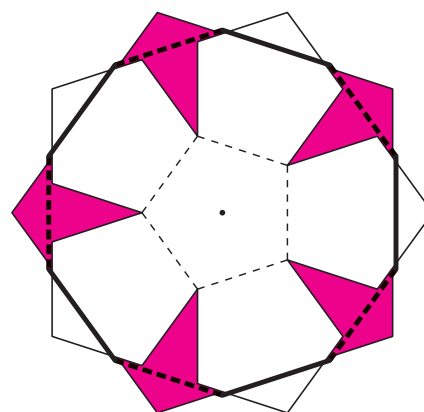
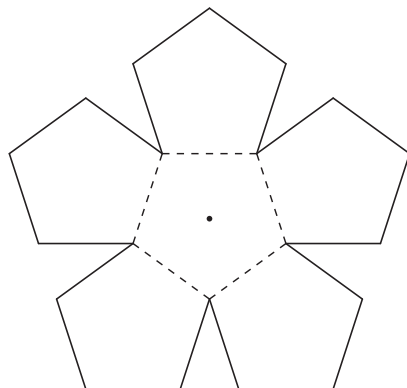


W następnym numerze polecamy wielościany z talia



## SPIS TREŚCI NUMERU 11 (450)

Ciemna materia, ciekawe czasy <i>Aleksandra Drozd</i>	str. 1
Pulsarowa menażeria <i>Michał Bejger</i>	str. 4
Zagrajmy w czekoladę <i>Wojciech Czerwiński</i>	str. 6
☞ Jak znaleźć klucz? <i>Maria Donten-Bury</i>	str. 8
Prosto z nieba: Zorza polarna <i>Michał Bejger</i>	str.10
🐼 Zadania	str.10
Olimpiada Informatyczna	str.11
🌀 Szacunek dla ośmionoga <i>Magdalena Fikus</i>	str.15
Odtwarzanie grafu <i>Jakub Radoszewski</i>	str.16
Osobliwość trójkątów <i>Jarosław Górnicki</i>	str.18
Powiadają, że...	str.19
🏠 Magiczna soczewka <i>Stanisław Bednarek</i>	str.20
Aktualności	str.21
📊 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.22
Klub 44	str.23
Listopad <i>Agnieszka Majczyna</i>	str.24
🎯 Środek ciężkości <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Z tekturki wytnij dwie takie figury, złożone z sześciu pięciokątów foremnych o boku 3 cm. Powyginaj je, aby łatwo zginały się wzdłuż przerywanych linii. Połóż jedną na drugiej tak, by środki nakładały się

i by rogi dolnej jednakowo wystawały spod górnej. Przyciskając środek palcem, nałóż recepturkę rozciągając ją tak, by była nad rogami górnej i pod rogami dolnej figury.

**PUŚĆ!**

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk, Diana Gawronkiewicz / Podpunkt.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Fran-Press:** [www.franpress.pl](http://www.franpress.pl), infolinia 801-679-466

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**Pol-Perfect:** [www.polperfect.com.pl](http://www.polperfect.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

### Warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2012 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

- 1. Prenumerata krajowa:** Zamówienia na prenumeratę przyjmują Zespoły Prenumeraty właściwe dla miejsca zamieszkania klienta do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty; [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)
- 2. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH S.A. Biuro Kolportażu – Zespół Obrotu Zagranicznego, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33 Tel. 48 22 532 88 23, 532 88 16; [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl)
- 3. Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:  
SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;  
w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;  
w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;  
kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**

### ZNÓW SUKCES!

27 września 2011 roku w Helsinkach jedną z trzech nagród

XXIII Konkursu

Młodych Naukowców UE  
(EUCYS)

uzyskał zdobywca złotego medalu  
w naszym

XXXII Konkursie

Uczniowskich Prac z Matematyki

### MICHAŁ MIŚKIEWICZ

(nagroda wyniosła 3 500 euro).

A więc jeszcze raz okazało się, że matematycy-laureaci EUCYS to Polacy, zwycięzcy KUPzM.

# Ciemna materia, ciekawe czasy

Aleksandra DROZD\*

Więcej informacji znajdziesz w artykule Marka Demiańskiego *Ciemna materia*, *Delta* 12/2003.

**Coś, czego nie widać.** W 1933 roku Fritz Zwicky, badając prędkości galaktyk w gromadzie Warkocza Bereniki, uzyskał wyniki wskazujące na obecność w tej gromadzie znacznie większej ilości materii niż ta, którą było widać. Była to pierwsza ze wskazówek, że we Wszechświecie może być dużo czegoś, czego zobaczyć się nie da!

Dalszych dowodów na istnienie niewidocznej materii dostarczają dokładne analizy prędkości gwiazd w galaktykach. Centra galaktyk są dużo jaśniejsze niż ich obrzeża, co sugeruje skupienie masy galaktyki blisko jądra (znajduje się tam najwięcej gwiazd). Jednak dla takiego rozkładu materii prędkość obiegu gwiazd wokół centrum powinna być odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka z odległości od centrum. Tymczasem obserwowane prędkości gwiazd w częściach centralnych oraz w częściach odległych od centrum galaktyki nie różnią się znacząco. Co z tego wynika? Po pierwsze, rozkład materii w galaktykach musi być dużo bardziej równomierny niż rozkład bezpośrednio obserwowanej materii świecącej. Po drugie, w większości obserwowanych galaktyk tej niewidocznej materii jest znacznie więcej niż widocznej! A zatem wokół centrum galaktyki istnieje sferycznie symetryczny rozkład materii niewysyłającej promieniowania elektromagnetycznego – galaktyczne halo ciemnej materii. Także nasza Galaktyka zawiera tę nieznaną materię – podczas gdy masa zwykłej materii w Drodze Mlecznej to około  $9 \cdot 10^{10}$  mas Słońca, masa ciemnej materii szacowana jest na około  $6 \cdot 10^{11}$  do  $3 \cdot 10^{12}$  mas Słońca. Większość niewidocznej masy znajduje się w odległości około 100 000 lat świetlnych od centrum (Słońce znajduje się w odległości około 25 000 lat świetlnych).

Czym miałyby być owa ciemna materia? Jednym z pierwszych wyjaśnień zagadki brakującej masy była propozycja, że stanowią ją skupiska zwykłej, znanej materii emitujące niewiele promieniowania, np. czarne dziury, gwiazdy neutronowe, brązowe karły lub nieorbitujące wokół gwiazd planety. Takie obiekty, nazwane przez fizyków MACHO (ang. *Massive Astrophysical Compact Halo Objects* – masywne zwarte astrofizyczne obiekty w halo), nie mogą jednak występować w zbyt dużej ilości, gdyż spójny opis historii Wszechświata w modelu Wielkiego Wybuchu nie dopuszcza, by cała znana materia (tzw. materia barionowej) było istotnie – o rząd wielkości – więcej niż materii świecącej. To zaś oznacza, że istnieją we Wszechświecie zupełnie nowe formy materii, o szczegółowych własnościach jeszcze nieznanymi nauce. Jak je wykryć?

Najpoważniej dziś rozważanymi kandydatami na cząstki ciemnej materii są tzw. WIMP-y (ang. *Weakly Interacting Massive Particles*, czyli słabo oddziałujące cząstki masywne) – na nich będziemy się koncentrować w dalszej części artykułu. Pod tym krótkim hasłem kryje się wiele rozmaitych teorii fizycznych: WIMP-ami mogą być, na przykład, supersymetryczni partnerzy znanych cząstek albo wzbudzenia znanych cząstek w dodatkowych wymiarach czasoprzestrzennych.

Fizycy, rozmawiając o ilości energii lub materii we Wszechświecie, posługują się jednostkami gęstości krytycznej – maksymalnej gęstości Wszechświata, przy której nie zaczęłyby się on nigdy zapadać, gdyby nie było stałej kosmologicznej. Korzystając z tego układu jednostek, możemy sparametryzować naszą wiedzę (niewiedzę?): gęstość znanej materii  $\Omega_M$  wynosi około 0,05, gęstość zaś materii nieznannej  $\Omega_{DM}$  to około 0,22. Tak dokładne wyznaczenie tych wartości powoduje niekiedy dodatkowy kłopot: oddziaływania supersymetrycznych partnerów znanych cząstek są dobrze znane – łatwo dostać ciemnej materii o rząd wielkości za dużo lub za mało, ale uzyskanie właściwego przewidywania wymaga pewnego dopasowania parametrów teorii.

Nawet najbardziej zawile spekulacje fizyków teoretyków muszą być jednak skonfrontowane z doświadczeniem, by móc uznać je za poprawny opis świata. Jak jednak zobaczyć ciemną materię? Poniżej przyjrzymy się niektórym spośród realizowanych przez naukowców możliwości.

**A jednak teleskopem!** Pewne własności ciemnej materii, a w szczególności to, ile jest jej we Wszechświecie, można całkiem dokładnie badać bez odwoływania się do jej mikroskopowej natury. Przewidywane przez ogólną teorię względności zakrzywienie toru promieniowania elektromagnetycznego przez masywne obiekty jest dziś tak dobrze znanym efektem, że korzystamy z niego na co dzień (bez uwzględnienia efektów relatywistycznych urządzenia GPS byłyby beużytecznie niedokładne). Jeśli skupiska ciemnej materii są odpowiednio masywne, to w ich sąsiedztwie mogą ugiąć się promienie świetlne biegnące od położonego dalej obiektu i obiekt ten będzie widoczny w dwóch różnych miejscach na niebie. Innym źródłem danych obserwacyjnych jest mikrofalowe promieniowanie tła – resztkowe promieniowanie pozostałe po Wielkim Wybuchu. Dzisiaj

\*doktorantka, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego





### Rozwiązanie zadania F 799.

Podczas ruchu cieplnego w polu magnetycznym elektrony poruszają się po łukach okręgów o promieniu  $r$ . Siła wywierana przez pole magnetyczne o indukcji  $B$  jest siłą dośrodkową:

$$evB = \frac{mv^2}{r},$$

stąd

$$r = \frac{p}{eB}.$$

Wykorzystując zasadę ekwipartycji energii, pęd elektronu można wyrazić przez temperaturę gazu  $p = \sqrt{3mkT}$ , co daje ostatecznie

$$r = \frac{\sqrt{3mkT}}{eB} \approx 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}.$$

Niektóre z zaproponowanych kandydatek na cząstki ciemnej materii oddziałują tak słabo, że prawdopodobieństwo ich oddziaływania w detektorze jest bardzo małe i bezpośrednia detekcja nie może się udać.

czytamy je trochę jak mapę Wszechświata sprzed 13 miliardów lat. Fotony emitowane z miejsc, gdzie ciemnej materii było trochę więcej, musiały oddać część swojej energii, wychodząc z trochę głębszej jamki potencjału grawitacyjnego – i dziś widzimy je jako ujemne fluktuacje temperatury promieniowania tła.

