



W następnym numerze polecamy



matematykę choinki

## SPIS TREŚCI NUMERU 3 (466)

Na granicy.  
Badania powierzchni  
metodami optyki nieliniowej  
*Piotr Fiła* str. 1


 Zadania str. 4

Gdy krzywa niejedno ma imię,  
to *peh*, czyli o stożkowych  
w ujęciu sferycznym  
*Piotr Kopacz* str. 5

Zegar słoneczny, równania  
różniczkowe i ładne obrazy  
*Franciszek Adamaszek,*  
*Michał Adamaszek* str. 8

 Fizyka tańca  
*Agnieszka Janiuk* str.10

Twierdzenie  
Chevalleya–Warninga  
i grafy  $p$ -regularne  
*Jakub Witaszek* str.12

Zdegenerowany trójkąt  
 Paleontologiczne śledztwa  
*Magdalena Fikus* str.15

Jak wyznaczyć odległość  
Ziemia–Księżyc?  
*Andrzej Branicki* str.16

Kąć przestrzenny (16):  
Sfera styczna do krawędzi  
czworościanu  
*Michał Kieza* str.18


Logika, sens i wątpliwości  
*Marek Kordos* str.20

Informatyczny kącik olimpijski  
(60): Kliki  
*Tomasz Idziaszek* str.21

Klub 44 str.22

Prosto z nieba:  
Soczewki w obłokach  
*Michał Bejger* str.24

Niebo jak własna kieszeń:  
Marzec str.24

 Obroty kwadratów  
*Joanna Jaszńska* str.25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.  
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**Pol-Perfect:** [www.polperfect.com.pl](http://www.polperfect.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2013 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)

lub kontaktując się z Telefonicznym Biurem Obsługi Klienta

pod numerem: 801 800 803 lub 22 717 59 59 – czynne w godzinach 7<sup>00</sup> – 18<sup>00</sup>.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

# Na granicy

## Badania powierzchni metodami optyki nieliniowej

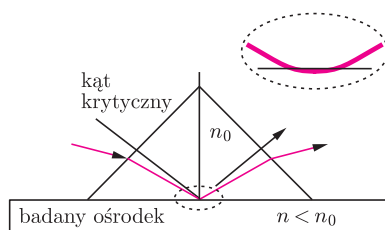
Piotr FITA\*



Własności materii to jeden z głównych obszarów zainteresowań fizyki i chemii od początku istnienia tych nauk. O ile jednak badania własności fizycznych materii w różnych stanach skupienia – stałym, ciekłym i gazowym – dawno weszły już w fazę tak dojrzałą, że w dużej mierze przeniosły się w zakres nauk stosowanych i technologii, to własności powierzchni rozdzielających dwie fazy (o tym samym lub różnym stanie skupienia, na przykład: powierzchni między wodą i powietrzem lub wodą i olejem) wciąż przyciągają uwagę nauk podstawowych. Wynika to z faktu, że w coraz większym stopniu zdajemy sobie sprawę ze znaczenia procesów fizykochemicznych zachodzących na powierzchniach dla rozwoju biologicznego środowiska naturalnego, a jednocześnie odkrywamy, iż własności powierzchni mogą bardzo różnić się od własności każdej z faz przez tę powierzchnię rozdzielanych.

Na przykład, dopiero zaczynamy rozumieć, jaki wpływ na stan atmosfery i klimat na Ziemi mają reakcje, w których uczestniczą cząsteczki zanieczyszczeń przemysłowych zaadsorbowane na powierzchni oceanów i kropelek wody. Nawet jeśli wydajność takich reakcji jest niewielka, to ich skala nie pozwala, by zaniechać je przy próbach modelowania dynamiki atmosfery, ani by pominąć ich wpływ na życie na Ziemi. Pełny obraz tych zjawisk komplikuje to, że wiele takich reakcji ma charakter fotochemiczny, to znaczy zachodzi dopiero pod wpływem światła słonecznego. Z drugiej strony, już w skali mikroskopowej, wiele procesów życiowych zachodzi na granicy błony komórkowej i wodnego otoczenia komórki, czyli na powierzchni rozdzielającej fazę wodną (polarną) i lipidową (niepolarną). Zrozumienie, jak własności tej powierzchni wpływają na reakcje zachodzące z udziałem cząsteczek zaadsorbowanych na niej, mogłoby pozwolić na projektowanie leków o większej skuteczności lub selektywności działania.

Optyczne metody badania powierzchni są zawsze utrudnione przez fakt, że liczba cząsteczek, o których możemy powiedzieć, że są naprawdę na powierzchni, jest zanedbywalnie mała w porównaniu z liczbą cząsteczek w pozostałej objętości substancji. Z tego względu klasyczne metody optycznego badania materii – na przykład pomiar absorpcji światła w próbce czy emisji wzbudzonej przez oświetlenie próbki – zawodzą, gdyż sygnał pochodzący z powierzchni jest całkowicie maskowany przez wielokrotnie silniejszą odpowiedź pozostałych cząsteczek.



Rys. 1. Całkowite wewnętrzne odbicie jako metoda optycznego badania powierzchni.

Jedną z metod, za pomocą których usiłowano rozwiązać ten problem, było zastosowanie zjawiska całkowitego wewnętrznego odbicia. Światło, padając z ośrodka o większym współczynniku załamania na ośrodek o mniejszym współczynniku załamania, ulega całkowitemu odbiciu, jeśli kąt padania jest większy od tak zwanego kąta krytycznego (rys. 1). W rzeczywistości jednak fala elektromagnetyczna wnika nieco do ośrodka o mniejszym współczynniku załamania, lecz jej amplituda bardzo szybko zanika z odległością od granicy ośrodków (tzw. fala *evanescentna*). Można ten fakt wykorzystać, by ograniczyć wpływ cząsteczek nieznajdujących się bezpośrednio na powierzchni na własności światła odbitego (i badać w ten sposób absorpcję) lub wzbudzić emisję cząsteczek znajdujących się blisko powierzchni. Jednak typowa głębokość wnikania fali ewanescentnej jest rzędu 100 nm, a to oznacza, że oddziałuje ona z kilkuset warstwami cząsteczek, podczas gdy efekty powierzchniowe sięgają zaledwie na głębokość kilku cząsteczek w głąb ośrodka. Z tego powodu selektywność metody całkowitego wewnętrznego odbicia jest bardzo niewielka i badanie cząsteczek znajdujących się w bezpośredniej bliskości powierzchni wymaga sięgnięcia do metod optyki nieliniowej.

O optyce nieliniowej mówimy wówczas, gdy odpowiedź ośrodka (w szczególności polaryzacja elektronowa, czyli wywołane polem elektrycznym przesunięcie elektronów) nie jest liniowo zależna od natężenia pola elektrycznego fali

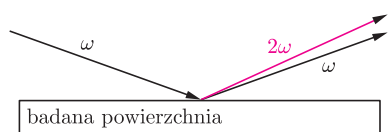
\*Instytut Fizyki Doświadczalnej,  
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski



elektromagnetycznej. Efekty nieliniowe można obserwować dla bardzo dużych natężeń światła. Dla światła ze źródeł klasycznych (takich jak żarówka, Słońce, czy diody elektroluminescencyjne) przybliżenie liniowe jest zawsze dobrze spełnione, natomiast dysponując laserami o odpowiedniej mocy, możemy łatwo zaobserwować najprostsze ze zjawisk nieliniowych: generację drugiej harmonicznej światła. W zjawisku tym polaryzacja elektronowa jest proporcjonalna do kwadratu pola elektrycznego, zatem dla fali o natężeniu pola elektrycznego  $E(t) = E_0 \cos \omega t$ , oscylującej z częstością  $\omega$ , nieliniowa polaryzacja  $P_2(t)$  ma postać:

$$P_2(t) \propto E^2(t) = E_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{E_0^2}{2} (1 + \cos 2\omega t).$$

Polaryzacja zawiera więc składową oscylującą z częstością dwukrotnie większą niż częstość pobudzającej fali elektromagnetycznej, co z kolei oznacza, że drgające elektrony będą emitowały światło o częstości dwa razy większej niż światło padające na ośrodek. Zjawisko generacji drugiej harmonicznej ma zanedbywalnie małą wydajność w ośrodkach o symetrii środkowej. Oznacza to, że można je w praktyce zaobserwować tylko w ośrodkach anizotropowych lub właśnie na powierzchniach, gdzie symetria środkowa cieczy lub amorficznego ciała stałego jest złamana.



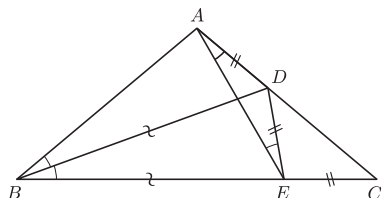
Rys. 2. Generacja drugiej harmonicznej światła na powierzchni.

By wykorzystać tę własność generacji drugiej harmonicznej do uzyskania informacji o cząsteczkach na powierzchni, oświetla się badaną powierzchnię wiązką światła o dużym natężeniu (zazwyczaj są to impulsy światła laserowego) i rejestruje się wygenerowane na niej światło o podwojonej częstości (rys. 2). Można mieć wówczas pewność, że wszystkie zarejestrowane fotony drugiej harmonicznej pochodzą z obszaru, gdzie symetria ośrodka została złamana, czyli z powierzchni. W ten sposób można otrzymać pewne informacje o powierzchni np. woda/olej, jednak informacje te będą bardzo ubogie. By dowiedzieć się o właściwościach fizykochemicznych powierzchni cieczy czegoś więcej, rozpuszcza się w jednej z cieczy cząsteczki barwnika organicznego, którego przejścia elektronowe odpowiadają energii fotonów padających lub fotonów drugiej harmonicznej. Część cząsteczek rozpuszczonego barwnika ulega adsorpcji na powierzchni. W takiej sytuacji, dzięki rezonansowi pomiędzy energią fotonów a energią przejść optycznych w barwniku, wydajność generacji drugiej harmonicznej wzrasta nawet o kilka rzędów wielkości. Nie tylko ułatwia to przeprowadzenie doświadczenia (bo łatwiej jest zarejestrować zwiększone natężenie światła), ale przede wszystkim pozwala przyjąć, że prawie cała druga harmoniczna została wygenerowana w wyniku oddziaływania światła padającego z cząsteczkami barwnika.



### Rozwiązanie zadania M 1378.

Wybermy na boku  $BC$  taki punkt  $E$ , że  $BE = BD$ .



Wtedy  $\sphericalangle BDE = 80^\circ$ , a skoro  $\sphericalangle BDA = 60^\circ$ , to

$$\sphericalangle ABE + \sphericalangle EDA = 180^\circ,$$

więc na czworokącie  $BEDA$  można opisać okrąg. Wobec tego

$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle DBA = \sphericalangle DBE = \sphericalangle DAE,$$

skąd  $DA = ED$ . Z drugiej strony,

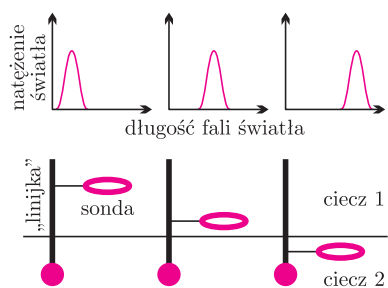
$$\begin{aligned} \sphericalangle EDC &= 180^\circ - \sphericalangle EDA = \\ &= 180^\circ - (80^\circ + 60^\circ) = \\ &= 40^\circ = \sphericalangle ECD, \end{aligned}$$

więc również  $ED = EC$ . Zatem

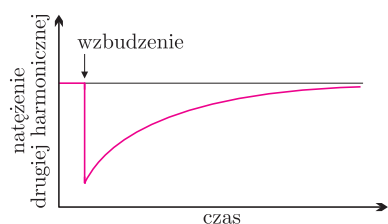
$$BD + DA = BE + ED = BE + EC = BC.$$

Aby poznać właściwości powierzchni, należy więc tylko odpowiednio dobrać rozpuszczony w cieczy barwnik. Może to być, na przykład, cząsteczka, której widmo absorpcji zależy od polarności rozpuszczalnika. Wówczas, rejestrując natężenie drugiej harmonicznej w zależności od długości fali światła padającego, możemy zobaczyć, jak widmo to wygląda na powierzchni, a co za tym idzie, jaka jest polarność ośrodka w okolicy granicy faz. Dobierając z kolei barwnik w taki sposób, by jego widmo absorpcji zależało od siły wiązań wodorowych z cząsteczkami rozpuszczalnika, można dowiedzieć się, jaka jest zdolność ośrodka do tworzenia tego typu wiązań w okolicy powierzchni.

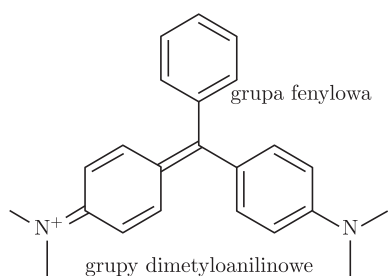
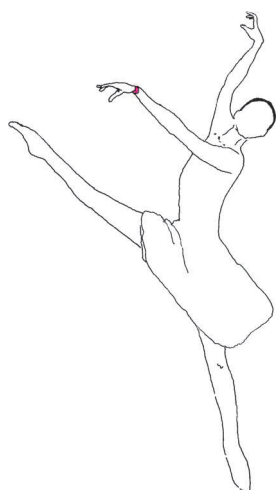
Takie doświadczenia z cząsteczkami sondującymi interesujące nas właściwości powierzchni mają bardziej wyrafinowane wersje, wykorzystujące jednocześnie metody fizyki i chemii. Potrzebne są wtedy dwa rodzaje cząsteczek – pełniące funkcje „linijki” i sondy właściwej. „Linijka” to cząsteczka o wydłużonym kształcie, która dzięki swojej strukturze silnie zakotwicza się na powierzchni i przyjmuje określone położenie. Dla powierzchni typu woda-olej taką linijką może być cząsteczka typowego środka powierzchniowo czynnego, mająca z jednej strony silnie polarną, z drugiej zaś niepolarną grupę. Taka cząsteczka będzie się zawsze lokować na powierzchni tak, by grupa polarna znajdowała się w wodzie, a niepolarna w oleju. Następnie musimy, za pomocą metod syntezy chemicznej, przygotować szereg związków, w których cząsteczka-sonda będzie przyłączona do cząsteczki-linijki w różnych pozycjach. Jeśli własność ośrodka, od której



Rys. 3. Zastosowanie „molekularnej linijki” do badania własności powierzchni rozdzielającej dwie ciecz. Zależność natężenia światła drugiej harmonicznej od długości fali zmienia się wraz z odległością cząsteczki-sondy od granicy faz.



Rys. 4. Zależność natężenia drugiej harmonicznej od czasu po optycznym wzbudzeniu cząsteczki-sondy.



Rys. 5. Cząsteczka zieleni malachitowej

zależy widmo sondy, zmienia się wraz z odległością od granicy ośrodków, to dla różnych związków tego typu zarejestrujemy różne zależności natężenia światła drugiej harmonicznej od długości fali wzbudzającej. Znając strukturę układów linijka-sonda, można dosyć precyzyjnie wyznaczyć przebieg zmienności badanej własności (np. zdolności do tworzenia wiązań wodorowych) w pobliżu powierzchni (rys. 3).

Często jednak nie wystarczy nam sama informacja o stacjonarnych własnościach fizykochemicznych powierzchni. Metodę generacji drugiej harmonicznej na powierzchniach można łatwo wzbogacić tak, by dostarczała informacji o dynamice procesów zachodzących na granicy faz. Ponieważ światło padające na powierzchnię ma postać impulsów, wystarczy każdy taki impuls (próbujący) poprzedzić impulsem zaburzającym stacjonarny stan cząsteczek na powierzchni (pompującym). Najłatwiej osiągnąć to, dobierając tak długość fali impulsu pompującego, by wzbudzał on cząsteczki-sondy do wyższego stanu elektronowego. Ponieważ w stanie podstawowym cząsteczki te są w rezonansie z impulsami próbującymi, to przeniesienie ich do innego stanu zazwyczaj ten rezonans niszczy. Jeśli więc impuls wzbudzący pojawi się tuż przed impulsem sondującym, to zaobserwujemy spadek natężenia drugiej harmonicznej. Zwiększając opóźnienie pomiędzy impulsami, zaobserwujemy powrót układu do stanu podstawowego, odzwierciedlony przez stopniowy wzrost natężenia rejestrowanego światła aż do wartości początkowej (rys. 4). Możemy więc bezpośrednio zmierzyć czas życia stanu wzbudzonego cząsteczki-sondy. Pozwala to zbadać, w jaki sposób zmieniają się procesy prowadzące do dezaktywacji cząsteczki po umieszczeniu jej na powierzchni, nawet jeśli nie wiemy jeszcze wiele o samej powierzchni.

Potencjalnym zastosowaniem tej metody jest badanie zachowania związków stosowanych w terapii fotodynamicznej nowotworów. Terapia ta polega na podaniu pacjentowi związku chemicznego, zwanego fotocuczulaczem, który jest neutralny dla organizmu w ciemności, ale po wzbudzeniu optycznym przekazuje swoją energię otaczającym cząsteczkom, prowadząc do wytworzenia wolnych rodników lub cząsteczek tlenu w stanie wzbudzone. Te z kolei, dzięki swojej bardzo wysokiej reaktywności, niszczą otaczające je komórki. Metoda ta jest podwójnie selektywna na poziomie makroskopowym. Po pierwsze, komórki nowotworowe mają szybszy metabolizm niż zdrowe i wobec tego akumulują więcej fotocuczulacza. Po drugie, za pomocą technik światłowodowych można precyzyjnie skierować światło w obszar zmieniony chorobowo. Okazuje się jednak, że czas życia fotocuczulacza w stanie wzbudzone, a co za tym idzie, jego zdolność do aktywacji innych cząsteczek może być zupełnie różna w roztworze wodnym i w złożonym środowisku komórki. Cząsteczka eozyny B, taniego obecnie i popularnego czerwonego barwnika, zastosowanego jako pierwszy w historii fotocuczulacz (w 1905 r.), ma bardzo krótki czas życia stanu wzbudzonego w roztworze wodnym i setki razy dłuższy na powierzchni imitującej środowisko błony komórkowej. Sugeruje to, że eozyna B nie byłaby dobrym fotocuczulaczem w roztworze, ale może mieć korzystne z punktu widzenia terapii własności po zaadsorbowaniu w komórkach. Choć obecnie w terapii fotodynamicznej używa się zupełnie innych cząsteczek, to możliwość badania ich dynamiki w środowisku modelującym środowisko organizmów żywych może okazać się bezcenna z punktu widzenia optymalizacji własności terapeutycznych nowych fotocuczulaczy.

