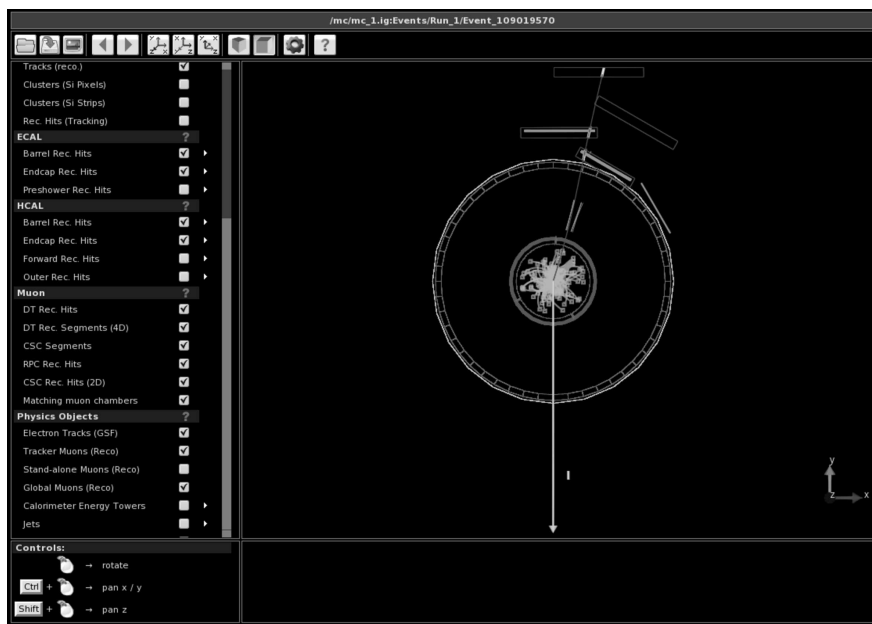









## W następnym numerze piszemy jak



## SPIS TREŚCI NUMERU 11 (462)

Pomniki w powszechnym obiegu <i>Jan Swadźba</i>	str. 1
Zakręcona historia <i>Odele Straub</i>	str. 2
Wyniki XXIX Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków	str. 4
 Co ty wiesz o Kenii? <i>Magdalena Fikus</i>	str. 5
Zera funkcji kwadratowych <i>Arkadiusz Męcel</i>	str. 6
Poziom trudności gier komputerowych z perspektywy projektanta <i>Tomek Grochowiak</i>	str. 8
 Zadania	str.10
<b>Olimpiada Informatyczna</b>	str.11
 Lekcja rysunku (3) <i>Zdzisław Pogoda</i>	str.15
Geometria jest nauką doświadczalną <i>Marek Kordos</i>	str.16
 Likwidujemy tornado <i>Stanisław Bednarek</i>	str.19
Aktualności	str.20
Informatyczny kącik olimpijski (56): Melodia <i>Jakub Radoszewski</i>	str.21
Seminaria <i>Poznajemy OMG</i> <i>Joanna Jaszwińska,</i> <i>Barbara Roszkowska-Lech</i>	str.22
Klub 44	str.23
Prosto z nieba: Ultrajasne źródła rentgenowskie <i>Michał Bejger</i>	str.24
Niebo jak własna kieszeń: Listopad	str.24
 Ekstrema <i>Joanna Jaszwińska</i>	str.25

zostać fizykiem cząstek choć na jeden dzień

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Urszula Swianiewicz, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.  
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem T<sub>p</sub>X oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.  
Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Fran-Press:** [www.franpress.pl](http://www.franpress.pl), infolinia 801-679-466

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**Pol-Perfect:** [www.polperfect.com.pl](http://www.polperfect.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

### Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2013 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

### Prenumerata krajowa:

Zamówienia na prenumeratę przyjmują Zespoły Prenumeraty właściwe dla miejsca zamieszkania klienta. [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl) e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)

### Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:

Informację o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania można uzyskać pod nr. tel. +48 (22) 693 67 75 [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl) e-mail: [prenumerataz@ruch.com.pl](mailto:prenumerataz@ruch.com.pl)

Telefoniczne Biuro Obsługi Klienta (koszt połączenia wg taryfy operatora):

– połączenie z telefonów stacjonarnych 801 800 803

– połączenie z telefonów komórkowych +48 (22) 717 59 59

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

## Pomniki w powszechnym obiegu

Oczywiście, mowa tu o znaczkach pocztowych. Zawierają one zawsze więcej szczegółów od swych spiżowych i kamiennych odpowiedników, a poza tym krążą między ludźmi, żyjemy z nimi na co dzień. No i jest ich (chyba) więcej. Tytułowe pomniki tym razem łączy historia analizy matematycznej.



ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ

Na okładce tego numeru *Delty* najstarszą upamiętnioną postacią (znaczek 1) jest **Demokryt** – jego teorię atomów autor dowcipnie zilustrował współczesną wizją krążących wokół jądra elektronów. Dwieście lat młodszy, współczesny Hannibalowi **Archimedes** (2) jest zaprezentowany jako wynalazca śruby używanej do dziś przy nawadnianiu egipskich pól. Z okazji światowego roku matematyki przypomniano (3) jego błyskotliwą pracę *O kuli i walcu*, dzięki której poznano pole powierzchni i objętość kuli.

Następny w kolejce **Simon Stevin** (4) to człowiek, który oswoił dla barokowej Europy ciągle jeszcze egzotyczny system dziesiętny i nauczył ją posługiwać się ułamkami dziesiętnymi. **Johannes Kepler** został z okazji międzynarodowego roku astronomii przywołany przez Czechów przypomnieniem, że to jemu zawdzięczamy obecny model (5) słonecznego układu planetarnego. Natomiast Niemcy zdecydowanie mniej trafnie (6) uczcili jego czterechsetne urodziny.



DESCARTES

Kolej na Francuzów. **René Descartes** przedstawiony został (7) ze swym fundamentalnym dziełem, inicjującą racjonalizm *Rozprawą o metodzie* (ciekawe, że Francuzi popełnili błąd i w pierwszej edycji tego znaczka było zamiast *de la* napisane *sur la*). Z lewej strony widać jeden z aneksów tego dzieła – księgę proponującą analityczny sposób uprawiania geometrii. Z kolei **Pierre Fermat** na czterechsetne urodziny otrzymał znaczek (8) ze swoim sławnym Wielkim (u Anglosasów – Ostatnim) Twierdzeniem – wtedy już wreszcie udowodnionym. Natomiast **Blaise Pascal** został uczczony z okazji trzechsetlecia śmierci przypomnieniem (9) tak jego działalności matematycznej, jak technicznej czy religijnej.

Analiza matematyczna zaistniała za sprawą Newtona i Leibniza, by stać się najbardziej fundamentalną gałęzią matematyki. **Izaak Newton** ma obszerną reprezentację na znaczkach. Tak obszerną (10)–(13), że przypisano mu nie tylko jego własne, lecz także parę cudzych pomysłów (np. symbolikę Leibniza). Sam **Gottfried Wilhelm Leibniz** w trzysta pięćdziesiąte urodziny dostał za to znaczek (14) precyzyjnie trafiający w jego koncepcje rachunku różniczkowego.

Szwajcarię reprezentują **Jacob Bernoulli** (15) ze swoim dziełem *Ars coniectandi* i **Uniwersytet w Bazylei** (16) z okazji pięćsetpięćdziesięciolecia.

Interesujący jest pomysł holenderski, by połączyć politykę z nauką i Anglię z Holandią (17): trzechsetlecie zaślubin Wilhelma III z Marią II Stuart jest w jednej serii z odkryciem rozszczepienia światła przez Newtona i konstrukcją zegara wahadłowego oraz zaobserwowaniem pierścieni Saturna, czego dokonał **Christiaan Huygens**.

François Marie Arouet, czyli **Voltaire** (18), raczej do matematyków się nie zaliczał: analizę określał jako *sztukę liczenia i dokładnego mierzenia rzeczy, których istnienia nie można pojąć*. Ale należał do grona intelektualistów wymieniających poglądy na wszelkie tematy w ramach nowych, prężnych organizacji powołanych jako alternatywa dla uniwersytetów – Akademii Nauk. Niebagatelną rolę w umożliwieniu szerokiej wymiany poglądów odegrała poczta – **poczta Taxisów** (19) powstała w 1451 roku i stała się publiczna w 1516 roku. Znaczek (20) został wydany z okazji trzysta pięćdziesiątej rocznicy powstania **Royal Society** w serii 8 znaczków – ten prezentuje autora największego dzieła wydanego przez to towarzystwo: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, późniejszego prezesa. Prezesów ukazują też znaczki (21) – **Akademii Paryskiej** i (22) – **Berlińskiej**. W serii, do której należy ten ostatni, pojawia się też (23) **Leonhard Euler**, który akurat w Berlinie prezesem nie został.



VOLTAIRE



Kolejnych twórców analizy matematycznej prezentują znaczki (24)–(27): to **Jean le Rond d'Alembert**, współtwórca i *spiritus movens* Wielkiej Encyklopedii Francuskiej, **Joseph Louis Lagrange**, chcący traktować wszystkie funkcje jako szeregi potęgowe, **Augustin Louis Cauchy**, tutaj ze swym wzorem dotyczącym funkcji zespolonych, i zapoznany czeski matematyk **Bernhard Bolzano**, przywrócony światu przez Carla Weierstrassa.

A dalej już parada wzorów. **Friedrich Carl Gauss** prezentowany jest (28) ze swoją probabilistyczną krzywą. Na znaczku (29) mamy tzw. wszystko z najrozmaitszych dyscyplin; **George Gabriel Stokes** i Pierre Fermat mają swoje wzory również na znaczku (30).

(31) to, co prawda, nie znaczek, lecz stempel, ale **Michaił Wasiliewicz Ostrogradski** ma na nim okazję przedstawić swój wzór, dzielony często z Gaussem, natomiast **Aleksandr Michajłowicz Lapunow** ma już swój znaczek (32). Całka krzywoliniowa (33) ma uświetnić stulecie Rumuńskiej Akademii Nauk – wymienieni są **Dimitrie Pompeiu**, **Simion Stoilow**, **Gheorghe Titeica**, a znaczek (34) wydaje się używać matematyki tylko jako dostarczyciela „ogólnonaukowej” symboliki. Rumun (działał w Niemczech) **Herman Julius Oberth** (35) reprezentuje kosmonautykę, a **James Clerk Maxwell** (36) prezentowany jest jako twórca jednego z *dziesięciu wzorów, które zmieniły oblicze świata*.

W **spisie** eksponatów tej znaczkowej galerii brakuje wielu ważnych nazwisk, ale też nie istnieją opracowania skierowane na tego rodzaju tematykę. Polecam własne poszukiwania, choć łatwe one nie będą.

Jan SWADŹBA

## Zakręcona historia

### Odele STRAUB\*

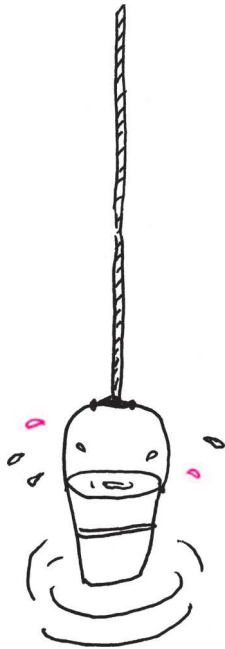
Spin (moment pędu) jest jednym z dwóch atrybutów astrofizycznej czarnej dziury – drugim jest jej masa. Tak niespotykana i intrygująca prostota jest rzadkością w astronomii i powodem sukcesu modelu czarnej dziury. Co sprawia, że czarne dziury są wyjątkowe? Aby odpowiedzieć na to pytanie, pozwól się, Drogi Czytelniku, zabrać na pełną zawirowań wyprawę. W przeciwieństwie do dawnych czasów, gdy nieznanne obszary oznaczano na mapach sentencją *hic sunt dracones* (tu są smoki) i omijano szerokim łukiem, ta podróż zaprowadzi nas w bezpośrednią, intymną bliskość bestii – do miejsc, w których grawitacja i rotacja zaćmiewają wszystko inne.

Grawitacja i rotacja są wszechobecne we Wszechświecie; od zarania współczesnej nauki ciężar (łac. *gravitas*) oraz zdolność do ruchu (obrotu) były uważane za dwa najbardziej oczywiste atrybuty materii. Ich spotkanie może stworzyć ekstremalne warunki, w których jeden z żywiołów zachowuje się tak, jak gdyby był tym drugim. Takie właśnie – masywne i wirujące – są czarne dziury, idealne ucieleśnienie dwu podstawowych cech natury.

W czasach, gdy publikowano *De revolutionibus orbium coelestium* Mikołaja Kopernika (*O obrotach sfer niebieskich*, 1534 r.), kula była uważana za najdoskonalszy z wszystkich kształtów, a rotacja za najdoskonalszy ze wszystkich ruchów. Co się tyczy grawitacji, spekulował Kopernik, należał ją uważać za naturalne i pierwotne pragnienie każdej materii, dążącej do osiągnięcia doskonałości poprzez zjednoczenie się w kształcie kulistego ciała. Bezruch był jedynym stanem uznawanym za szlachetniejszy niż rotacja. W centrum Wszechświata, w boskim bezruchu rządziło zatem Słońce, raczej duchowo niż fizycznie przewodząc rodzinie planet, które obracały się wokół na przydzielonych im sferach. Smoki oraz inne mitologiczne stwory zostały przeniesione zza siedmiu mórz na firmament i umieszczone tam jako konstelacje na sferze gwiazd stałych, która obejmowała cały Wszechświat Kopernika.

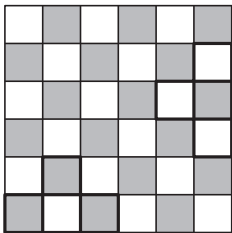
Ów obraz zmienił się nieco, gdy Kartezjusz (René Descartes) opublikował w 1644 r. *Principia Philosophiae* (*Zasady filozofii*), zawierające teorię wirów (a także słynne *Cogito ergo sum*). Według niego Wszechświat przypomina pianę,

\*Centrum Astronomiczne  
im. Mikołaja Kopernika PAN



### Rozwiązanie zadania M 1368.

Odpowiedź: Pokrycie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy  $n$  jest podzielne przez 4.



Przyjmijmy, że kwadrat  $n \times n$  udało się pokryć dostępnymi płytkami. Skoro pole płytki wynosi 4, to  $n$  musi być parzyste, powiedzmy  $n = 2m$ . Rozważmy kolorowanie naszego kwadratu jak standardowej szachownicy i zauważmy, że każda płytki jest jednego z dwóch rodzajów: zawiera 3 czarne pola lub 1 czarne pole. Niech liczba płytek pierwszego rodzaju wynosi  $k$ , a drugiego  $l$ . Zliczając czarne i białe pola, otrzymujemy  $3k + l = n^2/2 = 2m^2$  oraz  $k + 3l = 2m^2$  (dzięki temu, że  $n$  jest parzyste, mamy po równo pól czarnych i białych!). Stąd w szczególności  $k = l$ , więc  $4k = 2m^2$ , zatem  $m$  jest parzyste, a  $n$  – podzielne przez 4.