**Poczuć maleńkie kopnięcie!** Droga Mleczna, jak każda galaktyka, jest pełna ciemnej materii. Niewidoczne i prawie nieoddziałujące cząstki powinny się znajdować również w okolicach Słońca i Ziemi – tutaj gęstość ciemnej materii wynosi mniej więcej  $0,3 \text{ GeV}/(c^2 \text{ cm}^3)$ . Taka gęstość odpowiada jednej cząstce o masie równej masie bozonu  $Z$  ( $91 \text{ GeV}/c^2$ ) w filiżance kawy. Oznacza to, że na Ziemi materia składa się niemal wyłącznie ze „zwykłych” cząstek. Niemniej raz na jakiś czas może się zdarzyć, że cząstka ciemnej materii zderzy się ze zwykłą cząstką i spowoduje jej niewielki odrzut. Powierzchnia Ziemi, bezustannie bombardowana promieniowaniem kosmicznym, nie jest dobrym miejscem na poszukiwanie takich zdarzeń. Trzeba zbudować jakąś grubą osłonę. Najbardziej praktycznym sposobem jest umieszczenie detektora ciemnej materii głęboko pod ziemią.

Jak stwierdzić, czy cząsteczki detektora doświadczają maleńkich kopnięć w wyniku oddziaływania z ciemną materią? Cząstki ciemnej materii wpadające do detektora i zderzające się z cząsteczkami detektora przekazują im energię, która może być przekazana dalej jako ciepło lub promieniowanie elektromagnetyczne. To pierwsze jest rejestrowane w najstarszej z metod zastosowanych do detekcji ciemnej materii, wykorzystującej ochłodzone do bardzo niskich temperatur ( $0,1 \text{ K}$ ) kryształy germanu. To drugie powstaje w wyniku wzbudzenia cząsteczek wypełniającej detektor substancji, zwanej scyntylatorem, np. jodku sodu lub związków organicznych.

Trudnym elementem takiego doświadczenia jest rozpoznawanie, które zderzenia pochodzą od znanych nam już cząstek, a które mogą wskazywać na złapanie WIMP-ów. Na przykład, nawet bardzo niewielka radioaktywność materiałów, z których zbudowany jest detektor, lub otaczających go skał dostarcza do detektora cząstki, które mogą być pomyłone z cząstkami ciemnej materii. Trudności te przezwycięża się na dwa sposoby. Pierwszy polega po prostu na starannym ekranowaniu detektora i dokładnych analizach kinematyki reakcji, wykluczających zderzenia ze znanymi cząstkami. Drugi sposób wykorzystuje ruch orbitalny Ziemi wokół Słońca (z prędkością około  $30 \text{ km/s}$ ), które z kolei obiega centrum Galaktyki (z prędkością około  $200 \text{ km/s}$ ). Złożenie tych dwóch ruchów powoduje zmienność w czasie – z okresem jednego roku – prędkości Ziemi względem halo, a zatem także strumienia cząstek ciemnej materii docierających do Ziemi. Można zatem analizować dane pod kątem występowania takich okresowych zmian w liczbie rejestrowanych zderzeń.

Co można było zobaczyć?

- W 1997 roku zespół eksperymentu DAMA, poszukującego rocznej modulacji liczby zderzeń w kryształach jodku sodu w detektorze znajdującym się w Gran Sasso we Włoszech, poinformował o wykryciu takiego sygnału. Następne kilkanaście lat przyniosło stopniowe ulepszanie analiz oraz budowę nowego detektora, który także rejestrował odpowiednie roczne zmiany.
- 17 grudnia 2009 roku zespół eksperymentu CDMS, wykorzystującego kryształy germanu w detektorze w kopalni Soudan (USA), zorganizował równocześnie dwie prezentacje wyników: w Europie i w USA. Fakt ten nie uszedł uwagi fizyków, którzy, na żywo i w Internecie, śledzili referaty z zapartym tchem, oczekując przełomowych wyników. Głód nowości został zaspokojony częściowo – w doświadczeniu zaobserwowano dwa zdarzenia, które trudno wyjaśnić jako oddziaływanie ze znaną materią.
- 14 kwietnia 2011 roku zespół eksperymentu XENON100, używającego detektora wypełnionego ciekłym ksenonem, umieszczonego w laboratorium Gran Sasso, ogłosił brak jakichkolwiek pozytywnych rezultatów poszukiwań ciemnej materii. Także w wielu innych, na razie mniej dokładnych, eksperymentach nie wykryto niczego ciekawego.
- 2 maja 2011 roku zespół eksperymentu CoGeNT, wykorzystującego kryształy germanu w niewielkim detektorze w kopalni Soudan (USA), obwieścił zaobserwowanie rocznej modulacji w liczbie rejestrowanych zderzeń. Zbieranie danych zostało na razie przerwane w wyniku pożaru w kopalni, który mógł doprowadzić do wzrostu temperatury i uszkodzenia detektora.

Co z tego wynika? Najciekawsze, że tak naprawdę nie wiadomo. Każda z czterech wymienionych obserwacji nakłada (po uwzględnieniu pewnych upraszczających założeń) ograniczenia na masę i prawdopodobieństwo oddziaływania cząstek ciemnej materii, ale dla każdego z nich tak otrzymane wyniki są niezgodne. Wygląda więc na to, że, o ile nie zostaną zidentyfikowane błędy systematyczne w tych doświadczeniach, dla fizyków zajmujących się teorią cząstek elementarnych rozpoczynają się naprawdę ciekawe czasy.

**Złapać produkty reakcji!** Alternatywą wobec metod bezpośrednich mogą być pośrednie metody detekcji, opierające się na poszukiwaniu docierających do Ziemi

sygnałów z anihilacji ciemnej materii. Anihilacją nazywamy proces oddziaływania cząstek ze swoimi antycząstkami, w którym dochodzi do ich destrukcji. Ze względu na zasadę zachowania energii anihilacja jest nieodłącznie związana z kreacją jakiejś innej formy materii. Na przykład, para elektron i antyelektron (pozyton) może anihilować, wytwarzając przy tym parę fotonów.

Jeśli halo ciemnej materii składa się zarówno z WIMP-ów, jak i anti-WIMP-ów, lub jeśli cząstki ciemnej materii, tak jak fotony, są same swoimi antycząstkami, może zachodzić anihilacja par ciemnej materii w pary cząstka-antycząstka, takie jak proton-antyproton lub elektron-pozyton. Do badania strumieni antycząstek przeznaczone są specjalne, wynoszone w górne warstwy atmosfery lub na orbitę okołoziemską detektory, takie jak PAMELA lub AMS-02 – moduł Międzynarodowej Stacji Kosmicznej. Są one misternymi konstrukcjami odróżniającymi m.in. elektrony i pozytony od innych cząstek promieniowania kosmicznego oraz określającymi ich energię. Jeśli zostanie odkryty silny sygnał – np. duża ilość antimaterii o pewnej konkretnej wartości energii – może to wskazywać na jej pochodzenie właśnie z anihilacji ciemnej materii. Czy tylko stąd? Niestety, antimateria może być produkowana także przez pulsary i wybuchy supernowych. Aby mieć pewność, że obserwowany sygnał pochodzi od poszukiwanej ciemnej materii, trzeba poprzeć wyniki eksperymentem innego rodzaju, najlepiej bezpośrednią detekcją.

Co można było ostatnio zobaczyć?

- W 2004 roku zespół eksperymentu HEAT ogłosił detekcję nadmiaru wysokoenergetycznych pozytonów, nie był to jednak bardzo zjawiskowy wynik.
- W 2008 roku zespół eksperymentu PAMELA ogłosił zaobserwowanie anomalnie dużej liczby wysokoenergetycznych pozytonów, mogących pochodzić z anihilacji ciemnej materii. Pewnym zaskoczeniem był brak nadmiaru antyprotonów, również rejestrowanych przez ten detektor. Badacze z PAMELA-i prezentowali początkowo swoje wyniki na seminariach i konferencjach, ale nie udostępnili ich bezpośrednio innym naukowcom, co skłoniło np. prof. Alessandro Strumię z Uniwersytetu w Pizie do ostentacyjnego fotografowania tych seminariów (a rozsierdzonych prelegentów do określania go mianem „fizycznego paparazziego”).
- W 2008 roku zespół eksperymentu ATIC, którego detektor wyniesiony został w górne warstwy atmosfery za pomocą balonu, zarejestrował niewyjaśniony nadmiar wysokoenergetycznych elektronów i pozytonów (detektor nie pozwalała na wyznaczenie znaku ładunku obserwowanych cząstek).
- W roku następnym dane, ogłoszone przez zespół eksperymentu HESS, nie potwierdziły nadmiaru widzianego przez ATIC.
- Za to na początku maja 2011 roku, na spotkaniu zespołu kosmicznego teleskopu Fermiego, ogłoszono, że zebrane przez to urządzenie dane są zgodne z wynikami PAMELA-i.
- 16 maja 2011 roku na pokładzie wahadłowca Endeavour udał się na okołoziemską orbitę detektor AMS-02. Urządzenie to pozwoli badać antimaterię w promieniowaniu kosmicznym z bezprecedensową dokładnością i, być może, pozwoli ostatecznie potwierdzić anomalię widzianą przez PAMELA-e.

Co z tego wynika? Sytuacja jest dość skomplikowana. Obserwowane sygnały mogą być wyjaśnione aktywnością pobliskiego pulsara. Jeżeli jednak są one wynikiem oddziaływań ciemnej materii, nikt takiego modelu nie zamawiał – cząstki ciemnej materii muszą być zaskakująco ciężkie i muszą produkować w wyniku anihilacji przede wszystkim leptony, a nie kwarki.

**Zrobić samemu!** Wiele obserwacji wskazuje na istnienie ciemnej materii, jednak fizyka to nauka przewidywania przyszłości. Za dobrą teorię fizyczną uważamy taką, która nie tylko pozwala zrozumieć znane wyniki doświadczeń, ale i daje pewne przewidywania. Dlatego wykonanie eksperymentu potwierdzającego istnienie ciemnej materii, np. poprzez wytworzenie jej w laboratorium, jest bardzo ważne – pozwala weryfikować modele teoretyczne. Czy można wytworzyć ciemną materię w kontrolowanych warunkach w laboratorium? Skoro udało się ciemną materię wyprodukować na początku Wszechświata, jest szansa na taką produkcję w akceleratorach, takich jak Wielki Zderzacz Hadronów (LHC).

**Morał.** Można myśleć o zagadce ciemnej materii jako o wielkiej, kompromitującej luce w naszym rozumieniu Wszechświata. Nie należy jednak zapominać, że próby jej rozwiązania stanowią ogromną motywację do uzupełniania teorii oddziaływań fundamentalnych oraz rozwoju technik doświadczalnych. Niewykluczone, że zagadka ta będzie miała konsekwencje porównywalne z odkryciem promieniotwórczości ponad sto lat temu, które, jak to dzisiaj widzimy, zatrzęsło posadami fizyki klasycznej i doprowadziło do burzliwego rozwoju mechaniki kwantowej.



