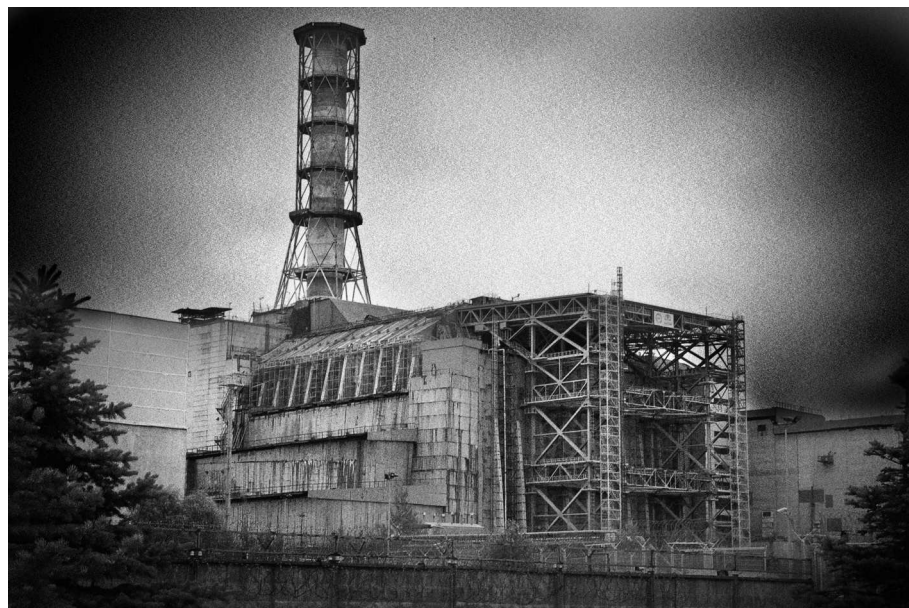




W następnym numerze



Czarnobyl 25 lat później

SPIS TREŚCI NUMERU 1 (452)

Matematyka w katowickim
Pałacu Młodzieży
Dorota Kolany str. 1


Figury Chładniego
Agata Drewniak str. 4


Prosto z nieba:
Żarłoczna czarna dziura
Michał Bejger str. 5

Metoda wyznaczników
Jakub Radoszewski str. 5

Pomiar bez oddziaływania
Krzysztof Drachal str. 6

Zasada Cavalieriego
Jarosław Górnicki str. 8


 Poziom ekspresji ważny
nie tylko w sztuce
Magdalena Fikus str.10

 Jak zrobić fleksagon?
Agnieszka i Tamara Janiuk str.11

Gramy na kumulację.
Kilka uwag o grze w *Lotto*
Bolesław Kopociński str.14

Łącąc przestrzenny (11):
Jak wyjść z dżungli?
Michał Kieza str.16

Informatyczny kącik olimpijski
(48): Zliczanie prostokątów
Adam Karczmarz str.17

 Najprostszy silnik
elektryczny
Stanisław Bednarek str.18


 Zadania str.19

Aktualności str.20

O podatku Belki
Jerzy Zabczyk str.21

Klub 44 str.22

Styczeń
Agnieszka Majczyna str.24

 Najkrótsza łamana
Joanna Jaszewska str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk, Diana Gawronkiewicz / Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Fran-Press: www.franpress.pl, infolinia 801-679-466

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2012 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** Zamówienia na prenumeratę przyjmują Zespoły Prenumeraty właściwe dla miejsca zamieszkania klienta do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty; www.prenumerata.ruch.com.pl

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH S.A. Biuro Kolportażu – Zespół Obrotu Zagranicznego, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33 Tel. 48 22 532 88 23, 532 88 16; www.ruch.pol.pl

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:

SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;

w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;

w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;

kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Matematyka w katowickim Pałacu Młodzieży

Dorota KOLANY



W Pałacu Młodzieży w Katowicach działa od lat Pracownia Matematyki (aktualnie, od jakiegoś czasu, Pracownia Matematyki i Informatyki). Prowadzone tam są przede wszystkim cotygodniowe zajęcia stałe (kółka zainteresowań w grupach wiekowych), ale oprócz tego w ramach swojej działalności Pracownia organizuje konkursy, warsztaty, pokazy, wykłady dla dzieci i młodzieży w różnym wieku (począwszy od dzieci z klas IV szkół podstawowych, a kończąc na młodzieży klas maturalnych) oraz letnie, kilkunastodniowe, obozy matematyczne zwane Letnimi Szkołami Matematyki.

Wielu uczestników Pracowni uczęszcza na zajęcia przez kilka lat. Niektórzy pozostają w Pracowni aż do ukończenia szkoły. Jeszcze inni wspierają pracownię dłużej: współorganizują konkursy, wygłaszają wykłady, uczestniczą w pracach jury różnych organizowanych przez Pracownię konkursów.

Zastanawiać się można, co powoduje, że młodzież wiąże się z Pracownią na aż tak długo? Otóż ważne jest nie tylko, co się robi, ale również w jakiej atmosferze. Po pierwsze, uczestnicy są w grupie osób o podobnych zainteresowaniach. Mogą się wymieniać pomysłami, mogą dyskutować. Osobiście doświadczają, że zajmowanie się matematyką może sprawiać przyjemność. Po drugie – co wydaje się istotniejsze – zajęcia są całkowicie dobrowolne. Tym sposobem korzystają z nich tylko ci, którzy tego naprawdę chcą.

Może czas na kilka słów o tym, co Pracownia oferuje uczestnikom zajęć.

Zacznijmy od najmłodszych, czyli czwartoklasistów. Dzieci są z natury swojej ciekawe świata, chcą odkrywać i tworzyć. Lubią myśleć i mają ciekawe pomysły. Nie wiedzą jeszcze, co je interesuje, albo – ujmując rzecz dokładniej – interesuje je wszystko. U dzieci w tym wieku szkoła wyrobiła już błędny odruch, że matematyka oznacza przede wszystkim sprawne wykonywanie obliczeń. Jakież jest ich zdziwienie, kiedy przychodzą na zajęcia, a na nich zamiast długich słupków są zagadki, łamigłówki, gry... Na wszystkich zajęciach dla uczniów szkół podstawowych te elementy stanowią podstawę. Nowe wiadomości, narzędzia i metody pojawiają się mimochodem.

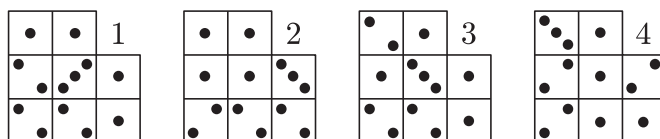
Gimnazjaliści uczą się o wiele więcej. Podejmują się rozwiązywania naprawdę trudnych dla nich problemów (choć nadal lubią się bawić).

Dla młodzieży ze szkół ponadgimnazjalnych przewidziane są przede wszystkim zajęcia tematyczne. W tym np. arytmetyka, kombinatoryka, elementy algebry i geometrii, analizy, topologii, logiki i teorii mnogości, teorii automatów. Przy czym zakres poruszanych zagadnień jest ustalany wspólnie z uczestnikami na bieżąco. Chciałoby się powiedzieć – „według potrzeb”.

Jako ilustracja – przykłady zadań (zaczynamy od tych dla najmłodszych):

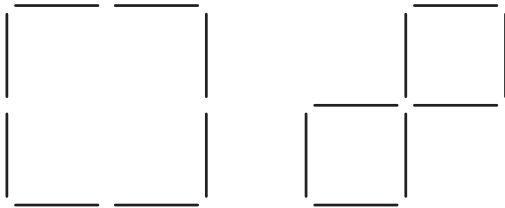
• Karol, Jacek i Bartek brali udział w zawodach. Chłopcy startowali w trzech konkurencjach: biegu na 50 metrów, skoku w dal i rzucie piłeczką. Za zajęcie I miejsca w każdej z konkurencji zawodnicy otrzymywali 3 punkty, za zajęcie II miejsca – 2 punkty, a za zajęcie III miejsca – 1 punkt. Ogólny wynik całych zawodów ustalono po dodaniu wyników z tych trzech konkurencji. W biegu na 50 metrów Jacek był pierwszy, a Bartek drugi. Bartek był pierwszy w rzucie piłeczką, a w ogólnej klasyfikacji był drugi. Karol był pierwszy w skoku w dal, ale w ogólnej klasyfikacji był trzeci. Ile punktów zdobyli chłopcy w każdej z konkurencji? Jaka była końcowa punktacja?

• Z jednego kompletu kamieni domina wzięto cztery kamienie i ułożono je cztery razy – za każdym razem w inny sposób – otrzymując układy z rysunku poniżej. Jakich kostek użyto?



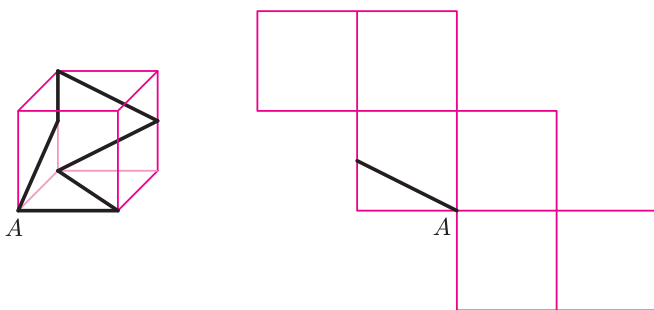
Na każdym z rysunków zaznacz, jak były te kostki ułożone.

- Układamy z zapalek takie figury, które po rozcięciu wzdłuż wszystkich linii utworzonych przez zapalki rozpadłyby się wyłącznie na kwadraty, przy czym takie dwa kwadraty muszą mieć albo wspólny bok, albo róg. Przy użyciu dokładnie 8 zapalek można zbudować dwie takie figury – kwadrat o boku długości dwóch zapalek lub figurę, która rozpada się na 2 kwadraty o bokach długości jednej zapalki.



Na ile kwadratów może rozpaść się figura utworzona z 16 zapalek?

- W talii kart powinny być 52 karty, ale, niestety, kilku kart brakuje. Jeśli rozdać je sześciu osobom po równo, zostaną trzy karty, jeśli rozdać je po równo czterem osobom, zostanie jedna karta, a jeśli rozdać je siedmiu osobom, zostaną znowu trzy karty. Ile kart brakuje w tej talii?
- Największy wspólny dzielnik trzech różnych liczb naturalnych dodatnich jest równy 7. Jaka jest najmniejsza wspólna wielokrotność najmniejszych możliwych takich trzech liczb?
- Na powierzchni sześcianu narysowano pewną linię, zaczynając w punkcie A i kończąc w tym punkcie. Na zamieszczony poniżej siatce sześcianu zaznaczono już początkowy odcinek tej linii. Dorysuj pozostałe odcinki tej linii.



- Dodajemy pięć kolejnych liczb wybranych spośród liczb $1, 2, 3, \dots, 20$.
 - a) Czy otrzymana suma może być podzielna przez 19? Jaki największy możliwy dzielnik pierwszy może mieć taka suma?
 - b) Czy otrzymana suma może być kwadratem liczby parzystej? A sześcianem liczby parzystej?
 - c – trudniejsze) Zbadaj podzielność przez liczbę pierwszą p sum $2k - 1$ kolejnych liczb naturalnych ze zbioru $1, 2, 3, \dots, n$.

- Trzy przyjaciółki Ala, Ewa i Magda urządzały wspólne przyjęcie urodzinowe. Zapytane, jakie koszty poniosła każda z nich, odpowiedziały: Ala: 40% tego, co w sumie dwie pozostałe, Ewa: 50% tego, co w sumie dwie pozostałe, Magda: 60% tego, co w sumie dwie pozostałe. Czy wszystkie mogły mówić prawdę? (lub trudniej – ile z nich na pewno kłamało?)

- W pola szachownicy o wymiarach $n \times m$ wpisujemy na przemian liczby 1 i -1 , a następnie obliczamy iloczyny liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie.
 - a) Czy dla n i m nieparzystych wśród otrzymanych iloczynów przynajmniej jeden będzie liczbą ujemną?
 - b) Czy dla n parzystej, a m nieparzystej można tak umieścić liczby, by dokładnie jeden z iloczynów był liczbą ujemną?
 - c) Czy dla n i m parzystych można tak umieścić liczby, by wśród uzyskanych iloczynów była parzysta liczba liczb dodatnich?

- W finałowym spotkaniu grało sześciu graczy, każdy z każdym. Było dokładnie 5 remisów i po podliczeniu uzyskanych punktów wyłoniono jednego zwycięzcę. Za każdą wygraną partię zawodnik otrzymywał 5 punktów, za remis 3 punkty, a za przegraną nie otrzymywał nic. Czy zwycięzca mógł nie wygrać żadnej partii? Czy każdy z graczy uzyskał inną liczbę punktów?

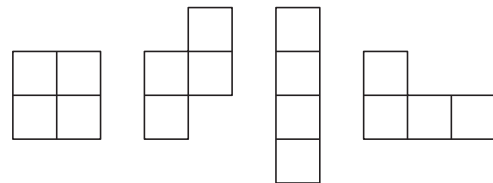
- Wypełniono liczbami tablicę $n \times m$ (o n wierszach i m kolumnach) w ten sposób, by iloczyn liczb w każdej kolumnie był liczbą dodatnią, natomiast w każdym wierszu – liczbą ujemną. Czy wypełnienie takie jest możliwe dla:

- a) $n = 5$ i $m = 4$,
- b) $n = 14$ i $m = 5$,
- c) $n = 12$ i $m = 12$.

- Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z czterech różnych kolorów, przy czym każdy kolor został wykorzystany. Czy zawsze istnieje prosta, której punkty są co najmniej w trzech kolorach?

- Czy siatka pewnego czworościanu może być kwadratem? A trójkątem prostokątnym?

- Prostokąt o polu $4k$, gdzie $k > 2$ jest liczbą całkowitą, został całkowicie wypełniony figurami dokładnie dwóch różnych kształtów spośród narysowanych poniżej.



Czy istnieje taki prostokąt i takie jego wypełnienie, że – po zamianieniu jednej z figur na figurę o innym kształcie – powstałym kompletem znów będzie można ten prostokąt wypełnić?

Na zakończenie przytoczmy kilka wypowiedzi byłych uczestników Pracowni:

Zajęcia w Pracowni dają motywację i możliwości do rozwoju zainteresowań związanych z matematyką. O ile w szkole matematyka jest zwykłym przedmiotem, a młodzież uczona jest podstaw, które każdy musi znać, o tyle w Pracowni traktowana jest jako źródło rozrywki, a z innymi uczestnikami o podobnych zainteresowaniach można rozwiązywać problemy, a nieraz także i współzawodniczyć.

student matematyki i informatyki Uniwersytetu Warszawskiego

Może trochę przewrotnie to zabrzmiało, ale uczestnictwo w zajęciach prowadzonych przez Pracownię, zrzeszając ludzi odznaczających się szerokimi horyzontami, pozwoliło mi nabyć pewności siebie i znacznie pogłębiło mój potencjał intelektualny. I choć medycyna, którą wybrałem na dalszą drogę życia, z pozoru z matematyką nie ma wiele wspólnego, ręczę, że umiejętność logicznego rozumowania jest z nią nieodzownie związana.

student medycyny Śląskiego Uniwersytetu Medycznego

Matematyka w szkole – każdy mniej więcej wie, jak wygląda: trochę lepiej, trochę gorzej, ale zwykle dość szablonowo (na szczęście nie zawsze). Matematyka w Pałacu – niby ta sama, ale jednak pokazana pod nieco innym kątem i – co bardzo ważne – w sympatycznej atmosferze, wygląda inaczej – ciekawiej, bardziej różnorodnie i przystępnie (co, oczywiście, nie oznacza niskiego poziomu merytorycznego, a wprost przeciwnie). I choć wciąż oczywiście pozostaje Nauką przez duże N, opisującą zagadnienia trudne i złożone, to ich zgłębianie w rozmaitych okolicznościach, często podczas zajęć plenerowych, w formie zabawy czy rywalizacji, pozwala odkryć, że rzeczy skomplikowane mogą być zarazem dobrze pojęte, a proces ich pojmowania po prostu fajny.

informatyk, absolwent Politechniki Śląskiej

Oczywistym jest, że zwłaszcza w czasach szkolnych w Pałacu co tydzień (a nawet częściej) zaszczepiano mi dawkę ciekawej matematyki, a także inteligentnej rozrywki. Ale tym, co najbardziej związało mnie z Pracownią, jest poczucie wspólnoty z ludźmi mającymi podobne zainteresowania, która to wspólnota przetrwała poza okres nauki w szkole. Już wcześniej zamieniła się w pewnego rodzaju sztafetę pokoleń, gdzie w liceum pomagaliśmy organizować konkursy dla podstawówek, na studiach dla liceów, magistranci i doktoranci przyjeżdżają z krótkimi prelekcjami na zajęcia, a pracownicy naukowci wychowani w Pracowni oceniają prace uczniów i prowadzą wykłady na pracownianym opus magnum, czyli Ogólnopolskim Sejmiku Matematyków.

informatyk, absolwent Uniwersytetu Jagiellońskiego

Zajęcia przyczyniły się w ogromnym stopniu do rozwoju naszych zainteresowań matematycznych. Uważaliśmy je także za bardzo atrakcyjne towarzystwo. Poza tym, po wielu latach od naszych ostatnich zajęć w grupie licealnej w Pałacu nadal czujemy się związani z Pracownią.

małżeństwo matematyków, absolwenci Uniwersytetu Śląskiego

Po raz pierwszy do Pracowni Matematyki trafiłam 10 lat temu. Cotygodniowe zajęcia były świetną okazją do poszerzenia wiedzy i rozwinięcia umiejętności logicznego myślenia. Sprawily, że matematyka nie nudziła, lecz coraz bardziej mnie fascynowała. Bardzo cenię poznanych w Pracowni ludzi: za inteligencję, poczucie humoru, sposób patrzenia na świat. Cieszę się, że mogłam dorastać w ich towarzystwie.

studentka matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

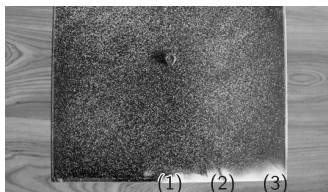
Figury Chladniego

Ernst Florenz Friedrich Chladni (1756–1827), niemiecki fizyk, muzyk i lutnik, a także badacz meteorów. Z racji swoich badań nad prędkością dźwięku i falami stojącymi zwany ojcem akustyki.

