma być równy 2 lub 3, to kąty pomiędzy lustrami mogą być tylko równe 90° lub 60° . Rozważając pewne specyficzne zbiory tych luster, czyli układy generatorów, Fischer udowodnił podane wcześniej twierdzenie.

Następny krok można przedstawić jako dopuszczenie ustawienia luster pod kątem 45° . To doprowadziło Fischera do większego atomu, który zdawał się zawierać $Fi22$. Dzięki temu udało mu się stworzyć nowy atom symetrii, który nazwał M^{22} . Dodatkowo zauważył, że M^{22} może być przekrojem poprzecznym innego atomu symetrii, który z powodu powiązań z $Fi24$ został oznaczony jako M^{24} . Istniało podejrzenie, że pomiędzy M^{22} a M^{24} ukrywa się trzecia grupa, więc Conway, z którym Fischer podzielił się swoimi spostrzeżeniami, nazwał te trzy grupy odpowiednio Małym Potworem, Średnim Potworem i Super Potworem. Gdy później okazało się, że Średni Potwór nie może istnieć, nazwy zmieniono na *Mały Potwór* i *Potwór*.

Potwór okazał się być grupą, której rząd wynosi

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \approx 8 \cdot 10^{53}.$$

Naukowcom z Cambridge udało się udowodnić, że Potwór nietrywialnie działa na przestrzeni o wymiarze 196 883. Najoszczędniejsza forma, w jakiej udało się zawrzeć pełne informacje o tej grupie, ma postać tabeli o 194 wierszach i tyluż kolumnach. Aby ją wypełnić (obliczyć), potrzeba było roku pracy, w którą zaangażowano wszystkie (ówczesne) komputery uniwersytetu w Birmingham.

Jako że dwie podgrupy Potwora również okazały się atomami symetrii, to w sumie udało się odnaleźć 25 atomów niezrzeszonych w znanych wcześniej rodzinach. W 1975 roku Janko udowodnił istnienie jeszcze jednego atomu, $J4$, który wkrótce został dokładniej opisany. Od tego czasu liczba tych ważnych grup już się nie zmieniła i się nie zmieni.



Rozwiązanie zadania M 1386.

Załóżmy przeciwnie, że x_1, \dots, x_n to pierwiastki rzeczywiste naszego wielomianu. Wówczas

$$x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + \dots + a_0 = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

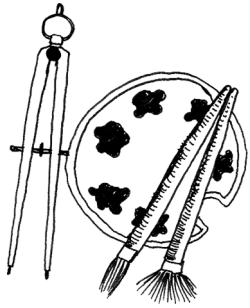
Porównując współczynniki przy x^{n-1} i x^{n-2} , dostajemy

$$0 = \sum_{i=1}^n x_i, \quad 0 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Stąd

$$\begin{aligned} x_1^2 + \dots + x_n^2 &= \\ &= \left(\sum_i x_i \right)^2 - 2 \sum_{i < j} x_i x_j = 0, \end{aligned}$$

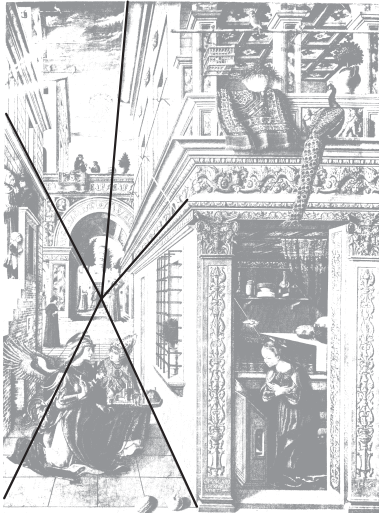
więc $x_1 = \dots = x_n = 0$. Zatem $a_{n-3} = \dots = a_0 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem.



Dziewięć twarzy płaszczyzny rzutowej

Marek KORDOS

W *Delcie* 6/2011 artykuł Marii Donten-Bury o płaszczyźnie rzutowej został poprzedzony przedstawieniem sześciu jej (płaszczyzny, nie Marysi) postaci, pod jakimi daje się nam ona zaobserwować. Wobec tego, że postaci te są bardzo różnorodne, nasunąć się może wątpliwość, czy faktycznie wszystkie są wcieleniami tego samego matematycznego obiektu. Poniżej jest przedstawiony sposób, jak tę wątpliwość można rozstrzygnąć.



Zacznijmy od malarstwa, bo z jego doświadczeń geometria rzutowa powstała. A właściwie od optyki. Zapewne każdy z nas widział, jak linie równoległe – brzegi prostej szosy, biegnące prosto tory kolejowe – zbliżają się do siebie wraz z oddalaniem się od nas. Zjawisko to bierze się z faktu, że oddalający się od nas (i nieskierowany w naszym kierunku) odcinek widzimy – gdy się oddala – pod coraz mniejszym kątem.

Przeniesienie tego spostrzeżenia na płaszczyznę obrazu dało, zainicjowany we wczesnym Odrodzeniu, zbiór reguł rysunkowych zwany perspektywą zbieżną. Na widocznej obok miniaturce obrazu *Zwiastowanie* (1486 r.) Carlo Crivellego dorysowane zostały linie podkreślające spotkanie się linii równoległych. Spotykają się, ale – właśnie – gdzie? Malarze odrodzeniowi nazwali to miejsce *horyzontem* i – w przypadku płaszczyzny – uznali je za prostą. Ponieważ jednak, jak wiedzieli, jej nie ma, więc czasem horyzont tytułowali *prostą w nieskończoności*.

Sposób, w jaki proponowała rysować perspektywa zbieżna, został potwierdzony przez urządzenie zwane *camera obscura* – pierwowzór aparatu fotograficznego. W momencie upowszechnienia fotografii malarze (impresjoniści – patrz *Teoria widzenia* Władysława Strzemińskiego) sprawę horyzontu skomplikowali. Jednak matematycy zatrzymali się przy klasycznej perspektywie zbieżnej i stworzyli jej idealną wersję – teorię zwaną geometrią rzutową. Tak więc pierwsze oblicze płaszczyzny rzutowej – nazwijmy je *malarskim* – to narysowany zgodnie z zasadami perspektywy zbieżnej płaski pejzaż.

Nietrudno zauważyć, że malarska płaszczyzna rzutowa spełnia następujące warunki:

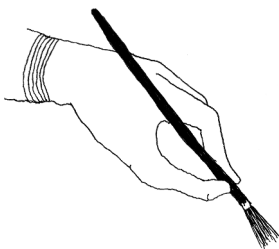
- A1.** Przez każde dwa punkty przechodzi prosta.
- A2.** Każde dwie różne proste mają dokładnie jeden wspólny punkt.
- A3.** Istnieje czworokąt.

Istotnie, dla dwóch „zwykłych” punktów istnieje przechodząca przez nie prosta. Ale istnieje ona także, gdy jeden z punktów jest „zwykły”, a drugi jest punktem horyzontu. No i wreszcie – zgodnie z umową – przez dwa punkty horyzontu też przechodzi prosta: horyzont właśnie. Zatem własność **A1** jest spełniona. Dwie „zwykłe” proste nie mają wspólnego punktu, gdy są równoległe – ale wtedy mają wspólny punkt na horyzoncie. Każda „zwykła” prosta ma też dokładnie jeden punkt wspólny z horyzontem. Własność **A2** też jest więc spełniona. Wreszcie czworokąt (**A3**) istnieje już na zwykłej płaszczyźnie.

W artykule MDB takie oblicze płaszczyzny rzutowej nazwano *aksjomatycznym*, co oznacza, że każdą strukturę, mającą własności **A1**, **A2** i **A3**, uważamy za płaszczyznę rzutową. To mogą być bardzo różne obiekty, co fachowo wyraża stwierdzenie, że ta *aksjomatyka nie jest kategorią*.

Tu jednak zajmiemy się tylko obiektami zbudowanymi dokładnie tak, jak płaszczyzna malarska (fachowo mówiąc – izomorficznymi z nią). Pierwszym z nich będzie oblicze płaszczyzny rzutowej niewymienione przez MDB.

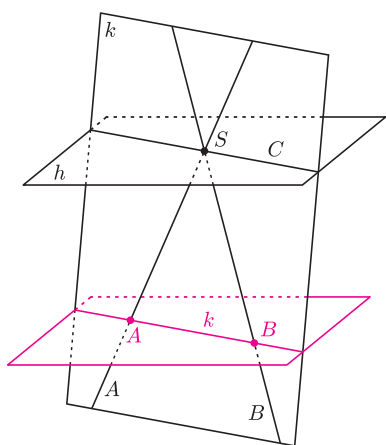
Nad płaszczyznę malarską umieścimy punkt i nazwijmy go *środkiem*. Zamienimy za jego pomocą malarskie oblicze płaszczyzny rzutowej na oblicze *środkowe*. Punktami w tym modelu (to bardziej fachowa nazwa oblicza) płaszczyzny rzutowej będą



Rozwiązanie zadania M 1385.
Z nierówności między średnimi mamy

$$\left(\frac{1^k + \dots + (m-1)^k}{m-1} \right)^{1/k} \geq \frac{1 + \dots + (m-1)}{m-1} = \frac{m}{2}.$$

Zakładając, że k i m spełniają podane równanie, dostajemy $m^k \geq (m/2)^k(m-1)$, a stąd $m \leq 2^k + 1$, co jest mniejsze niż $C \cdot 2^k$ np. dla $C = 3/2$.



Rys. 1. Fragment modelu malarskiego jest narysowany kolorem. Punkty A i B przechodzą na proste A i B . Prosta k przechodzi na płaszczyznę k . Prosta C to obraz punktu w nieskończoności prostej k , a płaszczyzna h to obraz horyzontu modelu malarskiego.

proste przechodzące przez środek. Dokładniej: każdemu punktowi modelu malarskiego przyporządkujemy prostą przechodzącą przez ten punkt i przez środek. Zauważmy, że otrzymamy w ten sposób **wszystkie** proste przechodzące przez środek: przecież prosta równoległa do płaszczyzny malarskiej ma wspólny punkt horyzontu z równoległą do niej prostą na tej płaszczyźnie. Wszystkie te proste modelu środkowego, powstałe z punktów pewnej prostej modelu malarskiego, tworzą płaszczyznę, którą będziemy traktowali jak prostą w modelu środkowym. Znowu otrzymamy **wszystkie** płaszczyzny przechodzące przez środek – płaszczyzna równoległa do płaszczyzny malarskiej to obraz horyzontu (prawda?).

Gdy odrzucimy model malarski, z którego powstał model środkowy, zobaczymy od razu, że nie można odgadnąć, które proste, pełniące teraz obowiązki punktów, powstały ze zwykłych punktów, a które z punktów horyzontu. Podobnie jest z płaszczyznami, pełniącymi tu rolę prostych. Zatem

płaszczyzna rzutowa jest jednorodna,

nie dzieli się na lepsze i gorsze punkty czy proste, jak sugerowałyby model malarski.

Z modelu środkowego można dalej pójść dwiema drogami. Zaczniemy od drogi algebraicznej – wprowadźmy układ współrzędnych, którego początek będzie w środku modelu środkowego. Jak łatwo zauważyć, każdy z punktów dowolnej prostej, przechodzącej przez środek, ma współrzędne postaci $\lambda(p, q, r)$, gdzie (p, q, r) jest dowolnie obranym, różnym od środka punktem tej prostej, λ zaś przebiega wszystkie liczby. Jest zatem naturalne, by uznać za współrzędne tej prostej daną z dokładnością do proporcjonalności trójkę liczb $[p, q, r]_{\sim}$. Te trójki (z wyłączeniem trójki samych zer) to będą punkty modelu *algebraicznego*. Z kolei płaszczyzny przechodzące przez początek układu współrzędnych mają równania postaci $ax + by + cz = 0$, przy czym trójka (a, b, c) też jest dana z dokładnością do proporcjonalności. Nic przeto bardziej naturalnego niż uznanie $[a, b, c]_{\sim}$ za współrzędne płaszczyzny, czyli teraz – prostej modelu algebraicznego. Oczywiście, punkt $[p, q, r]_{\sim}$ leży na prostej $[a, b, c]_{\sim}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ap + bq + cr = 0$, co nie ulega zmianie, gdy którąś z trójek zamienimy na proporcjonalną.

Zapomnijmy teraz o geometrii, z której powstał ten model. Okazuje się, że w modelu algebraicznym punkty niczym nie różnią się od prostych – można je zatem zamieniać i żadna różnica nie powstanie. Stąd ważny morał, zwany dualnością:

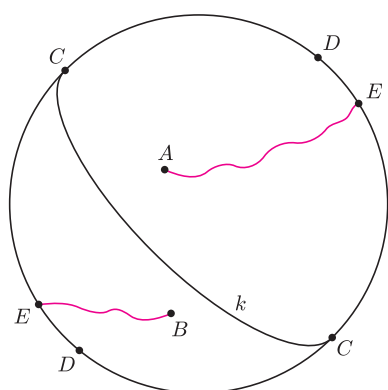
jeśli w dowolnym twierdzeniu o płaszczyźnie rzutowej zamienimy miejscami proste i punkty, to otrzymane twierdzenie też będzie twierdzeniem.