#### Rozwiązanie zadania F 800.

Temperatura pary jest proporcjonalna do średniego kwadratu prędkości atomów:

$$T = \rho \frac{v_{sr}^2}{3R}$$

Ruch cząstek w kierunku pionowym odbywa się w polu siły ciężkości. Zatem z jednej strony czas ruchu cząstki to  $t = \frac{l}{v_{sr}}$ , z drugiej jest to czas spadku swobodnego równy  $\sqrt{\frac{2l}{g}}$ . Stąd

$$v_{sr} = l \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

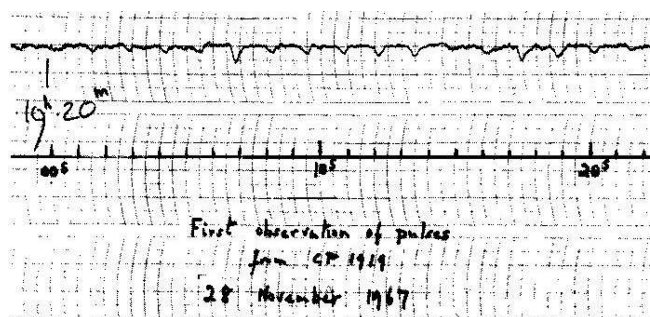
co ostatecznie daje:

$$T = \frac{\rho l^2 g}{6Rh} \approx 600 \text{ K.}$$

# Pulsarowa menażeria

Michał BEJGER

Są tacy, którzy twierdzą, że nie ma nic bardziej ekscytującego niż dreszczyk emocji towarzyszący nieoczekiwanemu odkryciu nowej klasy obiektów astronomicznych. Doskonałym przykładem takiej naukowej „żyły złota”, inspirującej rozwój nowych technik obserwacyjnych, obliczeniowych i stymulującej kolejne pokolenia teoretyków do zadawania pytań o naturę fundamentalnych procesów fizycznych, może być detekcja w 1967 r. okresowego sygnału radiowego o okresie 1,3373 s

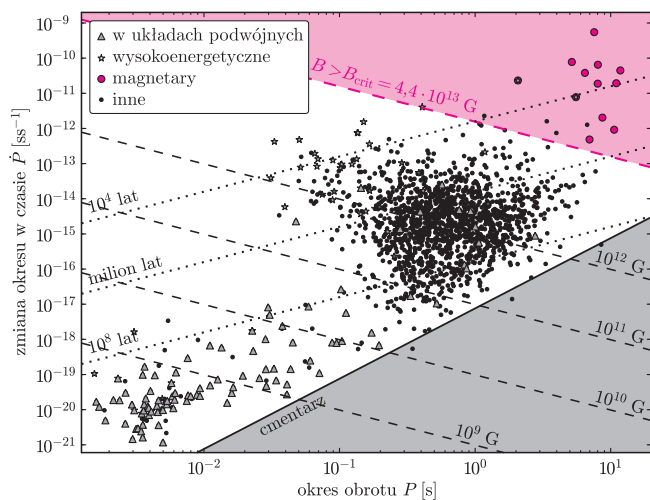


Rys. 1. Historyczny, papierowy wydruk emisji pierwszego pulsara.

– pierwszego *pulsara* (rys. 1). Połączenie słów *pulsating* i *star* charakteryzuje podstawową cechę nowo odkrytych obiektów: niespotykaną nigdy wcześniej regularność sygnału, stabilniejszą w długiej skali czasowej od najlepszych zegarów atomowych. Szczęśliwi, lecz także nieco zakłopotani odkrywcy – Jocelyn Bell i Anthony Hewish – podejrzewali początkowo, że niechcący rejestrują radzieckiego bądź amerykańskiego satelitę szpiegowskiego, brano również pod uwagę możliwość, że sygnał ten pochodził od pozaziemskiej cywilizacji, co znalazło odzwierciedlenie w tymczasowej nazwie pierwszego pulsara: oznaczenie LGM 1 było skrótem od *Little Green Men*. Jeśli jednak nie tworem sztucznym, czym mogłyby być ów niecodzienny obiekt? Teoretycy bezwzględnie wykluczyli hipotezę *układu zaćmieniowego*, a także *wibracji powierzchni* gwiazdy – częstość zmian jest bowiem o wiele za wysoka, by wspomniane układy mogły być stabilne – a za jedyne sensowne wytłumaczenie uznano ostatecznie model bardzo gęstego, niewielkiego *obracającego się* obiektu. Obecnie nie ulega wątpliwości, że pulsary są pozostałościami po wybuchach supernowych, *gwiazdami neutronowymi* o masach nieco większych do masy Słońca i promieniach około 10 km, wyposażonymi w silne pole magnetyczne. To właśnie pole magnetyczne odgrywa kluczową rolę w wytwarzaniu sygnału. Otoczenie gwiazdy (jej magnetosfera, o której zakłada się dla uproszczenia, że jest magnetycznym dipolem o osi nachylonej nieco w stosunku do osi rotacji), zawiera plazmę elektronowo-pozytonową; przyspieszane przez siłę Lorentza ładunki wirują wokół linii sił pola, emitując promieniowanie cyklotronowe i promieniowanie hamowania. Zderzenia fotonów produkują z kolei następne pary  $e^+e^-$  i tak powstają kaskady elektromagnetyczne, które w okolicach biegunów magnetycznych tworzą snopy promieniowania radiowego omiatające przestrzeń w takt obrotu pulsara, na podobieństwo latarni

morskiej (gwoli ścisłości należy jednak przyznać, że szczegóły budowy i działania magnetosfer nie są, ponad 40 lat po odkryciu, zrozumiane w sposób zadowalający).

Współczesna technika chronometrażu umożliwia pomiar czasu nadejścia sygnału z niemal nieograniczoną dokładnością (nawiasem mówiąc, jakie astronom może porządnie zmierzyć). Rysunek 2 przedstawia zależność okresu obrotu  $P$  od prędkości zmian okresu  $\dot{P}$  dla galaktycznej populacji pulsarów. Znajdziemy wśród nich takie, które obracają się ponad pół tysiąca razy na sekundę. Obecny rekord częstotliwości, 716 Hz, należy do PSR J1748-2446ad odkrytego w 2005 roku (gdyby próżnia przewodziła dźwięk, słyszelibyśmy go w skali równomiernie temperowanej w okolicach tonu  $F^4$ ). Znane są też



Rys. 2. Diagram okresu obrotu-pochodna okresu ( $P$ - $\dot{P}$ ), na którym zaznaczono różne podklasy obecnie znanych pulsarów.

wolno rotujące obiekty o okresach rzędu kilku sekund. Jak wynika z rysunku 2, dla wszystkich pulsarów zmiana okresu  $\dot{P}$  jest dodatnia, czyli okres  $P$  rośnie. Dzieje się tak dlatego, że emisja promieniowania odbiera gwiazdzie energię kinetyczną. Znajomość  $P$  i  $\dot{P}$  pozwala oszacować (szczegółowy wyprowadzenia pomijamy) dipolowe pole magnetyczne danego pulsara,

$$(1) \quad B \simeq 3,2 \times 10^{19} (P\dot{P}/s)^{1/2} \text{ [G]},$$

a także otrzymać jego *wiek charakterystyczny*

$$\tau \approx \frac{P}{2\dot{P}} \text{ [s]}.$$

Na przykład, dla pulsara w mgławicy Kraba, dla którego obecnie  $P = 0,033$  s,  $\dot{P} = 10^{-12,4}$ , wiek charakterystyczny  $\tau$  wynosi około 1300 lat. Ponieważ wiadomo skądinąd, że jego prawdziwy wiek to 957 lat (wybuch supernowej Kraba był obserwowany przez chińskich astronomów w 1054 r.), nie jest to dokładność oszałamiająca, zawsze jednak lepsze takie oszacowanie niż żadne.

Linie stałego  $B$  i  $\tau$  zaznaczone są na rysunku 2, odpowiednio przerywanymi i kropkowanymi liniami. Pulsar zaczyna swe życie z okresem  $P \simeq 20$  ms, po czym, stopniowo zwalniając, zmierza w dół diagramu  $P\dot{P}$  zachowując mniej więcej stałe pole magnetyczne. Powolna rotacja prowadzi jednak do stopniowego zaniku mechanizmu pulsu radiowego – i oniemiały pulsar trafia w obszar diagramu zwany Cmentarzem. Jeśli jednak jakimś cudem uda mu się spotkać zacnego towarzysza (tj. stać się składnikiem układu podwójnego), ten może uratować go z opresji i przywrócić głos, stosując tzw. recykling akrecyjny. W lewej dolnej części rysunku 2 widzimy grupę szybko rotujących pulsarów, występujących głównie w układach podwójnych – to właśnie rozkręcone przez akrecję rekordzistki szybkości, bardzo stare gwiazdy neutronowe o polu magnetycznym mocno osłabionym przez procesy akrecyjne. Gwiazdy w układach podwójnych przodują także w jasności: Scorpius X-1, pierwsze astrofizyczne źródło promieniowania rentgenowskiego, odkryte przez zespół Riccardo Giacconiego w 1962 r. (nagroda Nobla w 2002 r.), jest najjaśniejsze na całym niebie. Niejako przeciwieństwem pulsarów milisekundowych są magnetary (prawy górny róg rysunku 2), mające pola magnetyczne o 2–3 rzędy wielkości przewyższające średnią wartość  $10^{12}$  G dla pulsarów, sekundowe okresy obrotu, które szybko się wydłużają (duże  $\dot{P}$ ), są one też prawdopodobnie dość młode. Magnetary od zwykłych pulsarów radiowych oddziela linia  $B_{\text{crit}} = m_e^2 c^3 / \hbar e = 4,4 \cdot 10^{13}$  G, odpowiadająca *polu krytycznemu Schwingera*. Dla  $B > B_{\text{crit}}$  efekty kwantowe związane z oddziaływaniem fotonów z polem magnetycznym stają się istotne, co

prowadzi do spadku produkcji par  $e^+e^-$ , przeważająca większość magnetarów jest więc radiowo cicha. Model magnetara stworzono w celu wyjaśnienia obserwacji obiektów emitujących powtarzające się błyski miękkiego promieniowania  $\gamma$  (SGR, *Soft Gamma Repeaters*) oraz anomalnych pulsarów rentgenowskich (AXP, *Anomalous X-ray Pulsars*). Pierwsze z wymienionych obiektów charakteryzują się niezbyt częstymi, ale potężnymi wybuchami, zdolnymi „oślepić” wszelkie satelity badawcze i znacząco obniżyć granicę ziemskiej jonosfery. AXP emitują natomiast pulsy promieniowania rentgenowskiego, których zakresu energetycznego nie da się wytłumaczyć za pomocą modelu pulsara o typowym polu magnetycznym i charakterystycznych dla magnetarów wartości  $P$  (stąd określenie *anomalny*).

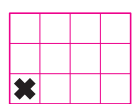
Zgłębianie tajemnic pulsarów wymaga zastosowania prawie każdej z dziedzin nowoczesnej fizyki. Nagrodą za trudy jest jednak ciekawie rozwijająca się gałąź wiedzy i niewyczerpane źródło inspiracji nie tylko naukowych – przykładem słynny album grupy Joy Division (o znamionym tytule *Unknown pleasures*), którego okładka przedstawia sekwencję pulsów pierwszego pulsara.