Z drugiej strony, łatwo znaleźć pokrycie kwadratu  $4 \times 4$  spełniające warunki zadania, więc także dowolnego kwadratu  $n \times n$  dla  $n$  będącego wielokrotnością 4.

tn. jest złożony ze ściśle przylegających do siebie „bąbli” zawierających wiry różnych rozmiarów i oddziałujących na siebie wzajemnie. W centrum każdego bąbla znajduje się gwiazda – Układ Słoneczny ze Słońcem w środku jest według Kartezjusza tylko jednym z wielu. W modelu tym przestrzeń nie jest pusta: każdy wir jest wypełniony znikomej grubości sferycznymi warstwami tak, że swoboda materii ogranicza się do ruchu kołowego wraz z sąsiadującymi powłokami. W ten sposób Kartezjusz uniknął niemiłego spotkania z Inkwizycją – nieruchoma Ziemia jest po prostu *niesiona* przez sfery niebieskie. Zjawisko grawitacji wyjaśnił natomiast za pomocą *skłonności odśrodkowej* cząstek; te o *tendencji* mniejszej od otaczających je powłok są spychane w dół (do centrum), w kierunku niższych pasm wirów aż do momentu, gdy zostanie przywrócona równowaga. Dla ilustracji swego pomysłu Kartezjusz wrzucał do wytworzonego w wiadrze wody wiru źdźbła trawy, które przesuwały się ku centrum lejka.

Z końcem XVII w. opisany powyżej model Wszechświata uważany był za bardzo intuicyjny i wyraźnie lepszy od konkurencyjnej teorii tajemniczych sił proponowanej przez pewnego Anglika. Dżentelmen ów, Izaak Newton, w swoim *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (*Matematyczne zasady filozofii przyrody*) przedstawił rewolucyjny i odnoszący się do samego sedna interesującej nas sprawy pogląd. Newton pierwszy zdał sobie sprawę, że to jedna i ta sama siła umożliwia ruch planet po ich (eliptycznych) orbitach i sprawia, że jabłka spadają z drzew na ziemię. Newton zauważył podobieństwo między grawitacją i obrotem – planety nie krążą bez powodu wokół Słońca, tylko nieustannie na nie spadają. Ponadto Newton zaproponował ideę absolutnego czasu i przestrzeni absolutnej jako dwóch niezależnie istniejących podmiotów. By wykazać absolutność przestrzeni, Newton wykonał następujący eksperyment: wiszące na skręconej linie wiadro z wodą puszczamy swobodnie. Początkowo – w stosunku do obserwatora – tylko wiadro się obraca tj. powierzchnia wody jest płaska, a naczynie przesuwa się w stosunku do spoczywającego płynu. Z czasem jednak moment pędu wiadra jest przekazywany do płynu, który wkrótce zaczyna się odsuwać od osi rotacji w kierunku brzegów wiadra, przyjmując charakterystyczny wklęsły kształt wiru. Płyn znajduje się teraz w spoczynku w stosunku do wiadra, a porusza się względem obserwatora. Po zatrzymaniu wiadra powierzchnia wody przez chwilę zachowuje wklęsłość, względem wiadra i obserwatora, kształt. Z punktu widzenia wiadra wklęsłość oznacza zarówno rotację, jak i stan spoczynku, jednak dla Newtona, obserwującego doświadczenie z oddali, oznacza zawsze stan rotacji. Absolutna przestrzeń jest zatem przestrzenią niezwiązanego z badanym zjawiskiem obserwatora, znajdującego się w spoczynku. Współczesny Newtonowi Gottfried Leibniz był naczelnym krytykiem idei absolutnej przestrzeni i czasu. Używając argumentów filozoficznych, Leibniz dowodził, że skoro istoty ludzkie nie są w stanie doświadczyć (tj. zmierzyć) absolutu, nie mają również podstaw do twierdzenia, że ów w ogóle istnieje.

*Principia* Newtona powodowały na początku wiele dyskusji i wątpliwości. Na przykład Swift, Münchhausen, Blake i Malfilâtre ośmieszali ideę grawitacji, atakując Newtona *ad personam*; pisano też wiersze o pięknie wirów. Dopiero jakiś czas po śmierci Newtona jego teoria ostatecznie zastąpiła kartezjańskie myślenie. Wśród obecnych na pogrzebie w 1727 r. był także francuski poeta Wolter. Po trzech latach banicji za kąśliwą krytykę francuskiej arystokracji, które spędził w Londynie, Wolter powrócił do Paryża z listą nowych pomysłów i pakietem pism filozoficznych (*Lettres philosophiques*) – niestety, niemal natychmiast po ich publikacji znalazł się za sprawą Ludwika XV ponownie na indeksie. Jeśli chodzi o naukę, Wolter był pod silnym wpływem brytyjskiego empiryzmu i wyśmiewał kartezjańską wirową fizykę jako nadmiernie poetycką i przestarzałą. Pisał, że wypełniony wirami świat Paryża różni się zasadniczo od „próżnego” Londynu, a przekonania Kartezjusza, uważającego światło za cechę powietrza, konfrontował z obliczeniami Newtona, który czas, w jakim światło przebywa drogą Słońce–Ziemia, szacował na około sześciu i pół minuty. Pogląd Newtona przeważał.

Ernst Mach, najbardziej znany krytyk Newtona, przeanalizował doświadczenie z obracającym się wiadrem w *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* (*Nauka mechaniki*, 1883 r.), stwierdzając, że absolutna przestrzeń Newtona ma sens jedynie wtedy, gdy utożsamia się ją ze sferą gwiazd stałych. Mach uznał, że eksperyment Newtona

mówi nam jedynie, że ruch wody w stosunku do ścianek wiadra nie wywołuje żadnej zauważalnej siły odśrodkowej – jest ona natomiast wynikiem obrotu względem Ziemi i wszystkich innych masywnych ciał niebieskich. Woda obraca się w stosunku do całej materii we Wszechświecie; jeśli by jej zabrakło, powierzchnia wody pozostałaby zawsze płaska. Oznacza to, że istnieje relacja między obserwatorem lokalnym i odległym.

Tzw. słaba zasada równoważności stawia znak równości między masą grawitacyjną i inercjalną, podczas gdy pełna zasada utożsamia grawitację i przyspieszenie.

Spadający z nieskończoności obserwator z zerowym momentem pędu nie będzie poruszał się po linii prostej, tylko „zdryfuje” zgodnie z kierunkiem obrotu obiektu, na który spada.

Zwartość według astrofizyków: masa danego obiektu podzielona przez rozmiar.

Myśl ta zainspirowała Alberta Einsteina tak głęboko, że nazywał ją zasadą Macha i stosował na równi z zasadą równoważności w trakcie formułowania ogólnej teorii względności. Poprzez zastosowanie do opisu grawitacji geometrii riemannowskiej Einstein scalił czas i przestrzeń. Od tej pory te dwa, poprzednio autonomiczne, byty nie mogły już istnieć samodzielnie, lecz wyłącznie jako splot, czterowymiarowa *czasoprzestrzeń*. W 1916 r. Einstein był w stanie opisać, w jaki sposób materia wpływa na czas i przestrzeń – a także *vice versa* – za pomocą swych słynnych równań. W zależności od wybranego rozkładu materii (lub pól energii) znajduje się różne geometrie czasoprzestrzeni. Gdy chodzi o obracające się obiekty, w 1918 r. Josef Lense i Hans Thirring opisali okolice obracającego się, masywnego ciała „wlokącego” za sobą inercjalne układy odniesienia, czyli autentyczny czasoprzestrzenny wir – oto jak przyciąganie współdziała z obrotem! Miarę dryfu danego inercjalnego obserwatora można, oczywiście, obliczyć z geometrii danego problemu, i nie jest wcale zaskakujące, że efekt zależy zarówno od masy, jak i od momentu pędu rotującego centralnego ciała.

Ogólna teoria względności najbardziej ekstremalne odkształcenie czasoprzestrzeni przewiduje w pobliżu rotujących czarnych dziur. Te barbarzyńskie obiekty pojawiają się jako osobliwości w rozwiązaniach równań pola Einsteina w obszarach czasoprzestrzeni tak zwartych, że nawet światło nie jest w stanie z nich uciec. Poza światem równań czarne dziury nie ujawniają się chętnie, z ukrycia kierując ruchami gwiazd i gazu, ściągane w świecących spiralach ze znajdujących się zbyt blisko obiektów. I choć efekty te skalują się zwykle z masą czarnej dziury, dopiero uwzględnienie spinu w pełni tłumaczy zawilóści obserwacji, a to z pewnością warte jest przedstawionych powyżej naukowych „zawirowań”.

*tłumaczenie: M. B.*

## Wyniki XXIX Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Szczyrk, 7–10 VI 2012

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych przez Jury (wraz z bibliografią) lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim, publicznym zreferowaniu tego opracowania.

W roku 2012/2013 zaproponowane przez Jury tematy to:

- figury magiczne,
- paradoksy i sofizmaty,
- historia symboliki matematycznej,
- geometria fraktalna,
- twierdzenia o wartości średniej,
- punkty ekstremalne w zadaniach,
- twierdzenia typu Ramseya,
- metoda niezmienników,
- dzielenie sekretu,
- Leibniz vs. Newton,
- półprawdy, kłamstwa i statystyki,
- abstrakcja,
- matematyczne modele zmian klimatu,
- modele matematyczne w epidemiologii i immunologii,
- wielkie katastrofy ekologiczne w liczbach,
- oraz **matematyka okiem plastyka**.

Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach we współpracy z Uniwersytetem Śląskim; [www.spinor.edu.pl](http://www.spinor.edu.pl)

### Jury

w składzie: dr hab. Janusz Morawiec – przewodniczący, dr Tomasz Bielaczyc, dr Paweł Błaszczak, dr Adrian Brückner, dr Paweł Gładki, dr Piotr Kalemba, dr Maria Kania, mgr Renata Kawa, dr Rafał Kucharski, dr Michał Machura, dr Marian Podhorodyński, dr Barbara Przebieracz, dr Małgorzata Serwecińska, dr Jolanta Sobera, dr Anna Szczerba-Zubek, mgr Artur Zieliński,

**postanowiło przyznać:**

**I miejsce: Karol Bacik** z VIII LO w Katowicach za pracę *Ciągi  $\kappa$  – odkrycie czy klapa?*;

**II miejsce: Adam Baranowski** z I LO w Sopocie za pracę *Z prostej w płaszczyznę, czyli jak algebrą zawojować geometrię?*;

**III miejsce: Piotr Pikul** z VIII LO w Katowicach za pracę *Nieznane wykresy znanych funkcji*;

**wyróżnienia: Aleksander Horawa** z I Społ. L w Warszawie za pracę *Pewne własności skończonych przestrzeni metrycznych*,

**Mariusz Nowak** z VIII LO w Katowicach za pracę *Rozwiązywanie równań nieliniowych na przykładzie solitonów*,

**Martyna Waniek** z II LO w Wodzisławiu Śląskim za pracę *Matematyka do wzięcia w rękę*

oraz

**Agata Drewniak** z I LO w Pszczynie za pracę *Jak zarobić a się nie narobić – prwadopodobieństwo*.

W głosowaniu publiczności na najlepszą prezentację **nauczyciele i uczniowie zgodnie nagrodzili Karola Bacika**.

## Co ty wiesz o Kenii?

Na moim biurku przycupnęły trzy kolorowe ptaszki, które moja przyjaciółka *M.* przywiozła z Kenii. *M.* uczestniczy w polskim projekcie współpracy z edukatorami w Kenii. Wchodzą do środowiska nauczycieli i uczniów „nieformalnych” szkół podstawowych w slumsie Nairobi, jednym z największych i najgorszych pod względem jakości życia slumsów Afryki Wschodniej.

To kilkumilionowe miasto w mieście, lepianki i ludzie, którzy utrzymują się z usług na rzecz mieszkańców nieslumsów. W slumsach rodzi się dużo dzieci.

Na edukację kenijską składa się 8 lat szkoły podstawowej, 4 gimnazjum i 4 uniwersytetu. Tylko szkoła podstawowa w Kenii jest bezpłatna i kończy ją około 85% dzieci, 24% – gimnazjum (w przeliczeniu 1100 zł rocznie) i 2% idzie na studia. W ten sposób wysoka edukacja jest dostępna tylko dla dzieci bogatych.

W slumsie w Nairobi są 3 szkoły publiczne, utrzymywane przez państwo zapewniają naukę dwóm tysiącom dzieciaków, a tylko w tym slumsie edukacją podstawową powinno być objęte 300 000 uczniów.

Braki te próbuje się uzupełnić, tworząc „szkoły nieformalne”. Ale i one wymagają nakładów finansowych i co najważniejsze – wyszkolonych nauczycieli. Jedynie 200 takich szkół w Kenii może wspomóc finansowo, wyrывkowo i sporadycznie, rząd (np. jednorazowy zakup podręczników). W nieformalnych szkołach uczą często absolwenci gimnazjum, niewiele starsi od uczniów. A jeżeli myślicie o klasie w takiej szkole, to wymażcie z głowy obrazek kolorowo pomalowanego pokoju, z ławkami i tablicami, komputerami i możliwością wybiegnięcia na przerwę na duże szkolne podwórko.

Poza ptaszkami z Kenii obejrzałam fotografie z klas w szkole niepublicznej: to niewielka izba, w której dobrze, jeżeli każdy z kilkudziesięciu uczniów ma dla siebie krzesło. Powinna być czarna tablica i kreda. Największym zmartwieniem życiowym szkoły jest to, że większość dzieci jest głodna, brakuje toalet w naszym rozumieniu tego słowa. Slums to slums.

Niewielka polska grupa, do której należy *M.*, uczy m.in. nauczycieli ze szkół nieformalnych (za każdym razem kilkunastu), jak rozmawiać z dziećmi o przyrodzie, człowieku i jego biologicznych potrzebach. Prowadzą też z nimi warsztaty doświadczalne z zakresu „przyrody”. Przyjmowani są z wielkim zrozumieniem, ale też ich podopieczni zadziwiają pomysłowością i świeżością obserwacji. W ramach ćwiczeń intelektualnych proponuję Czytelnikowi zastanowienie się, jak wytłumaczyłby 10-letnim uczniom problem nieskończoności. Zwycięzca takiego zadania, nauczyciel z Nairobi, sprawił mnie w zachwyt!

Bardzo trudno wyrwać się ze slumsu, sukces edukacyjny jest jednym z nielicznych na to sposobów. No i sport, ale w tej dziedzinie mówi się o kłęsce kenijskich sportowców na ostatnich igrzyskach olimpijskich. Co prawda, zaimponował zwycięzca olimpijskiego finału biegu na 800 m, David Rudisha (rekord świata), ale liczba olimpijskich kenijskich sukcesów zmalała i miejscowa prasa odpowiedzialnością obarczyła trenerów i niskie finansowanie sportu! Czy my to znamy?

Nieliczni uczeni z Kenii mogą uczestniczyć w badaniach lokalnych: tak też stało się z okazji znalezienia przez naukowców kenijskich i brytyjskich szczątków ludzkich sprzed około dwóch milionów lat. Prawdopodobnie jest to trzeci gatunek człowieka, *Homo rudolfensis*, który żył wówczas obok *H. erectus* i *H. ergaster*. Ewolucja wypróbowywała różne prototypy, z których tylko jeden odniósł ewolucyjny sukces.

Turyści, którzy odwiedzają Kenię, widzą przede wszystkim jedno jej oblicze: Rezerwat Przyrody i bezkrwawe safari (Serengeti). W programie warsztatów z polskimi edukatorami znalazła się także wycieczka kenijskich nauczycieli do parku; ich samych na taką wizytę nie stać.

Magdalena FIKUS

### Co to jest nieskończoność?

Wyobraźcie sobie wielki, wielki budynek. W ścianie ma małą dziurkę. Codziennie pod ścianę przylatuje ptaszek i wrzuca do środka jedno ziarnko piasku. Z drugiej strony budynek ma drugą dziurkę, przez którą piasek może się wysypywać.

I to tak trwa...

# Zera funkcji kwadratowych

Arkadiusz MECEL\*



Nie jeden maturzysta marzy zapewne, żeby na egzaminie dojrzałości rozwiązywać następujące, z pozoru błahe, zadanie:

**Zadanie 1.** Wyznacz liczbę miejsc zerowych funkcji  $f(x) = x^2 + 1$ .

Abiturienta nie zraziłaby prawdopodobnie nawet drobna przeszkoda, jaką jest wyraźny brak informacji o dziedzinie funkcji  $f$ . Z uwagi na wszechobecność zbioru liczb rzeczywistych w obecnym programie nauczania wydaje się, że o żadnych zerach mowy być nie może. Nawet słynna „delta” nie jest tu potrzebna.

