



tel. 022 411 1592
tel. 022 411 1592

SPIS TREŚCI NUMERU 9 (460)

Szkoły Matematyki Poglądowej
zapraszają
Dominik Kwietniak str. 1

Okrąg dziewięciu punktów
i pewne dwa fakty
Michał Kieza str. 2

Amatorzy w nauce
Bożena Czerny str. 4

Lekcja rysunku (2)
Zdzisław Pogoda str. 6

IDOL w nauce
Magdalena Fikus str. 8

Olimpiady 2012/2013
My, ludzie str.17

Jeszcze jeden niezwykle
silnik
Stanisław Bednarek str.18

Epicka poezja i mroczne
pięścienie
Michał Bejger str.19

Zadania str.19

Informatyczny kącik olimpijski
(54): Drogi
Jakub Radoszewski str.20

Wszystko może się
przydać
Marek Kordos str.21

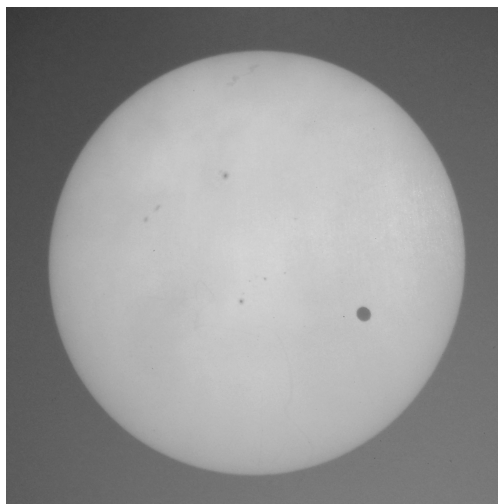
Klub 44 str.22

Prosto z nieba: Bąble Fermiego
Michał Bejger str.24

Niebo jak własna kieszeń:
Wrzesień str.24

Odbicia ortocentrum
Joanna Jaszewska str.25

W następnym numerze polecamy obserwację Wenus



Zdjęcie przejścia Wenus przed tarczą Słońca 6 czerwca 2012 roku, rzutowane za pomocą *camera obscura*, wykonał Michał Bejger na Pointe Venus, Tahiti (w 1769 roku z tegoż punktu obserwował to zjawisko James Cook, ale nie miał aparatu).

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Urszula Swianiewicz, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Fran-Press: www.franpress.pl, infolinia 801-679-466

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2012 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** Zamówienia na prenumeratę przyjmują Zespoły Prenumeraty właściwe dla miejsca zamieszkania klienta do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty; www.prenumerata.ruch.com.pl

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH S.A. Biuro Kolportażu – Zespół Obrotu Zagranicznego, 03-236 Warszawa, ul. Annopol 17a. Tel. 48 22 532 88 23, 532 88 16; www.ruch.pol.pl

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:

SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;

w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;

w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;

kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Szkoły Matematyki Poglądowej zapraszają

Szkoły Matematyki Poglądowej są to odbywające się dwa razy do roku konferencje poświęcone (jak sama nazwa wskazuje) prezentowaniu matematyki w sposób szczególnie, poglądowy właśnie. Ich organizatorem jest Ośrodek Kultury Matematycznej przy Uniwersytecie Przyrodniczo-Humanistycznym w Siedlcach. Chcąc przybliżyć Czytelnikom *Delty* te imprezy, trzeba najpierw w paru słowach wyjaśnić, czym jest owa *matematyka poglądowa*. I tu pojawia się kłopot: autor tego tekstu wątpi w możliwość znalezienia trzech matematyków, którzy byliby w stanie zgodnie ustalić definicję matematyki poglądowej. Dlatego poniższa propozycja nie musi być jedyną i tą najwłaściwszą definicją.

Matematyka poglądowa to matematyka prezentowana bez nadmiaru formalizmów, matematyka przedstawiana obrazowo, poprzez odwoływanie się do intuicji, wyobraźni i zdrowego rozsądku odbiorców. Jeżeli trzeba, to z pominięciem ścisłych definicji i technicznych szczegółów. Dopuszczalne jest nawet (choć szalenie kontrowersyjne) poświęcenie precyzji dla lepszego przedstawienia idei. Idealny poglądowy wykład, nawet traktujący o matematyce współczesnej, powinien być wygłoszony w sposób umożliwiający jego zrozumienie przez zainteresowanego matematyką ucznia starszych klas liceum. Wykład mniej doskonały powinien być dostępny dla odbiorcy o wiedzy odpowiadającej wiedzy studenta po pierwszym roku matematyki lub kierunków pokrewnych (fizyka, informatyka). Jeżeli dodatkowo prezentowane treści będą interesujące dla zawodowych matematyków, to fantastycznie. Wymagania te, choć trudne do spełnienia, są możliwe do zrealizowania, co potwierdzają przykłady licznych wykładów, które dotychczas wygłoszono na Szkołach Matematyki Poglądowej – ich listę, jak też wiele innych szczegółów dotyczących Szkół, można znaleźć na stronie

<http://www.msn.uph.edu.pl/smp/>.

Dlatego też możemy podać definicję matematyki poglądowej w duchu definicji matematyki zaproponowanej przez (chyba) Thurstona (matematyka jest przedmiotem badań matematyków): matematyka poglądowa jest to matematyka prezentowana w taki sposób, jak robią to wykładowcy na Szkołach Matematyki Poglądowej.

Celem Szkół Matematyki Poglądowej jest zatem prezentowanie matematyki żywej, pozbawionej nadmiaru formalizmów, w sposób przystępny dla możliwie szerokiego grona odbiorców. Szkoły są otwarte dla wszystkich, którzy są w jakiś sposób z matematyką związani, uczą jej, uprawiają ją, piszą o niej, pasjonują się nią. Szczególnie mile widziani są młodzi matematycy rozpoczynający studia doktoranckie lub pracę w szkołach wyższych oraz studenci myślący o pracy naukowo-dydaktycznej.

O historii Szkół Matematyki Poglądowej będzie można przeczytać w *Delcie* 1/2013 – tutaj parę słów poświęcimy teraźniejszości i przyszłości tych imprez. W ciągu swej prawie dwudziestopięcioletniej historii Szkoły zdążyły dorobić się paru elementów traktowanych przez stałych uczestników Szkół jako tradycyjne. Ustalił się też pewien kanon dotyczący harmonogramu (programu) samej konferencji. Szkoły odbywają się dwa razy do roku w okolicach ostatniego weekendu (od piątku rano do wtorku w południe) miesiąca na „s”, czyli stycznia lub sierpnia. Tradycyjnie pierwszy odczyt wygłasza zdobywca Medalu Filca – tak nazywamy symboliczną nagrodę za najlepszy wykład na poprzedniej Szkole. Na program Szkoły składają się 24 wykłady trwające zwykle po 45 minut i dwa dłuższe wykłady wieczorne, zaczynające się po kolacji i trwające do nieskończoności (potencjalnej), czyli tak długo, jak wytrzyma prelegent i słuchacze. Każda Szkoła ma swój temat przewodni, z którym związane są (albo przynajmniej powinny być) poszczególne odczyty (warto prześledzić na stronie internetowej listę haseł Szkół, które się już odbyły).

Jubileuszowa, pięćdziesiąta Szkoła, na którą zapraszamy, ma hasło *(Nie)zależność* – oto kilka informacji o niej.

L Szkoła Matematyki Poglądowej odbędzie się w dniach od 25 do 29 stycznia 2013 roku w okolicach Warszawy. Wszystkich zainteresowanych uczestnictwem prosimy o kontakt z Ośrodkiem Kultury Matematycznej przy Uniwersytecie Przyrodniczo-Humanistycznym w Siedlcach (okm@uph.edu.pl).

Matematyka, mówiąc bardzo ogólnie, jest nauką o strukturach, których używamy do ścisłego opisu naszej rzeczywistości. Obiektem badań matematycznych są zarówno same struktury, jak i związki oraz zależności między nimi. Jeżeli przyjmiemy taki punkt widzenia na matematykę, to nie będzie nas dziwić, że pojęcie (nie)zależności pojawia się tak naturalnie w wielu matematycznych kontekstach. O (nie)zależności mówi się w logice matematycznej. (Nie)zależne mogą być tak fundamentalne pojęcia, jak aksjomaty. W podstawach teorii mnogości bada się niezależność aksjomatu wyboru od pozostałych aksjomatów Zermelo–Fraenkela. Mamy niezależność w geometrii, gdzie problem udowodnienia piątego postulatatu Euklidesa długo spędzał sen z powiek badaczom. Pojęcie niezależności znajdziemy, oczywiście, w algebrze (grupy wolne, niezależność w teorii ciał) oraz w algebrze liniowej (liniowa niezależność). (Nie)zależność pojawia się także w teorii prawdopodobieństwa i statystyce... Jednym słowem, niezależność jest pojęciem ważnym i naturalnym w wielu różnych działach matematyki.

Dominik KWIETNIAK, UJ

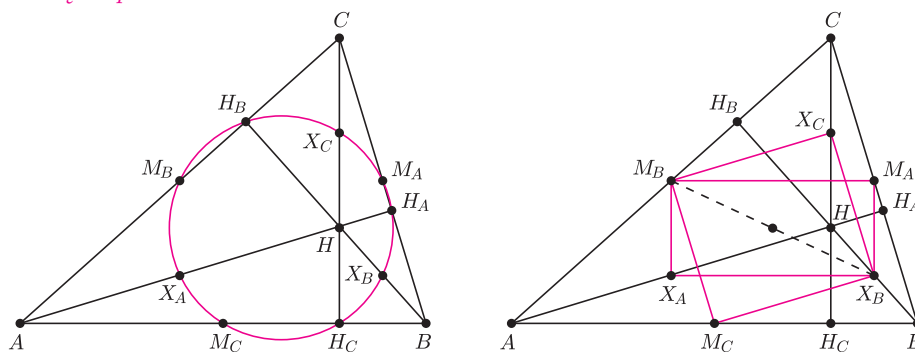


Okrąg dziewięciu punktów i pewne dwa fakty

Michał KIEZA

Trzy niewspółliniowe punkty na płaszczyźnie jednoznacznie wyznaczają okrąg, który przez nie przechodzi. Zatem jeśli pewne cztery punkty leżą na jednym okręgu, to jest to fakt godny odnotowania. W geometrii istnieje niezwykle urocze twierdzenie, które mówi, że aż dziewięć szczególnych punktów trójkąta leży na jednym okręgu.

Twierdzenie. Dany jest trójkąt ABC , a punkt H to jego ortocentrum. Punkty M_A, M_B i M_C są środkami boków BC, CA i AB tego trójkąta, H_A, H_B i H_C to spodki wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A, B i C , zaś X_A, X_B i X_C to środki odcinków AH, BH i CH . Wówczas punkty $M_A, M_B, M_C, H_A, H_B, H_C, X_A, X_B, X_C$ leżą na jednym okręgu zwanym **okręgiem dziewięciu punktów**.



W literaturze istnieje kilka różnych dowodów tego twierdzenia. Oto szkic najpopularniejszego z nich – uzupełnienie szczegółów może być ciekawym ćwiczeniem dla Czytelników, którzy go nie znają.

Dowód. Zauważmy, że czworokąty $M_A M_B X_A X_B$ oraz $M_B M_C X_B X_C$ są prostokątami o wspólnej przekątnej $M_B X_B$. Oznacza to, że ich wierzchołki leżą na okręgu o środku w środku odcinka $M_B X_B$ (ten punkt jest także środkiem każdej z pozostałych przekątnych tych prostokątów). Pozostaje jeszcze zauważyć, że każdy z trójkątów $M_B H_B X_B, M_A H_A X_A$ i $M_C H_C X_C$ jest prostokątny.

Czytelnik Odważny z łatwością sprawdzi, że ten dowód bez kłopotów przenosi się na wyższe wymiary i istnieje odpowiednik okręgu dziewięciu punktów w dowolnym wymiarze. W przestrzeni trójwymiarowej jest to dobrze znana **sfera dwunastu punktów**.

Okazuje się, że okrąg dziewięciu punktów wiąże się ściśle z dwoma dobrze znanymi prostymi faktami.

Fakt 1. Punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC (rys. 1). Prosta CH przecina bok AB w punkcie H_C , zaś okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie H'_C (różnym od C). Wówczas punkt H_C jest środkiem odcinka HH'_C . (W skrócie: ortocentrum trójkąta w symetrii względem jego boków łąduje na okręgu opisanym.)

Dowód. Zauważmy, że

$$\sphericalangle BAH'_C = \sphericalangle BCH'_C = 90^\circ - \sphericalangle CBA = \sphericalangle BAH$$

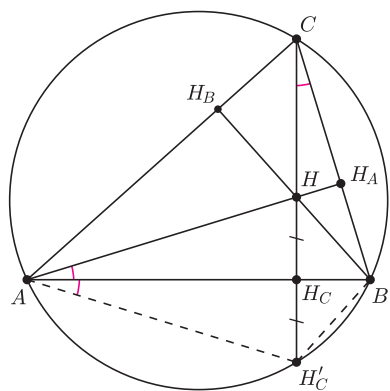
i podobnie $\sphericalangle ABH'_C = \sphericalangle ABH$. W takim razie punkty H i H'_C są symetryczne względem odcinka AB oraz $HH_C = H'_C H_C$.

Fakt 2. Punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC (rys. 2). Niech M_C będzie środkiem boku AB , zaś M'_C punktem przecięcia półprostej HM_C z okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Wtedy M_C jest środkiem odcinka HM'_C .

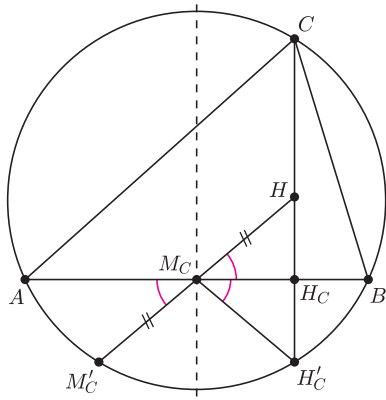
Dowód. Z poprzedniego faktu wnosimy, że

$$\sphericalangle AM_C M'_C = \sphericalangle HM_C B = \sphericalangle H'_C M_C B,$$

Przypomnijmy, że jeśli wysokości czworoboku przecinają się w jednym punkcie, to spodki wysokości, środki ciężkości ścian czworoboku oraz punkty dzielące odcinki łączące ortocentrum czworoboku z jego wierzchołkami w stosunku 2 : 1 (licząc od wierzchołków) leżą na jednej sferze. Jest to **sfera dwunastu punktów**. Pisaliśmy o niej w *Delcie* 1/2011 w artykule *Czworościany ortocentryczne*. W wyższych wymiarach wystarczy zamienić stosunek 2 : 1 na stosunek $(n - 1) : 1$, gdzie n oznacza wymiar rozważanej przestrzeni.



Rys. 1



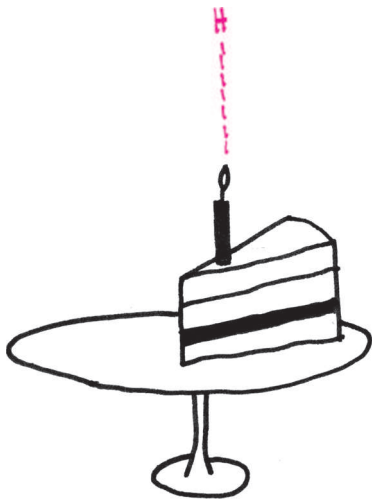
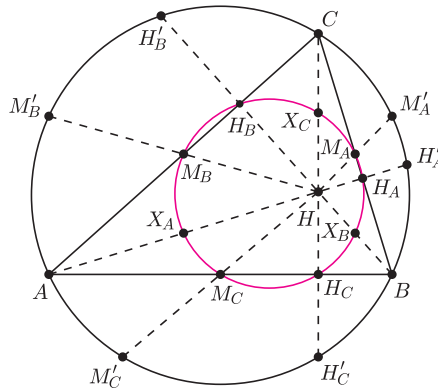
Rys. 2

co oznacza, że proste $M_C M'_C$ i $M_C H'_C$ są symetryczne względem symetralnej odcinka AB . Z drugiej strony symetralna ta jest również osią symetrii okręgu opisanego na trójkącie ABC . To zaś oznacza, że punkty M'_C i H'_C również są względem niej symetryczne. Stąd i z poprzedniego faktu mamy: $M_C M'_C = M_C H'_C = M_C H$.

Teraz możemy w zaskakująco prosty sposób udowodnić twierdzenie o okręgu dziewięciu punktów.