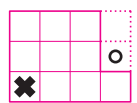
Rys. 3. Okładka albumu *Unknown Pleasures* zespołu Joy Division, przedstawiająca ciąg pulsów PSR B1919+21.

# Zagrajmy w czekoladę

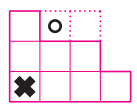
Wojciech CZERWIŃSKI\*



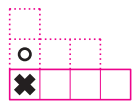
↓ Bolek



↓ Lolek



↓ B.



↓ L.



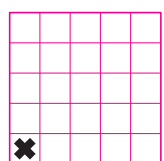
Rys. 1. Przykładowy przebieg gry.



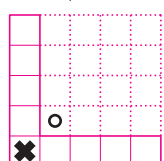
↓ B.



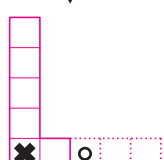
Rys. 2



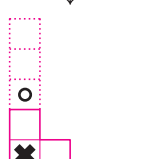
↓ B.



↓ L.



↓ B.



↓ L.

⋮

Rys. 3

Bolek i Lolek zdecydowali się zagrać w ryzykowną grę. Mają do dyspozycji czekoladę, podzieloną na małe kwadratowe kawałki. Nie jest to jednak zwyczajna czekolada – jej lewy dolny kwadrat jest zatruty. Ruch polega na wybraniu jednego niezjedzonego jeszcze kawałka oraz zjedzeniu go wraz ze wszystkimi znajdującymi się wyżej lub bardziej na prawo od niego (czyli podczas wykonywania ruchu trzeba zjeść przynajmniej jeden kawałek czekolady). Jak łatwo się domyślić, gracz, który zje truciznę, przegrywa. Grę rozpoczyna zawsze Bolek, a potem chłopcy ruszają się na zmianę (rys. 1). Zastanowimy się nad pytaniem, który z nich ma strategię wygrywającą.

Żeby odpowiedzieć na to pytanie, spróbujmy najpierw rozwiązać najprostsze przypadki. Dla czekolady o wymiarach  $1 \times n$ , gdzie  $n > 1$ , czyli będącej poziomym paskiem, rozwiązanie jest łatwe. Bolek wybiera drugi kawałek od lewej i zjada go razem z całą resztą leżącą na prawo od niego (rys. 2). W ten sposób zostawia Lolkowi jedynie kawałek z trucizną, którą ten niechybnie zje, tym samym przegrywając.

Wytrawni Czytelnicy znają z pewnością trik polegający na wykorzystaniu symetrii gry. To pozwoli nam rozwiązać kolejny przypadek. Jeżeli czekolada ma wymiary  $n \times n$  dla  $n > 1$ , to Bolek również może zapewnić sobie wygraną. W pierwszym ruchu zjada kwadrat o boku  $n - 1$ , zostawiając Lolkowi poziomy pasek o wysokości 1 i szerokości  $n - 1$ , pionowy pasek o wysokości  $n - 1$  i szerokości 1 oraz truciznę (rys. 3). Następnie Bolek naśladuje ruchy Lolka: wykonuje to samo, tylko w innym pasku. Przykładowo, gdy Lolek zje trzy kawałki z poziomego paska, Bolek odpowie mu zjedzeniem trzech kawałków z pionowego paska. Tym sposobem nigdy nie zje trucizny i w pewnym momencie doprowadzi Lolka do sytuacji sam na sam z jednym, zatrutym kawałkiem czekolady.

Dalej jest coraz trudniej, ale rozważmy jeszcze jeden przypadek. Dla czekolady o wymiarach  $2 \times n$  Bolek także ma strategię wygrywającą. Tym razem pozostawia on Lolkowi po swoim ruchu część czekolady w kształcie schodka, to znaczy w dolnym rzędzie jest  $n$  kawałków, a w górnym  $n - 1$  (rys. 4). Krótka analiza przypadków pozwoli nam stwierdzić, że niezależnie od ruchu Lolka w następnym ruchu Bolek może znów doprowadzić do takiej właśnie sytuacji. Grając zgodnie z tą strategią, nie zje nigdy trucizny, więc po pewnej liczbie ruchów musi zjeść ją Lolek.

W tym miejscu zaczynają się schody. Naprawdę nie jest łatwo znaleźć jeszcze jakąś szczególną sytuację, w której można opisać strategię – polecam samodzielne próby rozpatrzenia wybranych przypadków.

Z pomocą przychodzi nam nieintuicyjna metoda zwana *podkradaniem strategii*. Udowodnimy, że Bolek ma strategię wygrywającą zawsze, niezależnie od wymiarów czekolady, jednak takiej strategii nie wskażemy.

Przypuśćmy nie wprost, że to Lolek ma strategię wygrywającą; doprowadzimy do sprzeczności. Rozważmy następującą strategię Bolka. W pierwszym ruchu zjada on tylko jeden mały kwadracik z prawego górnego rogu i od tej chwili „kradnie” strategię Lolka. To oznacza, że w swoim ruchu Bolek patrzy, jak w tej sytuacji ruszyły się Lolek (możemy przyjąć, że strategia Lolka jest znana), i rusza się dokładnie w ten sposób. Pamiętajmy, że strategia Lolka jest wygrywająca, więc zgodnie z naszym założeniem, mimo wszystkich swoich wysiłków, Bolek przegra.

Do celów dalszych rozważań oznaczmy kształty czekolady po  $k$ -tym ruchu Bolka i Lolka odpowiednio przez  $B_k$  i  $L_k$ . Czyli kolejne konfiguracje w grze to:

$$B_1, L_1, B_2, L_2, \dots, B_{k-1}, L_{k-1}, B_k,$$

gdzie  $L_{k-1}$  składa się z jednego, zatrutego kawałka czekolady, a  $B_k$  jest puste (skoro Bolek przegra, to zje ostatni kawałek, co zakończy grę).

Udowodnimy teraz, że wbrew wcześniejszym założeniom jednak wygra Bolek. Przypomnijmy, że  $B_1$  to prostokąt bez jednego kawałka w prawym górnym rogu. Przyjrzyjmy się pierwszemu ruchowi Lolka, z  $B_1$  do  $L_1$ . Dokonajmy kluczowej obserwacji – kształt  $L_1$  to z pewnością cała czekolada bez pewnej prostokątnej części w prawym górnym rogu. Tylko do takich kształtów jest w stanie doprowadzić

\*doktorant, Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

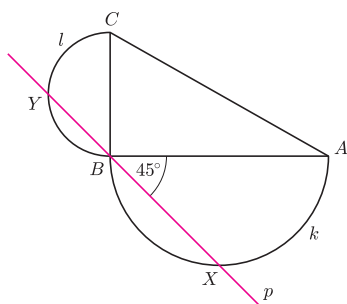


**Rozwiązanie zadania M 1331.**

Z nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową mamy

$$\begin{aligned}
& AX + XY + YC = \\
& = (AX + XB) + (BY + YC) \leq \\
& \leq 2\sqrt{\frac{AX^2 + XB^2}{2}} + 2\sqrt{\frac{BY^2 + YC^2}{2}} = \\
& = \sqrt{2}(AB + BC).
\end{aligned}$$

Obwód czworokąta jest maksymalny, gdy maksymalna jest suma  $AX + XY + YC$ . Powyżej zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy  $AX = XB$  i  $BY = YC$ , czyli wtedy i tylko wtedy, gdy prosta  $p$  tworzy z półprostą  $BA$  kąt  $45^\circ$ .



Lolek z  $B_1$ . Jednak taką sytuację Bolek mógł osiągnąć już w pierwszym swoim ruchu. Spójrzmy więc, jak wówczas potoczyłaby się rozgrywka.

Kształty czekolady w tej rozgrywce po  $i$ -tym ruchu Bolka i Lolka oznaczmy odpowiednio  $B'_i$  oraz  $L'_i$ . Mamy  $B'_1 = L_1$ . Zauważmy jednak, że w obu rozgrywkach zarówno Lolek, jak i Bolek, stosują tę samą strategię – strategię wygrywającą Lolka, którą to Bolek właśnie podkrada. Zatem ta rozgrywka potoczyłaby się dokładnie tak samo, jak rozważana przed chwilą; jedyna różnica polega na tym, że wszystko odbywa się tu o ruch wcześniej. Skoro wszystko jest przesunięte o jeden ruch, to zauważamy, że zatruty kawałek tym razem zjada Lolek. A przecież jego strategia miała być wygrywająca...

Żeby to precyzyjnie uzasadnić, napiszmy, że ciąg otrzymanych kształtów czekolady wygląda następująco:

$$B'_1, L'_1, B'_2, L'_2, \dots,$$

gdzie  $B'_i = L_i$  oraz  $L'_i = B_{i+1}$ . Skoro tak, to rozgrywka zakończy się dokładnie tak, jak opisywana wcześniej, czyli na ruchu z kształtu  $L_{k-1}$  do kształtu  $B_k$ . W rozpatrywanej teraz rozgrywce te pozycje są oznaczone odpowiednio  $B'_{k-1}$  oraz  $L'_k$ , czyli ostatni ruch (zjedzenie trucizny) wykonuje Lolek – to on przegrywa. Otrzymujemy w ten sposób sprzeczność z założeniem, że istnieje strategia wygrywająca dla Lolka.

Wykazaliśmy więc, że strategii wygrywającej nie może mieć Lolek. Korzystając z twierdzenia mówiącego, że dla gier takich jak czekolada dokładnie jeden z graczy ma strategię wygrywającą, dostajemy, że musi mieć ją Bolek. Twierdzenie to nie jest trudne, ale na tym marginesie jest zbyt mało miejsca, by je udowodnić. Idea dowodu polega na rozpatrywaniu drzewa gry, które jest ograniczone, i uzasadnianiu, że w tej sytuacji z dowolnego jego wierzchołka dokładnie jeden gracz ma strategię wygrywającą.

Argument podkradania strategii (ang. *strategy stealing*) jest użyteczny przy analizie wielu innych gier. Pozwala wykazać, na przykład, że w grach go, hex, gomoku (kółko i krzyżyk do pięciu na planszy  $19 \times 19$ ) i wielu innych wygrywa pierwszy gracz. Zazwyczaj, tak jak dla czekolady, jego użycie jest niezwykle proste, a pozwala uzasadnić istnienie strategii, od których znalezienia jesteśmy bardzo dalecy.

W przypadku gry go argument podkradania strategii działa z bardzo prostej przyczyny – po prostu wstrzymywanie się od ruchu jest dozwolone. Stąd w oczywisty sposób gracz pierwszy mógłby ukraść strategię gracza drugiego, wstrzymując się przy pierwszym ruchu. Ciekawe, że chociaż wiemy, który gracz wygrywa, znalezienie strategii dla niego jest niesłychanie trudne. Najlepsze programy komputerowe grające w szachy wygrywają z szachowym mistrzem świata, dla go zaś grają jedynie na poziomie początkującego. Dotychczas największy rozmiar planszy, dla którego znaleziona została strategia wygrywająca, to  $7 \times 7$ , a oryginalną grę rozgrywa się na planszy  $19 \times 19$ , więc do pełnego sukcesu jeszcze dużo brakuje.