Tym, którzy z powodzeniem przejdą przez egzamin maturalny, przyjdzie, być może, zetknąć się z liczbami zespolonymi. Mają one tę własność, że wśród nich znajdują się pierwiastki nawet tak opornych funkcji, jak  $f(z) = z^2 + 1$ . Co więcej, każdy wielomian jednej zmiennej zespolonej o dowolnych współczynnikach (nie tylko całkowitych) ma pierwiastek zespolony. Dowód tego ważnego faktu, znanego powszechnie jako Zasadnicze Twierdzenie Algebry, młodzi adepci matematyki poznają w przynajmniej kilku odsłonach, nierzadko bardzo nieoczekiwanych.

Równanie  $z^2 + 1 = 0$  ma dwa pierwiastki zespolone:  $i$  oraz  $-i$ . Liczba pierwiastków pokrywa się zatem ze stopniem wielomianu i nie jest to żaden przypadek. Zamieniając  $x^2 + 1$  na dowolną inną funkcję kwadratową, nigdy nie dostaniemy więcej niż dwóch różnych miejsc zerowych. Co więcej, nie jest to fenomen dotyczący wyłącznie liczb zespolonych. Okazuje się, że ograniczenie nie powiększy się, o ile założymy przynajmniej tyle, że zarówno współczynniki, jak i dziedzina funkcji  $f(x) = ax^2 + bx + c$  wyposażone są w dowolną strukturę określaną w algebrze mianem *ciała*. Jak się jednak okaże, „przynajmniej” nie zawsze znaczy „mało”.

Dowód Zasadniczego Twierdzenia Algebry przypisywany jest powszechnie Gaussowi. Rozumowanie Księcia Matematyków zawierało jednak subtelną lukę, wyeliminowaną dopiero na początku XX wieku. Autor pierwszego pełnego dowodu, paryski księgarz Jean-Robert Argand, zajmował się matematyką jedynie hobbystycznie...

„Wolno dodawać” i „wolno mnożyć” oznacza, że jeśli  $a, b$  są elementami ciała, to są nimi także  $a + b$  oraz  $a \cdot b$ .

Niepusty zbiór  $K$  nazwiemy ciałem, jeśli wolno w nim odpowiednio dodawać i mnożyć pary elementów. Działania te oznaczamy zwykle przez „+” oraz „·”. Co znaczy „odpowiednio”? Muszą być łączne i związane znanymi prawami rozdzielności. Każde ciało musi mieć zero, oznaczane przez „0”, oraz jedynkę, oznaczaną przez „1”. Są one elementami neutralnymi odpowiednio dodawania i mnożenia, a więc dodawanie zera i mnożenie przez jedynkę nie zmieniają elementu, który poddajemy tym operacjom. Każdy element musi mieć element przeciwny, a każdy poza zerem – element odwrotny. I rzecz dla nas kluczowa: działania „+” i „·” mają być przemienne.

Działanie dwuargumentowe  $\oplus$  jest przemienne, jeśli dla każdych  $a, b \in X$  zachodzi równość

$$a \oplus b = b \oplus a.$$

Wspomnieliśmy już o liczbach rzeczywistych i zespolonych. Są to przykłady ciał nieskończonych. Tymczasem już na zbiorze dwuelementowym można wprowadzić strukturę ciała. Rozważmy zbiór  $\{0, 1\}$ . Przyjmijmy, że działania dodawania i mnożenia określone są zgodnie z następującymi tabelkami:

+	0	1	·	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

Nietrudno zidentyfikować powyższe reguły z działaniami na resztach z dzielenia przez 2. Czytelnik bez trudu sprawdzi, że powyższe warunki zadają na zbiorze  $\{0, 1\}$  strukturę ciała dwuelementowego, oznaczanego zwykle przez  $\mathbb{F}_2$ . Skoro mamy ciało, możemy rozważać funkcje kwadratowe i wyznaczać miejsca zerowe. Spójrzmy na funkcję  $f: \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$  zadaną wzorem  $f(x) = x^2 + 1$ , której współczynniki należą przecież do  $\mathbb{F}_2$ . Podstawiając elementy dziedziny, dostajemy:

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1, \quad f(1) = 1^2 + 1 = 0.$$

Ogólnie, dla każdej liczby pierwszej  $p$  zbiór  $\{0, 1, \dots, p-1\}$  reszt z dzielenia przez  $p$ , wyposażony w działanie dodawania i mnożenia reszt, jest ciałem.



\*doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

A co z liczbami złożonymi? Czy umiemy wskazać takie  $n$ , że  $x^2 + 1$  ma więcej niż dwa pierwiastki modulo  $n$ ? Czy dla różnych  $n$  może ich być dowolnie (skończenie) wiele?

Historia odkrycia kwaternionów jest dobrze znana głównie z uwagi na dubliński most Brougham i formuły mnożenia, które w twórczym zachwycie wyrzył tam sam Hamilton. Jakież to wielki kontrast w porównaniu do wspomnianego już Gaussa, który, odkrywając kwaterniony niemal ćwierć wieku wcześniej niż Hamilton, uznał je za obiekt niegodny publikacji. . .



Analogiczna struktura zadana na zbiorze reszt z dzielenia przez liczbę złożoną ciałem być nie może – zachęcamy Czytelnika do poszukiwania powodu.

Co oznacza bycie pierwiastkiem wielomianu  $x^2 + 1$  w ciele  $\mathbb{F}_p$ ? Jest to, oczywiście, związane z podzielnością przez  $p$ . Jeśli rozważymy zbiór  $X$  liczb całkowitych, takich, które podniesione do kwadratu i powiększone o 1 są podzielne przez  $p$ , to elementy tego zbioru dają co najwyżej dwie różne reszty z dzielenia przez  $p$ . Które dwie? To już inna historia. . .

Postawmy jeszcze jedno pytanie. Czy funkcja  $f(x) = x^2 + 1$  może mieć nieskończenie wiele miejsc zerowych? Odpowiedź brzmi: tak! Przykład dziedziny mającej tę własność jest tym bardziej zaskakujący, że znajduje się bardzo blisko ciał. Mowa tu bowiem o kwaternionach, uogólnieniu liczb zespolonych, których odkrycie, datowane na rok 1843, przypisuje się Hamiltonowi. Czym one są?

Konstruując ciało liczb zespolonych, do zbioru liczb rzeczywistych dokładaliśmy tajemniczy element  $i$ , którego kwadrat był równy  $-1$ . Kwaterniony powstają na podobnej zasadzie, ale zamiast jednego elementu obcego rozważa się aż trzy. Nazwijmy je  $i, j, k$ . Każdy z nich, podobnie jak jednostka urojona, ma tę własność, że jego kwadrat to  $-1$ . Co więcej, iloczyn dowolnych dwóch równy jest trzeciemu (z dokładnością do znaku). Dokładniej,

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad ik = -j, \quad kj = -i.$$

O ile dowolny element w ciele liczb zespolonych wyraża się jako  $a + bi$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ , w przypadku kwaternionów dowolny element przedstawia się jako  $a + bi + cj + dk$ , gdzie  $a, b, c, d$  to dowolne liczby rzeczywiste. Kwaterniony można dodawać i mnożyć (stosując analogiczną metodę jak dla liczb zespolonych). Działania są łączne, zachowane są prawa rozdzielności. Znajdą się, rzecz jasna, zero i jedynka. Niemniej jednak kwaterniony nie są ciałem, a powód podaliśmy już na starcie. Pogwałcona została przemienność mnożenia. Istotnie,  $ij = k$ , ale  $ji = -k$ . Ta drobna (i jedyna!) różnica – brak przemienności mnożenia, który wyklucza kwaterniony z klasy ciał – ma poważne konsekwencje dla zliczania pierwiastków wielomianów.

Przyjrzyjmy się sprawie dokładniej. Funkcja  $f(x) = x^2 + 1$  ma na pewno przynajmniej trzy kwaternionowe zera. Są to elementy  $i, j, k$ . Za dużo jak na ciało, ale wciąż za mało jak na „nieskończenie wiele”. Podstawiamy więc dalej:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{j}{\sqrt{3}} + \frac{k}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{i^2}{3} + \frac{j^2}{3} + \frac{k^2}{3} + \frac{ij}{3} + \frac{ik}{3} + \frac{jk}{3} + \frac{ji}{3} + \frac{ki}{3} + \frac{kj}{3} + 1 = \\ &= \frac{-1 - 1 - 1 + k - j + i - k + j - i}{3} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Nie tylko otrzymaliśmy kolejne miejsce zerowe, lecz także złapaliśmy nieprzemienność kwaternionów na gorącym uczynku. Otrzymane zero to skutek reguły mnożenia elementów  $i, j, k$ . W podobny sposób możemy otrzymać coraz więcej pierwiastków. Dokładny rachunek pokazuje, że wśród kwaternionów postaci  $a + bi + cj + dk$  funkcja  $x^2 + 1$  zeruje się dokładnie na tych, w których współczynnik  $a$  równy jest 0 (tzw. kwaterniony czyste), a które leżą na sferze opisanej równaniem  $b^2 + c^2 + d^2 = 1$ .

Kwaterniony zaprowadziły nas zatem daleko od początkowych rozważań. Ale czy aby na pewno? Czy nie ma w tym żadnego podstępu? Pierwiastki przez nas wskazane, choć jest ich dużo, są bardzo podobne. Wiele z nich różni jedynie tzw. sprzężenie. Oznacza to, że jeśli utożsamilibyśmy wszystkie pary pierwiastków  $x, y$ , dla których istnieje kwaternion odwracalny  $u$ , taki, że spełniony jest warunek  $x = u^{-1}yu$ , to zostałyby nam dokładnie. . . dwa pierwiastki! I nie jest to przypadek, ale całkiem poważne twierdzenie i właściwość mająca analogię wśród wielomianów wyższych stopni. Ale o tym to już przy innej okazji. . .



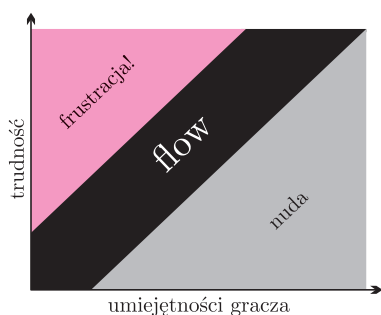
# Poziom trudności gier komputerowych z perspektywy projektanta

Tomek GROCHOWIAK\*



Gry – komputerowe czy jakiegokolwiek inne – opierają się w głównej mierze na pokonywaniu trudności. Niezależnie od tego, czy bawimy się w berka, gramy z kolegami w brydża, czy też spędzamy czas przy najnowszej konsolowej superprodukcji, podstawowy mechanizm tej rozrywki pozostaje dokładnie taki sam. Przed graczem stawiany jest pewien wyimaginowany problem (wyzwanie), który musi on rozwiązać za pomocą posiadanych umiejętności. Przewyciężanie wyzwań przekłada się na postępy w grze, a towarzysząca temu satysfakcja jest głównym źródłem przyjemności czerpanej z gry.

Istotnym elementem dobrej zabawy jest właściwy dobór wyzwań w stosunku do umiejętności osób biorących w niej udział. Każdy, kto miał kiedyś „przyjemność” boksować się ze starszym bratem, rozumie frustrację płynącą z bycia postawionym w sytuacji, w której jest się z góry skazanym na porażkę. Każdy, kto miał szczęście być starszym bratem, wie, że istnieje ograniczona liczba razy, po których pokazywanie „młodemu”, kto tu rządzi, przestaje być zabawne.

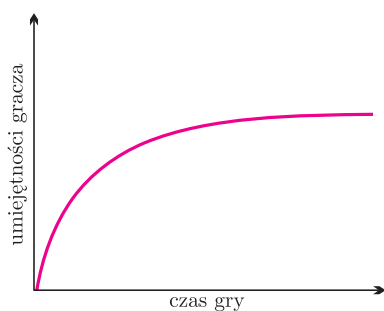


Rys. 1

Jest to związane ze zjawiskiem określanym w psychologii jako *flow*. *Flow*, według twórcy tej koncepcji, Mihály Csíkszentmihályi, to stan przyjemnego uniesienia towarzyszący wykonywaniu zadań w pełni wykorzystujących nasze umiejętności. Jeśli przedstawimy na wykresie stan gracza w zależności od jego umiejętności i trudności rozgrywki (patrz rys. 1), to *flow* będzie obszarem pomiędzy frustracją a nudą, w którym wykonywana czynność jest dla nas wystarczająco trudna, aby być stymulująca, ale jednocześnie stale w zasięgu naszych zwiększających się umiejętności.

Celem projektanta gier jest utrzymanie gracza właśnie w tym ulotnym stanie uniesienia. Przygotowanie dla niego właściwych, stopniowo rosnących wyzwań, przy jednoczesnym braniu pod uwagę tempa rozwoju jego umiejętności. Jest to jeden z kluczowych aspektów profesjonalnego projektowania gier i wymaga dużych nakładów pracy ze strony projektantów. Co ciekawe, sam gracz rzadko zwraca uwagę bezpośrednio na ten aspekt rozgrywki, choć znacząco wpływa on na jego odbiór gry. Jeśli wszystko zostało zrobione we właściwy sposób, gracz może po prostu skupić się na zabawie, nawet nie zdając sobie sprawy, ile pracy zostało włożone w uczynienie jej przyjemną. Jeśli projektanci gry popełnili błąd, odbiorca szybko porzuci grę jako zbyt frustrującą lub nudną.

Skoro odpowiednie wyważenie relacji między stopniem trudności a umiejętnościami gracza na danym etapie gry jest najważniejszym aspektem procesu jej projektowania, to projektant musi zrozumieć, jak przebiega proces uczenia się oraz nabywania i doskonalenia nowych umiejętności. Intuicja podpowiada nam, że człowiek uczy się cały czas w równym tempie, zatem poziom trudności gry powinien rosnąć w przybliżeniu liniowo: jeśli pierwszy etap miał poziom trudności 1, to drugi powinien mieć poziom 2, trzeci – 3, a dziesiąty – 10. Na tej zasadzie funkcjonowało bardzo wiele wczesnych gier. Jest to jednak założenie błędne.



Rys. 2

W pewnym uproszczeniu krzywa uczenia się przypomina wykres funkcji logarytmicznej (rys. 2). Odbiorca zdobywa większość potrzebnych mu umiejętności w pierwszych minutach rozgrywki. Każdy gracz dobrze zna ten proces: „Aha – tak się biega, tak się skacze, a tak się strzela”. W tym początkowym stadium gra nie powinna stanowić żadnego wyzwania – nauka podstaw wystarczająco dobrze spełnia tę rolę. Większość gier dodatkowo pomaga graczowi poprzez rozmaite samouczki. Oczywiście, różni ludzie przyswajają nowe umiejętności w różnym tempie i prezentują różny poziom wyjściowego doświadczenia (nie bez znaczenia jest też skomplikowanie samej gry i jej grupa docelowa), ale generalnie ten okres szybkiego uczenia się trwa zwykle od kilkunastu minut do godziny. Na tym etapie ważne jest, aby gra

\* projektant gier, obecnie prowadzi własne niezależne studio MoaCube

często prezentowała nowe mechaniki (różne sposoby poruszania się bohatera, używania przez niego przedmiotów itp.) i przeszkody. Trzeba nadążyć za graczem szybko poznającym rozmaite sposoby rozwiązywania problemów i szukającym nowych wyzwań.

