


lekcję rysunku Zdzisława Pogody

**SPIS TREŚCI**  
**NUMERU 5 (456)**

Żuraw matematyczny  
*Małgorzata Mikołajczyk* str. 1

Japońska geometria świątynna  
*Anna Dymek* str. 2

Kocha, lubi, szyfruje...  
*Tomasz Kazana* str. 4

 O urodzie plemników  
i nie tylko  
*Magdalena Fikus* str. 6

Dowody V postulatu Euklidesa  
*Marek Kordos* str. 7

Kamerton i struna  
*Jacek Ciborowski,*  
*Krzysztof Turzyński* str.10

Kwadrat, którego nie ma  
*Piotr Kopacz* str.12


Prosto z nieba:  
Kolejne planety Keplera  
*Michał Bejger* str.15

Jak znaleźć *second min*?  
*Jakub Radoszewski* str.16

Aktualności str.18


Niebezpieczeństwa  
innych próżni  
*Krzysztof Turzyński* str.19


Informatyczny kącik olimpijski  
(51): Nurkowanie  
*Adam Karczmarz* str.20

 Stowarzyszenie na rzecz  
Edukacji Matematycznej str.21

Klub 44 str.22

Niebo jak własna kieszeń: Maj str.24

 Zadania str.24

 Ciąg Fibonacciego  
*Joanna Jaszewska* str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Ewa Czuchry, Maria Denten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

**Fran-Press:** [www.franpress.pl](http://www.franpress.pl), infolinia 801-679-466

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**Pol-Perfect:** [www.polperfect.com.pl](http://www.polperfect.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Warunki prenumeraty w RUCH-u:**

Cena prenumeraty w 2012 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** Zamówienia na prenumeratę przyjmują Zespoły Prenumeraty właściwe dla miejsca zamieszkania klienta do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty; [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH S.A. Biuro Kolportażu – Zespół Obrotu Zagranicznego, 03-236 Warszawa, ul. Annopol 17a. Tel. 48 22 532 88 23, 532 88 16; [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl)

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:

SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;

w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;

w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;

kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

# Żuraw matematyczny

Od dwóch lat Fundacja Matematyków Wrocławskich oraz Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego organizują konkurs matematycznego origami „Żuraw”. Mogą w nim startować uczniowie ze wszystkich typów szkół, a także dorośli amatorzy i profesjonalni matematycy. W odróżnieniu od innych konkursów origami w tym nie wystarczą zdolności manualne. W eliminacjach zawodnicy wykonują model matematyczny (płaski lub przestrzenny) w technice origami, natomiast w finale jest na odwrót – rozwiązują problemy dotyczące sztuki origami, używając technik matematycznych.

Celem konkursu jest rozwijanie wyobraźni i wiedzy geometrycznej dotyczącej m.in. wielościanów, powierzchni, fraktali i parkietaży, a także koncentracji i sprawności manualnej oraz zamiłowania do sztuki origami. Więcej o konkursie można dowiedzieć się na stronie FMW

<http://www.fmw.uni.wroc.pl> (zakładka >dla uczniów >Mat-Origami Żuraw)

Zdjęcia modeli wykonanych przez uczestników konkursu można obejrzeć na okładce. Poniżej prezentujemy wybór zadań finałowych.



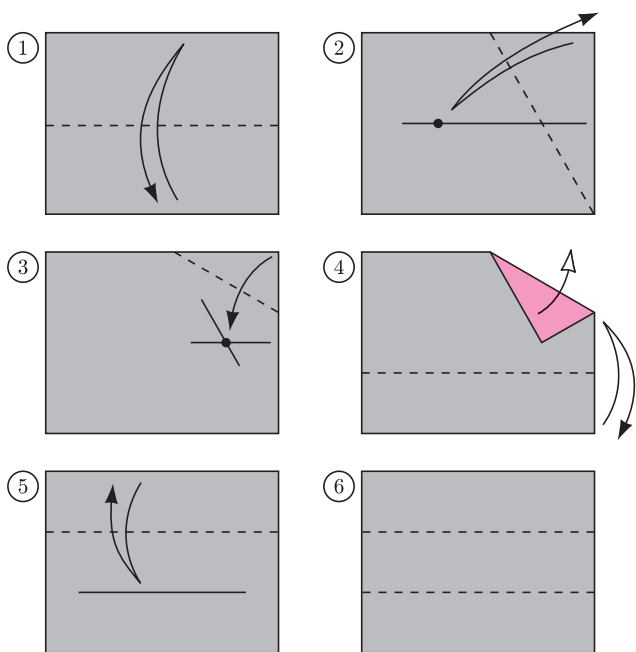
## poziom elementarny (SP, AMATORZY)

Zadanie 1. Na kartce papieru narysowano odcinek. Zagnij ją w taki sposób, aby uzyskać odcinek do niego

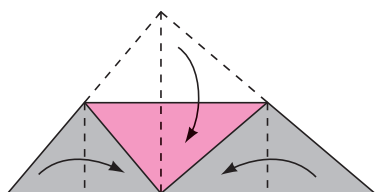
- równoległy,
- prostopadły.

Zadanie 3. Przez zaginanie podziel kwadrat na 16 przystających mniejszych części. Czy potrafisz podać cztery rozwiązania?

Zadanie 5. Uzasadnij, że konstrukcja z poniższego rysunku przedstawia podział prostokąta na trzy przystające części.



Zadanie 7. Przeprowadź w technice origami dowód twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych trójkąta (wskazówka na rysunku).



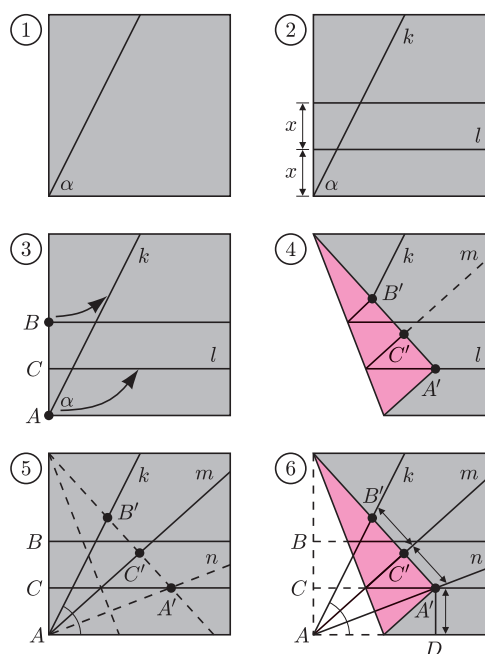
## poziom zaawansowany (LO, PROFESJONALIŚCI)

Zadanie 2. Na kartce papieru narysowano odcinek. Zagnij ją tak, aby uzyskać jego podział na

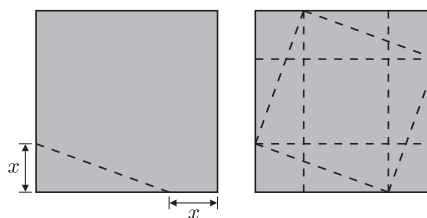
- trzy,
- cztery przystające części.

Zadanie 4. Przez zaginanie uzyskaj z kwadratu trójkąt równoboczny o boku takiej samej długości jak kwadrat. Czy potrafisz podać dwa rozwiązania?

Zadanie 6. Uzasadnij, że poniższy rysunek przedstawia konstrukcję podziału kąta na trzy przystające części.



Zadanie 8. Przeprowadź w technice origami dowód twierdzenia Pitagorasa (wskazówka na rysunku).

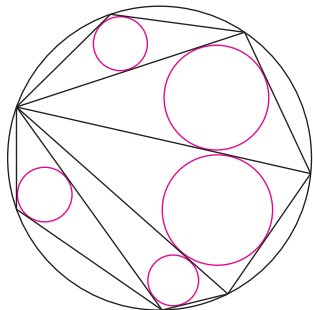


Małgorzata MIKOŁAJCZYK

Jest to skrót pracy uczniowskiej nagrodzonej srebrnym medalem w XXXIII Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2011 roku (Łódź).

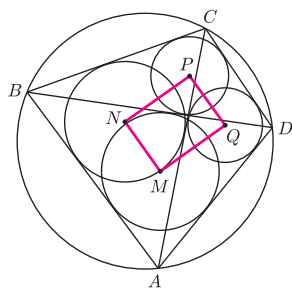
# Japońska geometria świątynna

Anna DYMEK



Rys. 1

Triangulacja wielokąta to podział na trójkąty dokonany przez wybór niektórych przekątnych w taki sposób, żeby żadne dwie z wybranych nie przecinały się w punktach innych niż wierzchołki tego wielokąta.



Rys. 2

Sangaku to w istocie zadania z geometrii euklidesowej. Część z nich nie ma nawet polecenia – odgadnięcie go jest częścią zagadki. Inne jednak opisano w Kanbun, czyli piśmie używającym ideogramów chińskich, a czytany po japońsku. Kanbun miał podobną rangę jak łacina na Zachodzie, był językiem ludzi mających wyższe wykształcenie. Stąd wniosek, że tworzyli i rozwiązywali te sangaku głównie obywatele z klasy samurajów. Cele tworzenia sangaku były dwojakie: wysiłek włożony w rozwiązanie ofiarowywano opiekuńczym duchom, a wisząca w świątyni tabliczka stawiała się wyzwaniem dla innych.

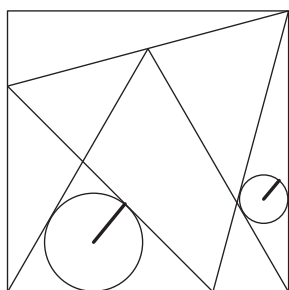
Prawdopodobnie najbardziej znanym na Zachodzie sangaku pozostaje tzw. japońskie twierdzenie o wielokącie wpisanym w okrąg, występujące nawet pod nazwą „sangaku” w *Kąciku olimpijskim* (zob. [1]).

**Sangaku 1.** Suma promieni okręgów wpisanych we wszystkie trójkąty pewnej triangulacji wielokąta wpisanego w okrąg jest stała dla danego wielokąta i niezależna od triangulacji (rys. 1).

Dowód tego twierdzenia także znajduje się w *Kąciku olimpijskim*, nie będę go więc tu przytaczać.

Jedno sangaku pojawiło się nawet na Asian Pacific Mathematics Olympiad w 1996 r. Znane jest ono jako japońskie twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg.

**Sangaku 2.** Czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w okrąg. Wówczas środki  $M, N, P, Q$  okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty  $DAB, ABC, BCD, CDA$  tworzą prostokąt (rys. 2).

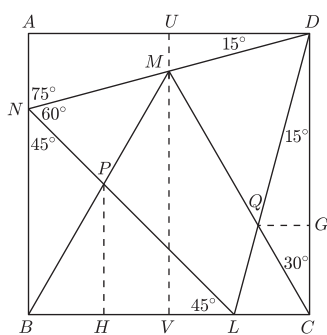


Rys. 3

Przy dowodzie tego twierdzenia najpierw wykazujemy, że na czwórkach punktów złożonych z dwóch środków okręgów wpisanych i dwóch odpowiednio do nich dobranych wierzchołków czworokąta (np. na czwórce  $M, N, A, B$ ) można opisać okrąg. Następnie bierzemy dwa takie okręgi (np. opisane na punktach  $A, B, N, M$  oraz  $D, A, M, Q$ ) i wykazujemy, że odpowiedni kąt (w naszym przykładzie kąt  $NMQ$ ) jest kątem prostym. Całość dowodu to proste rachunki na kątach w okręgu, które pozostawiam Czytelnikowi do sprawdzenia.

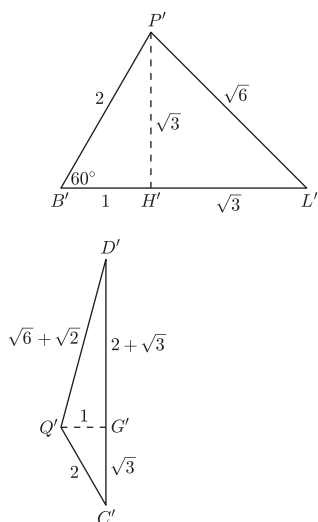
Aby ukazać specyfikę zadań sangaku, przedstawię tu rozwiązanie jednego z nich w całości.

**Sangaku 3.** Dane są dwa trójkąty równoboczne wpisane w kwadrat oraz dwa okręgi wpisane w wybrane z powstałych trójkątów, jak pokazuje rysunek 3. Należy znaleźć zależność między promieniami tych okręgów.

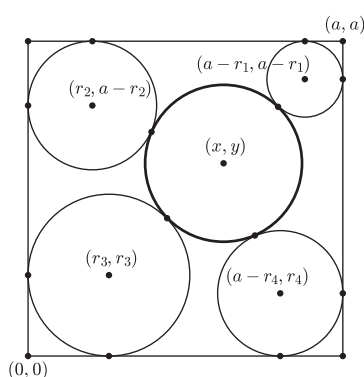


Rys. 4

Przyjmijmy oznaczenia wierzchołków i punktów przecięcia odcinków jak na rysunku 4. Weźmy ponadto punkty  $H, V, U$  i  $G$ , będące rzutami prostokątnymi, odpowiednio, punktu  $P$  na  $BC$ ,  $M$  na  $BC$  i  $AD$  oraz  $Q$  na  $DC$ , i oznaczmy znane kąty. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że długości boków kwadratu są równe 2, czyli  $AB = BC = CD = AD = BM = CM = 2$ . Wtedy wysokość  $MV$  trójkąta równobocznego  $MBC$  ma długość  $\sqrt{3}$ , a zatem  $MU = 2 - \sqrt{3}$ .

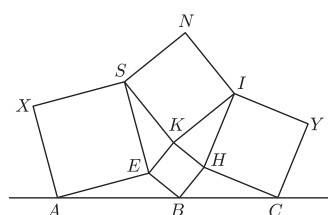


Rys. 5



Rys. 6

$d(\omega_1, \omega_2)$  to długość odcinka między punktami styczności okręgów  $\omega_1$  i  $\omega_2$  do ich wspólnej zewnętrznej stycznej.



Rys. 7

### Literatura

- [1] Lev Kurlyandchik, *Kącik olimpijski*, cz. I – geometria.
- [2] <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml>
- [3] <http://mathworld.wolfram.com/CaseysTheorem.html>
- [4] Joanna Zakrzewska, *O pewnym uogólnieniu twierdzenia Ptolemeusza*, w: *Matematyka: poszukuję – odkrywam*, Wydawnictwo Szkolne Omega, 2011.

Z podobieństwa trójkątów  $DAN$  oraz  $DUM$  mamy  $AN = 2(2 - \sqrt{3})$ , stąd  $BN = BL = 2(\sqrt{3} - 1)$ .

Obliczymy teraz długości promieni zaznaczonych okręgów. Będziemy korzystać ze wzoru  $r = \frac{2S}{L}$ , gdzie  $S$ ,  $L$  i  $r$  to odpowiednio pole trójkąta, jego obwód i promień okręgu wpisanego. Aby uprościć te obliczenia, wykonamy je dla okręgów wpisanych w trójkąty podobne do  $BPL$  oraz  $QCD$ . Rozważmy trójkąty  $B'P'L'$  oraz  $Q'C'D'$ , takie że  $B'H'$  oraz wysokość  $Q'G'$  mają długość 1, jak na rysunku 5. Wtedy promień  $r'$  okręgu wpisanego w trójkąt  $B'P'L'$  ma długość

$$r' = \frac{\sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$

Promień  $r_1$  okręgu wpisanego w trójkąt  $BPL$  ma się do  $r'$  tak, jak  $BL$  do  $B'L'$ , a ponieważ

$$\frac{BL}{B'L'} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{1 + \sqrt{3}} = 2(2 - \sqrt{3}),$$

więc

$$r_1 = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$

Analogicznie obliczamy

$$r_2 = \frac{2}{4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{2}}.$$

Po wykonaniu kilku przekształceń dochodzimy do wniosku, że  $r_1 = 2r_2$ .

Jest to jedno z bardziej typowych sangaku. Jak widać, rozwiązanie zawiera parę pomysłów i raczej żmudne obliczenia, ale nie korzysta z wyszukanych metod i nie wymaga niczego więcej niż podstawowa wiedza z zakresu planimetrii.

W *Delcie* 9/2011 w dziale Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej można przeczytać o twierdzeniu Caseya. Przypomnę w tym miejscu jego uproszczoną wersję, gdyż posłuży nam ona do rozwiązania następnego sangaku.

**Twierdzenie Caseya.** *Jeśli okręgi  $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$  są styczne do okręgu  $\omega$  w punktach  $A, B, C$  i  $D$  (wszystkie wewnętrznie lub wszystkie zewnętrznie) oraz czworokąt  $ABCD$  wpisany w okrąg  $\omega$  jest wypukły, to spełniona jest równość:*

$$d(\omega_A, \omega_C) \cdot d(\omega_B, \omega_D) = d(\omega_A, \omega_B) \cdot d(\omega_C, \omega_D) + d(\omega_B, \omega_C) \cdot d(\omega_A, \omega_D).$$

**Sangaku 4.** *Wewnątrz kwadratu o boku długości  $a$  znajduje się okrąg  $\omega$ . Okrąg ten nie ma punktów wspólnych z brzegiem kwadratu. Cztery okręgi  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  o różnych promieniach są styczne do okręgu  $\omega$  oraz każdy z nich jest styczny do dwóch boków kwadratu (rys. 6). Wyznacz długość boku kwadratu w zależności od promieni okręgów  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ .*

Zadanie to najłatwiej rozwiązać, zapisując równość wynikającą z twierdzenia Caseya. Długości interesujących nas odcinków można wyznaczyć, używając twierdzenia Pitagorasa i odejmując długości odpowiednich promieni od długości boku kwadratu. W ten sposób otrzymujemy równanie

$$(a - r_1 - r_2)(a - r_3 - r_4) + (a - r_2 - r_3)(a - r_1 - r_4) = \sqrt{2 \cdot (a - r_1 - r_3)^2 - (r_3 - r_1)^2} \cdot \sqrt{2 \cdot (a - r_2 - r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2}.$$

Teraz wyprowadzenie wzoru na  $a$  pozostaje jedynie kwestią sprawności rachunkowej.

Na koniec sangaku dość nietypowe, bowiem niezawierające ani jednego okręgu. Czytelnik Wnikliwy z pewnością zechce je rozwiązać w ramach rozwijania znajomości z japońskimi zadaniami geometrycznymi.

**Sangaku 5.** *Dane są cztery kwadraty  $AESX, BHKE, CYIH, KINS$ , ułożone jak na rysunku 7. Jaka jest zależność między polami kwadratów  $BHKE$  oraz  $KINS$ , jeśli punkty  $A, B$  i  $C$  są współliniowe?*

Podpowiedź: można wpisać kwadraty, do których należą wierzchołki  $A, B, C$ , w kwadraty o podstawach zawierających się w prostej  $AB$ .

W fizyce szkolnej nieustannie przewijającym się motywem są dwa znane miasta: miasto A oraz miasto B. W kryptografii takimi gwiazdami są Alicja i Bob, którzy ciągle się komunikują, uwierzytelniają, a zwykle przeszkadza im w tym złowroga Ewa.