Dowód. Analogicznie do punktów H'_C i M'_C definiujemy punkty H'_A, M'_A, H'_B oraz M'_B . Odnajdujemy, że:

- punkty X_A, X_B, X_C są odpowiednio środkami odcinków HA, HB, HC ,
- punkty H_A, H_B, H_C są odpowiednio środkami odcinków HH'_A, HH'_B, HH'_C ,
- punkty M_A, M_B, M_C są odpowiednio środkami odcinków HM'_A, HM'_B, HM'_C .



Rozważmy teraz jednokładność o środku w punkcie H o skali $\frac{1}{2}$. Z powyższych obserwacji wnioskujemy więc, że przy tej jednokładności:

- punkty X_A, X_B, X_C są odpowiednio obrazami punktów A, B, C ,
- punkty H_A, H_B, H_C są odpowiednio obrazami punktów H'_A, H'_B, H'_C ,
- punkty M_A, M_B, M_C są odpowiednio obrazami punktów M'_A, M'_B, M'_C .

Jednakże punkty $A, B, C, H'_A, H'_B, H'_C, M'_A, M'_B, M'_C$ leżą na jednym okręgu, zatem ich obrazy również.

To, że powyższego dowodu nie widziałem nigdzie w literaturze, wydaje mi się dość zaskakujące, bowiem fakt, iż okrąg dziewięciu punktów jest obrazem jednokładnym okręgu opisanego w rozważanej w dowodzie jednokładności, jest bardzo dobrze znany. Jedynie Michał Szurek w *Opowieściach geometrycznych* wykorzystuje w podobny sposób fakt 1, ale tamten dowód nie jest tak prosty. To właśnie za jego pomocą dowodzi się, że środek okręgu dziewięciu punktów leży na prostej Eulera i jest środkiem odcinka łączącego ortocentrum ze środkiem okręgu opisanego na danym trójkącie.

Co ciekawe, powyższe rozumowanie można odwrócić (rozważając jednokładność odwrotną do opisanej) i za pomocą okręgu dziewięciu punktów udowodnić dwa przytoczone fakty, a więc okrąg dziewięciu punktów jest z nimi równoważny.

Czytelnik Wnikliwy od razu zauważy, że w ten sposób można otrzymać odpowiedniki faktów 1 i 2 w przestrzeni, zaś Czytelnik Odważny sprawdzi to również w wyższych wymiarach. Czy można je jednak otrzymać inną drogą, co pozwoliłoby na uzyskanie z nich sfery dwunastu punktów? Okazuje się, że tak. Przestrzenny odpowiednik faktu 1 był jednym z zadań na finale LXII Olimpiady Matematycznej. Jedną z kilku możliwych metod przeprowadzenia dowodu to dwukrotne zastosowanie faktu 1 oraz wykorzystanie kilku własności czworościanów ortocentrycznych. To rozumowanie można także zastosować w indukcyjnym dowodzie dla wyższych wymiarów, co z pewnością zainteresuje Czytelnika Odważnego. Przestrzenny odpowiednik faktu 2 udowodnić jest nieco trudniej, bowiem poza przestrzenną wersją faktu 1 należy wykorzystać jeszcze prostą Eulera dla trójkąta będącego podstawą czworościanu. Czytelnik Odważny w celu uogólnienia tego faktu na wyższe wymiary będzie musiał wykorzystać odpowiednik prostej Eulera podany na marginesie.

Przypomnijmy, że w dowolnym trójkącie ABC środek okręgu opisanego O , środek ciężkości G oraz ortocentrum H leżą na jednej prostej. Ponadto $OG : GH = 1 : 2$. Ten fakt można uogólnić na wyższe wymiary. Mianowicie, jeśli sympleks w przestrzeni n -wymiarowej ma ortocentrum H , środek ciężkości G , zaś O jest środkiem sfery (odpowiedniego wymiaru) na niej opisaną, to punkty O, G, H leżą na jednej prostej oraz $OG : GH = (n - 1) : 2$.



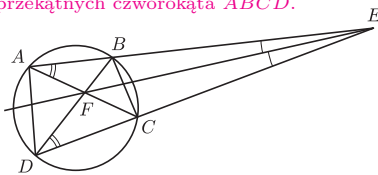
Czy człowiek „z ulicy” ma jeszcze coś do powiedzenia w nauce? Nauka, a w szczególności nauki przyrodnicze, to obecnie ogromne pieniądze: wielkie i drogie laboratoria, teleskopy, satelity. Nie tylko pojedynczy człowiek, ale i pojedynczy kraj może nie udźwignąć takich kosztów. Koszt budowy działającego od kilku lat w CERN-ie Wielkiego Zderzacza Hadronów (LHC, *Large Hadron Collider*) to około 4,6 mld franków szwajcarskich, planowany koszt budowy nowego kosmicznego teleskopu Jamesa Webba (JWST – *James Webb Space Telescope*), który za kilka lat ma zastąpić wysłużony Teleskop Kosmiczny Hubble’a, osiągnął już 8 miliardów, a końca prac nie widać i nie wiadomo, czy budżet jeszcze się nie zwiększy. Krótko mówiąc, takich instrumentów nie buduje się z kieszonkowego. Czy zatem ktoś, kto nie zaplanował kariery zawodowego uczonego, ma w najlepszym wypadku zasiąść w fotelu i poczytać sobie coś w piśmie popularnonaukowym lub w Internecie, czy też pooglądać na kanale *Discovery*? Otóż nie! Każdy może uprawiać naukę!

W jednym z ostatnich numerów prestiżowego czasopisma naukowego Królewskiego Towarzystwa Astronomicznego (MNRAS, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*) ukazał się artykuł [1], który wyrósł ze skoordynowanego działania około 100 000 miłośników astronomii na całym świecie, w tym dzieci szkolnych! Jest to bardzo wartościowa praca, stanowiąca punkt wyjścia do dalszych profesjonalnych badań nad tym, jak ewoluowały galaktyki we Wszechświecie. Pewnie niektórzy z Czytelników już wiedzą, że mam na myśli projekt Galaktyczne Zoo, którego pierwszy etap został właśnie podsumowany. Dla tych, którzy o projekcie nie słyszeli, spieszę z wyjaśnieniami.

Galaktyczne Zoo (<http://zoo1.galaxyzoo.org/pl>) to podprojekt Sloan Digital Sky Survey [2], który polega na klasyfikacji obrazów galaktyk otrzymanych przez 2,5-metrowy teleskop zlokalizowany w Apache Point Observatorium w Nowym Meksyku i wykonujący przegląd całego nieba. Do klasyfikacji wybrano 900 000 obiektów. Pojedynczy naukowiec, a nawet cała ich grupa, nie byłoby w stanie wykonać tego w rozsądnym czasie. Można, oczywiście, użyć komputera i programu do rozpoznawania obrazów, ale programy takie są nadal gorsze od ludzkiego oka w przypadku bardzo subtelnych efektów. Do naukowców należało wykonanie zdjęć nieba, postawienie problemu w taki sposób, by był zrozumiały dla każdego, i przygotowanie odpowiedniego oprogramowania z przyjazną dla użytkownika stroną internetową. „Zwykły użytkownik” wchodził na tę stronę, zapoznawał się najpierw z ogólną ideą projektu, następnie na 10 przykładach przechodził szkolenie na temat odróżniania typów galaktyk (spiralnych od eliptycznych oraz np. tego, że gdy galaktyka spiralna jest „ustawiona bokiem”, to ramiona spiralne mogą być słabo widoczne), a następnie zdawał egzamin (klasyfikacja 10 galaktyk o znanym typie) i przy pomyślnym rezultacie przystępował do pracy na prawdziwej bazie danych. Polska wersja portalu jest jedną z zaledwie czterech wersji językowych, a polscy internauci wykazali się dużą aktywnością. Każda galaktyka była klasyfikowana co najmniej przez 10 różnych osób, w ten sposób 100 000 osób wykonało 9 milionów klasyfikacji! W MNRAS opisano powstały w ten sposób katalog, już dostępny w gotowej formie dla zawodowych astronomów, którzy będą teraz testować na nim swoje modele ewolucji Wszechświata. Kilka pierwszych publikacji już się właśnie ukazało, a projekt jest kontynuowany w rozszerzonej postaci. Wszystkie informacje o tej i innych inicjatywach edukacyjnych można znaleźć na polskiej stronie „Hands on Universe” (EU-HOU, <http://www.pl.euhou.net>).



Rozwiązanie zadania M 1361.
Niech F oznacza punkt przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$.



Zauważmy, że kąty FAE i FDE są równe jako wpisane oparte na tym samym łuku. Z założenia (wbrew rysunkowi), kąty AEF i DEF też są równe. Odcinek FE to wspólny bok trójkątów AEF i DEF , więc są one przystające. Stąd $AE = DE$, czyli trójkąt ADE jest równoramienny.

*Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika



przez AAVSO – *American Association of Variable Star Observers* [3]. Gwiazd jest tak dużo, że profesjonalne teleskopy nie mogą „wszystkiego ogarnąć”, a w dodatku zwykle skupiają się na obserwacjach odległych galaktyk albo na poszukiwaniu planet niedostępnych amatorskim obserwacjom, natomiast informacje o zmienności jasnych gwiazd są zawodowym astronomom, którzy do tej bazy często zagląдают, bardzo potrzebne. Towarzystwo powstało tuż przed I wojną światową, w 1911 r., i zgromadziło już ponad pół miliona krzywych blasku – niektóre uaktualniane są regularnie od lat 50. XX wieku.

Ale to nie wszystko! Istnieje szereg innych projektów podobnych do Galaktycznego Zoo: jest poszukiwanie komet na podstawie danych satelity Soho, poszukiwanie supernowych, czy poszukiwanie planet na podstawie danych satelity Kepler. Kolejne duże projekty naukowe od razu w fazie planowania zaczynają brać pod uwagę możliwość udziału amatorów w pewnych typach zadań. Tak jest w przypadku planowanego kolejnego przeglądu nieba – *Large Synoptic Survey Telescope* (LSST) – który ma dać 10 miliardów gwiazd i 10 miliardów galaktyk. W tej sytuacji bez Chińczyków chyba się nie obejdzie... Ale w innych dziedzinach także po trochu „coś się rusza”, bo szkoda marnować taki ogromny potencjał.

O jednej, zakończonej sukcesem inicjatywie usłyszałam w Warszawie, na konferencji fizyków z okazji budowy w Krakowie akceleratora synchrotronowego. Takie urządzenia istnieją w wielu krajach i służą do prześwietlania struktury różnych rodzajów materiałów, w tym także organicznych. Autor jednego z referatów, Mirosław Gilski, pracował z grupą kolegów od 10 lat nad strukturą pewnego białka, ale ich pomiary nie były jednoznaczne, a modelowanie nie dawało satysfakcjonujących rezultatów: badacze nie umieli ustalić prawidłowej struktury przestrzennej molekuly. Spotkali jednak w USA kogoś, kto pisał edukacyjne gry komputerowe, i wspólnie w sporym zespole przygotowali grę „Zrób sobie białko”. Gracz, mając do dyspozycji znane elementy, konstruował zamkniętą strukturę przestrzenną, dla której komputer obliczał energię wiązania. W zabawie brało udział kilkadziesiąt tysięcy osób, aż wreszcie jedna dziewczyna znalazła rozwiązanie o minimalnej energii, pasujące do wcześniejszych pomiarów! Wynik opublikowało prestiżowe czasopismo *Nature* [4].

Takich inicjatyw zapewne będzie coraz więcej, bo przy wielu kosztownych przedsięwzięciach naukowych i tak myśli się o akcjach edukacyjnych, by lepiej uświadomić podatnikom sens tych badań. Od akcji edukacyjnych do możliwości udziału amatorów w pracach naukowych to już tylko jeden krok. Może nie łatwy, ale jak pokazują wymienione przykłady, da się go zrobić i zrobić go warto.

- [1] Tekst pracy jest dostępny pod adresem <http://arxiv.org/abs/1007.3265>.
 [2] Opis projektu: <http://www.sdss.org>.
 [3] Dostępne pod adresem <http://www.aavso.org>.
 [4] Materiał prasowy na ten temat jest na stronie <http://www.sciencedaily.com/releases/2011/09/110918144955.htm>.



Rozwiązanie zadania M 1360.
 Równoważnie, mamy do udowodnienia

$$(n + 1)(a^n + b^n) - 2(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n) \geq 0.$$

Przekształcamy lewą stronę:

$$\begin{aligned} a^n - a^{n-1}b + a^n - a^{n-2}b^2 + \dots + a^n - ab^{n-1} + b^n - a^{n-1}b + b^n - a^{n-2}b^2 + \dots + b^n - ab^{n-1} = \\ = a^{n-1}(a - b) + a^{n-2}(a^2 - b^2) + \dots + a(a^{n-1} - b^{n-1}) - b(a^{n-1} - b^{n-1}) - b^2(a^{n-2} - b^{n-2}) - \dots - b^{n-1}(a - b) = \\ = (a^{n-1} - b^{n-1})(a - b) + (a^{n-2} - b^{n-2})(a^2 - b^2) + \dots + (a - b)(a^{n-1} - b^{n-1}). \end{aligned}$$

Każdy składnik tej sumy jest dodatni, ponieważ $a^{n-k} > b^{n-k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^k > b^k$. Wobec tego całe wyrażenie ma wartość dodatnią.

Uwaga.

Z zadania 590M z ligi zadaniowej *Delta* 11(426) 2009 (rozwiązanie w numerze 3(430) 2010) wynika nierówność $\frac{a+b}{2} < \sqrt[n]{\frac{1}{n+1} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}}$.

Zatem wielkość $\sqrt[n]{\frac{1}{n+1} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}}$ znajduje się między średnimi $\frac{a+b}{2}$ i $\sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}$.



mała delta

Lekcja rysunku (2)

Kontynuujemy lekcje rysunku rozpoczęte w *Delcie 6/2012*.

Kolejnym obiektem, który będziemy rysować, jest ośmiościan. Zazwyczaj rysujemy go, startując od piramidy o podstawie kwadratowej. Rysujemy więc równoległobok (rys. 1). Pomocniczo zaznaczamy przekątne (rys. 2).

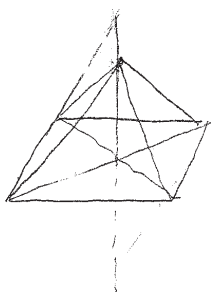


Rys. 1

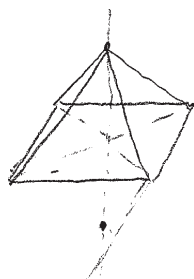


Rys. 2

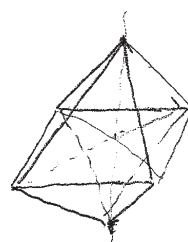
Z punktu ich przecięcia prowadzimy wysokość; musi być ona nieco krótsza od krawędzi. Wierzchołek wybieramy tak, by nie leżał na przedłużeniu krawędzi podstawy (rys. 3). Ośmiościan to sklezione podstawami dwie piramidy, więc tę wysokość przedłużamy w drugą stronę – długość powinna być mniej więcej taka sama (rys. 4). Wreszcie łączymy końce wysokości z wierzchołkami podstawy i dostajemy klasyczny ośmiościan (rys. 5).



Rys. 3

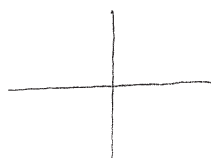


Rys. 4

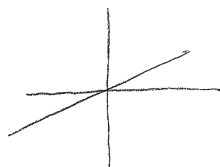


Rys. 5

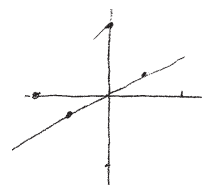
Można jednak postąpić inaczej. Rysujemy pomocniczo dwie proste prostopadłe (rys. 6). Potem jeszcze trzecią przechodzącą przez ich punkt przecięcia, jak w przestrzennym układzie współrzędnych (rys. 7). Teraz na prostych prostopadłych od tegoż punktu przecięcia odkładamy w jednakowych odległościach punkty. Na prostej pochyłej te odległości powinny być nieco mniejsze (wiadomo, chodzi o skrócenie, rys. 8).



Rys. 6

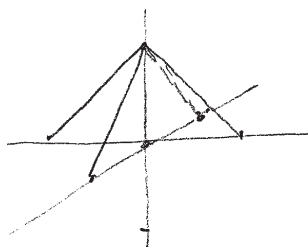


Rys. 7

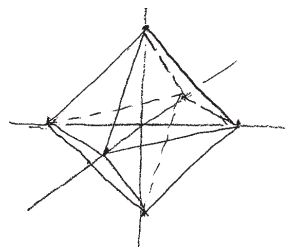


Rys. 8

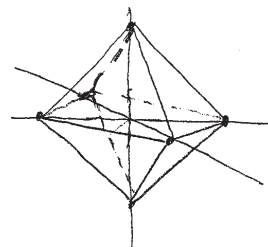
Łączymy każdy z zaznaczonych punktów z pozostałymi z wyjątkiem tego przeciwnego (rys. 9). Wybrane odcinki, te niewidoczne, rysujemy np. linią przerywaną (rys. 10). Dostajemy ośmiościan lekko obrócony wokół pionowej osi. „Stopień” obrócenia możemy kontrolować poprzez odpowiedni dobór trzeciej prostej (rys. 11).