Możliwe jest też podejście odwrotne – umieszczamy w badanym układzie cząsteczkę o dobrze znanej zależności dynamiki stanu wzbudzonego od własności otoczenia i na podstawie czasowej zależności natężenia drugiej harmonicznej określamy własności powierzchni. Przykładem mogą być tutaj badania mikroskopowej lepkości powierzchni woda-olej poprzez pomiar czasu życia stanu wzbudzonego cząsteczki zieleni malachitowej (rys. 5). W czasie dezaktywacji tej cząsteczki obrotowi ulegają zarówno dwie grupy dimetyloanilinowe (polarne, a więc zanurzone w wodzie), jak i grupa fenylowa (niepolarna, lokująca się w oleju). Ponieważ obrót tych grup wymaga reorganizacji otaczających je cząsteczek rozpuszczalnika, cząsteczka zieleni malachitowej jest sondą mikroskopowej lepkości ośrodka. Tego rodzaju sondę należy wcześniej „skalibrować” przez



miar czasu życia jej stanu wzbudzonego w roztworach o znanej lepkości. Następnie, mierząc kinetykę sygnału drugiej harmonicznej na powierzchni po wzbudzeniu optycznym, można powiązać opór stawiany obrotowi pierścieni na powierzchni z oporem odczuwanym przez cząsteczkę w roztworze. Tego typu doświadczenia pozwoliły także lepiej zrozumieć sam mechanizm dezaktywacji zieleni malachitowej – okazało się, że dopóki lepkość warstwy oleju nie jest zbyt duża, czas życia stanu wzbudzonego na powierzchni w ogóle od tej lepkości nie zależy. Wtedy to obrót większych grup dimetyloanilinowych w wodzie decyduje o szybkości dezaktywacji, a mała grupa fenylova, odczuwająca niewielki opór, swobodnie za nimi podąża (obrotowi niepolarniej grupy fenylowej nie musi towarzyszyć reorganizacja dipolowa rozpuszczalnika, co tym samym ułatwia jej obrót w porównaniu z obrotem grup dimetyloanilinowych). Jednak gdy lepkość warstwy olejowej jest bardzo duża, „wąskim gardłem” dezaktywacji staje się właśnie obrót grupy fenylowej i szybkość procesu zależy od lepkości warstwy niepolarniej. W ten sposób czasowo-rozdzielcza generacja drugiej harmonicznej pozwala jednocześnie uzyskać informacje o własnościach powierzchni i zrozumieć mechanizmy procesów zachodzących w zaadsorbowanych cząsteczkach.

Generacja drugiej harmonicznej na powierzchniach jest najprostszą z wielu metod optyki nieliniowej stosowanych do badania powierzchni. Bardziej złożone techniki wykorzystują, na przykład, mieszanie częstości z zakresu widzialnego i podczerwonego w celu uzyskania informacji o przejściach oscylacyjnych zachodzących w cząsteczkach na powierzchni, co z kolei pozwala dowiedzieć się czegoś o sile i rodzaju wiązań w tych cząsteczkach. Dziedzina optyki nieliniowej na powierzchniach jest wciąż relatywnie młoda i można się spodziewać zarówno rozwoju technik doświadczalnych, jak i nowych zastosowań metod już znanych.

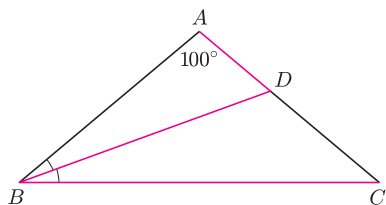


## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

**M 1378.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$  kąt przy wierzchołku  $A$  ma miarę  $100^\circ$ . Dwusieczna kąta przy wierzchołku  $B$  przecina bok  $AC$  w punkcie  $D$ . Udowodnić, że  $BD + DA = BC$ .

Rozwiązanie na str. 2



**M 1379.** Niech funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ograniczona z góry, tzn. istnieje taka liczba  $M$ , że  $f(x) \leq M$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ . Udowodnić, że jeśli dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x, y$  spełniona jest nierówność

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

to  $f$  jest funkcją stałą.

W szczególności, funkcje wypukłe nie są ograniczone z góry, chyba że są stałe.  
Rozwiązanie na str. 13

**M 1380.** Dana jest liczba nieparzysta  $n$  i liczby całkowite dodatnie względnie pierwsze  $a$  i  $b$ . Udowodnić, że liczba  $a^n + b^n$  jest podzielna przez  $(a+b)^2$  wtedy i tylko wtedy, gdy liczba  $n$  jest podzielna przez  $a+b$ .

Rozwiązanie na str. 12

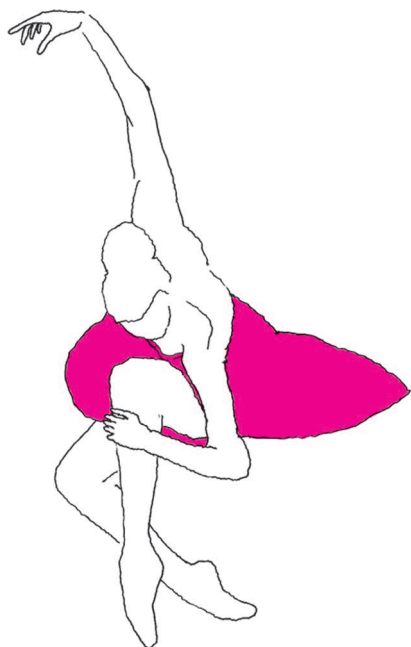
Redaguje Krzysztof TURZYŃSKI

**F 827.** Sferyczna, elementarna krowa o promieniu  $R$  lewituje w nieskończonym niebieskim pastwisku o temperaturze  $T$ . Krowy są dobrymi przewodnikami elektryczności. Oszacować wielkość ładunku zgromadzonego na krowie.

Rozwiązanie na str. 23

**F 828.** Prawo Coulomba można pisać nie w postaci  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$ , jak w układzie SI, tylko jako  $F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$ , jak robią to np. naukowcy anglosascy w układach jednostek CGSE i Gaussa. Oznacza to, że przejście od układu SI do jednego z tych dwóch układów wymaga, w szczególności, zamiany każdego czynnika  $4\pi\epsilon_0$  na jedynekę. Jak dokonać transformacji odwrotnej? Ile wynosi ładunek elementarny w tych układach?

Rozwiązanie na str. 21





## Gdy krzywa niejedno ma imię, to peh, czyli o stożkowych w ujęciu sferycznym

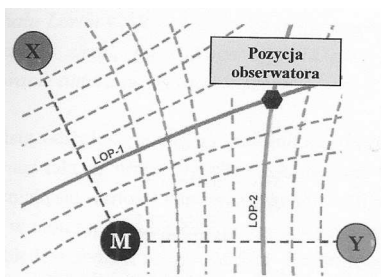
Piotr KOPACZ\*

W podróży bardzo istotną rolę odgrywa mapa, na której określa się i zaznacza aktualną pozycję, rozmaite odległości (np. odległość przebyta, do mijanych obiektów, pozostała do celu podróży) oraz kąty (np. kursy, namiary).

Współcześnie na papierowych mapach nawigacyjnych nadal niejednokrotnie wykonuje się różne konstrukcje geometryczne i w części odbywa się to w sposób klasyczny, tzn. za pomocą cyrkla i linijki.

W XX wieku na licznych morskich i lotniczych mapach nawigacyjnych można było znaleźć dodatkowo naniesioną siatkę linii hiperbolicznych związanych z wykorzystaniem w celu pozycjonowania naziemnych systemów radionawigacyjnych, jak np. Decca, Omega, Chayka, Loran. Ten ostatni nadal funkcjonuje na Dalekim Wschodzie na akwenach Pacyfiku, a transmisja jego stacji nadawczych, znajdujących się w Ameryce Północnej, została zakończona całkiem niedawno, tj. w sierpniu 2010 roku.

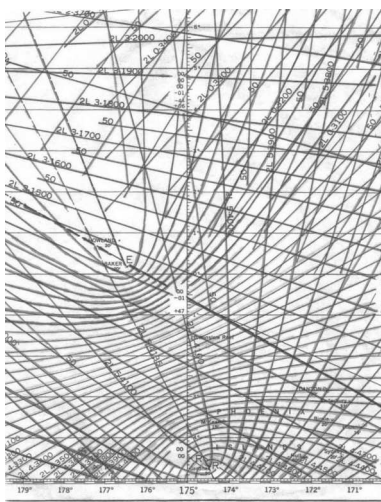
Zasada działania systemu hiperbolicznego opiera się na pomiarze różnic czasu lub faz odbieranych sygnałów z par stacji nadawczych. Przy ustalonej prędkości propagacji różnicę czasu możemy zamienić na różnicę odległości. Ponieważ hiperbola składa się z punktów, których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch ustalonych punktów (ognisk) jest stała, więc miejsca, w których jest ustalona stała różnica czasu między dwoma sygnałami, mogą być przedstawione graficznie jako linia pozycyjna w kształcie hiperboli.



Rys. 1. Zasada określenia pozycji w oparciu o hiperboliczne linie pozycyjne (gdzie M, X, Y – stacje nadawcze; LOP – linia pozycyjna, ang. *line of position*).

Oczywiście, odbiór sygnałów od dwóch nadajników nie może posłużyć do jednoznacznego określenia pozycji obserwatora, a jedynie jednej linii pozycyjnej – hiperboli, na której pozycja obserwatora się znajduje. Odbiornik systemu powinien więc odbierać i obliczać także różnice czasu pomiędzy drugą parą stacji nadawczych. Pozwala to na określenie pozycji obserwatora w punkcie przecięcia dwóch hiperbol wykreślonych na mapie, co poglądowo przedstawiono na rysunku 1.

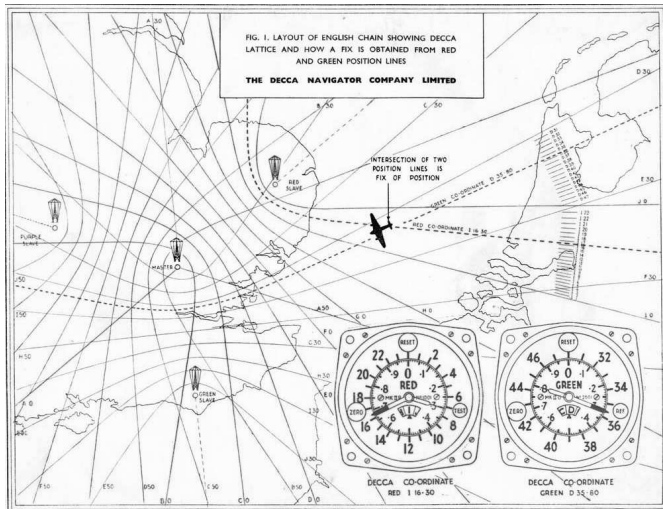
Jedna para stacji generuje rodzinę hiperbol o tych samych ogniskach – właśnie w ogniskach znajdują się pozycje stacji nadawczych. W praktyce jedna ze stacji pierwszej pary może być wykorzystywana zarazem jako stacja w drugiej parze, zatem niezbędne są co najmniej trzy stacje. Najczęściej wykorzystuje się jednak zsynchronizowane sygnały nadawane z czterech stacji, co pozwala w danej chwili wyznaczyć trzy linie pozycyjne. Stacje naziemne pracują w grupach (tzw. łańcuchach) trzech lub czterech stacji. W danym łańcuchu jedna ze stacji pełni rolę nadrzędną i nazywana jest stacją główną (ang. *master*, na rysunku M), a pozostałe określa się jako podrzędne. Linia pozycyjna jest wyznaczana na podstawie sygnałów ze stacji głównej i podrzędnej. Stacje te oddalone są o 1100–1500 km. Wyznaczenie punktu przecięcia dwóch hiperbolicznych linii pozycyjnych na mapie z naniesioną siatką hiperbol (rys. 2 i 3), generowanych przez łańcuchy systemu, pozwala w efekcie na wyznaczenie współrzędnych geograficznych pozycji obserwatora.



Rys. 2. Siatki hiperbolicznych linii pozycyjnych na nawigacyjnej mapie morskiej.

W późniejszej fazie rozwoju systemu wykorzystano odbiorniki śledzące w sposób ciągły sygnał układu i automatycznie przekształcające odbierane sygnały na współrzędne geograficzne pozycji obserwatora (statku, samolotu), czas, prędkość, a także dobierające automatycznie i optymalnie łańcuchy stacji w celu poprawy jakości określania pozycji, np. dokładności, ciągłości. Bezwzględna dokładność systemu Loran-C wynosiła 0,10–0,25 mil morskich (około 185–463 m).

\* Wydział Nawigacyjny,  
Akademia Morska w Gdyni



Rys. 3. Siatki hiperbolicznych linii pozycyjnych na nawigacyjnej mapie lotniczej.

Unowocześniona wersja systemu, występująca pod nazwą eLoran (ang. *enhanced Loran*), charakteryzuje się zwiększoną dokładnością określania pozycji (wynoszącą około 10 m), co jest wynikiem ulepszenia odbiornika oraz charakterystyki transmisji. Stacje systemu eLoran zostały także wykorzystane do transmisji dodatkowych sygnałów, w szczególności poprawek DGPS (ang. *Differential Global Positioning System*) w celu poprawy dokładności i wskazań urządzeń różnicowej odmiany satelitarnego systemu GPS.

W zastosowaniach morskich systemy hiperboliczne wykorzystywano w żegludze przybrzeżnej, jak również w nawigacji dalekiego zasięgu (nazwa systemu Loran pochodzi od ang. *LOng RAnge Navigation*) przy odległościach statku rzędu kilkuset mil morskich od stacji nadawczych.

Zauważmy, iż do tej pory zakładaliśmy bezzasadnie, że mamy do czynienia ze zwyczajnymi, to jest płaskimi hiperbolami, że wszystko dzieje się na płaszczyźnie. Jednak przy wspomnianym wyżej rzędzie wielkości w celu uzyskania pomiarów o większej dokładności należy uwzględnić krzywiznę Ziemi. Na przykład, aproksymując sferyczny trójkąt równoboczny o długości boku 400 km przez trójkąt płaski, popełniamy błąd około 232 km<sup>2</sup>. Namiar radionawigacyjny globalnie nie może być rozważany jako euklidesowa linia prosta na płaszczyźnie, ale jako linia geodezyjna powierzchni, na której *de facto* się znajduje. Jeżeli używamy w modelowaniu globalnym sfery, to linia taka jest łukiem okręgu wielkiego.

Spróbujmy zatem zastanowić się nad własnościami krzywych stożkowych, w szczególności hiperbol, na sferze wykorzystywanej w uproszczonym modelowaniu powierzchni Ziemi.

Krzywe stożkowe (okrąg, elipsa, hiperbola, parabola) na płaszczyźnie są dobrze znane i możemy ich obecność zaobserwować w licznych zastosowaniach, np. w fizyce. Ich definicji możemy formalnie użyć w innych strukturach geometrycznych, np. na zakrzywionych powierzchniach, i tam spróbować znaleźć ich odpowiedniki. Na początek spróbujmy przyjrzeć się własnościom elipsy i hiperboli na powierzchni kuli  $S^2$ . A więc szukamy linii, których punkty są określone przez warunek stałości sumy odległości od ognisk (w przypadku elipsy) bądź modułu różnicy odległości od ognisk (w przypadku hiperboli).

Niech ogniskami będą dwa punkty jednostkowej sfery,  $F_1$  i  $F_2$ , których sferyczna (czyli mierzona po powierzchni kuli) odległość  $\rho(F_1, F_2) = 2c$  spełnia warunek  $0 < 2c < \pi$  – pierwsze ograniczenie po to, by były różne, drugi – by nie były antypodyczne. Przyjrzyjmy się leżącej na sferze figurze, której punkty spełniają, dla pewnego dodatniego  $a$ , warunek wynikający z nierówności trójkąta

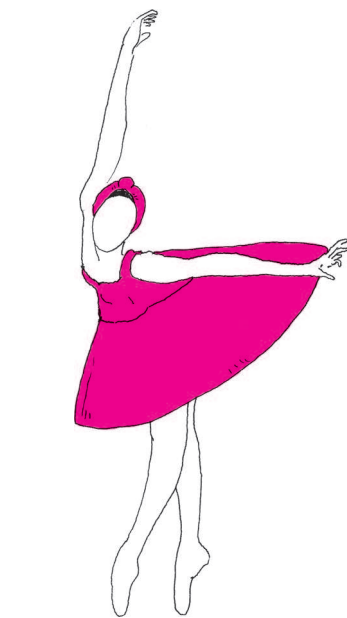
$$(*) \quad \{P : \rho(P, F_1) + \rho(P, F_2) = 2a\},$$

który na płaszczyźnie, przy  $c < a$ , określałby elipsę. Na sferze należy ten warunek wzmocnić do  $c < a < \pi - c$ , gdyż na sferze odległości nie przekraczają  $\pi$ . Figurę tę przedstawia rysunek 4.

Na tym rysunku są zaznaczone także punkty  $F'_1$  i  $F'_2$ , antypodyczne do  $F_1$  i  $F_2$ . Oczywiście, dla dowolnego punktu  $X$  mamy  $\rho(X, F'_i) = \pi - \rho(X, F_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Zatem figurę opisaną przez (\*) można opisać również jako

$$\{P : |\rho(P, F_1) - \rho(P, F'_2)| = 2a - \pi\}.$$

W ten sposób sferyczna elipsa okazała się również sferyczną hiperbolą, tyle że o innych ogniskach.



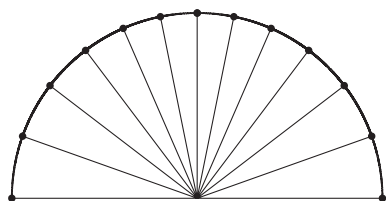
Rys. 4



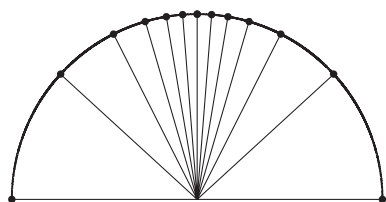


# Zegar słoneczny, równania różniczkowe i ładne obrazki

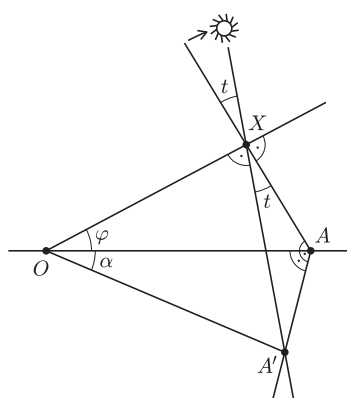
Franciszek ADAMASZEK, Michał ADAMASZEK



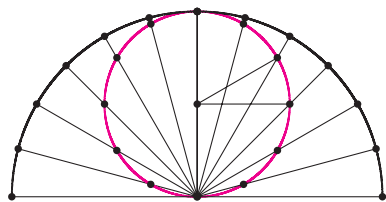
Rys. 1. Tarcza płaskiego zegara w Kętach ( $\varphi = 49^\circ 53'$ ). Podziałka co godzinę.