Figury Chladniego są odzwierciedleniem „wyglądu” fali stojącej. Do ich wytworzenia potrzebna jest metalowa blaszka przymocowana do stabilnego statywu, piasek (polecany jest np. piasek dla szynszyli ze względu na jego drobne ziarna i niezbrylananie się) oraz smyczek.

Różnorodność figur Chladniego uwarunkowana jest różną częstotliwością drgań blaszki, które to drgania uzyskujemy poprzez pocieranie blaszki smyczkiem w różnych punktach na krawędzi. Figury te powstaną tylko wtedy, gdy wprawimy blaszkę w drgania o częstotliwości własnej oraz jej wielokrotnościach. W innym przypadku piasek rozsypie się chaotycznie po całej powierzchni. Ważne są również warunki brzegowe, czyli sposób przymocowania blachy do statywu, jak i sam jej kształt. W moim doświadczeniu został użyty kwadratowy „kawałek” stali, przymocowany do statywu w punkcie przecięcia się jego przekątnych.

Za każdym razem staramy się rozsypać piasek równomiernie po całej powierzchni blachy. Będziemy pocierać smyczkiem kolejno w trzech punktach zaznaczonych na zdjęciu obok. Pocierając smyczkiem stal w punkcie (1), (2) lub (3), otrzymamy, odpowiednio, obraz widoczny na zdjęciu 1, 2 lub 3.

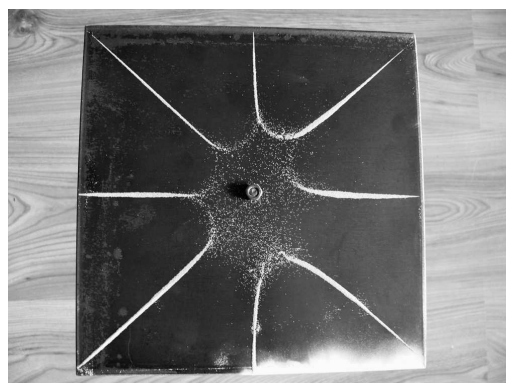


Zmianę częstotliwości możemy również uzyskać poprzez położenie palca na dowolnym punkcie blachy. Przykładowo, gdy przyłożymy go w około 1/4 przekątnej i potrzymamy smyczkiem w punkcie (1), obraz będzie wyglądał tak jak zdjęciu 4, natomiast gdy przyłożymy go w 1/4 linii łączącej środki lewego i prawego brzegu i potrzymamy smyczkiem w punkcie (3), otrzymamy obróconą poprzednią figurę (zdjęcie 5).

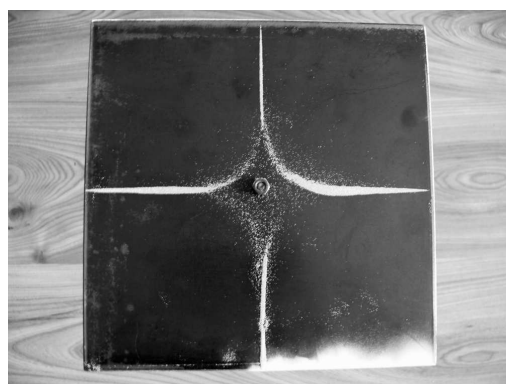
Figury Chladniego nie są jedynie efektowną wizualizacją drgań. Nawet w dzisiejszych czasach lutnicy stosują je przy budowie instrumentów muzycznych.



Fot. 1



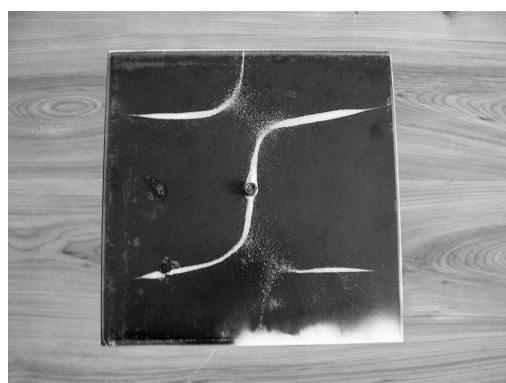
Fot. 2



Fot. 3



Fot. 4



Fot. 5

Agata DREWNIAK, I LO w Pszczynie, laureatka II nagrody XXVIII Sejmiku Matematyków, ogólnopolskiego konkursu organizowanego przez Pracownię Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach

Prosto z nieba: Żarłoczna czarna dziura



- [1] <http://www.astro.ucla.edu/~ghezgroup/gc/pictures/orbitsOverImage10.shtml>
[2] http://www.nasa.gov/mission_pages/swift/bursts/devoured-star.html

Dokładne pomiary ruchu gwiazd w okolicach centrum Naszej Galaktyki (obszaru Sgr A*, znajdującego się w gwiazdozbiornie Strzelca) pozwoliły w ciągu ostatniego dziesięciolecia na oszacowanie masy znajdującego się tam tajemniczego, niewidzialnego obiektu. Otrzymany wynik – 4 miliony mas Słońca – oraz niewielki dopuszczalny przez obserwacje rozmiar tego obiektu (porównywalny z rozmiarem Układu Słonecznego), a także jego bardzo mała jasność – a właściwie całkowity brak obserwacji dochodzącego stamtąd promieniowania – sugerują, że mamy do czynienia z tzw. *supermasywną* czarną dziurą [1]. Współczesna teoria powstawania struktur kosmicznych przewiduje, że każda galaktyka zawiera podobną, a często o rzędy wielkości masywniejszą czarną dziurę: rekordzistki mogą ważyć nawet miliard mas Słońca! Nie trzeba dodawać, że przebywanie zbyt blisko horyzontu czarnej dziury może skończyć się tragicznie – według modeli teoretycznych „zwykła”, podobna do Słońca gwiazda zostanie tam po prostu rozerwana na kawałki przez potężne siły pływowe. Astronomowie szacują, że zdarza się to w przeciętnej galaktyce średnio raz na 10 tysięcy lat, dlatego z wielkim zainteresowaniem przyjęto wiadomość, że przed paroma miesiącami satelita *Swift* zaobserwował [2] po raz pierwszy w historii dokładnie takie zjawisko.

Detektory *Swifta* zostały zaprojektowane do wykrywania błysków gamma – wysokoenergetycznych wybuchów związanych z powstawaniem supernowych i kolapsem grawitacyjnym, a pośrednio także z gwałtownymi obyczajami czarnych dziur. Rozbłysk nazwany Swift J1644+57 powstał w galaktyce odległej od naszej o ok. 4 miliardy lat świetlnych (widocznej z Ziemi w gwiazdozbiornie Smoka). W odróżnieniu od zwykłych, pojedynczych błysków gamma powtórzył się on parokrotnie, co skłoniło naukowców do zaproponowania hipotezy destrukcji gwiazdy orbitującej wokół czarnej dziury dwukrotnie masywniejszej od tej w Naszej Galaktyce. Część materii gwiazdy została natychmiast wciągnięta pod horyzont, a reszta utworzyła przejściowy dysk akrecyjny oraz wąską, relatywistyczną strugę (dżet) cząstek rozpędzonych do prędkości bliskiej prędkości światła. Odrobina szczęścia sprawiła, że to właśnie krótkotrwałe, wysokoenergetyczne promieniowanie dżetu udało się zarejestrować *Swiftowi*.

Michał BEJGER

Metoda wyznaczników

Jeśli chcemy rozwiązać układ równań – taki zwykły, dwa równania liniowe z dwiema niewiadomymi – za pomocą komputera, całkiem wygodnie jest użyć metody wyznaczników. Powiedzmy, że nasz układ wygląda tak:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

przy czym współczynniki a_i , b_i i c_i są całkowite.

Korzystając ze wspomnianej metody, należy obliczyć trzy wyznaczniki, które zwyczajowo oznacza się jako W , W_x i W_y :

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$
$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1,$$
$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Zauważmy, że jeśli wszystkie współczynniki były całkowite, to obliczone wyznaczniki także są całkowite. Obliczywszy te trzy wartości, mamy już właściwie gotowe rozwiązanie. Przypomnijmy: jeśli $W \neq 0$, to układ ma jedno rozwiązanie:

$$x = \frac{W_x}{W}, \quad y = \frac{W_y}{W}.$$

Jeśli $W = 0$ i $W_x = W_y = 0$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, a w przeciwnym przypadku ($W = 0$ i któryś z wyznaczników W_x, W_y jest niezerowy) układ jest sprzeczny, czyli nie ma rozwiązań.

Przykładowo, zobaczmy, jak działa podana metoda dla poniższego, trochę nietypowego układu równań:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ 0x + 0y = 1. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzamy, że wówczas $W = W_x = W_y = 0$, czyli układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Problem polega na tym, że trudno jest właściwie wskazać jakiegokolwiek z tych nieskończenie wielu rozwiązań. Coś tu nie gra!

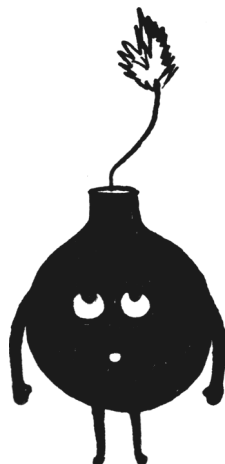
Najwyraźniej zapomnieliśmy o jakichś dodatkowych uwarunkowaniach wykorzystywanej metody. Jak w takiej sytuacji poradzi sobie informatyk? To proste: wpisze w ulubioną wyszukiwarkę internetową hasło „metoda wyznaczników” i przejrzy pierwszych kilka wyników wyszukiwania. Niestety, lektura tak znalezionych stron internetowych nie rozwiązuje naszej zagadki – najwyraźniej zastosowaliśmy metodę wyznaczników zupełnie poprawnie. A więc co jest nie tak?

Jakub RADOSZEWSKI

Pomiar bez oddziaływania

Krzysztof DRACHAL*

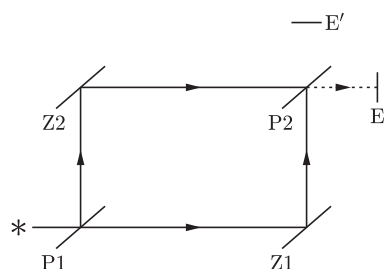
Bałagan w arsenale



Sztab generalny pewnego zamorskiego kraju zamówił pewną liczbę bomb uruchamianych fotodetektorami wykrywającymi fotony o pewnej charakterystycznej częstotliwości. Niestety, z uwagi na panujący w wojsku tego kraju bałagan okazało się, że nie wszystkie bomby są sprawne. Jeżeli bomba jest sprawna, to absorbuje ona padający na nią foton i wybuchu. Jeżeli zaś jest wadliwa, to uruchamiający zapłon detektor fotonów nie działa i nie wykrywa fotonów, więc padający na nią foton nie może wywołać eksplozji. Bomb nie da się rozebrać, można tylko oświetlać ich fotodetektory. Jak w tej sytuacji odróżnić bomby sprawne od wadliwych?

Na gruncie fizyki klasycznej (i zdrowego rozsądku) rozwiązanie jest bardzo proste, ale mało efektywne: należy oświetlić bomby odpowiednimi fotonami, a wtedy sprawne wybuchną (bo ich czujniki zadziałają), a wadliwe nie (bo ich czujniki nie wykryją fotonów). Zniszczymy jednak wtedy wszystkie działające bomby, a to z pewnością nie poprawi potencjału obronnego rozważanego kraju. Czy można wymyślić jakąś lepszą metodę, skoro informację o sprawności bomby uzyskuje się wyłącznie poprzez detekcję fotonu (lub jej brak)?

Dualizm korpuskularno-falowy



Rys. 1. Interferometr Macha-Zehndera.

Przypatrzmy się najpierw pewnemu zaskakującemu eksperymentowi, wykorzystującemu tzw. interferometr Macha-Zehndera, przedstawiony schematycznie na rysunku 1. Po raz pierwszy skonstruowali go Ludwig Mach (syn sławnego Ernsta Macha, autora tzw. zasady Macha, która stanowiła inspirację przy formułowaniu ogólnej teorii względności przez Einsteina) i Ludwig Zehnder (uczeń Wilhelma Röntgena). Jest to przyrząd, w którym promień światła jest rozdzielany na dwie części na płycie półprzepuszczalnej (światłdzielącej) P1. Zwierciadła Z1 i Z2 odbijają padające na nie promienie, które spotykają się na płycie półprzepuszczalnej P2. Na razie zakładamy jedynie falową naturę światła, z czego wynika, że dwa rozważane promienie ulegną przy spotkaniu interferencji. Rzeczywiście, na ekranie E zaobserwujemy obraz, ale na ekranie E' żadnego obrazu nie będzie. Dzieje się tak dlatego, że w kierunku E' obraz interferencyjny jest wygaszany. Ten wynik znanego eksperymentu można wyjaśnić tylko poprzez falową naturę światła. Na gruncie teorii czysto korpuskularnej, traktującej promień świetlny jako strumień cząstek, takie wyjaśnienie nie jest możliwe.

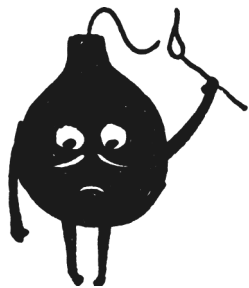
W historii fizyki długo toczono spory o to, czy światło jest falą, czy może ma naturę cząsteczkową (korpuskularną). Ostatecznie fizycy zgodzili się, że foton ma naturę dwojaką: w pewnych sytuacjach zachowuje się jak cząstka, w pewnych natomiast jak fala. Nazywa się to dualizmem korpuskularno-falowym. W 1924 roku Louis de Broglie postawił hipotezę, że taki dualizm dotyczy wszystkich fizycznych obiektów. W przypadku fotonu, który ma zerową masę, dualizm ten jest łatwy do zauważenia, w przypadku elektronów też daje się go wykryć, ale w przypadku obiektów o dużej masie aspekty natury falowej są tak słabe, że praktycznie niezauważalne w codziennym życiu. Postulat de Broglie'a stwierdza, że każdemu obiektowi materialnemu można przypisać falę materii o długości $\lambda = \frac{h}{p}$, gdzie h oznacza stałą Plancka, natomiast p pęd obiektu. Fala ta opisuje amplitudę gęstości prawdopodobieństwa znalezienia obiektu w danym miejscu w danej chwili.

Skoro cząstki materii mają własności falowe, odpowiedni interferometr Macha-Zehndera będzie działał także dla elektronów, które bez większych obiekcji wyobrażamy sobie jako cząstki (czyli zlokalizowane w przestrzeni porcje energii i pędu). Mało tego, wyniki eksperymentu, czyli liczba zliczeń cząstek w danym miejscu ekranu, pozostają niezmienione, nawet gdy wypuszczamy ze źródła elektrony lub fotony w coraz większych odstępach czasu (wtedy bowiem wypuszczamy raczej pojedyncze cząstki aniżeli strumień cząstek,

Przystępne omówienie postulatów mechaniki kwantowej można znaleźć w wielu książkach, np. w [1].

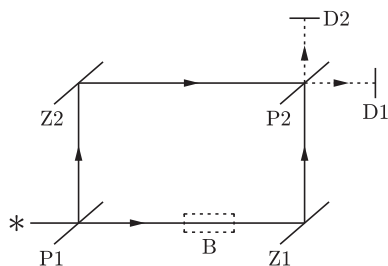
*Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska





łatwiejszy do wyobrażenia sobie jako pewna fala). A zatem nawet pojedyncza cząstka, a nie tylko ich strumień, przejawia własności falowe. Musimy jednak zdecydować, którą naturę cząstki obserwujemy: falową czy korpuskularną. Obecność w interferometrze płytki półprzepuszczalnej, w losowy sposób dzielącej początkową wiązkę cząstek, wskazuje na słuszność opisu falowego. Zgodnie z nim pojedyncza cząstka zachowuje się tak, jakby jednocześnie (!) przechodziła przez dwie różne (!) drogi. Jeżeli jednak umieścimy w interferometrze detektory stwierdzające, którą drogą cząstka „rzeczywiście” przeszła, trzeba będzie odwołać się do opisu korpuskularnego, a obraz interferencyjny zniknie. Fizycy mówią wtedy, że następuje *kolaps funkcji falowej*.

Fizyk kwantowy zrobi to lepiej



Rys. 2. Przyrząd Elitzura–Vaidmana.

Avshalom Elitzur i Lev Vaidman w 1993 roku zaproponowali, jak wykonać „pomiar bez oddziaływania”, który, w naszym przypadku, pozwoli stwierdzić sprawność części bomb bez ich niszczenia [2]. Na jednej z dwóch dróg, którymi może biec foton (przyjmijmy, że dolnej), umieszczamy testowaną bombę B. Za drugą płytką światłodzielącą umieszczamy dwa detektory fotonów, D1 i D2. Przyrząd ten jest przedstawiony schematycznie na rysunku 2.

Umieszczenie w przyrządzie sprawnej bomby jest równoważne dodaniu do układu detektora fotonów. Jeśli zaś bomba jest niesprawna, cały układ zachowuje się, jakby żadnego dodatkowego elementu w nim nie było.

W tym ostatnim przypadku mamy zatem urządzenie, które jest omawianym poprzednio interferometrem Macha–Zehndera. Z uwagi na interferencję fali elektromagnetycznej fotony będą docierać tylko do detektora D1. Prawdopodobieństwo zarejestrowania fotonu w detektorze D2 jest więc równe zero.