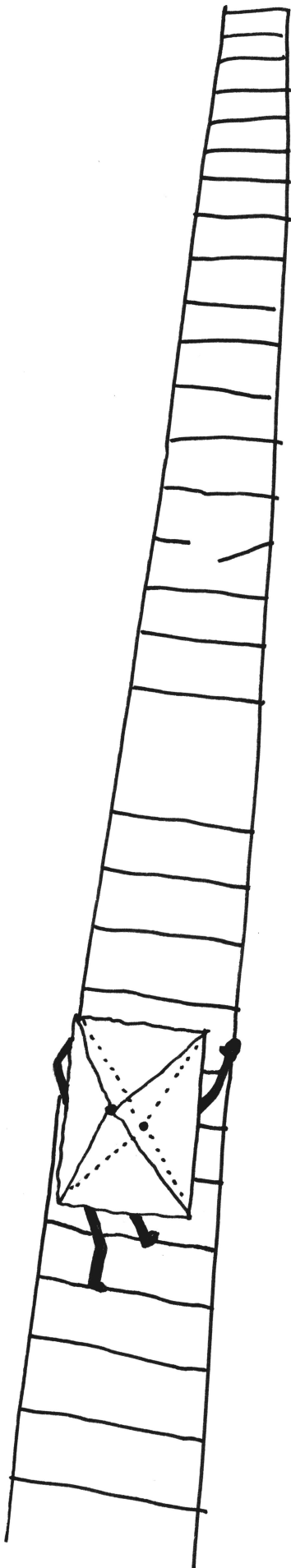
Rys. 9



Rys. 10

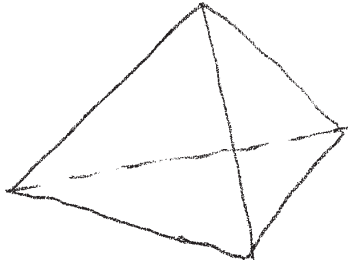


Rys. 11

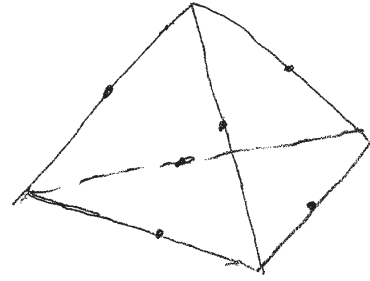


Otrzymany ośmiościan niejako stoi na wierzchołku. A gdyby tak spróbować narysować leżący ośmiościan?

To wcale nie jest trudne. Zaczynamy od narysowania w pozycji standardowej czworościanu pełniącego rolę pomocniczą (rys. 12). Teoria głosi, że środki krawędzi czworościanu są właśnie wierzchołkami ośmiościanu. Wykorzystajmy więc to i w narysowanym czworościanie zaznaczmy środki krawędzi (rys. 13).

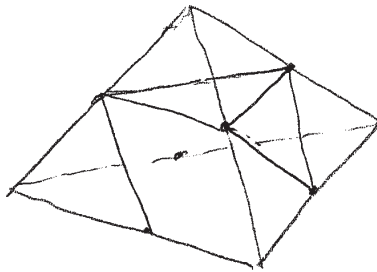


Rys. 12

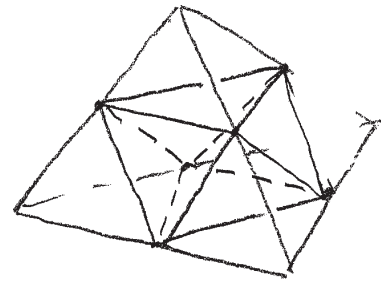


Rys. 13

Następnie w każdym z trójkątów trzeba połączyć pary punktów (rys. 14), pamiętając, że rysowane odcinki powinny być równoległe do odpowiednich odcinków (dlaczego?). Otrzymamy ośmiościan leżący na jednej ze ścian (rys. 15).

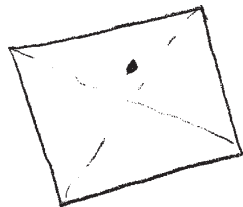


Rys. 14

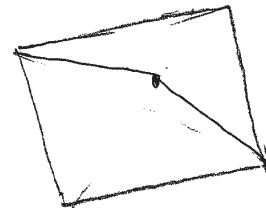


Rys. 15

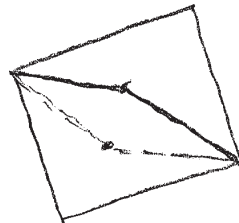
Jeśli przyjrzymy się bliżej tak powstałemu ośmiościanowi, zauważymy, że można go narysować jeszcze inaczej, bez pomocniczego czworościanu. Rysujemy równoległobok (taki bliższy rombowi), wewnątrz wybieramy punkt nieleżący na żadnej przekątnej (rys. 16) i łączymy go z dwoma przeciwległymi wierzchołkami (rys. 17). Z wierzchołków tych wyprowadzamy po jeszcze jednym odcinku równoległym do odcinka wychodzącego z punktu przeciwnego (rys. 18). Teraz wystarczy odpowiednio dopełnić rysunek czterema odcinkami wychodzącymi z pozostałych wierzchołków (rys. 19).



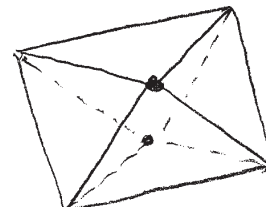
Rys. 16



Rys. 17



Rys. 18



Rys. 19

Prawda, że nie jest to takie trudne?

Pisał i rysował Zdzisław POGODA



IDOL w nauce

Pierwszy polski *FameLab* mamy za sobą. Wygrała go we wszystkich notowaniach, wśród widzów, internautów, jury i sponsora ta sama osoba, Monika Koterska, doskonała „famelabzanka”. Nagrodą dla zwycięzcy był wyjazd na konkurs europejski, w tym roku rozgrywany w Cheltenham, w Wielkiej Brytanii.

FameLab, istniejący od paru lat europejski konkurs, polega na wyłonieniu grupy (a potem z tej grupy zwycięzców) osób młodych, zajmujących się badaniami naukowymi, o których potrafią opowiedzieć barwnie, ciekawie, nie posługując się przeżroczami, a jedynie takimi rekwizytami, które są w stanie samodzielnie wnieść na scenę. No i warunek najtrudniejszy: tę opowieść zamknąć w 3 minutach, skrupulatnie odliczanych licznikiem. Szuka się naukowego idola, niestety, te konkursy jeszcze nie budzą zainteresowania polskiej telewizji, kreatora idoli.

FameLab zorganizowano w Centrum Nauki Kopernik pod patronatem British Council. Chętnych do konkursu było kilkudziesięciu, po eliminacjach do ścisłego finału weszło dziewięciu. Byli z różnych miast, z różnorodnych ośrodków naukowych, różnej specjalności. Wykazali się pomysłowością w wyborze tematu oraz skromnych dopuszczalnych rekwizytów. Swobodnie nawiązywali kontakt z publicznością. Ta ostatnia słuchała ich dwukrotnie – w półfinale i finale: zmieniane zgodnie z regulaminem tematy wystąpień skutkowały gaśnięciem lub rozświetlaniem kandydatów na idoli.

Zwycięzcą konkursu europejskiego został **biochemik Didac Carmona z Austrii**, który mówił o mechanizmach apoptozy, kontrolowanej śmierci komórek.

Monika Koterska (druga nagroda ex quo z **Ioannisem Karypidese**m z Cypru), **doktorantka z UJ**, dowodziła, że najtrwalszym nośnikiem informacji (nie licząc ceramicznych i kamiennych płyt), jest wciąż jeszcze papier, współczesny – wytwarzany wg specjalnej technologii przetrwa przynajmniej 300–400 lat. Płyty CD, pamięci USB i pamięć magnetyczna są mniej trwałe – *nie jesteśmy jeszcze gotowi, żeby pozbyć się książek*. Nasza przedstawicielka zdobyła też wyróżnienie publiczności.

Ten niewątpliwy sukces Polki na naukowej estradzie Europy skłania do pewnych refleksji.

Upowszechnianie nauki dotarło do wspólnego dla wielu ludzkich aktywności miejsca: uświadomienia sobie konieczności docierania do publiczności szybko, atrakcyjnie, krótko i z uwzględnieniem nowoczesnych środków przekazu. Broń Boże nudzić, być zbyt poważnym i rozwlekłym. Oczywiście, my, popularyzatorzy nauki, mamy jeszcze trochę rozsądku i uprawiamy tę popularyzację na różne sposoby, również trochę poważniej i dłuższymi tekstami. Ale już każdy z nas wie, że ma użyć pewnych chwytów uatrakcyjniających narrację. Wykorzystać internet i programy społecznościowe. Dodać obrazki, powiedzieć żart. Nic w tym złego, a jest to już dziś obowiązkowe.

Słuchając tych młodych idoli nauki, pomyślałam również o różnicach w upowszechnianiu nauki przez propagatorów w różnym wieku. Starsi wiedzą, że nie zawsze trzeba mówić o szczegółach, wiedzą, że na takich spotkaniach unika się żargonu danej specjalności, obcojęzycznych skrótów. Potrafią powiedzieć: nie wiem. Zdają sobie sprawę z wagi wyboru tematu dla osiągnięcia sukcesu. Są takie problemy naukowe, których, bez wulgaryzacji, nie da się po prostu prawdziwie opowiedzieć w tak krótkim czasie. Że nie należy próbować odpowiedzieć w trakcie krótkiego wystąpienia na kilka pytań, wystarczy na JEDNO. Że koniecznie trzeba pozwolić na uwagi i pytania słuchaczy, że ten kontakt jest niezwykle ważny, bo on daje występującemu możliwość samooceny i jednocześnie charakterystyki zainteresowań publiczności.

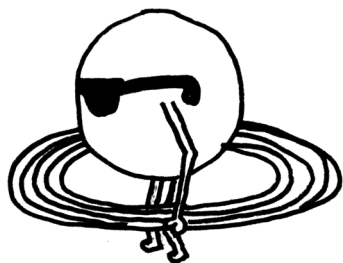
A sukces Moniki Koterskiej jest ważny i radosny. Gratulacje!

Magdalena FIKUS



Rozwiązanie zadania F 819.

Pole magnetyczne Ziemi powoduje, że wszystkie żelazne przedmioty magnesują się w ten sposób, że dolna część staje się biegunem północnym.





Olimpiada

Zadania zawodów I stopnia Olimpiad: Astronomicznej, Fizycznej, Matematycznej oraz Matematycznej Gimnazjalistów 2012/2013

LVI Olimpiada Astronomiczna

Informacje regulaminowe

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.
2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne.
3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, do **10 października 2012 r.**, rozwiązania 3 zadań dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.
4. Uczniowie, którzy przysłażą rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do 20 października br. tematy drugiej serii zadań. Zadania obydwu serii będą również umieszczane na stronie internetowej olimpiady astronomicznej: www.planetarium.edu.pl/oa.htm.
5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, do **12 listopada 2012 r.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.
6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).
7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesać za pośrednictwem szkoły pod poniższym adresem
8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.
9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi). **Dodatkowo, do rozwiązań pierwszej serii zadań należy dołączyć wypełnioną ankietę uczestnika, dostępną na stronie internetowej olimpiady: www.planetarium.edu.pl/oa.htm.**
10. Zawody II stopnia odbędą się **14 stycznia 2013 r.** Zawody III stopnia odbędą się w dniach **od 7 do 10 marca 2013 r.**
11. Powiadomienia o zakwalifikowaniu do zawodów kolejnych stopni otrzymają jedynie uczniowie awansujący.
12. O uprawnieniach w przyjmowaniu na wyższe uczelnie laureatów i finalistów olimpiady decydują senaty uczelni. Informacje na ten temat są umieszczane na ich stronach internetowych.

Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej
Planetarium Śląskie
41-500 Chorzów, skr. poczt. 10

Pierwsza seria zadań zawodów I stopnia

1. Po wyniesieniu satelity na wysokość H silniki rakietowe nadają mu prędkość $v = 6,73$ km/s, prostopadłą do promienia wodzącego satelity. Przedyskutuj problem minimalnej wysokości H nad powierzchnią Ziemi, na jaką należy tego satelitę wynieść, by prędkość ta wystarczyła do wprowadzenia go na orbitę okołozemską.

Dla znalezionej orbity oblicz jej wielką półoś i mimośród oraz okres obiegu i prędkość połową satelity.

Zakładamy kulisty kształt Ziemi i przyjmujemy dla niej wartości: promienia $R = 6380$ km i masy $M = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg.

2. W kolejnych wierszach tabelki podano wybrane współrzędne środka tarczy Księżyca w pewnej miejscowości. Uzupełnij puste pola dotyczące środka tarczy słonecznej i ewentualnego zjawiska, możliwego do zaobserwowania w tej miejscowości w rozpatrywanych w tabeli przypadkach.

Co w każdym z tych przypadków można powiedzieć o azymutach Księżyca i Słońca oraz o czasie gwiazdowym, w którym zachodzą?

faza	Księżyc			Słońce			zjawisko
	wysokość	rektascensja	deklinacja	wysokość	rektascensja	deklinacja	
pełnia	90°	12 ^h	0°				
nów	90	12	0				
pełnia	-90	12	0				
nów	-90	0	0				
pełnia	90	0	0				
nów	90	0	0				

3. Trzy młode gwiazdy, o typach widmowych: B2, F5 i K8, zaczynające spalać w swych wnętrzach wodór, mają jednakowe jasności obserwowane.

Uszereguj te gwiazdy wzrastająco według ich: mocy promieniowania, mas, temperatur efektywnych, średnic i odległości od obserwatora. Czy gwiazdy te mogą należeć do tej samej asocjacji?

Podaj krótkie uzasadnienie odpowiedzi. Potrzebne dane wyszukaj samodzielnie.

4. Oszacuj prędkość, z jaką wyrzucany jest gaz przez wulkany na Io, wiedząc, że wysokości pióropuszy gazu sięgają do 300 kilometrów.

Przyjmij, że promień Io wynosi 1815 km, a [jej] masa $8,95 \cdot 10^{22}$ kg.

Zadania obserwacyjne

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. Wykonaną obserwację astronomiczną należy odpowiednio udokumentować.

Zalecana literatura

- Obowiązujące w szkołach podręczniki do przedmiotów ścisłych.
- H. Chrupała, M. T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych*.
- H. Chrupała, *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach).
- H. Chrupała, J. M. Kreiner, M. T. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami*.
- J. M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką*.
- J. M. Kreiner, *Ziemia i Wszechświat – astronomia nie tylko dla geografów*.
- *Słownik szkolny – Astronomia* (praca zbiorowa).
- *Encyklopedia szkolna – fizyka z astronomią* (praca zbiorowa).
- Atlas nieba.
- Obrótowa mapa nieba.
- Czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Świat Nauki*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie*.
- Poradniki i kalendarze astronomiczne dla obserwatorów nieba.

1. Na podstawie wykonanych aparatem cyfrowym fotografii dowolnej planety wyznacz jej dobowy ruch własny (rozumiany podobnie jak roczny ruch własny gwiazdy).

Do rozwiązania dołącz oryginalne zdjęcia w formie plików JPG, zawierających pełną informację o zdjęciu. Pliki te, o nazwie w formie „nazwiskoimię.jpg” można również przesłać pocztą elektroniczną pod adresem: olimpiada@planetarium.edu.pl.

2. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji, prowadzonych w ostatnim roku.

Internetowe zadanie obserwacyjne

3. Korzystając ze strony internetowej:

http://sohowww.nascom.nasa.gov/data/realtime/hmi_igr/1024/latest.html, przeprowadź tygodniową obserwację dowolnie wybranej plamy słonecznej w celu wyznaczenia momentu, w którym jej odległość od środka tarczy słonecznej była minimalna. Podaj w kilometrach wartość tej minimalnej odległości, mierzonej po powierzchni fotosfery.

Do rozwiązania dołącz rysunek wyglądu tarczy Słońca w dniu znalezionej minimum, z zaznaczonym położeniem obserwowanej plamy.

Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 12 listopada 2012 r.