A teraz wróćmy do geometrii i rozważmy sferę o środku w środku modelu środkowego. Model nazwany w artykule MDB *astronomicznym* składa się z tego, co powstanie, gdy jego punkty i proste (czyli proste i płaszczyzny) przebiją sferę. Punktami w tym modelu są zatem pary antypodów (czyli punktów sfery leżących na jednej średnicy), prostymi zaś – okręgi wielkie (czyli o środku w środku sfery).

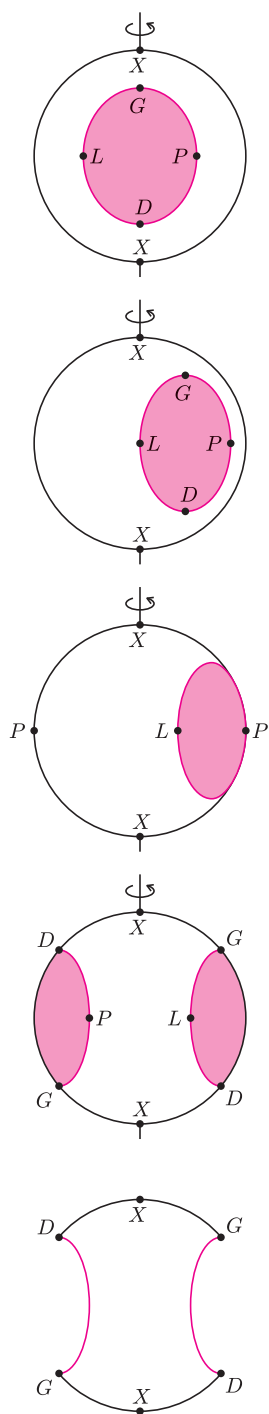
Model ten posłuży nam za materiał do budowy kolejnego (jak się okaże ważniejszego) modelu *optycznego*. Nazwa bierze się stąd, że będziemy się zajmowali tym, co widać (model ten również nie wystąpił w artykule MDB). Weźmy pod uwagę model astronomiczny takiego rozmiaru, abyśmy widzieli z niego dokładnie pół sfery. Uznamy za model optyczny to, co z modelu astronomicznego zobaczymy. Punkty modelu optycznego to zatem pojedyncze punkty półsfery poza jej brzegiem – tam każdy z punktów ma swego (antypodycznego) brata bliźniaka. Proste w tym modelu to łuki okręgów wielkich – dokładniej: ich połówki sklejone w swoich końcach (bo to przecież ten sam punkt modelu, tylko reprezentowany przez bliźniaki).

Linia falista na rysunku przekonuje nas, że

prosta nie rozcina płaszczyzny rzutowej,



Rys. 2. Na rysunku jest pięć punktów, trzy z nich to bliźnięta. Prosta k jest linią zamkniętą (jak wszystkie proste płaszczyzny rzutowej) i leży na niej punkt C . Kolorowa linia jest ciągła i pokazuje, jak z punktu A można przejść do punktu B , nie przecinając prostej k .



Rys. 3

Wypór to taka sama forma grawitacji jak ciężar, tylko skierowana w przeciwną stronę – to ona unosi na wodzie cięższe od niej statki, utrzymuje w powietrzu balony. Ilościowo opisał ją Archimedes.

Oczywiście, wszystkie nazwy modeli płaszczyzny rzutowej są żartem, nie są to terminy matematyczne.

inaczej mówiąc

płaszczyzna rzutowa leży cała po jednej stronie każdej swojej prostej,

bo przecież możemy z dowolnego punktu dojść do dowolnego innego, prostą nie przecinając.

Największą zaletą modelu optycznego jest to, że można go oglądać z różnych stron. Wyposażmy bowiem model astronomiczny w ośkę, czyli prostą zawierającą pewną jego średnicę, i obracajmy ten model wokół tej ośki. W każdym momencie widzimy model optyczny, ale będzie on się zmieniał, np. inne punkty będą występowały jako bliźnięta. Obejrzymy dokładniej to zjawisko, budując wymieniony w artykule MDB model topologiczny.

Wytnijmy w modelu optycznym dziurę. Gdy będziemy obracali ten model dokoła ośki (rys. 3), dziura przesunie się najpierw do brzegu, dotknie go, zyskując jednopunktowy przyczółek po przeciwnej stronie, i wreszcie sprawiedliwie „rozdzieli się na połowy” (piszę w cudzysłowie, bo przecież nadal jest to spójna dziura przypominająca koło).

W tym ostatnim położeniu zbadajmy, co to takiego jest ta część płaszczyzny rzutowej, która pozostała po usunięciu dziury. Mamy pasek, w którym DXG na górze ma być sklejone z GXD na dole. Jak każdy zauważy (ewentualnie po chwili namysłu) – jest to wstęga Möbiusa. Okazuje się więc, że płaszczyzna rzutowa to sklejenie brzegami koła i wstęgi – takie oblicze płaszczyzny rzutowej nazywamy *topologicznym*. Matematyczną konsekwencją tego spostrzeżenia jest wniosek:

płaszczyzna rzutowa jest nieorientowalna.

Natomiast w artykule MDB jest na tym spostrzeżeniu oparta konstrukcja modelu *krawieckiego*: przyszycia do brzegu płócienną wstęgę Möbiusa brzegu płóciennego koła. Tak otrzymany obiekt płócienny jest jednostronny – można zatem powiedzieć, że

materiałny model płaszczyzny rzutowej jest jednostronny.

Jak nietrudno się domyślić, odkrywcą topologicznego oblicza płaszczyzny rzutowej jest Ferdinand Möbius. Ciekawe, że także on odkrył, iż Archimedes – w czasach, gdy działał Hannibal; wówczas o żadnej płaszczyźnie rzutowej nikomu się nie śniło – odkrył jej dziewięć oblicz, najbardziej dziś używane, zwłaszcza w geometrii algebraicznej. W artykule MDB nazwane ono zostało *fizycznym*, bo korzysta z pojęcia ciężaru i wyporu. Archimedes mianowicie stwierdził, że wyposażając ustalone trzy punkty w odpowiednie ciężary lub wypory, można spowodować, by dowolny punkt płaszczyzny, na której te punkty leżą, był ich środkiem ciężkości. Möbius zaproponował, by ten układ ciężarów/wyporów nazwać współrzędnymi tego punktu. Takie współrzędne nazywają się *barycentrycznymi*, a rachowanie na nich okazało się niesłychanie korzystne. Pisałem o nich w *Delcie* 3/2012, więc nie będę tu rozwodził się nad nimi, ale wypada przypomnieć, co mają one wspólnego z płaszczyzną rzutową.

Każdy może z łatwością przekonać się, że gdy do jednego końca odcinka przyłożymy ciężar C , a do drugiego wypór $-C$, to nie będzie istniał środek ciężkości tego odcinka. Co prawda, odsuwając się po prostej, zawierającej ten odcinek, coraz dalej po stronie ciężaru będziemy mieli do czynienia z coraz mniejszą przewagą ciężaru nad wyporem, a przesuując się coraz dalej z przeciwnej strony – wyporu nad ciężarem, ale równowagi nigdzie nie osiągniemy. No, chyba że oddalimy się nieskończenie daleko – jak skrajem drogi na obrazie malarza realisty. Jeśli chcemy nie tylko tego, by każdemu punktowi odpowiadał stosowny układ ciężarów/wyporów, ale również by każdemu układowi ciężarów/wyporów odpowiadał jakiś punkt, musimy wzbogacić płaszczyznę o dodatkowe punkty – te same, które malarze nazwali po marynarstwu horyzontem.

I tak wróciliśmy do modelu malarskiego, oglądając po drodze aksjomatyczną twarz płaszczyzny rzutowej, jej twarz środkową, algebraiczną, astronomiczną, optyczną, topologiczną, krawiecką i fizyczną.

Odkrywanie tajemnic ewolucji nie ma końca

życie na
ży  32

Choć nie jest to miejsce recenzji książkowych, to dziś postanowiłam się podzielić z Czytelnikami głębokim wrażeniem, jakie wywarła na mnie niezwykła książka: wydana w Polsce w końcu 2012 roku (Prószyński i S-ka) Nicka Lane'a *Największe wynalazki ewolucji*. W 2010 roku nagrodzona została przez Royal Society jako najlepsza popularyzacja roku. Lektura umożliwiająca kilka dni prawdziwej przyjemności.

Najważniejszą chyba cechą tego autora i tego tekstu jest to, że nie doprowadza on nigdy do zamknięcia tematu, do stwierdzeń, że dana teza została udowodniona i wyjaśniona. Oprócz jednej:

ewolucja nie jest już dawno hipotezą, jest faktem.

Czytając, uświadamiamy sobie, jak pasjonujące problemy podsuwa rozmyślanie o ewolucji. Co też ona zrobiła i jeszcze zrobić może... Autor z mnogości tematów wyselekcjonował według niego najważniejsze lub wnoszące najwięcej do zrozumienia natury procesów ewolucyjnych. A lepiej: te, dla których nie zawsze już znamy wytłumaczenie pewne, niepodlegające refleksji i powtórnemu sprawdzeniu. To imponujące, jak biochemik-erudyta spokojnie przyznaje, że w wielu przypadkach i nauka, i on sam jeszcze właściwej odpowiedzi nie znaleźli. W toku opowieści poznajemy kolejne „pomysły” uczonych, ich hipotezy i procesy obalania hipotez. A tematy? Proszę bardzo, jeden ciekawszy od drugiego: początki życia, DNA, komórka eukariotyczna, fotosynteza, rozmnażanie płciowe, ruch, wzrok, stałocieplność. I to, o co stale się wszyscy spotykamy, indywidualnie najważniejsze pytanie: świadomość i śmierć, śmierć i starość.

Wzrok jest najważniejszy w rozpoznawaniu świata, ważniejszy niż słuch, węch, dotyk – nic więc dziwnego, że warto prześledzić procesy ewolucyjne, które do powstania narządu wzroku doprowadziły. Tym bardziej że oko, jakakolwiek by to nie była struktura, było zawsze opisywane kontrowersyjnie: raz jako dowód na istnienie „inteligentnego” Stwórcy, raz jako pokaz niezwykłości ewolucji. Elementy oka znajduje się dziś u przedziwnych właścicieli. Ośmiornica ma oko podobne do naszego: soczewka z przodu, siatkówka z tyłu. A ponieważ, pisze Lane, ostatni ze wspólnych przodków człowieka i ośmiornicy był prawdopodobnie robakiem bez oczu, obie te konstrukcje musiały powstać niezależnie, przy czym można wykazać, jak różnice między nimi wyniknęły z dostosowania obu struktur do warunków życia właścicieli. Nagą siatkówkę wykryto u pewnego gatunku krewetek żyjących w uważanych za idealnie czarne głębinach oceanu, w dodatku zaopatrzoną w barwnik retinal połączony z białkiem opsyną, co przypomina rodopsynę z ludzkich oczu. Optimum pobudzenia rodopsyny (retinalu) krewetek przypada na zielony zakres widma światła. Tylko uporowi badaczki fauny takich miejsc, Cindy Van Dover, zawdzięczać należy fakt, że w tych głębinach wykryto słabą poświatę w sąsiedztwie kominów hydrotermalnych... zieloną! Podobne „oczy” znaleziono później u wielu zwierząt głębinowych, czasem miały je również ich larwy... W dalszym ciągu Lane, szczegółowo i wyczerpująco, w sposób logiczny i udokumentowany, snuje opowieść o ewolucji oczu. Ale uspokajam Czytelnika, nie zamierzam tu przepisywać całej książki – przytoczyłam przykład rozpoczęcia tematu, zastosowany przez autora do omówienia każdego z wyżej wyliczonych tematów.

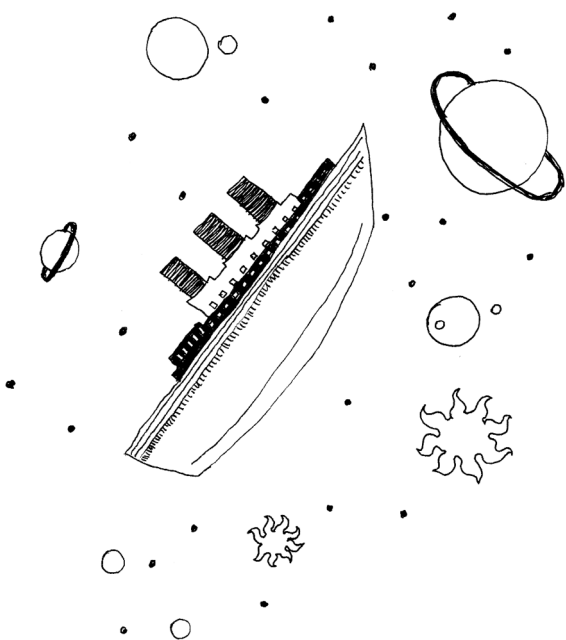
Największe wynalazki to piękny przykład opisu najważniejszych cech nauki, usprawiedliwienie dla tych, którzy się nią fascynują, jeden z dowodów, że poznawanie rzeczywistości nigdy się nie kończy. Tak, jak celnie określił to, cytowany przez Lane'a, Jakub Bronowski: *Zawsze jesteśmy na skraju tego co znane. Każda ocena w nauce ociera się o błąd i jest osobista. Nauka to nasz hold temu, czego możemy się dowiedzieć, choć wszyscy błędzimy.*

Magdalena FIKUS

5

mała delta

Opowieści o podróżach w Kosmos

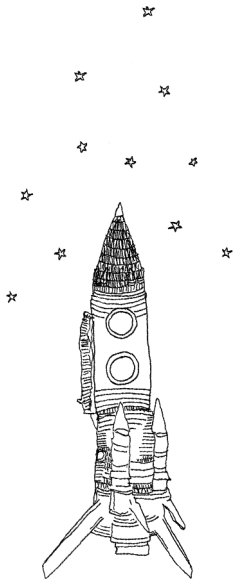


(...) W ciągu następnych dni pochłonęła Pirxa matematyka. Za każdym nowym włączeniem stos grzał się coraz bardziej, zarazem jego wydajność malała. Świadczył o tym wzrastający wolno, lecz nieubłaganie przeciek radioaktywny. Skomplikowanym rachunkiem starał się wydozować czasy napędu i chłodzenia, podczas przestojów reaktora przerzucał cyrkulację mroźnego płynu z burtowych ładowni w głąb rufowych, gdzie panowała iście tropikalna temperatura. To lawirowanie między sprzecznymi wielkościami wymagało cierpliwości – przesiadywał przy Kalkulatorze, szukając metodą prób i błędów najlepszego rozwiązania. W rezultacie przebyli czterdzieści trzy miliony kilometrów ze znikomym opóźnieniem. Wylączając reaktor, który miał stygnąć aż do lądowania, Pirx odetchnął skrycie. Jedną z osobliwości dowodzenia starym frachtowcem było to, że widywał gwiazdy daleko rzadziej aniżeli na Ziemi. Nie był ich zresztą ciekaw – nawet czerwonej jak miedziak tarczki Marsa; wystarczyły mu kursowe wykresy. (...)