Jeżeli bomba jest sprawna, to działający detektor, umieszczony na drodze fotonu, wywołuje kolaps funkcji falowej, foton musi być opisywany jako cząstka, a nie fala, i z prawdopodobieństwem 50% będzie biegł drogą górną, a z prawdopodobieństwem 50% – dolną. Biegący dolną drogą foton spowoduje wybuch bomby, a zatem średnio połowa sprawnych bomb zostanie zniszczona w wyniku zastosowania omawianej procedury. Jeżeli natomiast foton biegł drogą górną, to w płytce światłodzielącej P2 nie mogły spotkać się dwie składowe fali prawdopodobieństwa. Nie zaszło zatem zjawisko interferencji, które w interferometrze Macha–Zehndera powoduje, że fotony rejestrowane są tylko w detektorze D1. Tymczasem, w omawianym tu układzie, obecność płytki P2 wymusza uwzględnienie falowej natury fotonu. Płytką P2 dzieli falę na dwie składowe, aż do chwili wykrycia fotonu przez jeden z detektorów D1 lub D2 (prawdopodobieństwo każdego z tych zdarzeń wynosi 50%), kiedy to znów następuje kolaps funkcji falowej. Ponieważ dla niesprawnej bomby wszystkie fotony trafiały do detektora D1, wykrycie jakiegokolwiek fotonu przez detektor D2 oznacza, że badana bomba jest sprawna.

Widzimy, że stosując opisaną wyżej procedurę, można zdiagnozować 25% sprawnych bomb bez ich niszczenia. Wynik ten można jeszcze ulepszyć kosztem większego skomplikowania metody – Czytelnika Wnikliwego odsyłamy do oryginalnej pracy Elitzura i Vaidmana. I choć przedstawiony powyżej wywód jest czysto teoretyczny, doświadczenia (już bez użycia bomb) wykonane przez zespół badaczy w Instytucie Fizyki Eksperymentalnej na Uniwersytecie w Innsbrucku w pełni go potwierdziły [3]. Do mało intuicyjnych przewidywań fizyki kwantowej należy zatem dorzucić jeszcze jedno: w pewnym sensie możliwy jest pomiar bez oddziaływania!

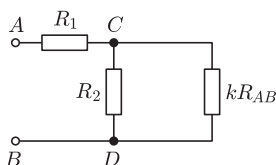
Bibliografia

- [1] R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, Prószyński i S-ka, 2010.
- [2] A.C. Elitzur, L. Vaidman, *Quantum mechanical interaction-free measurements*, Found. Phys. 23 (1993), 987–997.
- [3] P. Kwiat, H. Weinfurter, T. Herzog, A. Zeilinger, M.A. Kasevich, *Interaction-free measurement*, Phys. Rev. Lett. 74 (1995), 4763–4766.



Rozwiązanie zadania F 803.

Z symetrii układu wynika, że jeśli usunie się z niego pierwsze oczko, to opór układu będzie równy kR_{AB} . Zatem można przedstawić go w postaci pokazanej na poniższym rysunku:



Stąd wynika, że R_{AB} spełnia równanie:

$$R_{AB} = R_1 + \frac{R_2 k R_{AB}}{R_2 + k R_{AB}}.$$

Zatem:

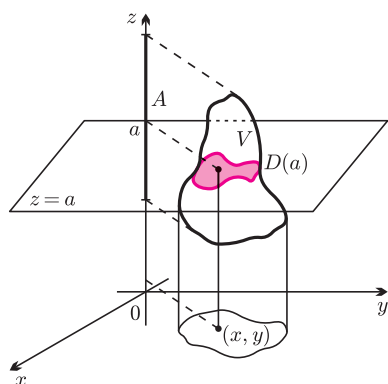
$$R_{AB} = \frac{R'}{2k},$$

gdzie

$$R' = k(R_1 + R_2) - R_2 +$$

$$+ \sqrt{4kR_1R_2 + (k(R_1 + R_2) - R_2)^2}.$$

(Odrzucamy ujemne rozwiązanie.)



Rys. 1

Zasada Cavalieriego jest prawdziwa również wtedy, gdy przekroje brył płaszczyznami nie są spójne. Mogą się składać z wielu części, ale muszą być na tyle „porządne”, żebyśmy umieli obliczyć ich pole.

Rozpatrzmy bryłę $V \subset \mathbb{R}^3$ w położeniu normalnym względem osi OZ . To oznacza, że na osi OZ istnieje taki przedział A , że płaszczyzna zadana równaniem $z = a$ przecina bryłę V wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in A$. Załóżmy ponadto, że każdy taki przekrój ma pole $D(z)$ (rysunek 1). Wówczas objętość bryły V wyrażamy wzorem, który (przekształcany zgodnie z twierdzeniem Fubinięgo) przyjmuje postać

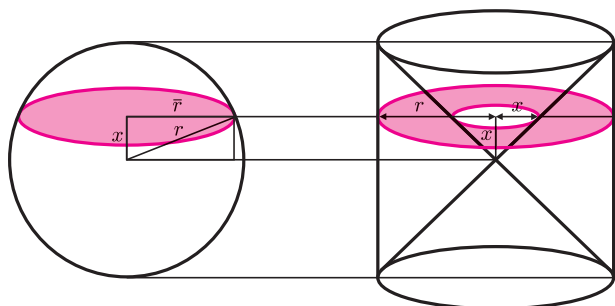
$$\begin{aligned} \mu_3(V) &= \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \int_A \left(\iint_{D(z)} 1 \, dx \, dy \right) dz = \\ &= \int_A \mu_2(D(z)) \, dz. \end{aligned}$$

Z końcowej postaci wzoru łatwo wywnioskować, że objętość bryły V zależy nie od kształtu powierzchni bryły, lecz od pola jej przekroju płaszczyznami $z = a$ dla $a \in A$. Tę myśl wyraża dokładnie **zasada Cavalieriego** (1635 r.): *jeśli dwie bryły w przecięciu z każdą płaszczyzną równoległą do wybranej dają przekrój o tym samym polu, to ich objętości są równe.*

Dzięki temu twierdzeniu obliczanie objętości bryły można czasem uprościć, odwołując się do znanych wyników – objętości pewnych szczególnych brył. Wymaga to pomysłowości, ale pozwala ominąć rachunek całkowy. Ideę tę zawdzięczamy Archimedesowi, który wykorzystał ją do obliczenia objętości kuli. Pokażemy pięć przykładów takiego zastosowania zasady Cavalieriego.

Przykład 1 (Archimedes, III w. p.n.e.)

Objętość kuli jest równa objętości opisanego na niej walca z wyciętymi stożkami (jak na rysunku 2),



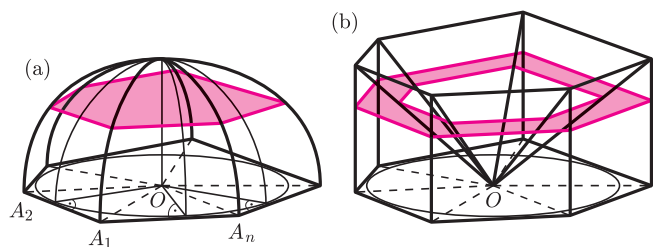
Rys. 2

gdyż, jak łatwo obliczyć, pola zaznaczonych kolorem przekrojów są równe. Zatem objętość kuli o promieniu r to

$$V_k = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Przykład 2 (T.M. Apostol, M.A. Mnasakanian, 2004)

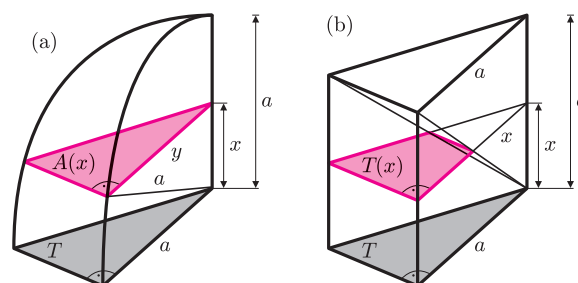
Podstawą n -kopyły opisaną na półsfery o promieniu $a > 0$ i środku O jest n -kątem $A_1 A_2 \dots A_n$ opisany na kole wielkim półsfery. Ścianami są fragmenty powierzchni bocznej walca o promieniu a , rozpięte nad trójkątami $\triangle A_i A_{i+1} O$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie przyjmujemy, że $A_{n+1} = A_1$ (patrz rysunek 3(a)).



Rys. 3

Aby obliczyć objętość takiej n -kopyły, wykorzystamy pomysł Archimedesesa. Na n -kopycie opisujemy graniastosłup, z którego wycinamy ostrosłup o wierzchołku O i podstawie będącej górną podstawą graniastosłupa, jak na rysunku 3(b).

Wykażemy, że przekroje obu brył płaszczyzną równoległą do podstawy na wysokości $0 \leq x \leq a$, zaznaczone kolorem na rysunku, mają równe pola. W tym celu rozpatrzmy odpowiadające sobie części kopyły i wielościanu, jak na rysunku 4.



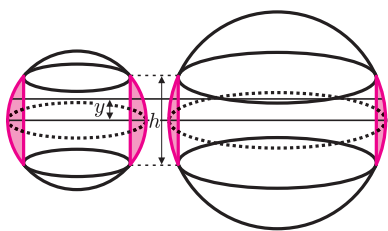
Rys. 4

Najpierw popatrzymy na rysunek 4(a): zacieniowane trójkąty są podobne, a skala podobieństwa (przy oznaczeniach z rysunku) to $\frac{y}{a}$. Ponieważ $x^2 + y^2 = a^2$, więc pole $A(x)$ jest równe $(1 - (\frac{x}{a})^2)T$.

Na rysunku 4(b) mały trójkąt otrzymany przez wyrzucenie kolorowego trapezu z przekroju na wysokości x jest podobny do trójkąta T , a skala podobieństwa to $\frac{x}{a}$. Pole trapezu $T(x)$ jest równe $(1 - (\frac{x}{a})^2)T$, czyli faktycznie $A(x) = T(x)$.

Wobec tego, na podstawie zasady Cavalieriego

$$\text{objętość } n\text{-kopyły} = \frac{2}{3} \cdot (\text{pole opisanego } n\text{-kąta}) \cdot a.$$



Rys. 5

Przykład 3 (Seki K-owa, XVII w.)

Objętość kulistego pierścienia o szerokości h (czyli kuli z wyciętym ze środka walcem, jak na rysunku 5) nie zależy od promienia kuli – jest taka sama dla kul dużych i małych!

Rzeczywiście, gdy przecinamy taki pierścień, wycięty z kuli o promieniu R płaszczyzną odległą od środka kuli o y , gdzie $0 \leq y \leq \frac{h}{2}$, to (przy oznaczeniach z rysunku) pole przecięcia jest równe

$$\pi(R^2 - y^2) - \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) = \pi\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

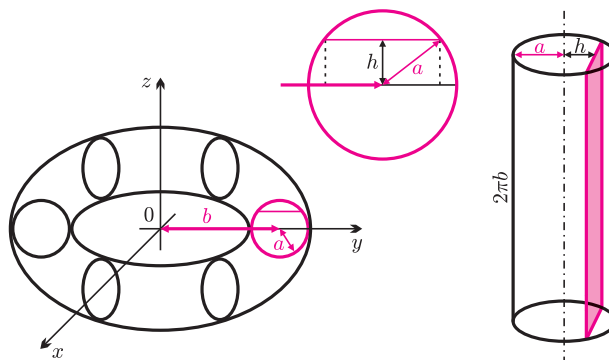
Zatem pola przekrojów nie zależą od promienia kuli, więc na mocy zasady Cavalieriego objętość także nie zależy (a jeśli ktoś lubi całkować, to obliczy, że jest równa $\frac{\pi}{6}h^3$). Wynik ten jest rozwiązaniem zagadki Martina Gardnera, podanej np. w *Delcie* 1/2011 pod tytułem *Kula i dziura*.

Przykład 4

Gdy torus z rysunku 6 przetniemy płaszczyzną $z = h$, gdzie $-a \leq h \leq a$, to pole otrzymanego pierścienia kołowego będzie równe

$$4\pi b\sqrt{a^2 - h^2} = 2\sqrt{a^2 - h^2} \cdot 2\pi b.$$

Ponieważ ostatni iloczyn to pole przekroju walca o promieniu podstawy a i wysokości $2\pi b$ płaszczyzną odległą o h od osi walca (rys. 6), więc objętość torusa jest równa objętości tego walca, czyli $2\pi^2 a^2 b$.



Rys. 6

Przykład 5 (H. Eves, 1991)

Istnieje wielościan, którego przecięcie z każdą płaszczyzną równoległą do danej ma takie samo pole jak przecięcie tej płaszczyzny z kulą.

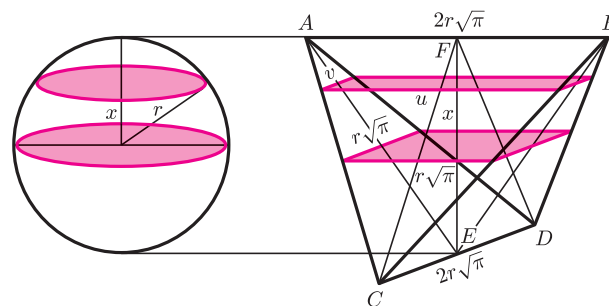
Ten warunek spełnia czworościan foremny o boku $2r\sqrt{\pi}$, gdzie r jest promieniem kuli. Oczywiście, trzeba go odpowiednio ustawić, co ilustruje rysunek 7. Przy oznaczeniach z rysunku, na mocy twierdzenia Talesa zastosowanego do trójkąta ABE , a następnie do trójkąta CDF , otrzymujemy

$$\frac{u}{r\sqrt{\pi}} = \frac{r+x}{r}, \quad \frac{v}{r\sqrt{\pi}} = \frac{r-x}{r},$$

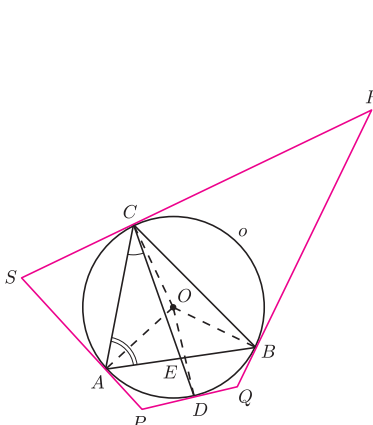
a stąd

$$u \cdot v = \pi(r^2 - x^2)$$

i już!



Rys. 7



Rozwiązanie zadania M 1336.

Oznaczmy przez O środek okręgu o , przez E zaś środek odcinka AB . Na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle SPQ + \sphericalangle SRQ = 180^\circ$. Rozważając czworokąty $APDO$ i $BRCO$, widzimy, że jest to równoważne temu, iż $180^\circ = \sphericalangle AOD + \sphericalangle COB$. Ale $\sphericalangle AOD = 2\sphericalangle ACE$, $\sphericalangle COB = 2\sphericalangle CAE$, więc żądana równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt AEC ma kąt prosty przy wierzchołku E . Wobec definicji punktu E jest to prawda wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest równoramienny o podstawie AB .



Rozwiązanie zadania M 1338.

Odpowiedź: $k = 1007$.

Najpierw wykażemy, że liczba $k = 1007$ ma żądaną własność. Podzielmy nasz zbiór $\{1, 2, \dots, 2012\}$ na dwuelementowe podzbiory

$$\{1, 670\}, \{2, 669\}, \dots, \{335, 336\}, \\ \{671, 1342\}, \{672, 1343\}, \dots, \{1341, 2012\}.$$

Jeśli wybraliśmy 1007-elementowy podzbiór, to któreś dwa jego elementy tworzą jeden z powyższych zbiorów (ich jest 1006). Zatem suma lub różnica tych elementów wynosi 671.

Teraz wykażemy, że liczby $k < 1007$ nie spełniają podanego warunku. Wystarczy to zrobić dla $k = 1006$. Rozważmy zbiór $\{2, 4, 6, \dots, 2012\}$. Sumy i różnice jego elementów są liczbami parzystymi, żadna więc nie może wynosić 671.

Poziom ekspresji ważny nie tylko w sztuce

Stale powracające pytanie do genetyka to pytanie o istnienie genu „na coś”, czyli genu warunkującego jakąś cechę, oraz o to, dlaczego genetycznie podobni (my między sobą, my z małpami czelkokszałtnymi), jednak jesteśmy tak różni. Nasza nauka powoli stara się na takie pytania odpowiadać.

Ostatnio zafascynowała mnie publikacja, w której porównywano już nie tylko geny, ale także ich produkty w różnych gatunkach ssaków i w różnych ich tkankach. Okazuje się, że ewolucję śledzić można nawet na poziomie narządu i tkanki za pomocą badań molekularnych, dających odpowiedź na pytanie, jak różni się tempo powstawania różnych cząsteczek, w różnych okolicznościach w dobie obecnej. Dzisiejsze różnice wynikają z drogi ewolucyjnej, którą przeszły gatunki, a jej przebieg w zakresie fragmentów organizmów wpływał na ich, dziś obserwowaną, pozycję ewolucyjną.

Zdefiniujmy najpierw produkty genów. Gen to materialna informacja o tym, że istnieje pewna cecha. Sam gen tej cechy nie tworzy, on po prostu jest, jak Himalaje! Aby informacja została zrealizowana, muszą powstać (przez wiele etapów przejściowych) dwa rodzaje cząsteczek – RNA i białko. Białko jest narzędziem wykuwającym cechę. Ewolucjonista molekularny może zatem badać budowę istniejących genów, jak też wytwarzanych na ich podstawie RNA i działających w organizmie białek. Nawet dla pełnienia tych samych funkcji (ogólnie definiowanych) zauważamy różnice w budowie i genów, i kodowanych przez nie RNA oraz powstających dzięki aktywności RNA białek. Cała ta analiza nie bierze pod uwagę dynamiki procesów realizacji informacji, tzn. ile i w jakim czasie powstaje cząsteczek RNA i ile białka. Jest oczywiste, że różnice tego rodzaju także odbijają się na końcowej funkcji. Można było przypuszczać, że będą różne w różnych gatunkach. Mniej oczywiste były różnice między narządami jako miarka ewolucji gatunku.