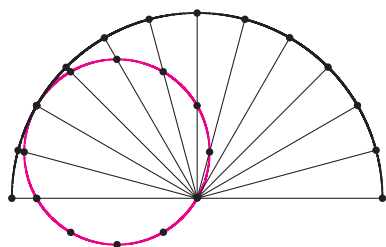
Rys. 2. Tarcza płaskiego zegara w Hyderabadzie ( $\varphi = 17^\circ 37'$ ).



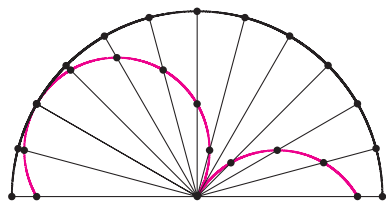
Rys. 3. Zmiana kąta w zegarze płaskim po obrocie Słońca o kąt  $t$ .



Rys. 4. Inna tarcza zegara na biegunie.



Rys. 5. Kolejna tarcza na biegunie...



Rys. 6. ... i jej poprawiona wersja.

Nie od dziś wiadomo, jak zbudować najprostszy zegar słoneczny. Słońce, w swym pozornym ruchu po niebie, porusza się ze stałą prędkością kątową w płaszczyźnie prostopadłej do osi wskazującej północny biegun niebieski. Aby zagwarantować niezależność odczytów od wysokości Słońca nad horyzontem (czyli od pory roku), należy wycelować wskazówkę zegara (gnomon) w Gwiazdę Polarną, czyli pod kątem odpowiadającym lokalnej szerokości geograficznej  $\varphi$ . Jeżeli dodatkowo tarczę zegara umieścimy prostopadle do wskazówki, to cień wskazówki będzie obracał się jednostajnie i kolejne godziny możemy zaznaczać co 15° (oczywiście, mówimy tu o pomiarze lokalnego czasu słonecznego). Więcej w *Delcie* 8/2010.

Jeżeli chcemy, aby cień rzucany był po prostu na powierzchnię Ziemi (zegar horyzontalny), to równomierna podziałka działa tylko na biegunie. O ile w naszych szerokościach geograficznych, dajmy na to w Kętach ( $\varphi = 49^\circ 53'$ ), tarcza zegara płaskiego nie wygląda źle (rys. 1), o tyle w Hyderabadzie ( $\varphi = 17^\circ 37'$ ) zagęszczenie wokół południa jest już spore (rys. 2). Pogarsza to czytelność zegara w tych godzinach i może prowadzić do nadmiernego rozwleczenia pory lunchu, ze szkodą dla gospodarki.

Łatwo sprawdzić, dlaczego tak jest. Ustalmy dla uproszczenia rachunków, że lokalne południe wypada w chwili  $t = 0$ , a lokalna godzina 18:00 w chwili  $t = \frac{\pi}{2}$  (to znaczy mierzymy czas prędkością kątową Słońca). Z rysunku 3 widzimy, że przesunięciu Słońca po niebie o kąt  $t$  odpowiada obrót cienia o kąt  $\alpha(t)$ , przy czym

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{AA'}{OA} = \frac{XA}{OA} \cdot \frac{AA'}{XA} = \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} t.$$

Jeśli więc  $\varphi = 90^\circ$  (biegun północny), to  $\alpha(t) = t$ , czyli cień obraca się jednostajnie i w zegarze poziomym można użyć równomiernej podziałki. Gdy kąt  $\varphi$  maleje, spada także  $\sin \varphi$ , a przez to kąt  $\alpha(t)$  zmienia się niejednostajnie wraz z  $t$ .

Ten efekt (lub defekt) można rekompensować, manipulując kształtem tarczy. Umówmy się, że godzinę odczytujemy na przecięciu cienia z krzywą wyznaczającą brzeg zegara. Najbardziej wymagający esteta (na przykład jeden z autorów tego tekstu) mógłby chcieć, aby pomiędzy każdymi dwiema chwilami  $t_1 < t_2$  kraniec cienia pokonywał fragment tej krzywej o długości proporcjonalnej do  $t_2 - t_1$ . Powinno to pomóc rozładować lokalne „zagęszczenia”. Skoro pokonywana droga ma być proporcjonalna do czasu, to punkt odczytu musi przemieszczać się ze stałą prędkością. Wkraczamy tu w obszar geometrii różniczkowej krzywych. Jeżeli punkt przemieszcza się po płaszczyźnie tak, że w chwili  $t$  znajduje się w punkcie  $(x(t), y(t))$ , to jego prędkość w chwili  $t$  ma wartość

$$v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2},$$

co wynika z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do prędkości w kierunkach  $OX$  (u nas zachód-wschód) i  $OY$  (południe-północ). Wiemy już, że w chwili  $t$  obwódka każdego zegara musi przechodzić przez punkt odchylony od osi  $OY$  o kąt  $\alpha(t)$ , w takim razie jest opisana parametryzacją

$$t \mapsto (r(t) \sin \alpha(t), r(t) \cos \alpha(t)).$$

Warunek stałej prędkości przyjmuje postać

$$(r(t) \sin \alpha(t))'^2 + (r(t) \cos \alpha(t))'^2 = \operatorname{const}.$$

Zakładając, bez straty ogólności, że  $\operatorname{const} = 1$ , dochodzimy do równania

$$r'(t)^2 + r(t)^2 \alpha'(t)^2 = 1.$$

Czytelnicy zaznajomieni z zasadami różniczkowania funkcji trygonometrycznych mogą wyprowadzić z równania (1) wzór na  $\alpha'(t)$ , za pomocą którego dostaniemy ostatecznie równanie różniczkowe na promień  $r(t)$ :

$$(2) \quad r'(t)^2 + \frac{r(t)^2}{(\cos^2 t + \sin^2 \varphi \sin^2 t)^2} = 1.$$

Zanim wrócimy do Kęt i Hyderabadu, zatrzymajmy się nad tym równaniem na biegunie. Wtedy  $\varphi = 90^\circ$  i szukamy funkcji  $r(t)$ , dla której

$$r'(t)^2 + r(t)^2 = 1.$$

Taką własność ma niewątpliwie funkcja stała  $r(t) = 1$ , co daje omawiany już zegar biegunowy o tarczy w kształcie okręgu. Nie jest to jednak jedyna możliwość! Możemy, na przykład, wziąć  $r(t) = \cos t$ , otrzymując krzywą  $t \mapsto (\cos t \sin t, \cos^2 t)$ . Jest ona przedstawiona na rysunku 4 wraz z punktami, w których wypadal będzie cień w kolejnych pełnych godzinach. Jest to w istocie okrąg o środku  $S = (0, \frac{1}{2})$  (proszę sprawdzić!). Co więcej, mogliśmy dokonać tego odkrycia, używając elementarnej geometrii (choć jeden z autorów tego tekstu nigdy by się o to nie podejrzewał). Wyjaśnienie znajduje się także na rysunku 4: skoro kąt wpisany zmienia się ze stałą prędkością, to także kąt środkowy zmienia się ze stałą, dwa razy większą prędkością, a więc punkt odczytu czasu obiega  $S$  jednostajnie. Możemy też wziąć dowolną kombinację

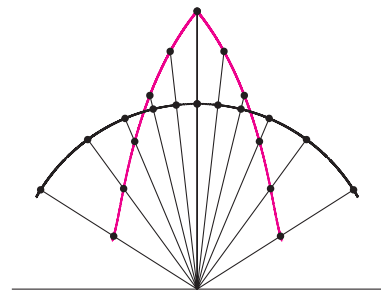
$$(3) \quad r(t) = a \cos t + b \sin t, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Krzywe opisane tego typu promieniem to okręgi przechodzące przez punkt  $(0, 0)$ , jak na rysunku 5. Praktyczna przydatność takiego zegara stoi pod znakiem zapytania, bo niektóre godziny wskazuje nie sam cień, a raczej jego niewidoczne przedłużenie w przeciwną stronę od początku układu. Można temu zaradzić, biorąc symetryczne odbicie odpowiedniego fragmentu, co daje krzywą o stałej prędkości, ale nie wszędzie gładką (rys. 6). Może jednak na biegun lepiej zabrać bardziej nowoczesny czasomierz.

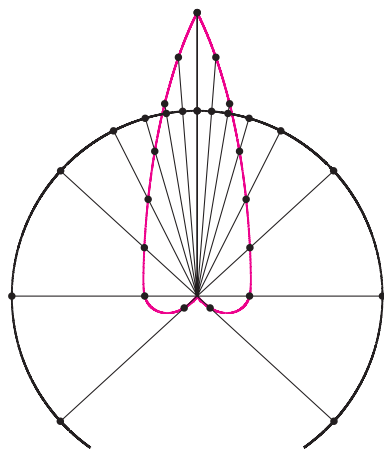
To już wszystkie rozwiązania równania (2). Niekompletny szkic dowodu, którego szczegóły zainteresowany Czytelnik może uzupełnić we własnym zakresie, jest następujący: skoro  $r'(t)^2 + r(t)^2 = 1$  to, różniczkując, dostajemy  $2r''(t)r'(t) + 2r'(t)r(t) = 0$ , a więc  $r'(t)(r''(t) + r(t)) = 0$ . W takim razie albo  $r'(t) = 0$  i  $r(t)$  jest stałą, albo  $r''(t) = -r(t)$ , a wtedy  $r(t)$  musi być postaci (3).

Wróćmy do szerokości geograficznych o nieco cieplejszym klimacie. Dla dowolnego  $\varphi$  równanie (2) jest bardziej skomplikowane i autorzy nie znają żadnego jawnego wzoru na jego rozwiązanie  $r(t)$  (może ktoś z Czytelników?). Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, aby znaleźć rozwiązanie numerycznie lub przybliżyć je eksperymentalnie, na przykład łamaną o stałej odległości między każdymi dwiema pełnymi godzinami. Możemy manipulować początkową wartością promienia  $r(0)$ . Gdy zaczniemy zbyt daleko od początku układu, rozwiązanie może istnieć tylko przez pewien czas, a potem krzywa nie będzie miała wystarczającego zapasu prędkości, aby nadażyć za coraz szybciej uciekającym cieniem (rys. 7). Poniżej pewnej krytycznej wartości rozwiązanie równania istnieje bardzo długo, aż do godzin nocnych, gdy Słońca już dawno nie widać. Mamy też swobodę w łączeniu kilku gładkich fragmentów, jak w przykładzie na biegunie. Kilka ładnych zegarów o stałej prędkości cienia po brzegu tarczy przedstawionych jest na rysunkach 8–10.

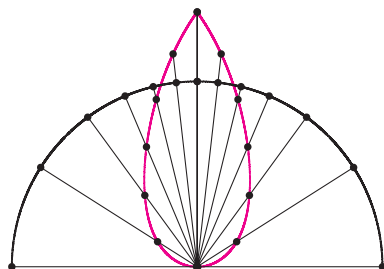
Jedne z bardziej efektownych zegarów słonecznych znajdują się na budynkach, a więc na pionowych ścianach, i to niekoniecznie zwróconych na południe. Zainteresowanym Czytelnikom polecamy przeniesienie naszej konstrukcji np. na ścianę swojego domu.



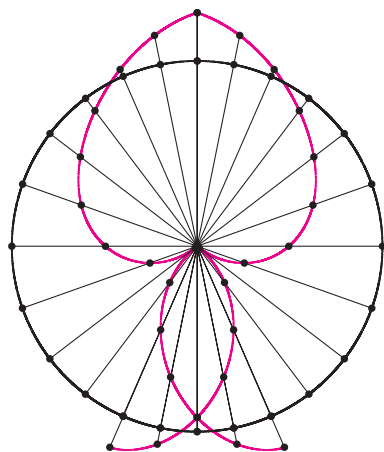
Rys. 7. Utrzymując stałą prędkość, nie uda się „dociągnąć” do godziny szóstej.



Rys. 8. Przykład zegara w Hyderabadzie...



Rys. 9. ... w Luksorze...



Rys. 10. ... i w Kętach.

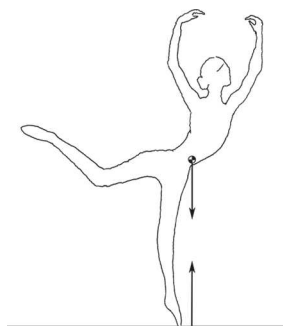


# mała delta

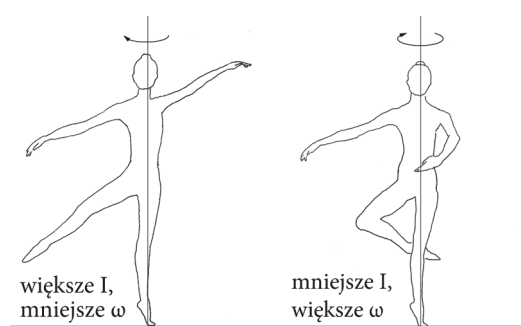
## Fizyka tańca

Co fizycy robią „po godzinach”? Różnorodność odpowiedzi na to pytanie jest pewnie taka jak w innych grupach zawodowych. Naukowcy mogą jednak mówić o swoich pasjach, używając języka „pracowego”. Tak właśnie powstał wykład poświęcony fizyce tańca, którym włączyłam się w cykl imprez Festiwalu Nauki i którego kilka urywków chciałabym Czytelnikom *Delty* przedstawić.

Ciało tancerza to obiekt fizyczny jak każdy inny, ma więc masę, bezwładność, i tak samo jak na zsuwający się po równi pochyłej klocek działa na nie siła grawitacji przyłożona w środku ciężkości i skierowana pionowo do dołu oraz siła reakcji podłoża. Aby tancerz nie przewrócił się, wykonując jakąś przepiękną pozę, siły te muszą się zrównoważyć, a punkt podparcia powinien znajdować się bezpośrednio pod środkiem ciężkości (rys. 1). Tego samego wymaga równowaga pary tancerzy: w tym przypadku trzeba uwzględnić również siły nacisku i reakcji partnerów na siebie. W tańcu lubimy jednak nie tylko piękne pozy finałowe, ale przede wszystkim ruch: skoki i obroty. Tu znowu działa prosta fizyka: aby wprawić się w obrót, należy zmienić swój moment pędu, korzystając z siły tarcia podczas odepchnięcia się od podłogi. Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że aby zwiększyć prędkość kątową i obracać się jeszcze szybciej, trzeba zmniejszyć swój moment bezwładności. Pomiedzy występami można się przyłożyć do odchudzania, ale jeśli jesteśmy właśnie w trakcie piruetu, pomaga przyciągnięcie rąk do ciała albo uniesienie nogi bliżej tułowia (rys. 2).



Rys. 1

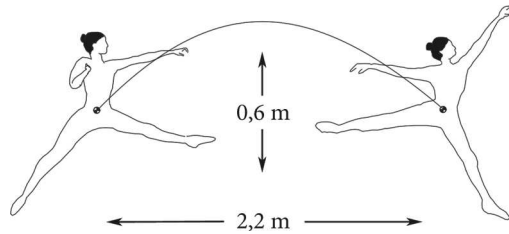


Rys. 2

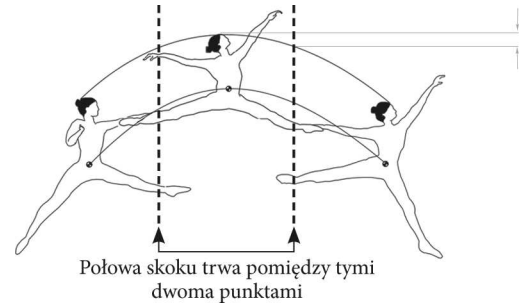
Wykonanie skoku wymaga pokonania siły grawitacji przez odepchnięcie się od podłogi. Podskoczyć będzie nam łatwiej, jeśli najpierw ugniemy kolana (pozycja *plié*), bo siła odpychająca będzie działała przez dłuższy czas. Sam czas trwania podskoku zależy tylko od jego wysokości. Okazuje się, że muzyka nie powinna grać zbyt wolno – aby utrzymać się w powietrzu o 10% dłużej, trzeba podskoczyć o około 20% wyżej, co nie każdy potrafi. Nie powinna jednak też grać zbyt szybko, bo nie zdążymy skoczyć na tyle wysoko, aby w powietrzu wyprostować stopy do pozycji *point* i nie będzie pięknie...

Oczywiście, skoki nie muszą być w miejscu. Taki Błękitny Ptak w „Śpiącej Królownie” Czajkowskiego potrafi przelecieć przez całą scenę, używając sprytnego triku. Podczas skoku w dal z rozłożonymi do szpagatu nogami ruch tancerza ma składową pionową i poziomą, a jego środek ciężkości porusza się po paraboli (rys. 3). Widz skupia jednak swój wzrok nie na tym nieszczęsnym środku, lecz na twarzy (głowie) tancerza. Jeśli ten w odpowiednim momencie odchyli głowę do tyłu i wyciągnie ramiona, to uzyska złudzenie,

jakby głowa płynęła poziomo w powietrzu, ponieważ jej wysokość przez połowę czasu trwania skoku zmienia się bardzo niewiele (rys. 4). Złudzenie to wykorzystuje podczas bardzo widowiskowej sekwencji skoków *grand jeté en tournant*, niesamowity Maksim Wojtiul, solista naszego Baletu Narodowego, który skacze, leci, płynie i wiruje po całej scenie niczym bajkowy Ptak.

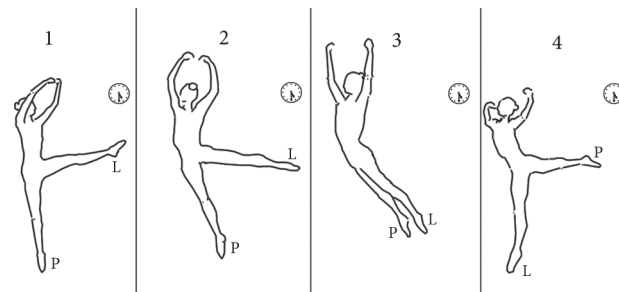


Rys. 3



Rys. 4

Sama zmiana sposobu obracania ciała jako całości wyłącznie w powietrzu nie jest możliwa – tancerz może zmienić kierunek ruchu jedynie podczas krótkich momentów kontaktu stóp z podłożem. W skoku *jeté* z obrotem o  $180^\circ$  lub  $360^\circ$  moment pędu przenoszony jest między częściami ciała tancerza dzięki temu, że w maksimum skoku ramiona zostają wyrzucone do góry, nogi zaś łączą się, przyspieszając obrót (rys. 5). Tancerz ląduje potem na drugiej nodze i szybko odpycha się od podłogi, aby wykonać kolejny obrót.