LXII Olimpiada Fizyczna

Zadania zawodów I stopnia

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach:

część I – do 12 października br.

część II – do 16 listopada br.

O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II.

Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl>.

Krótką informacją na temat poprawnej redakcji rozwiązań zadań Olimpiady Fizycznej

Zadania powinny być rozwiązane jasno, przejrzysto i czytelnie. Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce papieru. Poszczególne etapy rozumowania należy opisać, a wszelkie zależności fizyczne, które nie są wprost podane w podręcznikach szkolnych – udowodnić. Należy również objaśnić wszelkie oznaczenia występujące w rozwiązaniach zadań. Rysunki mogą być wykonane odręcznie – muszą być jednak przejrzyste i czytelne oraz dobrze opisane w tekście.

Rozumowanie przedstawione w rozwiązaniach nie może zawierać luk logicznych. Każdy krok rozumowania powinien być zwięźle opisany, a przyjęte założenia – klarownie uzasadnione. Rozwlekłość jest uznawana za ujemną cechę pracy.

Rozwiązanie zadania teoretycznego powinno być poprzedzone analizą problemu poruszanego w zadaniu, a zakończone dyskusją wyników. Rozwiązania zadań teoretycznych powinny odnosić się do ogólnej sytuacji opisanej w treści, dane liczbowe (o ile podane) powinny być podstawione dopiero do ostatecznych wzorów.

W zadaniach doświadczalnych należy wyraźnie rozgraniczyć części teoretyczną i doświadczalną. Część teoretyczna zadania doświadczalnego powinna zawierać analizę problemu wraz z wyprowadzeniem niezbędnych wzorów (o ile nie ma ich wprost w podręcznikach szkolnych) oraz sugestie metody doświadczalnej. Część doświadczalna powinna zawierać m.in. opis układu doświadczalnego ilustrowany rysunkiem, opis wykonanych pomiarów, wyniki pomiarów, analizę czynników mogących wpływać na wyniki (jak np. rozpraszanie energii lub opory wewnętrzne mierników), opracowanie wyników wraz z dyskusją niepewności pomiarowych. Wykresy do zadania doświadczalnego powinny być starannie wykonane, najlepiej na papierze milimetrowym. Ocenie podlegają wyłącznie elementy rozwiązania opisane w pracy. W zadaniach doświadczalnych osobno oceniana jest część teoretyczna i część doświadczalna.

W rozwiązaniach można posługiwać się dowolnym układem jednostek, chyba że tekst zadania mówi wyraźnie inaczej.

Część I (termin wysyłania rozwiązań – 12 października 2012 r.)

Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki.

Podaj i krótko uzasadnij odpowiedź. Za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty.

Uwaga: potrzebne do rozwiązania niektórych zadań wartości stałych należy wyszukać samodzielnie.

1. Wiadomo, że lodówka, nawet z otwartymi drzwiami, nie może chłodzić pomieszczenia, w którym się znajduje. Dlaczego zatem w częściach hipermarketów, w których znajdują się chłodnie, temperatura jest wyraźnie niższa niż w pozostałych częściach sklepu?

2. Idealnie przewodzącą, doskonale czarną sferę rozcięto na dwie półsfery, które bardzo nieznacznie rozsunęto i izolowano od siebie termicznie. Na pierwszą półsferę pada wiązka lasera utrzymująca ją w temperaturze T_1 . Jaka jest równowagowa temperatura drugiej półsfery?

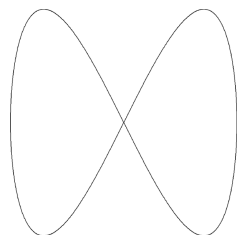
Układ znajduje się w próżni, z dala od innych niż wiązka lasera źródeł promieniowania.

3. Na piłce futbolowej położono piłeczkę pingpongową, a następnie całość puszczone swobodnie na podłogę z wysokości h . Zakładając, że wszystkie odbicia są idealnie sprężyste, pomijając opory ruchu i zanedbując masę piłeczki pingpongowej w porównaniu z masą futbolowej, wyznacz wysokość, na jaką podskoczy po odbiciu piłeczka pingpongowa.

Pomiń również wielkość piłek w porównaniu z h .

4. Okulary służące do oglądania filmów trójwymiarowych (a właściwie stereoskopowych) w kinach mogą być m.in. następujących rodzajów:
- polaryzacyjne, w których jeden okular polaryzuje światło liniowo w pewnej płaszczyźnie, a drugi w płaszczyźnie prostopadłej;
 - w których każdy okular przepuszcza światło o trzech długościach fali, z których oko (i mózg) może złożyć dowolny kolor, ale dla każdego z okularów są to inne długości.

Masz do dyspozycji dwie pary okularów jednego z wymienionych typów oraz źródło niespolaryzowanego, białego światła. W jaki sposób możesz rozstrzygnąć, z którym typem okularów masz do czynienia?



Rys. 1

5. Wykorzystując nitkę, zawieszono na statywie mały ciężarek, a następnie wprawiono go w ruch. Rzut toru tego ciężarka na płaszczyznę poziomą jest przedstawiony na rysunku 1. Narysuj szkic układu, w którym można otrzymać taki rzut toru, oraz podaj jego istotne parametry.

6. Na Księżycu przeprowadzono zawody w strzelaniu z armat na odległość. Pociski wystrzeliwano pod kątem 45° z bieguna Księżyca, a odległość mierzono wzdłuż południków. Wiadomo, że wpływ innych ciał niebieskich na ruch pocisku był zaniedbywalny. W komunikacie prasowym podano, że najlepsza armata osiągnęła wynik 9 tys. km. Jednak pewien fizyk po przeczytaniu tego komunikatu stwierdził, że taki rezultat jest niemożliwy. Dlaczego?

7. Postanowiono, że w trakcie „Ekologicznej wyprawy kosmicznej”, w czasie gdy statek kosmiczny porusza się z wyłączonym napędem z dala od gwiazd, energia elektryczna będzie wytwarzana wyłącznie przez silnik cieplny, pobierający ciepło z ciała podróżników. Jaka jest (teoretycznie) maksymalna sprawność takiego silnika? Wynik podaj z dokładnością do 0,2%.

8. Wewnątrz hermetycznie zamkniętego naczynia w kształcie walca o wysokości h znajduje się H_2O . W stanie początkowym temperatura wody i pary wynosi $20^\circ C$, a powierzchnia rozdziału para-woda jest w połowie wysokości naczynia, tzn. na wysokości $h/2$. Temperaturę we wnętrzu naczynia podwyższono do $400^\circ C$. Na jakim poziomie będzie znajdowała się powierzchnia rozdziału para-woda:

- nie wyższym niż $h/4$, ale wyższym niż 0,
- nie wyższym niż $h/2$, ale wyższym niż $h/4$,
- niższym niż h , ale wyższym niż $h/2$,
- w ogóle nie będzie powierzchni rozdziału para-woda?

9. W odległości d od małego, ale silnego magnesu, na jego osi, znajduje się mała kulka wykonana z paramagnetyka.



Rys. 2

Ile razy wzrośnie siła działająca na kulkę, jeśli drugi taki sam magnes umieścimy (patrz rysunek 2):

- tuż obok pierwszego magnesu,
- w odległości $2d$ od pierwszego magnesu, po „drugiej stronie” kulki?

10. Przez nieważki bloczek jest przerzucona nieważka lina. Jeden koniec trzyma sportowiec A o masie m , a drugi – sportowiec B o masie $2m$. Sportowcy początkowo stoją na podłodze, a w pewnej chwili zaczynają się wspinać po linie: sportowiec A z przyspieszeniem g względem liny, sportowiec B z przyspieszeniem $2g$ względem liny. Który ze sportowców szybciej dotrze do bloczka?

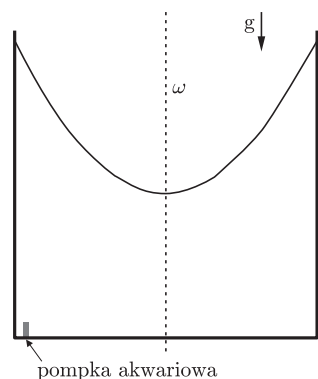
Pomiń opory ruchu i przyjmij, że liny cały czas pozostają pionowe.

11. Prostopadłościenne akwarium z wodą stoi na obracającej się tarczy (rys. 3). Naskicuj (w rzucie prostopadłym na największą pionową ścianę akwarium) tor, po którym będą się poruszały bąbelki powietrza wydobywające się z pompki akwariowej.

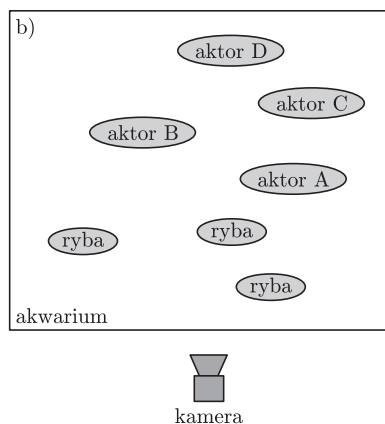
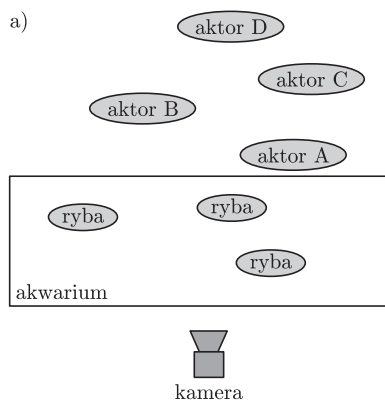
12. Planowana energia protonów w akceleratorze LHC w CERN pod Genewą wynosi 7 TeV. Rozważmy obserwatora inercjalnego, poruszającego się względem Ziemi z taką samą prędkością, jak te protony. Jak długo dla tego obserwatora trwałaby podróż z Ziemi do najbliższej gwiazdy, odległej od nas o około 4 [lat świetlnych]?

Energia spoczynkowa protonu to około 0,9 GeV.

13. W cyfrowym aparacie fotograficznym światło po przejściu przez obiektyw pada na prostokątną, światłoczułą matrycę. Różne aparaty mogą mieć różne wielkości matryc, jeśli jednak proporcje matrycy oraz stosunek ogniskowej f obiektywu aparatu do przekątnej matrycy są takie same w różnych przypadkach, to w każdym z nich przedmiot sfotografowany z ustalonej odległości będzie zajmował taką samą część zdjęcia.



Rys. 3



Rys. 4

Mamy do dyspozycji różne aparaty fotograficzne wraz z obiektywami o następujących parametrach:

- $f = 6 \text{ mm}$, $F = 1 : 1,8$,
- $f = 14 \text{ mm}$, $F = 1 : 3,5$,
- $f = 5 \text{ mm}$, $F = 1 : 3,1$,
- $f = 5,1 \text{ mm}$, $F = 1 : 3,5$,
- $f = 10,4 \text{ mm}$, $F = 1 : 3,5$,

gdzie f jest ogniskową, a $F = d/f$, gdzie d jest średnicą otworu przysłony aparatu.

Stosunek f do przekątnej matrycy jest taki sam w każdym z tych przypadków. Proporcje matrycy (i zdjęcia) są również takie same.

Uszereguj te aparaty według teoretycznej przydatności do robienia zdjęć przy słabym świetle, tzn. według ilości światła padającego na matrycę aparatu w takim samym czasie, od największej do najmniejszej.

Rozważ tylko sytuację, gdy odległość fotografowanych obiektów od aparatu jest znacznie większa od ogniskowej.

14. Siła Coriolisa jest to siła bezwładności, działająca na ciało o masie m poruszające się z prędkością \vec{v} w układzie obracającym się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ i wynosi $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$. O ile wyższy w wyniku działania tej siły jest poziom wody na zachodnim brzegu Wisły niż na wschodnim jej brzegu w miejscu, gdzie Wisła ma szerokość 500 m i płynie na prostym odcinku na północ z średnią prędkością 1,5 m/s? Podaj wynik z dokładnością do jednej cyfry znaczącej.

Wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ to wektor o wartości równej prędkości kątowej, jego kierunek to oś obrotu, a zwrot jest zgodny z regułą śruby prawoskrętnej.

15. W dawnych latach sceny filmów, w których bohaterowie filmu przebywali w wodzie, kręcono umieszczając między aktorami a kamerą duże akwarium. Rozważmy pojedynczy kadr z takiego filmu, przedstawiony na rysunku 4 schematycznie w widoku z góry. Podaj (jakościowo) różnice w wielkości obiektów widocznych w kadrze między przypadkami a) i b).

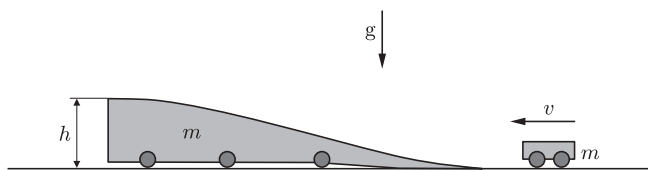
Część II (termin wysyłania rozwiązań – 16 listopada 2012 r.)

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy, a także nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

Zadania teoretyczne

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

T1. Na poziomej podłodze znajdują się mały wózek o masie m oraz duża, początkowo spoczywająca pochylnia o takiej samej masie m i wysokości h (patrz rysunek).



- Jaką prędkość v_0 należy nadać wózkowi, aby wtoczył się na górną, poziomą część pochylni i zatrzymał względem niej?
- Zakładając, że wózkowi nadano prędkość $v > v_0$, wyznacz odległość d między nim a pochylnią w chwili uderzenia o podłogę.

Pomiń tarcie, opór powietrza oraz momenty bezwładności kółek wózka i pochylni. Wózek w trakcie wtaczania nie odrywa się od powierzchni pochylni.

T2. W morzu, na głębokości h spoczywa wrak okrętu o masie m i średniej gęstości ρ . Postanowiono go wydobyć, przymocowując do niego, a następnie nadmuchując powietrzem specjalne balony.

Wyznacz minimalną pracę, jaka należy wykonać, by nadmuchać te balony, przy założeniu, że nadmuchiwanie powietrze nie wymienia ciepła z otoczeniem.

Podaj wartość liczbową tej pracy dla $h = 100 \text{ m}$, $m = 2000 \text{ t}$, $\rho = 3,0 \text{ g/cm}^3$.

Gęstość wody wynosi $\rho_w = 1,0 \text{ g/cm}^3$, ciśnienie atmosferyczne tuż nad powierzchnią morza (skąd jest pobierane powietrze do nadmuchiwania balonów) – $p_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Wrak leży na dnie, nie będąc w nim zakopany ani też przyssany do niego. Balony znajdują się na głębokości wraku. Pomiń masę powłok balonów oraz gęstość powietrza (również sprężonego) w porównaniu z gęstością wody. Molowe ciepło właściwe powietrza przy stałej objętości wynosi $C_V = 21 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$, przyspieszenie grawitacyjne – $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, uniwersalna stała gazowa – $R = 8,3 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$.

Dla przemiany adiabatycznej zachodzi związek $pV^{(C_V+R)/C_V} = \text{const}$.

T3. Wewnątrz równomiernie naładowanej ładunkiem Q (gdzie $Q < 0$) sfery o promieniu R znajduje się równomiernie naładowana sfera o potencjale równym potencjałowi w nieskończoności i promieniu $R/2$. Obie sfery są współśrodkowe.

Z wewnętrznej sfery, stycznie do niej, wylatuje elektron (o ładunku $e < 0$). Jaka jest minimalna wartość początkowej energii kinetycznej elektronu E_0 , przy której dotrze on do zewnętrznej sfery? Przyjmij, że elektron porusza się z prędkością nierelatywistyczną.

T4 (zadanie numeryczne). Pozioma tarcza obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół pionowej osi. W odległości R od osi obrotu kładziemy na tarczy mały klocek o masie m , który w chwili początkowej nie porusza się względem układu inercjalnego, lecz ślizga się względem tarczy. Tarcie między klockiem a tarczą powoduje, że klocek zaczyna się poruszać. Możliwe są dwa przypadki:

- po pewnym czasie klocek przestaje się ślizgać względem tarczy,
- klocek stale ślizga się względem tarczy, oddalając się coraz bardziej od jej środka.

Zadania doświadczalne

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.

D1. Po zaparzeniu herbaty często zostawiamy ją na chwilę, aby ostygła. Po pewnym czasie stwierdzamy, że herbata ma niższą temperaturę, ale jest jej też odrobinę mniej. Jest to efektem parowania, czyli unoszenia z powierzchni cieczy cząsteczek, które mają największe energie kinetyczne. Skutkuje to – obok innych procesów, takich jak np. promieniowanie – obniżeniem temperatury herbaty.