Okazało się, że jest to szerokie pole do nowych stwierdzeń i odkryć. Badania, o których się obecnie pisze, stały się możliwe dzięki stworzeniu nowych, subtelných, szybkich mikroskalowych badań dynamicznych cząsteczek RNA, posłańców informacji genetycznej. Zbadano średnią zawartość takich RNA w sześciu wyspecjalizowanych narządach ssaków, w 10 różnych gatunkach oraz w kontrolnych ptakach (kury). Szybkość wyrażania się informacji genetycznej (ekspresja genów) w planie ewolucyjnym była różna w zależności od narządu, rodzaju komórek, nawet chromosomów! Różnice tego rodzaju były znaczące w męskich jądrach, w mniejszym stopniu charakteryzowały tkankę nerwową, były mniej intensywne u gryzoni niż u małp i stekowców. Relatywnie duże różnice w ekspresji genów charakteryzują chromosom płciowy, X.

Tu wracam do osobistego wydarzenia. Dziennikarz pytał mnie dziś, czy prawdziwe jest oświadczenie piłkarskich menadżerów w Wielkiej Brytanii, że badać będą genetyczne uwarunkowania podatności na kontuzje potencjalnych zawodników. Czytelnik tego tekstu, mam nadzieję, już rozumie, że genetyka do takich badań jeszcze nie dojrzała. Trzeba by znać warianty wszystkich możliwych genotypów ludzkich. Trzeba by do tych różnic dopasować rodzaje powstających białek, *via* pośredniczące RNA. Trzeba by ocenić intensywność i tempo ekspresji określonych, często jeszcze nierozpoznanych funkcjonalnie, genów. Te badania powinny objąć przynajmniej kilkaset genów i odpowiednie liczby cząsteczek RNA i białek. A cały czas w pamięci trzeba by mieć fakt, że nasze cechy są tylko w 50% wynikiem działania genów – reszta to bardzo ogólnie rozumiane środowisko.

Moja rada dla piłkarzy brytyjskich: marsz na kolejny trening!!!

Magdalena FIKUS



mała delta

Jak zrobić fleksagon?

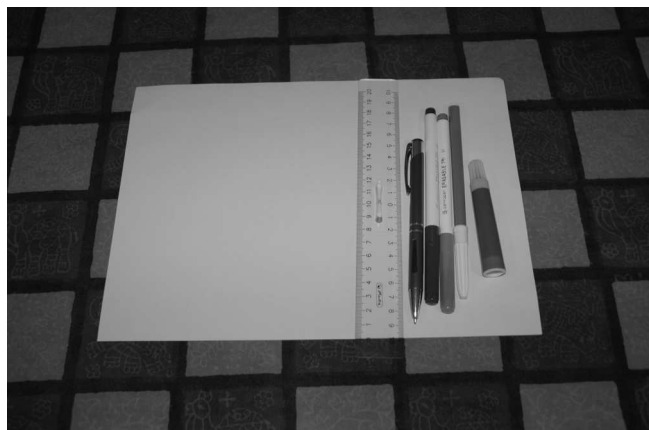
Fleksagony to rodzina figur, które odpowiednio złożone z płaskiej kartki papieru mogą wskutek obracania pokazać nam cztery lub więcej „twarzy” (zamiast dwóch).

Najczęściej spotykane są fleksagony płaskie, o ściankach kwadratowych lub prostokątnych. Po odpowiednim pokolorowaniu i ozdobieniu, obracany cyklicznie fleksagon ukazuje nam swoje ukryte ścianki. Ścianki fleksagonu mogą też być trójkątne lub wielokątne, a liczba ukrytych „twarzy” może być różna (na przykład heksafleksagon ma ich sześć).

Odkrywcą fleksagonu był brytyjski matematyk, Arthur H. Stone, który w latach 30. ubiegłego wieku studiował na uniwersytecie w Princeton. Wraz z kolegami, m.in. z późniejszym noblistą fizykiem Richardem Feynmanem, założyli nawet klub miłośników fleksagonu, dla uczczenia jego niezwykle ciekawych własności topologicznych. Popularyzatorem fleksagonu był Martin Gardner.

Tutaj przedstawimy sposób wykonania fleksagonu przestrzennego o czterech „twarzach” o kształcie sześciokątów.

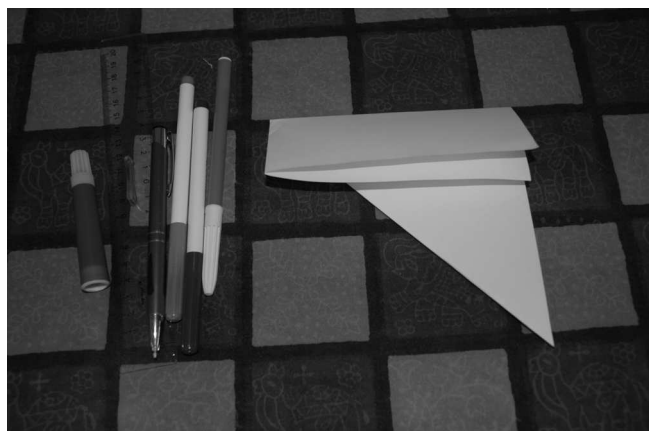
Instrukcja filmowa wykonania takiego fleksagonu, opracowana przez dr. Arvinda Gupta z uniwersytetu w Pune, znajduje się na YouTube, <http://www.youtube.com/watch?v=kFuyXW10bLw>



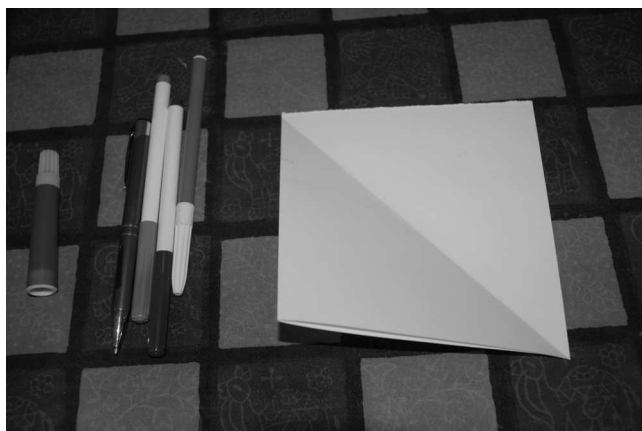
1. Można go zrobić z pojedynczej kartki papieru, bez użycia nożyczek ani kleju.



2. Bierzemy kartkę formatu A4 i składamy ją na pół, stykając krótsze boki.

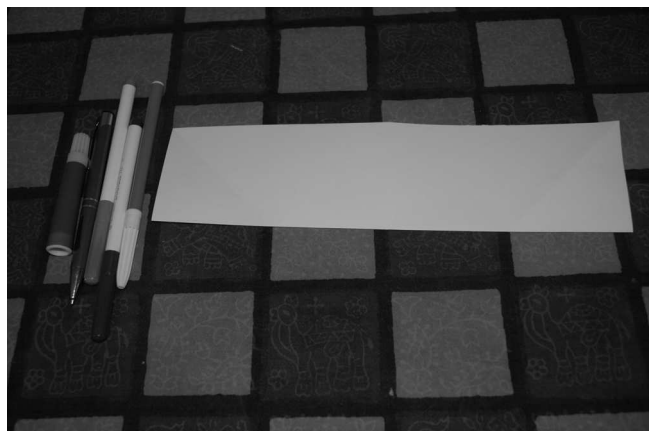


3. Zaginamy jeden róg, a następnie zginamy i odrywamy pozostały prostokąt, tak aby powstał trójkąt równoramienny.

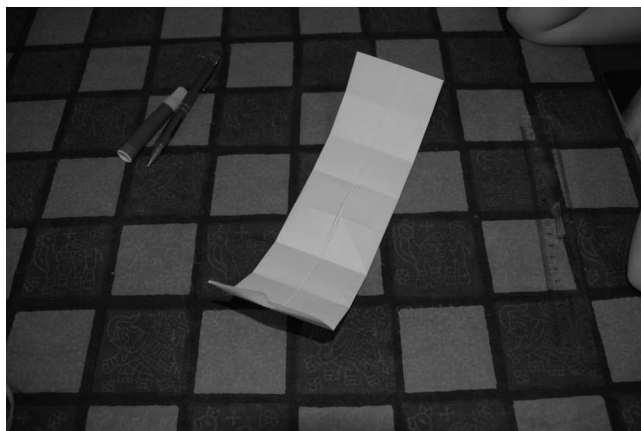


4. Rozkładamy kartkę i zginamy z powrotem na pół, tym razem stykając dłuższe boki prostokąta.

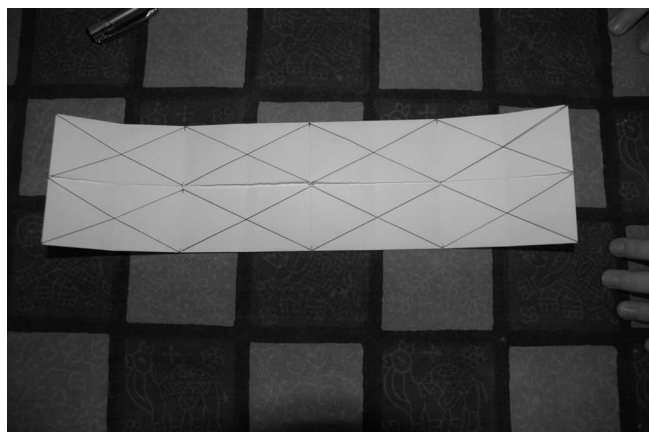
Warsztaty fleksagonowe cieszyły się ogromnym powodzeniem w stoisku Centrum Fizyki Teoretycznej PAN na Pikniku Naukowym w Warszawie. Nawet małe dzieci, z niewielką pomocą dorosłych, mogą wykonać tego typu zabawkę i cieszyć się odkrywaniem jej niezwykłego kształtu.



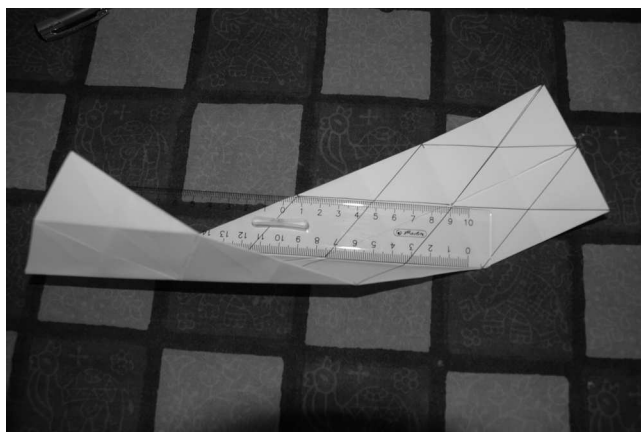
5. Rozkładamy jeszcze raz i znów składamy, tym razem zginając do środka połówki długich prostokątów.



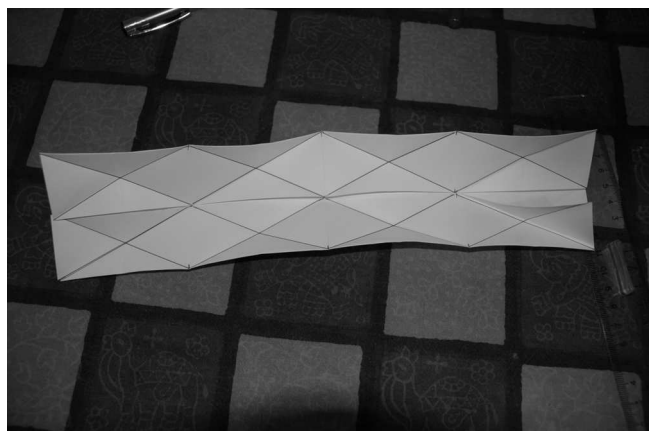
6. Teraz zginamy do środka krótsze boki prostokątów, z każdej strony po 3 razy. Powstanie w ten sposób pasek, w którym zgięcia utworzą 8 małych prostokątów (16 kwadracików), w dwóch rzędach.



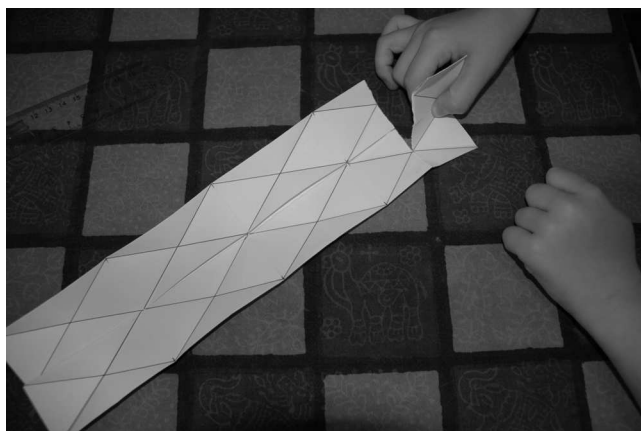
7. Bierzymy ołówek i linijkę i rysujemy przekątne w każdym z 8 poziomych prostokątów.



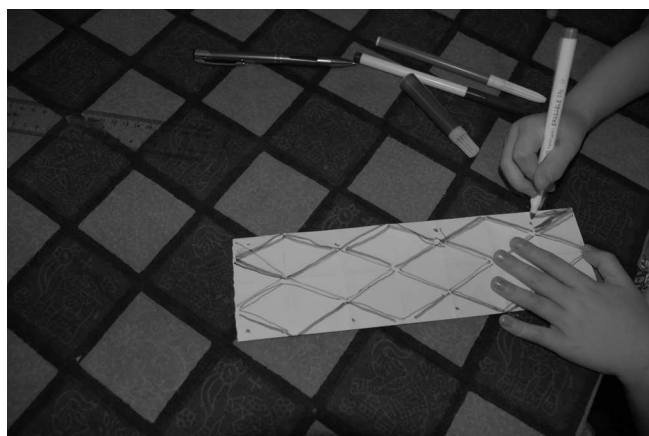
8. Następnie za pomocą linijki mocno zginamy pasek wzdłuż wszystkich dziesięciu narysowanych linii.



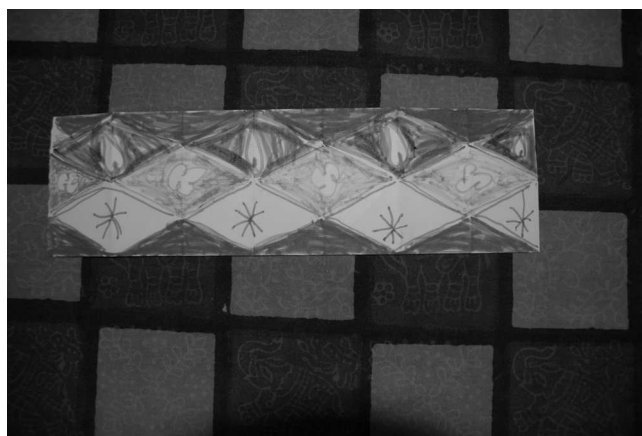
9. Oto jak wygląda kartka po zrobieniu wszystkich zagięć.



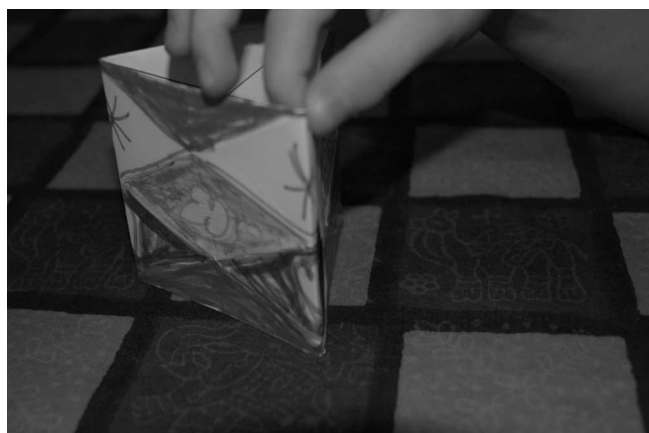
10. Odrywamy wzdłuż krótszego boku paska jeden pionowy prostokąt, tak aby pozostało ich 7.



11. Malujemy go przepięknie.



12. Na przykład tak.



13. Zwijamy fleksagon, wkładając jeden brzegowy pionowy prostokąt w przeciwległy do niego, i formujemy graniastosłup o kształcie pryzmatu.



14. Następnie zaginamy do środka trójkąciki utworzone przez zgięcia papieru, tak by otrzymać sześciokątne ściany.



15. Zginamy do środka romby będące górnymi i dolnymi częściami tych sześciokątnych ścian.



16. Fleksagon gotowy, więc obracamy go, aby pokazał każdą ze swych „twarzy”.



Małą Deltę przygotowały Agnieszka i Tamara JANIUK

Gramy na kumulację. Kilka uwag o grze w *Lotto*

Bolesław KOPOCIŃSKI*

Organizatorzy gier liczbowych typu lotto przeznaczają sporą część dochodu na zysk i koszt pozyskania dochodu i ten fakt sprawia, że wiele osób powstrzymuje się od gry, a dopiero mechanizm kumulacji powoduje zainteresowanie grą. Dla organizatorów gier kumulacja jest tylko formą odłożenia wypłaty, przeto nic na niej nie tracą, natomiast nowi grający, oczekujący zysku z podziału kwoty odłożonej, grają przeciw stałym graczom.

Gra. Przyjmijmy, że w grze uczestniczy N osób, a stawka wynosi 1 złoty. Dochód N dzieli się na części: $f_1 N$ – część wzięta przez organizatora, $f_2 N$ – pula wygranych I stopnia (szóstek), $f_3 N$ – pula wygranych niższego stopnia. Gdy w danej grze szóstka nie padnie, ta druga część przenosi się na kolejną grę i mamy pierwszą kumulację. Brak szóstki w kolejnych grach daje sensacyjne niekiedy serie kumulacji. Pojawienie się szóstki w grze przerywa ciąg kumulacji, jest chwilą swoistej odnowy w ciągu gier.