Tym razem jednak zadanie stojące przed Alicją i Bobem jest wyjątkowo trudne. Chcą sprawdzić, czy się nawzajem kochają, jednak bez ujawniania swoich uczuć. Co przez to rozumiemy? Otóż chcemy opracować następujący protokół komunikacyjny.

Alicja posiada bit  $a$ , który informuje o tym, czy kocha Boba, czy nie (to oznacza, że  $a = 1$ , jeśli Alicja jest zakochana w Bobie, jeśli zaś nie jest, to  $a = 0$ ). Analogicznie, Bob posiada bit  $b$  opisujący jego uczucia względem Alicji. Oczywiście teraz ich wzajemna miłość może być opisana w tej notacji przez wyrażenie  $m := a \wedge b$ , które jest równe 1 tylko wtedy, gdy  $a = b = 1$ . Naszym celem jest opracowanie takiego protokołu, w wyniku którego Alicja na końcu będzie знаła  $a$  oraz  $m$  (i nic więcej!), natomiast Bob  $b$  oraz  $m$ . Intuicja stojąca za takimi założeniami jest następująca: chcemy uniknąć krępującej sytuacji, gdy, na przykład, Alicja kocha Boba, ale Bob nie odwzajemnia tych uczuć, a dowiaduje się o uczuciu Alicji. Innymi słowy: jeśli Bob wie, że  $b = 0$  oraz  $m = 0$ , to nie powinien umieć wyznaczyć  $a$ .

Powyższe założenia łatwo uzyskać, gdy dopuścimy trzecią zaufaną stronę, która, gdy pozna  $a$  i  $b$ , obliczy  $m$  oraz przekaże tę informację obu zainteresowanym osobom. Nasze zadanie jest jednak bardziej ambitne, ponieważ pożądanym efektem chcemy uzyskać za pomocą protokołu, w którym jedynymi stronami są Alicja i Bob. Zadanie samo w sobie wydaje się trudne, a wręcz można by przypuszczać, że tak określony protokół nie jest możliwy do zrealizowania. Pokażemy jednak, że jest to możliwe, ale przy pewnych założeniach obliczeniowych. Mamy tu na myśli klasyczne założenia dotyczące szyfrowania algorytmem RSA: a więc, że strona posiadająca jakąś wiadomość zaszyfrowaną oraz klucz publiczny bez znajomości klucza prywatnego nie jest w stanie odtworzyć wiadomości jawnej. Należy tu poczynić uwagę, że bez założeń tego typu (tj. bez ograniczeń obliczeniowych, inaczej mówiąc: bezpiecznie teorio-informacyjnie) żądany protokół nie da się skonstruować.

Wróćmy teraz do naszej Alicji i naszego Boba, którzy już za chwilę zaczną ze sobą rozmawiać.

Szukany protokół opiera się na idei tak zwanego *transferu utajnionego* (ang. *oblivious transfer*). Jest to bardzo ciekawy i użyteczny protokół, niejednokrotnie wykorzystywany jako cegiełka do budowy innych protokołów. Założenia są następujące: Alicja posiada parę liczb  $(x_0, x_1)$ , a Bob bit  $s$ . Po zakończeniu protokołu Alicja nie dowie się niczego nowego, natomiast Bob pozna liczbę  $x_s$ . Taki protokół istnieje, pokażemy go później. Natomiast korzystając z transferu utajnionego, możemy już łatwo wykonać nasz docelowy protokół.

Niech mianowicie Alicja przyjmie:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = a,$$

a Bob:

$$s = b.$$

W pierwszej fazie testu na miłość wykonujemy klasyczny transfer utajniony dla podanych parametrów. W jego wyniku Bob otrzymuje wartość  $y = x_s$ . Wówczas wysła ją Alicji i jest to wynik naszego protokołu.

Łatwo sprawdzamy poprawność: jeśli  $b = 0$ , to wynikiem protokołu jest  $x_0 = 0$ , co jest zgodne z oczekiwaniami, gdyż

$$m = (b \wedge a) = (0 \wedge a) = 0,$$

niezależnie od wartości  $a$ . W drugim przypadku ( $b = 1$ ) wynikiem jest  $x_1 = a$ , co również jest poprawną odpowiedzią, gdyż:

$$m = (b \wedge a) = (1 \wedge a) = a.$$



\*Instytut Informatyki,  
Uniwersytet Warszawski

## Transfer utajniony

W tej części pokażemy, jak zrealizować transfer utajniony. Jako narzędzia potrzebujemy szyfrowania z kluczem publicznym i prywatnym – dobrym przykładem jest tu wspomniany już algorytm RSA.

Przypomnijmy tutaj potrzebne informacje na temat algorytmu RSA. Alicja wybiera dwie duże liczby pierwsze  $p, q$  i oblicza  $n = pq$ . Następnie wyznacza liczbę  $e$  względnie pierwszą z  $\phi(n)$  (czyli liczbą liczb względnie pierwszych z  $n$  i mniejszych od  $n$ ) oraz jej odwrotność  $d$  modulo  $\phi(n)$ . Jej kluczem publicznym jest para  $(n, e)$ , a kluczem prywatnym para  $(n, d)$ . Szyfrowanie wiadomości  $m$  odbywa się według wzoru  $c = m^e \pmod n$ , a odszyfrowywanie według wzoru  $m = c^d \pmod n$ .

Przypomnijmy założenia: Alicja posiada parę liczb  $x_0$  oraz  $x_1$ , natomiast Bob ustala bit  $s$ . Teraz:

1. Alicja inicjalizuje algorytm RSA, tzn. wybiera liczbę  $n$  oraz klucze  $d$  i  $e$ . Zakładamy, że  $0 \leq x_0, x_1 < n$ . Swój klucz publiczny, czyli parę  $(n, e)$ , wysyła do Boba.
2. Alicja losuje niezależnie dwie różne liczby  $0 \leq y_0, y_1 < n$  oraz wysyła je Bobowi.
3. Bob losuje liczbę  $0 \leq k < n$  i oblicza  $v = (y_s + k^e) \pmod n$ . Bob wysyła wartość  $v$  do Alicji.
4. Alicja oblicza kolejno:  $k_0 = (v - y_0)^d \pmod n$  oraz  $k_1 = (v - y_1)^d \pmod n$ ,  
 $x'_0 = (x_0 + k_0) \pmod n$ ,  $x'_1 = (x_1 + k_1) \pmod n$  oraz wysyła Bobowi  $x'_0$  i  $x'_1$ .
5. Bob potrafi obliczyć  $(x'_s - k) \pmod n$ .

Sprawdźmy, że obliczona przez Boba wartość to rzeczywiście  $x_s$ :

$$\begin{aligned} x'_s - k &\equiv x_s + k_s - k \equiv x_s + (v - y_s)^d - k \equiv x_s + (y_s + k^e - y_s)^d - k \equiv \\ &\equiv x_s + k^{ed} - k \equiv x_s \pmod n. \end{aligned}$$

Aby opisany protokół był użyteczny, potrzebne są dwie własności:

- (\*) Alicja nie poznaje bitu  $s$ . Ten fakt jest prosty – wynika z symetrii. To znaczy: z punktu widzenia Alicji nie ma w protokole żadnego rozróżnienia między  $s = 0$  a  $s = 1$ , gdyż jedyny komunikat otrzymany od Boba (wartość  $v$ ) jest – z punktu widzenia Alicji – losowy i niezależny od wartości  $s$ .
- (\*\*) Bob nie poznaje liczby  $x_{1-s}$ .

Pełny dowód (\*\*) pominiemy i pozostawimy Czytelnikowi: wskazówka jest taka, że należy pokazać (metodą nie wprost), że gdyby można było złamać nasz protokół (a więc Bob *dowiedziałby się czegoś* na temat  $x_{1-s}$ ), to złamać potrafilibyśmy również RSA. Rozumowania tego typu są bardzo częste w dowodach w kryptografii, czasem nazywamy je *symulacją* jednego protokołu przez drugi.

Na sam koniec warto dodać, że opisany tutaj problem jest tylko drobnym przykładem na to, co potrafimy robić. Otóż okazuje się, że funkcja  $a \wedge b$  została wybrana zupełnie arbitralnie: tak naprawdę można podać protokół obliczający wartość dowolnej funkcji opisanej za pomocą obwodu logicznego. Wówczas ilość potrzebnej informacji, którą wymienia między sobą Alicja i Bob, jest proporcjonalna do liczby węzłów wspomnianego obwodu. Zainteresowanego Czytelnika zachęcamy do dalszych poszukiwań.



### Rozwiązanie zadania M 1350.

Podzbiory  $A$  zbioru  $\{1, \dots, n\}$  łączymy w nieuporządkowane pary postaci  $\{A, \{1, \dots, n\} \setminus A\}$ . Takich par jest  $2^{n-1}$ . Wobec założenia z treści zadania każdego studenta możemy utożsamiać jednoznacznie ze zbiorem pytań, na które zna odpowiedź. Gdyby studentów było więcej niż  $2^{n-1}$ , to znalazłoby się dwóch, którym odpowiadałyby zbiory  $A$  i  $\{1, \dots, n\} \setminus A$ . To jednak przeczyłoby założeniu, że na egzaminie było pytanie, na które obaj znali odpowiedź.



### Rozwiązanie zadania M 1349.

Załóżmy, że taka funkcja  $f$  istnieje. Zauważmy, że

$$f(x)^2 \geq f(x+y)(f(x)+y) > f(x+y)f(x),$$

więc  $f(x) > f(x+y)$ , dla dowolnych  $x, y > 0$ , co oznacza, że  $f$  jest malejąca. Warunek z treści zadania można zapisać tak:

$$f(x) - f(x+y) \geq f(x) - \frac{f(x)^2}{f(x)+y} = \frac{1}{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{y}}.$$

Ustalmy  $x > 0$  i weźmy taką liczbę całkowitą  $n$ , aby  $nf(x+1) \geq 1$ . Wtedy dla  $k = 0, 1, \dots, n-1$  mamy

$$f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f\left(x + \frac{k+1}{n}\right) \geq \frac{1}{\frac{1}{f\left(x + \frac{k}{n}\right)} + n} \geq \frac{1}{2n},$$

skąd, sumując stronami  $n$  nierówności, dostajemy

$$f(x) - f(x+1) > \frac{1}{2}.$$

Zatem dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $m$  zachodzi nierówność

$$f(x) - f(x+m) > \frac{m}{2}.$$

Biorąc  $m$  tak duże, aby było  $m/2 > f(x)$ , otrzymujemy  $f(x+m) < 0$ , co przeczy temu, że  $f$  przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie.



Moment wnikięcia plemnika do jaja.



Edwards i Steptoe z Luizą Brown.



Współczesne zdjęcie Luizy.

Cytaty za książką Piotra Pacewicza *Pociąg osobowy*, wyd. Biblioteka *Gazety Wyborczej* 2010, wywiad z 11.IX.2009.



## O urodzie plemników i nie tylko

Jest... „dobrze zbudowany, elegancka witka i wyraźna wstawka, coś w rodzaju krótkiego tułowia. Główka nie może być zniekształcona...”

Tak widzi plemniki dr Katarzyna Kozioł, pracująca wraz z mężem, dr. Piotrem Lewandowskim, w Klinice Leczenia Niepłodności. Pani doktor jest matką czworga dzieci, urodzonych bez interwencji kliniki. W wyniku procedur zapłodnienia *in vitro*, do których wybierała właśnie te eleganckie plemniki, urodziło się 7350 dzieci (dane z 2009 roku). To ona pierwsza w Polsce dokonała także udanej mikroiniekcji, czyli wstrzyknięcia plemnika do komórki jajowej pozaustrojowo. Procedurę tę stosuje się m.in. w przypadku nieruchliwych plemników, niezdolnych do wnikięcia do komórki jajowej własnymi siłami.

„Każde zapłodnienie *in vitro* – mówi – to coś więcej niż biologia. Jestem przekonana, że w embrion musi być tchnięty duch, nie wiem dokładnie w którym momencie. Ja tylko w tym uczestniczę, łącząc komórki...”

Tak oto udało się chyba zarysować problem, który stoi za Nagrodą Nobla z medycyny przyznaną w 2010 roku R.G. Edwardsowi za „opracowanie metody zapłodnienia *in vitro*”. Nagrody takiej, jaką chyba sobie wymarzył jej fundator: za odkrycie naukowe, które staje się pożyteczne, użyteczne i potrzebne ludziom. W Oldham General Hospital (UK) Patric Steptoe i Robert Edwards asystowali w 1978 r. przy urodzinach „swojego” pierwszego dziecka z probówki, Luizy Brown. Dziś Luiza, urzędniczka na poczcie, jest matką pięcioletniego chłopczyka poczętego drogą „naturalną”.

Manipulacje nad zarodkami ssaków prowadzono od dawna. Pionierem badań myszy w tym zakresie był w latach 50. XX wieku wówczas młody doktorant, a dziś profesor, Andrzej Tarkowski, wybitny światowy embriolog, który wybrał i przetrwał wiele dróg w doświadczalnej embriologii. Ale każdy, kto zmierzy się z biologią ssaków, wie (i wiedział to bardzo dobrze Profesor Tarkowski), że jest to jedynie wstęp do pracy nad osobliwościami i wspólnymi cechami tych ssaków i ludzi. Tarkowski tą drogą nie chciał iść, do dziś bada myszy. Na taki wybór zdecydował się na krótko, a potem wycofał Jacques Testart, w którego klinice i laboratorium urodziło się pierwsze francuskie dziecko poczęte metodą *in vitro*.

A więc – wielkie osiągnięcie nauki – i co dalej?

Kilkanaście procent par na świecie nie może mieć dziecka poczętego w sposób „naturalny”. Zatem problem pomocy medycyny w tym zakresie zasługuje na uwagę. Wiadomo także, że w wyniku „naturalnych” poczęć, często w bardzo wczesnym okresie ciąży, ginie nawet ponad 50% zarodków. Między poczęciem a urodzinami rozpościera się w większości nieznaną obszar życia przed życiem.

Cała dziedzina wręcz woła o dodatkowe badania naukowe i jednocześnie dla wielu jest tabu. Jest tabu, ponieważ wykracza poza czystą biologię i medycynę: interesują się nią prawnicy, filozofowie, Kościoły. W listopadzie 2011 roku Trybunał Sprawiedliwości UE w Luxemburgu ustosunkował się do pytania wysłanego z Najwyższego Sądu Niemiec o dopuszczalność patentowania linii macierzystych komórek pochodzących z zarodków człowieka. Trybunał wydał orzeczenie, w którym określa, iż człowiek powstaje w chwili przeniknięcia plemnika do komórki jajowej i już od tego momentu patentowanie prac zmierzających do wytworzenia linii komórek macierzystych i ich badań jest nieetyczne. Trybunał nie może określić sankcji za niestosowanie się do takiego zalecenia, ale jego wypowiedź na pewno będzie brana pod uwagę we wszystkich krajach europejskich.

Wyrok w sprawie „*in vitro*” każdy powinien wydać sobie sam, we własnym postępowaniu, w zgodzie z własnym sumieniem.

Magdalena FIKUS

# Dowody V postulatu Euklidesa

Marek KORDOS



**Notka dla uspokojenia Czytelnika Nerwowego.** Oczywiście, V postulatu Euklidesa nie da się dowieść na podstawie poprzednich czterech. Niemniej jednak praktycznie każdy znaczący matematyk od V do XIX wieku taki dowód przeprowadził i dopiero jego koledzy wskazywali, w którym miejscu rozumowania użył przesłanki z czterech początkowych postulatów niewynikającej. W ten sposób rosła liczba zdań równoważnych V postulatowi, czy – jak kto woli – zdań, które są nieprawdziwe w geometrii nieeuklidesowej powstającej przez zaprzeczenie V postulatu. Niżej przedstawię trzy takie dowody, nie wskazując nieuprawnionych przesłanek. Zostaną one wskazane w następnym numerze *Delty*.

## Najgłupiej postawiony problem matematyki

Oto pięć postulatów, z których Euklides w *Elementach* wyprowadził całą geometrię i arytmetykę.

- I. *Od dowolnego punktu do dowolnego innego można poprowadzić prostą.*
- II. *Ograniczoną prostą można dowolnie przedłużyć.*
- III. *Z dowolnego środka dowolnym promieniem można opisać okrąg.*
- IV. *Wszystkie kąty proste są równe.*
- V. *Jeśli suma kątów wewnętrznych jednostronnych, utworzonych przez dwie proste przecięte trzecią, jest mniejsza od dwóch kątów prostych, to proste te po przedłużeniu przetną się i to z tej właśnie strony.*

Jak łatwo zauważyć, liczba słów użytych do sformułowania początkowych czterech z nich (27) jest mniejsza od liczby słów potrzebnych do sformułowania piątego (30) – po grecku było podobnie, a przecież postulaty miały wyrażać treści proste i oczywiste.



Zauważył to jeden z epigonów matematyki greckiej, żyjący w czasach słusznie przez niego ocenianych jako lata wszelkiego upadku, Proklos (410–485). Oto jego wnioski i wynikający z nich program.

*Nie jest możliwe, aby uczonej tej miary co Euklides godził się na obecność tak długiego postulatu w aksjomatyce – obecność postulatu wzięła się z pośpiesznego kończenia przez niego Elementów, tak aby zdążyć przed nadejściem słusznie oczekiwanej rychłej śmierci; my zatem – czcząc jego pamięć – powinniśmy ten postulat usunąć lub co najmniej znacznie uprościć.*

Choć informację o myślach i stanie zdrowia Euklidesa Proklos wyssał sobie z palca, a ocena treści postulatów poprzez zliczanie słów jest co najmniej cudaczna, to – w co trudno uwierzyć – matematycy uznali program Proklosa za wyzwanie i faktycznie chyba wszyscy próbowali go zrealizować. Spróbujmy i my.

## Czym wolno się posługiwać, dowodząc V postulatu?

Dokładniej: jak rozumiano początkowe cztery postulaty (bo są one – jak na dzisiejsze wymagania – sformułowane dość enigmatycznie)? Otóż w tej kwestii panowała całkowita jednomyślność. Można to ująć w trzech punktach.

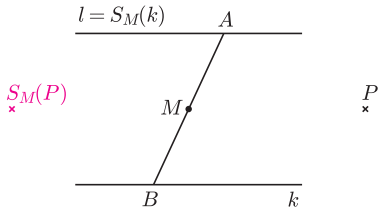
- *Wolno bez ograniczeń wykonywać wszystkie konstrukcje cyrklem i linijką, oraz przyjmuje się jako dane następujące fakty:*
- *Na płaszczyźnie prosta, przecinająca jeden z boków trójkąta i nieprzechodząca przez żaden z wierzchołków, przecina jeszcze jeden bok (nazywa się to aksjomatem Pascha).*
- *Symetrie zachowują wszystkie miary i relacje geometryczne.*

Geometria oparta na początkowych czterech postulatach Euklidesa, a właściwie na podanym tutaj rozumieniu ich treści, nazywana jest **geometrią absolutną**.