Dla gomoku powód działania podkradania strategii jest nieco inny, ale również nietrudny. Po prostu postawiony krzyżyk lub kółko nigdy nie przeszkadza graczowi, który go postawił. Zatem pierwszy gracz może postawić swój znak i dalej grać tak, jak gdyby wcale tego nie zrobił. Gdy w pewnym momencie strategia zmusi go do postawienia znaku w miejscu, gdzie ten już jest, to on postawi go po prostu gdzie indziej, i tak dalej.

Z kolei dla gry hex rozwiązanie jest dalece nietrywialne. Tę grę wymyślił John Nash i to on znalazł gracza wygrywającego. Trudność polega na wykazaniu, że w tej grze nigdy nie ma remisów – wówczas argument działa w podobny sposób jak dla gomoku. Dla hex największa plansza, dla której znana jest strategia wygrywająca, to  $9 \times 9$ , podczas gdy zwykle gra się na  $11 \times 11$ .

Z pewnością jest jeszcze wiele gier, w których trik z podkradaniem strategii się przydaje – przyjemność odnajdywania ich i badania pozostawiam Czytelnikom.

Rys. 4







# mała delta

## Jak znaleźć klucz?

Każdy od czasu do czasu potrzebuje metody przekazania komuś pewnych wiadomości tak, żeby niepowołane osoby nie miały szans na ich przechwycenie. Począwszy od zabaw z kolegami na podwórku, a skończywszy na operacjach bankowych, wojskowych czy wykorzystujących dane osobowe – bez szyfrów po prostu nie da się żyć. Do zaszyfrowania danych zwykle potrzebny jest klucz – pewne słowo czy liczba, które najpierw kierują procesem tworzenia szyfru, a później pozwalają odbiorcy wiadomości ją odkodować. Osoby, które chcą porozumiewać się za pomocą szyfru, muszą najpierw uzgodnić klucz między sobą. I tu pojawia się problem: jak ustalić klucz, tak żeby nikt oprócz nas nie mógł go poznać?

Można się w tym celu spotkać, ale każdy, kto oglądał filmy szpiegowskie, wie, jak łatwo jest podsłuchać rozmowę. Wysłanie klucza pocztą, wszystko jedno, czy papierową, czy elektroniczną, to pomysł tak samo skazany na porażkę. A gdyby wysłać klucz w formie zaszyfrowanej? Trzeba by najpierw ustalić klucz do szyfru, którym zaszyfrowujemy klucz do tego szyfru, którego chcemy używać w korespondencji, czyli wróciliśmy do początkowego problemu... Nie załamujmy się jednak: banki mają się całkiem dobrze (co wyraźnie widać z szyldów lokali użytkowych), tajemnice wojskowe raczej też, i chociaż parę miesięcy temu pewna firma miała duże kłopoty z wyciekiem danych użytkowników konsoli do gier, to jednak ogólny obraz sytuacji wskazuje na to, że istnieją dobre metody zabezpieczania informacji.

Zobaczmy więc, jak ustalić klucz do szyfru w taki sposób, żeby szanse na poznanie go przez osoby niepowołane były bardzo, bardzo małe. Zaczniemy od tego, że ustalanie klucza będzie się odbywać publicznie – osoby A i B, które ten klucz ustalają, wszystkie informacje, które muszą wymienić, mogą ogłosić wszem i wobec. To oznacza, że przy tej metodzie problem podsłuchu nie istnieje. Metoda jest tak opracowana, żeby osoba, która usłyszy wszystkie informacje wymieniane przez osoby A i B, nie mogła odgadnąć ustalonego klucza. Powiesz, Czytelniku, że to niemożliwe? Sprawdźmy!

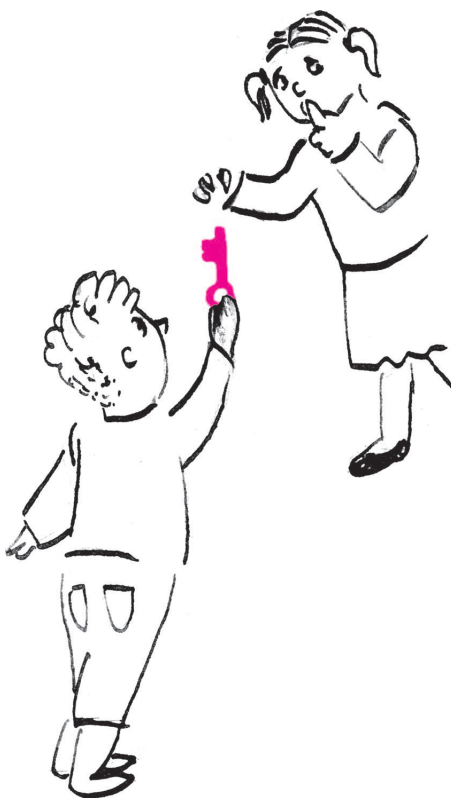
Będziemy potrzebowali operacji *modulo*, która daje resztę z dzielenia jednej liczby przez drugą. Zapis  $m \bmod n$  oznacza resztę z dzielenia  $m$  przez  $n$ . Na przykład  $17 \bmod 3 = 2$ , a  $21 \bmod 7 = 0$ . W ten sposób możemy łatwo przerobić dowolną liczbę całkowitą na liczbę z zakresu od 0 do  $n - 1$ . Niech teraz  $n$  oznacza pewną dużą liczbę, a  $m$  będzie pewną liczbą dodatnią mniejszą niż  $n$ . Osoby A i B uzgadniają tę parę liczb, nie ukrywając ich przed światem. Następnie wybierają jeszcze dwie liczby, ale tym razem tajne. Osoba A wymyśla liczbę  $a$  z zakresu od 0 do  $n - 1$  i nikomu o niej nie mówi; tak samo osoba B wybiera liczbę  $b$ .

Następnym krokiem jest wykonanie potęgowania. Osoba A oblicza wartość

$$a_1 = m^a \bmod n$$

i ją udostępnia. Analogicznie, osoba B oblicza i udostępnia

$$b_1 = m^b \bmod n.$$



Kolejne obliczenie pozwala już otrzymać klucz. Osoba A bierze wartość  $b_1$  obliczoną przez osobę B, podnosi do potęgi  $a$  i wykonuje na wyniku operację mod  $n$ :

$$k = (b_1)^a \bmod n = (m^b \bmod n)^a \bmod n = m^{ab} \bmod n.$$

(Sprawdź dokładnie, Czytelniku, dlaczego końcowa równość jest prawdziwa.) Osoba B oblicza

$$(a_1)^b \bmod n = (m^a \bmod n)^b \bmod n = m^{ab} \bmod n = k,$$

czyli obie osoby otrzymały tę samą wartość  $k$ , która będzie ich tajnym kluczem do szyfru. Ta procedura uzgadniania klucza to *protokół Diffiego–Hellmana*.



A co wie osoba z zewnątrz, która chciałaby odgadnąć klucz i złamać szyfr? Otóż, wbrew pozorom, bardzo niewiele. Publicznie zostały podane wartości  $n$ ,  $m$ ,  $a_1 = m^a \bmod n$  i  $b_1 = m^b \bmod n$ . Żeby odtworzyć klucz, potrzebna jest znajomość liczby  $a$  lub  $b$  – mając jedną z tych liczb, osoba podsłuchująca może przeprowadzić takie obliczenie, jak osoby A i B pod koniec ustaleń. Problem sprowadza się więc do pytania, czy znajomość liczb  $m$ ,  $n$  i  $m^a \bmod n$  wystarcza do wyznaczenia liczby  $a$ . Okazuje się, że ogólnie nie wystarcza, czyli można dobrać liczby  $m$ ,  $n$ ,  $a$  i  $b$  w taki sposób, żeby odgadnięcie klucza przez osobę z zewnątrz było praktycznie niemożliwe przy naszym obecnym stanie wiedzy. Oczywiście, może się zdarzyć, że za kilka lat powstaną algorytmy i programy radzące sobie świetnie z tym problemem, ale na razie opisane metody można z powodzeniem stosować.

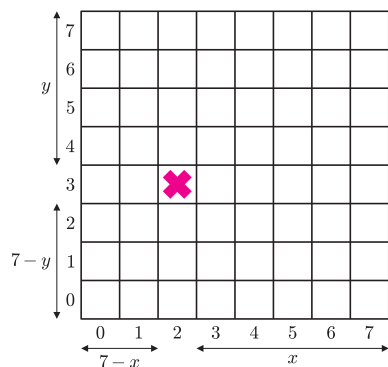
Problem odtworzenia liczby  $a$  z liczb  $n$ ,  $m$  i  $m^a \bmod n$  nazywa się *problemem logarytmu dyskretnego*. Szukając wartości  $a$ , próbujemy wykonać operację odwrotną do potęgowania modulo  $n$  i stąd logarytm w nazwie. Potęgowanie modulo  $n$  jest tak zwaną funkcją jednokierunkową – samą potęgę można obliczyć łatwo i szybko, ale odwrócenie tej operacji jest dla nas (na razie) bardzo trudnym problemem obliczeniowym. Tak trudnym, że dla odpowiedniego doboru danych (potrzebne są naprawdę duże, kilkusetcyfrowe liczby) uznaje się go właściwie za niewykonalny i jego trudności powierza się ważne tajemnice.

*Małą Deltę przygotowała Maria DONTEN-BURY*



### Rozwiązanie zadania M 1332.

Odpowiedź: nie.



Załóżmy, że pole  $(x, y)$  jest zatrute. Pokażemy, że Lolek ma strategię wygrywającą. Gra polega tak naprawdę na zmniejszaniu przez graczy w każdym ruchu jednej z liczb  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , które na początku mają wartości  $x, 7-x, y, 7-y$ , odpowiednio, a oznaczają liczbę kolumn na prawo, na lewo, liczbę wierszy w górę, w dół od zatrutego pola w aktualnej tabliczce czekolady. Rozważmy liczbę  $s = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4$ , gdzie  $u \oplus v$  oznacza dodawanie liczb  $u$  i  $v$  zapisanych binarnie, bez przeniesienia (np.  $7 \oplus 3 = (111)_2 \oplus (011)_2 = (100)_2 = 4$ ).

Na początku gry, przed ruchem Bolka, mamy

$$s = x \oplus (7-x) \oplus y \oplus (7-y) = (x \oplus ((111)_2 - x)) \oplus (y \oplus ((111)_2 - y)) = (111)_2 \oplus (111)_2 = 0.$$

Ogólnie, gdy  $s = 0$ , w następnym ruchu będziemy mieli  $s > 0$  (któraś z liczb  $a_i$  zmieniła się). Gdy  $s > 0$ , zawsze istnieje taki ruch, że po jego wykonaniu  $s = 0$ . Istotnie, bez utraty ogólności możemy zakładać, że  $(a_1)_2$  ma niezerowy bit na pozycji pierwszego bitu znaczącego liczby  $(s)_2$ . Wówczas  $a_1 \oplus s < a_1$ , więc wystarczy zmniejszyć liczbę  $a_1$  o  $a_1 - (a_1 \oplus s)$ , bo wtedy liczba  $s$  wyniesie

$$(a_1 \oplus s) \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = s \oplus s = 0.$$

Zatem Lolek po każdym ruchu zostawi Bolka w sytuacji, w której  $s = 0$ , więc w końcu Bolek zostanie w sytuacji, w której  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$  (w każdym ruchu któraś liczba się zmniejsza), co odpowiada temu, że Bolek zostanie z zatrutą kostką i przegra.