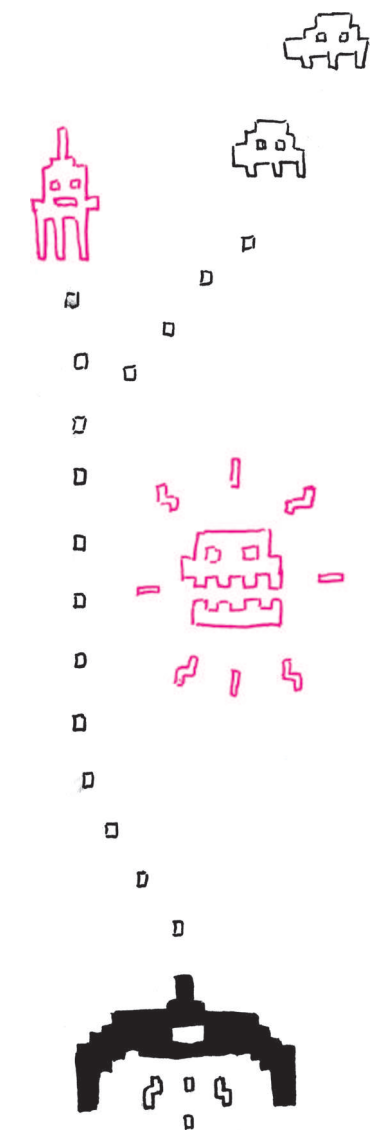
Po tym wstępnym okresie podstawy rozgrywki zostają zepchnięte do podświadomości i gracz może faktycznie skupić się na odbiorze gry jako medium. Nie musi się już zastanawiać, którym klawiszem się skacze i jak pokonać przeciwników w zielonej zbroi – robi to odruchowo. Proces nauki znacznie zwalnia i ogranicza się do stopniowej optymalizacji wykonywanych czynności. Od tego momentu przyrost poziomu trudności powinien być znacznie łagodniejszy i skupiać się bardziej na wymaganiami używania kombinacji wyuczonych umiejętności niż na nauce nowych. Jeśli na początku gracz nauczył się, że przeciwnika A należy przeskoczyć, a do przeciwnika B strzelić, to przeciwnik C może wymagać zarówno skakania, jak i strzelania. Przeciwnik D może wymagać podobnej kombinacji, ale wykonywanej szybciej, natomiast niedobrze, jeśli gra nagle oczekuje od gracza czegoś zupełnie nowego. Na tym etapie zostanie to odebrane jako oszustwo: „Skąd miałem wiedzieć, że mam na tego potwora zrzucić żyrandol!? Wcześniej nie było żadnych żyrandoli!”. To stadium trwa już aż do końca gry.

Oczywiście, nawet w ramach dość precyzyjnie zdefiniowanej grupy docelowej ludzie różnią się doświadczeniem oraz talentem, i idealne dopasowanie poziomu trudności do każdej grającej osoby jest dużym problemem. Dlatego wiele gier umożliwia modyfikację (jawną lub nie) tego poziomu, w zależności od predyspozycji gracza. Klasycznym rozwiązaniem jest wybór poziomu trudności, który odpowiednio przemnaża wartości odpowiadające za trudność rozgrywki przy jednoczesnym zachowaniu podobnego okresu na naukę. Bardziej nowoczesną i jednocześnie kontrowersyjną metodą jest tak zwana trudność adaptatywna. Polega ona na zaimplementowaniu w grze systemu oceniającego umiejętności gracza (np. na podstawie liczby przegranych i wygranych) i łagodnym zmienianiu poziomu wyzwania tak, aby odbiorca cały czas znajdował się w stanie *flow*.

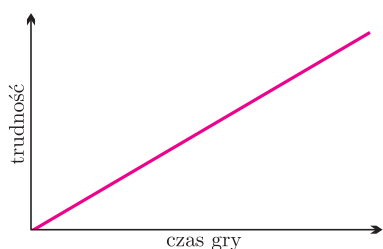
Jednym z zadań projektanta gry jest wyznaczenie zakresu, w którym będzie się zmieniała trudność – gra musi się na jakimś poziomie zaczynać i na jakimś kończyć. W dobie produkcji o budżetach liczonych w dziesiątkach milionów dolarów nie zawsze można sobie pozwolić na długi okres testów i poprawek, dlatego osobiście polecam następującą prostą technikę, która pozwala szybko osiągnąć zadowalający efekt. Jeśli przedstawimy przyrost poziomu trudności w czasie jako krzywą zbliżoną do wykresu funkcji logarytmicznej, to najprostszy wstępny zakres można osiągnąć, ustawiając początek wykresu na poziomie, w którym w grę nie da się przegrać, a koniec tak, aby stanowił wyzwanie nawet dla projektanta. „Stromy” okres szybkiej nauki nie powinien kończyć się dalej niż w 20% czasu gry. Metoda ta pozwala wypracować ramy, dzięki którym gra szybko stanie się grywalna i podatna do testowania.

Kolejnym krokiem jest dodanie wariacji. O ile prostsze gry mogą działać całkiem sprawnie z trudnością liczoną automatycznie według wykresu, to większość obecnie wydawanych tytułów jest znacznie bardziej złożona i podlega tym samym prawom co filmy czy książki. Potrzeba różnorodności i konieczność nadania fabule odpowiedniego tempa sprawiają, że nieznaczne odstępstwa od wykresu są więcej niż wskazane. Jeśli bohater gry spotyka się ze swoją Nemezis, to gracz będzie oczekiwał, że spotkanie to będzie znacznie trudniejsze niż wszystko, z czym miał do czynienia do tej pory. Z kolei po każdym bardziej intensywnym i wymagającym fragmencie gry wypada pozwolić graczowi zrelaksować się i nacieszyć wygraną. Wreszcie, jeśli gra jest długa, konieczne może być wprowadzanie nowych mechanik i wyzwań, aby zapobiec monotonii. Każdej z nowości musi towarzyszyć kolejny okres przeznaczony na szybką naukę. Ostateczny wykres powinien wyglądać mniej więcej tak jak na rysunku 3.

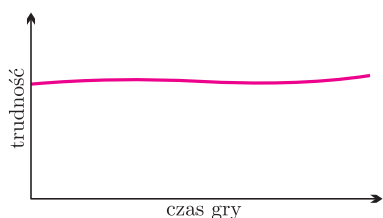
Oczywiście, temat wyważania gier jest dużo bardziej złożony. Kolejne jego aspekty lub praktyczne metody zastosowania powyższej teorii są materiałem nie tyle na kolejne artykuły, co na całe książki. Poznanie podstaw jest jednak bardzo ważne



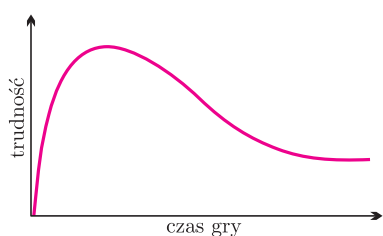
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

dla ogólnego zrozumienia problematyki projektowania gier. Zwłaszcza w dzisiejszych czasach, w których ogromne budżety i ograniczone terminy uniemożliwiają produkcję gier metodą niekończących się testów i poprawek.

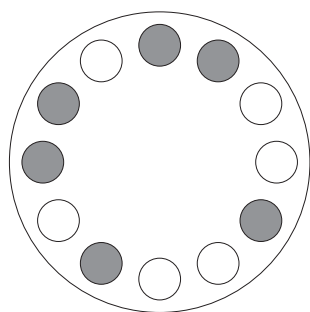
Na zakończenie, w ramach ćwiczenia umysłowego, proponuję przyjrzeć się kilku najczęściej popełnianym błędom podczas projektowania poziomu trudności nowej gry.

Na rysunku 4 przedstawiona została wspomniana na początku liniowa zależność trudności od czasu gry. Każdy, kto grał w grę *Tetris*, wie, o co chodzi. Klocki na kolejnych planszach spadają stopniowo coraz szybciej. Na początku jest przyjemnie. Potem pojawia się nuda – umiemy już grać, ale rozgrywka nadal jest bardzo wolna. Na końcu, po krótkim momencie w stanie *flow*, gra staje się zbyt trudna i przegrywamy. Jeśli chcemy zagrać po raz kolejny, zniechęca nas konieczność czekania, aż gra stanie się znowu wystarczającym wyzwaniem.

Często spotykana w starszych grach strategicznych i amatorskich produkcjach jest zależność z rysunku 5. Występuje ona również w wielu symulatorach lotu. Gra ma bardzo wysoką barierę wejścia, udziela graczowi mało pomocy i od początku traktuje go tak, jakby znał wszystkie zasady. Większość graczy rezygnuje już na samym początku, nawet jeśli pokochaliby grę po dłuższym zapoznaniu się z nią.

Kolejny błąd (rys. 6) jest bardzo często spotykany w grach fabularnych (ang. *role-playing games*) i innych, w których siła postaci gracza rośnie w trakcie gry. Początkowe wyzwania są dość wymagające i interesujące. Jednak wraz z upływem czasu bohater staje się coraz silniejszy, a gra nie nadąża z dostarczaniem odpowiednio trudnych przeszkód. W rezultacie przyrost poziomu trudności jest ujemny i gracz, zamiast starać się bardziej, przykłada się coraz mniej i mniej, aż do poziomu nudy.

**Czy obrazek** widoczny na marginesie da się odróżnić od jego lustrzanego odbicia? Tak, bo nie można go tak złożyć na pół, by wszystkie ciemne kółka trafiły na ciemne, a białe na białe. Ale spójrzmy na obrazek poniższy –



– gdy kóelek jest tylko pięć, przy dowolnym zaciemnieniu niektórych z nich obrazek jest nieodróżnialny od swojego odbicia.

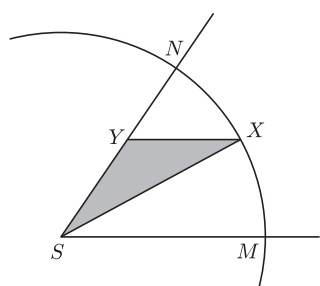
A czy dla sześciu też tak jest? Jak sądzisz, Czytelniku?

M. K.



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



Rys. 1

**M 1366.** Dany jest kąt ostry  $MSN$ , przy czym  $MS = SN$ . Punkt  $X$  leży na krótszym łuku  $MN$  okręgu o środku  $S$  i promieniu  $MS$ , punkt  $Y$  jest takim punktem odcinka  $SN$ , że proste  $SM$  i  $XY$  są równoległe. Znaleźć takie położenie punktu  $X$ , przy którym pole trójkąta  $SXY$  jest największe.

Rozwiązanie na str. 23

**M 1367.** Liczby rzeczywiste  $x, y$  spełniają równość

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1.$$

Udowodnić, że  $x + y = 0$ .

Rozwiązanie na str. 18

**M 1368.** Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie  $n$ , dla których kwadrat złożony z  $n^2$  kwadracików jednostkowych można pokryć płytkami powstałymi z płytki pokazanej na rysunku 2 przez obrót o kąt  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  lub  $270^\circ$ , w ten sposób, by płytki nie zachodziły na siebie.

Rozwiązanie na str. 3



Rys. 2

# 5

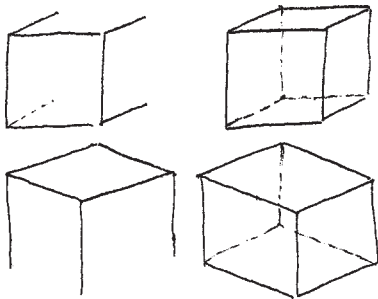
# mała delta

## Lekcja rysunku (3)

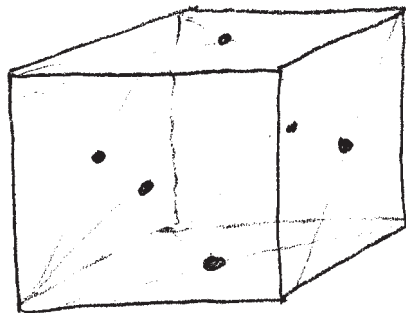
W wielu rysunkach bardzo pomocny jest sześcian, z narysowaniem którego raczej nie mamy problemu.

Widzieliśmy już (*Lekcja 1*), że wykorzystując sześcian, możemy narysować niestandardowo położony czworościan i gwiazdę ośmioramienną. Na bazie sześcianu możemy też skonstruować ośmiościan (była już o nim mowa na *Lekcji 2*) – środki ścian sześcianu są wierzchołkami ośmiościanu. Zaznaczywszy więc w sześcianie środki ścian, łączymy każdy z nich z pozostałymi, z wyjątkiem tego naprzeciwko. Ośmiościan gotowy.

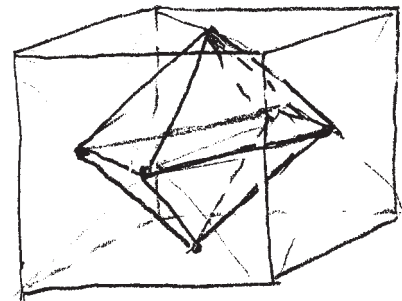
By narysować sześcian, rysujemy odpowiednie kwadraty lub równoległoboki



w zależności od tego, na jakim (jak położonym) sześcianie nam zależy.

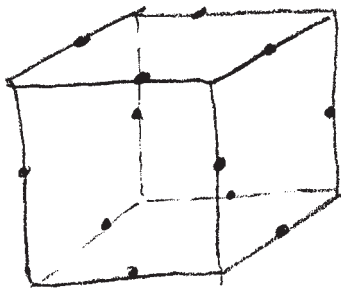


Rys. 1

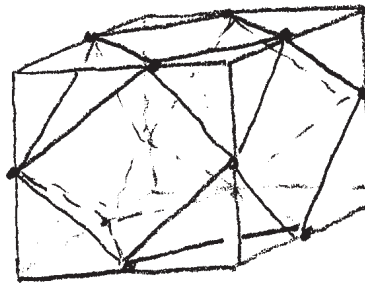


Rys. 2

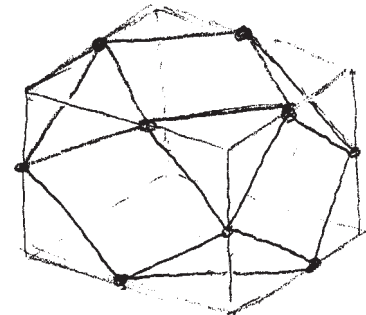
Inną figurę dostaniemy, gdy zaznaczymy środki krawędzi sześcianu (rys. 3), a następnie w każdej ze ścian sześcianu połączymy te punkty, tworząc czworokąty (rys. 4). Pomijając krawędzie sześcianu, otrzymamy rysunek wielościanu nazywanego sześcioośmiościanem (widziany z innej strony jest na rysunku 5).



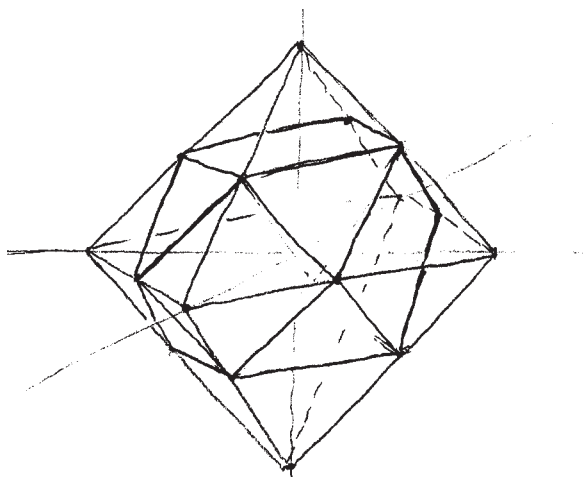
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



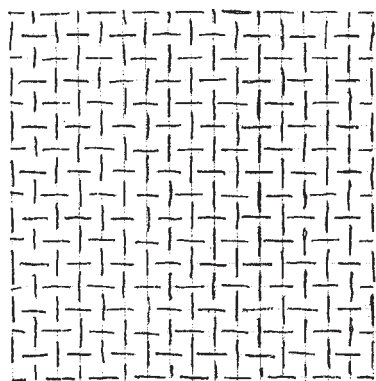
Rys. 6

Skąd taka nazwa? Taki sam bowiem obiekt dostaniemy, gdy w ośmiościanie zaznaczymy środki krawędzi i odpowiednio je połączymy (rys. 6).