Nazwa aksjomat Pascha bierze się stąd, iż fakt korzystania z takiej przesłanki przez wszystkich geometrów wykrył dopiero w 1882 roku niemiecki matematyk Moritz Pasch (1843–1930).



Już Proklos zauważył, że przez punkt  $A$  poza prostą  $k$  można na płaszczyźnie poprowadzić prostą  $l$ , rozłączną z  $k$ .



Rys. 1

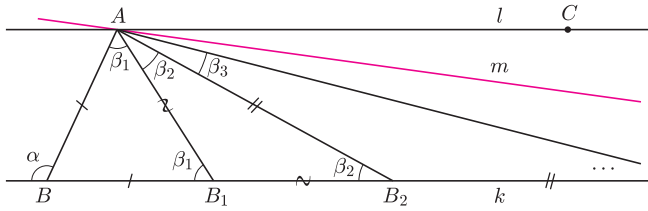
John Playfair (1748–1819), matematyk angielski, doprowadził do tego, że jego postulat powszechnie jest uważany za V postulat Euklidesa.

Istotnie, obierzmy na  $k$  jakiś punkt  $B$  i niech środkiem odcinka  $AB$  będzie  $M$ . Jako  $l$  weźmy obraz symetryczny  $k$  względem  $M$  (rys. 1). Gdyby proste  $k$  i  $l$  przecinały się w jakimś punkcie  $P$ , to – ponieważ narysowana figura ma środek symetrii – również  $S_M(P)$  byłby punktem wspólnym  $k$  i  $l$ , a zatem dwie różne proste przecinałyby się w dwóch różnych punktach, co jest niemożliwe.

Wynika stąd natychmiast, że V postulat w aksjomatyce geometrii euklidesowej można zastąpić przez

**Postulat Playfaira:** Na płaszczyźnie przez każdy punkt poza prostą przechodzi co najwyżej jedna prosta z nią rozłączna.

Nieco trudu trzeba sobie zadać, by wykazać, że podobną rolę pełni **Postulat sumy kątów.** Suma kątów w trójkącie jest równa  $\pi$ .



Rys. 2

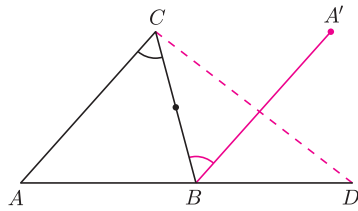
Mianowicie do punktów  $A$  i  $B$  z rysunku 1 dołączmy jeszcze punkt  $C$  leżący na  $l$  i dowolną prostą  $m$  przechodzącą przez  $A$ , biegnącą poniżej punktu  $C$  (rys. 2). Tworzymy na  $k$  ciąg punktów, które spełniają warunek  $AB = BB_1$ ,  $AB_i = B_i B_{i+1}$ . Jak łatwo zauważyć (oznaczenia z rysunku),  $\beta_i = \alpha/2^i$  (tu wykorzystujemy postulat sumy kątów – prawda?). Ponadto  $\sphericalangle BAB_n = \sum_{i=1}^n \beta_i$ , co dla  $n \rightarrow \infty$  dąży do  $\alpha$ .

Prosta  $m$  tworzy z odcinkiem  $AB$  kąt mniejszy od  $\alpha$  (czemu?), a więc dla pewnego  $N$  mieści się w trójkącie  $BAB_N$  i wobec tego przecina  $k$ .

Jeśli więc udowodnimy w geometrii absolutnej postulat Playfaira lub postulat sumy kątów, to udowodnimy tym samym V postulat z początkowych czterech.

Potrzebne nam w tym celu będą jeszcze cztery twierdzenia geometrii absolutnej.

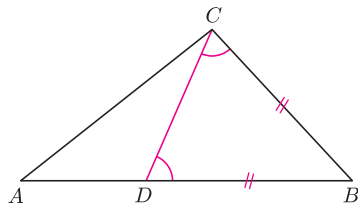
- Kąt zewnętrzny trójkąta jest większy od nieprzyległego do niego kąta wewnętrznego.



Rys. 3

Dokonując symetrii wierzchołka  $A$  względem środka boku  $BC$ , otrzymujemy punkt  $A'$ . W oznaczeniach z rysunku 3 mamy  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CBA' < \sphericalangle CBD$  – nierówność zachodzi na mocy aksjomatu Pascha (trójkąt  $ACD$  i prosta  $BA'$ ).

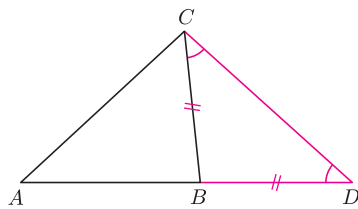
- W trójkącie naprzeciw dłuższego boku jest większy kąt.



Rys. 4

Jeśli  $AB > BC$ , to na odcinku  $AB$  jest taki punkt  $D$ , że  $BD = BC$ . Wówczas (rys. 4)  $\sphericalangle ACB > \sphericalangle DCB = \sphericalangle CDB > \sphericalangle BAC$  – ostatnia nierówność wynika z poprzedniego twierdzenia.

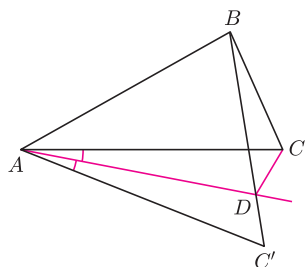
- Zachodzi nierówność trójkąta.



Rys. 5

Aby dowieść, że  $AB + BC > AC$ , odłóżmy  $BC$  na przedłużeniu  $AB$  (rys. 5), otrzymując  $D$ . Mamy  $\sphericalangle ACD > \sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC = \sphericalangle ADC$ . Stąd na mocy poprzedniego twierdzenia otrzymujemy  $AB + BC = AD > AC$ .

- Jeśli dwa trójkąty mają parę boków odpowiednio równych, to trzeci bok jest dłuższy w tym trójkącie, w którym kąt między nimi jest większy.

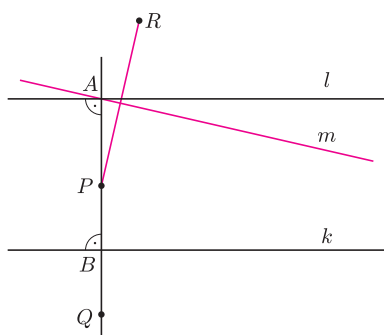


Rys. 6

Takie dwa trójkąty możemy przemieścić w ten sposób, by jedna para równych boków pokryła się. Niech więc tymi trójkątami będą  $ABC$  i  $ABC'$  i niech  $AC = AC'$ . Załóżmy też, że  $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BAC'$ . Mamy wykazać, że  $BC < BC'$ . Narysujmy dwusieczną kąta  $CAC'$  i oznaczmy jej punkt przecięcia z  $BC'$  przez  $D$  (rys. 6). Mamy (symetria)  $DC' = DC$ . Zatem  $BC' = BD + DC' = BD + DC > BC$  z nierówności trójkąta.

Warsztat został skompletowany, przystępujemy do dowodów V postulatu. Każdy z nich przez pewien czas był uznawany za poprawny.

Farkas Bolyai (1775–1856), matematyk węgierski, ojciec jednego z odkrywców geometrii nieeuklidesowej.



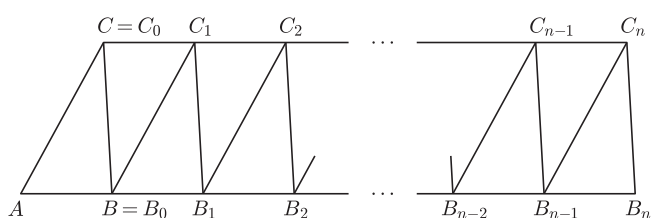
Rys. 7

## Dowód postulatu Playfaira – Farkas Bolyai

Oznaczmy przez  $B$  rzut nieleżącego na prostej  $k$  punktu  $A$  na tę prostą (rys. 7). Prosta  $l$ , przechodząca przez  $A$  i prostopadła do  $AB$ , jest rozłączna z  $k$  (dlaczego?). Mamy wykazać, że każda inna prosta  $m$  przechodząca przez  $A$  przecina prostą  $k$ . Obierzmy na  $AB$  dowolnie punkt  $P$  i odbijmy go symetrycznie względem  $k$  i względem  $m$ , otrzymując, odpowiednio,  $Q$  i  $R$ . Punkt  $Q$  leży na prostej  $AB$ , a ponieważ  $l \neq m$ , więc  $R$  na prostej  $AB$  nie leży. Punkty  $P, Q, R$  tworzą zatem trójkąt, a proste  $k$  i  $m$  są symetralnymi dwóch jego boków, a więc obie przechodzą przez środek okręgu opisanego na trójkącie  $PQR$ , czyli przecinają się.

## Dowód postulatu sumy kątów – Adrien-Marie Legendre

Z sumą kątów związane jest pojęcie *defektu trójkąta*; dla trójkąta  $ABC$  jest to liczba  $\Delta(ABC) := \pi - (\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB)$ . Postulat sumy kątów orzeka, że defekty wszystkich trójkątów są równe 0. Wystarczy więc udowodnić, że defekt nie może być dodatni ani ujemny.



Rys. 8

Przypuśćmy, że defekt trójkąta  $ABC$  jest ujemny. Ustawmy wobec tego jego kopie na prostej  $AB$ , tak jak na rysunku 8, oraz połączmy odcinkami kolejne kopie wierzchołka  $C$ . Zauważmy, że  $C_0C_1 < AB$ ; wynika to z faktu, iż  $\sphericalangle ACB > \sphericalangle C_0BC_1$ , a to dlatego, że  $\sphericalangle ABC_0 + \sphericalangle C_0BC_1 + \sphericalangle C_1BB_1 = \pi$ , natomiast założyliśmy, że  $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle CAB > \pi$ , przy czym  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C_1BB_1$ .

Adrien-Marie Legendre (1752–1833), matematyk francuski, także autor podręczników szkolnych; przytoczony dowód władze oświatowe Francji poleciły umieścić w jednym z tych podręczników – jego znajomość obowiązywała uczniów przez ponad 20 lat.

Oznaczmy  $\varepsilon := AB - C_0C_1$  (jest to liczba dodatnia) i obliczmy długość łamanej  $AC_0C_1 \dots C_nB_n$ :

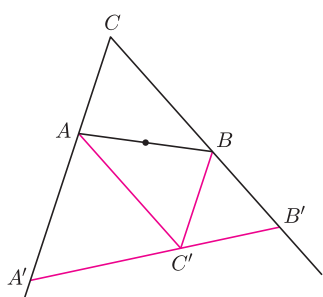
$$\begin{aligned} AC + n \cdot C_0C_1 + CB &= AC + CB + n \cdot AB - n \cdot \varepsilon = \\ &= (AC + CB - AB - n \cdot \varepsilon) + AB_n. \end{aligned}$$

Nietrudno zauważyć, że dla dużych  $n$  wartość nawiasu będzie ujemna, a to by znaczyło, że łamana jest krótsza od odcinka – sprzeczność z nierównością trójkąta.

Zatem trójkątów z ujemnym defektem nie ma. Przypuśćmy, że jest choćby jeden,  $ABC$ , który ma dodatni defekt  $\delta$ . Odbijmy go symetrycznie względem środka odcinka  $AB$  i przez obraz  $C'$  punktu  $C$  poprowadźmy prostą przecinającą przedłużenia boków  $CA$  i  $CB$  w punktach  $A'$  i  $B'$  (rys. 9). Zauważmy, że defekt trójkąta  $A'B'C$  jest sumą defektów czterech trójkątów, z jakich się składa – suma ta to  $4\pi$ , od czego trzeba odjąć sumy kątów wszystkich trójkątów. Ale w punktach  $A, B$  i  $C'$  kąty te składają się na  $\pi$ , pozostaje więc tylko jedno  $\pi$  minus suma kątów trójkąta  $A'B'C$ . Na mocy pierwszej części dowodu widzimy, że

$$\begin{aligned} \Delta(A'B'C) &= \Delta(ABC) + \Delta(ABC') + \Delta(A'AC') + \Delta(C'BB') \geq \\ &\geq \Delta(ABC) + \Delta(ABC') = 2 \cdot \delta, \end{aligned}$$

bo przy symetrii defekt się nie zmienia. Zatem taka operacja zwiększa defekt trójkąta co najmniej dwukrotnie. Można więc za jej pomocą uzyskać defekt większy niż  $\pi$ , co by znaczyło, że trójkąt ma ujemną sumę kątów – sprzeczność.



Rys. 9

Girolamo Saccheri (1667–1733), matematyk włoski – jego prace zapoczątkowały podejrzenia, iż, być może, istnieją inne geometrie niż euklidesowa.

Tym, którzy chcieliby poznać intelektualne i psychiczne męki matematyków przez ponad tysiąc lat bezskutecznie dowodzących V postulatu, polecam wątek Velasqueza w szkatułkowej powieści Jana Potockiego *Rękopis znaleziony w Saragossie*.

## Dowód nie wprost – Girolamo Saccheri

Tym razem rozumowanie jest następujące – przypuśćmy, że postulat sumy kątów jest nieprawdziwy. Wtedy – posługując się sytuacją z rysunku 2, uzyskamy rezultat, iż  $\sphericalangle BAB_n = \sum_{i=1}^n \beta_i$  dla  $n \rightarrow \infty$  dąży do kąta  $\varphi < \alpha$ .

Wówczas prosta  $m$  nakreślona tak, by tworzyła z  $l$  kąt  $\alpha - \varphi$ , będzie asymptotą prostej  $k$ . A przecież proste nie mogą być asymptotyczne.

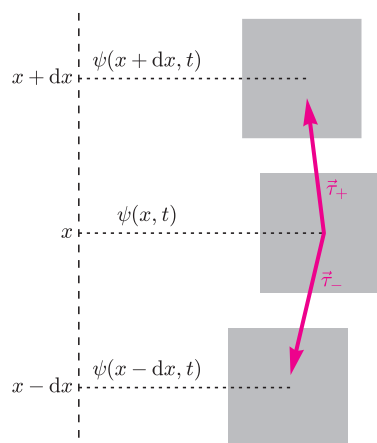
Tyle dowodów – w następnym numerze ci, którzy nie dostrzegli w nich nieuprawnionych przesłanek, będą mogli je znaleźć.

# Kamerton i struna

Jacek CIBOROWSKI\*, Krzysztof TURZYŃSKI



Do strojenia instrumentów często wykorzystuje się kamerton widelkowy, wynaleziony w 1711 r. przez Johna Shore'a, lutnistę angielskiego dworu królewskiego. Zaletą tego przyrządu jest to, że wprawiony w ruch emituje dźwięk bardzo „czysty”, tj. zawierający niemal wyłącznie składową wzorcową przyrządu. Zrozumienie, dlaczego tak się dzieje, nie wymaga nadmiernie skomplikowanych rachunków i długich wyjaśnień.



Rys. 1

**Równania ruchu.** Wyprowadzenie równania ruchu dla struny, czyli równania falowego, można znaleźć w wielu podręcznikach. Dla porządku przypomnimy tutaj zarys tego rachunku. Strunę, na którą działa siła naciągu  $\tau$ , możemy podzielić w myśli na szereg maleńkich kawałków (rys. 1). Każdy taki kawałek będzie miał masę  $dm$ , będzie znajdował się w położeniu  $x$  wzdłuż struny, a jego wychylenie względem pozycji, jaką by miał, gdyby struna spoczywała, możemy oznaczyć przez  $\psi(x, t)$ . Wówczas II prawo dynamiki Newtona dla odcinka struny znajdującego się w położeniu  $x$  ma postać:

$$dm \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \tau_+^\perp + \tau_-^\perp,$$

gdzie  $\tau_\pm^\perp$  są składowymi sił oddziaływania  $\vec{\tau}_\pm$  z sąsiednimi fragmentami struny prostopadłymi do kierunku spoczywającej struny; wielkość  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  to nic innego jak przyspieszenie w tym kierunku. Będziemy odtąd zakładać, że wychylenie z położenia równowagi jest bardzo małe. Ponieważ naciąg struny jest stały, to, przybliżając  $\tan \alpha$  przez  $\alpha$  (co jest uzasadnione właśnie dla małych wychyleń), mamy:

$$\tau_\pm^\perp \approx \pm \frac{\psi(x \pm dx, t) - \psi(x, t)}{dx} \cdot \tau,$$

skąd

$$\tau_+^\perp + \tau_-^\perp \approx dx \cdot \tau \cdot \frac{\psi(x + dx, t) - 2\psi(x, t) + \psi(x - dx, t))}{dx^2} \approx dx \cdot \tau \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Dla struny o stałej gęstości liniowej  $\rho_L = dm/dx$  możemy zatem przepisać równanie ruchu jako

$$(1) \quad \frac{\rho_L}{\tau} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

W przypadku kamertonu źródło siły powodującej jego ruch jest inne. Jeżeli ramię kamertonu zostanie wygięte, to pojawi się siła sprężystości, która dla ciał sprężystych spełniających prawo Hooke'a jest proporcjonalna do odkształcenia ciała. W sytuacji przedstawionej na rysunku 2 wkład  $d\vec{\tau}_-$  do siły  $\vec{\tau}_-$ , wywieranej na fragment ciała znajdujący się w położeniu  $x$ , jest proporcjonalny do modułu Younga substancji, z której wykonane jest ciało, oraz kąta odkształcenia  $d\alpha$ . Kąt ten jest równy kątowi pomiędzy prostymi o nachyleniach  $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t)$  oraz  $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x - dx, t)$ , a zatem jest w przybliżeniu równy  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$ . Oznacza to, że możemy powtórzyć rozumowanie prowadzące do wyznaczenia równania ruchu dla struny, ale z tą różnicą, że teraz siły  $\tau_\pm$  nie mają stałej wartości, ale są proporcjonalne do  $-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ . Otrzymujemy więc:

$$(2) \quad C \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = 0,$$

gdzie stała  $C > 0$  jest odwrotnie proporcjonalna do modułu Younga. Porównując równania ruchu (1) i (2), stwierdzamy, że w tym drugim występuje aż czwarta pochodna wychylenia po położeniu. Jak się zaraz przekonamy, ta drobna z pozoru różnica decyduje o brzmieniu dźwięku kamertonu.

**Rozwiązanie równań ruchu.** Rozwiązania każdego z równań ruchu (1) i (2) można złożyć z fal stojących, tj. funkcji postaci  $\psi(x, t) = \chi(t)f(x)$ .

\*Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki

Przyjmijmy, że funkcja opisująca zależność wychylenia od czasu ma postać  $\chi(t) = \cos(\omega t + \phi)$ . Po podstawieniu do równania (1) otrzymujemy równanie:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0,$$

gdzie tzw. związek dyspersyjny ma postać  $k^2 = \tau\omega^2/\rho L$ ; rozwiązaniami tego równania są funkcje  $\cos kx$  i  $\sin kx$ . Zakładając, że struna jest sztywno zamocowana w  $x = 0$  i w  $x = L$ , musimy odrzucić pierwszą klasę rozwiązań, a wśród drugiej klasy dopuścić tylko te, dla których  $f(L) = 0$ , czyli  $k = n\pi$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną. Oznacza to, że widmo częstości takiej struny jest dyskretne – występuje w nim najniższa częstość  $\omega_0 = \sqrt{\tau/\rho L}$  oraz jej wielokrotności.