Rys. 5



Wszystkie te rozważania można uogólnić na ruch pary albo i większej grupy tancerzy. Trzeba pamiętać, że dochodzą wtedy oddziaływania wzajemne: partner może nam w tańcu ułatwić obrót, pomóc w utrzymaniu równowagi, podnieść – a więc ułatwić skok. Może też, niestety, przeszkadzać, jeśli nie dysponuje odpowiednią techniką albo po prostu nie zsynchronizuje swoich działań z naszymi. . . Tancerze na ogół nie rozrysowują swoich pozycji na papierze (ani w wyobraźni) za pomocą wektorów sił, pędów i przyspieszeń. Im wystarczy intuicja i talent – a jednak okazuje się, że doskonale wiedzą, co należy zrobić, aby w rządzonej przez fizykę świecie taniec udał się zgodnie z jej prawami.

Co jednak ma zrobić fizyk, jeśli chce tańczyć tak, by jego taniec był nie tylko sekwencją kroków i obrotów, ale miał „to coś”? Myślę, że warto po prostu uruchomić wyobraźnię i odwołać się do tego, co nas, nomen omen, kręci i pasjonuje, na przykład do zdobyczy fizyki XX wieku: teorii względności, kwantów, cząstek elementarnych. Kiedy (po godzinach!) tańczę tango argentyńskie, w którym bardzo charakterystyczne są zmiany tempa, spowolnienia i wstrzymania, a ta sama sekwencja kroków może trwać różną liczbę bitów w zależności od inwencji prowadzącego, to wydaje mi się, jakby czas płynął coraz wolniej. To zupełnie jak w silnym polu grawitacyjnym w pobliżu czarnej dziury, której fizykę badałam rano w pracy! Zajmuję się bowiem rentgenowskimi układami podwójnymi, w których czarne dziury tańczą sobie w parach ze zwykłymi gwiazdami. Obowiązuje tam przecież taka sama fizyka jak w tańcu: równowaga sił, zachowanie pędu, zachowanie momentu pędu (bo się kręcą, a jakże!) i ogólna teoria względności.

# Twierdzenie Chevalleya–Warninga i grafy $p$ -regularne

Jakub WITASZEK\*

Rozwiązywanie równań diofantycznych jest jednym z ważniejszych problemów klasycznej teorii liczb. Czytelnicy tego artykułu na pewno słyszeli o równaniu Pella  $x^2 - dy^2 = 0$  czy równaniu Fermata  $x^n + y^n = z^n$ . Znanie wszystkim Małe Twierdzenie Fermata mówi o rozwiązaniach  $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ , a teoria reszt kwadratowych o  $x^2 - d \equiv 0 \pmod{p}$ . Teoria liczb jest nie tylko piękną sztuką, ale także łączy się z innymi działami nauki, między innymi z kryptografią, topologią czy geometrią algebraiczną. W tym artykule chciałbym zaprezentować przykład zastosowania równań diofantycznych w teorii grafów.

Musimy zacząć od ustalenia kilku ważnych oznaczeń. Jak zwykle  $\mathbb{Z}$  to zbiór liczb całkowitych. Przez  $\mathbb{Z}_p$  oznaczamy będziemy zbiór wszystkich reszt z dzielenia przez  $p$ , a przez  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_m]$  zbiór wielomianów o zmiennych  $x_1, \dots, x_m$  i o współczynnikach całkowitych.

Mówimy, że  $n$ -tka liczb całkowitych  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  jest rozwiązaniem modulo  $p$  wielomianu  $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ , jeżeli  $f(a_1, \dots, a_n) \equiv 0 \pmod{p}$ . Na przykład, para  $(1, 4)$  jest rozwiązaniem modulo 5 wielomianu  $x^2 + 6y$ .

Rozwiązanie  $(a_1, \dots, a_n)$  modulo  $p$  nazywamy istotnym, jeśli jego współrzędne są liczbami z przedziału od 0 do  $p-1$  (czyli  $a_i \in \mathbb{Z}_p$  dla  $1 \leq i \leq n$ ). W powyższym przykładzie rozwiązanie  $(1, 4)$  jest istotne, zaś  $(1, 9)$  już nie. Z własności kongruencji wiemy, że jeżeli  $(a_1, \dots, a_n)$  jest rozwiązaniem, to  $(a_1 \bmod p, \dots, a_n \bmod p)$  jest rozwiązaniem istotnym. Ponadto, żeby znaleźć wszystkie rozwiązania modulo  $p$  danego równania, wystarczy znać rozwiązania istotne.

Stopniem jednomianu nazywamy sumę wykładników jego czynników, czyli, na przykład,  $xyz^2$  ma stopień 4. Stopniem wielomianu  $f$  (oznaczamy go  $\deg(f)$ ) nazywamy najwyższy spośród stopni jego jednomianów; wobec tego dla  $f(x, y, z) = xyz + 2zy^4 + 6xz^3$  mamy  $\deg(f) = 5$ .

Będziemy wykorzystywać następującą nieoczywistą zależność (której dowód Czytelnik Wnikliwy z pewnością spróbuje znaleźć sam):

$$(1) \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} x^i = 1^i + 2^i + 3^i + \dots + (p-1)^i \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{dla } 0 < i < p-1.$$

Teraz możemy już zaprezentować tytułowe twierdzenie.

**Twierdzenie Chevalleya–Warninga.** Niech  $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  będą niezerowymi wielomianami wielu zmiennych o sumie stopni mniejszej niż liczba wszystkich zmiennych, tzn.  $\deg(f_1) + \deg(f_2) + \dots + \deg(f_m) < n$ . Wtedy liczba ich wspólnych istotnych rozwiązań modulo  $p$  jest podzielna przez  $p$ .

Zanim zobaczymy dowód twierdzenia, warto przyjrzeć się kilku przykładom i wnioskom. Twierdzenie Chevalleya–Warninga jest ważnym narzędziem w badaniu rozwiązalności równań diofantycznych.

Rozpatrzmy, na przykład, równanie  $x^2 - 3y^2 + 7z \equiv 0 \pmod{p}$ . Jego stopień jest równy dwa, a są trzy zmienne. Zatem z powyższego twierdzenia liczba rozwiązań istotnych jest podzielna przez  $p$ . Ten wielomian ma trywialne rozwiązanie  $0^2 - 3 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 = 0$  i  $p > 1$ , więc musi istnieć także pewne rozwiązanie nietrywialne, tzn. takie, które ma przynajmniej jedną współrzędną niezerową. Na przykład, dla  $p = 2$  mamy następujące cztery rozwiązania istotne:  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$  i  $(0, 1, 1)$ .

Rozumując podobnie, udowodnimy teraz, że równanie  $a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  ma rozwiązanie. W tym celu przyjrzyjmy się równaniu  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \pmod{p}$ . Tak samo jak w poprzednim przykładzie możemy uzasadnić, że istnieje nietrywialne rozwiązanie  $(x_0, y_0, z_0)$  modulo  $p$ . Załóżmy bez straty ogólności, że  $z_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Wtedy  $p \mid (x_0 z_0^{-1})^2 + (y_0 z_0^{-1})^2 + 1$  (gdzie  $z_0^{-1}$  jest odwrotnością  $z_0$  modulo  $p$ ). A stąd wnioskujemy, że równanie  $a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  ma rozwiązanie.

Zwróćmy jeszcze uwagę na pewną delikatną kwestię mogącą wzbudzać niepokój. Weźmy, na przykład, równanie  $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ . Ma ono dokładnie jedno istotne rozwiązanie – trywialne. Liczba zmiennych jest równa stopniowi wielomianu, więc nie możemy stosować twierdzenia Chevalleya–Warninga. Ale  $x^2 + y^2 + 0 \cdot z \equiv 0 \pmod{3}$ , równoważne naszemu, ma już trzy zmienne i stopień równy 2. Czy zatem otrzymaliśmy sprzeczność w matematyce? Nie: zmieniła nam się liczba zmiennych i zbiór rozwiązań jest już trójelementowy:  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 2)$ .



## Rozwiązanie zadania M 1380.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= ((a+b) - b)^n + b^n = \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a+b)^k (-b)^{n-k} + \\ &\quad + (-b)^n + b^n = \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a+b)^k (-b)^{n-k}, \end{aligned}$$

ponieważ  $(-b)^n + b^n = 0$  dla nieparzystych  $n$ . Zatem  $a^n + b^n$  przy dzieleniu przez  $(a+b)^2$  daje taką samą resztę jak składnik odpowiadający  $k=1$ , który wynosi  $n(a+b)b^{n-1}$ . Zatem  $a^n + b^n$  jest podzielne przez  $(a+b)^2$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $nb^{n-1}$  jest podzielne przez  $a+b$ . Ponieważ  $a$  i  $b$  są względnie pierwsze, względnie pierwsze są również  $a+b$  i  $b$ . Stąd otrzymujemy tezę.

Odwrotnością liczby  $a$  modulo  $p$  (gdzie  $p$  jest pierwsza) nazywamy taką liczbę  $b$ , że

$$ab \equiv 1 \pmod{p}.$$

Dowód istnienia rozwiązania równania

$$a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

bez użycia twierdzenia

Chevalleya–Warninga jest bardzo ciekawym zadaniem, zachęcam Czytelników do zastanowienia się nad nim!

\*student, Universität Bonn



### Rozwiązanie zadania M 1379.

Niech  $K$  będzie najmniejszą liczbą o tej własności, że  $f(x) \leq K$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Pokażemy, że wówczas  $f$  jest funkcją stałą, równą  $K$  w każdym punkcie. Załóżmy nie wprost, że dla pewnego  $z$  jest  $f(z) < K$ . Skoro

$$\frac{f(z) + K}{2} < K,$$

to z określenia liczby  $K$  znajdziemy liczbę  $x$ , dla której

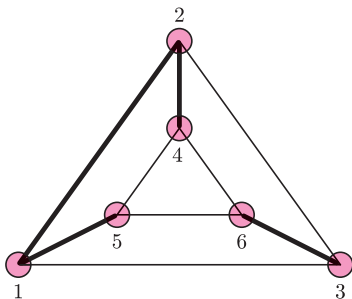
$$\frac{f(z) + K}{2} < f(x).$$

To jednak daje sprzeczność, bowiem

$$\begin{aligned} \frac{f(z) + K}{2} < f(x) &= f\left(\frac{z + 2x - z}{2}\right) \leq \\ &\leq \frac{f(z) + f(2x - z)}{2} \leq \frac{f(z) + K}{2}. \end{aligned}$$



Spójrzmy na przykłady opisanego w artykule przyporządkowania. Pogrubione krawędzie należą do podgrafu  $H$ .



W tym przykładzie mamy  $x_{1,5} \neq 0$ ,  $x_{1,2} \neq 0$ ,  $x_{2,4} \neq 0$  oraz  $x_{3,6} \neq 0$ . Podgraf  $H$  składa się z dwóch składowych. Mamy też, między innymi,  $\deg(1, H) = 2$ , a  $\deg(5, H) = 1$ .

Przejdźmy do dowodu twierdzenia. Główny pomysł to wyrażenie liczby wspólnych rozwiązań w postaci ładnej funkcji – najlepiej także wielomianu.

Wykażemy najpierw, że wielomian

$$W(x_1, \dots, x_n) = (1 - f_1(x_1, \dots, x_n)^{p-1})(1 - f_2(x_1, \dots, x_n)^{p-1}) \dots (1 - f_m(x_1, \dots, x_n)^{p-1})$$

przystaje do 1 modulo  $p$ , jeżeli  $(x_1, \dots, x_n)$  jest wspólnym rozwiązaniem  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , i przystaje do 0 w przeciwnym przypadku. Dlaczego tak jest? Z Małego Twierdzenia Fermata  $a^{p-1} \equiv 0$  lub 1 modulo  $p$  w zależności od tego, czy  $p$  dzieli  $a$ , czy nie. Zatem  $i$ -ty czynnik  $W$  przystaje do 1 dla rozwiązania  $f_i$  modulo  $p$ , a do 0 w przeciwnym przypadku.

Wynika stąd, że liczba istotnych rozwiązań przystaje modulo  $p$  do

$$\sum_{x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}_p} W(x_1, \dots, x_n).$$

Musimy udowodnić, że ta suma jest podzielna przez  $p$ .

Niech  $H(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$  będzie pewnym jednomianem  $W$ . Wykażemy najpierw, że

$$(2) \quad p \mid \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}_p} H(x_1, \dots, x_n).$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}_p} H(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}_p} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} = \\ &= \left( \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}_p} x_1^{a_1} \right) \left( \sum_{x_2 \in \mathbb{Z}_p} x_2^{a_2} \right) \dots \left( \sum_{x_n \in \mathbb{Z}_p} x_n^{a_n} \right). \end{aligned}$$

Suma wszystkich wykładników  $a_i$  jest mniejsza niż  $(p-1)n$ , gdyż

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \deg(H) \leq \deg(W) = (p-1)(\deg(f_1) + \dots + \deg(f_m)) < (p-1)n$  (ostatnia nierówność wynika z założeń twierdzenia). Dlatego istnieje przynajmniej jeden wykładnik  $a_k$  mniejszy niż  $p-1$ . Dla  $a_k = 0$  wzór (2) jest prawdziwy, ponieważ  $k$ -ty czynnik w powyższym iloczynie jest równy  $p$ . Natomiast dla  $a_k > 0$  ze wzoru (1) otrzymujemy

$$\sum_{x_k \in \mathbb{Z}_p} x_k^{a_k} = 1^{a_k} + 2^{a_k} + \dots + (p-1)^{a_k} \equiv 0 \pmod{p},$$

zatem także i cały iloczyn jest podzielny przez  $p$ .

Ponieważ  $W$  jest sumą swoich jednomianów, to również

$$p \mid \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}_p} W(x_1, \dots, x_n),$$

co należało wykazać.  $\square$

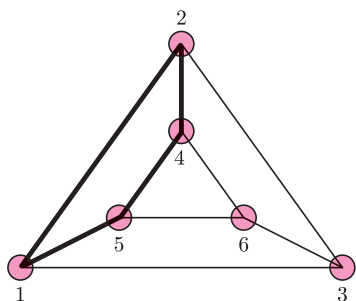
Użyjemy teraz twierdzenia Chevalleya–Warninga do rozwiązania problemu z teorii grafów. Stopniem wierzchołka grafu będziemy nazywali liczbę krawędzi z niego wychodzących. Zakładamy, że graf nie ma pętelek (krawędzi o tym samym początku i końcu). Mówimy, że graf jest  $n$ -regularny, jeżeli stopień każdego wierzchołka jest równy  $n$ . Badanie takich grafów pasjonowało wielu matematyków, szczególnie że – ze względu na swoją symetrię – naturalnie pojawiają się one w licznych problemach. Ciągle istnieje wiele nierozwiązanych hipotez dotyczących tej klasy grafów.

**Twierdzenie o podgrafie  $p$ -regularnym.** Niech  $G$  będzie grafem  $2p-1$  regularnym dla pewnej liczby pierwszej  $p$ . Wtedy w  $G$  istnieje spójny  $p$ -regularny podgraf.

Idea dowodu polega na opisanu świata kombinatorycznego równaniami diofantycznymi. Niech  $E$  będzie zbiorem krawędzi, a  $V$  zbiorem wierzchołków  $G$ . Niech  $H$  będzie (niekoniecznie spójnym) podgrafem  $G$  zawierającym wszystkie jego wierzchołki (jak na rysunku). Krawędzi w  $G$  o końcach  $i, j$  przypiszmy pewną niezerową liczbę  $x_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$ , jeżeli ta krawędź leży w  $H$ , i zero w przeciwnym przypadku. Stopień  $i$ -tego wierzchołka w  $H$  (oznaczany dalej  $\deg(i, H)$ ) przystaje modulo  $p$ , na mocy Małego Twierdzenia Fermata, do

$$\sum_{v \in V, (i,v) \in E} x_{i,v}^{p-1}$$

I odwrotnie, zauważmy, że każdy wybór liczb  $x_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$  daje nam pewien podgraf  $H$  (zakładamy, że zawiera on wszystkie wierzchołki  $G$ ). Kluczowe w dowodzie jest



Tym razem  $x_{1,5} \neq 0$ ,  $x_{1,2} \neq 0$ ,  $x_{2,4} \neq 0$  oraz  $x_{4,5} \neq 0$ . Podgraf  $H$  składa się z trzech składowych – jednego podgrafu 2-regularnego i dwóch podgrafów trywialnych (wierzchołków izolowanych). Ponadto  $\deg(1, H) = 2$  i  $\deg(5, H) = 2$ .

Czytelników zainteresowanych tematem zachęcam do zajrzenia do pracy Nogi Alona *Combinatorial Nullstellensatz*, która była moją inspiracją do napisania tego artykułu. Praca ta została wydrukowana w 8. numerze czasopisma *Combinatorics, Probability and Computing*, jest też dostępna na stronie internetowej autora. Można w niej znaleźć dowody różnych twierdzeń kombinatorycznych i tych dotyczących addytywnej teorii liczb.

spostrzeżenie, że wystarczy znaleźć nietrywialny podgraf  $H$  (lub równoważnie liczby  $x_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$ , nie wszystkie zerowe), którego każdy wierzchołek ma stopień podzielny przez  $p$  (czyli  $p \mid \deg(i, H)$ ). Dlaczego? Nietrywialny podgraf  $H$  ma nietrywialną spójną składową. Nietrywialna spójna składowa takiego  $H$  będzie właśnie szukanym  $p$ -podgrafem:  $p \mid \deg(i, H)$  i  $\deg(i, H) \leq 2p - 1$ , więc  $\deg(i, H)$  jest równy 0 lub  $p$ , ale w tej nietrywialnej spójnej składowej każdy wierzchołek będzie miał stopień  $p$ , bo wierzchołki stopnia 0 są izolowane.

Udało nam się sprowadzić nasz problem do rozwiązania układu równań diofantycznych

$$\deg(i, H) \equiv \sum_{v \in G, (i,v) \in E} x_{i,v}^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Tych wielomianów jest  $|G|$ , każdy ma stopień  $p - 1$  i zależy od zmiennych  $x_{i,j}$  (dla wszystkich  $i, j$  połączonych krawędzią w  $G$ ). Suma stopni tych wielomianów jest równa  $(p - 1)|G|$ . Liczba zmiennych jest taka sama jak liczba krawędzi w  $G$ , czyli  $\frac{1}{2}(2p - 1)|G|$  (każdy wierzchołek  $G$  ma stopień  $2p - 1$  i każda krawędź ma dwa końce) – to więcej niż  $(p - 1)|G|$ . Ponieważ ten układ równań diofantycznych ma trywialne rozwiązanie oraz  $p > 1$ , więc z twierdzenia Chevalleya–Warninga istnieje szukane rozwiązanie nietrywialne.