W *Lotto* mamy dwa mechanizmy losowe: wybór szóstki M przez maszynę i wybór szóstki S przez gracza. Można założyć, że oba te losowania są niezależne. Rozkład M jest jednostajny:

$$P(M = \omega) = p = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

na zbiorze wszystkich możliwych szóstek ω wybranych spośród 49 liczb, natomiast $P(S = \omega) = p_\omega$ zależy od upodobań graczy. Ten drugi rozkład może być poznawany jedynie przez statystyków. Prawdopodobieństwo koincydencji wynosi

$$P(M = S) = \sum_{\omega} \sum_{\sigma} \mathbf{1}(\omega = \sigma) P(M = \omega) P(S = \sigma) = p.$$

Liczba szóstek. Niech X_N oznacza liczbę szóstek w grze przy udziale N osób. Jeśli założyć, że grający losują liczby wzajemnie niezależnie i mają określone predylekcje do liczb, ale nie mają ich do układów, to

$$\begin{aligned} P(X_N = k) &= \sum_{\omega} P(M = \omega) P(X_N = k | M = \omega) = \\ &= p \sum_{\omega} \binom{N}{k} p_{\omega}^k (1 - p_{\omega})^{N-k} \approx \\ &\approx p \sum_{\omega} \frac{(N p_{\omega})^k}{k!} \exp(-N p_{\omega}), \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo powstania kumulacji wynosi $P(X_N = 0)$. Oczekiwana liczba szóstek w grze jest stała, $E(X_N) = Np$, natomiast predylekcje zwiększają wariancję liczby głównych wygranych. Prosty rachunek daje wariancję

$$\text{Var}(X_N) = Np(1 - p) + N(N - 1)p \sum_{\omega} (p - p_{\omega})^2.$$

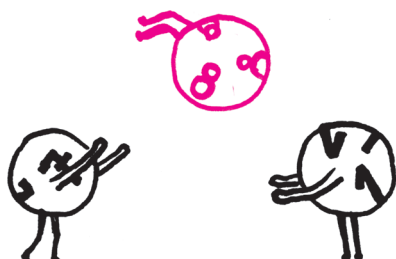
Ten fakt wyjaśnia, dlaczego w praktyce liczba wygranych I stopnia jest tak bardzo zmienna.

Gra na kumulację. Oznaczmy przez $p(N)$ prawdopodobieństwo pojawienia się przynajmniej jednej szóstki wśród N kuponów. Jest ono dość chimeryczne, zależy od liczb wylosowanych przez maszynę losującą i od upodobań grających do określonych liczb i ich konfiguracji. Gdyby gracze wybierali swoje typy jak maszyna, to mielibyśmy

$$p(N) = 1 - (1 - p)^N \approx 1 - e^{-pN}.$$

Odnotujmy, że $p(mN) = 1 - (1 - p(N))^m$.

Przyjmijmy, że skumulowane kwoty na nagrody I stopnia wynoszą K . Oczekiwaną wygraną W przypadającą na jeden kupon można znaleźć, dzieląc



Zapis $\mathbf{1}(\omega = \sigma)$ oznacza funkcję, która przyjmuje wartość 1, gdy $\omega = \sigma$, a w pozostałych przypadkach jej wartością jest 0.

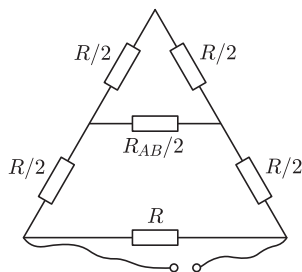


*Uniwersytet Wrocławski



Rozwiązanie zadania F 804.

Z symetrii układu wynika, że może on być przedstawiony w następujący sposób:



gdzie $R = a\rho$. „Wewnętrzny” układ składa się z nieskończonej ilości oczek, a jego opór wynosi $R_{AB}/2$ (z symetrii układu).

Zatem

$$R_{AB} = R \frac{R + \frac{RR_{AB}/2}{R + R_{AB}/2}}{R + R + \frac{RR_{AB}/2}{R + R_{AB}/2}}$$

Dodatnim rozwiązaniem powyższego równania jest

$$R_{AB} = R \frac{\sqrt{7}-1}{3} = a\rho \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

pulę nagród przez liczbę grających. Mamy

$$W = f_3 + \left(f_2 + \frac{K}{N}\right)p(N).$$

Wiadomo, że kumulacja powoduje wzrost liczby grających, a rzesza konkurentów do podziału kwoty odłożonej zmniejsza nasze szanse na sukces. Przy rosnącej liczbie grających prawdopodobieństwo kumulacji znika, $p(mN) \rightarrow 1$, gdy $m \rightarrow \infty$. Aby wejść do gry, należy trafnie przewidzieć liczbę grających. Statystyczną pewność (rozumianą jako zdarzenie o prawdopodobieństwie 0,95) tego, że wygrana I stopnia padnie, mamy dopiero przy N przekraczającym 42 miliony kuponów. Przy dużym N warunek $W \geq 1$ opłacalności gry implikuje $N \leq K/(1 - f_2 - f_3)$.

Wzrost liczby grających. Ocena wzrostu liczby grających w zależności od wielkości kumulacji jest trudnym problemem dla analityków gier. Przyjmijmy, że wzrost ten w ciągu kumulacji jest potęgowy: liczba grających w $n + 1$ kolejnych grach będzie równa N, aN, a^2N, \dots, a^nN . Pula nagród I stopnia przy n -tej kumulacji wynosi

$$f_2N(1 + a + a^2 + \dots + a^n) = f_2N \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Oczekiwana wygrana w n -tej kumulacji wynosi więc

$$W_n = f_3 + f_2 \frac{1 - a^{n+1}}{(1 - a)a^n} p(a^nN).$$

Przypuśćmy teraz, że liczba grających jest proporcjonalna do kumulacji. Niech (N_n, K_n) , $n \geq 0$, oznaczają liczbę grających i kwotę kumulacji w serii. Ścisłe biorąc, jeśli przyrost liczby grających jest proporcjonalny (ze współczynnikiem proporcjonalności b) do funduszu szóstek, to zachodzą wzory rekurencyjne:

$$\begin{aligned} N_0 &= N, & K_0 &= 0, \\ N_n &= N_{n-1} + bK_n, & K_n &= K_{n-1} + f_2N_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Zwrot w n -tej grze wynosi

$$W_n^* = f_3 + f_2(1 + K_n/N_n)p(N_n), \quad n \geq 0.$$

Obliczenia. Przeanalizujmy czas czekania na korzystne wejście do gry. Obserwując częstość pojawienia się pierwszej kumulacji, wielkość $p(N)$ można próbować oszacować. Niepoprawny optymista, nie mając danych, może przyjąć, że jest ono równe 1.

Weźmy dla przykładu $f_1 = f_2 = 0,4$, $f_3 = 0,2$ i niech $N = \binom{49}{6}$, a wtedy $p(N) = 1 - e^{-1}$. Eksperymenty numeryczne pokażą, jak wzrost liczebności grających wpływa na czas wejścia do gry. Przy wzroście potęgowym szukamy chwili, kiedy po raz pierwszy jest $W_n \geq 1$. Obliczenia pokazują, że przy $1,1 \leq a \leq 1,4$ mamy $n \geq 3$, przy czym dla $a = 1,4$ mamy $p(a^3N) = 0,94$. Przy wzroście proporcjonalnym szansa na zwrot $W_n^* = 1$, gdy $b = 0,2$, pojawia się przy sześciu kumulacjach. Przy $b = 0,3$ liczba grających rośnie tak szybko, że w grze na kumulację nie ma miejsca na zysk.

Manipulacja. Organizator gry, zainteresowany wzrostem liczby grających, może modyfikować podział puli na nagrody tak, ażeby kwota skumulowana rosła szybko, ma więc narzędzie do manipulowania klientami. Eksperymentując wielkością puli nagród poszczególnych stopni, pozostawmy zysk organizatora bez zmiany, przeznaczymy $0,4N$ na wygrane niższego stopnia i $0,2N$ na wygrane I stopnia. Zmiana nie wpłynie na liczbę wygranych, natomiast podwoi wygrane niższych stopni i zmniejszy kwoty skumulowane. Teraz czas czekania na korzystną kumulację wydłuży się. Przy wzroście potęgowym i $p(N) = 1 - e^{-1}$, dla $a = 1,2$ otrzymujemy $n = 4$, przy $a = 1,3$ otrzymamy $n = 5$, itd. Trzeba jednak pamiętać, że kiedy liczba grających wzrasta gwałtownie, warunki do gry na kumulację mogą nie być osiągnięte, nim padnie szóstka. Dodajmy jeszcze, zanim przystąpimy do gry na kumulację, że gigantyczne wygrane mają małą użyteczność dla szczęśliwców. Ale jest to już inny problem.



Rozwiązanie zadania M 1337.

Zauważmy, że kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 8 daje resztę 0, 1 lub 4, więc suma dwóch kwadratów – resztę 0, 1, 2, 4 lub 5. Gdyby istniały liczby całkowite a, b, c spełniające równanie z treści zadania, to liczba $(a^{1006})^2 + (b^{1006})^2$ dawałaby przy dzieleniu przez 8 resztę 6, co jest niemożliwe.

Kącik przestrzenny (11) Jak wyjść z dżungli?

Każdy, kto był w dżungli lub chociaż widział ją w jakimś filmie, wie, że poruszanie się po niej jest, delikatnie mówiąc, dosyć uciążliwe. Stanowi to ogromny kłopot szczególnie wtedy, gdy ktoś się w niej zgubi i chce się jakoś wydostać. Nie dość, że nie wiadomo, w jakim kierunku iść, to w ogóle ciężko jest nam pokonywać przeszkody (a rozwiązania siłowe, takie jak maczeta, niewiele dają). Istnieje następujące zalecenie: wystarczy znaleźć strumień (co zresztą wcale nie musi być łatwe), a potem liczyć na to, że zaprowadzi nas on do większej rzeki, a ta, być może, do morza.

Podobnie jest z zadaniem pochodzącym z finału olimpiady rosyjskiej z 1994 roku – oto ono:

Punkt H przecięcia wysokości AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 czworościanu $ABCD$ leży wewnątrz tego czworościanu oraz jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $A_1B_1C_1D_1$. Dowieść, że czworościan $ABCD$ jest foremny.

Rysunek do tego zadania jest potworną płataniną kresek – zupełnie nic nie widać. Może się wydawać, że znajdujemy się w samym środku dżungli... Okazuje się jednak, że wystarczy uczynić jedno drobne spostrzeżenie (czyli wypatrzeć strumień), które zaprowadzi nas łatwo do celu. Zatem do dzieła!

Z poprzednich kącików wiemy już, że warto zrobić sobie kilka rysunków, na których będą tylko potrzebne nam kreski. No właśnie, tylko co narysować, a czego nie? Wydaje się, że potrzebujemy stosunkowo dużo kresek (rys. 1) i właściwie nie widać, jak wykorzystać fakt, że punkt H jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $A_1B_1C_1D_1$. Można tylko zobaczyć, że płaszczyzny wyznaczone przez dwie wysokości czworościanu $ABCD$ są płaszczyznami dwusiecznymi odpowiednich kątów dwusiecznych czworościanu $A_1B_1C_1D_1$, ale co zrobić potem?

Próbujemy więc dalej. Pamięamy również, że gdy nie wiemy, co zrobić w przestrzeni, to warto rozwiązać analogiczne zadanie na płaszczyźnie. No to rozwiążmy! Zakładamy, że ortocentrum danego trójkąta ostrokątnego jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt utworzony przez spodki jego wysokości i wtedy... No właśnie, niestety, na płaszczyźnie jest inaczej, bowiem zachodzi łatwe do udowodnienia

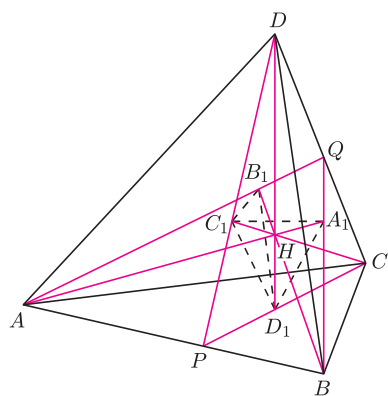
Twierdzenie 1. *Punkt H przecięcia wysokości AD, BE i CF dowolnego trójkąta ostrokątnego jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DEF (rys. 2).*

Tym razem nie uda się nam „zejść na ziemię”. Zadanie wydaje się niemożliwe do rozwiązania. Ale przecież nie ma rzeczy niemożliwych, są tylko takie, których jeszcze nie potrafimy!

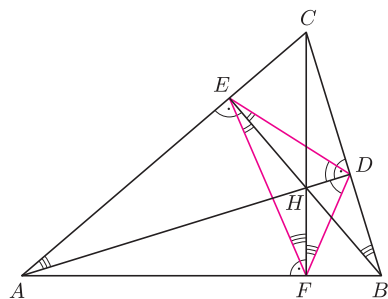
Mimo wszystko może ten płaski odpowiednik zadania do czegoś nam się przyda. Przyjrzyjmy się dokładniej płaszczyźnie ABQ na rysunku 3. Wysokości czworościanu AA_1, BB_1 oraz odcinek PQ są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABQ , a H jego ortocentrum. Korzystając teraz z twierdzenia 1, wnosimy, że H jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt A_1B_1P , czyli w szczególności $\sphericalangle A_1PH = \sphericalangle B_1PH$. Krawędź C_1D_1 leży w płaszczyźnie CDP i przecina odcinek PQ w punkcie T . Intuicja podpowiada nam, że, być może, zachodzi równość $\sphericalangle A_1TH = \sphericalangle B_1TH$. Może miary tych kątów płaskich są równe miarom odpowiednich kątów dwusiecznych między płaszczyzną CDP a płaszczyznami $A_1C_1D_1$ i $B_1C_1D_1$ (których równość łatwo jest uzasadnić)? Niestety, w ogólnej sytuacji wcale nie musi tak być. Czyżby intuicja nas zawiodła? Otóż nie – można znaleźć uzasadnienie. Mianowicie, jeśli płaszczyzna CDP jest płaszczyzną dwusieczną kąta dwusiecznego między płaszczyznami $A_1C_1D_1$ i $B_1C_1D_1$, to płaszczyzny te są symetryczne względem CDP . Ponadto z prostopadłości płaszczyzn ABQ i CDP wynika, że również proste A_1T i B_1T są symetryczne względem płaszczyzny CDP . To zaś oznacza, że $\sphericalangle A_1TH = \sphericalangle B_1TH$. W takim razie trójkąty A_1PT i B_1PT są przystające, skąd wniosek, że $PA_1 = PB_1$. Strumień został więc znaleziony! Dalej będzie już z górki.

Teraz w nietrudny sposób można wykazać, że $AQ = BQ$ (dowód pozostawiamy Czytelnikowi), a w takim razie też $AD = BD$. Analogicznie dowodzimy, że dowolne dwie sąsiednie krawędzie są równe, co kończy dowód. Nie ma rzeczy niemożliwych: każde, nawet najbardziej skomplikowane zadanie da się rozwiązać!

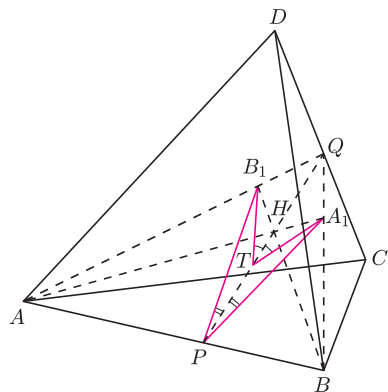
Michał KIEZA



Rys. 1. Nawet jeśli narysujemy tylko płaszczyzny $ABQ, CDP, A_1C_1D_1, B_1C_1D_1$, to i tak rysunek jest bardzo nieczytelny.



Rys. 2



Rys. 3

Informatyczny kącik olimpijski (48): Zliczanie prostokątów

W tym kąciku rozwiązaliśmy zadanie *Prostokąty (Rectangles)*, które pojawiło się w 2007 roku na konkursie organizowanym przez MIT w serwisie spoj.pl.

Zadanie brzmi tak: na płaszczyźnie danych jest n różnych punktów. Na ile sposobów można wybrać cztery z nich tak, aby były one wierzchołkami prostokąta o bokach równoległych do osi układu współrzędnych?

Pierwsze rozwiązanie, które powinno przyjść nam do głowy, wykorzystuje obserwację, że każdy szukany prostokąt jest jednoznacznie określony przez jego dwa przeciwległe wierzchołki. Możemy więc dla każdej pary danych punktów (lewy dolny, prawy górny) sprawdzić, czy do zbioru należą dwa pozostałe wierzchołki. Jeśli do sprawdzania przynależności do zbioru wykorzystamy tablicę haszującą, takie rozwiązanie będzie działało w czasie $O(n^2)$.

Może się wydawać, że sporo czasu w powyższym rozwiązaniu tracimy na sprawdzaniu „złych” par – przekątnych, dla których pozostałe dwa punkty nie istnieją. Niestety, prosty przykład n punktów ustawionych w „dwuszereg” pokazuje, że wynik może być rzędu $\Theta(n^2)$, zatem żaden algorytm zliczający prostokąty pojedynczo nie może być istotnie lepszy od powyższego.

Jak zatem znaleźć lepsze rozwiązanie? Zauważmy na początek, że możemy przenieść współrzędne na wejściu tak, aby wszystkie były naturalne i nie większe niż n . Nie interesują nas bowiem długości boków czy pola prostokątów, tylko ich liczba. Podzielmy punkty na pionowe bloki, tj. ze względu na współrzędną x . Bloki natomiast podzielmy na dwie kategorie – *małe*, czyli te, które zawierają co najwyżej $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ punktów, i *duże*, czyli pozostałe.

Zapomnijmy na moment o dużych blokach. Powiemy, że współrzędna y należy do bloku, jeśli w bloku znajduje się punkt o drugiej współrzędnej równej y . Będziemy iterować po możliwych położeniach dolnego boku prostokąta, od góry do dołu. Załóżmy, że dolny bok prostokąta ma drugą współrzędną równą y_1 , i rozważmy te bloki, do których należy punkt o takiej współrzędnej – punkty w pozostałych blokach nie mają szans należeć do takiego prostokąta. Ignorujemy także wszystkie punkty o drugich współrzędnych nie większych niż y_1 – te także nie mają wpływu na wynik. Teraz wystarczy policzyć, ile jest poziomych odcinków o obu końcach wśród punktów, które nam pozostały – jako że każdy blok zawiera y_1 , każdy taki odcinek odpowiada jednemu prostokątowi. Ten krok można wykonać łatwo, przechodząc po wszystkich punktach, które nam pozostały (w dowolnej kolejności, np. od lewej do prawej), przy okazji zliczając w tablicy (współrzędne są małe!), ile razy dana rzędna już wystąpiła, i aktualizując wynik.