Podstawiając opisaną wyżej postać rozwiązania do równania (2), otrzymujemy

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - k^4 f = 0,$$

gdzie związek dyspersyjny ma teraz postać  $k^2 \propto \omega$ . Rozwiązaniem tego równania jest dowolna kombinacja liniowa funkcji  $\sin kx$ ,  $\cos kx$ ,  $\sinh kx$  oraz  $\cosh kx$ , a więc funkcja postaci

$$f(x) = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx + B_1 \sinh kx + B_2 \cosh kx,$$

gdzie stałe  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  oraz  $B_2$  wyznaczymy z warunków brzegowych.

Warunki te dla drgającego pręta o długości  $L$  możemy opisać następująco:

1. wychylenie pręta w punkcie  $x = 0$  jest zerowe,  $f(0) = 0$ ,
2. w punkcie  $x = 0$  pręt jest pionowy,  $\frac{df}{dx}(0) = 0$ ,
3. w punkcie  $x = L$  siła sprężystości jest równa zero,  $\frac{d^2 f}{dx^2}(L) = 0$ ,
4. w punkcie  $x = L$  składowa siły sprężystości prostopadła do osi  $x$  jest równa zero,  $\frac{d^3 f}{dx^3}(L) = 0$ .

Uwzględnienie tych warunków prowadzi do następującego związku:

$$(\sin kL + \sinh kL)(\sin kL - \sinh kL) = -(\cos kL + \cosh kL)^2,$$

a stąd

$$(3) \quad \cos kL \cosh kL + 1 = 0.$$

Rozwiązania tego równania możemy wyznaczyć w sposób następujący. Funkcja  $\cosh y$  jest bardzo szybko rosnącą funkcją swego argumentu, a więc dla dostatecznie dużych  $y$  miejsca zerowe funkcji  $\cos y \cosh y + 1$  będą znajdowały się blisko miejsc zerowych funkcji  $\cos y \cosh y$ , czyli  $y = (n - \frac{1}{2})\pi$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną (por. rys. 3). Lepszą dokładność możemy uzyskać, zakładając, że  $\tilde{y}$  jest pewnym przybliżeniem szukanego miejsca zerowego i pisząc

$$\cos(\tilde{y} + \delta y) \cosh(\tilde{y} + \delta y) + 1 = 0.$$

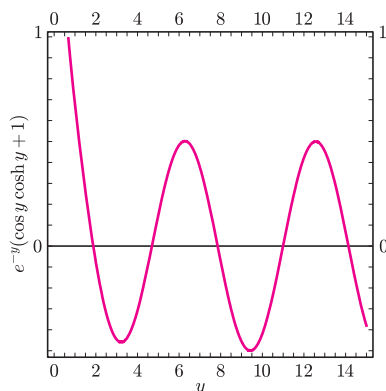
Rozwijając to w  $\delta y$  do rzędu kwadratowego, otrzymujemy równanie

$$\delta y^2 \sin \tilde{y} \sinh \tilde{y} - \delta y (\cos \tilde{y} \sinh \tilde{y} - \sin \tilde{y} \cosh \tilde{y}) - (\cos \tilde{y} \cosh \tilde{y} + 1) = 0,$$

co pozwala znaleźć dokładniejsze rozwiązanie  $\tilde{y} + \delta y$ . Opisaną procedurę można powtórzyć, uzyskując rozwiązanie z coraz lepszą dokładnością.

W ten sposób stwierdzamy, że najmniejszymi rozwiązaniami równania (3) są  $kL \approx 1,87510, 4,69409, 7,85476$ . Pamiętając, że w rozważanym przypadku częstość drgań jest proporcjonalna do kwadratu liczby falowej  $k$ , stwierdzamy, że częstości drgań struny i kamertonu o częstości podstawowej 440 Hz, czyli tonu A<sup>4</sup>, używanego do strojenia instrumentów, są takie jak w tabeli. Widzimy stąd, że dla kamertonu druga częstość dozwolonych drgań leży niemal dwie i pół oktawy powyżej tonu podstawowego, między dźwiękami E<sup>6</sup> i F<sup>6</sup>. Jest ona na ogół słabiej słyszalna i łatwa do odróżnienia od częstości podstawowej, co sprawia, że drgający pręt jest lepszym wzorcem częstości niż drgająca struna.

W praktyce stosuje się kamertony zbudowane z dwóch drgających prętów. Takie rozwiązanie pozwala na to, by pręty te drgały w przeciwfazie, a wtedy zamocowanie kamertonu sztywno za uchwyt nie powoduje silnego tłumienia dźwięku.



Rys. 3. Wykres funkcji

$$g(y) = e^{-y}(\cos y \cosh y + 1).$$

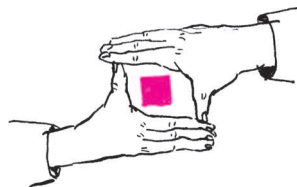
Ponieważ czynnik  $e^{-y}$  jest dodatni, funkcja ma te same miejsca zerowe co funkcja we wzorze (3), jest jednak ograniczona na przedziale  $(0, \infty)$ .

częstość [Hz]	
struna kamerton	
440	440
880	2763
1320	7722

Najniższe trzy częstości drgań struny i kamertonu o podstawowej częstości 440 Hz.

# Kwadrat, którego nie ma

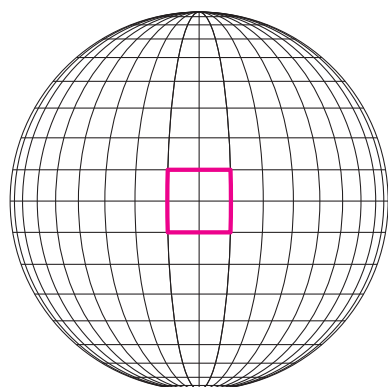
Piotr KOPACZ\*



Przemieszczając się na płaszczyźnie za pomocą ruchów „do przodu”, „do tyłu”, „w lewo” i „w prawo”, możemy w szczególności narysować kwadrat. Czy analogiczna sytuacja rozważana na zakrzywionej powierzchni zawsze pozwala na wygenerowanie kwadratu przez zakreślaną trajektorię? Rozważmy sferę, którą często wykorzystuje się w globalnym modelowaniu powierzchni Ziemi.

Na początek zwróćmy uwagę na to, iż w płaskiej geometrii euklidesowej – czyli takiej, jakiej uczymy się w szkole – kwadrat możemy określić w szczególności również jako

- czworokąt foremny;
- prostokąt, którego wszystkie boki mają równe długości;
- romb, którego wszystkie kąty są przystające.

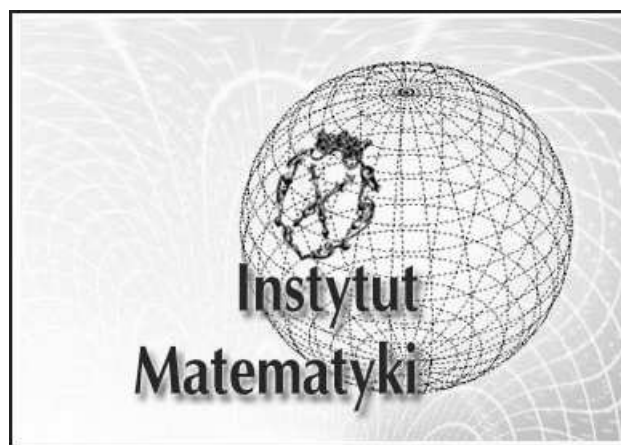


Rys. 1. Figura sferyczna  $F_1$  o czterech równych bokach i czterech kątach prostych.

Dla każdego niemal ucznia jest oczywiste, iż każdy kwadrat ma cztery boki równej długości oraz wszystkie kąty wewnętrzne proste. Czy na sferze znajdziemy figurę (sferyczną) mającą takie same cechy? Spróbujmy poruszać się po czterech tzw. kierunkach kardynalnych, tzn. „na północ”, „na południe”, czyli wzdłuż południków, oraz „na wschód”, „na zachód”, czyli wzdłuż równoleżników sfery. Zauważmy, że na sferze o ustalonym promieniu wszystkie południki mają taką samą długość równą połowie długości równika. Z kolei długości równoleżników nie są stałe. Najdłuższy z nich to równik, a gdy zbliżamy się do biegunów sfery, ich długości zmniejszają się. Czy, wiedząc powyższe, możemy już narysować na sferze figurę spełniającą nasze wymagania? Za pomocą samych południków i równoleżników możemy przedstawić (rys. 1) figurę sferyczną  $F_1$  o czterech bokach równej długości i czterech kątach prostych. Wszak każdy południk przecina każdy napotkany równoleżnik pod kątem prostym i odwrotnie. A sama konstrukcja polegać może na tym, że boki południkowe o ustalonej długości rozsuwamy o tyle, aby długość każdego z nich była równa długości boków leżących na równoleżnikach symetrycznych względem równika.

Punkty przecięcia ortogonalnych, czyli wzajemnie prostopadłych linii siatki stanowią wierzchołki figur sferycznych o czterech bokach, co możemy zaobserwować np. w logo Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego (rys. 2).

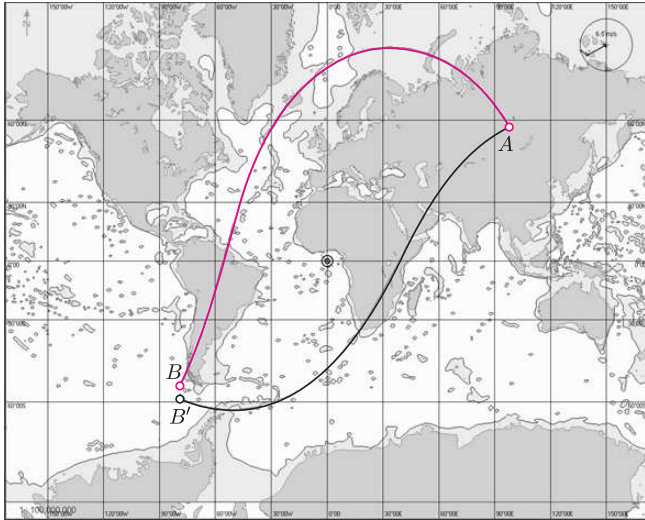
Czy otrzymaną sferyczną figurę  $F_1$  o czterech bokach równej długości i czterech kątach prostych możemy bezspornie nazwać kwadratem (sferycznym)? Otóż nie. Zauważmy, iż boki kwadratu na płaszczyźnie są odcinkami linii prostych, a mówiąc ogólniej – odcinkami linii geodezyjnych. Stanowią one zatem najkrótsze połączenie wierzchołków kwadratu na powierzchni, na której leżą – płaszczyźnie. Tymczasem w rozważanej przez nas figurze na sferze boki, będące łukami równoleżników, nie są najkrótszym połączeniem punktów wierzchołkowych  $F_1$ , ponieważ równoleżniki, będące okręgami małymi sfery, nie są sferycznymi prostymi (geodezyjnymi sfery).



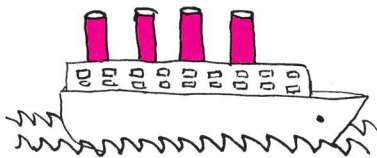
Rys. 2. Siatka południków i równoleżników, generująca czworoboczne figury sferyczne, widoczna w logo IM UJ.

Tym razem trudno byłoby znaleźć wierny odpowiednik  $F_1$  na płaszczyźnie, jako że oba obiekty pochodzą z różnych geometrycznych światów, w których rządzą różne prawa. Jako płaski „wzorzec” bądź odpowiednik otrzymanej sferycznej figury  $F_1$  można poniekąd rozważyć figurę płaską o jednej parze przeciwległych boków prostych i drugiej parze boków krzywoliniowych tej samej długości.

\* Wydział Nawigacyjny,  
Akademia Morska w Gdyni



Rys. 3



A zatem w dalszych naszych poszukiwaniach uwzględniać będziemy tylko takie figury sferyczne, których boki są odcinkami linii prostych. Odcinkami prostych na sferze są łuki okręgów wielkich, a więc w szczególności są nimi wszystkie południki, jak i równik będący całą prostą (zamkniętą, o skończonej długości). Para boków południkowych figury  $F_1$  spełnia nasze wcześniejsze wymagania. Spróbujmy więc wyprostować jej boki równoleżnikowe. W efekcie kolejne boki naszego czworokąta stanowią będą odcinki linii geodezyjnych. Warto zauważyć, że na sferze krótszy łuk okręgu wielkiego, łączącego dwa dowolne punkty o różnej długości geograficznej i leżące w tej samej półsfery, „wygina się” w kierunku bliższego bieguna. Na rysunku 3 przedstawiono przykładowy przebieg linii geodezyjnych sfery na płaskiej mapie w konformnym (czyli zachowującym wierność kątów) odwzorowaniu Merkatora.

Tak przedstawianą mapę bardzo często możemy znaleźć, na przykład, w urządzeniach nawigacyjnych oraz współczesnym systemie map elektronicznych, tj. ECDIS (*Electronic Chart Display and Information System*) stanowiącym morską aplikację systemu GIS (*Geographic Information System*). System ten jest używany na statkach morskich do planowania i realizacji podróży w żegludzie międzynarodowej oraz jest obecnie prawnie dopuszczonym ekwiwalentem nawigacyjnych map papierowych stosowanych od stuleci do dnia dzisiejszego. W obrazie tym linia łuku okręgu wielkiego po przejściu przez równik zaczyna wyginać się w kierunku bliższego bieguna. Można powiedzieć, że punkt przecięcia obrazu linii prostej z równikiem sfery na płaskiej mapie, wykonanej w odwzorowaniu Merkatora, jest punktem przegięcia płaskiej krzywej będącej obrazem prostej sferycznej. Jako przykład rozważmy dwa punkty  $A$  (wyjściowy) i  $B$  (docelowy) na powierzchni Ziemi odległe o około 19800 km, czyli nieco mniej niż wynosi długość ziemskiego południka. Następnie przesunąć punkt  $B$  po południku o  $4^\circ$  szerokości geograficznej na południe, czyli o około 440 km, otrzymując punkt  $B'$ . Połączmy punkt  $A$  z  $B$  (kolorowa linia) oraz  $A$  z  $B'$  (czarna linia) najkrótszymi drogami, czyli za pomocą odcinków prostych modelowanej powierzchni, jak to widać na rysunku 3. Odległość  $BB'$  stanowi zaledwie około 2,2% odległości  $AB'$ . Mimo względnie małej różnicy odległości w położeniu punktów docelowych  $B$  i  $B'$  przebieg obydwu odcinków linii prostych  $AB$  i  $AB'$  istotnie się różni.

Po małej modyfikacji otrzymujemy czworokąt sferyczny o czterech równych bokach, które są tym razem odcinkami prostych. Oznaczmy go jako  $F_2$ . Zauważmy jednak, że kąty wewnętrzne  $F_2$  nie są teraz proste – pary przeciwległych jego boków nie przecinają się prostopadłe jak południk z równoleżnikiem. Kąty wewnętrzne  $F_2$  zmieniają się w zależności od wielkości czworokąta, czyli – inaczej mówiąc – zależą od długości jego boku. Na sferze istnieje zatem czworokąt foremny o kątach wewnętrznych dowolnie wziętych z przedziału  $(90^\circ, 180^\circ)$ . Możemy go podzielić na cztery przystające czworokąty, ale wówczas nie są one już foremne – nie mają wszystkich boków i kątów równych. W konsekwencji nie nadają się one do pomiaru pola na sferze w ten sposób, jak kwadraty na płaszczyźnie. Widzimy, iż suma miar kątów wewnętrznych czworokąta na sferze nie jest stała (na dodatek większa niż  $360^\circ$ ).

Przy okazji Czytelnik może zastanowić się nad powstającymi tu pytaniami. Czy można pokryć całą sferę przystającymi wielokątami foremnymi, a w szczególności czworokątami? Jeśli tak, to ile wynosi długość boku i miara kąta wewnętrznego takich wielokątów foremnym, a w szczególności czworokątów? Szukając odpowiedzi, na początek można zacząć od trójkątów.

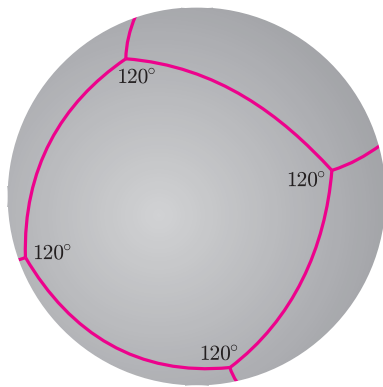


**Rozwiązanie zadania F 811.**  
Energia potencjalna przy powierzchni planety  $E_p = -mv^2_I/2$ . Z zasady zachowania energii wynika zatem, że

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + E_p,$$

gdzie  $v$  jest szukaną prędkością w nieskończoności, a  $v_0$  prędkością wyrzelenia pocisku na powierzchni planety. Stąd

$$v = \sqrt{v_0^2 - v_I^2} \approx 9,5 \text{ km/s.}$$



Rys. 4. Sześcian sferyczny.

I tak, na przykład, osiem równobocznych i równokątnych zarazem trójkątów prostokątnych, z których każdy ma trzy kąty proste, a każdy bok ma w mierze kątowej długość  $90^\circ$ , pokrywa całą sferę. Obrazowo, sytuacja taka ma miejsce, gdy weźmiemy pod uwagę trzy okręgi wielkie leżące we wzajemnie prostopadłych płaszczyznach. Punkty ich przecięcia wyznaczają wierzchołki owych ośmiu trójkątów sferycznych. Czytelnik Wnikliwy zauważy, że foremny trójkąt na sferze może mieć różną miarę kąta wewnętrznego, a same trójkąty nie są wielokątami o minimalnej liczbie boków, jakie występują na sferze, co także istotnie różni się od sytuacji, z jaką mamy do czynienia na płaszczyźnie.

Rozważmy teraz sferyczny czworokąt foremny  $F_3$  o kącie  $120^\circ$ , który przedstawia rysunek 4. Czy tym razem możemy nazywać go sferycznym kwadratem? Gdyby podzielić sferę na sześć takich właśnie przystających obszarów, to można by ją wówczas określić mianem sferycznego sześcianu bądź sferycznej kostki. Każda ze ścian zwykłego (euklidesowego) sześcianu jest przecież kwadratem. Załóżmy, że każda z jego „ścian” ma inny kolor albo przypisaną różną liczbę oczek, jak tradycyjna kostka do gry. Taką kostkę moglibyśmy także wykorzystać do gry, biorąc za wyrzuconą liczbę oczek wartość z tej jej ściany, do której należy punkt styczności sfery z powierzchnią, na której się zatrzyma lub jego punkt antypodyczny (przeciwny), który łatwiej nam zobaczyć z góry. Jako zadanie dla Czytelnika pozostawiam znalezienie kątowej długości „krawędzi” takiej kostki, czyli długości boku rozważanego czworokąta.