Powyższe twierdzenie zostało także udowodnione dla  $p$  będącego potęgą liczby pierwszej, ale do tej pory nie wiadomo, czy jest ono prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej. Łącząc otrzymany przez nas rezultat z argumentami kombinatorycznymi, można wykazać, że dla  $k \geq 4r$  każdy  $k$ -regularny graf bez pętelek zawiera podgraf  $r$ -regularny.

Warto jeszcze zwrócić uwagę, że nie przypadkiem udało nam się opisać zagadnienie kombinatoryczne za pomocą układu równań diofantycznych. Można udowodnić metatwierdzenie, że każdy skończony problem kombinatoryczny (np. dotyczący grafów) można sprowadzić do rozwiązania pewnego równania diofantycznego modulo  $p$  (formalnie, każdy podzbiór w  $\mathbb{Z}_p^n$  jest zbiorem zer pewnego wielomianu). Niestety, rozwiązanie takiego równania diofantycznego jest prawie zawsze dużo trudniejsze niż rozwiązanie zagadnienia, od którego wyszliśmy.

## Zdegenerowany trójkąt

Sensacyjna (i słaba naukowo) powieść Dana Browna *Anioły i demony* rozpoczyna się wątkiem zamordowania Leonarda Vetry, księdza i fizyka, którego celem było naukę „doprowadzić do tego, by potwierdziła istnienie Boga” oraz „udowodnienie, że zdarzenia opisane w Księdze Rodzaju były możliwe”. W swej najnowszej książce pt. *Filozofia przypadku* Michał Heller, także ksiądz i fizyk, jawi się jako przeciwieństwo tej postaci.

Chociaż podstawowym tematem książki jest, jak wskazuje tytuł, pojęcie przypadku, na drugim planie czai się pytanie, które od lat jest przyczyną gorących debat. Skąd się bierze ewolucja od prostszych do bardziej skomplikowanych struktur (biologiczna lub kosmiczna) i jak interpretować prawa nią rządzące?

Michał Heller wskazuje we wstępie do *Filozofii przypadku* na krańce mapy możliwych opinii w tej kwestii. Przywołuje nazwiska Richarda Dawkinsa, wybitnego propagatora teorii ewolucji, dla którego występujący w jej sformułowaniu czynnik przypadkowości w pewnym momencie zaczął stanowić argument na rzecz radykalnego ateizmu, oraz Williama Dembskiego, jednego z twórców tzw. inteligentnego projektu, czyli koncepcji, że w przyrodzie można znaleźć gdzieś nieredukowalną złożoność, świadcząca o ingerencji Stwórcy w proces kształtowania się życia. Choć Heller tego nie czyni w systematyczny sposób, ciekawe jest poszukać na tej mapie stanowisk wyrażanych przez kościoły. Na przykład, w dokumentach polskiego Episkopatu znajdujemy opinię, iż „pewne środowiska ateistyczne usiłują zastępować chrześcijańską naukę o stworzeniu ideologicznym, materialistycznym ewolucjonizmem [...] od głoszenia »przypadku« jako źródła wszystkiego, co istnieje, przez przyjęcie »ślepych sił natury« [...] jako wyłącznych sił sprawczych w procesach ewolucyjnych” (stanowisko Rady Naukowej Konferencji Episkopatu Polski, 2006).

We wszystkich wzmiankowanych stanowiskach słowo „przypadek” jest wyraźnie przeciwstawione czynnikom racjonalnym, determinizmowi, czy zgoła planowemu działaniu. *Filozofia przypadku* poświęcona jest przede wszystkim „odczarowaniu” tego słowa. Obecność powyższego rozumienia przypadku w filozofii i teologii jest, zdaniem Hellera, niechlubną spuścizną po Arystotelesie, ignorującą powstanie i rozwój rachunku prawdopodobieństwa oraz teorii układów dynamicznych jako dojrzałych i ważnych gałęzi matematyki. By nie być gołosłownym, historii tych dziedzin wiedzy autor przypatruje się uważnie przez sporą część książki. Ta podróż przez wieki i idee przygotowuje czytelnika na tezę wyrażoną w ostatniej części książki: z punktu widzenia fizyka układy podlegające ewolucji (obserwowalna część Wszechświata, organizm żywy) należy modelować jako otwarte, nieliniowe układy dynamiczne (być może nawet deterministyczne!), których stan może się niekiedy znacznie zmieniać w wyniku oddziaływania z fluktuacją środowiska.

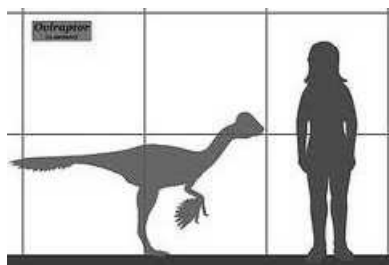
Dla Hellera możliwość wyrażenia i studiowania praw przyrody w języku matematyki i fizyki wskazują na istnienie Wielkiej Kosmicznej Matrycy realizującej to, co Einstein nazwał Zamysłem Boga. Jeśliby jednak odrzucić niewymagane przez przyrodę interpretacje, okaże się, że poglądy Hellera lokują się bardzo blisko analogicznie odfiltrowanych poglądów Dawkinsa. Skromnie wydana, lecz ciekawie udokumentowana i niezwykle wciągająca książka okazuje się zatem aktem nieomal wywrotowym.

K. T.

M. Heller, *Filozofia przypadku*, Copernicus Center Press, Kraków 2012.

## Paleontologiczne śledztwa

Na I Warszawskim Festiwalu Nauki w Muzeum Paleontologicznym Państwowego Instytutu Geologii pojawił się Dyziu – barwny model Owiraptozaura (czyli porywacza jajek), którego ślady odnalazł w Polsce tropiciel takich odcisków, dr Gerard Gierliński. Po prawdziwym Dyziu został tylko odcisk na miejscu, w którym spoczął, było to miejsce rewelacyjne, ponieważ odcisnęły się tam również pióra. Od tego czasu istnienie upierzonych dinozaurów zostało wielokrotnie potwierdzone. Czy latały? Do czego te pióra służyły?



Porównanie wielkości współczesnego człowieka i Owiraptozaura (powyżej) oraz Lucy (poniżej).



Ostatnio paleontolodzy przyjrzeni się skamieniałym kościom ogonów upierzonych dinozaurów czterech różnych gatunków, które dzieli 45 milionów lat. Końcowe kręgi zrosły się w strukturę przypominającą zaokrągloną łopatkę (taką strukturę mają kręgi ogonowe tylko współczesnych ptaków). Znalezione również odcisk piór rozchodzących się od takiej płytki w formie wachlarza.

Pióra dinozaurów późnej epoki kredowej umożliwiały wielu gatunkom lot, a także je ogrzewały. Poprzedzające płytkę drobne kręgi z przyczepami dla dużych mięśni sugerują dużą ruchliwość umożliwiającą machanie ogonem we wszystkich kierunkach. Budowa czaszki (grzebień kostny) i wachlarzowaty ogon pozwalają także na wysnucie hipotezy, iż upierzony ruchliwy ogon i grzebień na głowie były ozdobą i wabikiem w czasie zalotów.

Tak to paleontolodzy sięgają do coraz dokładniejszych pomiarów i wniosków. Nie tylko w sprawie dinozaurów.

Przez Centrum Nauki Cosmo Caixa w Barcelonie wędruje trójka postaci podobnych do dzisiejszych ludzi, zostawiając ślady, które znamy z wielu raportów odkrywcyw afrykańskich przodków człowieka. Jeden z wczesnych gatunków w tej linii, *Australopithecus afarensis* (sprzed 3,5 mln lat) ma swojego przedstawiciela, dobrze zachowany (45% kości) szkielet „Lucy” (odkryty w 1974). Lucy była niewysoka i lekka, jej mózg zajmował objętość około 500-600 ml. Badacze szkieletu uważają, że był to już „uziemiony” gatunek: sądzi się, że Lucy swobodnie chodziła w postaci wyprostowanej. Wszyscy znamy popularne wyrażenie: „przodkowie ludzi zeszli z drzew”. Niektórzy paleontolodzy utożsamiają naziemny tryb życia z „człowiekowatością”. Więc może zeszli, ale czy już nie wracali?

Analizuje się zatem rozmiary kości (stóp, podudzi) i ich wzajemne położenie. Lucy miała sklepienie podbicie stopy, co utożsamia się z niemożnością wspinania na obiekty pionowe. Ale od czego umysł naukowca, który ma zwyczaj kwestionować wszelkie teorie, dopóki żaden fakt im nie przeczy. Antropolodzy zbadali zatem przedstawicieli dzisiejszych plemion: w Afryce (Twa – zbieraczy i myśliwych, wobec Bakiga – rolników) i na Filipinach (Agta – zbieraczy i myśliwych, wobec Manobo – rolników). Twa i Agta często wspinają się na drzewa (np. w poszukiwaniu miodu) metodą „chodzenia” po pniu stopami, jak gdyby na czworakach, z naprzemiennym wspomaganie rękoma. Wspinacze mają dłuższe mięśnie łydek i bardziej elastyczne kostki, co potwierdzono w badaniach ultradźwiękowych. Stopy przystosowane do chodzenia po ziemi mogą nadal wspomagać wspinaczkę na drzewa współczesnych ludzi i mogły wspomagać Lucy.

Magdalena FIKUS

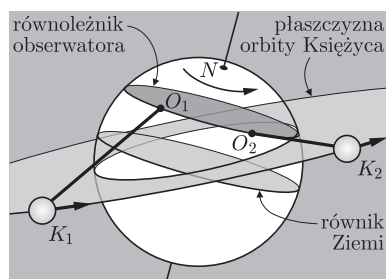


# Jak wyznaczyć odległość Ziemia–Księżyc?

Andrzej BRANICKI\*

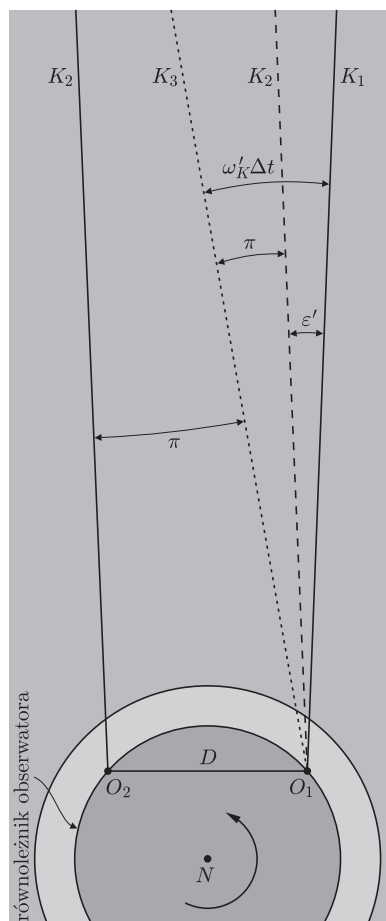
Odpowiedź na zawarte w tytule pytanie brzmi: bardzo łatwo. Wystarczy lornetka, a w szczególnych sytuacjach można nawet prowadzić obserwacje gołym okiem. Ta ostatnia metoda umożliwia, oczywiście, jedynie zgrubne oszacowanie odległości, natomiast rezultaty obserwacji wykonanych lornetką zasługują już na miano pomiaru.

Nawet jeśli, Drogi Czytelniku, nie jesteś jeszcze astronomem amatorem, podana wyżej odpowiedź jest słuszna także i w Twoim przypadku. Kolorowym tekstem podamy tu kilka rad dla bardzo początkujących adeptów sztuki obserwacji nieba.



Rys. 1. Położenia obserwatora  $O_1$  i  $O_2$  oraz Księżyca  $K_1$  i  $K_2$  w chwilach obserwacji, odpowiednio,  $t_1$  i  $t_2$ .

Kilkakrotne spojrzenie na niebo w odstępie paru godzin przekonuje nas, że Księżyc nieustannie zmienia swoje położenie względem gwiazd, przemieszczając się na ich tle *w lewo*, tj. przeciwnie do kierunku swojego ruchu względem horyzontu. Ruch ten jest złożeniem ruchu orbitalnego Księżyca oraz ruchu obserwatora poruszającego się w przestrzeni wraz z obracającą się Ziemią. Jeżeli zatem z zaobserwowanego kąтового przemieszczenia Księżyca  $\varepsilon$  wyodrębnimy tę jego część  $\pi$ , która jest następstwem zmiany miejsca obserwacji, będziemy mogli wyznaczyć odległość do Księżyca  $r$  na podstawie odległości  $D$ , o jaką przesunął się podczas pomiarów obserwator.



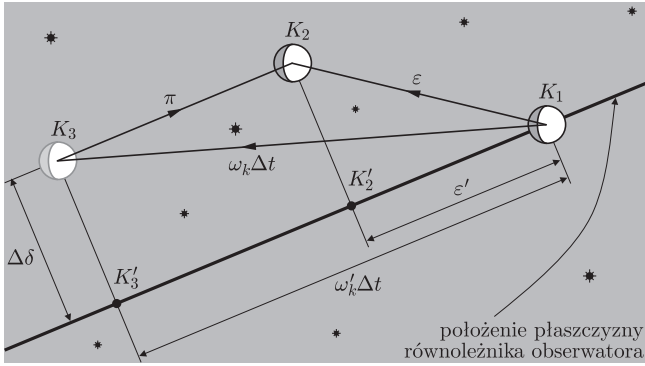
Rys. 2. Rzuty kierunków do Księżyca na płaszczyznę ruchu obserwatora, czyli na płaszczyznę równoleżnika.

Jak wyznaczyć wartość  $\pi$ ? Przyjmijmy, że obserwator dokonał dwukrotnej rejestracji pozycji Księżyca na tle gwiazd. Rysunek 1 przedstawia położenia obserwatora  $O_1$  i  $O_2$  oraz Księżyca  $K_1$  i  $K_2$  w momencie pierwszej i drugiej obserwacji, odpowiednio  $t_1$  i  $t_2$ . Na rysunku 2 ta sama sytuacja jest pokazana od strony północnego bieguna Ziemi. Na tym rysunku położenia obserwatora oraz kierunki obserwator Księżyc są zrzutowane na płaszczyznę, w której porusza się obserwator, tj. na płaszczyznę równoleżnika obserwatora. Dla uproszczenia rysunku przyjęto, że obserwacje wykonane zostały w chwilach  $t_1$  i  $t_2$  symetrycznych względem chwili  $t_g$ , w której Księżyc osiąga największą wysokość ponad horyzontem ( $t_g - t_1 = t_2 - t_g$ ). Wówczas przemieszczenie  $D$  obserwatora między pierwszą i drugą obserwacją będzie prostopadłe do kierunku na Księżyc w chwili jego górowania. Ze względu na znikomość tego przemieszczenia w porównaniu z odległością do gwiazd można przyjąć, że dwie równoległe linie oznaczone (na rys. 2) symbolem  $K_2$ , wychodzące z miejsc obserwacji  $O_1$  i  $O_2$ , wskazują na tle gwiazd ten sam punkt. Jest to miejsce, w którym jest widoczny Księżyc podczas drugiej obserwacji. Prosta  $K_3$  (linia kropkowana) pokazuje natomiast kierunek do Księżyca, jaki wskazałby obserwator w chwili  $t_2$ , gdyby patrzył z miejsca, w którym dokonywał pierwszej obserwacji, czyli w przypadku, gdyby przemieszczenie Księżyca na tle gwiazd powodowane było jedynie jego ruchem orbitalnym. Z rysunku 2 wynika także związek między przemieszczeniem  $D$  i odległością do Księżyca  $r$ . Z uwagi na to, że kąt  $\pi$  jest bardzo mały, spełniają one zależność  $\pi \approx \text{tg } \pi = D/r$ .

Górowanie jest chwilą, w której obiekt osiąga największą wysokość ponad horyzontem, czyli wtedy, gdy przechodzi on przez płaszczyznę prostopadłą do horyzontu, przecinającą go wzdłuż kierunku północ-południe. Wystarczającą dokładność wyznaczenia  $t_g$  można uzyskać, wykonując obserwacje gołym okiem. Wystarczy, na przykład, określić chwile  $t_{g,1}$  i  $t_{g,2}$  ograniczające przedział czasu, w którym będzie się wydawało, że Księżyc znajduje się w kierunku południowym. Wartości te pozwolą oszacować zarówno moment górowania  $t_g = (t_{g,1} + t_{g,2})/2$ , jak i niepewność oszacowania  $\Delta t_g = (t_{g,1} - t_{g,2})/2$ .

Rysunek 3 przedstawia położenia Księżyca na tle gwiazd tak, jak widzi je ziemski obserwator. Zaznaczono tam również przestrzenną orientację płaszczyzny równoległej do płaszczyzny ruchu obserwatora. Zaobserwowane przemieszczenie Księżyca względem gwiazd ( $K_1 \rightarrow K_2$ ) o kąt  $\varepsilon$  jest wypadkową orbitalnego

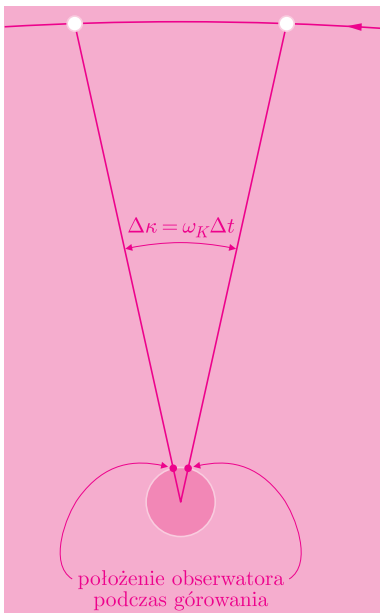
\*Wydział Fizyki, Uniwersytet w Białymstoku



Rys. 3. Położenia Księżyca  $K_1$  i  $K_2$  na tle gwiazd obserwowane z Ziemi w chwilach  $t_1$  i  $t_2$ . Przez  $K_3$  oznaczono położenie Księżyca, jakie widziałby nieruchomy obserwator pozostający stale w  $O_1$ . Punkty  $K'_2$  i  $K'_3$  są rzutami punktów odpowiednio  $K_2$  i  $K_3$  na płaszczyznę równoleżnika obserwatora.

przemieszczenia Księżyca o kąt  $\omega_K(t_1 - t_2) = \omega_K \Delta t$  w płaszczyźnie orbity Księżyca ( $K_1 \rightarrow K_3$ ) oraz przesunięcia obserwatora w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny jego ruchu ( $K_3 \rightarrow K_2$ ). Zwrot przesunięcia  $\pi$  jest przeciwny do kierunku ruchu obserwatora, czyli zgodny z ruchem gwiazd względem horyzontu – w prawo.