Stanisław Lem, „Terminus”

Pirx, w przeciwieństwie do dominującego w świecie science fiction osiłka, zmagającego się przeważnie ze zwykłymi problemami dnia codziennego: złośliwym egzaminem, nudnym stażem w bazie księżycowej, niekompetentną załogą, rozlatującym się statkiem, niedotrzymującymi terminów armatorami. W trakcie kariery los daje mu szansę otarcia się o Nieznane części, niżby sobie tego zapewne życzył; z opresji zwykle ratuje go refleks („Test”), zdrowy rozsądek („Patrol”), łut szczęścia („Polowanie”), nieszablone myślenie („Rozprawa”), bądź wszystkie powyższe.

Któż nie chciałby być jak Pirx? Osadzona w bliskiej przyszłości (XXI, XXII wiek?) opowieść w stylu retro o przygodach pilota statków międzyplanetarnych rozwija wyobraźnię kolejnego pokolenia. Szczególnie interesujący jest opis technologii, z której korzysta Pirx. Wielotonowe, przepastne, poruszane tradycyjną technologią odrzutową statki przywodzą na myśl żaglowce opisywane przez Josepha Conrada, i taki jest też klimat trwającej tygodniami międzyplanetarnej żeglugi (obecnie wysłanie sondy na Marsa zajmuje 150–250 dni, w zależności od położenia planet). Czy podobnie będzie wyglądał nasz świat, w którym niezbędne surowce będą wydobywane z krążących wokół Słońca asteroid, a wczasy będą spędzane na luksusowych kosmicznych liniowcach bądź na Marsie?



Voyager I niesie na swym pokładzie przesłanie do innych cywilizacji – płytę z nagraniami ziemskich dźwięków i obrazów (sonda nie została wycelowana w kierunku konkretnej gwiazdy, jednak najbliższej jakiejś gwiazdy – nie licząc Słońca – znajdzie się za około 40 tys. lat, gdy będzie w odległości 1,5 roku świetlnego od czerwonego karła Gliese 445).



Rozwiązanie zadania F 831.

Jeżeli na ciało działa siła, która nie jest równoległa do jego prędkości, ciało skręca w stronę wskazywaną przez zwrot składowej siły prostopadłej do kierunku ruchu. Jeżeli rozważany w zadaniu „trójkąt” miałby nie być wypukły, byłoby to spowodowane silniejszym przyciągnięciem Księżyca przez Ziemię (siłą F_{ZK}) niż przez Słońce (siłą F_{SK}) w punktach, dla których Księżyc znajduje się między Ziemią a Słońcem. Tymczasem w punktach, w których Księżyc znajduje się najbliżej Słońca, stosunek tych sił przyciągania wynosi

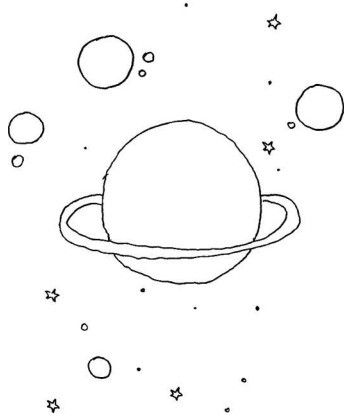
$$\frac{F_{SK}}{F_{ZK}} = \frac{M_S R_{ZK}^2}{M_Z (R_{ZS} - R_{ZK})^2} = 2,205.$$

Czynnik R_{ZK} w mianowniku jest zaniębny w porównaniu z R_{ZS} , toteż wypadkowa sił działających na Księżyc jest stale skierowana w stronę Słońca. Oznacza to, że Księżyc stale skręca w stronę Słońca i rozważany w zadaniu „trójkąt” jest zawsze wypukły.

Obecnie, praktycznie na naszych oczach, dokonuje się ekonomiczna rewolucja przejścia przestrzeni kosmicznej z rąk państw przez sektor prywatnych inwestorów. Firma SpaceX (*Space Exploration Technologies Corporation*) wysłała w poprzednim roku kapsułę Dragon do Międzynarodowej Stacji Kosmicznej, używając własnej rakiety nośnej Falcon 9, a na rok 2013 zapowiada umieszczenie w przestrzeni kosmicznej pierwszego prywatnego geostacjonarnego satelity. Kolejna firma, Planetary Resources, ogłasza swoje plany dotyczące eksploracji przelatujących blisko Ziemi asteroidów; celem jest poszukiwanie i wydobywanie cennych surowców. W tym samym czasie NASA przeżywa ciężkie chwile; po wycofaniu z lotów ostatniego wysłużonego wahadłowca Amerykanie muszą korzystać z pomocy Rosji w zaopatrywaniu Międzynarodowej Stacji Kosmicznej, a budżet agencji jest z roku na rok zmniejszany. Dodatkowo, dynamicznie rozwijające się Chiny i Indie planują swoje własne misje kosmiczne (pierwszy taikonauta osiągnął granice Kosmosu w 2003 r.), stację orbitalną, a nawet stację badawczą na Księżycu! Czy data wyznaczona na 2025 rok jest realistyczna, czy nie – trudno powiedzieć, natomiast wiele wskazuje na to, że USA tracą pozycję lidera w kosmicznym wyścigu, a na erę powszechnych, *załogowych* lotów kosmicznych musimy jeszcze poczekać. Symbolicznie, w 2012 r., po trwającym 35 lat locie sonda Voyager I stała się pierwszym wykonanym ludzką ręką przedmiotem na granicy Układu Słonecznego (bardzo daleko, a jednocześnie bardzo blisko w kosmicznej skali odległości – 5 godzin świetlnych). Za Voyagerem podąża próbnik New Horizons, którego celem jest zbadanie w 2015 r. karłowatej planety – Plutona, obiektów z pasa Kuipera, a później obszarów poza Układem Słonecznym.

Głównym problemem trapiącym projektantów międzygwiazdnych podróży jest wydajne źródło napędu. Obecnie stosuje się kombinacje różnych metod, spalania mieszaniny gazów lub paliwa stałego. W latach 60. i 70., a więc w czasie, gdy powstawały „Opowieści o pilocie Pirxie”, napędem przyszłości była energia jądrowa. Wśród proponowanych projektów pojazdów międzyplanetarnych i międzygwiazdnych wyróżnia się idea silnika statku kosmicznego Orion, zaproponowana przez Stanisława Ulama w 1946 r., a rozwijana w latach 60. przez m.in. Freemana Dysona. Pomysł polega na serii kontrolowanych wybuchów jądrowych zapewniających odrzut. Masa takiego statku byłaby ogromna: od kilku tysięcy ton w Układzie Słonecznym, do milionów ton w przypadku podróży między gwiazdami, kiedy to statek byłby jednocześnie autonomicznie funkcjonującym miastem (przypuszczalnie w kształcie obwarzanka, który obracając się wokół osi, zapewniałby sztuczną grawitację; zob. także „Opowiadanie Pirxa”). Nie wspominając już o problemach z finansowaniem takiego projektu, rozwój jądrowego napędu odrzutowego został zahamowany przez traktat o ograniczeniu (1963 r.) i całkowitym zakazie (1996 r.) prób z eksplozjami jądrowymi. Inne, powstałe w drugiej połowie XX w. pomysły nosiły nazwy Dedalus (termojądrowy napęd w bezałogowym próbniku, który według obliczeń powinien dotrzeć do gwiazdy Barnarda, znajdującej się w odległości 5,9 lat świetlnych, w około 50 lat) i Walkyria (energia dostarczana w procesie anihilacji antymaterii).

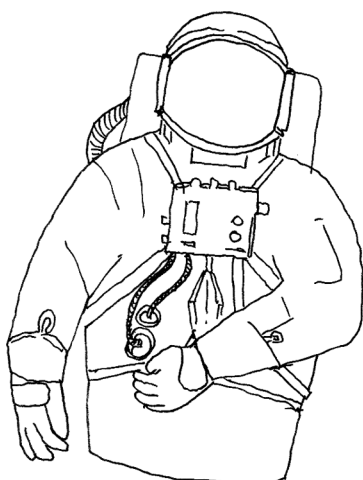
Energię jądrową zamierzano wykorzystać również w projekcie Prometheus (2003–2005 r.), w którym reaktor jądrowy służyłby do wytwarzania elektryczności potrzebnej do zasilania *silników jonowych*. Mini-reaktor służyłby do wytwarzania pola elektrostatycznego bądź elektromagnetycznego, które z kolei rozpędza jony (zwykle rtęci lub ksenonu), powodując odrzut.



Silnik jonowy może działać dłużej niż tradycyjne silniki na paliwo stałe i mimo mniejszego odrzutu może rozpędzić statek do większych prędkości. Elektrostatyczny silnik jonowy NSTAR wykorzystano w sondzie Deep Space I, wysłanej do badania asteroidy Braille'a i komety Borrellyego, natomiast z silników następnej generacji korzysta sonda Dawn, badająca planetoidy Vesta i Ceres.

Inną metodą, która ma szansę sprawdzić się głównie blisko gwiazd, jest *żagiel słoneczny*. Żagiel słoneczny działa podobnie do zwykłego żagla – siłą napędową jest ciśnienie promieniowania oraz energetycznych cząstek i gazu. Pierwszym satelitą stosującym tę technologię jest japoński żaglo-latawiec, nazwany – nomen-omen – IKAROS (*Interplanetary Kite-craft Accelerated by Radiation Of the Sun*). IKAROS przeleciał w 2010 r. obok Wenus, a obecnie żegluje po przeciwnej do Ziemi stronie Słońca.

[1] *Classical and Quantum Gravity* 11 (1994), no. 5, L73–L77.



Puszczając wodze fantazji, możemy zastanowić się, co byłoby, gdybyśmy dysponowali nieskończonym źródłem energii – praktycznym ograniczeniem byłyby wtedy jedynie prawa fizyki. Wymyślony przez Miguela Alcubierrego (1994 r.) sposób przemieszczania się [1], porównywany do znanego z serialu „Star Trek” napędu *warp*, polega na umiejętnym zakrzywianiu przestrzeni wokół statku. W teorii zakrzywienie czasoprzestrzeni umożliwiłoby podróż z prędkością większą od prędkości światła! Znajdujący się wewnątrz czasoprzestrzennego bąbla statek „kurczy” przestrzeń przed sobą, a „rozciąga” za sobą, przesuwając się w ten sposób w kierunku celu i nie odczuwając w żaden sposób ogromnych przyspieszeń (przestrzeń wewnątrz bąbla jest płaska). Zasilanie tego typu statku wymaga niezwykle efektywnego źródła energii, być może pochodzącej z anihilacji egzotycznej materii. Wśród innych problemów rozważanych przez teoretyków jest zabójcze dla załogi promieniowanie Hawkinga, powstające na krawędzi bąbla, trudności w sterowaniu oraz niszczycielska dla wszystkiego wokół destrukcja po dotarciu na miejsce.

Pozostaje jednak mieć nadzieję, że gdy ludzkość osiągnie dostatecznie wysoki poziom rozwoju technologicznego, upora się z tymi wszystkimi problemami, a wielomiesięczne podróże między planetami (wielopokoleniowe między najbliższymi gwiazdami!) staną się atrakcyjną formą wypoczynku – o walce z nudą, brakiem grawitacji i promieniowaniem kosmicznym będziemy wtedy czytać już tylko w science fiction w stylu Lema.

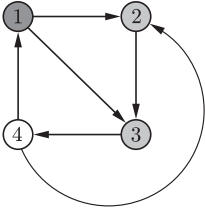
Małą Deltę przygotował Michał BEJGER



Dwuwymiarowa wizualizacja skrzywionej czasoprzestrzeni napędu *warp*.