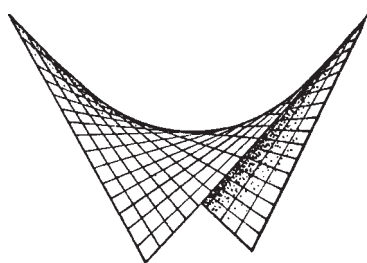
*Pisał i rysował Zdzisław POGODA*

# Geometria jest nauką doświadczalną

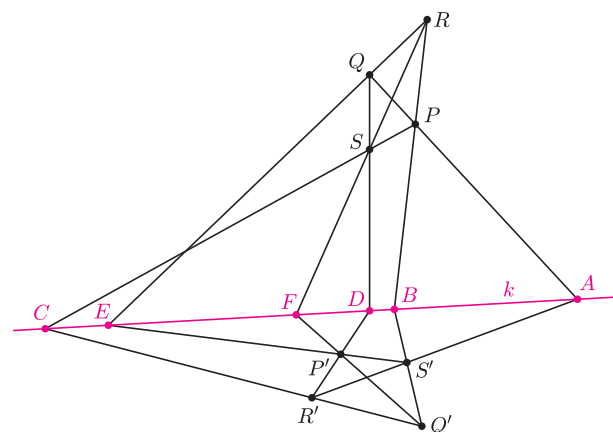
Marek KORDOS



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

W wielu miejscach można przeczytać czy usłyszeć, że matematyka, a zwłaszcza geometria jest nauką aksjomatyczną i wszelkie zawarte w niej fakty uzyskuje się właśnie z aksjomatów przez podporządkowane prawom logiki dowody.

I chyba nikt w rzeczywistości nie spotkał się w szkole czy na studiach z tak opisaną sytuacją. Nietrudno też byłoby uzasadnić, dlaczego tak jest, ale tu nie będziemy tego robić, tylko zajmijmy się kratką wplecioną z wikliny albo z dość sztywnych drutów (takich, z jakich zrobione są siatki w płotach), taką jak na rysunku 1.

To, że jest ona kwadratowa, można łatwo zmienić. Jeśli pociągniemy ją (rzecz jasna, delikatnie) za przeciwległe rogi, możemy uzyskać romb (gdy ciągniemy w płaszczyźnie kratki) albo też coś w rodzaju siodła (gdy zegnijemy kratkę – rys. 2). W tym drugim przypadku powstaje pytanie, czy faktycznie w dalszym ciągu pręty wiklinowe (czy druty) mogą pozostać proste, czy też tylko nam się tak wydaje.

To, że faktycznie mogą one pozostać proste, gwarantuje twierdzenie Gallucciego:

*Dane są dwie trójki prostych skośnych, w których każda prosta jednej trójki przecina każdą prostą drugiej trójki. Wówczas każda prosta przecinająca wszystkie proste jednej trójki przecina każdą prostą przecinającą wszystkie proste drugiej trójki.*

Ortodoksyjny geometra powinien w tym momencie sięgnąć po aksjomaty (w wersji Euklidesa, Hilberta, Tarskiego, Krygowskiej, ...) i wyprowadzić z nich to twierdzenie. My, oczywiście, postąpimy inaczej. Narysujemy (starannie, linijką – inne przyrządy nie będą potrzebne) rysunek, taki jak rysunek 3.

W ostatnim zdaniu najistotniejszym słowem jest *narysujemy* i w nim tkwi to, co uzasadni twierdzenie Gallucciego.

Nie piszę *udowodni* w obawie krzyku Beotów, jakby powiedział Gauss. Bardziej odważny ode mnie jest Harold S.M. Coxeter, który przedstawione dalej rozumowanie śmiało (i słusznie) nazywa dowodem.

Istotne jest też to, jak taki rysunek wykonać. I na czym polega jego ważna w poniższych rozumowaniach cecha, jaką jest *stabilność*.

Zaczynamy od narysowania prostej  $k$ . Następnie wybieramy dowolny, nieleżący na niej punkt  $P$  i prowadzimy przez niego dowolne trzy proste przecinające  $k$  (nazwijmy otrzymane punkty przecięcia  $A, B, C$ ).

Teraz na prostej  $PA$  obieramy dowolnie punkt  $Q$  i prowadzimy przez niego dowolne dwie proste przecinające  $k$  (otrzymane punkty nazwijmy  $D$  i  $E$ ) i nierównoległe do dotychczas narysowanych. Ponadto oznaczmy przecięcie prostej  $PB$  z  $QE$  przez  $R$ , a przecięcie  $PC$  z  $QD$  przez  $S$ . I jeszcze niech przecięcie  $RS$  z  $k$  nazywa się  $F$ .

Po drugiej stronie  $k$  wykonamy PRAWIE taki sam rysunek. Punkt  $P'$  obieramy dowolnie. Na prostej  $P'F$  dowolnie obieramy punkt  $Q'$ . Przecięcie prostej  $P'D$  z  $Q'C$  oznaczamy przez  $R'$ , a przecięcie  $P'E$  z  $Q'B$  przez  $S'$ . I teraz okazuje się (proszę sprawdzić, najlepiej wielokrotnie, różnie obierając początkowe punkty), że punkty  $R', S'$  i  $A$  leżą na jednej prostej.

To, że tak się zawsze zdarzy, nazywa się właśnie stabilnością rysunku.

Udowodnienie stabilności tego rysunku, czyli wyprowadzenie tego faktu z powszechnie znanych twierdzeń geometrii, nie jest rzeczą prostą. Robi się to, używając pojęć geometrii rzutowej. Można też spróbować to sprawdzić rachunkowo, ale widać, ile byłoby tu zmiennych (co najmniej 8 razy po dwie współrzędne punktów) i ile równań (12 prostych), z czego wyniknąć by miało jedno równanie trzynastej prostej.

No właśnie: skoro tak jest zawsze, to możemy postąpić jak przyrodnicy i uznać to za prawo przyrody, a takie nie wymagają dowodów.

Spostrzeżenie o stabilności będzie nam potrzebne, abyśmy mogli uznać, że dowodząc czegoś dla tych konkretnych punktów, dowodzimy tego dla dowolnych punktów powiązanych wskazanymi wyżej zależnościami.

Teraz dokonamy całkiem realnej operacji: zegnijemy pod pewnym kątem kartkę z rysunkiem 3 wzdłuż prostej  $k$ . Oczywiście, wygląda to nadal tak samo, więc możemy nadal korzystać z rysunku 3.

Jako jedną z trójek prostych skośnych, o których mówią założenia twierdzenia Gallucciego, weźmy  $PQ'$ ,  $P'Q$  i  $RS$ , jako drugą –  $PQ$ ,  $P'Q'$  i  $R'S$ . Czytelnik Spostrzegawczy zauważy, że na rysunku nie ma tych prostych – to słuszna uwaga, ale ich narysowanie czyniłoby rysunek zupełnie nieczytelnym (nie wiadomo byłoby, które linie przecinają się, a które mijają), a przecież i tak o tych (niewidzialnych) prostych możemy wiele powiedzieć.

Możemy np. sprawdzić, że proste w każdej trójce faktycznie są skośne. Sprawdźmy to dla  $PQ'$  i  $P'Q$  (pozostawiając pozostałe 5 sprawdzeń Czytelnikowi). Gdyby te proste leżały na jednej płaszczyźnie, na jednej płaszczyźnie leżałyby punkty  $P$ ,  $Q$ ,  $A$ ,  $F$ ,  $P'$  i  $Q'$ , a więc kartka nie byłaby zgięta.

Możemy też sprawdzić, że każda z prostych pierwszej trójki przecina każdą z drugiej trójki. Sprawdźmy to dla  $PQ'$  (jak poprzednio, pozostawiając pozostałe 6 sprawdzeń Czytelnikowi) – dla wspomnienia wyobraźni przedstawiamy obok schemat powstałej sytuacji.  $PQ'$  z  $PQ$  ma wspólny punkt  $P$ , a z  $P'Q'$  wspólny punkt  $Q'$ . Trzecie sprawdzenie jest mniej banalne: ponieważ  $QS$  i  $P'R'$  mają wspólny punkt  $D$ , więc leżą na jednej płaszczyźnie i na tej płaszczyźnie poprowadzone są proste  $P'Q$  i  $R'S$  – gdyby były przypadkiem równoległe, wystarczy jeden z punktów na tej płaszczyźnie odrobinę przesunąć (tu korzystamy ze stabilności!).

Tak więc (wraz z Czytelnikiem) uzyskaliśmy dziewięć punktów zaznaczonych na schemacie czarnymi kropkami.

Położmy teraz poprzeczkę na pierwszej trójce prostych (po angielsku *transversal* jest pełnoprawnym terminem geometrycznym) przechodzącą przez  $R$ .

Ponieważ poprzeczka ta przecina  $PQ'$ , więc leży na płaszczyźnie  $RPQ'$ , czyli na  $RBQ'$  ( $RP$  i  $RB$  to ta sama prosta). Analogicznie, skoro przecina  $P'Q$ , więc leży na płaszczyźnie  $RP'Q$ , czyli  $RP'E$ . Zatem ta poprzeczka to przecięcie płaszczyzn  $RBQ'$  i  $REP'$ , czyli prosta  $RS'$ , bo proste  $BQ'$  i  $EP'$  przecinają się w  $S'$ .

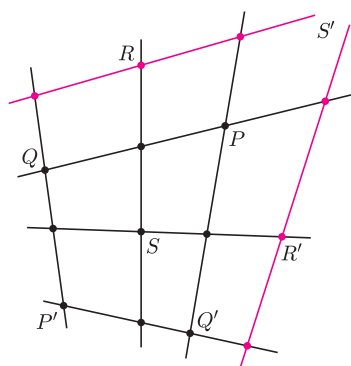
Z kolei położmy na drugiej trójce prostych skośnych poprzeczkę przechodzącą przez  $R'$ . Leży ona na  $R'PQ$ , czyli  $R'AQ$  i na  $R'P'Q'$ , czyli  $R'AQ'$ , a więc – jak widać, jest prostą  $R'A$ . Nietrudno zauważyć, że  $R'A$  przechodzi przez  $S'$ , a więc poprzeczki mają punkt wspólny, mianowicie  $S'$ .

\* \* \*

Nietrudno wyobrazić sobie, że przedstawiony wyżej dowód nie wszystkich przekonał. Formalistom brakowało zapewne odwołania nie tyle może do aksjomatów, co do jakichś powszechnie uznanych za pewne, a także za normalne, twierdzeń – takich, na które moglibyśmy się powoływać, bez obawy, że nasz egzaminator ich nie zna. Realistów mogło zrazić zagmatwanie sytuacji, w której rysujemy proste, o których uzasadnianie twierdzenie się nie wypowiada, by nie rysować prostych, o których mówi – i to wszystko jakoby dla większej przejrzystości.

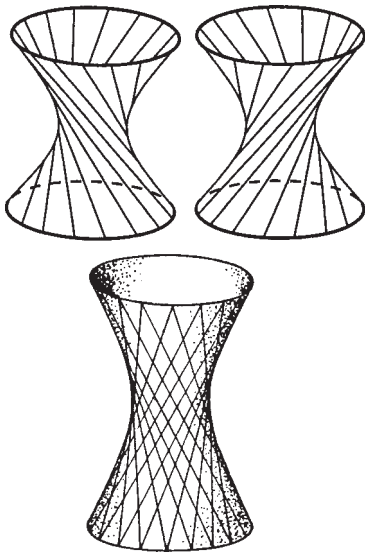
Ale, jako się rzekło, geometria jest nauką doświadczalną. Inżynierowie umocowali sześć zbrojonych betonowych belek w sposób spełniający założenia twierdzenia Gallucciego i, faktycznie, można było na nie kłaść następne belki, zgodnie z tym twierdzeniem. Tak powstał dach przystanku kolejowego Warszawa Ochota. Twierdzenie zatem jest prawdziwe.

Pomysł, by nie rysować prostych, o których orzeka dowodzone twierdzenie, był lansowany przez – zdaniem wielu, największego geometrę XIX wieku – Jacoba Steinerja. Głosił on, że rysunek tylko rozprasza myśli i może nasuwać fałszywe intuicje.



UWAGA! To nie jest rysunek, a tylko schemat pokazujący zależności. Sytuacja rzeczywista tak nie wygląda.





Rys. 4



*Księga Szkocka* to brulion, w którym matematycy lwowscy i ich goście z najróżniejszych krajów od 17 lipca 1935 roku do 31 maja 1941 roku zapisywali przychodzące im do głowy problemy. A było ich niemało, jako że brulion mieścił się w lokalu gastronomicznym, w którym lubili spędzać czas, a który nazywał się właśnie *Szkocka*. Brulion – również z późniejszymi komentarzami i wyjaśnieniami – został wydany w języku angielskim, w 1981 roku w Kanadzie.



**Rozwiązanie zadania M 1367.**

Mamy

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} = \frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{y^2 + 1 - y^2} = y + \sqrt{y^2 + 1} - y.$$

Podobnie,

$$y + \sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

Dodając te równości stronami, otrzymujemy tezę.

**Postscriptum 1 (o takich dowodach).** W podobny sposób można dowieść np. następującego twierdzenia:

*co najmniej jeden z rzutów prostokątnych środka ciężkości czworościanu na płaszczyzny jego ścian leży wewnątrz ściany.*

W przeciwnym bowiem razie ten czworościan położony na stole bez końca by się przewracał.

**Postscriptum 2 (o innej kratce z patyczków).** Jeśli połączymy pionowymi patyczkami dwa poziome jednakowe okręgi, a następnie obrócimy jeden z tych okręgów o jakiś kąt, to otrzymamy jedną z dwóch „górnich” sytuacji z rysunku 4 – w zależności od tego, w którą stronę będziemy obracać. Nie potrzeba specjalnej wyobraźni, by nałożyć jeden rysunek na drugi, a nawet zrealizować to, co wyjdzie, wikliną lub drutem. Taką kratką jest np. konstrukcja nośna miejskiej wieży ciśnień w Ciechanowie.

Tym, którzy z pewnym dystansem odnieśli się do całego tego tekstu, przyjemnie będzie przeczytać, że administracja Ciechanowa też z dystansem odnosi się do tej budowli.

**Postscriptum 3 (może jednak trochę formalizmu).** Pewna Młoda Dama po przeczytaniu wersji wstępnej tego tekstu powiedziała, że to chyba wiele hałasu o nic, bo o obu tych powierzchniach jest mowa na I roku studiów matematycznych w ramach algebry liniowej – są to *paraboloida hiperboliczna* i *hiperboloida jednowłokowa*, o wygodnych równaniach

$$x - y^2 + z^2 = 0 \quad \text{i} \quad x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0.$$

Rzeczywiście, to są te powierzchnie, ale pamiętam, że – gdy byłem na I roku – stwierdzenie, że to takie gęste kratki, zrobiło na mnie wrażenie i chciałem się dowiedzieć, czy to można jakoś zobaczyć, a nie tylko wyliczyć.

**Postscriptum 4 (Wielcy też o tym myśleli).** Okazuje się, że sprawa kratki nękała też Hugona Steinhausa. W *Księdze Szkockiej* są aż cztery postawione przez niego problemy na ten temat. Oto one.

**Problem 44.** Ciągła funkcja  $z = f(x, y)$  przedstawia powierzchnię, przez której każdy punkt przechodzą dwie proste całkowicie na niej leżące. Wykazać, że to jest paraboloida hiperboliczna. To samo bez założenia ciągłości.