Najprostszy sposób wyznaczenia  $\omega_K$  polega na zarejestrowaniu pozycji Księżyca względem gwiazd w chwilach jego górowania  $t_{g,I}$  i  $t_{g,II}$  podczas dwóch kolejnych nocy (rys. a). W chwili górowania pozycja obserwatora względem prostej łączącej środek Ziemi i Księżyca jest taka sama, więc zaobserwowane kątywne przesunięcie Księżyca  $\Delta\kappa$ , będzie spowodowane wyłącznie jego ruchem orbitalnym. Oznacza to, że  $\omega_K = \Delta\kappa / |t_{g,II} - t_{g,I}|$ . Jeśli przesunięcie Księżyca na tle gwiazd  $\varepsilon$  będzie określone na oko, to usprawiedliwione będzie przyjmowanie na  $\omega_K$  wartości średniej wynikającej z okresu jego obiegu wokół Ziemi  $\omega_K = 2\pi / (27,32 \text{ doby}) = 9,610 \cdot 10^{-3} \text{ rad/h}$ .



Rys. a. Wyznaczanie chwilowej prędkości kątowej Księżyca.

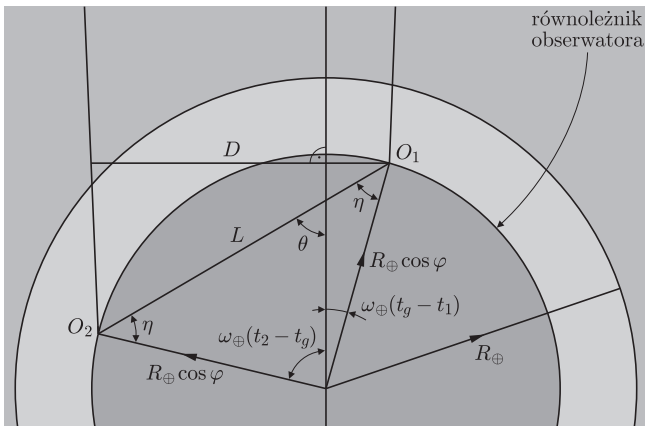
Punkty  $K_1, K_2$  i  $K'_2$  oraz  $K_1, K_3$  i  $K'_3$ , przedstawione na rysunku 3, wyznaczają dwa trójkąty sferyczne. Długości boków tych trójkątów można opisać kątami odpowiednio  $\varepsilon, \Delta\delta$  i  $\varepsilon'$  oraz  $\omega_K \Delta t, \Delta\delta$  i  $\omega'_K \Delta t$ . Jeśli odstęp czasu pomiędzy pierwszą i drugą obserwacją  $\Delta t$  będzie wynosił kilka godzin, to wszystkie te kąty będą bardzo małe i trójkąty sferyczne  $K_1 K_2 K'_2$  i  $K_1 K_3 K'_3$  można przybliżyć przez trójkąty płaskie. Otrzymamy stąd:

$$(1) \quad \pi = \omega'_K \Delta t - \varepsilon' = \sqrt{(\omega_K \Delta t)^2 - \Delta\delta^2} - \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta\delta^2},$$

co pozwoli nam już obliczyć odległość do Księżyca  $r$  przy znajomości przesunięcia  $D$ .

Do wyznaczenia wartości kąta  $\Delta\delta$  niezbędna jest znajomość kierunku, w którym przesunął się Księżyc względem gwiazd w wyniku ruchu obserwatora ( $K_3 \rightarrow K_2$ ). Z powodu rotacji Ziemi każdy obserwator porusza się po okręgu (równoleżniku), którego płaszczyzna jest prostopadła do osi obrotu Ziemi. Jeśli obserwowany obiekt znajduje się w kierunku tworzącym z osią obrotu Ziemi kąt przekraczający  $60^\circ$ , jak ma to miejsce w przypadku Księżyca, to w kilkugodzinnym okresie obserwacji, obejmującym moment górowania, przesunięcie obiektu spowodowane ruchem obserwatora będzie niemal dokładnie równoległe do płaszczyzny ruchu obserwatora. Ponieważ oś obrotu Ziemi można utożsamiać z osią obrotu nieba, więc płaszczyzna ruchu obserwatora (płaszczyzna równoleżnika) jest prostopadła do tej osi.

Na rysunku lub mapie nieba reprezentowała ją będzie linia przechodząca przez miejsce, w którym znajduje się Księżyc i prostopadła do kierunku na biegun nieba (Gwiazdę Polarną) lub linia równoległa do kierunku dobowego ruchu gwiazd. Zwrot przesunięcia Księżyca spowodowany ruchem obserwatora będzie przeciwny do ruchu obserwatora, czyli zgodny z kierunkiem dobowego ruchu gwiazd.



Rys. 4. Widok Ziemi od strony bieguna. Przez  $L$  i  $D$  oznaczono przesunięcie obserwatora oraz rzut tego przesunięcia na kierunek prostopadły do kierunku Ziemia–Księżyc w chwili górowania Księżyca. Jak poprzednio,  $O_1$  i  $O_2$  oznaczają położenia obserwatora w chwilach odpowiednio  $t_1$  i  $t_2$ .

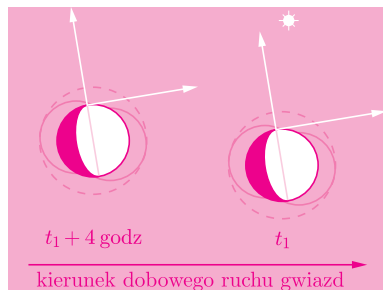
Wyznaczając przesunięcie  $D$ , warto uwzględnić sytuację ogólniejszą od przedstawionej na rysunku 2, mianowicie taką, że przestrzenne przesunięcie obserwatora  $L$  nie jest prostopadłe do kierunku na Księżyc w chwili jego górowania, tj. gdy  $t_g - t_1 \neq t_2 - t_g$  (rys. 4). Patrząc na trójkąt o wierzchołkach w punktach  $O_1, O_2$  i w środku Ziemi, stwierdzamy, że  $L = 2R_Z \cos \varphi \sin(\frac{1}{2}\omega_Z \Delta t)$ , gdzie  $R_Z$  jest promieniem Ziemi,  $\varphi$  szerokością geograficzną obserwatora, zaś  $\omega_Z$  prędkością kątową ruchu wirowego Ziemi. Rzut całkowitego przestrzennego przemieszczenia obserwatora  $L$  na kierunek prostopadły do kierunku Ziemia–Księżyc w chwili górowania Księżyca jest równy  $D = L \cos(90^\circ - \theta) = L \sin \theta$ . Ponieważ zaś  $\theta = 180^\circ - \eta - \omega_Z(t_2 - t_g)$  oraz  $\eta = 90^\circ - \frac{1}{2}\omega_Z \Delta t$ , więc

ostatecznie otrzymamy

$$(2) \quad D = 2R_Z \cos \varphi \sin \left( \frac{1}{2} \omega_Z \Delta t \right) \cos \left( \omega_Z \left( t_g - \frac{1}{2} (t_1 + t_2) \right) \right).$$

Podstawiając obliczone ze wzorów (1) i (2) wielkości  $\pi$  oraz  $D$  do zależności  $r = D/\pi$ , uzyskujemy szukaną odległość do Księżyca.

Względna dokładność wyznaczenia kątów  $\varepsilon$  i  $\Delta\delta$  będzie tym większa, im dłuższy będzie odstęp czasu  $\Delta t$  między obserwacjami. Wzrostowi dokładności sprzyjała będzie również sytuacja, gdy Księżyc będzie położony w pobliżu jasnych gwiazd lub planet. Minimalnym wymogiem byłby jeden jasny obiekt w odległości nieprzekraczającej średnicy pola widzenia lornetki. W tym przypadku do zbudowania układu odniesienia pozwalającego ocenić przesunięcie Księżyca względem obiektu należy wykorzystać dwa dowolne punkty na tarczy Księżyca lub przynajmniej jego rogi (rys. b). Rezultatem obserwacji powinno być zaznaczenie na rysunku lub mapie dwóch położen Księżyca względem gwiazd, zanotowanie chwil  $t_1$  i  $t_2$  dokonania tych lokalizacji oraz zaznaczenie kierunku ruchu obserwatora.



Rys. b. Przykład przybliżonej oceny położenia Księżyca w oparciu o jeden bliski, jasny obiekt. Liniami przerywaną narysowane są okręgi informujące o wielkości błędów lokalizacji tarczy Księżyca.

Jeśli zdarzy się tak, że w pobliżu Księżyca znajdzie się jasna gwiazda lub jedna z jasnych planet (np. Wenus, Mars, Jowisz, Saturn), a okres  $\Delta t$  nie będzie krótszy niż cztery godziny, to oceny przesunięcia Księżyca będzie można dokonać nawet bez korzystania z lornetki. Sytuację taką należy potraktować jak zaproszenie do naukowej zabawy (jej rezultat będzie bowiem tylko grubym oszacowaniem odległości). Obserwacja polegała będzie na zapamiętaniu położenia Księżyca względem jasnego obiektu w chwili  $t_1$  i porównaniu go z położeniem w chwili  $t_2$ . Zaobserwowane w ten sposób przesunięcie kątowe  $\varepsilon$  najlepiej będzie określać jako wielokrotność średnicy Księżyca, a następnie wyrazić je w radianach, przyjmując na średnicę tarczy wartość  $0,5^\circ \approx 0,0087$  rad. Gdy zatem, Drogi Czytelniku, zobaczysz w pobliżu Księżyca jasny obiekt, to – dla ułatwienia pamięciowych rachunków – możesz przyjąć, że kątowa średnica Księżyca jest równa 0,01 rad,  $\omega_K \approx 0,01$  rad/h, zaniedbać  $\Delta\delta$  oraz pamiętać, że w ciągu godziny Ziemia przenosi każdego Europejczyka na odległość około 1000 km. Przy tych założeniach, jeśli  $\Delta t$  będzie wyrażone w godzinach, a  $\varepsilon$  jako wielokrotność średnic Księżyca, to  $D \approx 1000\Delta t$  km,  $\pi \approx (\Delta t - \varepsilon)/100$ , zaś  $r = D/\pi$  km.

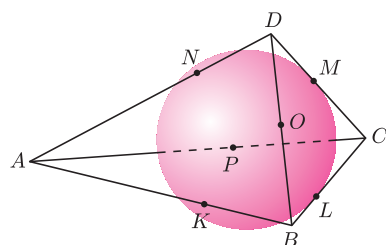
Udanych obserwacji i dobrej zabawy!

## Kącik przestrzenny (16): Sfera styczna do krawędzi czworościanu

Dla trójkąta definiujemy okrąg opisany i okrąg wpisany. Podobnie z czworościanem można związać dwie naturalne sfery: sferę przechodzącą przez wierzchołki (opisaną) oraz sferę styczną do ścian (wpisaną). Można jednak rozważać jeszcze trzecią ciekawą sferę – styczną do krawędzi. Taka sfera na pewno istnieje dla czworościanu foremego (jej środek pokrywa się ze środkami sfery wpisanej i opisanaj, zaś promień jest równy odległości tego punktu od dowolnej krawędzi). Dla jakich innych czworościanów można taką sferę znaleźć? Odpowiedź zawarta jest w następującym twierdzeniu.

**Twierdzenie 1.** *Następujące warunki są równoważne:*

- istnieje sfera styczna do wszystkich krawędzi czworościanu,
- istnieją cztery parami styczne sfery o środkach w wierzchołkach czworościanu,
- sumy długości trzech par przeciwległych krawędzi czworościanu są równe,
- okręgi wpisane w ściany czworościanu są parami styczne.



Rys. 1

**Dowód.** (a) $\Rightarrow$ (b). Oznaczmy przez  $K, L, M, N, O, P$  punkty styczności danej sfery odpowiednio z krawędziami  $AB, BC, CD, DA, BD, AC$ . Wówczas z Najmocniejszego Twierdzenia Stereometrii (patrz Kącik 2) otrzymujemy

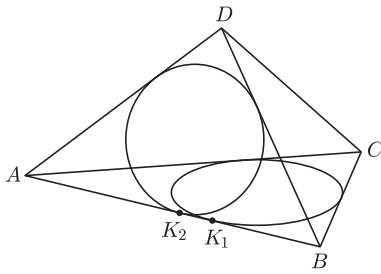
$$AK = AN = AP = a, \quad BK = BL = BO = b, \\ CL = CM = CP = c, \quad DM = DN = DO = d.$$

Nietrudno teraz zauważyć, że sfery o środkach  $A, B, C, D$  i promieniach odpowiednio  $a, b, c, d$  są parami styczne.

(b) $\Rightarrow$ (c). Przyjmując poprzednie oznaczenia, otrzymujemy

$$AB + CD = AK + BK + CM + DM = a + b + c + d$$

i podobnie  $AC + BD = a + b + c + d = AD + BC$ .



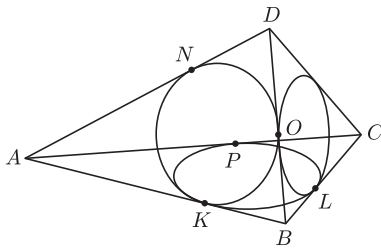
Rys. 2

(c)⇒(d). Załóżmy, że okręgi wpisane w trójkąty  $ABC$  i  $ABD$  są styczne do krawędzi  $AB$  odpowiednio w punktach  $K_1$  i  $K_2$ . Wtedy wykorzystując zależność  $AD + BC = AC + BD$ , otrzymujemy

$$2BK_1 = AB + AC - BC = AB + AD - BD = 2BK_2,$$

a więc  $K_1 = K_2$ , czyli okręgi te są styczne do krawędzi  $AB$  w tym samym punkcie. W ten sam sposób stwierdzamy, że każde dwa okręgi wpisane w ściany czworościanu są styczne.

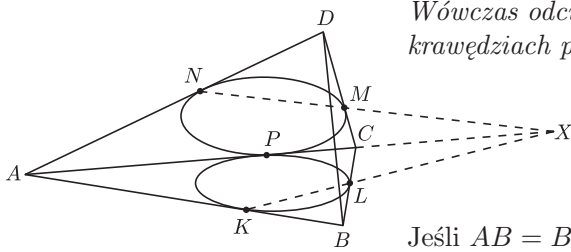
(d)⇒(a). Załóżmy, że okręgi wpisane w ściany czworościanu są parami styczne i oznaczmy przez  $K, L, M, N, O, P$  ich punkty styczności odpowiednio z krawędziami  $AB, BC, CD, DA, BD, AC$ . Przez środki  $I_D$  oraz  $I_C$  okręgów wpisanych odpowiednio w ściany  $ABC$  i  $ABD$  prowadzimy proste prostopadłe do tych ścian. Ponieważ leżą one w płaszczyźnie  $KI_C I_D$  i nie są równoległe, więc mają punkt wspólny  $S$ . Istnieje sfera o środku  $S$  zawierająca okręgi wpisane w ściany  $ABC$  i  $ABD$  (a więc styczna do pięciu krawędzi czworościanu zawartych w tych ścianach). Częścią wspólną tej sfery z płaszczyzną  $BCD$  jest okrąg styczny do  $BC$  w punkcie  $L$ , zaś do  $BD$  w  $O$ . Taki okrąg jest wyznaczony jednoznacznie, a zatem z założenia wnosimy, że musi być to okrąg wpisany w trójkąt  $BCD$ . Stąd wniosek, że dana sfera jest też styczna do krawędzi  $CD$ . □



Rys. 3

Sfera styczna do krawędzi czworościanu ma pewne cechy analogiczne do własności okręgów wpisanych w trójkąt czy czworokąt. Jedną z nich jest następująca własność, którą można nazwać odpowiednikiem twierdzenia Brianchona.

**Twierdzenie 2.** *Sfera  $s$  jest styczna do wszystkich krawędzi czworościanu. Wówczas odcinki łączące punkty styczności leżące na przeciwległych krawędziach przecinają się w jednym punkcie.*



Rys. 4

**Dowód.** Oznaczmy, jak poprzednio, przez  $K, L, M, N, O, P$  punkty styczności sfery  $s$  z krawędziami czworościanu  $ABCD$ . Wykażemy najpierw, że punkty  $K, L, M, N$  leżą na jednej płaszczyźnie.

Jeśli  $AB = BC$ , to  $AD = CD$  i proste  $KL$  i  $MN$  są równoległe, więc leżą na pewnej płaszczyźnie. W przeciwnym razie istnieje punkt  $X$  przecięcia prostych  $KL$  i  $AC$ . Z twierdzenia Menelaosa otrzymujemy

$$1 = \frac{CL}{BL} \cdot \frac{BK}{AK} \cdot \frac{AX}{CX} = \frac{CL}{AK} \cdot \frac{AX}{CX} = \frac{CM}{AN} \cdot \frac{AX}{CX} = \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN}{AN} \cdot \frac{AX}{CX}.$$

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Menelaosa wnosimy, że punkt  $X$  leży również na prostej  $MN$ . W takim razie i w tym przypadku punkty  $K, L, M, N$  leżą na jednej płaszczyźnie.

Odcinki  $KM$  i  $LN$  mają więc punkt wspólny  $W_1$ . Analogicznie stwierdzamy, że odcinki  $KM$  i  $OP$  przecinają się w punkcie  $W_2$ . W ten sam sposób dowodzimy, że punkty  $L, O, N, P$  leżą na jednej płaszczyźnie, do której należą w szczególności punkty  $W_1$  i  $W_2$ . Jednak odcinek  $KM$  nie leży w tej płaszczyźnie, a więc może mieć z nią co najwyżej jeden punkt wspólny. Zatem  $W_1 = W_2$  i rozważane trzy odcinki są współpękowe. □

Jeśli przez  $a, b, c, d$  oznaczmy odpowiednio promienie sfer o środkach  $A, B, C, D$  (jak w punkcie (b) Twierdzenia 1), zaś przez  $V$  objętość danego czworościanu, to promień  $\ell$  sfery stycznej do krawędzi wyraża się wzorem

$$\ell = \frac{2abcd}{3V}.$$

Na zakończenie dodajmy, że można rozważać sferę, która jest styczna do pewnych krawędzi oraz do przedłużeń pozostałych krawędzi czworościanu (analogicznie do okręgów dopisanych na płaszczyźnie). Zbadanie jej własności pozostawiamy Czytelnikom.

Wzór ten można uzasadnić, rozważając inwersję o środku w punkcie styczności sfery o środkach  $A$  i  $B$ . Po niedługich rachunkach otrzymujemy ułamek, którego licznik jest równy  $2abcd$ , zaś mianownik jest dość skomplikowanym wyrażeniem zależnym od  $a, b, c, d$  – można się przekonać, że takim właśnie wzorem wyraża się potrojona objętość tego czworościanu. Autor nie zna uzasadnienia, które nie wymagałoby przejścia przez ten wzór.