Mając do dyspozycji

- kubek styropianowy z zaznaczonym poziomem 200 ml,
- termometr,
- wodę i olej (np. jadalny),
- czajnik, grzałkę albo inne urządzenie umożliwiające podgrzewanie wody,
- zegarek lub stoper,

sporządź wykres zależności szybkości parowania wody (w gramach na sekundę) od temperatury wody w zakresie 40–90°C.

Przyjmij upraszczające założenie, że podczas całego eksperymentu ubytek masy wody wskutek parowania jest niewielki. Dane są: ciepło właściwe wody $C_w = 4200 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, ciepło parowania wody $C_p = 2,26 \text{ MJ}/\text{kg}$, gęstość wody $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$.

Wskazówka: Dyskusja zależności wyników od wilgotności powietrza nie jest celem zadania, jednak wilgotność nie powinna być bardzo wysoka, więc doświadczenie nie może być wykonane w zaparowanym zamkniętym pomieszczeniu ani przy deszczowej pogodzie. Należy też unikać miejsc, w których panuje nadmierny przewiew.

D2. Mając do dyspozycji:

- soczewkę skupiającą o ogniskowej około 5 cm (znanej tylko orientacyjnie),
- wysokie naczynie z wodą (np. wannę),
- linijkę,

wyznacz współczynnik załamania materiału, z którego wykonana została soczewka.

Wyznacz numerycznie przybliżoną wartość parametru

$$p = \frac{\mu g}{\omega^2 R}$$

(gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim, a μ – współczynnikiem tarcia) będącą graniczną wartością między przypadkiem a) oraz b).

Wykonaj wykresy toru klocka dla p mniejszego o 0,1 od wartości granicznej oraz większego o 0,1 od tej wartości.

Wskazówka: Ruch układu można wyznaczyć numerycznie, np. korzystając z różnicowej postaci równań ruchu:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \Delta t, \quad v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + \frac{F_x(t)}{m} \Delta t,$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t) \Delta t, \quad v_y(t + \Delta t) = v_y(t) + \frac{F_y(t)}{m} \Delta t.$$

Uwaga: Rozwiązanie powinno być napisane na papierze i zawierać opis sposobu rozwiązania oraz wyniki i wykresy. Nie jest konieczne załączanie kodu programu lub arkusza kalkulacyjnego.

Dodatkowe informacje na temat zadań numerycznych można znaleźć w zadaniach numerycznych z poprzednich olimpiad oraz w rozwiązaniach tych zadań.

Przyjmij, że współczynniki załamania powietrza i wody wynoszą odpowiednio 1 i 1,33. Możesz wykorzystać dostępne źródło światła, np. lampę zamocowaną pod sufitem. *UWAGA:* Zachowaj ostrożność podczas obsługi jakichkolwiek urządzeń elektrycznych, np. lampy, w pobliżu naczyń z wodą. W szczególności nie dotykaj tych urządzeń mokrymi rękoma.

D3. Najprostszy kondensator składa się z dwóch przewodników (tzw. okładek) rozdzielonych powietrzną przerwą. Zazwyczaj przerwa pomiędzy okładkami jest wypełniona izolatorem o względnej przenikalności elektrycznej ϵ dużo większej od 1, co pozwala na wytwarzanie kondensatorów o stosunkowo dużych pojemnościach i małych rozmiarach. Jednym z istotnych parametrów każdego kondensatora jest zależność jego pojemności od temperatury.

Mając do dyspozycji

- kondensator ceramiczny o pojemności kilkudziesięciu nF,
- opornik o oporze kilku k Ω ,
- generator sygnału sinusoidalnego o częstotliwości kilku kHz,
- dwa woltomierze lub oscyloskop,
- kubek, wodę i czajnik (lub inne urządzenie umożliwiające podgrzewanie wody),
- termometr,
- foliową torebkę śniadaniową,
- kable i złączki niezbędne do zestawienia układu,

w przedziale temperatur 30–80°C wyznacz współczynnik $\alpha = \Delta\epsilon/(\epsilon \cdot \Delta T)$ opisujący, jak przenikalność elektryczna izolatora pomiędzy okładkami kondensatora zależy od temperatury; $\Delta\epsilon$ jest zmianą przenikalności odpowiadającą niewielkiej zmianie temperatury ΔT .

Uwaga: Nie używaj kondensatora elektrolitycznego, tantalowego, ani foliowego. Jeśli nie możesz zdobyć kondensatora ceramicznego, to przed 30 września br. prześlij pod adresem KGOF zaadresowaną do siebie kopertę ze znaczkami. KGOF przyśle ci odpowiedni kondensator. Jeśli nie masz dostępu do generatora sygnału lub oscyloskopu, to możesz użyć komputera z kartą dźwiękową i odpowiednim oprogramowaniem, np. Visual Analyzer (<http://www.sillanumsoft.org>).



LXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 października 2012 r. – I seria,

5 listopada 2012 r. – II seria,

6 grudnia 2012 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych oraz bieżące informacje, a także zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

(3 września 2012 r. –
– 3 października 2012 r.)

1. Dane są różne dodatnie liczby wymierne x i y , dla których liczba

$$w = \frac{x + \sqrt{y}}{y + \sqrt{x}}$$

jest wymierna. Wykazać, że obie liczby x i y są kwadratami liczb wymiernych.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A . Zakładamy, że okrąg opisany na trójkącie ABD przecina boki CB i CD odpowiednio w punktach K i L różnych od wierzchołków. Niech odcinek AN będzie średnicą tego okręgu. Udowodnić, że punkt N jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CKL .

3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że jeżeli suma wszystkich jej dodatnich dzielników jest nieparzysta, to liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

4. Na tablicy narysowany jest 2012-kąt foremny. Michał i Jurek dorysowują na zmianę jedną przekątną, niemającą wspólnych punktów wewnętrznych ani wspólnych końców z wcześniej narysowanymi przekątnymi. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać ruchu. Grę rozpoczyna Michał. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

II seria

(4 października 2012 r. –
– 5 listopada 2012 r.)

5. Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia $|20^m - 9^n|$, gdzie m i n są dodatnimi liczbami całkowitymi.

6. Punkty P , Q i R leżą odpowiednio na bokach BC , CA i AB trójkąta ABC , przy czym spełnione są równości $AR = RP = PC$ oraz $BR = RQ = QC$. Wykazać, że $AC + BC = 2AB$.

7. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAD$, a sfera o środku S , dopisana do tego czworościanu, jest styczna do ściany ABC w środku okręgu opisanego na tej ścianie. Udowodnić, że proste AD i AS są prostopadłe.

(Uwaga: Sfera dopisana do czworościanu to sfera styczna do dokładnie jednej ściany oraz do trzech płaszczyzn zawierających pozostałe ściany.)

8. Na planszy o wymiarach $n \times n$ wyróżniono $2n - 1$ pól. Dowieść, że można pomalować pewną niezerową liczbę wyróżnionych pól na zielono w taki sposób, że:

- w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest parzysta, albo
- w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest nieparzysta.

III seria

(6 listopada 2012 r. –
– 6 grudnia 2012 r.)

9. Na płaszczyźnie ustawiono po jednym kamieniu w punktach o współrzędnych $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ i $(1, 1)$. W jednym ruchu wybieramy dowolny kamień i przestawiamy go symetrycznie względem któregoś z pozostałych kamieni. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów trzy kamienie mogą znaleźć się na jednej prostej.

10. Dany jest prostopadłościan $ABCD A' B' C' D'$. Niech α , β i γ będą kątami utworzonymi przez przekątną AC' z krawędziami AB , AD i AA' . Udowodnić, że

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \leq \frac{3}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

11. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych A i C przecinają się w punkcie P , a proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych B i D przecinają się w punkcie Q . Dowieść, że jeżeli kąt PAQ jest prosty, to również kąt PCQ jest prosty.

12. Zbadać, czy istnieje liczba całkowita większa od 2012^{2012} , której nie można przedstawić w postaci $x^2 + y^3 + z^6$, gdzie x , y i z są dodatnimi liczbami całkowitymi.

VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

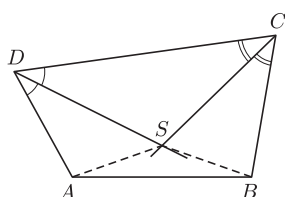
Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego – część korespondencyjna

1 września – 29 października 2012 r.

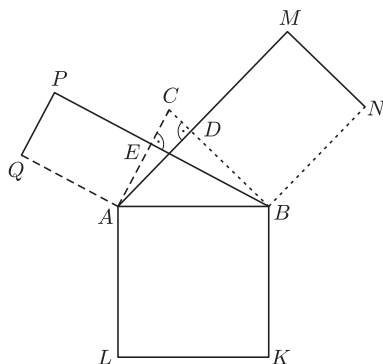
Rozwiązania poniższych zadań należy zapisywać **jednostronnie** na **oddzielnych** arkuszach formatu A4. Na każdej kartce z rozwiązaniem należy podać następujące informacje:

- w prawym górnym rogu numer zadania,
- w lewym górnym rogu dane uczestnika: imię i nazwisko, **numer PESEL**, adres domowy, nazwa i adres szkoły, klasa.

Rozwiązania zadań należy przesłać do Komitetu Okręgowego, właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia 29 października 2012 r. (decyduje data stempla pocztowego). Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, terminy kolejnych etapów OMG oraz inne bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem www.omg.edu.pl.



Zadanie 2



Zadanie 5

1. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n , liczby $n, n^5, n^9, n^{13}, n^{17}, \dots$

mają jednakowe cyfry jedności.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD + BC = CD$. Dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie S . Udowodnij, że $AS = BS$.

3. Liczba naturalna n jest co najmniej trzycyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę setek a cyfrę dziesiątek tej liczby wpisujemy znak mnożenia, to po wykonaniu mnożenia otrzymamy połowę liczby n . Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

4. W balu wzięło udział 102 królewiczów i 103 królowy. Po balu okazało się, że każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królowy. Udowodnij, że pewne dwie królowy zatańczyły z taką samą liczbą królewiczów.

5. Odcinki AD i BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC . Po zewnętrznej stronie trójkąta ABC zbudowano kwadrat $ABKL$ oraz prostokąty $BDMN$ i $AEPQ$, przy czym $BN = BC$ oraz $AQ = AC$. Udowodnij, że suma pól prostokątów $BDMN$ i $AEPQ$ jest równa polu kwadratu $ABKL$.

6. W ostrosłup $SABCD$, którego podstawą jest czworokąt wypukły $ABCD$, można wpisać sferę. Udowodnij, że

$$\sphericalangle ASB + \sphericalangle CSD = \sphericalangle BSC + \sphericalangle DSA.$$

7. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których liczba $n^3 - 7n$ jest kwadratem liczby całkowitej.





My, ludzie

Jest taki zdumiewający moment w dziejach świata, gdy my, ludzie, uznaliśmy za niezbędne udzielenie odpowiedzi na pytanie, co właściwie wyróżnia nas spośród wszelkich żywych stworzeń. Było to w wieku –VI. Owa niezbędność pojawiła się we wszystkich stronach świata, we wszystkich kulturach i – co jeszcze dziwniejsze, wobec braku możliwości bezpośredniego, a choćby nawet sensownie szybkiego kontaktu – pojawiła się jednocześnie.

Spośród odpowiedzi, których udzielono zapewne więcej, największą liczbę zwolenników, a więc i największe znaczenie uzyskało sześć. Warto się im przyjrzeć i pomyśleć o tym, jak są one obecne i dziś w naszym życiu.

Oczywiście, daty narodzin i śmierci nie są istotne (ani też bardzo dokładne) – podaję je dlatego, by tym bardziej uwypuklić, jak bardzo wszyscy wymienieni byli rówieśnikami.

Bogaty i wykształcony mandaryn K'ung-fu-tsy (–551; –470), znany w Europie jako Konfucjusz, istotę człowieczeństwa widział w umiejętności wytworzenia ładu społecznego i podporządkowania się jemu.

Ubogi włóczęga (tu – rzecz jasna – wiemy tylko tyle, że było to współcześnie) Lao-tsy, co znaczy *stary mędrzec*, za wyróżniający atrybut człowieka uważał zdolność wytknięcia sobie celu i wytrwałego dążenia, by go osiągnąć – dziś nazywamy tę doktrynę taoizmem.

Indyjski książę Wardhamana Mahavira (~ –599; –527), znany powszechnie jako *Dżina – Zwycięzca*, uważał człowieka za jedyną istotę uznającą życie za najwyższą wartość.

Z kolei w Indochinach książę Siddharta Gautama (~ –580; ~ –480), po doznaniu mistycznej iluminacji – stąd jego przydomek *Budda – Przebudzony* – za fundament człowieczeństwa uznał zdolność do wyrzeczeń, której pełne wykorzystanie ma człowieka wprowadzić w stan doskonałości – *nirwanę*.

Reformator mazdaizmu, religii perskiej, Zaratusztra (Grecy mówili o nim Zoroaster) – przez wielu uważany jeno za personifikację idei – człowieczeństwo widział w umiejętności odróżniania dobra od zła i w walce dobra ze złem (*Ormuzda z Arymanem*).

Europa była w tym gronie reprezentowana przez Pitagorasa z Samos (–572; –497), twórcę kolonii greckiej w Krotonie, na południu Italii. Głosił on, że *Wszecławiat jest tak pełen sprzeczności, że – aby nie zginął – istnieć musi Harmonia, którą utrzymuje się wszystko, nie wyłączając bogów* i w potrzebie poszukiwania i badania tej Harmonii widział istotę człowieczeństwa.

Zatem powołana wówczas tożsamość człowieka to: urzędnik, hipis, ekolog, altruista, moralista, uczony.

Stąd mamy: prawo, wolność, pokorę, ofiarności, etykę i naukę.

Jakże piękny jest ofiarowany nam – ludziom nauki – udział w esencji egzystencji ludzkiej.

wzięte z: Marek Kordos, *O Matematyku, Rycerzu Gwiazdy Pitagorejskiej*



Rozwiązanie zadania M 1362.

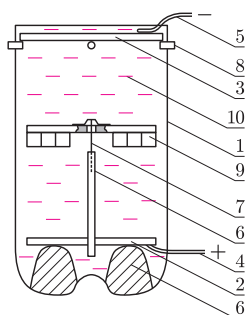
Skoro jest $6 \cdot 6$ podszachownic wymiaru 3×3 i $5 \cdot 5$ podszachownic wymiaru 4×4 , to istnieje 61 pojedynczych ruchów możliwych do wykonania. Zauważmy, że wykonanie ruchu *A*, a następnie ruchu *B* prowadzi do tego samego kolorowania szachownicy, co wykonanie najpierw ruchu *B*, a potem ruchu *A*. Ponadto wykonanie tego samego ruchu parzystą liczbę razy nie zmienia kolorowania szachownicy. Zatem każda sekwencja ruchów jest jednoznacznie opisana przez podanie ruchów występujących w niej nieparzystą liczbę razy. Jest więc nie więcej niż 2^{61} nierównoważnych sekwencji ruchów (sekwencje uznajemy za równoważne, jeśli dają ten sam efekt). Startując z ustalonego kolorowania szachownicy, otrzymamy zatem co najwyżej $2^{61} - 1$ innych kolorowań. Ale wszystkich możliwych pokolorowań szachownicy jest 2^{64} . Znajdzie się więc takie, którego nie otrzymamy żadną sekwencją ruchów z całej białej szachownicy. Równoważnie, znajdzie się takie pokolorowanie, którego żadną sekwencją ruchów nie sprowadzimy do całej białej szachownicy.

Jeszcze jeden niezwykły silnik

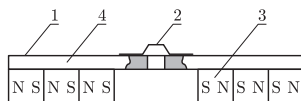
Stanisław BEDNAREK

W tym odcinku zajmiemy się jeszcze jednym niezwykłym silnikiem elektrycznym wykorzystującym oddziaływanie prądu elektrycznego płynącego przez elektrolit z polem magnetycznym.

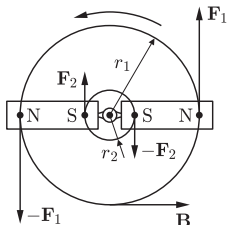
Materiały i przyrządy: przezroczysta plastikowa butelka, plastelina, kawałek grubej folii aluminiowej, np. z foremki do ciast, kilka kawałków giętkiego przewodu połączeniowego w izolacji, patyczek do szaszłyków, krótka igła krawiecicka, cienki gwóźdź, dolna część zatrzasku krawiecickiego, parzysta liczba (4–8) cienkich, walcowych magnesów neodymowych, trzy lub więcej baterii R20, sól kuchenna i woda, nożyczki, klej epoksydowy, np. poxipol, przezroczysta taśma klejąca, kombinerki, cyrkiel, linijka, nożyczki, nóż i zszywacz biurowy.