Informatyczny kącik olimpijski (62): Infiltracja

Tym razem zajmiemy się zadaniem z finałów Akademickich Mistrzostw Świata w Programowaniu Zespołowym 2012, które odbyły się w Warszawie. Zadanie zatytułowane *Infiltration* zostało rozwiązane przez 31 spośród 112 drużyn i było średnim pod względem trudności zadaniem na tych zawodach.



W zadaniu dany jest graf skierowany o n wierzchołkach ($n \leq 75$), w którym każda nieuporządkowana para wierzchołków u i v ($u \neq v$) jest połączona dokładnie jedną krawędzią skierowaną (taki graf nazywa się *turniejem*). Możemy wykonywać operacje kliknięcia w wierzchołek, co powoduje zaznaczenie tego wierzchołka oraz wszystkich wierzchołków, do których wchodzi z niego bezpośrednia krawędź. Naszym celem jest zaznaczenie wszystkich wierzchołków grafu, chcemy przy tym zminimalizować liczbę kliknięć. Należy podać tę liczbę oraz dowolny podzbiór wierzchołków, które należy kliknąć, aby uzyskać ów wynik. Wierzchołki mogą być zaznaczane wielokrotnie.

Rysunek obok przedstawia przykładowy turniej dla $n = 4$. Kliknięcie w wierzchołek numer 1 powoduje zaznaczenie wierzchołków 1, 2 oraz 3.

Dosyć intrygujące w tym zadaniu wydaje się choćby ograniczenie na rozmiar danych wejściowych. Maksymalny rozmiar grafu $n \leq 75$ wskazuje raczej na algorytm wielomianowy. Rzadko kiedy mamy jednak do czynienia z algorytmami o złożoności $O(n^4)$ czy $O(n^5)$. Okazuje się, że w tym zadaniu poszukujemy właśnie takiego algorytmu.

Czasami, aby rozwiązać zadanie dobrze, należy najpierw rozwiązać zadanie źle. Pierwszym pomysłem, który mógłby się nasunąć, byłoby rozwiązanie heurystyczne. Na przykład takie: wybieramy wierzchołek o największym stopniu i klikamy go, następnie wyrzucamy z grafu wszystkie zaznaczone wierzchołki i analogicznie próbujemy zaznaczyć resztę. Rozwiązanie to może nie zadziałać (choćby wtedy, gdy wszystkie wierzchołki mają równy stopień). Narysowanie kontrprzykładu pozostawiam Czytelnikowi (nie jest to, wbrew pozorom, takie łatwe!). Pytanie, jakie należałoby sobie w tym momencie zadać, brzmi: jaki wynik w najgorszym przypadku zwróci owo błędne rozwiązanie? Odpowiedź może być zaskakująca: zaledwie *sześć*!

Zauważmy, że każdy wierzchołek jest incydentny z $n - 1$ krawędziami. Mogą być one skierowane albo od niego, albo do niego. Nie może być tak, żeby każdy wierzchołek miał większy stopień wejściowy niż wyjściowy, więc w grafie musi istnieć wierzchołek o stopniu wyjściowym co najmniej $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. To oznacza, że w pierwszym kroku zaznaczamy co najmniej połowę wierzchołków. Ponadto po usunięciu zaznaczonych wierzchołków oraz krawędzi z nimi incydentnych otrzymujemy nadal turniej, a zatem własność ta zachodzi nie tylko w pierwszym kroku, ale w każdym. Stąd, jeśli $n = 75$, to w kolejnych krokach zostaje nam co najwyżej 37, 18, 8, 3, 1, 0 wierzchołków niezaznaczonych. Czyli w najgorszym przypadku wynik dla naszego problemu wynosi sześć, ponadto mamy algorytm, który takie rozwiązanie znajduje.

Wystarczy zatem sprawdzić, czy wynik może być równy pięć lub mniej. Najprostsze naiwne rozwiązanie rozpatruje rzędu n^5 konfiguracji wierzchołków, co dla $n = 75$ daje ponad 2 miliardy, czyli zdecydowanie za dużo (zwłaszcza że liczba przypadków do rozpatrzenia w jednym pliku testowym wynosiła kilkanaście). Czy naprawdę jest aż tak źle? Okazuje się, że nie. Bardzo łatwo zauważyć, że kolejność klikania wierzchołków jest

bez znaczenia. To oznacza, że możemy rozpatrywać każdą nieuporządkowaną piątkę wierzchołków tylko raz (w poprzednim rozwiązaniu każdą taką piątkę analizowalibyśmy $5! = 120$ razy), a zatem realnie do przetestowania jest niecałe 20 milionów takich piątek.

Wydawałoby się, że to już koniec. 20 milionów operacji jest wartością akceptowalną. Sęk w tym, że po uwzględnieniu czasu na klikanie i zaznaczanie wierzchołków, a także sprawdzenie, czy wszystkie wierzchołki są już zaznaczone (co z grubsza kosztuje $O(n)$), sytuacja wygląda zupełnie inaczej – nadal przekraczamy limit czasu. Czy to oznacza, że należy wykonać jeszcze mniej sprawdzeń? Na szczęście nie, możemy bowiem zredukować czas sprawdzenia.

Zbiór krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka można reprezentować w postaci maski bitowej (w tym przypadku można zastosować na przykład trójkę liczb 32-bitowych lub parę liczb 64-bitowych). Dla ułatwienia implementacji możemy dla wierzchołka i ustawić dodatkową jedynkę na pozycji i , wtedy maska bitowa będzie reprezentować wszystkie wierzchołki, które zostaną zaznaczone po kliknięciu w wierzchołek i . Jeśli chcemy poznać zbiór zaznaczonych wierzchołków, powinniśmy wziąć maski bitowe wszystkich klikniętych wierzchołków i skorzystać z bitowej operacji alternatywy (**or**). Teraz, aby dowiedzieć się, czy zaznaczyliśmy wszystkie wierzchołki, wystarczy sprawdzić, czy maska bitowa zawiera same jedynki. Zastosowanie masek bitowych pozwala zatem przyspieszyć proces sprawdzania, czy dana piątka wierzchołków jest rozwiązaniem, o czynnik proporcjonalny do liczby bitów dostępnych w wybranym typie całkowitoliczbowym.

Na koniec zauważmy, że oszacowanie liczby konfiguracji przez $\frac{n^5}{5!}$ jest bardzo pesymistyczne. W zestawie testów nie znalazł się ani jeden przypadek z wynikiem 6. Pozwala to sądzić, że podany algorytm znajduje rozwiązanie dużo wcześniej. Wystarczy choćby, żeby kombinacji dających wynik 5 było kilka lub żeby algorytm heurystyczny (podany na początku) dał wynik 5. Proponuję Czytelnikom przygotowanie złośliwych testów do tego zadania, jest to całkiem trudne wyzwanie.

Karol POKORSKI

student, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

Splątanie kwantowe na tropie fal grawitacyjnych

Jan KOŁODYŃSKI*

Nie kto inny, ale Albert Einstein określił kiedyś fizykę jako naukę *opierającą swe teorie na pomiarach, której idee dają się sformułować za pomocą matematyki*. Że opis ten jest trafny, pokazuje historia największych odkryć naukowych o charakterze teoretycznym, którym niemal zawsze towarzyszyły także przełomy w technikach pomiarowych używanych przez uczonych. Jeśli jednak zastanowić się głębiej, cytat ten traci swą elegancką ogólność, gdy zastosować go do jednej z fundamentalnych dziedzin fizyki – mechaniki kwantowej. Jak bowiem, mierząc coś, sprawdzać teorię, która sama definiuje, czym właściwie jest pomiar?

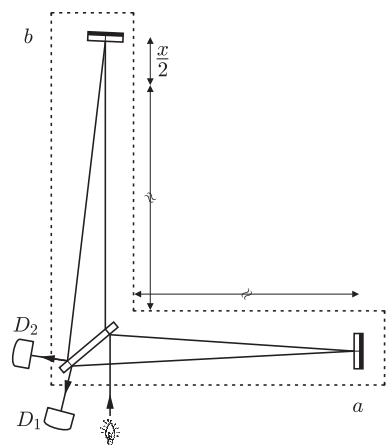
O naturze pomiaru kwantowego pisaliśmy więcej w *Delcie* 8/2008.

I choć Richard Feynman 50 lat później nadal twierdził, że tak naprawdę „nikt teorii kwantowej nie rozumie”, dziś mechanika kwantowa nie jest już podważana, gdyż przewiduje bardzo dokładnie wyniki współczesnych eksperymentów. Co więcej, wykorzystując jej subtelnosci, naukowcy próbują usprawniać dotychczas już znane technologie pomiarowe, często z zupełnie dobrym skutkiem. Najlepszym tego dowodem jest nie tak dawne przyznanie Nagrody Nobla Davidowi Winelandowi i Serge’owi Haroche’owi, którzy prowadząc doświadczenia nad oddziaływaniami pojedynczych atomów z fotonami światła pokazali, że układy kwantowe pozwalają na nieosiągalną dotąd precyzję pomiaru, ale pod warunkiem okiełznania nieodzownego procesu dekoherencji kwantowej.

O dokonaniach noblistów można też przeczytać w *Delcie* 12/2012.

Aby lepiej zrozumieć niuanse kwantowej metrologii, czyli nauki dotyczącej sposobów dokonywania pomiarów, musimy pochylić się nad drugą częścią definicji Einsteina. Prawdą jest, że zarówno język mechaniki kwantowej jak i jej podstawowe idee były już zawarte w tak zwanej interpretacji kopenhaskiej z lat dwudziestych ubiegłego wieku. Był to jednak opis dość wyidealizowanej rzeczywistości, nie uwzględniający, na przykład, nieodzownych interakcji układu kwantowego z otoczeniem, których efektem jest właśnie dekoherencja. W celu stworzenia modeli opisujących między innymi doświadczenia Winelanda i Haroche’a musimy odpowiednio analizować i interpretować rozkłady prawdopodobieństwa wyznaczone przez mechanikę kwantową. Co więcej, musimy odstawić do lamusa intuicję opartą na klasycznej statystyce.

Pokazuje to choćby przykład interferometru optycznego. To koncepcyjnie proste urządzenie wykorzystuje zjawisko interferencji fal świetlnych i pozwala na niezwykle dokładne wyznaczenie różnicy długości swoich ramion. Zastanówmy się jednak jak będzie ono działało, gdy wpuścimy do niego pojedynczy foton. Padając na płytkę światłdzielącą, foton może z prawdopodobieństwem 1/2 znaleźć się w jednym z dwóch ramion interferometru, które oznaczymy przez a i b . Myśląc o mechanice kwantowej jako teorii opisującej możliwe stany układu za pomocą wektorów pewnej przestrzeni, a zdarzenia za pomocą macierzy działających na te wektory, możemy zinterpretować foton wewnątrz interferometru jako stan



Rys. 1. Schemat interferometru optycznego.

Po stwierdzeniu, że foton znajduje się w ramieniu a , stan fotonu będzie opisywany wektorem $|1_a, 0_b\rangle$.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1_a, 0_b\rangle + |0_a, 1_b\rangle),$$

który odpowiada superpozycji dwóch stanów: $|1_a, 0_b\rangle$, kiedy jeden foton podąża ramieniem a , a w ramieniu b żadnego fotonu nie ma, oraz $|0_a, 1_b\rangle$ w sytuacji odwrotnej. W takim zapisie wyznaczenie, w którym ramieniu znajduje się foton, to po prostu rzutowanie $|\psi\rangle$ na odpowiedni wektor, zgodnie z zasadą $\langle i_a, j_b | k_a, l_b \rangle = \delta_{ij} \delta_{kl}$. Na przykład, prawdopodobieństwo wyboru przez foton ramienia a określamy, rzutując $|\psi\rangle$ na $\langle 1_a, 0_b |$ i obliczając kwadrat modułu otrzymanej wielkości: $p_a = |\langle 1_a, 0_b | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle 1_a, 0_b | (|1_a, 0_b\rangle + |0_a, 1_b\rangle) |^2 = \frac{1}{2} |1 + 0|^2 = \frac{1}{2}$. Zgodnie z założeniami taki sam wynik otrzymalibyśmy dla przypadku b , gdy odpowiednio rzutowalibyśmy na $\langle 0_a, 1_b |$. Zauważmy jednak, że już na poziomie matematycznym widać, że przy rzutowaniu na $\langle 1_a, 0_b |$ określiliśmy, ile fotonów znajduje się w ramionach a i b , czyli p_a tak naprawdę odpowiada prawdopodobieństwu otrzymania wyniku pomiaru mającego wgląd w oba ramiona jednocześnie!