Michał KIEZA

## Logika, sens i wątpliwości

Już przed laty, gdy brałem udział w tworzeniu jednej z kolejnych reform nauczania matematyki, miałem poważne wątpliwości, czy umieszczanie w programach nauczania matematyki (podstawach programowych, wykazach efektów nauczania, podręcznikach itp.) działu logika jest zgodne ze zdrowym rozsądkiem.

Oczywiście, wiem, że wielu głosi, iż nauczanie matematyki (jak niegdyś łaciny, której się zresztą uczyłem) to nauka logicznego myślenia. Ale, gdy czytałem otwierające wówczas podręczniki do liceum rozdziały poświęcone logice, trudno mi było powstrzymać się od wrażenia, że nie ma w nich żadnego sensu. Nie wymienię, rzecz jasna, żadnego konkretnego podręcznika (po co mi rozprawy sądowe – przecież podręcznik to wielkie pieniądze), ale wrażenie przy lekturze każdego z nich było podobne.

Od razu chciałbym powiedzieć, że nie chodzi o opinię, iż logika nigdy matematyce nie pomogła, bo unikanie błędów nie jest aktem twórczym (patrz Nicolas Bourbaki, *Elementy historii matematyki*). Chodzi o coś więcej. Ale nie śmiałem nalegać na usunięcie tego działu ze szkolnego nauczania, bo jeśli wszyscy widzą w nim sens, to może on tam – wbrew pozorom – istnieje.

Dopiero na sympozjum z okazji dziewięćdziesięciolecia Profesora Andrzeja Grzegorzcyka dowiedziałem się, że moje wątpliwości nie są odosobnione i nawet w Instytucie Filozofii i Socjologii PAN prowadzone są prace nad taką modyfikacją logiki, by jej wady usunąć.

Co to za wady? Proszę spojrzeć na zdanie:

**Dwa plus dwa równa się cztery wtedy i tylko wtedy, gdy Płock leży nad Wisłą.**

Oczywiście, zdanie to jest prawdziwe, ale czy ma sens? Przecież między pewnym faktem arytmetycznym a innym faktem geograficznym żadnego związku nie ma. Dlaczego więc chcemy twierdzić (ba, uczyć tego), że te dwa zdania są **równoważne**?

Albo zdanie:

**Jeśli dwa plus dwa jest równe pięć, to zachodzi twierdzenie Pitagorasa.**

Z punktu widzenia logiki to zdanie jest prawdziwe. Tu już po obu stronach implikacji są zdania dotyczące faktów matematycznych. Dlaczego jednak chcemy zmusić młodego człowieka, by widział w tym sens?

Wyjaśnienie jest proste: w pierwszym przypadku chodzi o to, że równoważność zdań ma miejsce, gdy wartość logiczna obu zdań jest taka sama; w drugim – o to, że implikacja jest poprawna, gdy ma fałszywy poprzednik.

A więc logika sprowadza nasz świat do zbioru dwuelementowego, nic przeto dziwnego, że rzeczy absolutnie niepołączone żadnym znaczeniowym (semantycznym) związkiem muszą się znajdować w przynajmniej jednej z dwóch komórek, do jakiejś muszą trafić.

Powstają dwa pytania. Po pierwsze, czemu logika została tak skonstruowana, że – abstrahując od sensu – okalecza pojęciowy świat? Po drugie, czy faktycznie należy trzymać ją jak najdalej od młodzieży, bo tylko ją demoralizuje, każąc za wiedzę uważać takie androny, jak przytoczone powyżej?

Odpowiedź na pierwsze pytanie jest dość prosta. Nowoczesna logika formalna została stworzona (jak wielu uważa) przez Gottloba Fregego (1848–1925) tak, by obsługiwała matematykę, a tę rozumiano wówczas jako badanie prawdziwości zdań języków formalnych.

Odpowiedzi na drugie pytanie *de facto* nie ma. Tłumaczymy się z używania takich abstrahujących od znaczeń spójników logicznych tym, że alternatywa, koniunkcja i negacja są sensowne; że chcemy, aby młody człowiek wiedział, że zaprzeczeniem zdania, iż *istnieje coś mające własność A*, jest to, że *wszystkie cosie własności A nie mają*; że implikacja ze zdania prawdziwego daje jednak tylko zdania prawdziwe itd., itp.

Ale naprawdę chodzi o to, że – jak z małżeństwem i demokracją – lepszej propozycji dotąd nie wynaleziono. A szkoda.

Marek KORDOS



### Rozwiązanie zadania F 828.

Siła oddziaływania między dwoma ładunkami nie może zależeć od wyboru jednostek. Pisząc zatem ogólnie, mamy

$$F = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Oznaczając primami wielkości pisane w konwencji anglosaskiej (np. układ jednostek CGSE lub Gaussa), mamy

$$\frac{Q^2}{Q'^2} = \sqrt{\frac{k'}{k}}.$$

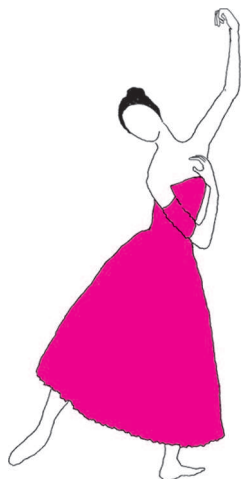
Stąd:

$$Q' = Q / \sqrt{4\pi\epsilon_0} = Q c \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}},$$

gdzie  $\mu_0 = 10^{-7} \text{N/A}^2$  jest przenikalnością magnetyczną próżni. Podstawiając wartości liczbowe dla ładunku elementarnego, otrzymujemy  $e' \approx 1,5 \cdot 10^{-15} \text{m}\sqrt{\text{N}}$ .

Zwróćmy uwagę, że kolejność przeglądania podzbiorów w pętli jest istotna, tzn. jeśli  $S' \subset S$ , to  $S'$  powinien zostać rozpatrzony przed  $S$ . Szczęśliwie się składa, że przy reprezentacji za pomocą masek bitowych przeglądanie w kolejności rosnących liczb (od 1 do  $2^n - 1$ ) ma tę własność.

Element  $v$  można wyznaczyć, znajdując najmniejszy zapalony bit w masce bitowej. Przykładowo, w języku C++ (kompilatory GCC) służy do tego operacja `__builtin_ctz` (ang. *count trailing zeros*). Jeśli nie mamy dostępu do takiej operacji, możemy zrobić to tak:  $m[S] = 1$ , jeśli  $S$  jest nieparzyste, oraz  $m[S] = 1 + m[S/2]$  w przeciwnym przypadku.



## Informatyczny kącik olimpijski (60): Kliki

Dany jest graf nieskierowany  $G = (V, E)$ . *Kliką* nazwiemy taki podzbiór wierzchołków  $S \subseteq V$ , że każde dwa wierzchołki w zbiorze  $S$  są połączone krawędzią w grafie  $G$ . Problem znalezienia w grafie kliki o jak największej liczbie wierzchołków jest NP-zupełny, a jak wiadomo, dla takich problemów nikt jeszcze nie pokazał algorytmu wielomianowego. Podobne trudności są z algorytmem dla problemu *zliczania klik* w grafie, choć tutaj stosowną klasę złożoności stanowią tzw. problemy #P-zupełne.

Nic więc dziwnego, że gdy takie właśnie zadanie pojawiło się na obozie w Petrozawodzku w 2009 r. (zadanie pt. *Work for Robots*), nie oczekiwano od zawodników rozwiązania wielomianowego. Występujące w zadaniu ograniczenie  $|V| \leq 50$  wymagało jednak zastosowania nietrywialnego algorytmu wykładniczego.

Niech  $V = \{1, \dots, n\}$ . Nasz algorytm będzie wykonywał różne operacje na podzbiórach zbioru  $V$ . Podzbiory takie będziemy reprezentowali jako maski bitowe o długości  $n$  (ponieważ  $n \leq 50$ , każda taka maska zmieści się w 64-bitowej zmiennej całkowitej). W pseudokodach będziemy zapisywać operacje sumy, iloczynu i różnicy zbiorów przy użyciu standardowej symboliki matematycznej, ale implementując program, można je równie prosto zapisać przy użyciu operacji bitowych (patrz *Delta* 11/2008). Niech  $adj[v]$  oznacza zbiór wierzchołków, z którymi połączony jest wierzchołek  $v$ . Przez  $cnt[S]$  oznaczamy liczbę klik, które są zawarte w podzbiórze  $S$  (wynikiem programu będzie  $cnt[V]$ ). Dla  $S = \emptyset$  mamy dokładnie jedną taką klikę (pustą). Załóżmy zatem, że  $S = \{v\} \cup S'$  dla pewnego wierzchołka  $v$ . Każda klika zawarta w  $S$  jest albo całkowicie zawarta w  $S'$ , albo zawiera wierzchołek  $v$  i jest zawarta w  $(S' \cap adj[v]) \cup \{v\}$ . Poniższy pseudokod pokazuje, jak wypełniać tablicę  $cnt$ :

```
cnt[∅] := 1;
foreach niepusty podzbiór S ⊆ V w kolejności zawierania do
  v := dowolny element z S;
  S' := S \ {v};
  cnt[S] := cnt[S'] + cnt[S' ∩ adj[v]];
```

Powyższe rozwiązanie działa w czasie  $O(2^n)$ .

Szybsze rozwiązanie uzyskamy następująco. Podzielmy zbiór wierzchołków na dwa możliwie równe podzbiory  $A = \{1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ ,  $B = \{\lfloor n/2 \rfloor + 1, \dots, n\}$ . Na początek wykonajmy powyższy algorytm, ale tylko dla wierzchołków ze zbioru  $A$ ; zajmie to czas  $O(2^{n/2})$ . Zbiór  $S \subseteq V$  jest kliką dokładnie wtedy, gdy oba zbiory  $S \cap A$ ,  $S \cap B$  są klikami oraz istnieją wszystkie krawędzie między nimi. Rozważmy pewien  $S_B \subseteq B$ , który jest kliką. Oznaczmy

$$neigh[S_B] = \bigcap_{v \in S_B} (adj[v] \cup \{v\}),$$

czyli zbiór tych wierzchołków, które są połączone ze wszystkimi wierzchołkami z  $S_B$ . Wówczas klika  $S$ , dla której  $S \cap B = S_B$ , musi spełniać  $S \cap A \subseteq neigh[S_B] \cap A$ . Ostatecznie wynikiem jest:

$$\sum_{neigh[S_B] \cap S_B = S_B} cnt[neigh[S_B] \cap A],$$

przy czym warunek sumy oznacza po prostu, że  $S_B$  jest kliką.

To, czego nam teraz potrzeba, to obliczenie  $neigh[S_B]$  dla wszystkich  $S_B \subseteq B$ . Robimy to podobnie jak w przypadku tablicy  $cnt$ :

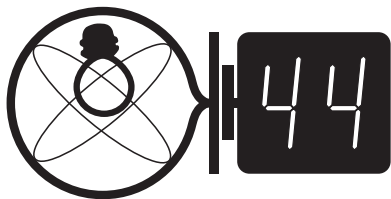
```
neigh[∅] := V;
foreach niepusty podzbiór S_B ⊆ B w kolejności zawierania do
  v := dowolny element z S_B;
  neigh[S_B] := neigh[S_B \ {v}] ∩ (adj[v] ∪ {v});
```

Całe rozwiązanie działa w czasie  $O(2^{n/2})$ . Jako zadanie dla Czytelnika proponujemy przerobić ten algorytm tak, by znajdował najliczniejszą klikę.

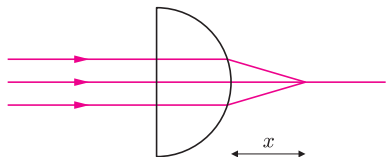
Tomasz IDZIASZEK

### Skrót regulaminu

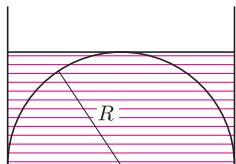
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2013



Rys. 1



Rys. 2

### Zadania z fizyki nr 554, 555

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

**554.** Wzdłuż gumowego sznura o długości  $l$  i współczynniku sprężystości  $k$  zsuwa się w kierunku pionowym żelazny pierścień o masie  $m$ . Siła tarcia między powierzchnią sznura a pierścieniem wynosi  $T$ . Wyznacz ciepło, które się przy tym wydziela.

**555.** Wąska wiązka światła po przejściu przez półkulę ze szkła o współczynniku załamania  $n$  skupia się w odległości  $x$  od powierzchni wypukłej (rys. 1). W jakiej odległości od powierzchni płaskiej skupią się promienie, jeżeli wiązkę światła przepuścimy przez półkulę z drugiej strony?

### Rozwiązania zadań z numeru 11/2012

Przypominamy treść zadań:

**546.** Do naczynia w kształcie półsfery o promieniu  $R$ , szczelnie przylegającego do podłoża, zaczęto nalewać wodę przez otwór u góry. Gdy woda wypełniła całe naczynie, podniosła je i zaczęła wyciekać z dołu. Jaka jest masa naczynia? Gęstość wody wynosi  $\rho$ .

**547.** Jednakowe masy wodoru i helu umieszczono w naczyniu o objętości  $V_1$ . Naczynie to oddzielone jest od pustego naczynia o objętości  $V_2$  przegrodą, która przepuszcza wodór, natomiast nie przepuszcza helu. Po ustaleniu się równowagi ciśnienie w pierwszym naczyniu zmalało dwukrotnie. Jaki jest stosunek  $V_2/V_1$ ? Temperatura jest stała.

**546. Sposób I.** Wypadkowa siła nacisku, jaką naczynie i woda wywierają na podłoże, równa jest sumie ich ciężarów. Gdy woda zaczyna wyciekać, naczynie nie wywiera już nacisku i ciężar układu równy jest sile parcia  $P$  wody na podłoże:  $P = \pi R^2 \rho g R$  oraz  $P = Mg + \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g$ , gdzie  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim, a  $M$  szukaną masą naczynia:  $M = \frac{1}{3} \pi R^3 \rho$ .

**Sposób II.** Rozważmy warstwę wody o wysokości  $R$  w cylindrycznym naczyniu o tym samym promieniu i półsferyczną powierzchnię również o promieniu  $R$  wewnątrz tej warstwy (rys. 2). Zgodnie z prawem Pascala ciśnienia zewnętrzne i wewnętrzne, wywierane przez wodę na powierzchnię w kształcie półsfery, są takie same. Wynika stąd, że masa naczynia równa jest masie dolanej wody:  $M = (\pi R^2 R - \frac{2}{3} \pi R^3) \rho = \frac{1}{3} \pi R^3 \rho$ .

**547.** Oznaczmy przez  $p_{H_2}$  i  $p_{He}$  ciśnienia cząstkowe wodoru i helu w chwili początkowej, przez  $\mu_{H_2}$  i  $\mu_{He}$  ich masy molowe, a jednakowe masy obu gazów przez  $m$ . Z równań Clapeyrona wynika, że stosunek ciśnień cząstkowych wynosi  $p_{He}/p_{H_2} = \mu_{H_2}/\mu_{He} = 0,5$ . Ciśnienie całkowite  $p$  jest sumą ciśnień cząstkowych:  $p = p_{H_2} + p_{He}$ . Stan równowagi nastąpi, gdy liczba cząsteczek wodoru w jednostce objętości po obu stronach przegrody będzie taka sama, a tym samym jednakowe będą ciśnienia wodoru  $p'_{H_2}$  w obu naczyniach. Oznaczając przez  $m_1$  i  $m_2$  masy wodoru w pierwszym i drugim naczyniu w stanie końcowym ( $m = m_1 + m_2$ ), z równań Clapeyrona otrzymujemy:  $m_1/m_2 = V_1/V_2$ .

Z treści zadania wiemy, że po ustaleniu się równowagi ciśnienie w pierwszym naczyniu zmalało dwukrotnie:  $0,5(p_{He} + p_{H_2}) = p_{He} + p'_{H_2}$ , stąd (uwzględniając, że  $p_{H_2} = 2p_{He}$ ) mamy  $p_{He} = 2p'_{H_2}$ . Korzystając ponownie z równań Clapeyrona dla helu w pierwszym naczyniu i wodoru w drugim, otrzymujemy

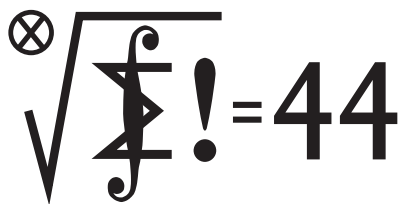
$$\frac{m}{\mu_{He} V_1} = \frac{2m_2}{\mu_{H_2} V_2},$$

zatem

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{4V_1}{V_2} - 1.$$

Porównanie wyrażeń na stosunek mas wodoru w obu naczyniach daje ostateczny wynik:  $V_2/V_1 = 3$ .

## Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2013

## Zadania z matematyki nr 657, 658

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**657.** W okienka tabeli prostokątnej, mającej  $m$  kolumn i  $n$  wierszy, wpisujemy liczby 0 lub 1 tak, by w każdym kwadracie  $2 \times 2$ , złożonym z czterech pól mających wspólny wierzchołek, suma czterech wpisanych liczb była nieparzysta. Dla zadanej liczby naturalnej  $m \geq 2$  znaleźć wszystkie liczby naturalne  $n \geq 2$ , dla których da się w taką tabelę wpisać zera i jedynki w opisany sposób tak, by żadne dwa wiersze nie były identyczne.

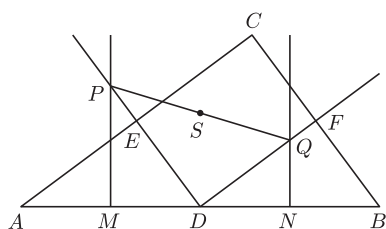
**658.** W przestrzeni dany jest czworościan foremny o krawędzi długości  $a$  oraz dowolny punkt  $P$ . Niech  $d_1, d_2, d_3, d_4$  będą odległościami punktu  $P$  od wierzchołków czworościanu. Wykazać, że

$$(a^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2)^2 = 4(a^4 + d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4).$$

Zadanie 658 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

## Rozwiązania zadań z numeru 11/2012

Przypominamy treść zadań:



**649.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  punkt  $D$  jest środkiem przeciwprostokątnej  $AB$ . Dowieść, że prosta  $AB$  jest styczna do okręgu, którego średnica łączy środki okręgów opisanych na trójkątach  $ACD$  i  $BCD$ .

**650.** Dane są liczby naturalne  $n$  oraz  $k$  ( $2 \leq k \leq n$ ). Wyznaczyć maksymalną liczbę wież, które można ustawić na szachownicy o rozmiarach  $n \times n$  tak, by wśród dowolnie wybranych  $k$  wież były dwie, które się wzajemnie atakują (przyjmujemy, że atakują się wzajemnie każde dwie wieże, stojące w tym samym rzędzie poziomym lub pionowym, niezależnie od tego, czy są pomiędzy nimi jeszcze jakieś inne wieże).