I jest dopisek z 30 lipca 1935 roku: *Ten problem pozytywnie rozstrzygnął Banach, również bez założenia ciągłości. Dowód opiera się na spostrzeżeniu, że dowolne dwie proste tej powierzchni albo się przecinają, albo ich rzuty na płaszczyznę  $xy$  są równoległe.*

**Problem 61.** Wyznaczyć powierzchnie  $z = f(x, y)$ , takie, że przez każdy ich punkt przechodzą dwie przystające krzywe płaskie całkowicie na nich leżące (mocniej: przez każdy punkt takie same).

Dopisek Stanisława Ruziewicza (z 31 lipca 1935 roku): *Wszystkie powierzchnie obrotowe mają tę własność; nie wiadomo, czy tylko one.*

**Problem 78, 2 sierpnia 1935 roku.** Znaleźć wszystkie powierzchnie o następującej własności: przez każdy punkt przechodzą dwie krzywe całkowicie na nich leżące i przystające odpowiednio do krzywych  $A$  i  $B$  (np. tak jest na walcu).

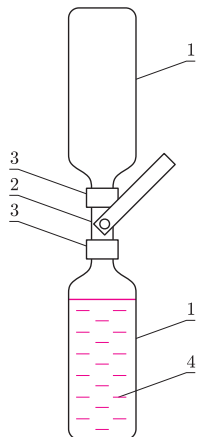
Tu koledzy zawiedli – brak odpowiedzi do dzisiaj.

**Problem 81** (z 6 sierpnia 1935 roku) też jest na ten temat, ale jest postawiony tak zawile, że komentator w wydanej pod redakcją R. Daniela Mauldina *The Scottish Book* ograniczył się do podania kilku możliwych interpretacji zadanych w nim pytań i (co jest całkowicie w tej książce ewenementem) podpisał się nic nieznaczącym pseudo: *Recenzent*.

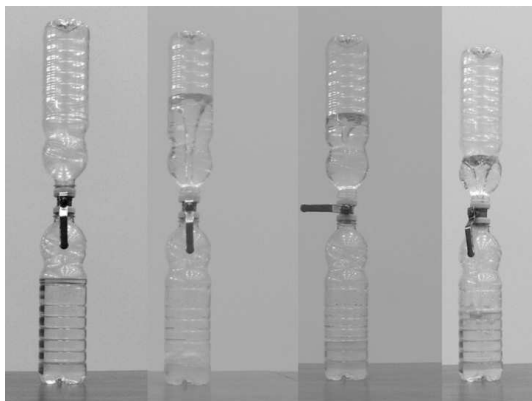
*Po tych wszystkich wyjaśnieniach*

czuję się usprawiedliwiony z napisania tego tekstu, *M. K.*

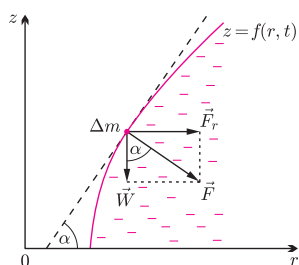
**Materiały i przyrządy:** takie same jak w poprzednim odcinku, a ponadto: zawór kulowy do instalacji wodociągowej, denaturat, olej, gliceryna, okrągły pilnik, linijka, dostęp do cyfrowego aparatu fotograficznego, komputera i drukarki.



Rys. 1. Budowa przyrządu do tłumienia tornada; 1 – przezroczysta, plastikowa butelka, 2 – zawór kulowy, 3 – zakrętka, 4 – woda.



Fot. Kolejne fazy doświadczenia z likwidowaniem i odtwarzaniem tornada.



Rys. 2. Siły działające na ciecz;  $\vec{F}_r$  – siła odśrodkowa,  $W$  – siła ciężkości,  $\vec{F}$  – siła wypadkowa,  $\Delta m$  – masa elementu cieczy,  $\alpha$  – kąt nachylenia stycznej do powierzchni cieczy,  $r, z$  – współrzędne elementu cieczy.

## Likwidujemy tornado Stanisław BEDNAREK

W tym odcinku będziemy kontynuowali doświadczenia z tornadami. Zbadamy dokładniej sposoby ich likwidacji i kształt wewnętrznej powierzchni wirującego leja. Wykonując opisane przed miesiącem doświadczenia, mieliśmy okazję zauważyć, że przy małych średnicach otworów w łącznikach butelek tornada były mniej stabilne i trudniej było je wytworzyć. Dla ich uzyskania należało szybciej obracać na początku przyrządem. Dzieje się tak dlatego, że woda, jak wszystkie ciecze, wykazuje lepkość, czyli tarcie wewnętrzne, hamujące ruch. Im dłużej woda splywa przez otwór w łączniku, tym bardziej rozpraszana jest w wyniku lepkości energia kinetyczna wirowego ruchu wody uzyskanego przez zakręcenie przyrządem.

W kolejnych doświadczeniach możemy zbadać wpływ lepkości cieczy na możliwości wytwarzania tornad. W tym celu zastępujemy wodę w butelkach przez denaturat, olej lub glicerynę i z tymi cieczami postępujemy tak, jak w doświadczeniach opisanych przed miesiącem. Okazuje się, że wytworzenie tornada w glicerynie, nawet przy dużej średnicy otworu w zakrętkach łącznika, jest bardzo trudne ze względu na dużą lepkość tej cieczy. Lepkość gliceryny możemy jednak łatwo zmniejszyć przez zmieszanie jej z denaturatem i użycie do doświadczeń tej mieszaniny.

Przyrząd używany do wytwarzania tornad możemy ulepszyć tak, by dało się likwidować tornada na własne życzenie, a nawet je... utajniać. Rysunek 1 przedstawia budowę takiego ulepszonego przyrządu, w którym łącznik wyposażony jest w zawór kulowy. Należy wybrać butelki z zakrętkami o odpowiednio dużej średnicy, co pozwoli nam na wprowadzenie w nie końcówek zaworu i brzeży otworów smarujemy klejem epoksydowym, łączymy i czekamy do całkowitego stwardnienia kleju. Następnie do ustawionej na stole butelki nalewamy wody, wypełniając ją około 3/4 objętości butelki i skręcając obie butelki łącznikiem.

W celu wytworzenia tornada otwieramy zawór całkowicie, ustawiając jego dźwignię wzdłuż butelek. Chwytny przyrząd za łącznik i szybko odwracamy butelkę z wodą ku górze, po czym przyrząd wprawiamy w ruch obrotowy. Gdy wytworzone tornado się ustabilizuje, szybko zamykamy zawór. Zauważamy wówczas, co pokazane jest także na umieszczonej obok serii zdjęć, że lej tornada zanika nad łącznikiem i proces ten postępuje od dołu ku górze. Lej staje się płytszy i sięga tylko do części głębokości wody w górnej butelce. Jeżeli znowu otworzymy zawór, to lej się pogłębi i otworzy, a tornado powróci do pełnej okazałości. Opisane wygaszanie tornada możemy powtarzać kilkakrotnie, zanim cała woda przepłynie do dolnej butelki. Możemy również wydłużać czas zamknięcia zaworu, aż lej zaniknie całkowicie. Okazuje się, że jeżeli czas zamknięcia zaworu po zaniku leja nie będzie zbyt długi, to tornado znowu powróci, o ile ruch obrotowy cieczy nie będzie zanedo wyhamowany. Doświadczenia z likwidacją tornada możemy powtórzyć po wymianie wody na inne ciecze. Łącznik z zaworem pozwala też na badanie możliwości wytwarzania tornad przy zmienianym płynnie stopniu otwarcia zaworu – zastępuje on pierścienie redukcyjne, opisane w poprzednim artykule.

Spróbujmy jeszcze dokładniej przyjrzeć się kształtowi leja, czyli powierzchni swobodnej wirującej cieczy (rys. 2). Na dowolny element cieczy o masie  $\Delta m$ , znajdujący się na tej powierzchni, działają dwie siły: siła odśrodkowa  $\vec{F}_r$  skierowana poziomo wzdłuż promienia  $r$  oraz siła ciężkości  $\vec{W}$  skierowana pionowo. Ich wypadkowa  $\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{W}$  jest odchylona od pionu o kąt  $\alpha$ , którego tangens wyraża się wzorem  $\text{tg } \alpha = F_r/W = \omega^2 r/g$ . We wzorze tym  $\omega$  oznacza prędkość kątową cieczy, zaś  $g$  – przyspieszenie ziemskie. Powierzchnia swobodna cieczy w stanie równowagi musi przyjąć taki kształt, żeby wypadkowa  $\vec{F}$  była do niej prostopadła. Gdyby tak nie było, to istniałaby składowa styczna siły wypadkowej do tej powierzchni, powodująca dodatkowy przepływ cieczy i naruszająca tę równowagę. Powierzchnia swobodna cieczy jest osiowo symetryczna i w zasadzie wystarczy znaleźć linię opisującą kształt przekroju osiowego, ale nie uwzględniliśmy tu jeszcze zmniejszania się ilości cieczy w butelce (co powoduje zmianę położenia rozważanego fragmentu cieczy) ani lepkości. Odpowiednie zależności, pozwalające opisać tę sytuację, noszą nazwę równania Naviera–Stokesa i są na tyle skomplikowane, że nie będziemy ich tu przedstawiać. Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, by sfotografować uzyskane leje i, wydrukowawszy uzyskane zdjęcia, spróbować dopasować do kształtu powierzchni leja krzywą empiryczną i badać zależności określających ją współczynników od warunków początkowych i własności używanych cieczy. W ten sposób możemy bezpiecznie poznawać wybrane właściwości tornada, którego model zamknęliśmy w butelkach, wyrzucanych zwykle na śmietnik.



## Co w (europejskiej) trawie piszczy

W pierwszym tygodniu lipca 2012 roku w Krakowie gościł VI Europejski Kongres Matematyczny (takie kongresy organizowane są od 1992 roku co 4 lata; poprzednie odbyły się w Paryżu, Budapeszcie, Barcelonie, Sztokholmie i Amsterdamie). Przyznano na nim dziesięć nagród Europejskiego Towarzystwa Matematycznego (dalej w skrócie EMS), przeznaczonych dla osób, które w wieku co najwyżej 35 lat mają błyskotliwe osiągnięcia matematyczne.

W gronie wcześniejszych laureatów nagród EMS są m.in. Richard Borcherds, William Timothy Gowers i Maksym Koncewicz (medale Fieldsa w 1998 r.), Laurent Lafforgue (Fields w 2002 r.), Andriej Okunkow, Grigorij Perelman i Wendelin Werner (medale Fieldsa w 2006 r.) oraz Elon Lindenstrauss, Stanisław Smirnow i Cédric Villani (medale Fieldsa z 2010 r.). To 70% medali Fieldsa przyznanych od 1998 roku.

Nagroda EMS stanowi więc co najmniej przedsięwzięcie do najwyższych laurów w matematyce; choćby dlatego warto wiedzieć, kto i za co z grubsza ją dostaje. Dla Czytelników *Delty* niech to będzie wskazanie szczególnie żywych fragmentów frontu badań, a także informacja, w jakich matematycznych obłokach bujają najbardziej ambitni i zarazem skuteczni naukowo przedstawiciele pokolenia trzydziestolatków. Już Hardy pisał, że duma i ambicja są znakomitymi powodami do uprawiania matematyki; odnotujmy więc, w jakich rejonach lokata ambicji przynosiła ostatnio nie tylko czystą radość, ale i prestiżowe wyróżnienia. Oto dziesiątka tegorocznych laureatów.

**Simon Brendle**, 31 lat, obecnie profesor Uniwersytetu Stanforda, otrzymał nagrodę za przełomowe prace z pogranicza geometrii i teorii równań różniczkowych, dotyczące m.in. różnorodnych potoków geometrycznych, tzn. opisu ruchu wielowymiarowych powierzchni z prędkościami zależnymi od ich krzywizny.

**Emmanuel Breuillard**, 35 lat, pracuje dziś na Uniwersytecie Paris-Sud w Orsay. Zajmuje się teorią grup, a w swojej pracy wykorzystuje metody pochodzące m.in. z rachunku prawdopodobieństwa, teorii liczb i kombinatoryki.

**Alessio Figalli**, 28 lat, jest profesorem na Uniwersytecie w Teksasie w mieście Austin. Interesuje go m.in. rachunek wariacyjny, nierówności w przestrzeniach funkcyjnych i zagadnienie optymalnego transportu. Oto przykład problemu z kręgu jego badań: przypuśćmy, że zamknięta powierzchnia w przestrzeni ogranicza obszar o objętości  $\frac{4}{3}\pi$  (taki, jak kula jednostkowa), zaś jej pole nieznacznie przekracza  $4\pi$ . Co można powiedzieć o kształcie tej powierzchni? Czy i w jakim sensie jest ona podobna do zwykłej sfery?

**Adrian Ioana**, 31 lat, dziś profesor na Uniwersytecie Kalifornijskim w San Diego. Zajmuje się analizą funkcjonalną, głównie teorią algebr von Neumanna, i jej powiązaniem z teorią ergodyczną i teorią grup.

**Mathieu Lewin**, 34 lata, pracuje na Uniwersytecie Cergy–Pontoise pod Paryżem i zajmuje się zastosowaniami matematyki w chemii kwantowej, m.in. próbami takiego opisu zjawisk chemicznych, który pozwoliłby jednocześnie uwzględnić efekty relatywistyczne i kwantowe.

**Ciprian Manolescu**, 33 lata, od 2008 r. jest profesorem na Uniwersytecie Kalifornijskim w Los Angeles. Zajmuje się topologią i geometrią różniczkową trój- i czterowymiarowych, czerpiąc przy tym metody m.in. z teorii układów dynamicznych i jej okolic. Interesują go także konkretne algorytmy, pozwalające wykrywać stopień i sposób zawężenia krzywej w przestrzeni trójwymiarowej.

**Grégory Miermont**, 33 lata, od 2009 roku jest profesorem w Orsay. Nagrodę EMS dostał za prace, dotyczące struktur losowych o geometrycznym charakterze, m.in. grafów i drzew losowych, losowych odwzorowań płaszczyzny i losowych metryk. Motywacje do badań czerpie m.in. z kwantowej teorii grawitacji.

**Sophie Morel**, 32 lata, jest obecnie profesorem na Uniwersytecie Harvarda. Zajmuje się geometrią arytmetyczną, do której, jak głosi oficjalny komunikat o nagrodzie, *wnosi nowe, nieoczekiwane pomysły*.

**Tom Sanders**, 31 lat, od 2011 r. (po studiach, doktoracie i pierwszej posadzie w Cambridge) pracuje w Oksfordzie. Zajmuje się kombinatoryką, analizą harmoniczną i teorią liczb. Oto twierdzenie, które opublikował w zeszłym roku, wieńcząc szereg wyników, zapoczątkowanych przez medalistę Fieldsa z 1952 r., Klausa Rotha. Niech  $m(n)$  oznacza maksymalną możliwą liczbę elementów takiego zbioru  $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ , który nie zawiera żadnego trójwyrazowego postępu arytmetycznego; wówczas  $n/m(n) \geq c \cdot \log n / (\log \log n)^5$ , gdzie  $c$  oznacza pewną stałą. (Innymi słowy, podzbiory  $\{1, 2, \dots, n\}$  pozbawione trójwyrazowych ciągów arytmetycznych są dla dużych  $n$  *bardzo małe*).

**Corinna Ulcigrai**, 32 lata, wyklada matematykę na Uniwersytecie w Bristolu. Zajmuje się matematycznym opisem chaosu i teorią układów dynamicznych, w tym potokami na gładkich powierzchniach w przestrzeni trójwymiarowej.