* doktorant, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

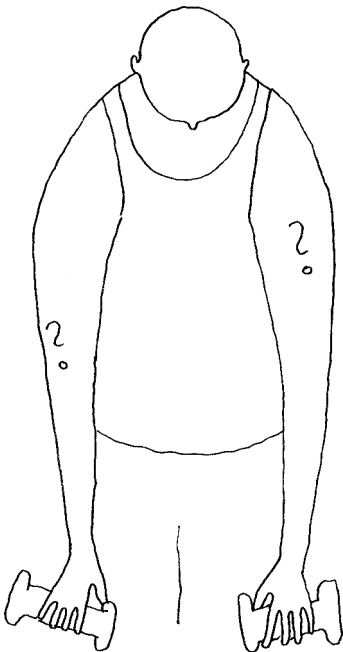
Sytuacja zmienia się diametralnie, gdy mamy dostęp tylko do jednego z ramion, na przykład a . Nie wiemy wtedy, czy ktoś może sprawdził już przed nami, czy foton jest w ramieniu b . Jeżeli z naszego pomiaru byłibyśmy w stanie w jakikolwiek sposób wywnioskować, czy pomiar w drugim ramieniu miał miejsce, to – wykonując lub nie taki pomiar – ktoś mógłby przesyłać nam informację i to bez opóźnień, co przecież nie może być zgodne ze szczególną teorią względności. W takim razie stan, który może efektywnie opisywać to, co jest dla nas dostępne w ramieniu a , nie może w żaden sposób zależeć od tego, co dzieje się w ramieniu b . A skoro w naszym prostym przykładzie mamy tylko dwie możliwości, opis stanu, jaki znajdziemy w ramieniu a , powinien być równoważny opisowi wyników rzutu symetryczną monetą, gdzie orzeł mógłby odpowiadać znalezieniu fotonu w ramieniu a , a reszka – niezalezieniu.

Wóz albo przewóz – tylko jeden sposób opisu fotonu w interferometrze może być tym właściwym. Dla każdego z nich zaobserwowanie fotonu w ramieniu b wyklucza późniejsze znalezienie go w ramieniu a i na odwrót. Jednak tylko przy pierwszym z opisanych podejść możemy uzyskać interferencję wiązek biegnących w ramionach a i b . Taka kwantowa wersja doświadczenia Younga pozwala na pomiar różnicy długości ramion interferometru i udowadnia, że foton do momentu pomiaru w którymkolwiek z ramion musi być w obu ramionach jednocześnie! Z drugiej strony, fakt, że podglądając tylko jedno ramię, otrzymujemy stan całkowicie losowy, jest właśnie przykładem dekoherencji. Kiedy nie możemy zmierzyć całego układu, efektywny stan, uśredniony po niedostępnych nam częściach, zostaje „probabilistycznie zaszumiony” i traci swoje kwantowe własności.

Załóżmy, że ramiona interferometru nie są takiej samej długości i różnią się o $x/2$. W języku mechaniki kwantowej oznacza to, że po przebyciu drogi wzdłuż ramienia i z powrotem tuż przed napotkaniem płytki światłodzielną składniki stanu, który początkowo miał postać $|\psi\rangle$, różnią się fazą, stan ten więc może być opisany jako

$$|\psi(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ik\frac{x}{2}}|1_a, 0_b\rangle + e^{-ik\frac{x}{2}}|0_a, 1_b\rangle),$$

gdzie k jest liczbą falową wpuszczanej do interferometru jednofotonowej „wiązki”. Skoro foton nie jest wówczas w stanie identycznym z wejściowym, to nie musi wrócić dokładnie tam, gdzie został wysłany. Dokładniej, detektory wyjściowe, D_1 i D_2 mogą zarejestrować go z prawdopodobieństwami, odpowiednio, $p_1 = |\langle +|\psi(x)\rangle|^2 = \cos^2(k\frac{x}{2})$ i $p_2 = |\langle -|\psi(x)\rangle|^2 = \sin^2(k\frac{x}{2})$, gdzie $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1_a, 0_b\rangle \pm |0_a, 1_b\rangle)$ (dla $x = 0$ mamy $p_1 = 1$, $p_2 = 0$). Gdy wpuszczamy do interferometru światło laserowe, fotony zachowują się tak jakby każdy foton interferował sam ze sobą. Dlatego możemy efektywnie traktować je jako niezależne cząstki, co równoważne jest z wielokrotnym powtarzaniem naszego jednofotonowego doświadczenia. W takim razie, jeżeli mamy do dyspozycji N fotonów, prawdopodobieństwo zarejestrowania przez pierwszy detektor n_1 fotonów dane jest rozkładem Bernoulliego: $p_1(n_1) = \binom{N}{n_1} p_1^{n_1} p_2^{N-n_1}$. Oznacza to, że pierwszy detektor średnio zarejestruje $\bar{n}_1 = \sum_{n_1=0}^N n_1 p_1(n_1) = N p_1$ fotonów, a drugi odpowiednio $\bar{n}_2 = N p_2$. Chcąc wyznaczyć różnicę x dróg przemierzanych przez fotony w ramionach interferometru, możemy ją oszacować jako $x = \frac{1}{k} \arccos(\frac{\bar{n}_1 - \bar{n}_2}{N})$, a nasz rezultat obarczony będzie błędem Δx wynoszącym $\frac{1}{\sqrt{2Nk}}$. Ten ostatni wynik mogliśmy przewidzieć, posługując się intuicją klasycznej statystyki. Zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym, jeśli powtórzymy dowolny eksperyment ν razy, efektywny błąd może maleć co najwyżej jak $1/\sqrt{\nu}$, co często nazywane jest przez fizyków ograniczeniem szumu śrutowego.

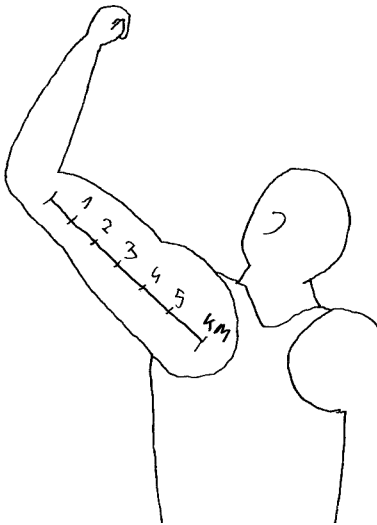


Mechanika kwantowa pozwala jednak na wiele więcej, gdyż dopuszcza stany, w których fotony są nie tylko w superpozycji ze swymi alter ego podróżującymi przeciwnym ramieniem, ale także splątane między sobą! Ekstremalnym przykładem takiego międzyfotonowego splątania jest stan

$$\begin{aligned} |\psi_N\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1_a, 0_b\rangle_1 |1_a, 0_b\rangle_2 \dots |1_a, 0_b\rangle_N + |0_a, 1_b\rangle_1 |0_a, 1_b\rangle_2 \dots |0_a, 1_b\rangle_N) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|N_a, 0_b\rangle + |0_a, N_b\rangle), \end{aligned}$$

dla którego zaobserwowanie dowolnego fotonu $|\dots\rangle_i$ w ramieniu a oznacza rzutowanie na pierwszy składnik w wyrażeniu na $|\psi_N\rangle$. To z kolei „wymusza”, by wszystkie inne przez nas nietknięte fotony od tej pory też poruszały się ramieniem a ! Ponieważ w najczęściej używanych układach doświadczalnych nie jest możliwe rozróżnianie fotonów, poprawnie powinniśmy zapisać $|\psi_N\rangle$ jak w drugim wyrażeniu i myśleć o stanie $|\psi_N\rangle$ jak o $|\psi\rangle$, mając jednak na uwadze, że w interferometrze nie podróżuje już pojedynczy foton, lecz ich grupa. Z drugiej strony grupa taka zachowuje się dokładnie jak pojedynczy foton o N razy większej energii. Skutkiem tego, jeżeli ramiona interferometru nie są równe, przy podróży wzdłuż ramienia interferometru i z powrotem faza akumuluje się jak w poprzednim przypadku, ale z N -krotną siłą:

$$|\psi_N(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ikN\frac{x}{2}}|N_a, 0_b\rangle + e^{-ikN\frac{x}{2}}|0_a, N_b\rangle).$$



Optymalny pomiar, jaki powinniśmy wykonać, by jak najlepiej oszacować x , nie sprowadza się, niestety, do policzenia, jak poprzednio, średniej liczby fotonów n_1 i n_2 zarejestrowanych przez detektory. Niemniej, ponieważ tym razem nie powtarzamy eksperymentu, a N -krotne nakręcanie się fazy jest równoważne z zamianą $k \rightarrow Nk$, najlepszą możliwą precyzję, jaką jesteśmy w stanie osiągnąć, możemy wyznaczyć, modyfikując wzór na Δx z przykładu jednofotonowego. Dokładniej, podstawiamy $N = 1$, a następnie podmieniamy k na Nk , by otrzymać $\Delta x = \frac{1}{N} \frac{1}{k\sqrt{2}}$. Nie jest to ścisły dowód, ale prowadzi do poprawnego wniosku, który stał się motorem wielu badań, w tym tych nagrodzonych wspomnianą na początku Nagrodą Nobla. Błąd w wyznaczaniu x tym razem skaluje się jak $\Delta x \propto 1/N$, czyli, używając tej samej ilości fotonów, jesteśmy w stanie osiągnąć kwadratowe polepszenie precyzji!

Spektakularnym przykładem zastosowania korelacji międzyfotonowych w metrologii jest wykorzystanie nieklasycznych stanów światła w detektorach fal grawitacyjnych. Działanie i budowa tych detektorów zostały dokładniej opisane w artykule Izabeli Kowalskiej w *Delcie* 10/2010. Największe z nich są ogromnymi interferometrami optycznymi, w których każde ramię ma długość rzędu kilku kilometrów. Są to jedne z najbardziej zaawansowanych eksperymentów współczesnej fizyki, nad którymi pieczę sprawuje cała rzesza naukowców. Dotychczas, używając „zwykłych” wiązek światła laserowego, udało się w tych monstrualnych interferometrach osiągnąć czułość na zmiany długości ramienia mniejsze niż rozmiar protonu! Niestety, jest to nadal za mało do wykrycia fali grawitacyjnej zaburzającej czasoprzestrzeń otaczającą detektor. Dlatego rozpoczęto prace nad zastosowaniem w tych detektorach kwantowych stanów światła; prace te zaczęły już przynosić efekty. Ponieważ moc używanych laserów jest bardzo duża: liczba fotonów sięga ok. $10^{12}/\text{ns}$, o stworzeniu tak dziwnego stanu jak $|\psi_N\rangle$ musimy raczej zapomnieć. Niemniej jednak, stanami, które wykazują splątanie międzyfotonowe i można je uzyskać nawet dla tak dużych N , są tak zwane ściśnięte stany światła. W eksperymencie GEO600 pozwoliły one już osiągnąć niedostępną wcześniej precyzję i po raz pierwszy pokonać klasyczne skalowanie błędu $\Delta x \propto 1/\sqrt{N}$. Kluczową przeszkodą do dalszej poprawy okazuje się wspomniana wcześniej dekoherencja, która „zaszumia” wyniki na skutek tego, że duża część fotonów nie zostaje w ogóle zarejestrowana. W niedawno opublikowanym ogólnodostępnym artykule [1] stwierdzono, że działanie dekoherencji jest dość okrutne i nie pozwala na osiągnięcie idealnego skalowania $\Delta x \propto 1/N$. Z drugiej strony, wykazano, że eksperymenty wykorzystujące ściśnięte stany światła osiągnęły już fundamentalną granicę wyznaczaną przez dekoherencję. Oznacza to, że użycie bardziej wyrafinowanych stanów światła w takich eksperymentach jak GEO600 może przynieść tylko umiarkowane skutki. Dlatego głównym zadaniem, które stoi przed naukowcami ulepszającymi detektory fal grawitacyjnych, jest „tylko” modernizacja układów w celu zmniejszenia dekoherencji. Nam pozostaje mieć nadzieję, że fale grawitacyjne nie okażą się bardziej nieuchwytnie niż cząstka Higgsa. Od teoretycznego zapostulowania tej ostatniej do jej doświadczalnego odkrycia minęło ponad pół wieku, na bezpośrednią obserwację fal grawitacyjnych czekamy już prawie sto lat.

[1] R. Demkowicz-Dobrzański, J. Kołodyński, Madalin Guță, *The elusive Heisenberg limit in quantum enhanced metrology*, Nature Communications, 3:1063; <http://www.nature.com/ncomms/journal/v3/n9/full/ncomms2067.html>.

Kwantowa chłodziarka

Do wakacji zostało już niewiele czasu. Skoro zima była w tym roku dość solidna, to pewnie należy się przygotować na upały. W taki czas przyjemnie mieć coś chłodnego do picia. W warunkach wakacyjnych można skorzystać ze znanego w wielu miejscach o gorącym i suchym klimacie prostego wynalazku – glinianego dzbanka na wodę. Wystarczy dzbanek postawić w przewiewnym miejscu, żeby jego zawartość stała się, po niedługim czasie, przyjemnie chłodna.

Tę własność porowatych dzbanków na pewno wielokrotnie niezależnie odkryto przez przypadek. Zjawisko jest bardzo proste. Porowaty materiał pozwala wodzie przesiąkać, a ta, parując, „odbiera ciepło”. Dzbanek jednocześnie izoluje wodę od otoczenia. Wystarczy porównać tablicowe wartości ciepła właściwego wody (około 4 kJ/kg/K) oraz jej ciepła parowania (ponad 2 MJ/kg), żeby zauważyć, że odparowanie 2‰ wody może obniżyć jej temperaturę o jeden stopień.