**649.** Oznaczmy środki okręgów opisanych na trójkątach  $ACD$  i  $BCD$  odpowiednio przez  $P, Q$ . Niech  $E, F, M, N, S$  będą kolejno środkami odcinków  $AC, BC, AD, BD, PQ$ . Proste  $PM, QN$  to symetralne odcinków  $AD, BD$ ; proste  $PE, QF$  to symetralne odcinków  $AC, BC$  – przecinają się prostopadłe w punkcie  $D$ . Okrąg o średnicy  $PQ$  przechodzi więc przez punkt  $D$ . Ma on środek w punkcie  $S$ .

Punkt  $D$  jest środkiem odcinka  $MN$ . Zatem prosta  $SD$  jest równoległa do prostych  $PM$  i  $QN$ . Prosta  $AB$  jest do nich prostopadła. Wobec tego promień  $SD$  okręgu  $(PQD)$  jest prostopadły do  $AB$ . To znaczy, że ów okrąg jest styczny do prostej  $AB$ .

**650.** Bez trudu da się ustawić  $n(k-1)$  wież w żądany sposób; wystarczy zapelnąć nimi prostokąt  $n \times (k-1)$ . Pokażemy, że więcej się nie da.

Przyjmijmy, że na szachownicy stoi  $N$  wież. Niech  $m$  będzie największą liczbą wież, jakie można wybrać spośród nich, by żadne dwie się nie atakowały. Należy dowieść, że jeśli  $N > n(k-1)$ , to  $m > k-1$ . Wystarczy wykazać, że  $N \leq nm$ .

Ustalmy więc układ  $m$  wież, z których żadne dwie nie stoją w jednym wierszu ani jednej kolumnie. Permutując wiersze i kolumny, można przyjąć, że te wieże stoją na polach  $(1, 1), (2, 2), \dots, (m, m)$ . Podzielmy szachownicę na cztery obszary  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ , gdzie  $A$  jest kwadratem  $m \times m$  (na jego przekątnej stoją wybrane wieże),  $B$  i  $C$  to prostokąty  $m \times (n-m)$  oraz  $(n-m) \times m$ , zaś  $D$  to kwadrat  $(n-m) \times (n-m)$ . Wobec maksymalności  $m$ , żadna wieża nie znajduje się w obrębie kwadratu  $D$ .

Weźmy teraz dowolne pole  $(i, j)$  w prostokącie  $B$  ( $i \leq m < j$ ) i symetryczne do niego pole  $(j, i)$  w prostokącie  $C$ . Gdyby na obu tych polach stały wieże, to usuwając z poprzednio ustalonego układu wieżę z pola  $(i, i)$  oraz dołączając wieżę z pól  $(i, j), (j, i)$ , otrzymalibyśmy układ  $m+1$  wież, stojących w różnych wierszach i kolumnach – wbrew maksymalności  $m$ . Zatem co najwyżej połowa pól w sumie prostokątów  $B$  i  $C$  jest zajęta, czyli nie więcej niż  $m(n-m)$  pól. Uwzględniając  $m^2$  pól kwadratu  $A$ , uzyskujemy oczekiwane oszacowanie:  $N \leq m^2 + m(n-m) = nm$ .



### Rozwiązanie zadania F 827.

Załóżmy, że na krowie zgromadzony jest ładunek  $Q$ . Wytwarza on pole elektryczne o natężeniu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

gdzie  $r$  jest odległością od środka krowy. Gęstość energii pola elektrycznego wyraża się wzorem

$$u = \frac{1}{2\epsilon_0} E^2,$$

skąd obliczamy całkowitą energię pola, równą

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

(dla  $R \rightarrow 0$  otrzymujemy znany problem nieskończonej energii ładunku punkowego). Skoro krowa jest elementarna, to z zasady ekwipartycji energii „należy się” jej  $\frac{1}{2}kT$  na każdy stopień swobody. Dla ruchu dwuwymiarowego otrzymujemy więc  $Q = \sqrt{8\pi\epsilon_0 kT \cdot R}$ , co dla  $R = 1$  m i  $T = 300$  K daje  $Q \approx 6 \cdot 10^{-16}$  C, czyli kilka tysięcy ładunków elementarnych.



## Prosto z nieba: Soczewki w obłokach

Obiekty te znane były astronomom arabskim już w starożytności, a także włoskim i hiszpańskim uczonym przed podróżą Ferdynanda Magellana (1519–22).

Odległości Obłoków są porównywalne z rozmiarem dysku Galaktyki, 100 tys. lat świetlnych; odległość do galaktyki Andromedy jest natomiast około 20 razy większa.

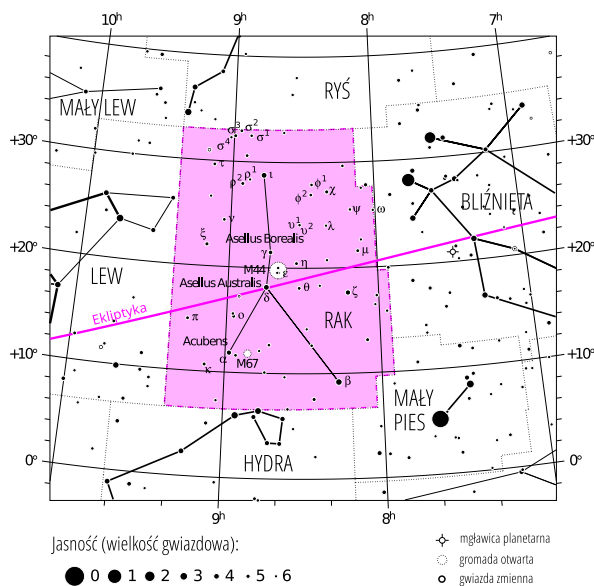
Grupy podglądające subtelne zachowanie skrytych w mroku Galaktyki ciał to amerykański zespół MACHO, francuski EROS oraz polski OGLE.

Opis symulacji z detalami obliczeń po polsku znajduje się na stronie [orion.pta.edu.pl](http://orion.pta.edu.pl).

Mały i Wielki Obłok Magellana to widoczne na południowej półkuli nieba nieregularne galaktyki-satelity Drogi Mlecznej, związane z nią w tzw. Grupie Lokalnej, do której należy także m.in. spiralna galaktyka w Andromedzie. Ponieważ znajdują się one blisko nas, około 200 tys. lat świetlnych (60 kpc) i 150 tys. lat świetlnych (50 kpc) dla, odpowiednio, Małego i Wielkiego Obłoku, więc są od dawna wymiennym celem obserwacji astronomicznych. Na początku XX w. Henrietta Leavitt odkryła w danych z Małego Obłoku zależność okres-jasność dla gwiazd pulsujących zwanych cefeidami, jedno z najcenniejszych „narzędzi” astronomicznych, służące do szacowania odległości. W Obłokach wciąż tworzą się nowe gwiazdy, a ich skład chemiczny, a przez to szczegóły procesów ewolucyjnych różnią się nieco od tych w naszej Galaktyce; jeden z najbardziej gwiazdotwórczo aktywnych obszarów Grupy Lokalnej, Mgławica Tarantula, znajduje się w Wielkim Obłoku.

Historia tych obiektów była najprawdopodobniej burzliwa – jest wiele prawdopodobne, że Mały Obłok zderzył się kiedyś z galaktyką Andromedy, a także niedawno (w astronomicznej skali czasowej: 300 mln lat) ze swoim większym towarzyszem. Skąd to wiadomo? Poszukiwacze zjawisk soczewkowania grawitacyjnego, tj. czasowego pojaśnienia światła odległych gwiazd w wyniku zakrzywienia przestrzeni przez poruszający się pomiędzy źródłem a obserwatorem niewidoczny, masywny obiekt (soczewkę), wskazywali na większą od przewidywanej liczbę tych zjawisk w kierunku Wielkiego Obłoku Magellana. Szacunkowe obliczenia dowodzą, co prawda, że całkowita ilość masy zawarta w soczewkach nie wystarcza do wyjaśnienia za jej pomocą tajemnicy ciemnej materii, ale niedawne symulacje numeryczne grupy naukowców z Cambridge i Uniwersytetu Columbia sugerują coś równie interesującego: wspomniane wyżej niedawne zderzenie Obłoków. W wyniku oddziaływania pływowego Wielki Obłok przywłaszczył sobie część gwiazd Małego Obłoku, nazwaną Mostem, i to ich soczewkowanie obserwują dziś astronomowie. Wygląda również na to, że oba obiekty dopiero niedawno znalazły się tak blisko naszej Galaktyki. Ostatnie słowo należy, oczywiście, do obserwatorów, którzy już zaczęli szukać dodatkowych dowodów intensywnych kontaktów naszych sąsiadów w Grupie Lokalnej.

Michał BEJGER



Gwiazdozbiór Raka. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

(\*)  $\alpha$  Cancri (*Alcubens*, Szczytce), gwiazda podwójna o  $4,26^m$ , mimo pierwszej litery alfabetu znajduje się „poza podium” w klasyfikacji jasności gwiazdozbioru Raka, wyprzedzona przez inny układ podwójny,  $\iota$  ( $4,03^m$ ).

## Niebo jak własna kieszeń: Marzec

Gwiazdozbiór Raka (łac. *Cancer*) jest dość niepozornym gwiazdozbiorem zodiakalnym – jednym z dwunastu (nie licząc Wężownika), przez które przechodzi linia ekliptyki. Nietrudno odnaleźć go jednak na wieczornym południowym niebie, ponieważ otaczają go dobrze widoczne Bliźnięta, Lew i Mały Pies. Tylko dwie gwiazdy należące do Raka są jaśniejsze (\*) od  $4^m$ :  $\beta$  ( $3,53^m$ ), zwana Al Tarf (Oko), oraz znajdująca się praktycznie na ekliptyce  $\delta$  ( $3,94^m$ ). Ta druga, zwana Południowym Osiołkiem (*Asellus Australis*), wraz z  $\gamma$  Cancri ( $4,66^m$ ), nazwaną – a także! – Północnym Osiołkiem (*Asellus Borealis*) posilają się wspólnie przy Żłóbku (łac. *Praesepe*), czyli najbardziej okazałym obiekcie Raka, gromadzie otwartej oznaczonej przez Messiera numerem 44. Żłóbek jest dobrze widoczny gołym okiem; mimo znacznego oddalenia na niebie dzieli wspólne pochodzenie ze znajdującą się w Byku gromadą Hiady, w okolicy której przebywa ostatnio Jowisz ( $-1,8^m$ ). Oprócz M44 w Raku można obserwować także gromadę otwartą M67 ( $6^m$ ); dwa dni po równonocy wiosennej, która nastąpi 20 III o 12:02, znajdzie się w jej okolicy Księżyc (nów 11 III, pełnia 27 III).

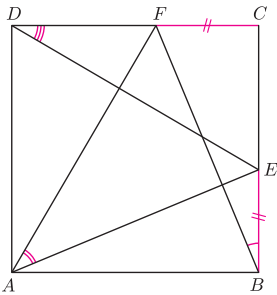
Marzec nie sprzyja obserwacjom meteorów: na wątpliwą pociechę pozostają średnio aktywne Virginidy (radiant w Pannie) oraz  $\gamma$  Normidy (Węgielnica), których, niestety, nie widać z terytorium Polski. Ciekawe marcowe koniunkcje to: spotkanie Księżyca ze Spicą ( $\alpha$  Virginis, rankiem 1 III), Księżyca z Jowiszem (18 III), i Marsa ( $1,39^m$ ) z Uranem ( $6,28^m$ ) przed zachodem Słońca 22 III w gwiazdozbiórze Wieloryba. Wenus ( $-3,48^m$ ) znajduje się obecnie bardzo blisko Słońca, natomiast Merkury ( $0,81^m$ ) jest widoczny nad ranem.

M. B.

W większości poniższych zadań przydatne są obroty kwadratu wokół jego środka lub jednego z wierzchołków. Wszystkie zadania mają ten sam początek:

Punkty  $E$  i  $F$  leżą odpowiednio na bokach  $BC$  i  $CD$  kwadratu  $ABCD$  o boku 1, przy czym...

1. ...  $BE = CF$ . Udowodnij, że  $\sphericalangle EBF + \sphericalangle EAF + \sphericalangle EDF = 90^\circ$  (rys. 1).
2. ...  $\sphericalangle EAF = 45^\circ$ . Wykaż, że  $BE + DF = EF$ .
3. ... obwód trójkąta  $CFE$  równy jest 2. Wyznacz miarę kąta  $EAF$ .
4. ...  $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EAB$ . Wykaż, że  $BE + DF = AF$ .
5. ...  $\sphericalangle EAF = 45^\circ$ . Oblicz wysokość trójkąta  $EAF$  poprowadzoną z wierzchołka  $A$ .
6. ...  $\sphericalangle EAF = 45^\circ$ . Proste  $AE$  i  $AF$  przecinają przekątną  $BD$  odpowiednio w punktach  $M$  i  $N$ . Proste  $EN$  i  $FM$  przecinają się w punkcie  $K$ . Wykaż, że proste  $AK$  i  $EF$  są prostopadłe.
7. ... prosta  $EF$  jest styczna do okręgu o środku  $A$  i promieniu 1. Proste  $AE$  i  $AF$  przecinają przekątną  $BD$  odpowiednio w punktach  $M$  i  $N$ . Udowodnij, że punkty  $C, E, F, M, N$  leżą na jednym okręgu.
8. ...  $CE = CF$ . Punkt  $L$  to rzut punktu  $C$  na prostą  $BF$ . Wykaż, że  $\sphericalangle ALE = 90^\circ$ .



Rys. 1

Obroty mierzymy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

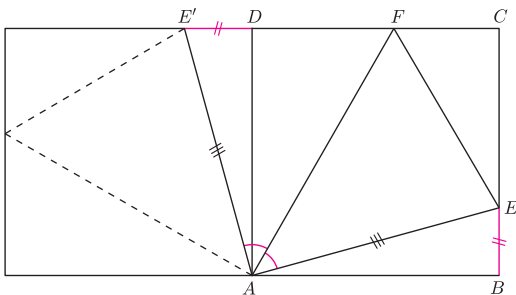
## Rozwiązania niektórych zadań

**R1.** Obróćmy kwadrat o  $90^\circ$  wokół środka. Obrazem trójkąta  $BAE$  jest trójkąt  $CBF$ , zatem  $\sphericalangle EBF = \sphericalangle BAE$ . Analogicznie  $\sphericalangle EDF = \sphericalangle FAD$ . Stąd  $\sphericalangle EBF + \sphericalangle EAF + \sphericalangle EDF = \sphericalangle BAE + \sphericalangle EAF + \sphericalangle FAD = \sphericalangle BAD = 90^\circ$ .  $\square$

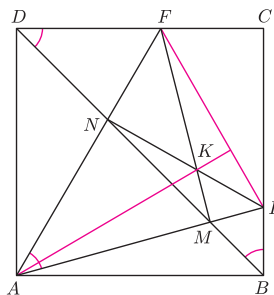
**R2.** Obróćmy kwadrat o  $90^\circ$  wokół wierzchołka  $A$  (rys. 2), niech  $E'$  będzie obrazem punktu  $E$ . Wtedy  $AE \perp AE'$ , zatem

$$\sphericalangle E'AF = \sphericalangle E'AE - \sphericalangle EAF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \sphericalangle EAF.$$

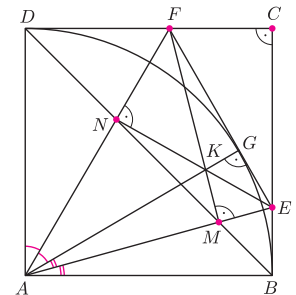
Ponadto  $AE = AE'$ , więc  $\triangle E'AF \equiv \triangle EAF$ , bo trójkąty te mają dodatkowo wspólny bok  $AF$ . Stąd  $EF = E'F = DE' + DF = BE + DF$ .  $\square$



Rys. 2



Rys. 3

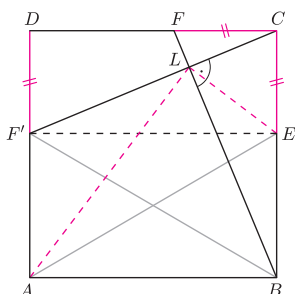


Rys. 4

**R5.** Z rozwiązania zadania 2 (rys. 2) wiemy, że  $\triangle E'AF \equiv \triangle EAF$ . Wysokości tych trójkątów poprowadzone z wierzchołka  $A$  są więc obie równe  $AD$ , czyli 1.  $\square$

**R6.** Punkty  $A, M, F, D$  leżą na jednym okręgu, bo  $\sphericalangle MAF = 45^\circ = \sphericalangle MDF$  i punkty  $A, D$  leżą po tej samej stronie prostej  $MF$  (rys. 3). Kąt  $ADF$  jest prosty, więc  $AF$  jest średnicą tego okręgu. Stąd  $\sphericalangle AMF = 90^\circ$ , zatem  $FM$  jest wysokością trójkąta  $AEF$ . Analogicznie  $EN$  jest wysokością tego trójkąta, więc  $K$  to jego ortocentrum. Wobec tego  $AK$ , jako trzecia wysokość, jest prostopadła do  $EF$ .  $\square$

**R7.** Niech  $G$  będzie punktem styczności prostej  $EF$  do danego okręgu. Wtedy  $AG \perp EF$ ,  $EG = EB$  oraz  $FG = FD$  (rys. 4), zatem  $\triangle ABE \equiv \triangle AGE$  oraz  $\triangle ADF \equiv \triangle AGF$ . Stąd  $\sphericalangle EAF = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD = 45^\circ$ . Na mocy rozwiązania zadania 6 wiemy więc, że  $\sphericalangle EMF = \sphericalangle ENF = 90^\circ$ . Stąd wniosek, że punkty  $M$  i  $N$  leżą na okręgu o średnicy  $EF$ . Leży na nim też punkt  $C$ , bo  $\sphericalangle ECF = 90^\circ$ .  $\square$



Rys. 5

Zadanie 5 pochodzi z XLIII Olimpiady Matematycznej.

**R8.** Obróćmy kwadrat o  $90^\circ$  wokół środka. Obrazem punktu  $F$  jest taki punkt  $F'$  na boku  $AD$ , że  $DF' = CF = CE$  (rys. 5). Obrazem prostej  $BF$  jest prosta  $CF'$ , jest ona prostopadła do  $BF$ , więc zawiera punkt  $L$ . Opiszmy okrąg na prostokącie  $ABEF'$ ; jego średnicą jest  $BF'$ . Punkt  $L$  leży na tym okręgu, ponieważ kąt  $BLF'$  jest prosty. Średnicą okręgu jest także  $AE$ , więc również kąt  $ALE$  jest prosty.  $\square$