**Uwaga.** To zadanie jest wariantem gry nim, o której można przeczytać w *Delcie 7/2010*, w artykule Tomasza Idziaszka *Gra o wielu obliczeniach*.



## Prosto z nieba: Zorza polarna

Zorza polarna [1] (zwana również *aurora borealis* na półkuli północnej, a *aurora australis* na południowej), czyli zjawiskowa, dynamicznie zmienna iluminacja nocnego nieba, nie tylko stanowi prawdziwą przyjemność dla oka, lecz również jest ciekawym przykładem bezpośredniego wpływu Kosmosu na Ziemię. Przyczyną tajemniczych kolorowych światła, widocznych zwykle w okolicach kół podbiegunowych (choć zdarzają się zorze na naszych szerokościach geograficznych!), jest Słońce, a bardziej precyzyjnie: oddziaływanie wiatru słonecznego z polem magnetycznym Ziemi. Naładowane cząstki wiatru słonecznego „łapane” są przez pole magnetyczne i sprowadzane w okolice biegunów magnetycznych, gdzie na wysokości około 80 km, oddziałują z atomami atmosfery. Zjonizowane lub wzbudzone atomy azotu i tlenu, absorbujące elektron lub powracające do stanu podstawowego, emitują fotony o energii w zakresie światła widzialnego. Kolor zależy, oczywiście, od rodzaju atomów i energii związanej z przejściem elektronu: tlen produkuje światło czerwone i zielone, podczas gdy azot niebieskie (gdy absorbuje elektron) lub czerwono-purpurowe (gdy wzbudzony elektron wraca do stanu podstawowego). Rozkład kolorów zorzy wyjaśnia się, biorąc pod uwagę średni czas, po którym wzbudzone atomy wracają do stanu podstawowego (np. dla tlenu emisja spontaniczna fotonu o kolorze zielonym zdarza się po około sekundzie, emisja fotonu o kolorze czerwonym – po dwóch minutach), oraz zależną od gęstości atmosfery liczbę atomów i zderzeń między nimi na danej wysokości ponad powierzchnią Ziemi.

Burze magnetyczne mogą powodować utrudnienia w komunikacji radiowej, a nawet bezpośrednio wpływać na pracę urządzeń elektronicznych. Źródła historyczne donoszą, że w czasie rekordowo energetycznej burzy magnetycznej roku 1859 telegrafici w Stanach Zjednoczonych, w Bostonie i Portland, mogli prowadzić rozmowę przy odłączonych bateriach, ponieważ w przewodzie pomiędzy tymi miastami burza indukowała wystarczającą do pracy ilość prądu [2]. Natężenie wiatru słonecznego zmienia się wraz z aktywnością Słońca, które obecnie „budzi się” po stosunkowo długim okresie niskiej aktywności. Możemy więc w najbliższych miesiącach spodziewać się coraz więcej plam, rozbłysków i protuberancji na powierzchni Słońca, a co za tym idzie – jaśniejszych i dłużej trwających zórz, być może, przy odrobinie szczęścia, widocznych także w Polsce.

Michał BEJGER

[1] <http://apod.nasa.gov/apod/ap101124.html>

[2] Green et al., 2006, *Eyewitness reports of the great auroral storm of 1859*, *Advances in Space Research* 38, p. 145.



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

**M 1330.** Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  liczba

$$\left(4 - \frac{2}{1}\right) \cdot \left(4 - \frac{2}{2}\right) \cdot \left(4 - \frac{2}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(4 - \frac{2}{n}\right)$$

jest całkowita.

Rozwiązanie na str. 24

**M 1331.** Na zewnątrz trójkąta prostokątnego  $ABC$ , na przyprostokątnych  $AB$  i  $BC$  jako na średnicach, zbudowano półokręgi  $k$  i  $l$ , odpowiednio. Prosta  $p$  przechodząca przez punkt  $B$  przecina łuki  $k$  i  $l$  w punktach  $X$  i  $Y$  (rys. 1). Znaleźć położenie tej prostej, dla którego obwód czworokąta  $AXYC$  jest maksymalny.

Rozwiązanie na str. 7

**M 1332.** Bolek i Lolek grają w następujący wariant gry w czekoladę (por. artykuł Wojciecha Czerwińskiego *Zagrajmy w czekoladę*): tabliczka ma wymiary  $8 \times 8$ , jedna kostka jest zatruta (rys. 2), w każdym ruchu gracz łamie tabliczkę wzdłuż linii i zjada jedną z dwóch otrzymanych części. Przegrywa ten, kto zje zatrutą kostkę. Grę rozpoczyna Bolek. Czy istnieje takie położenie zatrutego pola, przy którym Bolek ma strategię wygrywającą?

Rozwiązanie na str. 9

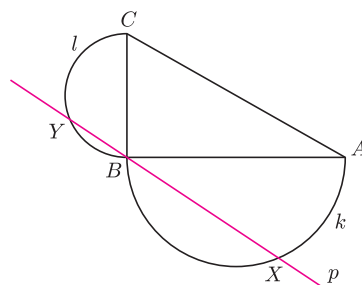
Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 799.** Gorącą plazmę wodorową o temperaturze  $10^5$  K umieszczono w polu magnetycznym o indukcji 0,1 T. Znaleźć promień cyklotronowy elektronów w tej plazmie.

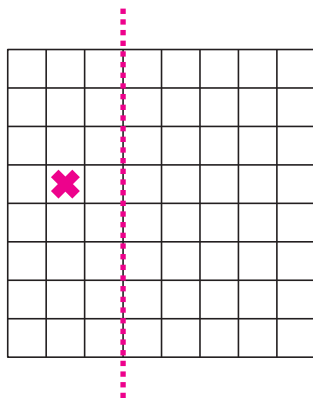
Rozwiązanie na str. 2

**F 800.** Z pojemnika, w którym znajdują się silnie zagęszczone pary potasu, ucieka przez wąską, poziomą rurkę wiązka atomów. Oszacować temperaturę par potasu, wiedząc, że na poziomym odcinku o długości  $l = 0,5$  m średnia pionowa odległość między atomami wynosi  $h = 3 \mu\text{m}$ .

Rozwiązanie na str. 3



Rys. 1



Rys. 2

## Szacunek dla ośmionoga

Najstynniejszym polskim arachnologiem, znanym na całym świecie, jest Profesor Marek Żabka z Uniwersytetu Przyrodniczo-Humanistycznego w Siedlcach. W 2010 r. powierzono Mu organizację XVIII Światowego Kongresu Arachnologów.

Wiadomość dla tych, którym się wydaje, że wszystko, co ważne, dzieje się w Nowym Jorku, Paryżu czy Warszawie: można mieszkać i pracować w Siedlcach i być sławnym w całym świecie.

Marek Żabka zaczął karierę od badań pająków (prawda, trzeba jeszcze wiedzieć, że arachnologia to nauka o pająkach) na skarpie wiślanej w Płocku. Potem ruszył w świat – do Wietnamu i Australii. Stał się specjalistą w zakresie orientalnych pająków. I bardzo lubi o pająkach opowiadać, nie tylko studentom biologii w Siedlcach (tym to się poszczęściło!), lecz także wszędzie, gdzie Go zaproszą – na Piknikach naukowych, Festiwalach, dzieciom i seniorom, w pismach popularyzatorskich.

Wie o pająkach wszystko: jak przędą sieci, jak się kochają, jak walczą z wrogami, co jedzą, jak spędzają zimę. Wie, że w Polsce nie ma żadnego gatunku groźnego dla człowieka. Pająki żyją na ziemi od 400 mln lat (sieć zakłeta w bursztynie liczy 140 mln lat), a ludzie – 150 tysięcy, można więc sądzić, mówi, że nie istnieją po to, by atakować ludzi.

Narządy wytwarzające przędzę są niezwykle złożone. Na odwłoku położonych jest co najmniej 9 gruczołów, które produkują płynną białkową wydzielinę, wyrzucaną przez specjalny kanał, a potem są jeszcze brodawki przędne na kądziolkach. Białko zastyga w postaci nici, choć nie wiadomo do dziś, dzięki jakim przemianom. Kądziolki (3 pary) składają się z kilku segmentów, są porównywalnej długości z odwłokiem. Niektóre pająki mają jeszcze siteczko, z którego wyczesują nici grzebykiem z włosów czwartej pary nóg.

Pająki żyjące społecznie budują kolektywnie sieci o powierzchni wielu metrów kwadratowych – jest to wspólne łowisko i miejsce mieszkania i rozrodu. Wytworzenie sieci jest energochłonne, dlatego też zniszczona sieć wchodzi w recykling, czyli... jest zjadana!

Inżynierowie genetyczni prowadzą prace zmierzające do uzyskania mikroorganizmów, które wytwarzałyby pajęczynę w dużych ilościach. Może kiedyś będziemy z tego jedwabiu nosić ubrania?

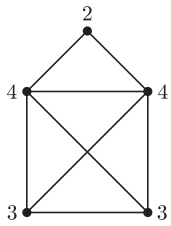
Pomysłem uczennicy z Lexington, Judy Miles, było wysłanie w kosmos na statku Skylab dwu pajęczych samic, Arabelli i Anity (1973). Kosmonauci obserwowali, jak przędą sieci w warunkach nieważkości. Po dobie pająki przystąpiły do pracy. Usnute przez nie sieci były cieńsze niż ziemskie i troszeczkę różniły się wzorem. Obie nie przeżyły podróży, prawdopodobnie w wyniku odwodnienia.

Ostatnio wykonano cykl badań (już bez uczonego z Siedlec) nad pająkami, które mieszkają, a nawet składają jajka w uwitych z sieci kulach zanurzonych pod wodą. Badacze z dwu laboratoriów, w Adelaida i w Berlinie, zbudowali sztuczny staw o kontrolowanej temperaturze i zdobyli zezwolenie na odłowienie w naturze pewnej liczby pająków. Do pęcherza wsunięto mały miernik stężenia tlenu. Bąbel pełni rolę skrzeli, pobierając rozpuszczony w wodzie tlen. Pomiary stężenia tlenu w bąblu można było przeliczać na ilość tlenu potrzebną pająkowi do metabolizmu. Intensywność metabolizmu była niska, podobnie do tej, którą znamy u pająka czekającego nieruchomo na ofiarę koło sieci. Po dobie powietrze trzeba w bąblu uzupełnić, zatem pająk wychodzi na powierzchnię wody i donosi powietrze w odwłoku.