Godzi się na zakończenie dorzucić jedno: nikt z laureatów nie zamyka się w jednej, ciasno określonej dziedzinie. Ich prace potwierdzają słynny pogląd Hilberta: w matematyce liczy się rozwiązywanie problemów; sama budowa pięknych teorii jest tylko środkiem do tego celu.

Paweł STRZELECKI

## Informatyczny kącik olimpijski (56): Melodia



Tym razem omówimy zadanie z pogranicza informatyki i muzykologii, które pojawiło się na Bałtyckiej Olimpiadzie Informatycznej w bieżącym roku. W zadaniu mamy do czynienia z pewnym instrumentem muzycznym, za pomocą którego można zagrać  $n$  rodzajów nut. Muzyk ma zadaną melodię, którą chciałby zagrać – jest to sekwencja  $m$  kolejnych nut. Niestety, nie jest to takie proste. Otóż zagranie każdej nuty wymaga zakrycia niektórych otworów instrumentu, a jeśli dwie nuty istotnie różnią się wymaganym sposobem zakrycia, to muzyk nie jest w stanie zagrać jednej z tych nut bezpośrednio po drugiej. . . Innymi słowy, dla każdej pary nut wiadomo z góry, czy można zagrać je pod rząd, czy też nie. Z tego względu zagranie zadanej melodii może nie być możliwe. Muzyk chciałby więc zagrać melodię możliwie najbliższą zadanej, to znaczy zagrać taką melodię złożoną z  $m$  nut, która będzie różniła się od zadanej na najmniejszej możliwej liczbie pozycji – i my mamy mu w tym pomóc. Dodajmy, że w naszym zadaniu liczba możliwych nut jest stosunkowo niewielka (rzędu 100), natomiast cała melodia może składać się nawet ze 100 000 nut.

Jednym z pierwszych pomysłów, jaki narzuca się po przeczytaniu tego zadania, jest programowanie dynamiczne. Ponumerujemy poszczególne rodzaje nut od 1 do  $n$  i oznaczymy kolejne nuty w zadanej melodii przez  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Niech dalej tablica wartości logicznych  $c[i, j]$  reprezentuje podane pary nut, które można zagrać bezpośrednio jedna po drugiej; zakładamy, że dla każdego  $i = 1, \dots, n$  zachodzi  $c[i, i] = \text{true}$ . Chcemy wypełnić dwuwymiarową tablicę  $t$ , w której pole  $t[k, i]$  oznacza najmniejszą liczbę błędów, jakie może popełnić muzyk, grając – zamiast fragmentu melodii  $a_1, \dots, a_k$  – jakąś melodię długości  $k$  kończącą się nutą typu  $i$ . Pomijając warunki brzegowe, pola tablicy  $t$  możemy wyznaczać za pomocą prostej zależności rekurencyjnej, w której sprawdzamy wszystkie możliwe rodzaje nut, jakie mogły wystąpić w melodii bezpośrednio przed zadaną nutą:

$$(*) \quad t[k, i] = (1 - \delta_{ia_k}) + \min_j \{t[k-1, j] : c[j, i] = \text{true}\}.$$

W powyższym wzorze  $\delta_{xy}$  oznacza 1, jeśli  $x = y$ , a 0 w przeciwnym przypadku. To rozwiązanie działa w czasie  $O(mn^2)$  i pamięci  $O(mn)$ .

Da się jednak lepiej. Naturalne wydaje się skorzystanie z faktu, że powyższe rozwiązanie oblicza jedynie  $O(mn)$  różnych wartości. Gdybyśmy tylko byli w stanie jakoś sprytniej wyznaczać minimum we wzorze (\*), np. w czasie stałym, to uzyskalibyśmy rozwiązanie działające zadowalająco szybko. Pewną wskazówką jest tu pierwszy składnik występujący we wzorze (\*). Otóż, w przeciwieństwie do drugiego składnika, może on przyjmować tylko dwie różne wartości, które zależą jedynie od tego, czy w  $k$ -tym kroku decydujemy się zagrać poprawną nutą  $a_k$ , czy też nie.

Przyjrzyjmy się pierwszemu z tych przypadków i spróbujmy zmienić nieco nasze podejście. Gdyby udało nam się wyznaczyć jednowymiarową tablicę  $p$ , w której  $p[k]$  to maksymalna liczba poprawnie zagranych nut podczas wykonywania początkowego fragmentu melodii długości  $k$ , przy założeniu, że  $k$ -tą nutę zagramy poprawnie, to moglibyśmy już łatwo podać wynik – byłoby to maksimum ze wszystkich elementów tablicy  $p$  (dlaczego?). Przy wypełnianiu tego typu tablic za pomocą programowania dynamicznego  $p[k]$  oblicza się zazwyczaj jako maksimum z tych wartości  $p[l] + 1$ , dla  $l < k$ , które „pasują do faktu  $p[k]$ ”. W naszym przypadku przy obliczaniu  $p[k]$  bierzemy pod uwagę te wartości  $p[l] + 1$ , dla których istnieje poprawna (czyli możliwa do zagrania) melodia długości  $k$  zawierająca na odpowiednich pozycjach nuty  $a_l$  i  $a_k$ .

Nie dosyć, że powyższe rozwiązanie ma na starcie złożoność czasową  $\Omega(m^2)$ , to jeszcze nie bardzo widać, jak takie  $p[l]$  znajdować. Jest do tego potrzebny pewien pomysł: otóż

tablicę  $c$  możemy potraktować jako macierz sąsiedztwa pewnego grafu. Wówczas wartość  $p[l] + 1$  pasuje do  $p[k]$ , jeśli w tym grafie istnieje ścieżka długości  $k - l$  łącząca nuty  $a_l$  oraz  $a_k$ . W tym celu wystarczy sprawdzić, czy *najkrótsza* ścieżka w grafie od  $a_l$  do  $a_k$  ma długość nieprzekraczającą  $k - l$  (to przejście myślowe wynika akurat z faktu, że  $c[i, i]$  jest zawsze prawdziwe). Najkrótsze ścieżki między wszystkimi parami wierzchołków (nut) możemy wyznaczyć w czasie  $O(n^3)$ , czy to za pomocą algorytmu Floyd–Warshalla, czy to wielokrotnie wykonując przeszukiwanie wszerz.

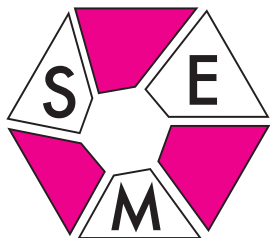
W ten sposób rozwiązaliśmy problem implementacji nowego rozwiązania, ale ciągle nie uporaliśmy się z jego paskudną złożonością czasową. Jedynym nowym pomysłem, jaki pojawił się po drodze, było wprowadzenie grafu nut. Jeśli zdecydujemy się poświęcić mu jeszcze trochę uwagi, to ta decyzja okaże się kluczowa dla skonstruowania efektywnego rozwiązania.

Potrzebne jest nam mianowicie już tylko następujące spostrzeżenie: graf nut ma zaledwie  $n$  wierzchołków, więc wszystkie najkrótsze ścieżki w tym grafie mają długości nieprzekraczające  $n - 1$ . To oznacza, że dla danego  $p[k]$  *wszystkie* wartości  $p[l] + 1$  dla  $l \leq k - n + 1$  są z pewnością dobre, a zatem przy obliczaniu  $p[k]$  wystarczy tylko rozważyć elementy tablicy położone co najwyżej  $n$  pól wstecz oraz maksimum ze wszystkich elementów położonych jeszcze wcześniej!

Zanim jednak zaczniemy świętować nasz sukces, musimy poczynić przykre spostrzeżenie, że graf nut może nie być spójny. To oznacza, że dla danego  $p[k]$  niektóre nawet bardzo odległe wartości  $p[l] + 1$  mogą nie być dobre. Przewyciężenie tej trudności okazuje się już tylko kwestią czasu. Możemy, na przykład, pamiętać zawsze  $n$  ostatnich elementów tablicy  $p$ , a także maksima ze wszystkich wcześniejszych elementów pogrupowane po poszczególnych nutach (czyli  $p[l] + 1$  grupujemy po  $a_l$ ). Sprytniejsze rozwiązanie polega na rozważeniu każdej spójnej składowej grafu nut z osobna i zastosowaniu dla niej metody z jednym pamiętanym maksimum – wówczas nuty melodii występujące poza składową traktujemy po prostu jako niemożliwe do zagrania. W obu przypadkach otrzymujemy algorytm działający w czasie  $O(mn)$  i pamięci  $O(n)$ . Do tego musimy jeszcze doliczyć koszt wyznaczenia najkrótszych ścieżek: czas  $O(n^3)$  i pamięć  $O(n^2)$ .

Dodajmy na koniec, że nasz muzyk nie będzie specjalnie zadowolony, jeśli podamy mu jedynie minimalną liczbę błędów, jakie może popełnić – chciałby przecież wiedzieć, jaką melodię powinien zagrać! Polecamy zatem Czytelnikowi zastanowić się nad tym, jak odtworzyć wynik.

Jakub RADOSZEWSKI



O nowej formule Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów można przeczytać w *Delcie* 2/2012.

## Seminaria *Poznajemy OMG*

W roku szkolnym 2011/2012 zmieniona została formuła Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Zmiana ta zaowocowała znacznym wzrostem zainteresowania Olimpiadą. W związku z tym Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów oraz Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej zorganizowały w całej Polsce cykl seminariów *Poznajemy Olimpiadę Matematyczną Gimnazjalistów*.

Seminaria, których w roku szkolnym 2011/2012 odbyło się 24 i w których wzięło udział 716 uczestników, miały na celu upowszechnić ideę OMG wśród nauczycieli szkół gimnazjalnych.

Przeprowadzone po zajęciach badania ankietowe wykazały, że głównymi motywacjami skłaniającymi do udziału w seminariach są potrzeba własnego rozwoju oraz trudności w pracy z uczniem zdolnym. Wyniki świadczą o dużej satysfakcji uczestników z udziału w zajęciach. W ocenie ankietowanych przyczyniły się one w znaczącym stopniu do wzbogacenia ich wiadomości i umiejętności, jak również powinny okazać się bardzo przydatne w pracy zawodowej. Na uwagę zasługują bardzo dobre oceny kadry dydaktycznej.

Seminaria będą kontynuowane w roku szkolnym 2012/2013 jako *Olimpijskie seminaria dla nauczycieli matematyki*. Aktualny harmonogram zajęć oraz informacje o rejestracji można znaleźć na stronie Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów [www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl) w zakładce *Dla nauczyciela*.

Przedstawiamy Czytelnikom niektóre z zadań proponowanych uczestnikom seminariów.

**1. Udowodnij, że w dowolnej grupie osób zawsze znajdują się dwie takie, które mają tyle samo znajomych (przyjmujemy, że jeśli osoba  $A$  zna osobę  $B$ , to także osoba  $B$  zna osobę  $A$ ).**

*Rozwiązanie.* Oznaczmy przez  $n$  liczbę osób w rozważanej grupie. Wówczas każda z nich może znać  $0, 1, 2, \dots, n - 2$  lub wszystkich  $n - 1$  spośród pozostałych; łącznie jest  $n$  możliwości – tyle, ile osób. Gdyby każdy miał inną liczbę znajomych, to w rozważanym gronie byłaby osoba  $A$ , która nie zna nikogo, oraz osoba  $B$ , która zna wszystkich. To prowadzi do sprzeczności, bo czy wtedy  $A$  i  $B$  się znają, czy nie? Wobec tego nie jest możliwe, by każdy miał inną liczbę znajomych.

**2. Dla jakich liczb rzeczywistych  $x$  istnieją takie liczby niewymierne  $a$  i  $b$ , że  $x = a + b$ ?**

*Rozwiązanie.* Dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  można wskazać odpowiednie liczby  $a$  i  $b$  w następujący sposób.

Jeśli liczba  $x$  jest niewymierna, to niewymierne są także liczby  $a = 2x$  oraz  $b = -x$  (dlaczego?). Wówczas, oczywiście,  $a + b = 2x - x = x$ .

Jeśli liczba  $x$  jest wymierna, to liczba  $a = x - \pi$  jest niewymierna (dlaczego?). Wówczas, przyjmując  $b = \pi$ , mamy  $a + b = x - \pi + \pi = x$ .

**3. W czworokącie  $ABCD$  kąt  $BAD$  jest prosty. Wykaż, że**

$$CB + BD + DC \geq 2AC.$$

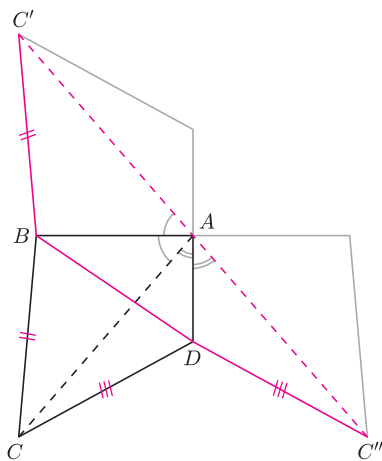
*Rozwiązanie.* Odbijmy czworokąt  $ABCD$  symetrycznie względem prostych  $AB$  oraz  $AD$  i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wówczas

$$\begin{aligned} \sphericalangle C'AC'' &= \sphericalangle C'AB + \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAC'' = \sphericalangle CAB + \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAC = \\ &= 2\sphericalangle BAD = 180^\circ, \end{aligned}$$

więc punkty  $C'$ ,  $A$  i  $C''$  leżą, w tej właśnie kolejności, na jednej prostej. Ponadto  $AC' = AC = AC''$ , stąd  $C'C'' = 2AC$ .

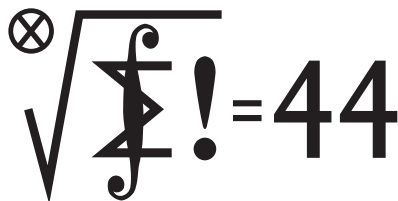
Jednocześnie  $CB = C'B$  oraz  $DC = DC''$ , zatem  $CB + BD + DC = C'B + BD + DC''$ . Teza wynika z faktu, że łamana  $C'BDC''$ , łącząca punkty  $C'$  i  $C''$ , nie może być krótsza niż odcinek  $C'C''$  pomiędzy nimi:

$$CB + BD + DC = C'B + BD + DC'' \geq C'C'' = 2AC.$$



Joanna JASZUŃSKA i Barbara ROSZKOWSKA-LECH

## Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 637 ( $WT = 1,27$ ) i 638 ( $WT = 2,38$ ) z numeru 3/2012

Tomasz Tkocz	Rybnik	46,40
Roksana Słowik	Knurów	41,66
Michał Miodek	Zawiercie	40,98
Adam Dzedzej	Gdańsk	40,33
Zbigniew Skalik	Wrocław	40,02
Tomasz Wietecha	Tarnów	37,94
Paweł Łabędzki	Kielce	35,77
Jędrzej Garnek	Poznań	32,00

Po kilku miesiącach przerwy mamy kolejne przekroczenie bariery 44 (a wszystko wskazuje, że dalsze posypią się niebawem): pan Tomasz Tkocz jest trzydziestym piątym Weteranem matematycznego Klubu 44.



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 534 ( $WT = 1,33$ ), 535 ( $WT = 2,17$ ), 536 ( $WT = 1,25$ ) i 537 ( $WT = 2,20$ ) z numerów 3–4/2012

Michał Koźlik	Gliwice	49,20
Marian Łupieżowicz	Gliwice	46,60
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	38,04
Krzysztof Magiera	Łosów	25,84
Tomasz Wietecha	Tarnów	18,82

Pan Koźlik zdobył 44 punkty po raz drugi, a pan Łupieżowicz – po raz pierwszy.

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

### Zadania z matematyki nr 649, 650

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**649.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  punkt  $D$  jest środkiem przeciwprostokątnej  $AB$ . Dowieść, że prosta  $AB$  jest styczna do okręgu, którego średnica łączy środki okręgów opisanych na trójkątach  $ACD$  i  $BCD$ .