Założmy, że wielkości małych bloków to b_1, b_2, \dots , przy czym $b_i \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ i $\sum b_i \leq n$. Przy uważnej

implementacji algorytmu małych bloków wykonamy w nim liczbę operacji co najwyżej rzędu $\sum b_i^2$. Faktycznie, wybrana współrzędna y_1 będzie należała do i -tego bloku b_i razy, i wówczas w fazie przeglądania każdy punkt tego bloku odwiedzimy co najwyżej raz. Wykażemy, że $\sum b_i^2 = O(n\sqrt{n})$. Spróbujmy znaleźć „najgorszy możliwy” ciąg b_i . Jeśli dla pewnych różnych k, l mamy $0 < b_k \leq b_l < \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, to zmniejszając b_k o 1 i zwiększając b_l o 1, nie zmieniamy $\sum b_i$, a jednocześnie zwiększamy $\sum b_i^2$. Jest to konsekwencja wypukłości funkcji kwadratowej. Powtarzając tę operację dostatecznie dużo razy, otrzymamy wszystkie liczby b_i – być może z wyjątkiem jednej – równe $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ lub 0. Tych niezerowych będzie co najwyżej $\sqrt{n} + 1$, ponieważ $\sum b_i \leq n$. Ostatecznie, dostajemy

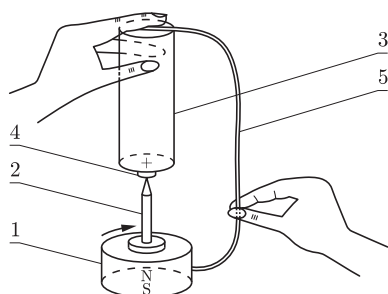
$$\sum b_i^2 \leq (\sqrt{n} + 1)(\sqrt{n})^2 = O(n\sqrt{n}).$$

Pozostało nam zająć się dużymi blokami. Dla dowolnego bloku B , łatwo policzyć w czasie $O(n)$, ile jest prostokątów, które mają dwa punkty w tym bloku – jeśli dla każdego pozostałego bloku B_k znamy liczbę współrzędnych c_k wspólnych dla B i B_k , to szukaną przez nas liczbą jest $\sum \frac{c_k(c_k-1)}{2}$. Ponieważ tę sumę dodamy do wyniku dla każdego dużego bloku, więc prostokąty o wszystkich punktach w dużych blokach policzymy dwukrotnie... To jednak nie jest duży problem – aby się z nim uporać, wystarczy dla każdego dużego bloku zawrzeć w sumie wszystkie małe bloki i tylko te duże, które znajdują się na lewo od niego. Na szczęście, duże bloki są wystarczająco liczne, aby nie mogło ich być więcej niż \sqrt{n} – a więc ta faza działa także w czasie $O(n\sqrt{n})$.

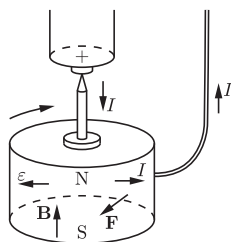
W powyższych rozważaniach zapomnieliśmy o kosztach związanych z sortowaniem i przenieśnięciem wejściowych współrzędnych. Te nie powinny wynieść jednak więcej niż $O(n \log n)$ operacji, więc są znikome w porównaniu z kosztem faz zliczających. Całe rozwiązanie działa więc w czasie $O(n\sqrt{n})$ i pamięci $O(n)$.

Zainteresowanemu Czytelnikowi polecamy zastanowienie się, co by było, gdybyśmy chcieli, zamiast prostokątów, zliczać kwadraty. Czy umiemy to zrobić szybciej, czy potrzebujemy bardziej skomplikowanych struktur danych? Tak sformułowane zadanie pojawiło się na Obozie Naukowo-Treningowym im. A. Kreczmara w 2010 roku pod tytułem *Ogródek* i można je rozwiązywać w serwisie main.edu.pl.

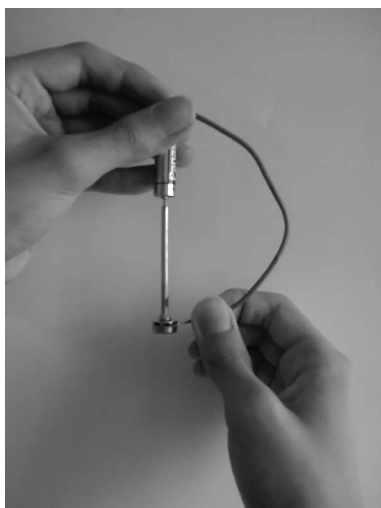
Adam KARCZMARZ
student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego



Rys. 1. Budowa silnika z wirującym magnesem; 1 – magnes neodymowy, 2 – gwóźdź stalowy, 3 – bateria okrągła, 4 – dodatni biegun baterii, 5 – giętki przewód.



Rys. 2. Wyjaśnienie zasady działania silnika z wirującym magnesem; I – natężenie prądu, B – indukcja pola magnetycznego, F – siła elektrodynamiczna, ϵ – siła ponderomotoryczna (przeciwelektromotoryczna).

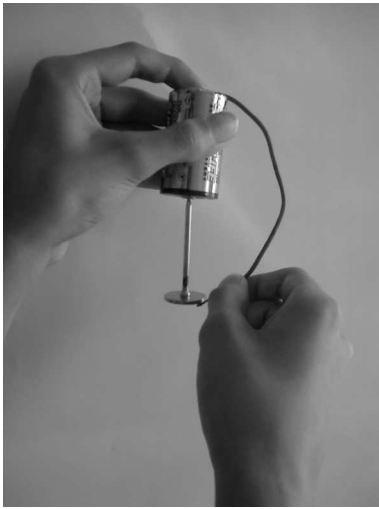


Fot. 1. Silnik unipolarny, zbudowany przy użyciu najmniejszej, okrągłej baterii R3, tzw. małego paluszka.

Z silnikami elektrycznymi spotykamy się na co dzień w bardzo wielu urządzeniach. Niewielki silnik elektryczny można kupić już w cenie poniżej 10 zł. Czy ma więc sens jego samodzielne budowanie? Jak najbardziej! Istnieją bardzo interesujące i proste silniki unipolarne (czasem nazywa się je też homopolarnymi), w których ruch obracającego się elementu (wirnika) zachodzi w pobliżu tylko jednego bieguna magnesu. W naszym otoczeniu znajduje się wiele przedmiotów i materiałów codziennego użytku, które pozwolą nam zbudować kilka modeli silników unipolarnych i, co ważniejsze, przeprowadzić z nimi eksperymenty ilustrujące ważne prawa fizyki. Nie będzie przy tym potrzeby żmudnego nawijania uzwojeń. Do przeprowadzenia proponowanych w tym odcinku doświadczeń wystarczy przygotować: dowolną okrągłą baterię (alkaliczną lub zwykłą), walcowy magnes neodymowy, kawałek przewodu elektrycznego, stalowy gwóźdź lub wkręt. Wszystkie nowe baterie dają napięcie około 1,5 V i, co dla nas ważne, mają chroniącą przed wyciekami elektrolitu obudowę ze stalowej blachy, która dodatkowo zapewni utrzymanie elementów silnika w wyniku przyciągania magnetycznego. Przewód elektryczny powinien mieć długość kilkunastu centymetrów i odizolowane końce. Najlepiej, by był giętki, czyli zrobiony z linki skręconej z cienkich drucików miedzianych, chociaż może też być to zwykły kawałek drutu, byle nie stalowego. Walcowe magnesy neodymowe można kupić w sklepie z artykułami elektronicznymi lub elektrotechnicznymi. Ich średnica i wysokość może wahać się od kilku milimetrów do kilku centymetrów. Ceny mniejszych magnesów wynoszą kilka złotych za sztukę. Magnesy te pokryte są cienką powłoką z niklu, przez co mają srebrzysty połysk. Warstwa ta zabezpiecza je przed szkodliwym działaniem powietrza, ponieważ są one wykonywane ze sproszkowanych, sprasowanych i spieczonych razem pierwiastków – żelaza, neodymu i boru – mogących łatwo wchodzić w reakcje z niektórymi składnikami atmosfery. Najlepiej tak dobrać średnicę magnesu, żeby była zbliżona do średnicy baterii.

Posługując się większymi magnesami neodymowymi, należy zachować ostrożność: nie zbliżać ich do dużych lub grubych przedmiotów ferromagnetycznych (stalowych lub żelaznych) ani też różnoimiennymi biegunami ku sobie, ponieważ magnesy te zostaną silnie przyciągnięte i trudno je będzie oderwać. Żeby zapobiec przypadkowemu przyciągnięciu, nieużywane magnesy należy rozdzielać nieferromagnetycznymi przekładkami (kawałki sklejk, styropianu lub grubej tektury) lub owijać tzw. folią bąbelkową. Materiał (spiek), z którego zrobione są magnesy, jest kruchy i może pęknąć przy uderzeniu, może też odwarstwić się niklowa powłoka. Uderzenia lub ogrzewanie magnesów powodują też pogorszenie ich właściwości magnetycznych. Nie należy też zbliżać magnesów do urządzeń elektronicznych, zwłaszcza do zegarków. Ponadto osoby mające wszczepione różnego rodzaju urządzenia medyczne (rozzruszniki serca, pompy do dozowania leków, metalowe stenty, endoprotezy stawów, implanty ortopedyczne i stomatologiczne) powinny zasięgnąć porady lekarza przed używaniem silnych magnesów. Należy je też trzymać z daleka od magnetycznych nośników danych. Używanie silnych magnesów jest bezpieczne, jeżeli zachowuje się elementarne środki ostrożności. Zresztą, namagnesowany zegarek można łatwo rozmagnesować, umieszczając go na kilkadziesiąt sekund w pętli z grubego, miedzianego drutu, przykręconej w miejsce grota do zasilanej z sieci lutownicy transformatorowej. Wiele implantów medycznych jest obecnie wykonywanych z materiałów nieferromagnetycznych – tytanu lub stali o dwóch podsieciach krystalicznych, magnesujących się w przeciwne strony i niewykazujących przez to wypadkowego namagnesowania. Z takiej stali produkuje się też koperty droższych zegarków.

Po tych niezbędnych uwagach wstępnych pora na doświadczenia. Do środka płaskiej powierzchni magnesu przykładamy łepkę gwóźdź, a jego ostrym końcem dotykamy dodatniego bieguna baterii trzymanej pionowo, tak jak na rysunku 1. Dzięki stalowej obudowie ostry koniec gwóźdź zostanie przyciągnięty do baterii i gwóźdź wraz z magnesem będą zwisały. Trzymając baterię w pobliżu jej ujemnego bieguna, przyciskamy palcem do tego bieguna



Fot. 2. Silnik unipolarny, w którym wykorzystano okrągłą baterię typu R20.

jeden koniec odizolowanego przewodu. Pozostały koniec przewodu ujmujemy palcami drugiej ręki i przykładamy do bocznej powierzchni magnesu. Co zauważamy? Okazuje się, że magnes wraz z gwoździem zaczyna się szybko obracać. Zasadę działania tego silnika wyjaśnia rysunek 2. Od dodatniego bieguna baterii, przez gwoździe, niklową powłokę magnesu (spiek jest praktycznie izolatorem) i przewód płynie prąd elektryczny do ujemnego bieguna baterii. Prąd płynący wzdłuż promienia magnesu znajduje się w prostokątnym do niego polu magnetycznym, dzięki czemu powstaje siła elektrodynamiczna, styczna do powierzchni magnesu i prostopadła do kierunku prądu. To jej moment obraca magnes. W obracającym się magnecie indukowana jest też siła ponderomotoryczna, skierowana przeciwnie do siły elektromotorycznej baterii.

Posługując się tym zestawem, warto zbadać, czy zmieni się kierunek obrotu magnesu, gdy ostrze gwoździa zetkniemy z dodatnim biegunem baterii, a w następnym doświadczeniu jego łepkę przyłożymy do przeciwległej powierzchni magnesu – odwrócimy kolejno bieguny magnesu albo ogniwa. Warto też zobaczyć, czy na szybkość obrotu magnesu wpływa zmiana miejsca przyłożenia końca przewodu do powierzchni magnesu. Należy przyłożyć ten koniec w połowie wysokości i w pobliżu brzegów bocznej powierzchni magnesu, a następnie do dowolnego miejsca na jego płaskich powierzchniach. Jeżeli mamy kilka baterii lub magnesów oraz gwoździ lub wkrętów o różnych długościach i grubościach, to również warto je wykorzystać do sprawdzenia, jak zmiany właściwości tych elementów wpłyną na działanie naszego silnika. Dwa przykłady silników unipolarnych, zbudowanych przy użyciu baterii i magnesów neodymowych o różnych rozmiarach, przedstawiają fotografie 1 i 2.

W opisanych tu silnikach sumaryczny opór drutu, gwoździa i powłoki magnesu jest bardzo mały, więc bateria pracuje „na zwarcie” i płynie przez nią prąd elektryczny o znacznym natężeniu (nawet do 4 A dla baterii R20). Z tego powodu następuje nagrzewanie się elementów silnika, w tym również baterii. Pobieranie z baterii dużego prądu powoduje szybkie jej zużycie, dlatego ciągła praca silnika nie powinna trwać dłużej niż 2–3 minuty. Dla przedłużenia przydatności baterii należy robić kilkuminutowe przerwy między kolejnymi uruchomieniami silnika. Uwagi te dotyczą również wszystkich innych silników unipolarnych, które zostaną opisane w dwóch następnych artykułach z tego cyklu.

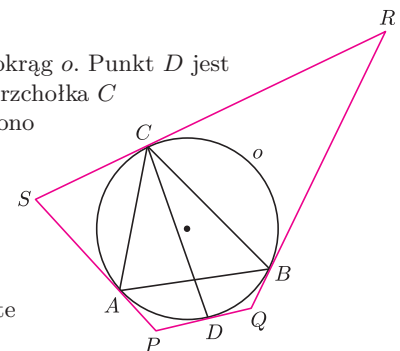


Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1336. Na trójkącie ostrokątnym ABC opisano okrąg o . Punkt D jest punktem przecięcia środkowej poprowadzonej z wierzchołka C z okręgiem o . W punktach A, B, C i D poprowadzono styczne do o , które wyznaczyły czworokąt $PQRS$ (rys. 1). Udowodnić, że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest równoramienny.

Rozwiązanie na str. 9



Rys. 1

M 1337. Udowodnić, że nie istnieją liczby całkowite a, b, c spełniające $a^{2012} + b^{2012} - 8c^{1006} = 6$.

Rozwiązanie na str. 15

M 1338. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k o następującej własności: w każdym k -elementowym podzbiore zbioru $\{1, 2, \dots, 2012\}$ znajdują się dwie liczby, których suma lub różnica wynosi 671.

Rozwiązanie na str. 9

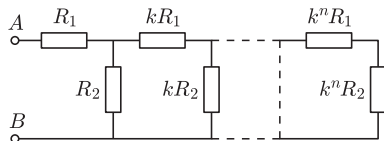
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 803. Układ pokazany na rysunku 2 składa się z bardzo dużej ilości rezystorów. Ich opór jest w każdym oczku k razy większy niż w poprzednim. Znaleźć opór między punktami A i B . Opory w pierwszym oczku sieci wynoszą R_1 oraz R_2 .

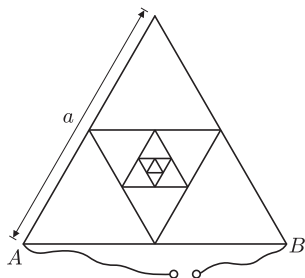
Rozwiązanie na str. 7

F 804. Wyznaczyć opór R_{AB} między punktami A i B układu zbudowanego z cienkiej przewodzącej siatki (rysunek 3). Przyjąć, że liczba zmniejszających się oczek siatki jest bardzo duża. Długość boku trójkąta jest równa a , a gęstość liniowa drutu, z którego zrobiona jest siatka, wynosi ρ .

Rozwiązanie na str. 15



Rys. 2



Rys. 3

Znowu neutrino, czyli kto się myli?

W sierpniu zeszłego roku światowe media obiegrała informacja o „pokonaniu bariery prędkości światła”. Dowiedzieliśmy się, że teoria Einsteina została obalona, że podróże w czasie to tylko... kwestia czasu *etc.*

Wszystko za sprawą eksperymentu OPERA, który postanowił podzielić się ze światem naukowym (a przy okazji z mediami) zaobserwowaną anomalią. Według wstępnej analizy danych, zebranych w ciągu ostatnich trzech lat, neutrino mionowe wysyłane z CERN-u do odległego o 730 km (lotem kreta) LNGS (Laboratori Nazionali del Gran Sasso) przybywają o około 60 ns (z dokładnością do około 10 ns) wcześniej, niż gdyby poruszały się z prędkością światła w próżni. (Światło w ciągu 60 nanosekund przebywa 20 metrów).

Sam eksperyment OPERA oraz wiązka neutrin zostały zaprojektowane tak, by umożliwić bezpośrednią obserwację oscylacji neutrina mionowego w neutrino taonowe, czyli zaobserwowanie pojawienia się leptonu tau w detektorze OPERA, co się zresztą udało.

Choć o neutrinach wiemy coraz więcej, to nadal bardzo wiele pytań pozostaje bez odpowiedzi. W szczególności nadal nie wiadomo, jakie są masy neutrin. Znane są górne granice oraz różnice kwadratów mas (z oscylacji). Najbardziej obiecującym bezpośrednim sposobem na pomiar masy neutrina elektronowego jest obserwacja końca widma elektronowego z rozpadu trytu. Na podstawie pomiarów estymowany jest kwadrat masy neutrina i od wielu lat otrzymuje się wartości nieznacznie ujemne (nowy eksperyment, KATRIN, ma zacząć zbierać dane w 2012 roku), co z jednej strony stymuluje dyskusję na temat statystycznej interpretacji danych, a z drugiej strony pozwala na spekulacje o tachionowej naturze neutrin.