Dwie dekady temu nigeryjski nauczyciel, Mohammed Bah Abba, opatentował działającą na tej samej zasadzie chłodziarkę, którą nazwał *Zeer Pot*. Wykonuje się ją z dwóch dzbanków. Mniejszy wkłada się do większego, a przestrzeń między nimi wypełnia piaskiem, który nasącza się wodą, uzupełnianą mniej więcej dwa razy dziennie. Do mniejszego dzbanka wkłada się wiktuały, które dzięki temu przechowują się kilka do kilkunastu razy dłużej. Abba najpierw rozdał kilka tysięcy takich podwójnych dzbanków, a obecnie są one sprzedawane za równowartość trochę ponad jednego dolara. Urządzenie

znacząco poprawiło byt wielu społeczności, głównie żyjących w nich kobiet, istotnie zmniejszając czasochłonność dystrybucji płodów rolnych, będących głównym źródłem utrzymania.

Krótką kontemplacja mechanizmu chłodzenia porowatego dzbanka z wodą może nam uświadomić, że jest to zjawisko zachodzące na poziomie pojedynczych cząsteczek. Do stanu gazowego przechodzi ta ze znajdujących się na zewnętrznej powierzchni dzbanka, która zostanie wystarczająco mocno wzbudzona dzięki drganiom termicznym. Parują te, które unoszą największą energię. Dlatego te, co zostają, uzyskują, średnio, niższą temperaturę.

W zasadzie, jakiego byśmy nie wymyślili sposobu chłodzenia, to można go rozumieć właśnie w ten sposób. Z układu usuwają się najgorętsze drobiny (ewentualnie „pseudodrobiny” – fonony).

Jeden z ciekawych sposobów chłodzenia właśnie doczekał się praktycznego zastosowania, czyli opracowania chłodziarki [1]. Chodzi o złącze przewodnik-izolator-nadprzewodnik (ang: *NIS*: *normal-insulator-superconductor*). Jeżeli izolator jest wystarczająco cienki, to najgorętsze elektrony z przewodnika mogą tunelować do nadprzewodnika. Jest to efekt kwantowy związany z tym, że w nadprzewodniku elektrony poruszają się bez oporu. Przyłożone do złącza napięcie działa jak wiaterek owiewający gliniany dzbanek. Zabiera przetunelowane elektrony, robiąc miejsce następnym.

Praktyczne wykorzystanie takiego złącza wymagało, między innymi, wymyślenia, jak fluid fononów w oziębianym materiale sprząć z elektronami w przewodniku i jak odizolować próbkę od otoczenia. W realizacji opisanej w artykule [1] udało się zbudować układ, który może służyć do chłodzenia makroskopowej wielkości przedmiotów. W pracy opisano schłodzenie miedzianego prostopadłościanu o wymiarach $250 \times 250 \times 3 \text{ mm}^3$, za pomocą 48 odpowiednio podłączonych złączy NIS o milion razy mniejszej sumarycznej masie, od temperatury 300 mK do temperatury 256 mK w ciągu 18 godzin.

Na tego typu chłodziarki czeka wiele zastosowań, w których tanie i skuteczne osiągnięcie bardzo niskiej temperatury jest niezbędne ze względu na konieczną precyzję pomiaru. Potencjalnymi beneficjentami mogą być eksperymenty informatyki kwantowej, eksperymenty poszukujące cząstek ciemnej materii czy badające kosmiczne mikrofalowe promieniowanie tła w celu odpowiedzi na pytanie o naturę ciemnej energii.

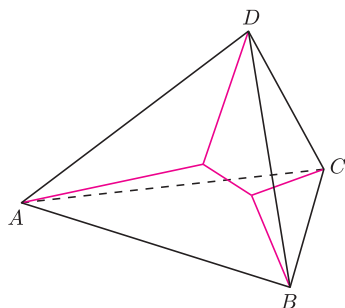
A przy okazji, jest to kolejny przykład obserwacji efektów kwantowych w skali makroskopowej.

Piotr ZALEWSKI

[1] P.J. Lowell, G.C. O’Neil, J.M. Underwood, J.N. Ullom, *Macroscale refrigeration by nanoscale electron transport*, Appl. Phys. Lett. **102**(2013)082601.



Kącik przestrzenny (17): Punkt Fermata–Torricellego



Rys. 1

Tym razem opowiemy o punkcie Fermata–Torricellego w czworoscianie. Definiujemy go przez analogię do przypadku trójkąta: jest to punkt F , który minimalizuje sumę odległości od wierzchołków czworoscianu. Zauważmy jednak, że łamana wyznaczona przez cztery odcinki łączące punkt F z wierzchołkami czworoscianu wcale nie musi być najkrótszą siecią odcinków łączących te wierzchołki (bardzo często krótszą sieć uzyskuje się, biorąc łamaną złożoną z pięciu odcinków, jak na rysunku 1). Okazuje się, że jeśli miary wszystkich kątów trójściennych przy wierzchołkach czworoscianu $ABCD$ są mniejsze od π , to punkt F leży wewnątrz tego czworoscianu (przez miarę kąta trójściennego rozumiemy pole powierzchni części sfery jednostkowej o środku w wierzchołku tego kąta wyciętej przez ten kąt). Przy tym założeniu punkt ten ma szereg ciekawych własności, opisanych poniżej.

Twierdzenie. *Jeśli punkt F leżący wewnątrz czworoscianu $ABCD$ minimalizuje sumę $AF + BF + CF + DF$, to*

- dwusieczne kątów płaskich AFB i CFD pokrywają się (tak samo dla par kątów BFC i AFD oraz AFC i BFD),
- $\sphericalangle AFB = \sphericalangle CFD$, $\sphericalangle BFC = \sphericalangle AFD$ i $\sphericalangle AFC = \sphericalangle BFD$,
- jeśli $|\overrightarrow{XY}|$ oznacza długość wektora \overrightarrow{XY} , to spełniona jest zależność

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{FA}|} + \frac{\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FB}|} + \frac{\overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{FC}|} + \frac{\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FD}|} = \vec{0},$$

- $\cos \sphericalangle AFB + \cos \sphericalangle BFC + \cos \sphericalangle CFA = -1$.

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia, wprowadźmy pewien przydatny obiekt.

Definicja. *Elipsoidą obrotową o ogniskach A i B nazywamy powierzchnię powstałą w wyniku obrotu wokół prostej AB pewnej elipsy o ogniskach A i B .*

Wprost z definicji wynika następująca własność: *elipsoida obrotowa o ogniskach A i B jest zbiorem wszystkich takich punktów X przestrzeni, że $AX + BX = a$, gdzie $a > AB$ jest pewną ustaloną liczbą rzeczywistą. Ponadto, jeśli Y leży wewnątrz danej elipsoidy, to $AY + BY < a$, zaś jeśli Y leży na zewnątrz elipsoidy, to $AY + BY > a$ (łatwo to udowodnić, korzystając z nierówności trójkąta).*

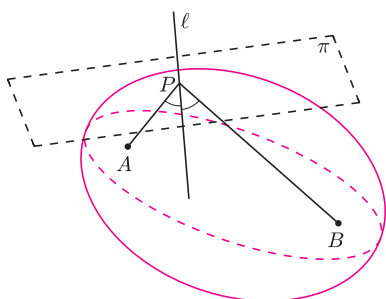
Poniższy fakt jest odpowiednikiem pewnej własności elipsy, opisanej np. w *Delcie* 2/2007 na stronie 1.

Fakt. *Załóżmy, że punkt P leży na elipsoidzie o ogniskach A i B , zaś π jest płaszczyzną styczną do tej elipsoidy w punkcie P . Niech ℓ będzie prostą prostopadłą do płaszczyzny π , przechodzącą przez punkt P (rys. 2). Wtedy ℓ jest dwusieczną kąta płaskiego APB .*

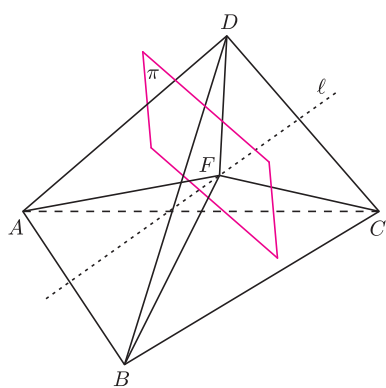
Nietrudne uzasadnienie można znaleźć analogicznie do przypadku elipsy, co pozostawiamy Czytelnikom jako zadanie, a teraz przejdziemy do dowodu głównego twierdzenia.

Dowód twierdzenia. a) Rozważmy elipsoidę obrotową \mathcal{E}_1 o ogniskach A i B oraz elipsoidę obrotową \mathcal{E}_2 o ogniskach C i D przechodzącą przez punkt F . Ponieważ punkt F minimalizuje sumę $AF + BF + CF + DF$, to z wcześniejszych obserwacji wnosimy, że dane dwie elipsoidy nie mogą mieć punktów wspólnych wewnętrznych, a więc muszą być styczne w punkcie F (rys. 3). Niech π oznacza wspólną płaszczyznę styczną do tych elipsoid w punkcie F , zaś ℓ prostą prostopadłą do płaszczyzny π , przechodzącą przez F . Wówczas z przytoczonego powyżej faktu wynika, że prosta ta jest dwusieczną zarówno kąta płaskiego AFB , jak i CFD . Identyczne rozumowanie przeprowadzimy dla par kątów BFC i AFD oraz AFC i BFD .

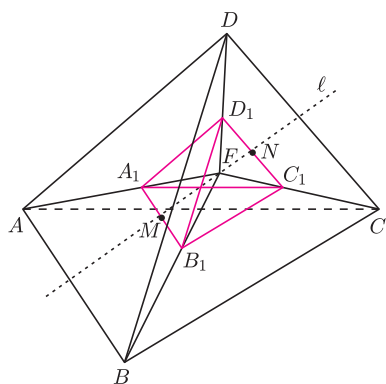
b) Wybierzmy na półprostych FA^{\rightarrow} , FB^{\rightarrow} , FC^{\rightarrow} i FD^{\rightarrow} odpowiednio takie punkty A_1 , B_1 , C_1 i D_1 , że $FA_1 = FB_1 = FC_1 = FD_1 = 1$ (rys. 4). Punkt F jest więc środkiem sfery opisanej na czworoscianie $A_1B_1C_1D_1$. Niech ponadto



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

prosta ℓ , zdefiniowana jak w części a), przecina odcinki A_1B_1 i C_1D_1 odpowiednio w punktach M i N . Skoro $FA_1 = FB_1$ i $FC_1 = FD_1$, to M i N są odpowiednio środkami odcinków A_1B_1 i C_1D_1 . Zatem środek sfery opisanej na czworobocianie $A_1B_1C_1D_1$ leży na prostej łączącej środki odcinków A_1B_1 i C_1D_1 . W ten sam sposób uzasadniamy, że leży on na prostej łączącej środki odcinków B_1C_1 i A_1D_1 . W takim razie musi pokrywać się ze środkiem ciężkości czworobocianu $A_1B_1C_1D_1$, a to oznacza, że czworobocian ten jest równościenny (korzystamy tu z twierdzenia opisanego w Kąciku przestrzennym 12, w *Delcie* 4/2012). Stąd wnioskujemy, że

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle A_1FB_1 = \sphericalangle C_1FD_1 = \sphericalangle CFD.$$

Analogicznie otrzymujemy pozostałe równości.

c) Wykorzystując zależności

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{FA}|} = \overrightarrow{FA_1}, \quad \frac{\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FB}|} = \overrightarrow{FB_1}, \quad \frac{\overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{FC}|} = \overrightarrow{FC_1}, \quad \frac{\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FD}|} = \overrightarrow{FD_1},$$

widzimy, że postulowaną równość możemy przepisać w postaci

$$(*) \quad \overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FB_1} + \overrightarrow{FC_1} + \overrightarrow{FD_1} = \vec{0}.$$

Jeśli M i N są środkami odcinków A_1B_1 i C_1D_1 , to

$$\overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FB_1} = 2\overrightarrow{FM} \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{FC_1} + \overrightarrow{FD_1} = 2\overrightarrow{FN}.$$

Na koniec zauważmy, że skoro F jest środkiem ciężkości czworobocianu $A_1B_1C_1D_1$, to $\overrightarrow{FM} = -\overrightarrow{FN}$.

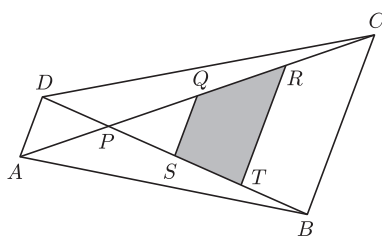
d) Wystarczy wykorzystać zależność (*) i własności iloczynu skalarnego (np. $\cos \sphericalangle A_1FB_1 = \overrightarrow{FA_1} \circ \overrightarrow{FB_1}$). Uzupełnienie szczegółów pozostawiamy Czytelnikom.

Michał KIEZA



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1384. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie P . Na przekątnej AC dane są jeszcze punkty Q i R , dzielące ją wraz z P na cztery równe części, tzn. $AP = PQ = QR = RC$. Na przekątnej DB dane są jeszcze punkty S i T , które wraz z P dzielą ją na cztery równe części, tzn. $DP = PS = ST = TB$. Obliczyć stosunek pól czworokątów $STRQ$ i $ABCD$. Rozwiązanie na str. 6

M 1385. Udowodnić, że istnieje liczba C o następującej własności: jeśli równanie $1^k + \dots + (m-1)^k = m^k$ ma rozwiązanie dla pewnych liczb naturalnych $k, m \geq 2$, to $m \leq C \cdot 2^k$.