Nasuwa się wniosek, iż nie istnieje na sferze czworokąt foremny o kątach prostych jak kwadrat na płaszczyźnie. Przypomnijmy – w płaskiej geometrii euklidesowej „bycie czworokątem foremnym” oznacza „bycie kwadratem”. Wychodząc poza tę geometrię, widzimy, że takiej równoważności pojęć wcale być już nie musi. Nie możemy więc znaleźć sferycznego odpowiednika płaskiego kwadratu, który miałby dokładnie takie same własności, ponieważ nie istnieje on na sferze. Ale czy jest w tym coś złego? Po prostu jest inaczej. W zasadzie jest kwestią umowy to, czy można używać określenia „kwadrat sferyczny” dla  $F_3$  o kącie wewnętrznym  $120^\circ$ , mając świadomość tego, że jego cechy są po prostu nieco inne niż kwadratu na płaszczyźnie.

Zauważmy także, że tradycyjnie jako punkt wyjścia w poszukiwaniu geometrycznych odpowiedników przyjmuje się płaską geometrię euklidesową. Porównuje się z nią i tradycyjnymi pojęciami, prawami w niej uformowanymi, obiekty i prawa innych geometrii, których odpowiedniki nie zawsze istnieją albo się istotnie różnią.

Z kolei wychodząc, na przykład, z geometrii sferycznej i ją traktując jako punkt odniesienia, można by się zastanowić, jak nazwać figurę dobrze nam znaną jako płaski kwadrat. O płaskim euklidesowym kwadracie jedna z definicji, jaką możemy spotkać w literaturze, mówi, iż jest to czworokąt foremny. Czy foremność czworokąta implikuje miarę jego kątów wewnętrznych (prostych na płaszczyźnie) jako jego szczególną własność, czy też miara  $90^\circ$  jego kątów jest fundamentalną częścią definicji kwadratu?

I na koniec mała refleksja. W związku ze zbliżającymi się mistrzostwami Europy w piłce nożnej „Euro 2012” zapewne wielu Czytelników zaglądać będzie na boiska. Przyjmując, iż przynajmniej w części są one położone na zakrzywionej powierzchni, np. dla uproszczenia weźmy rozważaną przez nas sferę, to tak naprawdę nie są one wówczas prostokątami. A to już niemal skandal! Jeśli linie ograniczające pole boiska nie są odcinkami prostych, ale przecinają się pod kątem  $90^\circ$  (sytuacja analogiczna jak w  $F_1$ ), to w szczególności wymiary boiska (liczone liniowo) nie są stałe. Z kolei jeśli linie te są odcinkami prostych (sytuacja analogiczna jak w  $F_2$ ), to w szczególności kąty narożników boiska, z których wykonuje się rzuty różne, nie są proste. Ciekawe, co na to przepisy, trenerzy reprezentacji i sami zawodnicy?



**Rozwiązanie zadania F 812.**  
Równania ruchu gwiazd:

$$m_1 \omega_1 l_1 = m_2 \omega_2 l_2 = F_g,$$

gdzie  $\omega_1, \omega_2$  są prędkościami kątowymi ruchu gwiazd,  $F_g = Gm_1 m_2 / l^2$  siłą wzajemnego przyciągania,  $l_1$  i  $l_2$  promieniami orbit. Środek masy znajduje się w punkcie takim, że  $m_1 l_1 = m_2 l_2$  oraz  $l_1 + l_2 = l$ . Stąd otrzymujemy:

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{G(m_1 + m_2) / l^3},$$

oraz

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^3}{G(m_1 + m_2)}}.$$



## Prosto z nieba: Kolejne planety Keplera

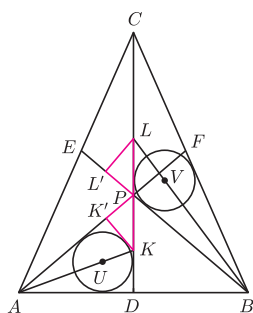
Johannes Kepler był siedemnastowiecznym astronomem i matematykiem, który interesował się także mistycyzmem i astrologią, co w owych czasach nie było jednakowoż niczym przesadnie dziwnym. Jako wierny wyznawca poglądów Pitagorasa i Ptolemeusza, Kepler zaproponował model Układu Słonecznego tłumaczący proporcje sfer niebieskich za pomocą różnorodnych wielościanów foremnych. Model ten nie odniósł sukcesu, ale rozważania Keplera doprowadziły go do sformułowania poprawnego opisu ruchu planet w Układzie Słonecznym, który mógł zweryfikować dzięki dokładnym obserwacjom innego słynnego astronoma tych czasów, Tycho Brahego. Jest miarą naukowego geniuszu, że Kepler – wielki miłośnik symetrii, kosmicznego porządku i „muzyki sfer”, wyznawca boga-Słońca – zdecydował się na zastosowanie do opisu kształtu orbit *nieeleganckiej* krzywej stożkowej zwanej elipsą, rezygnując z doskonałego kształtu okręgu. W oryginalnym modelu heliocentrycznym Kopernika planety poruszają się wszak wciąż po orbitach będących kombinacjami epicykli i deferensów!

Sukces praw Keplera skłonił Edmunda Halleya i Izaaka Newtona do ustalenia, że siła zmuszająca ciała niebieskie do poruszania się po elipsach jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od ogniska, co rozpoczęło na dobre rewolucję w fizyce.

Obecnie badania układów planetarnych prowadzi wyniesiony na orbite okołosłoneczną w marcu 2009 r. i nazwany na cześć słynnego astronoma teleskop, o którym wspominaliśmy już w numerze lutowym br. Satelita *Kepler*, wyposażony w fotometr optyczny o lustrze prawie metrowej średnicy, analizuje krzywe zmian blasku gwiazd w kierunku gwiazdozbiorów Łabędzia, Lutni i Smoka (w pierwszej połowie nocy widoczne we wschodniej części nieba). Metoda seryjnego odkrywania planet jest genialna w swojej prostocie – obserwując dostatecznie dużo gwiazd dostatecznie długo, raz na jakiś czas zaobserwujemy chwilowe częściowe zaćmienie światła tej lub innej gwiazdy, co może oznaczać przejście małego obiektu przed jej tarczą. Regularne takie zmiany świadczą niechybnie o istnieniu układu planetarnego. Należy wspomnieć, że zaćmienie jest niezwykle słabe; dla przykładu, wykrycie Ziemi przechodzącej przed tarczą Słońca wymagałoby pomiaru zmiany jasności o 0,01%. Misja kosmiczna ma już na swoim koncie wiele sukcesów i dziesiątki zidentyfikowanych planet – gazowych i lodowych gigantów, a także mniejszych skalistych globów podobnych do Ziemi. Wszystko wskazuje na to, że jesteśmy obecnie świadkami rewolucji w masowym odkrywaniu nowych światów, o czym świadczy para niedawnych odkryć opisanych poniżej.



**Rozwiązanie zadania M 1348.**  
Przez  $K$  i  $L$  oznaczmy środki okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąt  $ABP$  i czworokąt  $PECF$ .



Niech  $K'$  i  $L'$  będą rzutami prostokątnymi punktów  $K$  i  $L$  odpowiednio na  $AP$  i  $PE$ . Niech wreszcie  $o(U, r)$  i  $o(V, s)$  będą okręgami wpisanymi w trójkąty  $ADP$  i  $BPC$ . Chcemy wykazać, że  $r = s$ .

Zauważmy, że pola trójkątów  $AKP$  i  $BPL$  są równe, bo podstawy  $AP$  i  $PB$  oraz odpowiednie wysokości  $KK'$  i  $LL'$  są równej długości. Skoro  $U$  leży na  $AK$ , a  $V$  na  $BL$ , to możemy obliczyć pola tych trójkątów innym sposobem, otrzymując

$$\frac{1}{2}r \cdot AP + \frac{1}{2}r \cdot KP = \frac{1}{2}s \cdot BP + \frac{1}{2}s \cdot PL.$$

Ale  $AP = BP$ , zaś  $KP = PL$ , gdyż trójkąty prostokątne  $KPK'$ ,  $LPL'$  są przystające (kąty  $KPK'$  i  $LPL'$  są równe, boki  $KK'$  i  $LL'$  też). Zatem  $r = s$ .

Oznaczony kryptonimem Kepler 20 układ składa się z gwiazdy typu G (czyli takiej jak Słońce) oraz z wielu planet, wśród których są masywne gazowe olbrzymy oraz dwie planety wielkości Ziemi (Kepler 20e i 20f, o promieniach 0,87 i 1,03  $R_{\oplus}$ ). W przeciwieństwie do Układu Słonecznego „lekkie” planety zajmują orbity naprzemiennie z „masywnymi”, co, być może, jest skutkiem migracji planetarnej. Skaliste globy były prawdopodobnie gazowymi gigantami, które przeżyły etap pochłonięcia przez zewnętrzne warstwy atmosfery gwiazdy, w trakcie którego zostały „odarte” z atmosfery. Obecnie znajdują się na tyle blisko gwiazdy, że temperatura na ich powierzchni osiąga około 1000 K.

Drugi układ, Kepler 21, jest również fascynujący – gwiazda (podolbrzym typu F) pulsuje podobnie do naszego Słońca (w tzw. modach akustycznych typu słonecznego), wykazując dodatkowo zaćmienia świadczące o obecności małej planety o masie nieprzekraczającej 10  $M_{\oplus}$ , promieniu około 1,5  $R_{\oplus}$  i okresie orbitalnym 2,8 dnia. Dla porównania, Merkury okrąży Słońce w 88 dni i znajduje się około 10 razy dalej (tj. 57 mln km) od gwiazdy niż planeta Kepler 21b. Niestety, jest mało prawdopodobne, by Kepler 21b miał atmosferę podobną do ziemskiej; także oszacowana temperatura powierzchni planety, prawie 2000 K, nie zachęca do dłuższego pobytu.

Obecnie czekamy zatem na odkrycie skalistej, małowasywnej planety znajdującej się w „ekosferze”, tj. w optymalnej odległości od macierzystej gwiazdy. Jak w bajce o Trzech Misiach i Złotowłosej, powinno tam być *nie za ciepło, nie za zimno, ale w sam raz* dla powstania warunków sprzyjających życiu podobnemu do ziemskiego, a w szczególności obecności ciekłej wody. Apetyt rośnie w miarę jedzenia, a ilość danych obserwacyjnych i dokładność pomiarów zespołu *Keplera* zachęcają do optymizmu.

Michał BEJGER



# Jak znaleźć *second min*?

Jakub RADOSZEWSKI

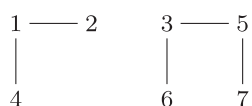
```

min := A[1];
for i := 2 to n do
  if A[i] < min then
    min := A[i];
return min;

```

Jednym z pierwszych zadań, z jakimi musi zmierzyć się każdy uczący się algorytmów lub programowania, jest znajdowanie minimum w tablicy (ciągu liczb). Oznaczmy taką tablicę przez  $A[1..n]$ . Poszukiwanie zaczynamy, naturalnie, od elementu  $A[1]$ , który staje się kandydatem na minimum. Jeśli teraz  $A[1] \leq A[2]$ , to  $A[1]$  pozostaje kandydatem na minimum, a jeśli, przeciwnie,  $A[1] > A[2]$ , to kandydatem na minimum staje się  $A[2]$ . Łatwo zobaczyć, co będzie dalej: każdy kolejny element tablicy,  $A[i]$ , porównujemy z obecnym kandydatem na minimum i aktualizujemy tegoż kandydata, jeśli  $A[i]$  okazał się od niego mniejszy (patrz pseudokod na marginesie).

Łatwo oszacować, ile operacji wykonujemy w tym algorytmie: mamy dokładnie  $n - 1$  porównań oraz co najwyżej  $n$  przypisań. Co prawda, powyższy algorytm jest naprawdę prosty, ale zawsze można dla pewności spytać: czy dałoby się lepiej? Na przykład, czy można znaleźć minimum w tablicy, wykonując mniej niż  $n - 1$  porównań?



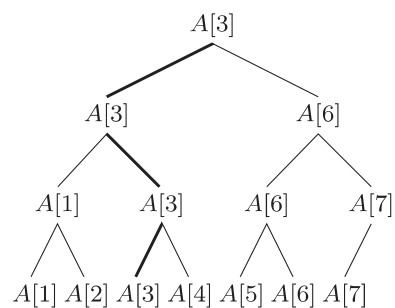
Rys. 1. Graf porównań odpowiadający tablicy  $A[1..7]$  po wykonaniu porównań:  $A[1]$  z  $A[2]$ ,  $A[1]$  z  $A[4]$ ,  $A[3]$  z  $A[5]$ ,  $A[3]$  z  $A[6]$  i  $A[5]$  z  $A[7]$ .

Innym ciekawym uogólnieniem początkowego problemu byłoby wyznaczanie jednocześnie minimum i maksimum w tablicy. Okazuje się, że potrzeba i wystarczy do tego  $\lceil 3n/2 \rceil - 2$  porównań. Jak mógłby wyglądać algorytm wykonujący taką liczbę porównań? I dlaczego nie da się lepiej?

Intuicyjnie widać, że nie, czyli że trzeba wykonać co najmniej  $n - 1$  porównań. Tę intuicję można także wesprzeć formalnym uzasadnieniem. Ustalmy pewien algorytm wyznaczający minimum w tablicy  $A[1..n]$ . Dla danego przebiegu (wykonania) tego algorytmu możemy skonstruować *graf porównań*, którego wierzchołki  $1, 2, \dots, n$  reprezentują numery elementów w tablicy, a krawędź łączy dwa wierzchołki wtedy, gdy odpowiadające im elementy zostały porównane w tym przebiegu algorytmu (patrz rys. 1). Wystarczy teraz zauważyć, że jeśli na końcu takiego przebiegu graf porównań nie jest *spójny*, to rozważany algorytm nie może być poprawny: bez dodatkowych porównań nie jesteśmy w stanie stwierdzić, w której spójnej składowej faktyczne minimum się znajduje. Ponieważ graf spójny o  $n$  wierzchołkach musi mieć co najmniej  $n - 1$  krawędzi, więc rzeczywiście potrzebnych jest  $n - 1$  porównań.

Skoro wiemy już wszystko o wyznaczaniu minimum, to może teraz zastanowimy się, jak efektywnie znaleźć drugi co do wielkości element tablicy? Będzie to właśnie tytułowe *second min*.

Najprościej wykorzystać poprzedni algorytm: znajdujemy minimum, usuwamy je z tablicy (np. odpowiednio je oznaczając), po czym znajdujemy minimum wśród pozostałych elementów tablicy. W ten sposób wykonujemy  $n - 1 + n - 2 = 2n - 3$  porównania. Można to jednak zrobić lepiej, jeśli tylko wykorzystamy inny algorytm wyszukiwania minimum.



Rys. 2. Turniej związany z tablicą  $A[1..7]$ . Zwycięzcą (czyli minimum) jest  $A[3]$ .

Do wyznaczenia *second min* nie zawsze potrzeba  $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$  porównań – a to dlatego, że algorytm może mieć szczęście. Czasem może wystarczyć  $n - 1$  porównań – na przykład wtedy, gdy przy wyznaczaniu min za pomocą pierwszego opisanego algorytmu okaże się, że  $A[1]$  jest minimum z elementów  $A[1], \dots, A[n - 1]$ , po czym  $A[1]$  przegra w ostatnim porównaniu z elementem  $A[n]$ . Wtedy od razu wiemy, że  $A[1]$  jest elementem *second min*. Jest to jednak wyjątkowo optymistyczny wariant; gdyby okazało się chociażby, że  $A[1] < A[n]$ , to po tym porównaniu o *second min* nie wiedzielibyśmy nic.

Pokażemy, jak znaleźć *second min* za pomocą  $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$  porównań. Zaczynamy od zbudowania *turnieju*, czyli „drabinki meczów” między elementami tablicy  $A$ : w każdym „mecz” mniejszy element wygrywa i w ten sposób wyłaniany jest zwycięzca, czyli minimum. Gdyby  $n$  było potęgą dwójki, ów turniej moglibyśmy reprezentować jako pełne drzewo binarne; w ogólnym przypadku na ostatnim poziomie drzewa mogą występować luki (patrz rys. 2).

Widzimy, że za pomocą turnieju znów udaje nam się wyznaczyć minimum w tablicy za pomocą  $n - 1$  porównań (meczów). Rzeczywiście, po każdym porównaniu jeden element odpada z turnieju. A gdzie w drabince turniejowej znajduje się element *second min*? Otóż mógł on przegrać w turnieju jedynie z elementem min – no bo z nikim innym. Na każdym poziomie drabinki jest co najwyżej jeden element, który przegrał z minimum, czyli łącznie mamy co najwyżej  $\lceil \log_2 n \rceil$  kandydatów na *second min*. Przykładowo, w turnieju z rysunku 2 kandydatami na *second min* są  $A[4]$ ,  $A[1]$  i  $A[6]$ . Wystarczy zatem wybrać minimum spośród tych właśnie elementów, do czego, jak wiemy, potrzeba już tylko  $\lceil \log_2 n \rceil - 1$  porównań. Łącznie wykonaliśmy  $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$  porównań, czyli tyle, ile chcieliśmy.

Naturalnie nasuwa się pytanie, czy da się lepiej, tzn. czy aby na pewno przy wyznaczaniu *second min* trzeba wykonać  $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$  porównań. W związku z uwagą na marginesie warto tu zadać bardziej precyzyjne pytanie: czy każdy algorytm znajdujący *second min* wykonuje w *pesymistycznym przypadku* co najmniej  $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$  porównań? Innymi słowy, czy każdemu takiemu algorytmowi

możemy tak złośliwie dobrać dane wejściowe, żeby musiał wykonać podaną liczbę porównań? Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, co spróbujemy uzasadnić. Odtąd założymy dla uproszczenia, że wszystkie elementy w tablicy  $A$  są różne; poniższe rozumowanie można lekko zmodyfikować tak, aby działało także w przypadku powtarzających się elementów w  $A$ .

Przede wszystkim musimy wyjaśnić jedną rzecz: każdy algorytm wyznaczający second min musi przy okazji znaleźć element min, tzn. na końcu jego działania musi być jednoznacznie wyznaczony, który element tablicy jest minimalny. Faktycznie, gdyby na końcu algorytmu wciąż byli dwaj kandydaci na minimum (czyli mniejsi od wszystkich elementów, z którymi byli porównywani), to któryś z nich mógłby równie dobrze być elementem second min.

Aby dokończyć rozumowanie, musimy pokazać pewną kluczową i trochę nieintuicyjną własność. Otóż w każdym algorytmie wyznaczającym minimum w tablicy (a więc także w każdym wyznaczającym second min) element min jest porównywany w pesymistycznym przypadku co najmniej  $\lceil \log_2 n \rceil$  razy.