Pozornie OPERA właśnie potwierdziła, że neutrino mionowe są tachionami, czyli cząstkami poruszającymi się z nadświetlnymi prędkościami. Zanim jednak przejdziemy do możliwych interpretacji wyniku, kilka zdań na temat samego pomiaru.

Pojęciowo jest on niezwykle prosty. Wystarczy zmierzyć odległość i czas. Kalibracja czasowa, z dokładnością do 1 ns, jest dokonywana w precyzyjnym trybie GPS, tzw. *common view* i oparta na uzgodnieniu wskazań dwóch zegarów atomowych: jednego znajdującego się w CERN-ie, a drugiego w Gran Sasso. Dokładny pomiar odległości wiązał się z kolei ze specjalnym programem geodezyjnym, który pozwolił na określenie względnego położenia z dokładnością do 2 cm. Przy okazji możliwe było zmierzenie pływu kontynentalnego masywu Gran Sasso oraz stwierdzenie jego przemieszczenia o kilka centymetrów podczas trzęsienia ziemi w okolicach miasta L'Aquila w 2009 roku. Amplituda zmian wywołanych płytami skorupy ziemskiej została oceniona na około centymetr.

Oba pomiary, odległości i synchronizacji, musiały jeszcze zostać przeniesione z powierzchni ziemi do, odpowiednio, tunelu wiązki w CERN-ie oraz kawerny znajdującej się obok tunelu autostradowego o długości 10 km. Ostatecznie dokładność pomiaru odległości wyniosła 20 metrów, a kalibracja czasowa dała dokładność kilku nanosekund.

To jednak jeszcze nie wszystko.

Wiązka neutrinowa jest produkowana przez przekierowanie wiązki protonowej z pierścienia SPS-u (który jest ostatnim stopniem przyspieszania protonów przed wstrzyknięciem do LHC) na kilkumetrowej długości tarczę grafitową, gdzie powstają, między innymi, miony, które są kierowane do kilkusetmetrowej rury rozpadowej i tam z nich powstaje wiązka neutrin. Ze względu na maksymalizację intensywności strumienia neutrin wybrano tryb pracy, w którym wiązka protonowa ma maksymalną długość, porównywalną z obwodem SPS-u. Jej przejście przez tarczę trwa 10 μ s i tyle samo trwa impuls neutrinowy. Za pomocą tak długiego impulsu OPER-ze udało się zmierzyć czas z dokładnością do nanosekund.

Oficjalne stanowisko OPER-y było takie, że wszystko, co udało się wymyślić, zostało sprawdzone, więc wynik powinien zostać przedstawiony społeczności naukowej do krytycznej oceny. Nie trzeba było na nią czekać. W ciągu trzech miesięcy pojawiło się ponad 1000 prac lub pisemnych opinii. Większość wskazywała na jakies potencjalne błędy lub pominięcia. W szczególności poddawana w wątpliwość była poprawność analizy statystycznej. Ten problem OPERA, wspólnie z CERN-em, postanowiła rozwiązać doświadczalnie. Została przygotowana specjalna wiązka z impulsami trwającymi tylko 3 ns, przy której zbierano dane przez dwa tygodnie. W listopadzie ukazała się uaktualniona analiza [1] (uwzględniająca nowe dane), która została wysłana do recenzowanego czasopisma (czyli zespół badawczy uznał ją za ostateczną). Wyniki uzyskane z wiązką impulsową okazały się zgodne, zarówno jeżeli chodzi o sam wynik, jak i jego dokładność (nawet lepszą pomimo tysiąckrotnie mniejszej liczby przypadków). Jednocześnie ewidentna stała się przyczyna limitująca dokładność statystyczną. Jest nią częstość taktowania elektroniki OPER-y wynosząca 20 MHz (czyli z krokiem 50 ns – właśnie taka jest długość prostokąta wyników z wiązki impulsowej).

Jak na razie, żadnego ewidentnego błędu analizy OPER-y nie znaleziono. Dlaczego więc społeczności naukowej trudno w nią uwierzyć? Po prostu zaskakujący wynik powinien zgadzać się z dostępnymi ograniczeniami. Wbrew opinii mediów istnienie tachionów wcale nie falsyfikuje rachunków prowadzonych w ramach teorii względności [2]. Spójność teorii z tachionami wymaga jednak istnienia wyróżnionego układu (co jest w sprzeczności z samą zasadą względności), ale nie da się tego stwierdzić doświadczalnie, dopóki posługujemy się obiektami o normalnej, a nie urojonej masie, które nigdy nie poruszają się z prędkościami nadświetlnymi. A anomalia zmierzona przez OPER-ę jest zbyt duża, żeby takie tachiony mogły być neutrinami. Wynik nie zgadza się ze znanymi ograniczeniami na kwadrat masy neutrina mionowego [2].

Albo myli się OPERA, albo naprawdę czegoś nie rozumiemy.

Piotr ZALEWSKI

[1] T. Adam i inni, *Measurement of the neutrino velocity with the OPERA detector in the CNGS beam*, preprint wysłany do JHEP 17 listopada 2011 roku.

[2] J. Ciborowski, J. Rembieliński, *Comments on the recent velocity measurement of the muon neutrinos by the OPERA Collaboration*, arXiv:1109.5599.

O podatku Belki

*Instytut Matematyczny PAN

Jerzy ZABCZYK*

Osoby osiągające dochody muszą płacić podatki. Podatki od pensji są najczęściej obliczane i odprowadzane przez instytucje, w których pracujemy. Podatki od dochodów uzyskiwanych na kontach bankowych są odprowadzane, w wysokości 19%, przez banki. Jest to tak zwany podatek Belki. Przy obliczaniu tego podatku dwukrotnie dokonuje się zaokrąglenia: przy obliczaniu dochodu (podstawy opodatkowania) i przy obliczaniu samego podatku. Bankowcy zauważyli, że jeżeli dochód nie przekracza kwoty $d = 2,49$ zł, to kwota podatku jest równa 0. Mianowicie, kwota 2,49 po pierwszym zaokrągleniu zamienia się na 2, a $\frac{19}{100}$ tej kwoty to 0,38 i drugie zaokrąglenie daje 0. W związku z tym niektóre banki zaproponowały lokaty na K dni z oprocentowaniem α w skali rocznej, dla których dochody są naliczane każdego dnia. Powstaje więc pytanie: **jaka jest maksymalna kwota L , którą można ulokować na koncie, by bank nie odprowadził od niej żadnego podatku?** Dochody każdego dnia są obliczane zgodnie z procentem składanym r , spełniającym równanie

$$(1+r)^N = 1 + \alpha,$$

gdzie $N = 365$ to liczba dni w roku. Maksymalna lokata L dana jest równaniem

$$(1) \quad L(1+r)^{K-1}r = d.$$

Przedostatniego dnia kwota do opodatkowania wynosi $L(1+r)^{K-1}$, a dochód od niej jest równy $L(1+r)^{K-1}r$. Stąd wzór.

Do uzyskania konkretnych informacji, jakie kwoty wchodzi tu w grę i jak duży może być nieopodatkowany dochód, proponujemy rozwiązanie kilku zadań.

Zadanie 1. Udowodnić, że

$$\frac{\ln(1+\alpha)}{N} < r < \frac{\alpha}{N},$$

gdzie \ln to logarytm liczony przy podstawie e .

Wskazówka. Jeżeli $x > 0$, to $e^x > 1 + x$.

Aby oszacować błąd, który powstaje w obliczeniach przy zamianie r na $\frac{\alpha}{N}$, warto rozwiązać

Zadanie 2. Dla $\alpha > 0$

$$0 < \alpha - \ln(1+\alpha) < \frac{\alpha^2}{2}.$$

Wskazówka. Pochodna ψ' funkcji $\psi(\alpha) = \alpha - \ln(1+\alpha)$, $\alpha > 0$, wynosi $\frac{\alpha}{1+\alpha}$, $\alpha > 0$.

Na przykład, gdy $\alpha = 0,5$, to błąd popełniany przy zamianie liczby $\ln(1+\alpha)$ na liczbę α jest mniejszy niż 0,000125. Zamieniając w równaniu (1) r na $\frac{\alpha}{N}$, otrzymujemy, że od lokat w wysokości

$$(2) \quad L_b = \frac{d}{(1+r)^{K-1}\alpha} N$$

nie będzie się płacić podatku. Jest to lokata „bezpieczna”, nieznacznie różniąca się od lokaty maksymalnej. Wzór (2) łatwo wykorzystać do obliczeń. Banki proponują 3- lub 4-miesięczne lokaty unikające podatku Belki i wygodnie jest wprowadzić do wzoru (3) liczbę $f = \frac{K-1}{N}$, mierzącą część roku, na którą lokata jest zakładana. Możemy wtedy wyeliminować r ze wzoru (2).

Zadanie 3. Wykazać, że

$$(3) \quad L_b = \frac{d}{(1+\alpha)^f \alpha} N.$$

Zadanie 4. Obliczyć, że jeśli

1) $f = \frac{1}{4}$ (lokata na 3 miesiące) przy oprocentowaniu $\alpha = 0,045$, to (w przybliżeniu)

$$L_b = 19\,970.$$

2) $f = \frac{1}{3}$ (lokata na 4 miesiące) i $\alpha = 0,055$, to (w przybliżeniu)

$$L_b = 16\,220.$$

Zadanie 5. Wykazać, że dochód z maksymalnej lokaty L wynosi: $L((1+r)^K - 1)$ i nieznacznie przekracza liczbę

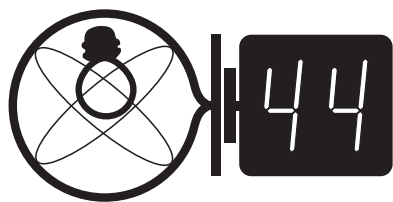
$$D = L((1+\alpha)^f - 1).$$

Zadanie 6 – kontynuacja Zadania 4. Obliczyć, że w przypadku 1) $D = 221$, a w przypadku 2) $D = 303$.

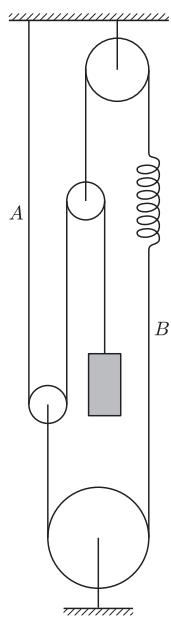
Gdyby podatek od dochodu odprowadzała osoba wykupująca lokatę, to po okresie odpowiednio 3 lub 4 miesięcy musiałaby odprowadzić odpowiednio 42 lub 58 złotych. Ponieważ w trakcie trwania lokaty nie mogłaby ona pobrać zgromadzonych środków, więc, z jej perspektywy, wzbogaca się ona dopiero po 3 lub, odpowiednio, po 4 miesiącach. Zabieg omijania podatku Belki rodzi więc istotne problemy prawne i moralne i nie wszystkie banki zdecydowały się, by antybelkowe lokaty oferować. Omijanie podatku trwa już kilka lat. Zaokrąglenie kwot do pełnych złotych w górę lub zaniechanie zaokrąglenia zlikwidowałoby tę możliwość.

Na zakończenie zauważamy, że gdyby bank naliczał odsetki nie każdego dnia, ale co godzinę, to we wzorze (3) liczbę N należałoby zamienić na 24*N* i „bezpieczna” wysokość lokaty wzrosłaby 24-krotnie, podobnie jak wysokość nieopodatkowanego dochodu. Gdy $N \rightarrow +\infty$, to i $L_b \rightarrow +\infty$.

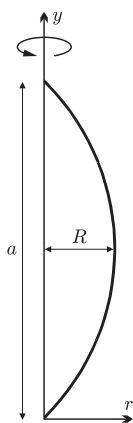
Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2012



Rys. 1



Rys. 2

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 530, 531

Redaguje Jerzy B. BROJAN

530. Ciężarek o masie m wisi na nici A przełożonej przez 2 bloki ruchome (rys. 1). Osie tych bloków są połączone nicią B przełożoną przez 2 bloki nieruchome, a w tej nici zamontowana jest sprężynka o stałej sprężystości k . Obliczyć okres pionowych drgań ciężarka. Masy bloków pominąć.

531. Gdy transformator był podłączony uzwojeniem pierwotnym do napięcia przemiennego U_1 , a obwód wtórny był otwarty, napięcie na uzwojeniu wtórnym było równe U_2 , a natężenie prądu w uzwojeniu pierwotnym I_1 (wszystkie podane wielkości są wartościami skutecznymi). Zamknięto obwód wtórny, dołączając do niego: a) opornik, b) zwojnicę bezoporową, c) kondensator. Ile w każdym z tych przypadków wyniesie natężenie prądu w uzwojeniu pierwotnym, jeśli we wtórnym popłynie prąd o natężeniu I_2 ? Oba napięcia U_1 i U_2 nie zmieniły wartości, a straty energii w transformatorze (jego nagrzewanie się) można pominąć.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2011

Przypominamy treść zadań:

522. Linka o długości $l = 1,5$ m i masie $m = 0,2$ kg (jednorodnie rozłożonej) jest zamocowana końcami w dwóch punktach odległych o $a = 1$ m (rys. 2). Linka obraca się wokół osi przechodzącej przez punkty zamocowania z prędkością kątową $\omega = 100$ rad/s i względem tego obracającego się układu odniesienia pozostaje nieruchoma. Pomijając efekty siły ciężkości, obliczyć numerycznie odległość R środkowego punktu linki od osi obrotu.

523. Dwie cienkie współosiowe soczewki o ogniskowych f_1 i f_2 są odległe o d i wykonane z tego samego szkła. Jaki warunek muszą spełniać podane parametry, aby ogniskowa zespołu nie zależała od długości fali (aby układ był achromatyczny)? Zmiany współczynnika załamania są niewielkie.

Ogólnie definiuje się ogniskową w sposób następujący: gdy na układ pada promień równoległy do osi i odległy od niej o niewielki odcinek h , a wychodząc z układu przecina oś pod kątem α , to ogniskowa wynosi $f = h/\alpha$.

522. Niech y będzie współrzędną wzdłuż osi obrotu, natomiast r – współrzędną wzdłuż osi prostopadłej. Składowa F_y siły napięcia linki jest stała, natomiast przyrost składowej F_r równoważy siłę odśrodkową działającą na fragment linki o długości ds i masie dm :

$$dF_r = -\omega^2 r dm = -\omega^2 r \frac{m}{l} ds = -\frac{m\omega^2}{l} r \sqrt{1 + (dr/dy)^2}.$$

Znak minus w powyższym równaniu odpowiada $dr > 0$, $dy > 0$. Kierunek siły napięcia jest styczny do linki, czyli $\frac{F_r}{F_y} = \frac{dr}{dy}$, a stąd

$$\frac{d^2 r}{dy^2} = -\frac{m\omega^2}{l F_y} r \sqrt{1 + (dr/dy)^2} = -Ar \sqrt{1 + (dr/dy)^2}.$$

Numeryczne całkowanie tego równania rozpoczynamy od $y = r = 0$ i dowolnie wybranych wartości A oraz dr/dy . Wartości te należy dobrać tak, aby w punkcie $y = a/2$ osiągnąć $\frac{dr}{dy} = 0$ oraz długość linki równą $l/2$. Okazuje się, że przy danych a i l właściwymi wyborami

są $A = 7,940 \text{ m}^{-2}$ (faktycznie wyznaczamy w ten sposób F_y ; wartości m i ω nie wpływają na kształt linki) oraz $(\frac{dr}{dy})_0 = 1,796$. Maksymalną wartością r jest $R = 0,516$ m. Dla porównania, dla krzywej łańcuchowej (cosinusa hiperbolicznego) byłoby $R = 0,503$ m.

523. Obliczenie ogniskowej F układu jest dość standardowe i nie będziemy go powtarzać. Otrzymuje się

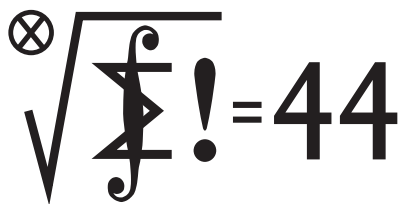
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}.$$

Podstawiamy $\frac{1}{f_i}$ w postaci $\frac{1}{f_i} = (n-1)A_i$, gdzie $i = 1$ lub 2 , A_i nie zależy od n . Przy niewielkiej zmianie Δn zmiana zdolności skupiającej układu $1/F$ wynosi

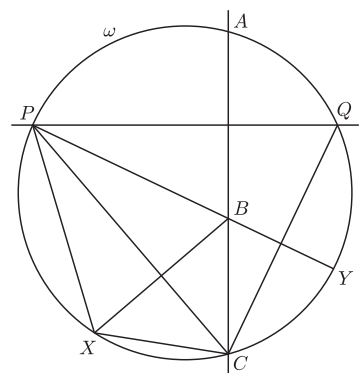
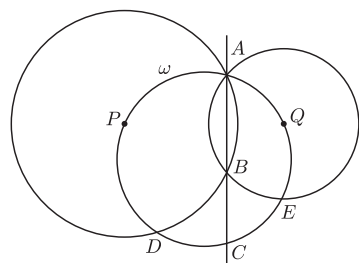
$$\Delta \left(\frac{1}{F} \right) = \Delta n (A_1 + A_2 - 2d(n-1)A_1 A_2).$$

Proste przekształcenie prowadzi do wniosku, że zmiana ta jest równa zero, gdy $f_1 + f_2 = 2d$.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2012



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 621 ($WT = 3,00$) i 622 ($WT = 1,27$) z numeru 5/2011

Piotr Sobczak	Łódź	43,59
Paweł Kubit	Kraków	38,59
Tomasz Tkocz	Rybnik	38,41
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,25
Janusz Olszewski	Warszawa	36,91
Michał Miodek	Zawiercie	35,88
Roksana Słowik	Knurów	31,49
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	31,04

Udowodnimy indukcyjnie dwie równości. Pierwsza z nich:

$$(1) \quad x_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{u_{n-1} - v_{n-1}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Dla $n = 1$ zgadza się. Przyjmijmy jej słuszność dla n . Wtedy dla $n + 1$ mamy

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{u_{n-1} - v_{n-1}} + \frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n-1}} \right) = \\ &= \frac{(u_{n-1} + v_{n-1})^2 + (u_{n-1} - v_{n-1})^2}{2(u_{n-1}^2 - v_{n-1}^2)} = \frac{u_n + v_n}{u_n - v_n}, \end{aligned}$$

stąd słuszność (1) dla wszystkich n .