Rozwiązanie na str. 8

Teza zadania M 1385 oznacza, że jeśli podane równanie diofantyczne ma rozwiązanie, to m nie może być *zbyt duże*. Do dziś pozostaje otwartym problemem hipoteza Erdősa, że to równanie nie ma rozwiązań (zob. również zadanie M 1374, *Delta* 1(464)/2013).

M 1386. Wielomian $x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + \dots + a_0$ ma współczynniki rzeczywiste a_{n-3}, \dots, a_0 nie wszystkie równe 0. Udowodnić, że ma on mniej niż n pierwiastków rzeczywistych.

Rozwiązanie na str. 7

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 831. Księżyc obiega Ziemię i wraz z nią obiega też Słońce. Czy istnieją takie odcinki orbity Księżyca w jego ruchu wokół Słońca, w których „trójkąt” utworzony przez łuk orbity i promienie wodzące łączące jego końce ze środkiem Słońca nie jest figurą wypukłą?

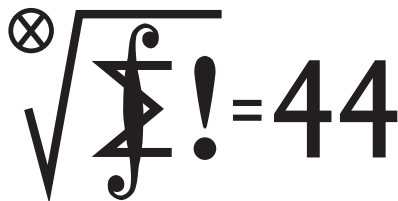
Rozwiązanie na str. 13

F 832. Jakie ciśnienie działa na zawór, którym gwałtownie zamknięto przepływ wody w rurze? Przed zamknięciem zaworu woda płynęła z prędkością u .

Rozwiązanie na str. 6

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 647 ($WT = 1,34$) i 648 ($WT = 2,68$) z numeru 10/2012

Janusz Olszewski	Warszawa	41,89
Wojciech Nadara	Warszawa	39,64
Paweł Łabędzki	Kielce	36,92
Witold Bednarek	Łódź	36,54
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	35,45
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,52
Krzysztof Kamiński	Pabianice	33,44

Zadania z matematyki nr 661, 662

Redaguje Marcin E. KUCZMA

661. Dany jest trójkąt równoboczny ABC oraz punkt D na boku BC . Punkty E, F, G , leżące odpowiednio na bokach AB, CA, BC , są wyznaczone przez warunki $DE \perp AB, EF \perp CA, FG \perp BC$. Proste DE i FG przecinają się w punkcie P . W jakim stosunku prosta AP dzieli odcinek BC ?

662. Ciąg (x_n) jest określony wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{e^{x_n} - 1} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots;$$

wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą dodatnią. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2 - nx_n)}{\ln n}.$$

Zadanie 662 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa. Jest to kontynuacja zadania 654 (którego rozwiązanie widzimy poniżej).

Rozwiązania zadań z numeru 1/2013

Przypominamy treść zadań:

653. W egzaminie testowym pytania są ponumerowane $1, 2, \dots, n$. Za prawidłową odpowiedź na k -te pytanie uczestnik otrzymuje k punktów; za błędną (lub brak odpowiedzi) otrzymuje $-k$ punktów. Po zliczeniu wyników okazało się, że w każdej trójce uczestników znajdują się dwaj tacy, którzy uzyskali różne sumy punktów. Jaka jest największa liczba uczestników, dla której taka sytuacja mogła mieć miejsce?

654. Ciąg (x_n) jest określony wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{e^{x_n} - 1} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots;$$

wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą dodatnią. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

653. Wynik uzyskany przez uczestnika jest liczbą postaci $\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n$ (dowolny układ znaków). Wszystkie takie liczby są jednakowej parzystości. Zatem zbiór możliwych wyników zawiera się w zbiorze

$$\{-N, -N + 2, -N + 4, \dots, N - 4, N - 2, N\},$$

$$\text{gdzie } N = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ten ostatni zbiór liczy $N + 1$ elementów. Wykażemy, że każdy element jest możliwym wynikiem.

Uczestnik z przynajmniej jedną dobrą odpowiedzią uzyskał wynik $\sum i\varepsilon_i$, gdzie $\varepsilon_i = \pm 1$ i nie wszystkie ε_i są równe -1 . Zamieniamy ciąg $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ na ciąg $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ określony następująco:

- gdy $\varepsilon_1 = 1$, bierzemy $\varepsilon'_1 = -1$, pozostałe $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$;
- gdy $\varepsilon_1 = -1$, znajdujemy najmniejszy numer j , dla którego $\varepsilon_j = 1$ (więc $\varepsilon_{j-1} = -1$); przyjmujemy $\varepsilon'_{j-1} = 1, \varepsilon'_j = -1$, pozostałe $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$.

Uczestnik z „wektorem odpowiedzi” $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ ma wynik $(\sum i\varepsilon'_i) = (\sum i\varepsilon_i) - 2$. Startując od prymusa z wektorem $(1, \dots, 1)$, czyli z wynikiem N , możemy w opisany sposób wygenerować kolejno wyniki $N - 2, N - 4$ itd., aż do $-N$; łącznie $N + 1$ wyników.

Warunek zadania żąda, by każdy wynik pojawił się co najwyżej dwukrotnie. Gdy pojawi się dokładnie dwukrotnie, da to szukane maksimum, równe $2(N + 1) = n^2 + n + 2$.

654. Wszystkie wyrazy x_n są liczbami dodatnimi. Z nierówności $e^x > 1 + x$ (dla $x > 0$) wynika, że ciąg (x_n) jest malejący – zatem zbieżny do granicy $g \geq 0$. Równanie $(e^{x_n} - 1)x_{n+1} = x_n^2$ daje w granicy zależność $(e^g - 1)g = g^2$, która nie zachodzi dla żadnej liczby dodatniej g (w myśl tej samej nierówności). Zatem $g = \lim x_n = 0$.

Zastosujemy *twierdzenie Stolza*. Mówi ono, że jeśli (b_n) jest ciągiem rosnącym do nieskończoności, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

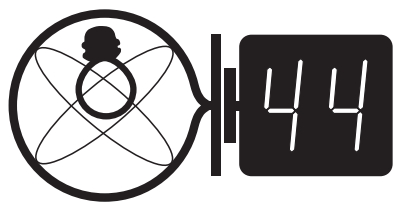
dla każdego ciągu (a_n) , dla którego granica po prawej stronie istnieje.

Biorąc $a_n = 1/x_n, b_n = n$, mamy w mianowniku wyrażenia po prawej stronie jedynek, a w liczniku:

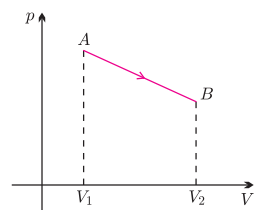
$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n} = \frac{e^{x_n} - 1 - x_n}{x_n^2}.$$

Gdy $n \rightarrow \infty$ (więc $x_n \rightarrow 0$), ten iloraz dąży do $1/2$; widać to na przykład z początkowego fragmentu rozwinięcia potęgowego $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ (przy $x \rightarrow 0$). Tak więc $\lim 1/(x_n \cdot n) = \lim(a_n/b_n) = 1/2$, czyli $\lim nx_n = 2$.

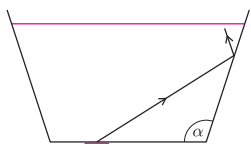
Klub 44



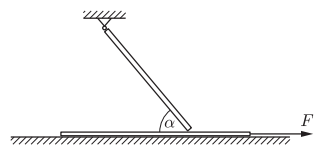
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2013



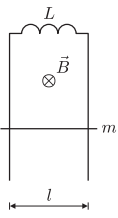
Rys. 1



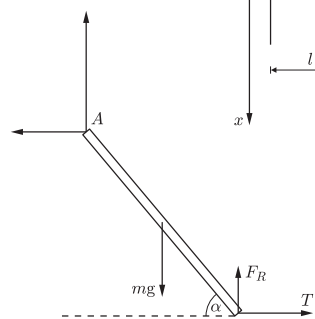
Rys. 2



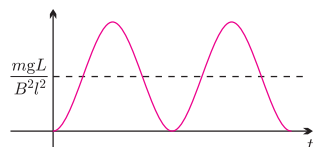
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
544 ($WT = 2,08$) i 545 ($WT = 1,24$)
z numeru 10/2012

Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	39,02
Tomasz Rudny	Warszawa	35,20
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,13
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,34

Zadania z fizyki nr 558, 559

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

558. Jednoatomowy gaz doskonały poddano przemianie przedstawionej na wykresie pV (rys. 1). Końce odcinka AB leżą na tej samej izotermie, a odpowiadające im objętości wynoszą V_1 i V_2 . Jaka jest część odcinka AB , dla której gaz pobiera ciepło w tej przemianie?

559. Cienkie szklane naczynie ma w przekroju kształt trapezu, a jego dno ma kształt prostokąta (rys. 2). Do naczynia nalano wody o współczynniku załamania $n = 1,33$. Jaką wartość musi mieć kąt α między podstawą a ścianką naczynia, aby przez boczną ściankę nie było widać monety umieszczonej pod dnem naczynia?

Rozwiązania zadań z numeru 1/2013

Przypominamy treść zadań:

550. Cienki arkusz papieru przyciśnięty jest do stołu jednorodnym prętem o masie m . Górny koniec pręta jest zamocowany przegubowo. Kąt między prętem i kartką wynosi α (rys. 3), współczynnik tarcia między nimi wynosi μ . Między kartką a stołem tarcia nie ma. Jaką minimalną, poziomą siłę trzeba przyłożyć do kartki, aby wyciągnąć ją spod pręta?

551. Cewkę o indukcyjności L dołączono do górnych końców dwóch równoległych szyn przewodzących ustawionych pionowo. Odstęp między szynami jest równy l . Jednorodne pole magnetyczne o indukcji B ma kierunek poziomy i jest prostopadłe do płaszczyzny szyn. Poziomy, przewodzący pręt o masie m może poruszać się w polu magnetycznym wzdłuż szyn w ten sposób, że stale się z nimi styka. Opór i samoindukcję przewodników oraz tarcie pręta o szyny zaniedbujemy. Znaleźć zależność położenia pręta od czasu $x(t)$ (rys. 4). Prędkość początkowa pręta jest równa zeru.

550. Kartkę uda się wyciągnąć, gdy przyłożona siła F przekroczy maksymalną wartość tarcia statycznego między prętem i kartką: $F > T_{\max} = \mu F_N$, gdzie F_N jest siłą nacisku pręta na kartkę, równą co do wartości sile reakcji F_R kartki na pręt. Rozważmy sytuację graniczną, gdy siła tarcia osiągnęła maksymalną wartość, a układ pozostaje jeszcze w równowadze. Oznacza to, że wszystkie siły działające na pręt równoważą się, a wypadkowy moment tych sił względem dowolnego punktu wynosi 0. Warunek równowagi momentów sił względem punktu A (rys. 5) ma postać $mg \frac{l}{2} \cos \alpha = T_{\max} l \sin \alpha + F_R l \cos \alpha$, gdzie l jest długością pręta. Uwzględniając, że $F_R = T_{\max} / \mu$, otrzymujemy

$$F > \frac{\frac{\mu}{2} mg \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

551. Gdy pręt zaczyna opadać pod wpływem siły ciężkości, między punktami styku z szynami powstaje siła elektromotoryczna indukcji $\varepsilon = Bv_x l$, gdzie $v_x = \Delta x / \Delta t$ jest szybkością zmian położenia pręta. Prąd indukcyjny płynie w takim kierunku, żeby przeciwdziałać zmianom strumienia pola magnetycznego, które go wywołują, czyli siła elektrodynamiczna działająca na pręt ma zwrot przeciwny do siły ciężkości. Równanie ruchu pręta ma więc postać $ma_x = mg - BIl$, gdzie I jest natężeniem prądu w obwodzie. Możemy też napisać drugie prawo Kirchhoffa dla obwodu zawierającego pręt i cewkę: $Bv_x l = L \Delta I / t$. Uwzględniając warunki początkowe $x(0) = 0$ oraz $I(0) = 0$, otrzymujemy $Bxl = LI$. Wstawiając otrzymane stąd wyrażenie na natężenie prądu do równania ruchu, możemy zapisać je w postaci

$$a_x + \frac{B^2 l^2}{mL} \left(x - \frac{mgL}{B^2 l^2} \right) = 0.$$

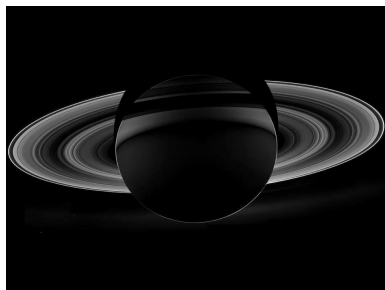
Jest to równanie oscylatora harmonicznego. Pręt drga wokół położenia równowagi, którego współrzędna wynosi