Zanim to pokażemy, zastanówmy się, co nam to da. Przyjrzyjmy się grafowi porównań algorytmu wyznaczającego second min. Wiemy – a dokładniej, będziemy wiedzieli, jak udowodnimy – że w pesymistycznym przypadku z elementu min wychodzi w tym grafie co najmniej  $\lceil \log_2 n \rceil$  krawędzi. Usuńmy z grafu element min; reszta musi pozostać spójna, gdyż w przeciwnym przypadku mielibyśmy w niej więcej niż jednego kandydata na second min. Stąd, reszta grafu musi zawierać co najmniej  $n - 2$  krawędzi, czyli łącznie musi być co najmniej tyle krawędzi, ile należało pokazać.

Pozostał nam już tylko dowód tajemniczej własności wszystkich algorytmów wyznaczających minimum. Teraz całą sytuację przedstawimy jako grę...

Mamy dwoje graczy. Pierwszy gracz będzie symulował działanie algorytmu wyszukiującego minimum, czyli będzie zadawał pytania postaci: „Czy  $A[i] < A[j]$ ?”. Zawartość tablicy  $A$  nie jest jednak znana *a priori*. Drugi gracz odpowiada na pytania pierwszego, przy czym jego odpowiedzi nie mogą nigdy być sprzeczne – to znaczy, że po każdej sekwencji jego odpowiedzi musi istnieć zawartość tablicy  $A[1..n]$  zgodna ze wszystkimi odpowiedziami, jakich udzielił. Celem pierwszego gracza jest wyznaczyć minimum w tablicy, wykonując mniej niż  $\lceil \log_2 n \rceil$  porównań dotyczących min, a celem drugiego – spowodować, żeby pierwszy gracz musiał zadać co najmniej  $\lceil \log_2 n \rceil$  pytań dotyczących min.

Podamy teraz strategię wygrywającą dla drugiego gracza. Z każdym elementem tablicy  $A[i]$  zwiążemy licznik  $l[i]$ ; początkowo wszystkie liczniki są ustawione na 1. Będziemy dbali o to, aby wszystkie liczniki były zawsze nieujemne i całkowite oraz aby ich suma była równa  $n$ . Będziemy też utrzymywać niezmiennik, że wszystkie dodatnie liczniki odpowiadają kandydatom na minimum, czyli elementom, które w żadnym porównaniu nie okazały się większe.

Metoda odpowiadania na pytania jest następująca: jeśli pierwszy gracz chce porównać elementy  $A[i]$  i  $A[j]$ , to odpowiadamy, że mniejszy jest ten element, który ma nie mniejszy licznik. Wówczas licznik mniejszego elementu zwiększamy o wartość licznika większego elementu, a drugi z tych liczników zerujemy (patrz przykład na rysunku 3). Jeśli tylko przed wykonaniem zapytania co najmniej jeden z liczników  $l[i]$ ,  $l[j]$  był niezerowy, to postępując zgodnie z tą metodą, na pewno nigdy nie udzielimy odpowiedzi sprzecznej z poprzednimi, gdyż porównanie wygra kandydat na minimum. A jeżeli oba liczniki były zerowe, to musimy po prostu odpowiedzieć tak, żeby nie skłamać: jeśli na podstawie dotychczasowych odpowiedzi można wywnioskować, który z elementów  $A[i]$ ,  $A[j]$  jest mniejszy, to odpowiadamy zgodnie z prawdą, a jeśli nie, to odpowiadamy jakkolwiek.

Łatwo sprawdzić, że podana metoda spełnia wszystkie żądane niezmienniki. Na końcu gry element minimalny musi mieć licznik równy  $n$ , a pozostałe liczniki muszą być zerowe. A ponieważ po każdym pytaniu licznik elementu minimalnego może się co najwyżej podwoić, więc łącznie wykonaliśmy na tym liczniku co najmniej  $\lceil \log_2 n \rceil$  operacji. To kończy dowód!

1 1 1 1 1 1 1	$A[3] < A[5]$
1 1 2 1 0 1 1	$A[6] < A[7]$
1 1 2 1 0 2 0	$A[2] < A[4]$
1 2 2 0 0 2 0	$A[2] < A[5]$
1 2 2 0 0 2 0	$A[6] < A[1]$
0 2 2 0 0 3 0	$A[3] < A[2]$
0 0 4 0 0 3 0	$A[5] < A[4]$
0 0 4 0 0 3 0	$A[3] < A[6]$
0 0 7 0 0 0 0	

Rys. 3. Przykładowa rozgrywka w 7-elementowej „grze w minimum”: w lewej kolumnie są liczniki  $l[1..7]$ , a w prawej porównywane elementy (pytania pierwszego gracza) i wyniki porównań (odpowiedzi drugiego gracza). Minimum okazał się element  $A[3]$ . Wziął on udział w trzech porównaniach.

Intuicyjne znaczenie liczników  $l[i]$  jest takie: gdybyśmy za każdym razem porównywali tylko liczby będące kandydatami na minimum, to wartość  $l[i]$  oznaczałaby liczbę elementów, o których wiemy, że są większe od danego kandydata.

Polecamy także artykuł Marcina Peczerskiego „Sortowanie z minimalną liczbą porównań” z *Delta* 11/2004.

## Fizyczne uwarunkowanie obliczeń

Każde (niekwantowe) obliczenie wymaga użycia serii nieodwracalnych operacji logicznych, w których dwa stany wejściowe dają jeden stan końcowy. Przykładem takiej operacji jest zerowanie komórki pamięci. W 1961 roku Rolf Landauer wykazał, że minimalna ilość ciepła, porównywalna z  $kT$  (gdzie  $k$  jest stałą Boltzmana, a  $T$  temperaturą w skali bezwzględnej), jest do tego niezbędna [1]. Ograniczenie  $kT \ln 2$  jest obecnie nazywane granicą Landauera, która określa nieprzekraczalne fizyczne ograniczenie minimalnej ilości ciepła rozpraszane podczas pojedynczej nieodwracalnej operacji logicznej dowolnego dwójkowego urządzenia.

Jednakże, pomimo zasadniczego znaczenia dla rzeczywistych implementacji obliczeń informatycznych, ta podstawowa zasada nie została, do niedawna [2], doświadczalnie sprawdzona. Głównym powodem były techniczne trudności eksperymentowania z pojedynczą komórką pamięci w tak niskim zakresie rozpraszanej energii, ale nie mniej istotne były wątpliwości co do poprawności oraz użyteczności ograniczenia. Przecież rozpraszanie energii w obecnie używanych krzemowych układach cyfrowych jest trzy rzędy wielkości ponad ograniczenie Landauera. Z drugiej strony jednak, osiągnięcie tego limitu jest spodziewane wraz z postępującą miniaturyzacją układów scalonych.

Doświadczalne potwierdzenie realności ograniczenia Landauera w przykładowym modelu jednobitowej pamięci zostało uzyskane [2] dla pojedynczej koloidalnej cząstki uwięzionej w podwójnej studni potencjału o regulowanych parametrach. Zostało wykazane, że średnia rozpraszana energia zmniejsza się wykładniczo z wydłużającym się czasem operacji, asymptotycznie zbiegając do granicy Landauera.

## Daya Bay – najefektywniejszy eksperyment neutrinowy

Neutrino są najbardziej tajemniczą i najtrudniej wykrywalną formą materii. Od ponad pół wieku zbierane są doświadczalne dowody ich oscylacji. Ponieważ oddziałują tylko słabo (za pomocą masywnych bozonów pośredniczących  $W^+$ ,  $W^-$  i  $Z^0$ ), a stany własne oddziaływania (rodzaje: elektronowy, mionowy oraz taonowy) są, jak widać, różne od stanów masowych (numerowanych 1, 2 i 3), więc neutrino zmieniają swój rodzaj w trakcie lotu.

Dla dwóch rodzajów neutrin oscylacja może być opisana przez prawdopodobieństwo przetrwania

$$P(L, E) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2(1,267\Delta m^2 L),$$

gdzie  $\theta$  jest tzw. kątem mieszania,  $\Delta m^2$  jest różnicą kwadratów mas (mierzoną w  $eV^2$ ),  $L$  jest długością lotu (w metrach), a  $E$  jest energią neutrina (w MeV).

Mieszanie trzech rodzajów neutrin może być opisane przez trzy kąty mieszania  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{13}$ , dwie różnice kwadratów mas  $\Delta m_{12}^2$ ,  $\Delta m_{23}^2$ , oraz łamiącą kombinowaną parzystości CP fazę  $\delta$  (o której jeszcze nie wiadomo, czy

jest różna od zera). Dwa z kątów mieszania ( $\sin^2(2\theta_{23}) = 0,97$ ;  $\sin^2(2\theta_{12}) = 0,86$ ) są dobrze zmierzone, głównie dzięki powolnej „słonecznej” oscylacji (powodowanej przez małą  $\Delta m_{12}^2 = 7,59 \cdot 10^{-5} eV^2$ ), w której obserwuje się zanikanie neutrin elektronowych pochodzących ze Słońca, oraz dzięki szybkiej „atmosferycznej” oscylacji (powodowanej przez dużą  $\Delta m_{23}^2 = 2,32 \cdot 10^{-3} eV^2$ ), w której obserwowane jest zanikanie neutrin i antyneutrino mionowych produkowanych w atmosferze przez promieniowanie kosmiczne.

Trzeci rodzaj oscylacji jest dużo trudniejszy do zaobserwowania, bo  $\sin^2(2\theta_{13})$  okazuje się ograniczony do mniej niż około 0,1. Został on niemal wykryty przez eksperyment T2K (Japonia) za pomocą wiązki neutrin mionowych wysyłanych z Tokai, a rejestrowanych w Kamioce jako neutrino elektronowe, ale zbieranie danych zostało przerwane przez trzęsienie ziemi w ubiegłym roku. W rywalizacji pozostawało kilka grup doświadczalnych rejestrujących zanikanie antyneutrino produkowanych przez reaktory, ale przekonującego wyniku nie udawało się uzyskać.

Beniaminkiem w tej rywalizacji jest eksperyment Daya Bay. Zestaw doświadczalny składa się z trzech istniejących elektrowni jądrowych (każda z EJ ma dwa reaktory o mocy 2,9 GW) zlokalizowanych nad zatoką (o właśnie takiej nazwie) niedaleko Hongkongu oraz z trzech specjalnie wydrążonych jaskiń eksperymentalnych wyposażonych w (łącznie) sześć detektorów neutrin. Trzy z nich są tzw. bliskimi detektorami, a trzy są zlokalizowane w średniej odległości od EJ około 1650 m (tzw. dalekie detektory), odpowiadającej pierwszemu maksimum prawdopodobieństwa zanikania neutrin o średniej energii 3 MeV.

Dzięki temu specyficznemu zestawowi doświadczalnemu (oraz kilku innym dobrym pomysłom) większość błędów systematycznych kasuje się i już po dwóch miesiącach zbierania danych oraz po około miesiącu analizy (prowadzonej częściowo „na ślepo”) opublikowano wynik

$$\sin^2(2\theta_{13}) = 0,092 \pm 0,016 \text{ (stat)} \pm 0,005 \text{ (syst)}.$$

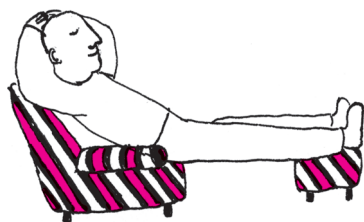
Został on uzyskany dzięki odpowiedniemu porównaniu liczby oddziaływań rejestrowanych w bliskich oraz dalekich detektorach. Odkrycie, że najmniejszy z kątów mieszania jest znacząco różny od zera, pozwala mieć nadzieję na przeprowadzenie badań naruszania CP w sektorze neutrin i, być może, odpowiedzenie na pytanie, czy obserwowana asymetria między materią i antymaterią może być wyjaśniona bez odwoływania się do nieznanych zjawisk.

Piotr ZALEWSKI

- [1] R. Landauer, *Irreversibility and heat generation in the computing process*, IBM J. of Research and Development **5**, 183–191 (lipiec 1961).
- [2] A. Béruet, A. Arakelyan, A. Petrosyan, S. Ciliberto, R. Dillenschneider & E. Lutz, *Experimental verification of Landauer's principle linking information and thermodynamics*, Nature **483**, 187–189 (8 marca 2012).
- [3] F.P. An *et al.* (The Daya Bay Collaboration), *Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay*, submitted to Phys. Rev. Lett. (7 marca 2012)  
[http://dayabay.ihep.ac.cn/docs/DYB\\_rate-pr1.APS.pdf](http://dayabay.ihep.ac.cn/docs/DYB_rate-pr1.APS.pdf).

# Niebezpieczeństwa innych próżni

Krzysztof TURZYŃSKI



Przypomnijmy krótko, że akcelerator LHC został zaprojektowany, by zderzać przeciwbieżne wiązki protonów mających energię 7 GeV, oraz że w każdym z jego największych detektorów (ATLAS, CMS) miało, według specyfikacji, zachodzić  $10^9$  zderzeń na sekundę. Daje to ok.  $10^{17}$  takich zderzeń w ciągu całego czasu działania akceleratora.

Podobne argumenty mają także zastosowanie do kwestii produkcji w zderzeniach w LHC fragmentów tzw. dziwnej materii, zwanych po polsku dziwadłkami.

Ciało lubi spoczywać. Ciało fizyczne poruszające się w polu sił potencjalnych spoczywa, gdy znajduje się w minimum energii potencjalnej. Jeśli minimum to jest lokalne, ciało może znaleźć się w innym, niższym położonym minimum, gdy dostarczy mu dostatecznie dużo energii, by mogło pokonać barierę potencjału, lub gdy zajdzie tunelowanie kwantowe (jego prawdopodobieństwo dla ciał makroskopowych jest nikłe). Dla ciał znajdujących się w naszym otoczeniu, takich jak książki na półkach, wiemy z grubsza, gdzie znajdują się te minima.

Jednak te same zasady stosują się także do największego możliwego układu fizycznego – Wszechświata, z tym że stan realizujący lokalne minimum energii nazywamy *próżnią*. Tymczasem na świecie w odstępach rzędu dziesięciolecia buduje się coraz potężniejsze akceleratory cząstek elementarnych zderzające cząstki z coraz to większymi energiami. Czy prawdopodobne jest, że, jeśli energia potencjalna Wszechświata ma jakieś niższe leżące minimum, w zderzeniu dwóch cząstek w akceleratorze uwolniona zostanie energia, która pozwoli małemu kawałkowi Wszechświata przejść do tego właśnie minimum? Byłoby to, delikatnie mówiąc, niebezpieczne, gdyż taki „bąbelek” nowego stanu rozszerzałby się bardzo szybko, ogarniając coraz większą część Wszechświata wraz ze znajdującymi się w nim strukturami. A zatem, czy wykonywanie eksperymentów przy akceleratorze LHC może zniszczyć Wszechświat? Odpowiedź na to pytanie nie może zależeć od modelu teoretycznego, gdyż właśnie wskazanie tego właściwego jest przecież jednym z głównych celów LHC. Na szczęście, istnieją wyniki badań doświadczalnych pozwalające na rozstrzygnięcie tego dylematu.

Górne warstwy ziemskiej atmosfery są nieustannie bombardowane wysokoenergetycznymi cząstkami elementarnymi zwanymi promieniowaniem kosmicznym – są to w większości protony. Wiele zespołów naukowych bada własności tych cząstek. Najwyższa zarejestrowana dotąd energia cząstki promieniowania kosmicznego to około  $10^{11}$  GeV, przy czym zgodnie ze szczególną teorią względności protony o energii większej niż  $10^8$  GeV zderzające się ze spoczywającymi protonami ziemskiej atmosfery mają energię zderzenia przekraczającą tę uzyskiwaną w LHC. Wiadomo, że średnia liczba protonów promieniowania kosmicznego o energiach przekraczających  $10^8$  GeV padających w ciągu sekundy na kilometr kwadratowy górnych warstw ziemskiej atmosfery jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do kwadratu energii i wynosi około  $5 \cdot 10^{-4}$ . Mnożąc to przez powierzchnię Ziemi oraz czas istnienia Ziemi (ok. 4,5 mld lat), stwierdzamy, że na Ziemi zaszło już ponad  $10^{22}$  zderzeń proton-proton o energiach przekraczających te z LHC. Można zatem powiedzieć, że na Ziemi sama przyroda wykonała już około 100 000 „eksperymentów LHC” – i nic złego się nie stało.

Jeśli zamiast Ziemi rozważymy Słońce, liczba wykonanych „eksperymentów LHC” wzrośnie do  $10^9$ . Droga Mleczna zawiera około 100 mld gwiazd, których nasze Słońce jest w miarę typowym przedstawicielem, szacuje się, że w widzialnym Wszechświecie jest 100 mld galaktyk. Oznacza to, że w obserwowalnej części Wszechświata „eksperyment LHC” został już wykonany rzędu  $10^{31}$  razy. Nie ma jednak żadnych obserwacyjnych dowodów na to, że jakaś część Wszechświata jest pożerana przez bąble nowej próżni.

A jeśliby powstał akcelerator zderzający protony z energią dziesięciokrotnie większą niż LHC, a do tego sto razy częściej? Wtedy energia protonów promieniowania kosmicznego odpowiadająca energii zderzeń w takim akceleratorze będzie stukrotnie większa, czyli około  $10^{14}$  GeV. Liczba cząstek o energii większej niż wymieniona wyżej zmaleje wówczas o czynnik  $10^4$ , co oznacza, że wyobrażony tu „eksperyment super-LHC” został już we Wszechświecie przeprowadzony  $10^{25}$  razy.

Czy prawdopodobieństwo zajścia takiego katastrofalnego zdarzenia rzędu  $10^{-31}$  to dużo? Nietrudno sprawdzić, że to trochę mniej niż prawdopodobieństwo wygrania szóstki w totolotka trzy razy pod rząd. Można chyba spać spokojnie.

## Bibliografia

J. Ellis, G. Giudice, M. Mangano, I. Tkachev, U. Wiedemann, <http://arXiv.org/pdf/0806.3414>

## Informatyczny kącik olimpijski (51): Nurkowanie

Tym razem zajmujemy się zadaniem *Nurkowanie* z Obozu Naukowo-Treningowego im. Antoniego Kreczmara w 2007 roku.



Zadanie brzmi tak. Grupa  $n$  nurków musi przedostać się przez podwodną szczelinę. Niestety, mają oni przy sobie tylko jedną wodoodporną latarkę. Szczelina jest wąska, więc jednocześnie mogą nią płynąć co najwyżej dwie osoby. Nurkowie postanowili powtarzać następujący schemat, dopóki będzie to konieczne: dwóch nurków przepłynie przez szczelinę, a następnie jeden z nich wróci, aby kolejni nurkowie mogli skorzystać z latarki. Każdy z nurków ma swoją maksymalną prędkość – jeśli dwóch nurków płynie jednocześnie, płyną z prędkością wolniejszego z nich. Ile minimalnie czasu zajmie im przeprawa przez szczelinę, jeśli  $m$  par spośród nich nie lubi się wzajemnie i nie może płynąć razem?