Teraz druga z zapowiedzianych równości:

$$(2) \quad y_n^{2^n} = u_n - v_n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Znów, dla $n = 1$ zgadza się. Weźmy $n \geq 2$ i założmy, że równość

Zadania z matematyki nr 633, 634

Redaguje Marcin E. KUCZMA

633. Każdy punkt płaszczyzny został pokolorowany na czerwono lub zielono. Dany jest trójkąt ABC . Dowieść, że istnieje trójkąt przystający do ABC o wszystkich wierzchołkach zielonych lub istnieje odcinek długości jednostkowej o obu końcach czerwonych.

634. Niech S będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych. Wykazać, że istnieje wielomian stopnia pierwszego, o współczynnikach całkowitych, którego wartości w punktach zbioru S są parami względnie pierwsze.

Zadanie 634 zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2011

Przypominamy treść zadań:

625. Okręgi o środkach P i Q przecinają się w punktach A i B ; promienie PA i QA nie są prostopadłe. Okrąg opisany na trójkącie APQ przecina te dwa okręgi w punktach D i E (różnych od A) oraz przecina prostą AB w punkcie C (różnym od A). Dowieść, że okrąg opisany na trójkącie BDE ma środek w punkcie C .

626. Dana jest liczba $a > 0$. Określamy ciągi (x_n) oraz (y_n) :

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \quad \text{dla } n \geq 1; \quad y_n = x_1^{1/2} x_2^{1/4} \dots x_n^{1/2^n}.$$

Wykazać zbieżność i obliczyć granicę ciągu (y_n) .

625. Okrąg ω , opisany na trójkącie APQ , nie jest styczny do żadnego z dwóch danych okręgów (bo je przecina w punktach różnych od A). Zatem żaden z odcinków AQ , AP nie jest jego średnicą; w takim razie żaden z kątów APQ , AQP nie jest prosty. Stąd wniosek, że żaden z punktów P , Q nie leży na prostej AB , wobec czego prosta PQ nie przechodzi przez punkt C .

Mamy więc niezdegenerowany trójkąt CPQ , wpisany w okrąg ω . Wysokość poprowadzona z wierzchołka C , lub jej przedłużenie, przecina okrąg ω ponownie w punkcie A . Ortocentrum trójkąta CPQ leży w punkcie symetrycznym do A względem prostej PQ – czyli w punkcie B .

Punkty symetryczne do ortocentrum B względem boków CP i CQ także leżą na okręgu ω ; oznaczmy je odpowiednio przez X i Y (żaden z nich nie pokrywa się z A , bo punkt C nie leży na prostej PQ).

Trójkąt CXP jest symetryczny do CBP , więc $|CX| = |CB|$, $|PX| = |PB|$. Ostatnia równość mówi, że X jest punktem okręgu o środku P , przechodzącego przez A i B . Skoro zaś leży na okręgu ω i nie pokrywa się z A , musi się pokrywać z D lub E ; ustalmy oznaczenia (D, E) tak, że $X = D$.

Analogicznie stwierdzamy, że $|CY| = |CB|$, $|QY| = |QB|$, $Y = E$. Tak więc $|CD| = |CB| = |CE|$. To znaczy, że punkty B, D, E leżą na okręgu o środku C .

626. Przyjmijmy oznaczenia:

$$u_n = \left(\frac{a+1}{2} \right)^{2^n}, \quad v_n = \left(\frac{a-1}{2} \right)^{2^n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Widać, że $u_n = u_{n-1}^2$, $v_n = v_{n-1}^2$; $u_0 + v_0 = a$, $u_0 - v_0 = 1$, $u_1 - v_1 = a$.

analogiczna do (2) zachodzi dla $n - 1$:

$$y_{n-1}^{2^{n-1}} = u_{n-1} - v_{n-1}.$$

Z określenia ciągu (y_n) wynika, że $y_n = y_{n-1} x_n^{1/2^n}$. Stąd oraz z (1):

$$\begin{aligned} y_n^{2^n} &= (y_{n-1}^{2^{n-1}})^2 \cdot x_n = (u_{n-1} - v_{n-1})^2 \cdot \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{u_{n-1} - v_{n-1}} = \\ &= u_{n-1}^2 - v_{n-1}^2 = u_n - v_n, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny zależności (2).

Przepisujemy tę zależność w postaci

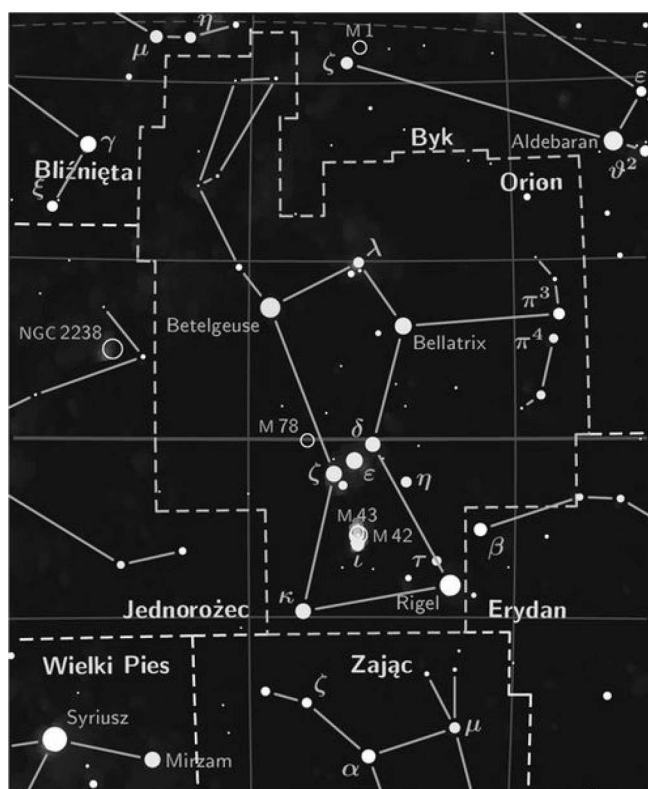
$$y_n^{2^n} = u_n q_n, \quad \text{gdzie } q_n = 1 - \frac{v_n}{u_n} = 1 - \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^{2^n}.$$

Liczba a jest dodatnia, więc iloraz w nawiasie jest liczbą o module mniejszym od 1. Wobec tego $q_n \rightarrow 1$. Stąd, ostatecznie,

$$y_n = (u_n q_n)^{1/2^n} = \frac{a+1}{2} \cdot q_n^{1/2^n} \rightarrow \frac{a+1}{2}.$$

Styczeń

Styczeń, choć jest chłodny, dzięki długim, zimowym nocom sprzyja obserwacjom. Pierwsza połowa nocy należy do jasnego Jowisza ($-2,5$ mag) pojawiającego się w Rybach wraz z zachodem Słońca nad południowo-wschodnim horyzontem. Każdego jednak dnia będzie on zachodził coraz wcześniej, by pod koniec miesiąca już przed północą chować się za widnokręgiem. Mars ($+0,1$ mag) wschodzi późnym wieczorem we Lwie nad wschodnim horyzontem. W drugiej zaś połowie nocy, niezbyt wysoko nad południowo-wschodnim horyzontem, w Pannie wschodzi Saturn ($+0,7$ mag). Neptun i Uran zachodzą razem ze Słońcem, więc raczej nie da się ich obserwować. Z kolei Wenus na początku miesiąca zachodzi krótko po Słońcu, ale z każdym dniem coraz później, by pod koniec miesiąca być widoczna bardzo wczesnym wieczorem. Wytrwałym i obdarzonym dobrym wzrokiem obserwatorom być może uda się dostrzec w Wężowniku Merkurego ($-0,4$ mag) w blasku wschodzącego Słońca.



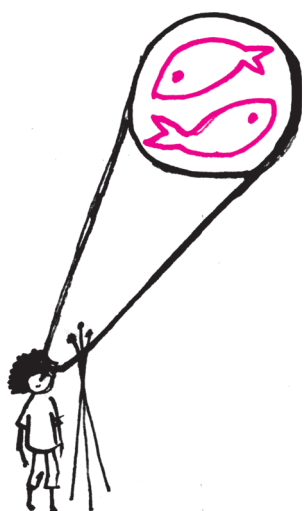
Jednym z najłatwiej rozpoznawalnych gwiazdozbiorów jest gwiazdozbiór Oriona, widoczny w Polsce od października do marca. Łatwo go odnaleźć ze względu na trzy gwiazdy – Mintaka (δ Ori), Alnilam (ϵ Ori) i Alnitak (ζ Ori), tworzące pas Oriona. Układ tych gwiazd wskazuje na najjaśniejszą gwiazdę naszego nieba – Syriusza (α CMa) na południowym wschodzie i na Aldebarana (α Tau) na północnym zachodzie.

Rigel, choć ma oznaczenie β Orionis, przy swojej przeciętnej jasności $+0,12$ mag, jest najjaśniejszy w gwiazdozbiórze Oriona. Drugą co do jasności gwiazdą gwiazdozbioru Oriona jest Betelgeuse (α Ori) z przeciętną jasnością $+0,42$ mag. Są jednak krótkie okresy, kiedy Betelgeuse w pełni zasługuje na swoją nazwę α Orionis i staje się najjaśniejszą gwiazdą Oriona. Rigel jest niebieskim nadolbrzymem typu widmowego B8 i klasy jasności Iab, o masie siedemnastu mas Słońca i promieniu 78 razy większym niż promień naszej dziennej gwiazdy. Jest także kilkadziesiąt tysięcy razy jaśniejszy niż Słońce. Według danych z satelity Hipparcos Rigel jest oddalony od Słońca o 770 lat świetlnych (240 parseków). Jest gwiazdą zmienną nieregularną o okresie zmian jasności około 22–25 dni i amplitudzie 0,27 mag. Szczęśliwi posiadacze teleskopów o średnicy większej niż 7 cm mogą spróbować rozseparować jego składniki, gdyż

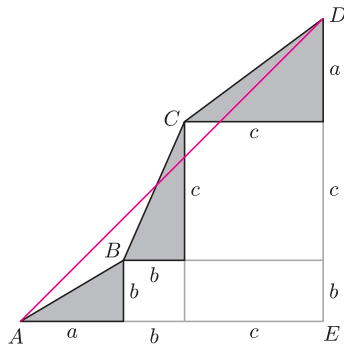
Rigel jest gwiazdą wielokrotną. Chociaż towarzysz (Rigel B; $+6,7$ mag) jest stosunkowo jasny, to jego obserwacja jest trudna ze względu na stosunkowo bliskie sąsiedztwo bardzo jasnego składnika głównego (blisko 500 razy jaśniejszego). Niestety, mały teleskop już nie wystarczy, by dostrzec, że Rigel B sam też jest gwiazdą podwójną, składającą się z dwu gwiazd ciągu głównego o typie widmowym B9. Tak więc mamy układ trzech gwiazd, w którym najjaśniejszy i najbardziej masywny składnik główny, Rigel A, jest okrążany przez dwa mniejsze, Rigel B i C, obiegające jeszcze dodatkowo swój środek masy.

Pełnia Księżyca przypada 9 I, a nów 23 I. Będzie też seria koniunkcji. 2 stycznia nastąpi koniunkcja Księżyca z Jowiszem, odległość między nimi wynosić będzie $4^{\circ}50'$. 13 I nastąpi koniunkcja Wenus z Neptunem, kiedy to planety zbliżą się na odległość $1^{\circ}5'$. 22 I Merkury znajdzie się w koniunkcji z Księżycem w odległości $4^{\circ}42'$. Na początku stycznia (1–7 I) aktywny będzie obfity rój Kwadrantydwów z maksimum 5 I i 120 zjawiskami na godzinę. Jeśli tylko pogoda dopisze, rój ten z radiantem wysoko nad horyzontem powinien dostarczyć niezapomnianych wrażeń. Zatem czystego nieba!

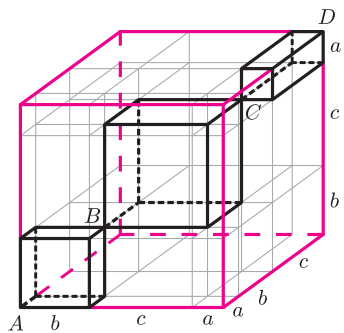
Agnieszka MAJCZYNA



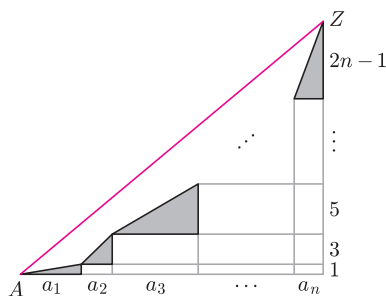
We wszystkich zadaniach przyjmujemy, że a, b i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi.



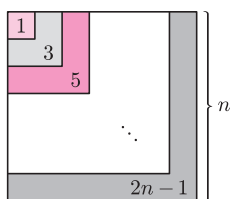
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Najkrótsza łamana

Joanna JASZUŃSKA

Niektóre nierówności, pozornie niezwiązane z geometrią, można zaskakująco łatwo udowodnić, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa i prosty geometryczny fakt, że *najkrótszą łamaną pomiędzy dwoma punktami jest łączący je odcinek*. Fakt ten można stosować na płaszczyźnie, można w przestrzeni trójwymiarowej, nic też nie stoi na przeszkodzie, by używać go w czterech lub więcej wymiarach.

1. Udowodnij nierówność $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c)$.
2. Udowodnij, że $\sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{b^2 + 2c^2} + \sqrt{c^2 + 2a^2} \geq \sqrt{3}(a + b + c)$.
3. Wykaż, że $\sqrt{a + b + 2c} + \sqrt{b + c + 2a} + \sqrt{c + a + 2b} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$.
4. Udowodnij nierówność $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \geq \sqrt{6(a + b + c)}$.
5. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia $\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + (2i - 1)^2}$ dla $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, takich, że $\sum_{i=1}^n a_i = n^2$.

Rozwiązania

R1. Ustawmy trzy trójkąty prostokątne jak na rysunku 1. Wówczas $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = AB + BC + CD \geq AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{2}(a + b + c)$. \square

R2. Ustawmy prostopadłości o wymiarach $a \times b \times b$, $b \times c \times c$ oraz $c \times a \times a$ tak, jak na rysunku 2. Wówczas $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = AB + BC + CD \geq AD = \sqrt{3}(a + b + c)$. \square

Uwaga. Zadanie można też rozwiązać na płaszczyźnie, ustawiając trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i $b\sqrt{2}$, b i $c\sqrt{2}$ oraz c i $a\sqrt{2}$ tak, jak na rysunku 1.

R3. Ustawmy trzy czterowymiarowe hiperprostopadłości (odpowiedniki trójwymiarowych prostopadłościów) o wymiarach $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \sqrt{c}$, $\sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ oraz $\sqrt{c} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b}$ analogicznie do sytuacji z rysunku 2. Wtedy $\sqrt{a + b + c} + \sqrt{b + c + a} + \sqrt{c + a + b}$ to długość łamanej od A do D , natomiast odcinek AD to przekątna 4-wymiarowego hipersześcianu o krawędzi $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, czyli $AD = \sqrt{4}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$, co kończy dowód. \square

Uwaga. Rozwiązanie w przestrzeni trójwymiarowej można uzyskać, ustawiając prostopadłości o wymiarach $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{2c}$, $\sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \sqrt{2a}$ oraz $\sqrt{c} \times \sqrt{a} \times \sqrt{2b}$.

R4. Ustawmy trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i 1 , b i 1 oraz c i 1 podobnie, jak na rysunku 1. Wtedy $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} = AB + BC + CD \geq AD = \sqrt{(a + b + c)^2 + 3^2}$. Ponadto $(a + b + c)^2 + 3^2 \geq 6(a + b + c)$, ponieważ $((a + b + c) - 3)^2 \geq 0$. \square

R5. Dla $i = 1, 2, \dots, n$ ustawmy trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a_i oraz $2i - 1$ tak, jak na rysunku 3. Przeciwnokątna i -tego trójkąta ma wtedy długość $\sqrt{a_i^2 + (2i - 1)^2}$, więc dla łamanej od A do Z uzyskujemy

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + (2i - 1)^2} \geq AZ = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n (2i - 1)\right)^2}.$$

Z założenia $\sum_{i=1}^n a_i = n^2$, a rysunek 4 ilustruje znaną tożsamość $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$. Stąd $AZ = \sqrt{n^4 + n^4} = \sqrt{2}n^2$ i to jest szukana najmniejsza wartość danego wyrażenia. Jest ona osiągnięta, gdy łamana od A do Z jest odcinkiem, czyli gdy $a_i = 2i - 1$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$. \square

Zadania domowe

6. Udowodnij nierówność $\sqrt{a + b} + \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a} \geq \sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c}$.
7. Udowodnij, że $\sqrt{a^2 + 3b^2} + \sqrt{b^2 + 3c^2} + \sqrt{c^2 + 3a^2} \geq 2(a + b + c)$.
8. Wykaż, że $\sqrt{a^2 + 2b^2 + 2c^2} + \sqrt{b^2 + 2c^2 + 2a^2} + \sqrt{c^2 + 2a^2 + 2b^2} \geq \sqrt{5}(a + b + c)$.

Zachęcam do samodzielnego wymyślania nierówności, które można rozwiązać opisaną tu metodą, a także do rozwiązywania powyższych zadań innymi metodami.