Rys. 1. Schemat silnika w przekroju pionowym; 1 – butelka, 2, 3 – elektrody, 4, 5 – przewody, 6 – wspornik, 7 – oś, 8 – kołek oporowy, 9 – wirnik, 10 – elektrolit.



Rys. 2. Budowa wirnika; 1 – ramię wirnika, 2 – dolna część zatrzasku krawiecickiego, 3 – magnes, 4 – taśma klejąca, N, S – bieguny magnetyczne.



Rys. 3. F_1 , F_2 – siły działające na końce wirnika, B – indukcja pola magnetycznego.

Ciekawy wariant opisywanego silnika możemy wykonać, zastępując elektrody aluminiowe i baterie elektrodami, z których jedna wykonana jest z blachy cynkowej, a druga – miedzianej. Po zwarciu wyprowadzonych na zewnątrz końców przewodów podłączonych do elektrod wirnik będzie obracał się bez zasilania z baterii (dlaczego?). Pokazem takiego silnika możemy zaskoczyć niewtajemniczonych, demonstrując, jak sprytnie wykorzystała prawa fizyki.

Budowę silnika przedstawia rysunek 1. Pracę zaczynamy od odcięcia górnej części butelki, a w pobliżu dna butelki wykonujemy otwór o średnicy nieco większej niż średnica przewodu połączeniowego. Około 1 cm poniżej górnej krawędzi butelki przebijamy 3 symetrycznie rozmieszczone otwory o średnicy nieco większej niż średnica patyczka do szaszłyków. Z folii aluminiowej wycinamy elektrody: dwa koła o średnicy o 0,5 cm mniejszej od średnicy butelki. Z końcówek dwóch przewodów połączeniowych usuwamy izolację. Po jednej odizolowanej końcówce każdego z tych przewodów mocujemy do elektrod zszywaczem biurowym (aluminium nie daje się lutować bez specjalnych odczynników). Po jednej stronie każdej z elektrod naklejamy kawałki taśmy klejącej, pokrywając nimi całą powierzchnię elektrody. Ta warstwa izolacyjna taśmy zapobiegnie przepływowi tzw. prądów błądzących.

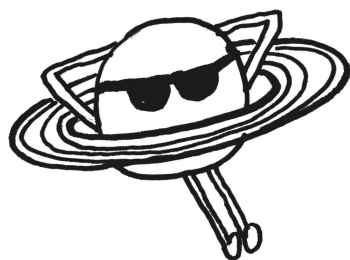
Z patyczka od szaszłyków sporządzamy wspornik, ramię wirnika oraz kołki oporowe. W tym celu odcinamy jeden kawałek o długości nieco mniejszej niż połowa wysokości butelki, drugi kawałek krótszy o kilka mm od średnicy butelki i trzy kawałki o długości około 1 cm. W koniec wspornika wciskamy ostrze igły, a następnie ją wyciągamy i w powstały otwór wciskamy jej tępy koniec. Igłę, która posłuży jako oś, należy wcisnąć na głębokość około 1,5 cm, używając do tego celu kombinerek. W środku jednej z elektrod wykonujemy otwór o średnicy nieco większej niż średnica wspornika. W ten otwór wsuwamy od strony nieoklejonej taśmą koniec wspornika bez igły na głębokość około 0,5 cm i przyklejamy go prostopadle do powierzchni elektrody. Zagłębienia dna butelki wypełniamy plasteliną i wkładamy do butelki elektrodę ze wspornikiem. Przymocowujemy do niej przewód przekładamy przez otwór w pobliżu dna butelki. Elektrodę dociskamy do plasteliny, a miejsce przełożenia przewodu przez butelkę uszczelniamy klejem epoksydowym. Trzy kołki oporowe wsuwamy w otwory w pobliżu górnej krawędzi butelki, tak żeby ich dłuższe części były wewnątrz butelki, i mocujemy klejem epoksydowym.

Następnie wykonujemy wirnik silnika (rys. 2). W połowie długości ramienia wirnika wypalamy rozgrzanym do czerwoności gwoździem otwór przechodzący wzdłuż średnicy patyczka. Nad otworem przyklejamy klejem epoksydowym dolną część zatrzasku krawiecickiego, która posłuży jako łożysko oporowe. Składamy dwa jednakowe zespoły magnesów liczące po 2–4 sztuk. Każdy zespół powinien mieć długość mniejszą niż połowa ramienia, a magnesy w nim powinny być zwrócone do siebie biegunami różnoimiennymi. Zespoły te przyklejamy symetrycznie po obu stronach ramienia taśmą klejącą owiniętą wokół magnesów i patyczka, tak by jednoimiennie bieguny magnesów były zwrócone ku osi wirnika, a dolna część zatrzasku znajdowała nad magnesami. Gotowy wirnik nakładamy na oś, wprowadzając ostrze igły do zatrzasku. Jeżeli wirnik przechylił się w którąś stronę, to jego przeciwny koniec należy dociążyć plasteliną. Butelkę napełniamy powyżej kołków oporowych nasyconym roztworem soli kuchennej, stanowiącym elektrolit, a na kołki nakładamy drugą elektrodę, odizolowaną stroną ku dołowi. Wolne końce obu przewodów połączeniowych odizolowujemy i dołączamy do biegunów baterii R20.

Wirnik zaczyna się wówczas obracać. Aby wyjaśnić przyczynę tego ruchu, zauważmy, że każde z ramion wirnika możemy traktować jako układ sztywno połączonych dipoli magnetycznych znajdujących się w polu magnetycznym wytwarzanym przez prąd płynący w elektrolicie. Ponieważ natężenie prądu przepływającego przez ustawione doń prostopadle koło o promieniu r jest proporcjonalne do r^2 , więc, zgodnie z prawem Ampère'a, indukcja pola magnetycznego wytwarzanego przez ten prąd jest proporcjonalna do odległości od osi butelki (którą traktujemy dla uproszczenia jako nieskończenie długi walec). Oznacza to, że siła działająca na zewnętrzny koniec układu dipoli ma większy moment niż siła działająca na koniec wewnętrzny (z uwagi na sztywność wirnika pozostałe siły równoważą się) i na każde z ramion działa wypadkowy moment siły o takim samym kierunku i zwrocie.

Silnik pracujący według przedstawionej zasady został opisany przez autora w *American Journal of Physics* (70 (2004), 455–8) oraz zastrzeżony w Urzędzie Patentowym RP (opis patentowy nr 206849). Jednak uzyskanie patentu nie zabrania Czytelnikom budowania takiego silnika dla celów badawczych – wykupienie licencji konieczne jest tylko w przypadku produkcji urządzenia w celach komercyjnych.

Odkryta w 1898 r.; historycznie pierwszy satelita odkryty za pomocą metod fotograficznych.



Epicka poezja i mroczne pierścienie

Febe (gr. $\phiοιβη$, *Phoebe*) jest dziewiątym co do wielkości księżycem Saturna – został on nazwany imieniem tytanidy z mitologii greckiej, utożsamianej czasami z Artemidą, boginią lasu i dzikich zwierząt. Febe jest satelitą o nieregularnym kształcie. Z powodu niewielkiego rozmiaru (ok. 200 km), na mocy ustaleń Międzynarodowej Unii Astronomicznej, pomimo greckiego imienia, formalnie należy do tzw. *grupy nordyckiej*, tworzonej przez mniejsze i bardziej odległe od Saturna księżyce, takie jak Aegir, Bestla czy Ymir. Ów nazewniczy zbieg okoliczności wywołuje, przynajmniej u mnie, poetyckie skojarzenia: z powodu nieidealnego kształtu Febe nie przynależy do „świata greckiego” klasycznych kulistych księżyców, a jej oddalenie od macierzystej planety (ok. 200 promieni Saturna) przywodzi na myśl wycieczkę w dżicz północnych puszczy... Febe była także pierwszym celem badawczym misji *Cassini* napotkanym w okolicach Saturna, przez co jest, jak na obiekt tak mizernych rozmiarów, bardzo dokładnie skatalogowana. Niezawodni kartografowie Unii Astronomicznej wybrali w tym celu imiona występujące w micie opisującym wyprawę Jazona i Argonautów po złote runo, co z pewnością powinno kojarzyć się ze śmiałą i pełną niebezpieczeństw misją sondy *Cassini*.

Podobnie do innych księżyców Saturna, Febe opiekuje się jednym z pierścieni, ogromnym, ale odkrytym całkiem niedawno, bo dopiero w 2009 r., przez podczerwony teleskop *Spitzer*. Pierścień Febe składa się z drobinek pyłu powstałego z uderzeń mikrometeoroidów o powierzchnię księżycy i jest praktycznie niewidoczny z Ziemi, chociaż jego rozmiary kątowe to około 1° łuku – dwa razy więcej niż widoma średnica ziemskiego Księżyca! Pasuje to poniekąd do innego faktu na temat Febe, której imię tłumaczy się z greckiego jako *jasna* lub *promienna* – jej albedo, czyli stosunek ilości światła odbitego do padającego, jest bardzo małe (0,06, podobnie jak asfalt) i drastycznie różne od innych satelitów Saturna, które odbijają praktycznie całe padające światło, jak np. Enceladus o albedo 0,99.

Michał BEJGER



Zadania

W tym numerze zadania fizyczne z okazji początku roku szkolnego

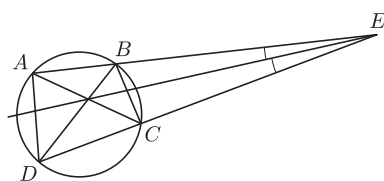
– dla zadziwienia kolegów

F 819. Gdy zbliżymy turystyczny kompas do dolnej części żelaznego wiadra, igła kompasu wskaże na wiadro swym biegunem południowym, a gdy zbliżymy ten kompas do górnej części wiadra – wskaże je północnym biegunem (proszę sprawdzić). Dlaczego tak się dzieje? Wskazówka: gdy zamiast wiadra sprawdzimy żelazną furtkę ogrodową, zjawisko się powtórzy.

Rozwiązanie na str. 8

F 820. Gdy na wyciągniętych przed siebie na tym samym poziomie wskazujących palcach rozstawionych rąk położymy kij od szczotki, a następnie będziemy powoli zsuwali te palce, to kij nie spadnie, nawet gdy palce się zetkną. Dlaczego tak się dzieje? Wskazówka: może być cała szczotka, nie tylko kij.

Rozwiązanie na str. 21



Rys. 1

Redaguje Tomasz TKOCZ

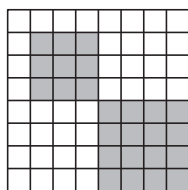
M 1360. Udowodnić, że dla różnych liczb dodatnich a, b i liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < \frac{a^n + b^n}{2}.$$

Rozwiązanie na str. 5

M 1361. Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E . Udowodnić, że jeśli punkt przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$ leży na dwusiecznej kąta AED , to trójkąt ADE jest równoramienny.

Rozwiązanie na str. 4



Rys. 2

M 1362. Każde pole szachownicy 8×8 pomalowane jest na biało lub czarno. W jednym ruchu możemy w dowolnej podszachownicy wymiaru 3×3 lub 4×4 zamienić kolory na przeciwne. Czy dla dowolnego początkowego pokolorowania istnieje sekwencja ruchów dająca w efekcie całą białą szachownicę?

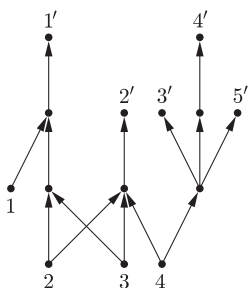
Rozwiązanie na str. 17

Informatyczny kącik olimpijski (54): Drogi

W tej edycji kącika znowu cofniemy się w czasie do 2005 roku, do pierwszej edycji konkursu Potyczki Algorytmiczne, i omówimy zadanie z finału próbnego tego konkursu pt. *Drogi* (bardzo podobne zadanie pojawiło się zresztą w jeszcze bardziej zamierzchłej przeszłości, na Międzynarodowej Olimpiadzie Informatycznej w 1996 roku). Treść zadania jest bardzo prosta: do danego grafu skierowanego chcielibyśmy dołożyć możliwie najmniej krawędzi (skierowanych, rzecz jasna), tak by po tej operacji z każdego wierzchołka grafu dało się dojść do każdego innego wierzchołka. Innymi słowy, chcemy spowodować, żeby dany graf stał się silnie spójny.

Przy tak sformułowanym problemie naturalny wydaje się pomysł, aby dany graf (oznacmy go przez G) podzielić na silnie spójne składowe, tym bardziej że tę operację możemy wykonać w czasie liniowym względem rozmiaru grafu. Warto od razu pójść o krok dalej i przyjrzeć się grafowi silnie spójnych składowych H grafu G , w którym każdej silnie spójnej składowej grafu G odpowiada jeden wierzchołek, a krawędź między danymi dwoma wierzchołkami w H istnieje, gdy odpowiadające im składowe w G były połączone co najmniej jedną krawędzią. Graf H jest, oczywiście, acykliczny. Ponieważ w grafie G nie oplaca się nigdy dodawać krawędzi w ramach tej samej silnie spójnej składowej, więc wynik dla grafu G jest taki sam jak dla grafu H . Odtąd będziemy zajmować się już tylko grafem H .

Po krótkim przyjrzeniu się grafowi H łatwo dostrzec pewne dolne ograniczenie na liczbę krawędzi, które trzeba dodać. Oznaczmy przez k liczbę wierzchołków grafu H , do których nie wchodzi żadna krawędź, podobnie przez l oznaczmy liczbę tych wierzchołków, z których nie wychodzi żadna krawędź (patrz rys. 1). Wspomnianym ograniczeniem dolnym jest liczba $\max(k, l)$. Faktycznie, aby z każdego wierzchołka grafu H mogło się dać na końcu odwiedzić wszystkie pozostałe wierzchołki grafu, z każdego wierzchołka musi wychodzić jakaś krawędź; podobnie, do każdego wierzchołka musi wchodzić jakaś krawędź. Jest tylko jeden wyjątek: jeśli graf H ma dokładnie jeden wierzchołek, to G od początku był silnie spójny, więc nie musimy dodawać do niego żadnych krawędzi.

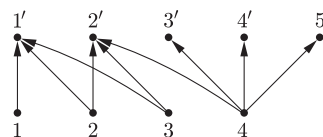


Rys. 1. Przykład grafu H . Mamy $k = 4$, $l = 5$.

Przeanalizowanie kilku prostych przykładów pozwala dojść do przeświadczenia, że aby graf acykliczny uczynić silnie spójnym, zawsze wystarczy dodać $\max(k, l)$ krawędzi. To pozwala zgadnąć, że nasze dolne ograniczenie jest zarazem ograniczeniem górnym, co wystarcza do wyznaczenia liczby potrzebnych krawędzi. My postawimy sobie ambitniejszy cel i spróbujemy udowodnić nasze spostrzeżenie.

Skoro interesuje nas jedynie k „dolnych” i l „górných” wierzchołków grafu H , to stworzymy graf dwudzielny H' zawierający tylko te wierzchołki. Wierzchołki u i v będą w grafie H' połączone krawędzią, jeśli w H istniała

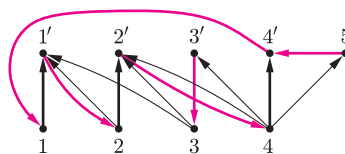
między nimi jakaś ścieżka (rys. 2). Wynik, jaki otrzymamy dla H' , będzie oczywiście taki sam jak wynik dla H . Założmy na razie, że graf H' , a więc też graf H , nie zawiera wierzchołków izolowanych.



Rys. 2. Graf H' odpowiadający grafowi H z rysunku 1.

Pojawienie się grafu dwudzielnego naturalnie podsuwa pomysł, żeby w tym grafie znaleźć maksymalne skojarzenie (jak się dalej okaże, nie potrzebujemy wcale najliczniejszego skojarzenia, wystarczy nam dowolne maksymalne).

Jeśli graf H' zawiera skojarzenie rozmiaru m , to wszystkie wierzchołki skojarzone – m dolnych i m górnych – możemy połączyć w cykl za pomocą m krawędzi poprowadzonych „na zakładkę”. To stanowi dobrą bazę do konstrukcji całego rozwiązania. Musimy jeszcze tylko w jakiś sposób dołączyć do tego cyklu nieskojarzone wierzchołki. Możemy to zrobić następująco: $\min(k - m, l - m)$ wierzchołków nieskojarzonych łączymy w pary krawędziami biegnącymi w dół, a pozostałe wierzchołki nieskojarzone (znajdujące się już tylko z jednej strony grafu) dołączamy krawędziami bezpośrednio do cyklu – w przypadku wierzchołków górnych używamy krawędzi skierowanych ku cyklowi, a w przeciwnym razie używamy krawędzi skierowanych od cyklu (rys. 3).