**650.** Dane są liczby naturalne  $n$  oraz  $k$  ( $2 \leq k \leq n$ ). Wyznaczyć maksymalną liczbę wież, które można ustawić na szachownicy o rozmiarach  $n \times n$  tak, by wśród dowolnie wybranych  $k$  wież były dwie, które się wzajemnie atakują (przyjmujemy, że *atakują się wzajemnie* każde dwie wieże, stojące w tym samym rzędzie poziomym lub pionowym, niezależnie od tego, czy są pomiędzy nimi jeszcze jakieś inne wieże).

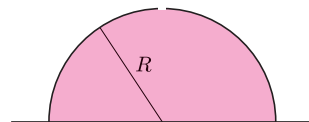
Zadanie 650 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą zgłosił pan Paweł Kubit z Krakowa.

### Zadania z fizyki nr 546, 547

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**546.** Do naczynia w kształcie półsfery o promieniu  $R$ , szczelnie przylegającego do podłoża, zaczęto nalewać wodę przez otwór u góry (rysunek).

Gdy woda wypełniła całe naczynie, podniosła je i zaczęła wyciekać z dołu. Jaka jest masa naczynia? Gęstość wody wynosi  $\rho$ .



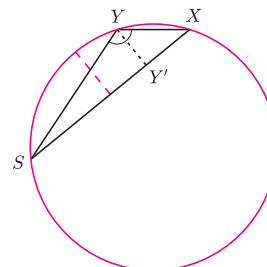
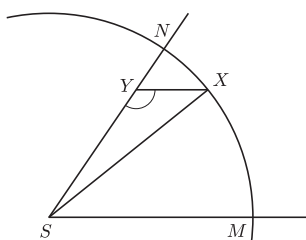
**547.** Jednakowe masy wodoru i helu umieszczono w naczyniu o objętości  $V_1$ . Naczynie to oddzielone jest od pustego naczynia o objętości  $V_2$  przegrodą, która przepuszcza wodór, natomiast nie przepuszcza helu. Po ustaleniu się równowagi ciśnienie w pierwszym naczyniu zmalało dwukrotnie. Jaki jest stosunek  $V_2/V_1$ ? Temperatura jest stała.



### Rozwiązanie zadania M 1366.

Odpowiedź:  $X$  jest środkiem łuku  $MN$ .

Zauważmy, że kąt  $SYX$  ma stałą miarę (niezależną od wyboru punktu  $X$ ), a odcinek  $SX$  – stałą długość. Wszystkie rozważane trójkąty  $SXY$  można więc wpisać w ten sam okrąg, przy czym kąt  $SYX$  jest oparty na ustalonej cięciwie. Pole takiego trójkąta wynosi  $\frac{1}{2}SX \cdot YY'$ , gdzie  $Y'$  to rzut prostokątny punktu  $Y$  na  $SX$ . Jest ono największe, gdy  $YY'$  jest największe, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy  $SY = YX$ . Ale to jest równoważne temu, że  $\sphericalangle YSX = \sphericalangle YXS = \sphericalangle XSM$ , czyli temu, że  $SX$  jest dwusieczną kąta  $MSN$ .



## Prosto z nieba: Ultrajasne źródła rentgenowskie



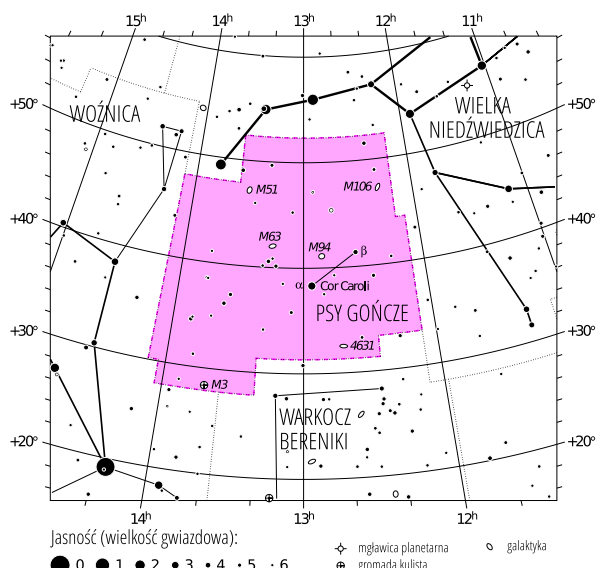
Model ten został sformułowany przez polskich astrofizyków: M. Abramowicza, M. Jaroszyńskiego, M. Kozłowskiego, B. Paczyńskiego i M. Sikorę. Został on nazwany przez Martina Reesa „pączkiem” (ang. *Polish doughnut*).

Spadająca na masywne ciała niebieskie materia staje się częstą przyczyną bardzo energetycznego promieniowania. Niebo oglądane w promieniach Röntgena jest rozjaśniane przez wiele typów obiektów: pozostałości po supernowych, białe karły, pulsary, ale większość tzw. źródeł punktowych to światło dysków akrecyjnych wokół gwiazd neutronowych i różnej wielkości czarnych dziur (od małych, o masach porównywalnych do Słońca, aż do supermasywnych czarnych dziur znajdujących się w aktywnych jądrach galaktyk). Wśród całej tej menażerii uwagę przyciągają ostatnio *ultrajasne źródła rentgenowskie* – są to najprawdopodobniej gwiazdowe czarne dziury otoczone dyskiem, którego jasność jest wielokrotnie większa, niż przewiduje standardowy model akrecji. Według jednej z teorii dysk, z którego spada materia, jest optycznie i geometrycznie gruby, przez co obserwowane promieniowanie ucieka z okolic czarnej dziury jedynie w obszarach biegunowych. Alternatywny model przewiduje istnienie potężnych „wiatrów” wiejących z powierzchni dysku i zmieniających charakter promieniowania. Jest również możliwe, że masa czarnej dziury jest znacznie większa od obserwowanych zwykle kilkunastu mas Słońca i znajduje się w przedziale 100–1000  $M_{\odot}$ . Niedawne obserwacje teleskopów Chandra, XMM-Newton oraz Hubble’a dostarczają świeżych danych na temat tych tajemniczych obiektów – badacze mieli wiele szczęścia, rejestrując gwałtowny rozbłysk w galaktyce spiralnej M83 oraz w galaktyce Andromedy (M31). Towarzyszką obu czarnych dziur (stanowiącymi źródła świecącej materii) to gwiazdy w bardzo różnych stadiach rozwoju i zmienności. Według badających je astronomów oznacza to, że ultrajasne źródła rentgenowskie można podzielić na co najmniej dwie podklasy: jedna to układy zawierające młode, stabilnie rosnące czarne dziury, a druga – zawierające starsze obiekty, które akreują materię w nieregularnych odstępach czasu. Obserwacje te pozwalają, na przykład, na poznanie funkcji rozkładu mas *niewidocznych*, tj. nieakreujących czarnych dziur, których liczbę w naszej Galaktyce szacuje się na około miliarda.

Michał BEJGER

[http://www.nasa.gov/home/hqnews/2012/apr/HQ\\_12-139\\_Chandra\\_Old\\_Black\\_Hole.html](http://www.nasa.gov/home/hqnews/2012/apr/HQ_12-139_Chandra_Old_Black_Hole.html).

## Niebo jak własna kieszeń: Listopad



Gwiazdozbiór Psów Gończych. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

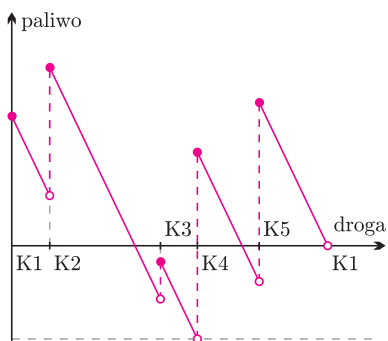
Psy Gończe (łac. *Canes Venatici*) są niewielkim gwiazdozbiorem widocznym na listopadowym niebie po północy, w okolicy Lwa i Wielkiej Niedźwiedzicy; w starożytności jasne gwiazdy Psów Gończych stanowiły część tego ostatniego gwiazdozbioru. Kilka następujących po sobie pomyłek w tłumaczeniu map nieba sprawiło, że zaczęto przypisywać towarzystwo Psów Gończych znajdującemu się nieco niżej na niebie Wolarzowi – „kropkę nad i” postawił w XVII wieku Jan Heweliusz, wyodrębniając je jako pełnoprawny gwiazdozbiór oraz nadając imiona *Asterion* (gwiazdka) i *Chara* (radość), odpowiednio, północnemu i południowemu psu. Chara to również nazwa drugiej co do jasności gwiazdy tej konstelacji,  $\beta$  Canum Venaticorum (4,20<sup>m</sup>); najjaśniejszą gwiazdą Psów Gończych jest natomiast  $\alpha^2$  – Cor Caroli (serce Karola, 2,90<sup>m</sup>), prototyp gwiazd zmiennych typu  $\alpha$  Canum Venaticorum, która nazwę swą zawdzięcza Edmundowi Halleyowi, pragnącemu w ten sposób uczcić jednego z angielskich królów dynastii Stuartów (Karola I lub Karola II Stuarta). Mimo niewielkiego rozmiaru konstelacja zawiera aż pięć obiektów Messiera, w tym galaktyki Wir (M51) oraz Słonecznik (M63), obie związane grawitacyjnie w tej samej lokalnej grupie galaktyk.

28 listopada nastąpi półcieniowe (tzn. takie, gdy Księżyc przesuwają się w stożku półcienia Ziemi) zaćmienie Księżyca oraz całkowite zaćmienie Słońca, niewidoczne, niestety, w Polsce (obszar dobrej widoczności to południowy Pacyfik, Australia i Nowa Zelandia). Nów Księżyca przypada 13., fortunnie dla obserwatorów roju Leonidów, których maksimum wystąpi 17. (radiant we Lwie) – rój ów charakteryzuje się dużą prędkością meteorów, a związany jest z powracającą co 33 lata w okolice Słońca kometą Tempela-Tuttle’a. Wieczorami będzie można podziwiać Jowisza (–2,65<sup>m</sup>) w gwiazdozbiórze Byka, oraz – przez lornetkę – prawie niewidocznego gołym okiem Urana (5,77<sup>m</sup>, w Rybach); Mars w gwiazdozbiórze Strzelca (1,23<sup>m</sup>) zachodzi prawie równocześnie ze Słońcem. Pozostałe planety, Wenus (–3,88<sup>m</sup>) oraz Saturn (1,31<sup>m</sup>), znajdują się obecnie w gwiazdozbiórze Panny i są widoczne przed świtem.

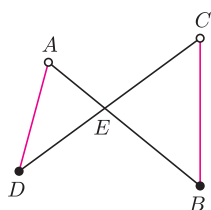
M. B.



Pojęcie „najmniej”, „najwięcej” itp. używamy tu „nieostro”: *najmniejsza* liczba w zbiorze to taka, od której nie ma mniejszej (ale mogą być inne jej równe).



Rys. 1. Przykładowa symulacja podróży zaczynającej się i kończącej u kolegi K1, właściwą podróż należy zacząć od K4.



Rys. 2. Zakładamy, że punkty A i C są białe, a punkty B i D – czarne.

Zadanie 1 pochodzi z obozu naukowego Olimpiady Matematycznej w 1999 roku, a zadanie 6 – z XL OM.

## Ekstrema

Joanna JASZUŃSKA

W wielu problemach matematycznych warto rozważać elementy ekstremalne – największe, najkrótsze, najbliższe. . . Metoda ta bywa często przydatna w zadaniach dotyczących punktów płaszczyzny lub grafów, czyli punktów łączyonych liniami.

1. Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (bak w samochodzie Fredka ma nieograniczoną pojemność). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie dokładnie tyle paliwa, ile potrzeba Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Udowodnij, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc zegarowo po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.
2. W pewnym kraju jest skończona liczba miast, każde dwa z nich łączy droga jednokierunkowa. Wykaż, że istnieje miasto, z którego można dojechać do każdego z pozostałych (niekoniecznie bezpośrednio).
3. Na płaszczyźnie danych jest  $n$  punktów, przy czym odległości między nimi są różne dla różnych par punktów. Każdy punkt łączymy odcinkiem z jego najbliższym sąsiadem. Czy można otrzymać w ten sposób łamaną zamkniętą?
4. Na płaszczyźnie danych jest  $n$  punktów białych i  $n$  czarnych, żadne trzy nie są współliniowe. Wykaż, że można je tak połączyć  $n$  odcinkami, by każdy odcinek miał końce różnych kolorów i by żadne dwa odcinki nie miały punktów wspólnych.

### Rozwiązania

**R1.** Przeprowadźmy symulację podróży Fredka, startując od dowolnego kolegi i dopuszczając podróżowanie z ujemną ilością paliwa (rys. 1). Następnie rozważmy tego kolegę, po dotarciu do którego Fredek miał najmniej paliwa. Rozpoczynając od niego, Fredek jest w stanie odbyć całą podróż z nieujemną ilością paliwa.  $\square$

**R2.** Niech  $A$  będzie miastem, z którego można dojechać do największej liczby z pozostałych. Załóżmy, że istnieje miasto  $B$ , do którego nie można dotrzeć z  $A$ . Droga łącząca  $A$  i  $B$  prowadzi więc z  $B$  do  $A$ . Wtedy z miasta  $B$  można dojechać do  $A$  oraz dalej do wszystkich miast, do których można dotrzeć z  $A$ . Łącznie więc z  $B$  można dojechać do większej liczby miast niż z  $A$ , sprzecznie z wyborem  $A$ .  $\square$

**R3.** Przypuśćmy, że otrzymaliśmy łamaną zamkniętą  $A_1A_2A_3 \dots A_k$  i że  $A_1A_2$  jest jej najdłuższym odcinkiem. Wtedy z  $A_1$  jest bliżej do  $A_k$  niż do  $A_2$  oraz z  $A_2$  jest bliżej do  $A_3$  niż do  $A_1$ . Zatem odcinek  $A_1A_2$  nie mógł zostać narysowany!  $\square$

**R4.** Połączmy punkty odcinkami tak, aby każdy odcinek miał końce różnych kolorów oraz by suma długości wszystkich odcinków była minimalna z możliwych. Przypuśćmy, że odcinki  $AB$  i  $CD$  mają wspólny punkt  $E$  (rys. 2). Wówczas

$$AB + CD = (AE + BE) + (EC + ED) = (AE + ED) + (BE + EC) > AD + BC$$

na mocy nierówności trójkąta. Stąd zmiana odcinków  $AB$  i  $CD$  na  $AD$  i  $BC$  zmniejszyłaby sumę długości wszystkich odcinków, sprzecznie z założeniem.  $\square$

### Zadania domowe

**5.** Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów, z których każde trzy są wierzchołkami trójkąta o polu mniejszym lub równym 1. Wykaż, że istnieje trójkąt o polu nie większym niż 4, zawierający wszystkie te punkty.

*Wskazówka.* Rozważmy trójkąt o maksymalnym polu utworzony przez dane punkty. Przez każdy z jego wierzchołków poprowadźmy prostą równoległą do przeciwległego boku. Otrzymamy trójkąt o polu nie większym niż 4. . .

**6.** W przestrzeni dany jest skończony zbiór punktów, z których każde cztery są wierzchołkami czworościanu o objętości mniejszej lub równej 1. Wykaż, że istnieje czworościan o objętości nie większej niż 27, zawierający wszystkie te punkty.

**7.** Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Wykaż, że można wśród nich znaleźć trzy takie, iż poprowadzony przez nie okrąg nie zawiera we wnętrzu innych punktów tego zbioru.

*Wskazówka.* Rozważmy takie dwa z danych punktów, pomiędzy którymi odległość jest minimalna, oraz wszystkie przechodzące przez nie okręgi.