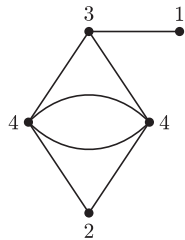
Proponuję zgasić w zarodku chęć natychmiastowego zgniatania butem każdego napotkanego pająka, lepiej z szacunkiem usunąć go delikatnie miotłą ze swojego otoczenia.

Magdalena FIKUS





Rys. 1



Rys. 2

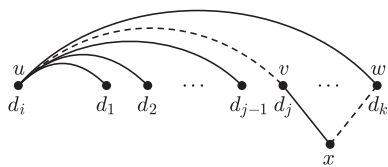
W grafie nieskierowanym możemy obliczyć stopień każdego wierzchołka, czyli liczbę krawędzi incydentnych z tym wierzchołkiem. Przykładowo, dla grafu-koperty (rys. 1) otrzymujemy w ten sposób ciąg stopni 4, 4, 3, 3, 2. Wykonanie takiego przekształcenia dla danego grafu jest naprawdę proste. Możemy jednak postawić pytanie odwrotne: czy mając dany ciąg liczb, możemy stwierdzić, czy odpowiada on stopniom wierzchołków jakiegoś grafu nieskierowanego, a jeśli tak, zrekonstruować ten graf?

Weźmy, na przykład, ciąg 4, 4, 3, 3, 1 – czy jest on ciągiem stopni jakiegoś grafu? Tutaj łatwo udzielić odpowiedzi negatywnej. Faktycznie, każda krawędź w grafie wpływa na zwiększenie stopni dwóch wierzchołków o jeden, czyli suma stopni musi zawsze być parzysta. A teraz coś bardziej skomplikowanego: ciąg 4, 4, 3, 3, 2, 1. Jeśli dopuszczamy krawędzie wielokrotne, graf możemy odtworzyć, na przykład, tak jak na rysunku 2. To jest jednak multigraf – w „zwykłym” grafie nie możemy mieć krawędzi wielokrotnych ani pętli. Po chwili kombinowania można sprawdzić, że podany ciąg nie odpowiada żadnemu zwykłemu grafowi. Przydałby się jakiś uniwersalny przepis na takie sprawdzanie.

Na szczęście taki przepis – algorytm – istnieje. Jest on przykładem podejścia **zachłannego**: wybieramy dowolny wierzchołek grafu, czyli element ciągu stopni, po czym łączymy go krawędziami z wierzchołkami o możliwie najwyższych stopniach. Następnie zmniejszamy stopnie tych wierzchołków, usuwamy wybrany wierzchołek z grafu i powtarzamy to samo od początku. Jeśli w pewnym momencie nie uda się znaleźć odpowiedniej liczby wierzchołków o dodatnich stopniach, kończymy algorytm z wynikiem negatywnym. Rozważmy, dla przykładu, początkowy ciąg 4, 4, 3, 3, 2. Wybieramy wierzchołek o stopniu 3 i łączymy go z wierzchołkami o stopniach 4, 4, 3. Nowy ciąg to 3, 3, 2, 2. Wybierzmy ponownie wierzchołek o stopniu 3; łączymy go ze wszystkimi pozostałymi i otrzymujemy ciąg 2, 1, 1. Jeśli teraz ponownie wybierzemy wierzchołek o najwyższym stopniu, to uda nam się skonstruować cały graf, dokładnie taki jak na rysunku 1. Gdybyśmy natomiast zaczęli od ciągu 4, 4, 3, 2, 1 i wybrali kolejno pierwsze dwa wierzchołki (te o początkowym stopniu 4), już w drugim kroku – ciąg 3, 2, 1, 0 – otrzymalibyśmy odpowiedź negatywną.

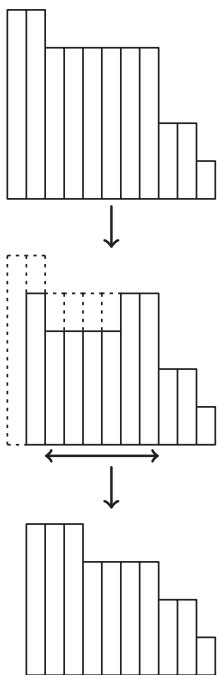
Wykażemy, że ta metoda, znana też pod nazwą algorytmu Havla–Hakimiego, zawsze daje poprawne wyniki. W tym celu wystarczy udowodnić, że jeśli dla danego ciągu liczb istnieje graf, dla którego rozważany ciąg jest ciągiem stopni wierzchołków, to nasz algorytm taki graf znajdzie. Załóżmy, przez zaprzeczenie, że nierosnący ciąg  $d_1, \dots, d_n$  odpowiada stopniom wierzchołków pewnego grafu  $G$ , ale nasz algorytm uruchomiony dla ciągu ( $d_i$ ) zwrócił odpowiedź negatywną. Niech  $d_i$  będzie stopniem pierwszego wierzchołka rozważanego w algorytmie; nazwijmy ten wierzchołek  $u$ . W naszym algorytmie próbujemy połączyć wierzchołek  $u$  z wierzchołkami o stopniach  $d_1, d_2, \dots$  (z pominięciem samego  $d_i$ , rzecz jasna). Skoro graf  $G$  istnieje, to na pewno dla wierzchołka  $u$  musi nam się to udać.

Spytajmy zatem, z jakimi wierzchołkami w  $G$  jest połączony wierzchołek  $u$ . Jeśli z tymi samymi co w naszym algorytmie, to możemy usunąć wierzchołek  $u$  wraz z tymi połączeniami i rozumować indukcyjnie dla ciągu o jeden wierzchołek krótszego. Załóżmy więc, że tak nie jest: niech  $v$  będzie wierzchołkiem o największym możliwym stopniu  $d_j$ , który nie jest połączony z  $u$  w grafie  $G$ . Wierzchołek  $u$  musi być zatem połączony w  $G$  z jakimś innym wierzchołkiem, powiedzmy  $w$ , o stopniu  $d_k$ , dla  $k > j$ . Pokażemy, że możemy w  $G$  tak pozamieniać krawędzie, żeby wierzchołek  $u$  był połączony z  $v$  zamiast z  $w$  (patrz rysunek 3). Faktycznie, ponieważ  $d_j > d_k - 1$ , więc w  $G$  musi istnieć jakiś wierzchołek (nazwijmy go  $x$ ) połączony z  $v$  i niepołączony z  $w$ . Podmieniając w grafie  $G$  krawędzie  $uw$  i  $vx$  na krawędzie  $uv$  i  $wx$ , otrzymujemy dokładnie to, czego chcieliśmy. Jeśli po wykonaniu tej operacji zbiór sąsiadów  $u$  w  $G$  wciąż nie jest tej samej postaci co w naszym algorytmie, kontynuujemy tego typu podmiany aż do chwili, kiedy te zbiory sąsiadów będą takie same. Po tym usuwamy z grafu  $G$  wierzchołek  $u$  wraz z incydentnymi krawędziami i powtarzamy wcześniejsze rozumowanie na tak zmniejszonym grafie. Widać, że na końcu otrzymamy dokładnie taki graf, jaki skonstruowałby nasz algorytm.



Rys. 3. Podmiana krawędzi  $uw$  i  $vx$  na  $uv$  i  $wx$ .

**Wtręt implementacyjny:** Podany algorytm można zaimplementować w czasie kwadratowym ze względu na liczbę wierzchołków grafu, czyli  $O(n^2)$ . Wystarczy w metodzie zachłannej za każdym razem wybierać wierzchołek o największym stopniu, czyli odpowiadający elementowi  $d_1$ . Wówczas obsłużenie tego wierzchołka polega na zmniejszeniu elementów  $d_2, \dots, d_{d_1+1}$  o jeden, usunięciu elementu  $d_1$  z ciągu i poprawieniu uporządkowania ciągu. Wszystko to można zrobić w czasie  $O(n)$ ,



Rys. 4. Pierwszy krok algorytmu zachłannego wykonywany dla ciągu 5, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 1.

przy czym najmniej oczywistą fazę – przywracanie porządku nierosnącego – wykonujemy za pomocą co najwyżej jednego odwrócenia fragmentu ciągu, patrz też rysunek 4.

Przy nieco ostrożniejszej implementacji można zapisać ten algorytm w złożoności czasowej proporcjonalnej do sumy elementów ciągu ( $d_i$ ), czyli w czasie proporcjonalnym do liczby krawędzi konstruowanego grafu. Jak to zrobić?

Jeśli jesteśmy zainteresowani tylko binarną informacją – czy podany ciąg jest ciągiem stopni wierzchołków jakiegoś grafu (czy ciąg jest **graficzny**) – możemy posłużyć się jeszcze prostszym kryterium. Pochodzi ono od Erdősa i Galliego (w skrócie EG) i orzeka, że nierosnący ciąg  $d_1, \dots, d_n$  o parzystej sumie jest graficzny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k).$$

Aby zrozumieć sens nierówności EG, pokażemy, że stanowią one warunek konieczny na graficzność ciągu ( $d_i$ ). Ustalmy parametr  $k$ . Wówczas po lewej stronie nierówności mamy „zapotrzebowanie na krawędzie” pierwszych  $k$  wierzchołków. Ovo zapotrzebowanie może zostać zaspokojone przez krawędzie łączące pewne pary tych wierzchołków – takich krawędzi może być co najwyżej  $\frac{k(k-1)}{2}$ , a każda z nich ma wpływ na stopnie dwóch spośród rozważanych wierzchołków – oraz przez krawędzie łączące pewne z tych wierzchołków z pozostałymi. Wierzchołek o stopniu  $d_i$ ,  $i = k + 1, \dots, n$ , dostarcza co najwyżej  $k$  takich krawędzi – po jednej do każdego z wierzchołków  $d_1, \dots, d_k$  – a zarazem, oczywiście, co najwyżej  $d_i$  krawędzi, skąd otrzymujemy konieczność nierówności EG.

Z kolei dostateczność warunków EG można próbować pokazać, wykorzystując własności algorytmu zachłannego. Przykładowo, polecamy Czytelnikowi pouczające sprawdzenie, że pierwsze dwie nierówności EG są równoważne temu, iż algorytm zachłanny poprawnie przetworzy kolejno wierzchołki o stopniach  $d_1$  i  $d_2$ . Pełny dowód dostateczności kryterium EG jest, niestety, bardziej skomplikowany.

**Wtręt implementacyjny:** Kryterium EG ma także tę przewagę nad algorytmem Havla–Hakimiego, że jego prawdziwość można sprawdzić w czasie liniowym względem liczby wierzchołków grafu. Łatwo zauważyć, że wszystkie sumy prefiksowe i sufiksowe ciągu ( $d_i$ ):

$$S_i = \sum_{j=1}^i d_j, \quad S'_i = \sum_{j=i}^n d_j,$$

można obliczyć w czasie  $O(n)$ . Wtedy lewa strona  $k$ -tej nierówności EG to dokładnie  $S_k$ . Z kolei trochę nietypowe sumy występujące po prawej stronie nierówności można łatwo obliczyć, jeśli znamy liczbę elementów ciągu ( $d_i$ ) większych niż  $k$  (oznaczenie:  $p_k$ ). Wówczas suma po prawej stronie to  $S'_{k+1}$ , jeśli  $p_k \leq k$ , natomiast w przeciwnym przypadku jest ona równa  $S'_{p_k+1} + k \cdot (p_k - k)$ . Wreszcie ciąg ( $p_i$ ) możemy wyznaczyć w czasie  $O(n)$ , i to na kilka różnych sposobów.