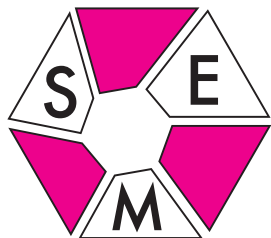


Rys. 3. Konstrukcja rozwiązania dla grafu H' z rysunku 2. Pogrubiłone krawędzie biegnące w górę to maksymalne skojarzenie w grafie H' .

Spróbujmy uzasadnić poprawność tej konstrukcji. Przyjeliśmy, że w grafie nie ma wierzchołków izolowanych, więc każdy górny nieskojarzony wierzchołek jest połączony w H' z jakimś dolnym wierzchołkiem skojarzonym (nie mógłby to być dolny wierzchołek nieskojarzony, gdyż wtedy moglibyśmy powiększyć skojarzenie). Symetryczne stwierdzenie zachodzi też dla dolnych wierzchołków nieskojarzonych. To oznacza, że z cyklu da się dojść do każdego z górnych wierzchołków nieskojarzonych, podobnie z każdego z dolnych wierzchołków nieskojarzonych da się dojść do cyklu. Teraz już łatwo sprawdzamy, że po dodaniu krawędzi biegnących w dół (oraz tych łączących wierzchołki nieskojarzone bezpośrednio z cyklem) graf H' jest silnie spójny.

Na koniec warto przypomnieć sobie o wierzchołkach izolowanych w H . Ponieważ wliczają się one tak do dolnej, jak i do górnej grupy w grafie H' , więc możemy je rozpatrzyć zupełnie osobno: najpierw znaleźć rozwiązanie dla grafu bez tych wierzchołków, a następnie umieścić je kolejno wewnątrz dowolnej z dodanych przez nas krawędzi. Trzeba też dodatkowo rozpatrzyć przypadek szczególny, gdy w grafie H były same wierzchołki izolowane – wtedy po prostu łączymy je wszystkie w cykl.

Jakub RADOSZEWSKI



Wszystko może się przydać

Panuje przekonanie, że w nauczaniu matematyki powinno się eksponować fakt, że ma ona zastosowania. Gdy przyjrzeć się podręcznikom, a zwłaszcza testom kwalifikacyjnym, trudno oprzeć się wrażeniu, że są to rzeczy w stylu mierzenia wysokości piramidy za pomocą długości jej cienia i twierdzenia Talesa, lub też zadań w stylu: *jeśli dwóch robotników kopie rów w ciągu 2 godzin, to ilu ich potrzeba, aby ten rów wykopać w 15 sekund?* (odpowiedź: 1440).

Aby pomóc w przełamaniu tej wstydlivej sytuacji, chcę podać przykład konkretnego, przemysłowego wykorzystania prostego faktu stereometrycznego.

Każdy wie, że płytki odblaskowe naszywane na ubrania czy przyczepiane do rowerów zbudowane są z wielu małych naroży złożonych z trzech lusterek, z których każde jest prostopadłe do pozostałych. Bierze się to z faktu, iż *złożenie trzech symetrii względem płaszczyzn parami prostopadłych*

to symetria względem punktu ich przecięcia,

a wobec tego każdy promień jest odbijany jako równoległy do padającego, czyli wraca w kierunku źródła padającego światła.

Prosty dowód jest taki: Potraktujmy krawędzie przecięcia płaszczyzn jak osie układu współrzędnych – wtedy symetrie względem płaszczyzn będą odpowiadały zmianie znaku jednej ze współrzędnych. Wobec tego z punktu o współrzędnych (x, y, z) otrzymamy punkt $(-x, -y, -z)$.

I jeszcze wniosek: *aby otrzymać symetrię względem danego punktu, można dowolnie obracać przechodzące przez niego płaszczyzny, byle były wzajemnie prostopadłe.*

Ale nie o to zastosowanie mi tu chodzi. W wielu celownikach optycznych (tak, chodzi o uzbrojenie!) potrzebne jest ustawienie dwóch lusterek **dokładnie** pod kątem prostym. Jak łatwo zgadnąć, uzyskanie tego przez korygowanie ustawienia, aż będzie dostatecznie dokładne, jest i pracochłonne, i nie do końca precyzyjne.

Ale można tu wykorzystać wzmocnienie powyżej wyróżnionego twierdzenia: *złożenie trzech symetrii względem płaszczyzn jest symetrią względem punktu ich przecięcia wtedy i tylko wtedy, gdy płaszczyzny te są parami prostopadłe.*

Dowód. Przypuśćmy, że symetrię względem punktu P można otrzymać ze złożenia symetrii względem płaszczyzn α, β, γ . Weźmy teraz przechodzące przez P prostopadłe płaszczyzny π i ρ , które są prostopadłe również do α . Mamy więc

$$S_\alpha S_\beta S_\gamma = S_\alpha S_\pi S_\rho, \quad \text{czyli} \quad S_\beta S_\gamma = S_\pi S_\rho.$$

W ostatniej równości mamy do czynienia z dwoma obrotami, a zatem kąt między wyznaczającymi je płaszczyznami musi być taki sam. Stąd $\beta \perp \gamma$. Podobnie wykazujemy prostopadłość α do β i γ .

Skoro tak, to można prostopadłość dwóch lusterek sprawdzać, patrząc, **czy da się do nich dostawić trzecie tak, aby odbijały każdy promień jako równoległy.**

Każdy to brzmi strasznie. Ale zastanówmy się, czy nie wystarczy sprawdzić odbicia tylko np. dla trzech różnych kierunków. Czytelnik Zmysłny od razu będzie wiedział, że nie. Ale może wystarczy dla czterech?

Tu należy przypomnieć sobie, przez ile elementów przekształcenie geometryczne jest jednoznacznie określone.

Kolejny problem to (gdy już ustalimy skończoną listę kierunków do sprawdzenia), jak sprawdzić, czy odbity promień jest równoległy do padającego?

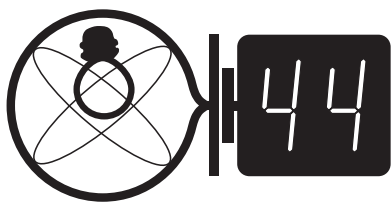
Kierunek to pęk prostych równoległych, więc może wiązka cienkich rurek coś by pomogła?

Przytoczony przykład jest autentyczny. Przypomniał mi się, bo 5 lipca zmarł mój kolega, Ludomir Włodarski (napisaliśmy nawet wspólnie książkę *O geometrii dla postronnych*; dla *Delty* napisał wspólnie z Maciejem Bryńskim pierwszy tomik *Biblioteczki Delty* o konstrukcjach geometrycznych). Był bardzo uzdolnionym geometrą, ale prawdziwą sensacją był (wówczas – połowa lat siedemdziesiątych – praktycznie

niespotykany) fakt, że bezpośrednio po doktoracie poszedł pracować do przemysłu, do Polskich Zakładów Optycznych. Usprawnienie kontroli prostopadłości lusterek, oparte na opisanym tu pomysle, było jego pierwszym dokonaniem w nowym miejscu pracy. Potem, rzecz jasna, doprowadził do wykorzystania wielu poważniejszych twierdzeń geometrii (zwłaszcza rzutowej) w praktyce przemysłowej.

Marek KORDOS

Klub 44

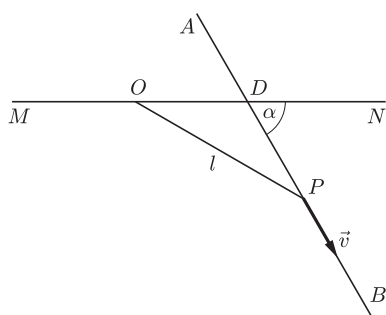


Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2012

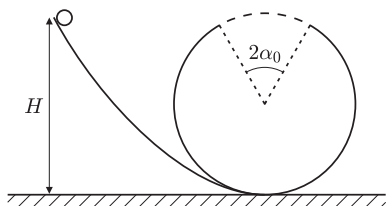
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 534 ($WT = 1,33$) i 535 ($WT = 2,17$) z numeru 3/2012

Michał Kozlik	Gliwice	46,00
Marian Łupieżowicz	Gliwice	44,02
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	38,04

Dwaj gliwiczanie przekroczyli 44 punkty (po raz drugi i pierwszy).



Rys. 1



Rys. 2

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 542, 543

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

542. Statek i kuter płyną po liniach prostych z prędkościami odpowiednio $v_1 = 15$ mil/h i $v_2 = 26$ mil/h. W chwili początkowej kuter znajduje się w odległości 6 mil na południe od rufy statku. W chwili końcowej kuter przecina tor statku 3 mile za nim i znajduje się wtedy najbliżej statku. Ile czasu upływa między tymi chwilami? Wyznacz kurs statku (kąt między kierunkiem południe-północ a wektorem prędkości statku).

543. Pies P biegnie ze stałą prędkością v po prostej AB , która tworzy kąt $\alpha = \pi/3$ z poziomo rozciągniętym drutem MN (rys. 1). Do obroży psa przymocowana jest lekka pozioma linka o długości l . Linka połączona jest z pierścieniem O o masie m , który może ślizgać się po drucie bez tarcia. Znaleźć naprężenie linki w chwili, gdy pies i pierścień znajdują się w jednakowych odległościach od punktu przecięcia D prostej AB i drutu.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2012

Przypominamy treść zadań:

538. Małe ciało porusza się po torze z „martwą pętlą”, której na górze brakuje łuku $2\alpha_0$ (rys. 2). Z jakiej wysokości H powinno wystartować ciało, żeby oderwawszy się na początku wyrywy nie wypaść poza nią?

539. Długa cylindryczna cewka nakręcona na rdzeń o średnicy D_1 ma indukcyjność L_1 . Po podłączeniu cewki do źródła prądu wewnątrz niej zostało wyindukowane pole magnetyczne o indukcji B_1 . Następnie cewka została nakręcona na inny rdzeń o średnicy D_2 . Indukcyjność cewki była wtedy równa L_2 . Wyznaczyć indukcję pola magnetycznego B_2 wewnątrz nowej cewki po podłączeniu do tego samego źródła prądu. Założyć, że przewodnik, z którego jest zrobiona cewka, jest dużo dłuższy niż długość cewki.

538. Ciało nie odpadnie od pętli, jeżeli składowa siły grawitacji prostopadła do toru nie przekracza wartości siły odśrodkowej. Stąd otrzymujemy warunek

$$mg \cos \alpha \leq m \frac{v^2}{R}$$

dla $\alpha_0 \leq \alpha < \pi/2$ i stwierdzamy, że $v_0^2 \geq gR \cos \alpha_0$, gdzie v_0 jest prędkością ciała w najwyższym punkcie pętli. Ponadto zasięg rzutu ukośnego ciała wylatującego z pętli nie powinien być większy niż długość przerwy w pętli (mierzona w poziomie). Otrzymujemy stąd warunek

$$\frac{2v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{g} \leq 2R \sin \alpha_0,$$

czyli $v_0^2 \leq gR/\cos \alpha_0$. Wartość v_0^2 musi zatem leżeć w przedziale $(gR \cos \alpha_0, gR/\cos \alpha_0)$; możemy ją znaleźć z zasady zachowania energii:

$$gH = \frac{1}{2}v_0^2 + gR(1 + \cos \alpha_0).$$

Stąd

$$\frac{1}{2} \cos \alpha_0 \leq \frac{H}{R} + 1 + \cos \alpha_0 \leq \frac{1}{2 \cos \alpha_0}.$$

539. Pola powierzchni przekroju poprzecznego starej i nowej cewki są równe $S_1 = \pi D_1^2/4$, $S_2 = \pi D_2^2/4$. Strumień pola magnetycznego przechodzącego przez cewkę to $\Phi = LI = BSN$. Stąd $B = LI/(SN)$. Zatem

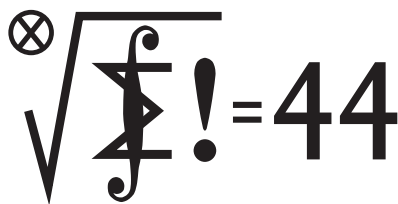
$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{L_2}{L_1} \frac{S_1 N_1}{S_2 N_2} \frac{I_2}{I_1}.$$

Ale ponieważ $I_1 = I_2$, więc $N_1/N_2 = D_2/D_1$ i

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{S_1 D_2 L_2}{S_2 D_1 L_1} = \frac{L_2 D_1}{L_1 D_2}.$$

Ostatecznie $B_2 = B_1 L_2 D_1 / (L_1 D_2)$.

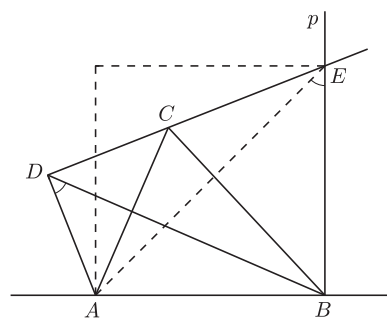
Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2012

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 633 (WT = 2,10) i 634 (WT = 1,33) z numeru 1/2012

Tomasz Tkocz	Rybnik	42,75
Roksana Słowik	Knurów	40,04
Zbigniew Skalik	Wrocław	38,93
Michał Miodek	Zawiercie	37,56
Adam Dzedzej	Gdańsk	36,77
Tomasz Wietecha	Tarnów	33,02



642. Każdy ruch zmniejsza wartość przekazywanej liczby. Gra się zatem zawsze kończy, a któryś z graczy ma strategię wygrywającą. Dodatnią liczbę całkowitą nazwijmy *zieloną*, jeśli – startując od tej liczby – gracz rozpoczynający ma strategię zwycięską; nazwijmy ją *czerwoną*, gdy strategię zwycięską ma jego przeciwnik; również liczbę 0 będziemy uważać za czerwoną. Wykażemy, że liczba n^n jest zielona; a więc (jak zwykle w tego typu zadaniach) wygrywa dziewczyna.

Rozbicie zbioru liczb całkowitych nieujemnych na liczby zielone i czerwone jest scharakteryzowane przez własności:

- (1) od każdej liczby zielonej można przejść jednym ruchem do czerwonej;
- (2) od każdej liczby czerwonej wszystkie ruchy prowadzą do liczb zielonych.

Wśród liczb mniejszych od n^2 liczbami czerwonymi są wielokrotności liczby n , i tylko one; sprawdzenie własności (1), (2) jest natychmiastowe. Sama liczba n^2 jest wszelako zielona (dzielenie przez n prowadzi do czerwonej liczby n). Liczby z przedziału $(n^2; n^2 + \frac{n}{2})$ też są zielone (dzielenie z zaokrągleniem prowadzi do n). Zajmiemy się teraz liczbami większymi.

Przyjmijmy $n = 2k - 1$, czyli $k = \lceil n/2 \rceil$. Weźmy pod uwagę zbiór

$$Z = \{x \in \mathbb{N} : x > n^2 - n, x \not\equiv k \pmod{n}\}.$$

Udowodnimy, że wszystkie liczby w zbiorze Z są zielone.

Przypuśćmy, że tak nie jest. Niech c będzie najmniejszą liczbą czerwoną w zbiorze Z . Wiemy już, że zielone są

Zadania z matematyki nr 645, 646

Redaguje Marcin E. KUCZMA

645. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Boki BC i CD mają jednakową długość. Na przedłużeniu odcinka AB odkładamy odcinek BE długości $|BE| = |AD|$. Dowieść, że $|AC| = |CE|$.

646. Niech f będzie funkcją o wartościach rzeczywistych, określoną na zbiorze liczb dodatnich, dwukrotnie różniczkowalną, spełniającą warunek $f''(x) > \frac{1}{1+x^2}$ dla $x > 0$. Czy taka funkcja może mieć asymptotę przy $x \rightarrow \infty$?

Zadanie 646 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2012

Przypominamy treść zadań:

641. Na płaszczyźnie dane są punkty A, B . Rozważamy wszystkie czworokąty wypukłe $ABCD$, położone w ustalonej półpłaszczyźnie o krawędzi AB , symetryczne względem prostej BD , z kątem prostym przy wierzchołku D . Wykażać, że istnieje punkt wspólny wszystkich uzyskanych prostych CD .

642. Dana jest liczba naturalna nieparzysta n . Ala i Bartek grają w grę, wykonując ruchy na przemian. Stan gry jest liczbą całkowitą i zmienia swą wartość w trakcie gry. Gracz, do którego należy ruch, może do tej liczby zastosować jedną z dwóch operacji: odjąć od niej dowolną dodatnią liczbę całkowitą, mniejszą niż n , albo podzielić ją przez n i zaokrąglić wynik do najbliższej liczby całkowitej (wobec nieparzystości n , kierunek zaokrąglenia jest zawsze dobrze określony). Powstała nowa wartość przechodzi do dyspozycji przeciwnika. Wygrywa, kto pierwszy uzyska wartość 0. Rozpoczyna Ala, startując od liczby n^n . Kto ma strategię wygrywającą?