Założmy dla uproszczenia, że nurkowie są ponumerowani od 1 do  $n$  tak, że czasy, jakie potrzebują oni na przepłynięcie szczeliny, spełniają warunek  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ . Sytuację daną w zadaniu opisujemy jako graf  $G$ , którego wierzchołki  $\{1, 2, \dots, n\}$  odpowiadają nurkom. Nurkowie  $i$  i  $j$  są połączeni w  $G$  krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy się lubią.

Zastanówmy się najpierw, kiedy problem nie ma rozwiązania. Każdy kolejny krok schematu jest równoważny wybraniu dwóch wierzchołków połączonych krawędzią w  $G$ , a następnie usunięciu z  $G$  jednego z nich, odpowiadającego nurkowi, który został po drugiej stronie szczeliny i już nigdy stamtąd nie wróci. Jeśli więc  $G$  na początku nie jest spójny, to na pewno przeprawa jest niewykonalna: po wykonaniu kursu liczba składowych nie maleje, więc gdy już nie będzie można wykonać żadnego kursu, pozostanie grupa co najmniej dwóch nurków, z których każdych dwóch się nie lubi.

Założmy więc, że  $G$  jest spójny. Okazuje się, że wtedy rozwiązanie istnieje i każdy możliwy scenariusz przeprawy możemy skutecznie modelować za pomocą drzewa ukorzonego  $T$ . Ustanowimy nurka  $r$ , który uczestniczy w ostatniej turze przeprawy, korzeniem naszego drzewa. Jeśli natomiast  $i$  i  $j$  płyną razem, po czym  $i$  wraca, to  $j$  zostanie synem  $i$  w  $T$ . Jest jasne, że wykonywanie scenariusza przeprawy odpowiada ucinaniu liści naszego drzewa. Podobnie, mając dowolne ukorzone drzewo rozpinające  $G$ , jesteśmy w stanie na jego podstawie skonstruować scenariusz przeprawy – wystarczy w dowolnej kolejności ucinać liście. Przypiszmy krawędziom drzewa  $T$  koszty czasowe odpowiadające kolejnym krokom. Jeśli  $i$  jest ojcem  $j$  w  $T$ , to krawędź między nimi ma koszt  $\max(t_i, t_j) + t_i$ , który, niestety, zależy nie tylko od wyboru nurków, ale także od skierowania krawędzi między nimi. Kosztem  $T$  niech będzie suma kosztów jego krawędzi pomniejszona o czas  $t_r$  potrzebny ostatniemu nurkowi na przeprawę ( $r$  nie musi wracać podczas ostatniego kroku).

Okazuje się, że przy tak ustalonych wagach da się uprościć problem, aby móc zapomnieć o skierowaniu krawędzi i wyróżnionym korzeniu. Obliczymy koszt drzewa  $T$  ( $(i, j)$  oznacza krawędź skierowaną od ojca  $i$  do syna  $j$ ):

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in T} (\max(t_i, t_j) + t_i) - t_r = \\ &= \sum_{(i,j) \in T} (\max(t_i, t_j) + t_i + t_j) - \sum_{(i,j) \in T} t_j - t_r = \\ &= \sum_{(i,j) \in T} (\max(t_i, t_j) + t_i + t_j) - \sum_{i=1}^n t_i. \end{aligned}$$

Druga suma jest stała, więc koszt zależy tylko od pierwszego członu wyrażenia! Wystarczy więc znaleźć minimalne drzewo rozpinające grafu  $G$ , w którym krawędź  $(i, j)$  ma przypisany koszt  $\max(t_i, t_j) + t_i + t_j$ .

Ponieważ na wejściu mamy dane *explicite* dopełnienie grafu  $G$ , możemy rozwiązać zadanie w czasie  $O(n^2)$ , uruchamiając np. *algorytm Prima*. Aby rozwiązać zadanie szybciej, zastosujemy podejście podobne jak w *algorytmie Borůvki*. Przypomnijmy, że w algorytmie tym utrzymujemy las rozpinający  $G$  i wykonujemy  $O(\log n)$  faz; w każdej fazie działania dodajemy do konstruowanego rozwiązania najtańszą krawędź wychodzącą z każdej dotychczasowej składowej lasu (rozstrzygając remisy w dowolny uporządkowany sposób).

Pokażemy, jak zrealizować jedną fazę algorytmu Borůvki. Oznaczmy przez  $Z_i$  zbiór nurków, których nie lubi nurek  $i$ . Niech  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  będzie zbiorem nurków dowolnej składowej dotychczasowego rozwiązania (na początku każdy nurek stanowi osobną składową). Niech  $(c, d)$  będzie szukaną najtańszą krawędzią wychodzącą z  $A$  ( $c \in A, d \notin A$ ). Jeśli  $|A \cup Z_{a_1}| < n$ , to niech  $b$  będzie nurkiem o najmniejszym numerze nienależącym do  $A \cup Z_{a_1}$ ; krawędź  $(a_1, b)$  jest wtedy najtańszą krawędzią wychodzącą od nurka  $a_1$  i kandydatem na najtańszą krawędź z  $A$ . Wartość  $b$  możemy znaleźć w czasie  $O(|A| + |Z_{a_1}|)$  przy założeniu, że zbiory reprezentujemy jako uporządkowane listy.

Pokażemy, jak to jeszcze usprawnić. Niech

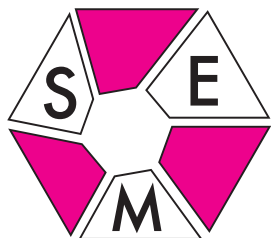
$$Y_i = \left( \bigcap_{j=1}^i Z_{a_j} \right) \setminus A.$$

Jeśli  $i > 1$  i krawędź  $(a_i, b)$  jest najtańszą krawędzią wychodzącą z  $A$ , to  $b \in Y_{i-1} \setminus Z_{a_i}$ , w przeciwnym razie  $b \notin Z_{a_j}$  dla pewnego  $j < i$ , a krawędź  $(a_j, b)$  byłaby tańsza. Wobec tego zarówno sprawdzenie każdego sensownego kandydata  $b$  dla nurka  $a_i$ , jak i obliczenie zbioru  $Y_i$  wykonujemy w czasie  $O(|Y_{i-1}| + |Z_{a_i}|) = O(|Z_{a_{i-1}}| + |Z_{a_i}|)$ . Sumując koszty dla każdego wierzchołka składowej  $i$  dla każdej składowej, otrzymujemy sumaryczny koszt jednej fazy algorytmu:

$$\sum_A O\left(|A| + \sum_{i=1}^{k(A)} |Z_{a_i}|\right) = O(n + m).$$

Złożoność czasowa całego rozwiązania wynosi zatem  $O((n + m) \log n)$ .

Adam KARCZMARZ  
student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki  
Uniwersytetu Warszawskiego



W zawodach I stopnia obecnej, LXIII Olimpiady Matematycznej wzięło udział 1409 uczniów, więc nieco mniej niż w poprzedniej. Jest to liczba bliska wieloletniej średniej. Do drugiego stopnia zakwalifikowano 622 uczniów. Zawody drugiego stopnia odbyły się 17 i 18 lutego.

Wszystkie zadania z odbytych już etapów obecnej Olimpiady (także z wielu poprzednich) i ich rozwiązania można znaleźć na stronie internetowej Olimpiady pod adresem [www.om.edu.pl](http://www.om.edu.pl).

Najtrudniejszym zadaniem w pierwszym stopniu okazało się przedostatnie zadanie (stereometria), które w całym kraju rozwiązało jedynie 29 osób. Trudne też było dwunaste zadanie, ale z nim dały sobie radę 222 osoby. Najłatwiejsze w pierwszym stopniu było zadanie trzecie (geometria płaska), z którym poradziło sobie 1076 osób.

W zawodach drugiego stopnia najtrudniejsza okazała się geometria przestrzenna ku zaskoczeniu części członków komisji przygotowującej zadania na zawody. Rozwiązało je poprawnie około 80 osób, drugie w kolejności było zadanie piąte (geometria płaska), które rozwiązało nieco ponad 90 osób – dokładne liczby w czasie pisania tekstu jeszcze nie są znane. Najłatwiejszym zadaniem tego etapu było zadanie pierwsze (układ równań), które rozwiązało 216 osób, czyli około 36% uczestników II stopnia OM. Chce się powiedzieć tylko 216 osób, bo układ równań nie był standardowy z punktu widzenia tego, co pojawia się w liceach, ale też nie był trudny.

Autora tego tekstu zaskoczyła trudność zadania z geometrii przestrzennej:

**Zadanie 2.** Udowodnić, że w czworościanie  $ABCD$  wierzchołek  $D$ , środek sfery wpisanej oraz środek ciężkości czworościanu leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów  $ABD$ ,  $BCD$  i  $CAD$  są równe.

Rzecz w tym, że zadanie można rozwiązać momentalnie, i to w pamięci, posługując się tzw. współrzędnymi barycentrycznymi, o których można coś przeczytać w artykule Marka Kordosa *Co nam mogą dać ciężary i wypory?* opublikowanym w *Delcie* 3/2012. Każdy punkt czworościanu traktujemy jako środek masy układu złożonego z czterech jego wierzchołków, w których umieszczono odpowiednie masy. Wybór tych mas jest jednoznaczny, jeśli ich sumą jest 1. Środek ciężkości  $S$  czworościanu  $ABCD$  otrzymujemy, umieszczając w wierzchołkach równe masy:  $S = \frac{A+B+C+D}{4}$ . We wspomnianym artykule M.K. wyjaśnił, że chcąc potraktować punkt  $P$  trójkąta  $ABC$  jako środek masy układu trzech punktów materialnych, należy w wierzchołkach  $A, B, C$  umieścić masy równe polom trójkątów  $BCP, CAP, ABP$ . W przypadku punktu  $P$  czworościanu  $ABCD$  zastępujemy pola trójkątów leżących naprzeciw wierzchołków objętościami przeciwległych czworościanów, np. w punkcie  $A$  umieszczamy masę równą objętości czworościanu  $BCDP$ . Środek  $I$  sfery wpisanej w czworościan otrzymujemy, umieszczając w wierzchołkach masy równe polom przeciwległych ścian, bo w tym przypadku wysokości czterech ostrosłupów są równe jako promienie sfery wpisanej. Przy okazji: środek okręgu wpisanego w trójkąt otrzymujemy, gdy masy są równe długościom przeciwległych boków – Czytelniku, przypomnij sobie twierdzenie o dwusiecznej! Wobec tego

$$I = \frac{p_A A + p_B B + p_C C + p_D D}{p_A + p_B + p_C + p_D},$$

gdzie  $p_A$  to pole trójkąta  $BCD$ , analogicznie definiujemy  $p_B, p_C, p_D$ .

Wektory

$$\overrightarrow{DS} = \frac{A + B + C + D}{4} - D = \frac{(A - D) + (B - D) + (C - D)}{4} \quad \text{oraz}$$

$$\overrightarrow{DI} = \frac{p_A A + p_B B + p_C C + p_D D}{p_A + p_B + p_C + p_D} - D = \frac{p_A(A - D) + p_B(B - D) + p_C(C - D)}{p_A + p_B + p_C + p_D}$$

są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy trójki współczynników

$$\left( \frac{p_A}{p_A + p_B + p_C + p_D}, \frac{p_B}{p_A + p_B + p_C + p_D}, \frac{p_C}{p_A + p_B + p_C + p_D} \right) \quad \text{i} \quad \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

są proporcjonalne, a więc gdy  $p_A = p_B = p_C$ .

Michał KRYCH

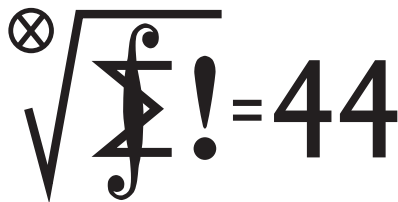
Na marginesie ostatniego zadania drugiego stopnia OM:

**Zadanie 6.** Niech  $S(k)$  oznacza sumę cyfr liczby całkowitej  $k$  w zapisie dziesiętnym. Doweść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych  $n$ , że

$$S(2^n + n) < S(2^n).$$

chciałbym zapytać Czytelników *Delt* o prawdziwość stwierdzenia: dla nieskończenie wielu  $n$  zachodzi równość  $S(2^n + n) = S(2^n)$ . Jeśli tak, to czy ta równość zachodzi dla nieskończenie wielu  $n$  postaci  $10^k - 1$ ?

## Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 VII 2012

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
625 ( $WT = 1,90$ ) i 626 ( $WT = 2,83$ )  
z numeru 9/2011

Janusz Olszewski	Warszawa	44,62
Paweł Kubit	Kraków	40,94
Tomasz Tkocz	Rybnik	39,93
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,25
Michał Miodek	Zawiercie	35,88
Roksana Słowik	Knurów	34,62
Jerzy Cisko	Wrocław	32,84
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	31,04

Janusz Olszewski – po raz trzynasty!!  
No cóż...

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

### Zadania z matematyki nr 641, 642

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**641.** Na płaszczyźnie dane są punkty  $A, B$ . Rozważamy wszystkie czworokąty wypukłe  $ABCD$ , położone w ustalonej półpłaszczyźnie o krawędzi  $AB$ , symetryczne względem prostej  $BD$ , z kątem prostym przy wierzchołku  $D$ . Wykazać, że istnieje punkt wspólny wszystkich uzyskanych prostych  $CD$ .

**642.** Dana jest liczba naturalna nieparzysta  $n$ . Ala i Bartek grają w grę, wykonując ruchy na przemian. Stan gry jest liczbą całkowitą i zmienia swą wartość w trakcie gry. Gracz, do którego należy ruch, może do tej liczby zastosować jedną z dwóch operacji: odjąć od niej dowolną dodatnią liczbę całkowitą, mniejszą niż  $n$ , albo podzielić ją przez  $n$  i zaokrąglić wynik do najbliższej liczby całkowitej (wobec nieparzystości  $n$ , kierunek zaokrąglenia jest zawsze dobrze określony). Powstała nowa wartość przechodzi do dyspozycji przeciwnika. Wygrywa, kto pierwszy uzyska wartość 0. Rozpoczyna Ala, startując od liczby  $n^n$ . Kto ma strategię wygrywającą?

Zadanie 642 zaproponował pan Wojciech Nadara z Warszawy

### Rozwiązania zadań z numeru 1/2012

Przypominamy treść zadań:

**633.** Każdy punkt płaszczyzny został pokolorowany na czerwono lub zielono. Dany jest trójkąt  $ABC$ . Dowieść, że istnieje trójkąt przystający do  $ABC$  o wszystkich wierzchołkach zielonych lub istnieje odcinek długości jednostkowej o obu końcach czerwonych.

**634.** Niech  $S$  będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych. Wykazać, że istnieje wielomian stopnia pierwszego, o współczynnikach całkowitych, którego wartości w punktach zbioru  $S$  są parami względnie pierwsze.

**633.** Załóżmy, że trójkąt przystający do  $ABC$ , o wszystkich wierzchołkach zielonych, nie istnieje. Rozważymy trzy przypadki.

Jeżeli istnieje trójkąt przystający do  $ABC$ , o wszystkich wierzchołkach czerwonych – nazwijmy go po prostu  $ABC$  – przesuwamy go o dowolny wektor długości 1. Otrzymujemy trójkąt  $A'B'C'$ , który (w myśl przyjętego założenia) ma co najmniej jeden wierzchołek czerwony. Wraz z odpowiednim punktem z trójki  $A, B, C$  tworzy on czerwoną parę punktów odległych o 1.

Jeżeli istnieje trójkąt przystający do  $ABC$  (ponownie nazwijmy go  $ABC$ ), w którym dokładnie jeden wierzchołek – na przykład  $A$  – jest zielony, rysujemy dowolny trójkąt równoboczny  $AA'A''$  o boku długości 1. Przesuwamy trójkąt  $ABC$  o wektory  $\overrightarrow{AA'}$  i  $\overrightarrow{AA''}$ , otrzymując trójkąty  $A'B'C'$  i  $A''B''C''$ . Gdy któryś z punktów  $B', C', B'', C''$  jest czerwony, mamy tezę. Gdy te cztery punkty są zielone, wówczas (znów na mocy przyjętego założenia) punkty  $A', A''$  muszą być czerwone, co też daje tezę.

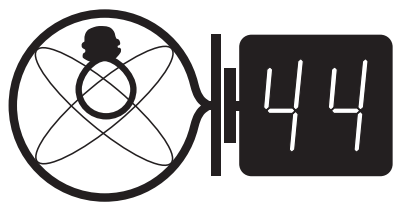
Pozostaje przypadek, gdy w każdym trójkącie przystającym do  $ABC$  dokładnie jeden wierzchołek jest czerwony. Ustalmy dowolny czerwony punkt  $O$  na płaszczyźnie i narysujmy dowolny trójkąt przystający do  $ABC$  (ponownie nazwijmy go  $ABC$ ), z wierzchołkiem  $B$  w owym punkcie  $O$ . Punkty  $A, C$  są więc zielone. Uzupełniamy trójkąt  $ABC$  do równoległoboku  $ABCD$ ; trójkąt  $CDA$  przystaje do  $ABC$ , więc punkt  $D$  musi być czerwony. Długość  $d$  odcinka  $BD$  jest liczbą określoną jednoznacznie przez zadany trójkąt  $ABC$  (to podwojona długość środkowej z wierzchołka  $B$ ). Z dowolności usytuowania trójkąta  $ABC$  (z wierzchołkiem  $B = O$ ) wynika, że każdy punkt położony w odległości  $d$  od punktu  $O$  jest czerwony.

Ponieważ punkt  $O$  mógł być dowolnym punktem czerwonym, widzimy, że każdy odcinek długości  $d$ , z jednym końcem czerwonym, ma i drugi koniec czerwony. Krokiem długości  $d$  można połączyć każde dwa punkty płaszczyzny – cała płaszczyzna jest więc czerwona. To oczywiście także daje tezę.

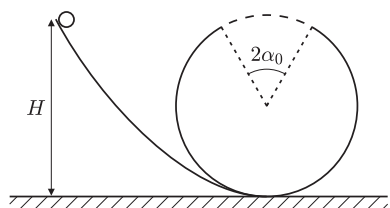
**634.** Niech  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$  będzie zadaniem zbiorem liczb całkowitych. Określamy liczbę  $A$  jako iloczyn wszystkich różnic  $x_i - x_j$ , gdzie  $1 \leq i < j \leq n$ . Pokażemy, że wielomian  $W(x) = Ax + 1$  spełnia wymagany warunek.

Przypuśćmy, że pewne dwie wartości  $W(x_k), W(x_l)$  mają wspólny dzielnik pierwszy  $p \geq 2$ . Liczba  $p$  jest wówczas także dzielnikiem różnicy  $W(x_k) - W(x_l)$ , równej  $A \cdot (x_k - x_l)$ . Skoro  $p$  jest liczbą pierwszą, musi dzielić jeden z czynników:  $A$  lub  $(x_k - x_l)$ . Ten drugi czynnik jest też dzielnikiem liczby  $A$ , więc, tak czy inaczej,  $p$  dzieli  $A$ . To już jest oczekiwana sprzeczność, bo liczby  $W(x_k)$  oraz  $Ax_k$ , różniące się o 1, nie mogą być jednocześnie podzielne przez  $p$ .