$$x_0 = \frac{mgL}{B^2 l^2}.$$

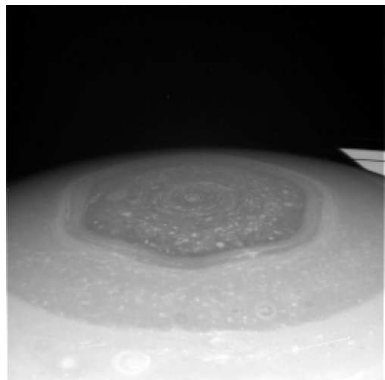
Siła elektrodynamiczna w tym położeniu równoważy siłę ciężkości. Zależność położenia pręta od czasu dana jest wzorem $x = x_0 + A \sin(\omega t + \varphi)$, gdzie częstość drgań jest równa $\omega = Bl / \sqrt{mL}$. Zależność prędkości od czasu ma postać $v_x = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$. Amplitudę drgań A i fazę początkową φ możemy wyznaczyć z warunków początkowych: $x(0) = x_0 + A \sin \varphi = 0$ oraz $v_x(0) = A\omega \cos \varphi = 0$. Uwzględniając, że $A > 0$, otrzymujemy $\varphi = -\pi/2$ oraz $A = x_0$. Ostatecznie zależność położenia pręta od czasu ma postać (rys. 6)

$$x = \frac{mgL}{B^2 l^2} (1 - \cos \omega t).$$

Prosto z nieba: Pocztówki z Saturna



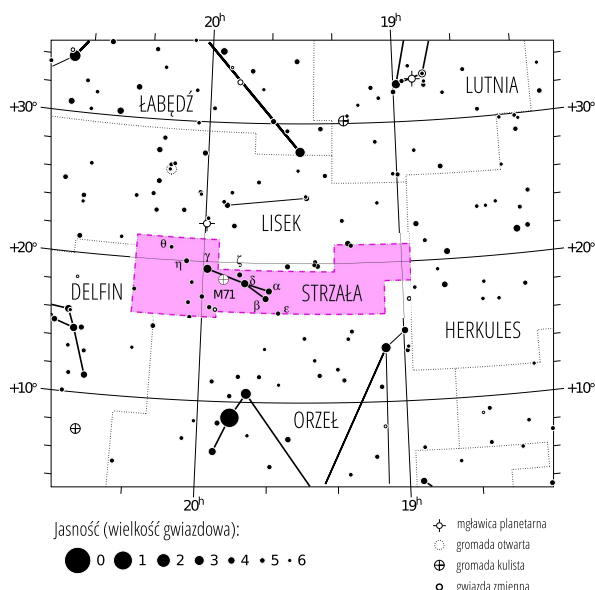
Fot. 1 (źródło: NASA)



Fot. 2 (źródło: NASA)

Podczas gdy uwaga wielu skupiona jest na sukcesach w poszukiwaniu pozasłonecznych układów planetarnych, w szczególności planet podobnych do Ziemi, badania prowadzone w starym dobrym Układzie Słonecznym dostarczają wciąż nowych, inspirujących danych. Nie mamy tu na myśli podboju Marsa: znacznie dalej od Ziemi niż łazik Curiosity znajduje się misja satelitarna *Cassini-Huygens*. Wysłany w kierunku Saturna teleskop dostarczył w ciągu ostatnich 15 lat mnóstwo wysokiej rozdzielczości zdjęć Jowisza, pierścieni Saturna i jego księżyców. Sonda została wykorzystana także do testów ogólnej teorii względności (badania krzywizny przestrzeni w Układzie Słonecznym) oraz zrzucenia w 2004 r. ładownika Huygens na powierzchnię największego księżycy układu, Tytana. Niedawne obserwacje ukazują nieczęsty widok: zaciemnioną stronę planety (fot. 1), oraz detale powierzchni Tytana, na którym odkryto sieć rzek (zamiast wody płynie w nich najprawdopodobniej mieszanina etanu i metanu). Jednym z bardziej dziwnych odkryć w układzie Saturna jest znajdujący się na północnym biegunie planety regularny sześciokąt (fot. 2), formacja chmur o rozmiarach około 25 tys. km. Tajemniczy obiekt był po raz pierwszy obserwowany przez próbnik Voyager w 1979 r.; Cassini miał okazję zbadać go nieco dokładniej, wykonując dłuższe i technicznie doskonalsze obserwacje. Wiry atmosferyczne w okolicy bieguna nie są czymś wyjątkowym – obserwuje się je w atmosferze Tytana, a także na Ziemi. Prędkość chmur w pobliżu sześciokąta szacuje się na 500 km/h. Kształt wiru nie zmienił się od co najmniej 30 lat – podobnym długoskalowym zjawiskiem atmosferycznym jest Wielka Czerwona Plama na Jowiszu, obserwowana od co najmniej 200 lat (dla porównania, skala czasowa zmienności pogody na Ziemi to okres mniej więcej miesiąca). Teoretycy tłumaczą obecność sześciokąta w atmosferze Saturna powstawaniem znanej z hydrodynamiki fali Rossby'ego (struktura tworzona jest przez warstwy gazu przekazujące sobie poprzez tarcie moment pędu, a siłą przywracającą położenie równowagi jest siła Coriolisa zmieniająca się z długością geograficzną). Ostateczne wyjaśnienie tej tajemnicy dostarczy z pewnością interesujących informacji o skłębionych odmetach gazowego giganta.

Michał BEJGER



Gwiazdozbiór Strzały. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

Niebo jak własna kieszeń: Maj

Zbliżający się koniec wiosny Astronom Uważny potwierdzi eksperymentalnie, obserwując w późnych godzinach wieczornych wschód Trójkąta Letniego, złożonego z Deneba, Wega i Altaira, jasnych gwiazd należących do gwiazdozbiorów Łabędzia, Lutni i Orła. O wiele mniej majestatyczny, a przez to łatwy do przegapienia, jest wciśnięty pomiędzy wspomnianych wyżej „celebrytów nocnego nieba” niewielki gwiazdozbiór Strzały (łac. *Sagitta*). Strzałę tworzą niezbyt jasne gwiazdy znajdujące się na tle dysku Galaktyki. Najjaśniejsza z nich to γ Sagittae ($3,50^m$), wyznaczająca wraz z η grot strzały wystrzelonej przez Herkulesa w kierunku Orła zmierzającego do przykutego do skały Prometeusza. Gwiazdy te są związane z gromadą Hiady znajdującą się w Byku: mają podobną do niej prędkość i kierunek ruchu w Galaktyce. Pomiędzy γ i η a lotką Strzały, tworzoną przez α , β i δ Sagittae, znajduje się także gromada kulista M71 o jasności $8,3^m$, którą można zaobserwować przez amatorski teleskop lub lornetkę.

Maj zacznie się deszczem η Akwaryd (maksimum 5–6 V, około 10 zjawisk/h), w których zaobserwowaniu nie będzie, miejmy nadzieję, zanieczyszczenia zanikający w trzeciej kwadrze Księżyc (nów 10 V, pełnia 25 V). W czasie nowiu nastąpi obrączkowe zaćmienie Słońca, widoczne na półkuli południowej (Australia, Ocean Spokojny). 28 V tuż przed zachodem Słońca spotkanie miesiąca: koniunkcja Jowisza ($-1,77^m$) i Wenus ($-3,80^m$) w gwiazdozbiorze Byka. Planety znajdują się w odległości mniejszej niż 1° , a w ich pobliżu pojawi się także Merkury ($-0,53^m$). Mars przebywa obecnie w gwiazdozbiorze Barana i, wschodząc wraz ze Słońcem, nie stanowi wdzięcznego obiektu do obserwacji, w przeciwieństwie do Saturna ($0,89^m$), który w maju będzie widoczny przez całą noc na granicy gwiazdozbiorów Wagi i Panny.

M. B.

Inwersja to przekształcenie geometryczne, określane czasem jako symetria względem okręgu. *Obrazem punktu A (różnego od S) w inwersji względem okręgu $\Gamma = \mathcal{O}(S, r)$ jest taki punkt A^* na półprostej SA^{\rightarrow} , że $SA \cdot SA^* = r^2$. Zauważmy, że:*

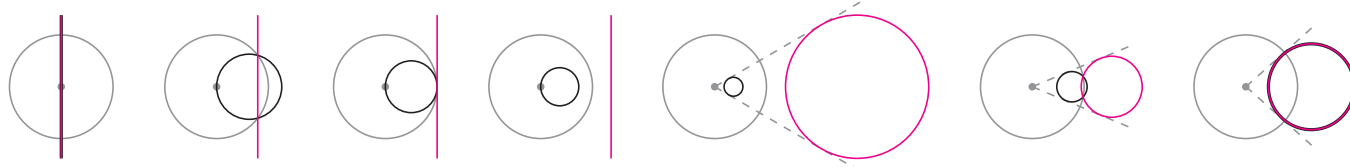
- obrazem punktu A^* jest punkt A ,
- jeśli punkt A leży na okręgu Γ , to $A^* = A$,
- obraz figury zawartej w pewnym kącie $XS\overleftarrow{Y}$ też jest wewnątrz tego kąta,
- obrazem prostej przechodzącej przez punkt S jest ta sama prosta.

Ogólniej okazuje się, że inwersja zachowuje okręgi i proste. Konkretnie (rys. 1):

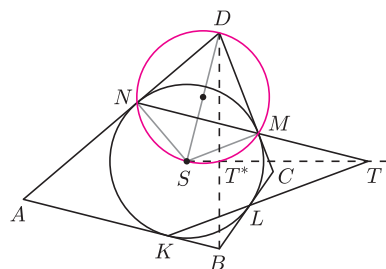
- obrazem okręgu przechodzącego przez punkt S jest prosta nieprzechodząca przez S (i na odwrót),
- obrazem okręgu nieprzechodzącego przez S jest okrąg nieprzechodzący przez S .

Punkt S nazywa się *środkiem inwersji*. Nie definiujemy jego obrazu S^* .

Dowody opisanych własności znaleźć można np. w książce *Co to jest matematyka* R. Couranta i H. Robbinsa.



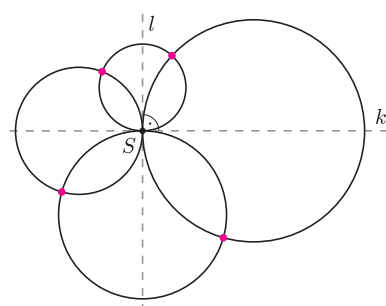
Rys. 1. Niektóre pary figur i ich obrazów w inwersji względem szarego okręgu; na pierwszym i ostatnim rysunku – prosta i okrąg stały.



Rys. 2

Inwersja to przydatne narzędzie geometryczne. Czasem do rozwiązania zadania wystarczy przekształcić jedynie mały fragment obrazka. Zazwyczaj jednak warto zastosować inwersję do całego rysunku, otrzymując nowy, na ogół zupełnie inny rysunek, na którym często łatwiej dostrzec rozwiązanie. Oto kilka przykładów.

1. Wyznacz obraz kwadratu opisanego na okręgu w inwersji względem tego okręgu.
2. Okrąg o środku w punkcie S i wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N . Proste KL i MN przecinają się w punkcie T . Wykaż, że proste BD i ST są prostopadłe.
3. Dane są dwa prostopadłe bałwanki o wspólnej szyi, jak na rysunku 3. Wykaż, że kolorowe punkty leżą na jednym okręgu.
4. Każdy z rozłącznych okręgów Γ_1 i Γ_3 jest styczny zewnętrznie do każdego z rozłącznych okręgów Γ_2 i Γ_4 . Wykaż, że punkty styczności leżą na jednym okręgu.
5. W czworokącie wypukłym $ABCD$ okręgi wpisane w trójkąty ABC i ACD są styczne. Wykaż, że ich punkty styczności z bokami czworokąta leżą na jednym okręgu.



Rys. 3

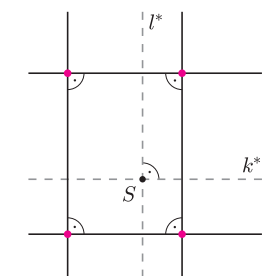
Rozwiązania i wskazówki

Wskazówka 1. Bok AB kwadratu to część prostej AB , zawarta w kącie ASB .

R2. Obrazem prostej MN w inwersji względem danego okręgu jest okrąg przechodzący przez środek inwersji S i przez stałe punkty M i N (rys. 2). Leży na nim też punkt T^* , bo punkt T leży na prostej MN . Średnicą tego okręgu jest SD , ponieważ kąty SMD i SND są proste, stąd także $\sphericalangle ST^*D = 90^\circ$.

Analogicznie $\sphericalangle ST^*B = 90^\circ$, więc $BD \perp ST^*$. Z definicji inwersji punkty S, T^*, T są współliniowe, co kończy dowód. \square

R3. Rozważmy inwersję względem dowolnego okręgu o środku w punkcie S , przy oznaczeniach jak na rysunku 3. Proste k i l są stałe przy tej inwersji. Obrazem każdego z okręgów, przechodzącego przez środek inwersji, jest prosta równoległa odpowiednio do k^* lub l^* (okrąg styczny do prostej k lub l mieści się w półpłaszczyźnie przez nią wyznaczonej, więc jego obraz też, rys. 4). Zatem obrazami kolorowych punktów są wierzchołki prostokąta. Leżą one na okręgu nieprzechodzącym przez środek inwersji (bo środek ten jest wewnątrz prostokąta), więc także przed inwersją kolorowe punkty leżą na jednym okręgu. \square



Rys. 4

Wskazówka 4. Warto rozważyć inwersję o środku w jednym z punktów styczności i dowieść, że obrazy pozostałych trzech punktów są wówczas współliniowe.

Wskazówka 5. Warto rozważyć inwersję o środku w punkcie styczności okręgów.

Zadanie 2 pochodzi z XLVIII Olimpiady Matematycznej.