641. Z punktu B prowadzimy półprostą p , prostopadłą do AB , położoną w rozpatrywanej półpłaszczyźnie. Niech $ABCD$ będzie jednym z rozważanych czworokątów. Trójkąt ADC jest prostokątny, równoramienny. Stąd (i z wypukłości czworokąta $ABCD$) wynika, że punkt D leży po tej stronie p , co punkt A . Półprosta DC przecina więc p w pewnym punkcie E , tworząc czworokąt wypukły $ABED$. Ma on kąty proste przy wierzchołkach B i D ; można na nim opisać okrąg. Zatem $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB| = 45^\circ$ (ostatnia równość zachodzi, bo BD jest symetralną odcinka AC). Stąd wniosek, że E jest wierzchołkiem kwadratu, którego jednym bokiem jest odcinek AB . Jest to szukany punkt wspólny wszystkich możliwych prostych CD .

wszystkie liczby od $n^2 - n + 1$ do $n^2 + k - 1$; tak więc $c > n^2 + k$. Niech b będzie największą liczbą spełniającą warunki $b < c$, $b \equiv k \pmod{n}$; zatem $b \geq n^2 + k$. Jest ona osiągalna z liczby c ruchem odejmowania.

Dzielenie przez n z zaokrągleniem, zastosowane do każdej z liczb b, c , daje w wyniku tę samą liczbę a ; konkretnie: liczbę $a = (b + k - 1)/n$. Liczba c jest czerwona, więc w myśl własności (2) liczby b i a (osiągalne z c) są zielone. W myśl własności (1), istnieje ruch, prowadzący od liczby b do jakiejś liczby czerwonej. Nie jest to dzielenie z zaokrągleniem (które daje liczbę a); zaś odejmowanie od b liczb $1, \dots, n-1$ nie wyprowadza ze zbioru Z (skoro $b \geq n^2 + k$ oraz $b \equiv k$). Któraś z tak uzyskanych różnic powinna być liczbą czerwoną – wbrew określeniu c jako najmniejszej liczby czerwonej w zbiorze Z .

Sprzeczność dowodzi, że istotnie cały zbiór Z jest zielony. Oczywiście $n^n \in Z$. Ala wygrywa.

Uwaga. Niektóre liczby zielone ($> n^2$) są także poza zbiorem Z (na przykład liczba $2n^2 - n + k$ jest zielona). Można wykazać, że oprócz liczb 0, czerwone są liczby następujących dwóch postaci, i tylko one:

$$an^{2j+1} - \frac{n^{2j} - 1}{2}, \quad j \geq 0, 0 < a < n;$$

$$bn^{2j+1} - \frac{n^{2j+1} - 1}{2}, \quad j \geq 0, [n < b < n^2, b \not\equiv 0] \text{ lub } [b \geq n^2, b \not\equiv k].$$

Sprawdzenie własności (1), (2) wymaga uciążliwego rozpatrywania wielu przypadków.

Prosto z nieba: Bąble Fermiego

Teleskop satelitalny Fermi, zaprojektowany z myślą o obserwacjach nieba w bardzo twardym promieniowaniu (co jest konieczne przy wykrywaniu błysków gamma), jest odnoszącym duże sukcesy przedsięwzięciem NASA. Wśród wielu celów misji jest zbadanie najbardziej ekstremalnych obszarów Wszechświata w poszukiwaniu ciemnej materii, poznanie mechanizmów powstawania promieniowania kosmicznego oraz eksploracja dziewiczego, wysokoenergetycznego zakresu widma promieniowania. Jednym z nieoczekiwanych odkryć jest nieznaną wcześniej grupą *pulsarów gamma*, tzn. takich obracających się i obdarzonych polem magnetycznym gwiazd neutronowych, które są niewidoczne (bądź bardzo słabo widoczne) w promieniowaniu mniej energetycznym – dane z Fermiego dostarczyły ostatnio zupełnie nowego obrazu tej populacji obiektów.

Jeszcze bardziej spektakularne są obserwacje *gigantycznych* struktur, z braku lepszego określenia nazwanych bąblami (*), rozciągających się symetrycznie względem dysku Galaktyki. Bąble, o rozmiarach około 25 tys. lat świetlnych każdy (promień dysku galaktycznego to około 50 tys. lat świetlnych), świecą głównie w promieniach gamma, chociaż w archiwalnych danych rentgenowskiego satelity ROSAT oraz mikrofalowego detektora WMAP (badającego reliktowe promieniowanie tła) można również dostrzec ich obrys. Okoliczności powstania bąbli nie są do końca jasne – naukowcy spekulują, że mogą być one pozostałością „awanturycznej” przeszłości supermasywnej czarnej dziury znajdującej się w centrum naszej Galaktyki (Sgr A* w gwiazdozbiornie Strzelca). Dobrze widoczne krawędzie bąbli miałyby świadczyć o potężnej i gwałtownej emisji energii, która miała – być może – powstać z dżetu. Jest to interesująca hipoteza, ponieważ czarna dziura w naszej Galaktyce zachowuje się obecnie bardzo spokojnie, a wokół niej nie widać pozostałości po relatywistycznych strugach, jakie można dostrzec w innych galaktykach. Alternatywna teoria postuluje powstanie bąbli w wyniku intensywnych procesów gwiazdotwórczych. Jak jest w istocie, na razie nie wiadomo – jest jednak pewne, że odkrycie tych struktur jest powiązane z najbardziej istotnymi nierozwiązanymi problemami współczesnej astrofizyki.

(*) <http://apod.nasa.gov/apod/ap101110.html>; schematyczny rysunek: http://www.nasa.gov/images/content/498884main_DF3_Fermi_bubble_art_labels.jpg

Dżety są wąskimi strugami relatywistycznej plazmy związanymi z aktywnymi jądrami galaktyk.

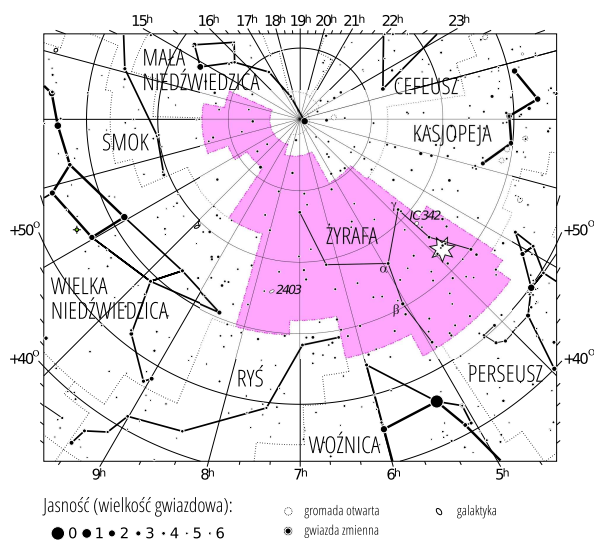
Michał BEJGER

Niebo jak własna kieszeń: Wrzesień

We wrześniu zapoznamy się z dużym, ale słabo wyróżniającym się gwiazdozbiorem Żyrafy (łac. *Camelopardalis*). Gwiazdozbiór ten, dostępny do obserwacji przez cały rok, znajdziemy w okolicy północnego bieguna nieba pomiędzy Wielką Niedźwiedzicą i Kasjopeją. Najjaśniejszą gwiazdą Żyrafy jest β Camelopardalis (4.03^m); przy odrobinie wyobraźni można dopatrzeć się zarysu skierowanej w stronę bieguna szyi oraz nóg (w kierunku Perseusza), czyli kształtu, w jakim zdefiniował ją Petrus Plancius, holenderski astronom żyjący na przełomie XVI i XVII wieku. Lornetka umożliwi nam obserwację tzw. kaskady Kemble'a – ponad dwudziestu różnego koloru i jasności ($5-10^m$) niezwiązanych ze sobą fizycznie gwiazd ułożonych w rzędki w okolicy gromady otwartej NGC 1502 (patrz mapa – kaskada znajduje się na przedłużeniu linii poprowadzonej przez górne gwiazdy litery W, tworzącej Kasjopeję).

Księżyc znajdzie się w nowiu 16 września (pełnia 30.); 8. nastąpi jego koniunkcja z Jowiszem (w gwiazdozbiornie Woźnicy, jasność $-2,23^m$), 12. z Wenus (w Raku, $-4,05^m$), 18. i 19. z Saturnem ($1,33^m$) i Marsem ($1,22^m$) tuż przed zachodem Słońca w, odpowiednio, gwiazdozbiornie Panny i Wagi. Pierwszy dzień jesieni, czyli moment równonocy, nastąpi w tym roku 22 września o 16.49. Uran 29 września znajdzie się w opozycji, czyli w momencie najbardziej dogodnym do obserwacji – będzie jednak prawie niewidoczny dla nieuzbrojonego oka ($5,72^m$), w pobliżu jasnego Księżyca, z którym będzie w koniunkcji dzień później. Obserwatorzy meteorów powinni przygotować się do obserwacji średnio aktywnych α Aurigid (maksimum 1., 10 zjawisk/h), wrześniowych Perseid (maksimum 8., 6 zjawisk/h) a także Piscyd (maks. 20., radiant w pobliżu punktu Barana w gwiazdozbiornie Ryb).

M. B.



Gwiazdozbiór Żyrafy. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. Siedmioramienna gwiazdka oznacza pozycję kaskady Kemble'a. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

Łacińskie *Camelopardalis* jest zapożyczeniem z greckiego – połączeniem słów *kamelos* (wielbłąd) i *pardalis* (lampart), które wg starożytnych dobrze oddaje podstawowe cechy żyrafy.

Kaskada została tak nazwana na cześć miłośnika astronomii i franciszkanina, o. Luciana J. Kemble'a.



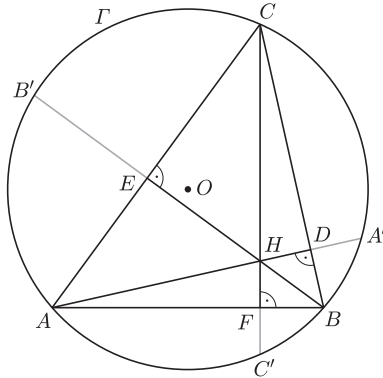
Odbicia ortocentrum

Joanna JASZUŃSKA

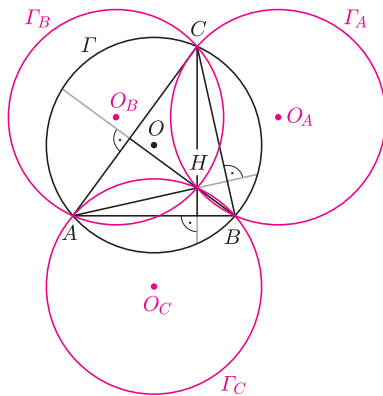
Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia jego wysokości. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach 1 i 2 oraz założenie, że trójkąt ABC jest ostrokątny.

Twierdzenie (*). Punkty A', B', C' są obrazami ortocentrum trójkąta ABC w symetriach względem prostych odpowiednio BC, CA, AB .

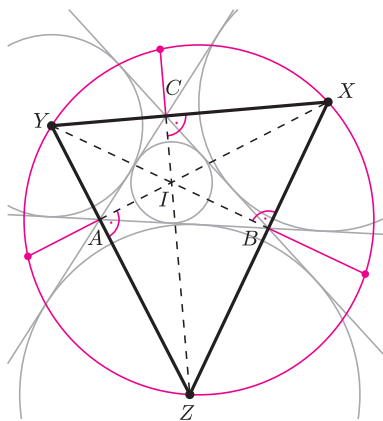
Dowód. Trójkąty ABD i CBF są prostokątne o wspólnym kącie przy wierzchołku B , więc $\sphericalangle BAA' = \sphericalangle BCC'$. Jednocześnie $\sphericalangle BCC' = \sphericalangle BAC'$ jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Stąd $\sphericalangle BAA' = \sphericalangle BAC'$, więc trójkąty prostokątne FAH i FAC' , o wspólnym boku FA , są przystające. Wobec tego $HF = C'F$. Analogicznie $HD = A'D$ oraz $HE = B'E$, co kończy dowód. \square



Rys. 1. A', B', C' to punkty przecięcia wysokości trójkąta z okręgiem Γ .



Rys. 2. $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ to okręgi opisane odpowiednio na trójkątach BCH, CAH, ABH .



Rys. 3

Zadanie 2 pochodzi z XIX Olimpiady Matematycznej, a zadanie 8 z XVII OM.

1. Udowodnij twierdzenie (*) dla trójkąta ABC niekoniecznie ostrokątnego.

2. Dany jest okrąg Γ , punkt A na nim i punkt H wewnątrz niego. Wpisz w okrąg Γ taki trójkąt o wierzchołku A , żeby punkt H był jego ortocentrum.

3. Wykaż, że trójkąty $A'B'C'$ i DEF są podobne.

4. Wykaż, że $A'A, B'B, C'C$ są dwusiecznymi kątów trójkąta $A'B'C'$.

5. Udowodnij, że okręgi $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ są przystające (rys. 2).

6. Wykaż, że trójkąt $O_A O_B O_C$ przystaje do trójkąta ABC , punkt O jest jego ortocentrum oraz punkt H jest środkiem opisanego na nim okręgu (rys. 2).

7. Udowodnij, że H jest jedynym punktem wewnątrz trójkąta ABC , którego obrazy w symetriach względem prostych BC, CA, AB leżą na okręgu Γ .

8. Wykaż, że środki okręgów dopisanych do trójkąta i punkty symetryczne do środka okręgu wpisanego w ten trójkąt względem jego wierzchołków leżą na jednym okręgu.

9. Wykaż, że $AD \cdot HD = BD \cdot DC$ oraz że $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$.

10. Udowodnij, że obrazy symetryczne ortocentrum względem środków boków trójkąta leżą na okręgu Γ . Jak punkty te są położone względem A, B i C ?

11. Dany jest okrąg Γ i punkt H wewnątrz niego. Wyznacz zbiór środków boków takich trójkątów wpisanych w okrąg Γ , że punkt H jest ich ortocentrum.

12. Oznaczmy przez P i Q odpowiednio punkty przecięcia prostych OB' z AC oraz OC' z AB . Wykaż, że istnieje okrąg styczny do prostych $B'P, HP, C'Q, HQ$.

Rozwiązania niektórych zadań

R2. Punkt przecięcia prostej AH z okręgiem to A' . Na mocy (*), symetralna odcinka HA' przecina okrąg Γ w szukanych punktach B i C . \square

R4. Na mocy (*) mamy $AB' = AH = AC'$, więc $\sphericalangle AA'B' = \sphericalangle AA'C'$ jako kąty wpisane oparte na równych łukach $\overset{\frown}{AB'}$ i $\overset{\frown}{AC'}$. Wobec tego $A'A$ jest dwusieczną kąta $B'A'C'$. Dowód dla $B'B$ i $C'C$ przebiega analogicznie. \square

R5. Okręgi Γ_C i Γ są przystające, jako opisane na symetrycznych trójkątach ABH i ABC' . Analogicznie okręgi Γ_A i Γ_B przystają do Γ . \square

R7. Aby obraz punktu X w symetrii względem BC leżał na okręgu Γ , punkt X musi leżeć na obrazie okręgu Γ w tej symetrii, czyli na okręgu Γ_A . Musi też leżeć na Γ_B i Γ_C , a jedynym wspólnym punktem tych trzech okręgów jest H . \square

R8. Oznaczmy środki okręgów dopisanych przez X, Y, Z (rys. 3). Wtedy $XI \perp YZ, YI \perp XZ$ oraz $ZI \perp XY$ jako dwusieczne kątów przyległych. Stąd punkt I jest ortocentrum trójkąta XYZ . Punkty symetryczne do I względem wierzchołków wyjściowego trójkąta są odbiciami ortocentrum I trójkąta XYZ w jego bokach, więc na mocy (*) leżą na okręgu opisanym na trójkącie XYZ . \square

Wskazówka 9. Trójkąty podobne lub potęga punktów D i H względem okręgu Γ .

Wskazówka 11. Jest to obraz okręgu Γ w jednokładności o środku H i skali $1/2$.

Wskazówka 12. Środkiem szukanego okręgu jest punkt A .

Które z udowodnionych faktów pozostają prawdziwe dla trójkąta ABC niekoniecznie ostrokątnego? Które sformułowania wymagają modyfikacji i jakich?