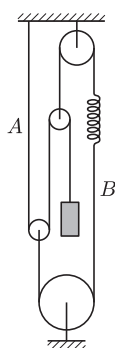
## Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 VII 2012



Rys. 1



Rys. 2

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
526 ( $WT = 2,35$ ) i 527 ( $WT = 4,00$ )  
z numeru 11/2011

Marian Łupieżowicz	Gliwice	39,60
Jacek Piotrowski	Rzeszów	39,10
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	35,03
Michał Koźlik	Gliwice	33,02
Krzysztof Magiera	Łosów	19,37

## Zadania z fizyki nr 538, 539

Redaguje Ewa CZUCHRY

**538.** Małe ciało porusza się po torze z „martwą pętlą”, której na górze brakuje łuku  $2\alpha_0$  (rys. 1). Z jakiej wysokości  $H$  powinno wystartować ciało, żeby oderwawszy się na początku wyrwy nie wypaść poza nią?

**539.** Długa cylindryczna cewka nakręcona na rdzeń o średnicy  $D_1$  ma indukcyjność  $L_1$ . Po podłączeniu cewki do źródła prądu wewnątrz niej zostało wyindukowane pole magnetyczne o indukcji  $B_1$ . Następnie cewka została nakręcona na inny rdzeń o średnicy  $D_2$ . Indukcyjność cewki była wtedy równa  $L_2$ . Wyznaczyć indukcję pola magnetycznego  $B_2$  wewnątrz nowej cewki po podłączeniu do tego samego źródła prądu. Założyć, że przewodnik, z którego jest zrobiona cewka, jest dużo dłuższy niż długość cewki.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/2012

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

**530.** Ciężarek o masie  $m$  wiszący na nici  $A$  przełożonej przez 2 bloki ruchome (rys. 2). Osie tych bloków są połączone nicią  $B$  przełożoną przez 2 bloki nieruchome, a w tej nici zamontowana jest sprężynka o stałej sprężystości  $k$ . Obliczyć okres pionowych drgań ciężarka. Masy bloków pominąć.

**531.** Gdy transformator był podłączony uzwojeniem pierwotnym do napięcia przemiennego  $U_1$ , a obwód wtórny był otwarty, napięcie na uzwojeniu wtórnym było równe  $U_2$ , a natężenie prądu w uzwojeniu pierwotnym  $I_1$  (wszystkie podane wielkości są wartościami skutecznymi). Zamknięto obwód wtórny, dołączając do niego: a) opornik, b) zwojnicę bezoporową, c) kondensator. Ile w każdym z tych przypadków wyniesie natężenie prądu w uzwojeniu pierwotnym, jeśli we wtórnym popłynie prąd o natężeniu  $I_2$ ? Oba napięcia  $U_1$  i  $U_2$  nie zmieniły wartości, a straty energii w transformatorze (jego nagrzewanie się) można pominąć.

**530.** Drganie ciężarka wystąpi wtedy, gdy bloki ruchome będą się zbliżać do siebie i oddalać (oprócz tego w układzie występuje drugi stopień swobody – zgodny ruch bloków ruchomych, przy stałym położeniu ciężarka i stałej sile naciągu nici). Jeśli górny blok ruchomy przesunie się w górę o  $z$ , a dolny pozostanie nieruchomy, to ciężarek przesunie się w górę o  $x = 2z$ . Przy tym sprężynka ulegnie skróceniu o  $z$ , czyli siła wywierana przez nią zmniejszy się o  $kz$ . Siła napięcia nici  $A$  jest dwukrotnie mniejsza, zatem zmniejszy się ona o  $\frac{1}{2}kz = \frac{1}{4}kx$ , tak jakby ciężarek wisiał na sprężynce o stałej sprężystości  $k' = \frac{1}{4}k$ . Szukany okres drgań jest opisany wyrażeniem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = 4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

**531.** Oznaczmy przez  $L_1$  i  $L_2$  indukcyjności uzwojenia pierwotnego i wtórnego, a przez  $M$  współczynnik indukcji wzajemnej. Równania wyrażające II prawo Kirchhoffa dla obu obwodów przybierają postać

$$U_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}, \quad U_2 = -M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}.$$

W powyższych równaniach symbole  $U$  i  $I$  oznaczają – niezbyt konsekwentnie – wartości chwilowe, w odróżnieniu od dalszych przekształceń i treści zadania.

Brak zmiany napięcia  $U_2$ , mimo zamknięcia obwodu wtórnego, świadczy o tym, że sprzężenie indukcyjne obwodów jest maksymalne, tzn.  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ . Wtedy stosunek  $U_2/U_1$  jest równy  $\sqrt{L_2/L_1}$ , zatem stały. Przyjmując częstość  $\omega$  jako daną, z danych wartości  $U_1$ ,  $U_2$  i  $I_1$  wyznaczamy (dla  $I_2 = 0$ )

$$L_1 = \frac{U_1}{I_1 \omega}, \quad L_2 = \frac{U_2^2}{U_1 I_1 \omega}, \quad M = \frac{U_2}{I_1 \omega}.$$

Szukane natężenie prądu w obwodzie pierwotnym po dołączeniu obciążenia do obwodu wtórnego oznaczmy jako  $I_1'$ . W przypadku a) należy przyrównać  $U_2$  do  $I_2 R$ , co po wyeliminowaniu przesunięcia fazy między  $I_1'$  a  $I_2$  prowadzi do tożsamości

$$M \omega I_1' = I_2 \sqrt{(L_2 \omega)^2 + R^2}.$$

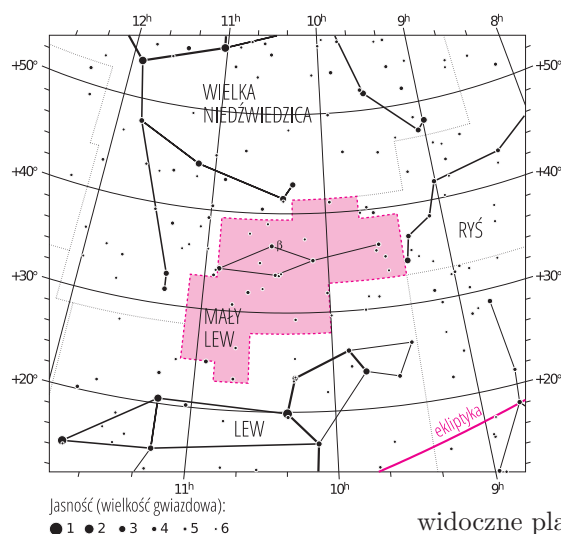
Podstawienie do tego równania oporności w postaci  $R = U_2/I_2$  oraz wyrażen na  $M$  i  $L_2$  daje szukane natężenie prądu w uzwojeniu pierwotnym

$$I_1' = \sqrt{I_1^2 + \left(\frac{U_2 I_2}{U_1}\right)^2}.$$

W podobny sposób otrzymujemy dla przypadku b)  $I_1' = I_1 + \frac{U_2 I_2}{U_1}$ ,

a dla przypadku c)  $I_1' = \left| I_1 - \frac{U_2 I_2}{U_1} \right|$ . Zauważmy, że dla dużego obciążenia (dużej wartości  $I_2$ ) we wszystkich przypadkach przechodzimy do powszechnie znanego związku  $I_1' = U_2 I_2 / U_1$ .





Gwiazdozbiór Małego Lwa. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu „Sky & Telescope” (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

## Niebo jak własna kieszeń: Maj

W odcinku niniejszym inaugurujemy akcję *Niebo jak własna kieszeń*, której przyświeca szczytna idea przyjrzenia się nieco mniej widowiskowym, a przez to, być może, nieco mniej znanym gwiazdozbiорom. Jednym z nich jest Mały Lew, położony pomiędzy Wielką Niedźwiedzicą i Lwem, a wyglądający poniekąd jak miniatura tego ostatniego. W przeciwieństwie do swego zodiakalnego towarzysza, opisywanego już w starożytności przez Ptolemeusza, Mały Lew został powołany do istnienia dopiero w czasach baroku przez Jana Heweliusza. Mało spektakularny w porównaniu z otaczającymi go jasnymi gwiazdami, zawiera jednak kilka obiektów dostrzegalnych gołym okiem – czy potrafisz, Drogi Czytelniku, zidentyfikować go na wieczornym, zachodnim niebie? Do nawigacji użyć można jasnego Marsa (0,22 mag), przebywającego aktualnie w gwiazdozbiорze Lwa; inne łatwo

widoczne planety to Saturn (0,92 mag) w Pannie w okolicy Spiki, oraz Wenus (−4,32 mag), zachodząca wraz ze Słońcem w gwiazdozbiорze Byka. Oprócz paru słabych gwiazd Mały Lew zawiera również tajemniczy *Hanny’s Voorwerp*, czyli obiekt Hanny (<http://apod.nasa.gov/apod/ap080625.html>), odkryty przypadkowo przez entuzjastkę astronomii, Hanny van Arkel, w trakcie klasyfikacji galaktyk w projekcie Galaxy Zoo. (Zachęcamy do wzięcia udziału w badaniach: <http://www.galaxyzoo.org>.) Nie jest do końca jasne, czym jest ów zagadkowy zielony kłaczek – być może obserwujemy światło odległego kwazara odbite od gazu skupionego wokół małej galaktyki.

20 maja podziwiać będzie można *obrączkowe* zaćmienie Słońca (tj. takie, w którym Księżyc nie przesłania całej powierzchni Słońca, zostawiając widoczny w trakcie zaćmienia świetlny pierścień), obserwowalne w Chinach, Japonii, na Pacyfiku i w Stanach Zjednoczonych. Maj obfituje także w różnej jasności roje meteorów, z których szczególnie ciekawe wydają się dwa: najbogatszy w zjawiska rój  $\eta$ -Akwarydy (maksimum 6 maja, około 60 zjawisk na godzinę,

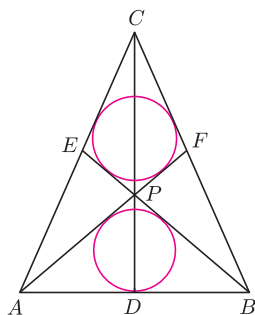
radiant w gwiazdozbiорze Wodnika), wywodzący się z resztek materii pozostawionych przez komętę Halleya, oraz  $\eta$ -Lirydy, niedawno odkryty i mało zbadany rój o radiancie w gwiazdozbiорze Lutni (aktywny 3–12 maja), związany z odkrytą w latach osiemdziesiątych komętą IRAS-Araki-Alcock. Niestety, w tym roku pechowo pełnia Księżyca wypada 6 maja, pozostaje jedynie mieć nadzieję, że nie będzie bardzo przeszkadzać w obserwacjach.

M. B.



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



**M 1348.** Na wysokości  $CD$  trójkąta równoramiennego  $ABC$  o podstawie  $AB$  dany jest punkt  $P$ . Proste  $BP$  i  $AP$  przecinają boki  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $E$  i  $F$ . Okrąg wpisany w trójkąt  $ABP$  przystaje do okręgu wpisanego w czworokąt  $PECF$ . Udowodnić, że okręgi wpisane w trójkąty  $ADP$  i  $BPC$  też są przystające.

Rozwiązanie na str. 15

**M 1349.** Wykazać, że nie istnieje funkcja  $f$  przekształcająca zbiór liczb dodatnich w siebie, spełniająca dla wszystkich dodatnich  $x, y$  nierówność  $(f(x))^2 \geq f(x+y)(f(x)+y)$ .

Rozwiązanie na str. 5

**M 1350.** Egzamin składa się z  $n$  pytań ( $n > 0$ ). Pewna liczba studentów przystąpiła do tego egzaminu. Wiadomo, że dla każdych dwóch studentów było przynajmniej jedno pytanie, na które obaj znali odpowiedź, ale dla żadnej pary studentów nie było tak, że obaj znali odpowiedzi na dokładnie te same pytania. Udowodnić, że do egzaminu przystąpiło co najwyżej  $2^{n-1}$  studentów.

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 811.** Druga prędkość kosmiczna  $v_{II}$  dla pewnej jednorodnej kulistej planety wynosi 3,14 km/s. Jaką prędkość w „nieskończoności” będzie miał pocisk wystrzelony z prędkością  $v_0 = 10$  km/s?

Rozwiązanie na str. 13

**F 812.** Dwie gwiazdy o masach  $m_1$  oraz  $m_2$  znajdują się w odległości  $l$ . Znaleźć okres ich ruchu po okrągłej orbicie wokół ich wspólnego środka masy.

Rozwiązanie na str. 14



# Ciąg Fibonacciego

Joanna JASZUŃSKA

Ciąg Fibonacciego definiujemy następująco:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1 \quad \text{oraz} \quad f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Każdy wyraz ciągu, począwszy od trzeciego, jest sumą dwóch poprzednich, kolejno otrzymujemy więc: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Spośród mnóstwa interesujących faktów związanych z tym ciągiem uzasadnimy kilka, które można udowodnić, odpowiednio ustawiając pewne figury.

1. Wykaż, że dla każdego naturalnego  $n \geq 1$  zachodzą następujące równości:

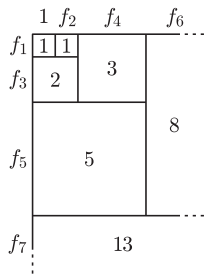
- (a)  $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$ ,
- (b)  $f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$ ,
- (c)  $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ .

2. Podziel płaszczyznę na kwadraty, z których każde dwa są różnej wielkości.

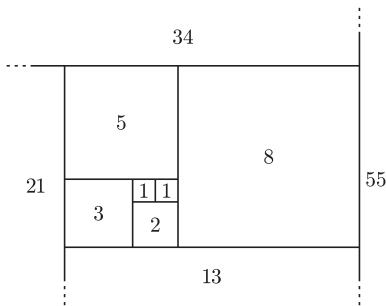
3. Podziel kwadrat na mniejsze kwadraty, z których każde dwa są różnej wielkości.

4. Na ile różnych sposobów można ułożyć chodnik o długości  $n$  i szerokości 1, mając do dyspozycji duży zapas płyt o rozmiarach  $2 \times 1$  oraz  $1 \times 1$ ?

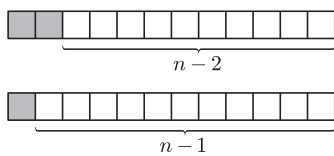
5. Wykaż, że  $f_{n+1}f_k + f_n f_{k-1} = f_{n+k}$  dla dowolnych liczb naturalnych  $n \geq 1, k \geq 2$ .



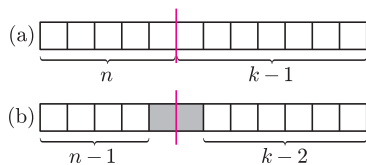
Rys. 1. Liczby wewnątrz kwadratów oznaczają długości ich boków.



Rys. 2



Rys. 3. Możliwe początki chodnika długości  $n$ .



Rys. 4. Cięcie chodnika długości  $n+k-1$  na części o długościach  $n$  oraz  $k-1$ .

## Rozwiązania

**R1.** Pewną liczbę kwadratów o bokach równych początkowym wyrazom ciągu Fibonacciego ustawmy jak na rysunku 1, po kolei dobudowując kwadraty na przemian po prawej stronie i na dole. Na każdym etapie tej konstrukcji powstaje prostokąt, bo  $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$  – następny kwadrat „pasuje” do dwóch poprzednich.

(a) Jeśli ostatni kwadrat dobudowano na dole i ma on bok długości  $f_{2n-1}$ , to cały prostokąt ma taką właśnie szerokość, a wysokość równą następnemu wyrazowi ciągu, czyli  $f_{2n}$ . Jednocześnie wysokość ta jest równa  $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1}$ .

(b) Analogicznie, jeśli ostatni kwadrat ustawiono po prawej i ma bok długości  $f_{2n}$ , to prostokąt ma szerokość równą  $f_{2n+1}$  i zarazem równą  $1 + f_2 + f_4 + \dots + f_{2n}$ .

(c) Jeśli jako ostatni ustawiono kwadrat o boku długości  $f_n$ , to prostokąt ma taką właśnie szerokość lub wysokość, a drugi z wymiarów równy  $f_{n+1}$ , więc ma pole  $f_n f_{n+1}$ . Jednocześnie pole to jest równe  $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2$ .  $\square$

**R2.** Zmodyfikujmy rysunek 1, ustawiając kwadraty o bokach równych  $f_1, f_2, f_3, \dots$  kolejno po prawej, na dole, po lewej, na górze, znów po prawej itd., jak na rysunku 2. Żądany podział płaszczyzny uzyskamy, dzieląc jeden z dwóch kwadratów o boku długości 1 tak, jak w zadaniu 3.  $\square$

**Wskazówka 3.** Podziały na 24 kwadraty i na 21 (na mniej się nie da) pokazano np. na stronie <http://mathworld.wolfram.com/PerfectSquareDissection.html>.

**R4.** Oznaczmy tę liczbę sposobów przez  $c_n$ . Dla  $n \geq 3$  na początku chodnika możemy położyć płytę  $2 \times 1$  (rys. 3), a następnie na  $c_{n-2}$  sposobów ułożyć resztę (chodnik o długości  $n-2$ ); możemy też zacząć od płyty  $1 \times 1$  i wtedy na  $c_{n-1}$  sposobów ułożyć resztę. Stąd  $c_n = c_{n-2} + c_{n-1}$  dla  $n \geq 3$ . Otrzymany wzór jest taki sam, jak dla ciągu Fibonacciego. Nietrudno sprawdzić, że  $c_1 = 1 = f_2$  oraz  $c_2 = 2 = f_3$ , uzyskujemy więc wniosek, że  $c_n = f_{n+1}$ .  $\square$

**R5.** Ile spośród chodników o długości  $n+k-1$ , takich jak opisano w poprzednim zadaniu, można rozciąć na chodnik o długości  $n$  (od lewej strony) oraz chodnik o długości  $k-1$  (po prawej stronie) bez rozcinania poszczególnych płyt (rys. 4(a))? Takich chodników jest tyle, na ile sposobów można ułożyć po lewej stronie chodnik długości  $n$ , a po prawej chodnik długości  $k-1$ . Z poprzedniego zadania wiemy, że możliwości tych jest po lewej  $f_{n+1}$ , po prawej  $f_k$ , więc łącznie  $f_{n+1}f_k$ .

Cięcie chodnika wymaga rozcinania płyty, gdy w miejscu podziału leży płyta  $2 \times 1$  (rys. 4(b)). Takich chodników jest  $f_n f_{k-1}$ : układamy od lewej kolejno chodnik długości  $n-1$ , następnie płytę  $2 \times 1$ , a po prawej chodnik długości  $k-2$ .

Wszystkich chodników, jak wiemy z poprzedniego zadania, jest  $f_{n+k}$  i każdy z nich da się rozciąć w opisany sposób lub nie, stąd  $f_{n+1}f_k + f_n f_{k-1} = f_{n+k}$ .  $\square$