Warto na koniec wspomnieć o jeszcze jednym kryterium graficzności ciągu. Nie jest ono efektywniejsze ani bardziej praktyczne od kryterium EG, ale za to wygląda bardziej egzotycznie. Załóżmy, że  $d_1 \leq n - 1$ , w przeciwnym przypadku mamy natychmiast odpowiedź negatywną. Rozważmy macierz zero-jedynkową  $M$  wymiaru  $n \times n$ , o zerowej przekątnej, w której  $i$ -ty wiersz zawiera  $d_i$  jedynek dopchniętych do lewej strony – z uwzględnieniem jednak zerowej przekątnej (rys. 5). Niech  $c_1, \dots, c_n$  będzie ciągiem sum w kolumnach macierzy  $M$ . Wówczas kryterium Gale’a–Rysera orzeka, że ciąg ( $d_i$ ) jest graficzny wtedy i tylko wtedy, gdy sumy prefiksowe ciągu ( $d_i$ ) są zdominowane przez sumy prefiksowe ciągu ( $c_i$ ), tzn.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rys. 5. Macierz  $M$  skonstruowana dla ciągu graficznego 4, 3, 3, 2. Ciąg sum w kolumnach tej macierzy to 4, 4, 2, 3, 1.

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq \sum_{i=1}^k c_i \quad \text{dla każdego } k = 1, \dots, n - 1.$$

Wnikliwemu Czytelnikowi pozostawiamy podanie związku między tym kryterium a warunkami EG.

Na koniec kilka pytań do Czytelnika. Jakie warunki musi spełniać ciąg stopni ( $d_i$ ), żeby dało się z niego odtworzyć graf, który jest spójny? A jakie, żeby odpowiadał stopniom wierzchołków jakiegoś grafu dwudzielnego? No dobrze, to drugie zadanie jest dosyć trudne. Ale jakie warunki musi spełniać para ciągów  $(a_i)_{i=1}^k$  i  $(b_i)_{i=1}^l$ , tak aby istniał graf dwudzielny, w którym  $(a_i)$  odpowiada stopniom wierzchołków z jednej grupy, a  $(b_i)$  – wierzchołkom z drugiej grupy?

# Osobliwość trójkątów

Jarosław GÓRNICKI\*

Pole figury  $F$  zawartej między prostymi  $x = a$ ,  $x = b$ , gdzie  $a < b$ , oraz krzywymi  $y_1 = f(x)$ ,  $y_2 = g(x)$ , gdzie  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  dla  $x \in [a, b]$ , można wyrazić wzorem  $|F| = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$ . Jeśli wprowadzimy funkcję  $r(x) = g(x) - f(x)$ , to  $|F| = \int_a^b r(x) dx$ . Ostatnia zależność dowodzi, że kształt figury  $F$  nie ma żadnego znaczenia, ważna jest jedynie długość odcinków  $r(x)$  dla różnych wartości zmiennej  $x$ . Tę obserwację wyraża **zasada Cavalieriego dla figur płaskich**:

*jeżeli dwie figury płaskie w przecięciu z każdą prostą równoległą do danej dają przekrój o tej samej długości, to pola tych figur są równe.*

Przekroje nie muszą nawet być w jednym kawałku – wystarczy, żebyśmy umieli obliczyć sumaryczną długość takiego przekroju. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe – istnieją figury o równych polach, których nie można ułożyć na płaszczyźnie tak, że przecinane prostymi równoległymi o wskazanym kierunku, w każdym przypadku będą dawać przekroje o równych długościach.

**Twierdzenie 1.** *Nie istnieje trójkąt  $T$  o polu  $\pi r^2$ , taki że przekroje pewnego koła o promieniu  $r$  i trójkąta  $T$  każdą prostą równoległą do danej są odcinkami o równych długościach.*

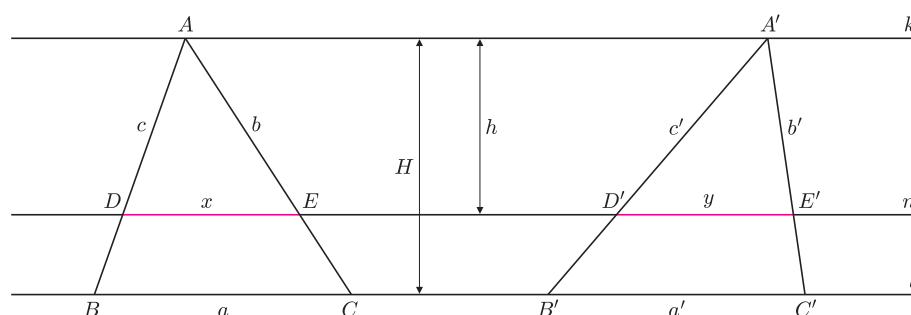
**Dowód.** Gdyby istniało takie położenie koła o promieniu  $r > 0$  i trójkąta  $T$ , w którym każda prosta o ustalonym kierunku przecinałaby te figury na odcinkach równej długości (jeśli w ogóle by je przecinała), to prosta, która przechodziłaby przez środek koła, musiałaby przechodzić przez jeden z wierzchołków trójkąta i jej przecięcie z trójkątem miałyby długość  $2r$ . Trójkąt  $T$  zostałby podzielony na dwa trójkąty, dla których to przecięcie byłoby wspólną podstawą. Ponieważ opuszczone na nią wysokości w sumie miałyby długość  $2r$ , więc pole trójkąta musiałoby być równe  $2r^2 \neq \pi r^2$ . Uzyskana sprzeczność kończy dowód.  $\square$

W przypadku trójkątów o równych polach sytuacja jest całkowicie odmienna, chociaż niełatwo to sobie wyobrazić, gdy patrzymy na dwa trójkąty o równych polach, z których jeden jest „cienki i długi”, a drugi „krótki i pękaty”.

**Twierdzenie 2** (H. Eves, 1991). *Dla trójkątów o równych polach istnieje takie ich położenie na płaszczyźnie, że każda prosta równoległa do danej przecina każdy z trójkątów na odcinku o tej samej długości.*

**Dowód.** Załóżmy, że trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  mają równe pola. Rozpatrzmy dwa przypadki.

**Przypadek 1.** Jeden bok trójkąta  $ABC$  ma taką samą długość jak jeden bok trójkąta  $A'B'C'$ . Możemy przyjąć bez straty ogólności, że  $|BC| = |B'C'|$ . Umieszczamy trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  tak, aby boki  $BC$  oraz  $B'C'$  leżały na prostej  $l$ , zaś wierzchołki  $A$  i  $A'$  leżały w tej samej półpłaszczyźnie.



\*Katedra Matematyki,  
Politechnika Rzeszowska

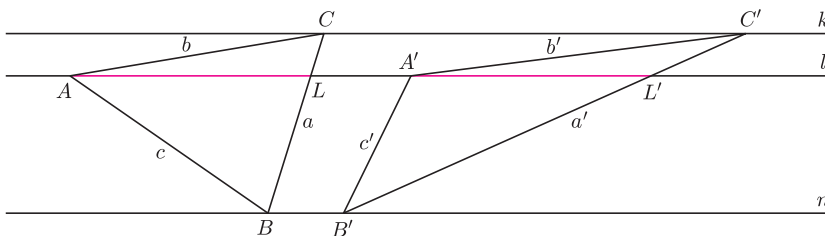
Ponieważ trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  mają równe pola, więc wierzchołki  $A$  i  $A'$  leżą na prostej  $k$  równoległej do  $l$ . Sprawdźmy, że dla dowolnej prostej  $n$ , równoległej do  $l$ , jej przekroje z trójkątami  $ABC$  i  $A'B'C'$  są równe, czyli  $|DE| = |D'E'|$  przy oznaczeniach z rysunku. Istotnie, z twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{H}{h} = \frac{|A'B'|}{|A'D'|} = \frac{|B'C'|}{|D'E'|}.$$

*Przypadek 2.* W trójkącie  $ABC$  żaden bok nie ma takiej samej długości jak bok trójkąta  $A'B'C'$ . Bez utraty ogólności rozważań przyjmujemy, że  $a = |BC| < |B'C'| = a'$ . Umieszczamy trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  tak, że mają one wspólny wierzchołek  $A = A'$ , boki  $BC$  i  $B'C'$  są równoległe i punkt  $A$  należy do pasa wyznaczonego przez proste zawierające te odcinki. Niech  $D$  będzie punktem przecięcia prostych  $BB'$  i  $CC'$ .

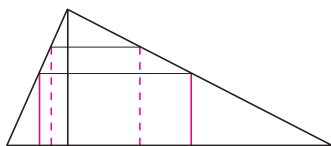
Na odcinku  $DA$ , jako na średnicy, wykreślamy okrąg  $O$ . Prosta przechodząca przez środki boków  $BB'$  i  $CC'$  przecina ten okrąg w punktach  $M$  i  $N$ . Wówczas prosta  $DN$  przecina odcinek  $BC$  w punkcie  $L$ , a odcinek  $B'C'$  w punkcie  $L'$ . Punkty  $L$  i  $L'$  dzielą odcinki  $BC$  i  $B'C'$  w takim samym stosunku, na mocy twierdzenia Talesa. Zatem pole trójkąta  $ACL$  stanowi taką samą część pola trójkąta  $ABC$ , jaką częścią pola trójkąta  $A'B'C'$  jest pole trójkąta  $A'C'L'$ . Ponieważ pola trójkątów  $ABC$  i  $A'B'C'$  są równe, więc równe są też pola trójkątów  $ACL$  i  $A'C'L'$ .

Ponadto, ponieważ  $|LN| = |NL'|$  i kąt  $DNA$  jest prosty, więc  $|AL| = |A'L'|$ . Umieszczamy teraz trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  tak, by odcinki  $AL$  i  $A'L'$  leżały na prostej  $l$ , a wierzchołki  $C$  i  $C'$  leżały w tej samej półpłaszczyźnie. Z równości pól trójkątów  $ACL$  i  $A'C'L'$  wynika, że wierzchołki  $C$  i  $C'$  leżą na prostej  $k$  równoległej do  $l$ , a wierzchołki  $B$  i  $B'$  na prostej  $n$ , także równoległej do  $l$ .



Dwukrotne odwołanie do przypadku 1 kończy dowód twierdzenia.  $\square$

**Powiadają, że** dwaj najmłodsi uczniowie Galileusza, Bonaventura Cavalieri i Evangelista Torricelli, byli ludźmi do tego stopnia pogodnymi i pełnymi poczucia humoru, że nawet podczas pracy naukowej robili sobie wzajemnie zaawansowane psikusy ku uciesze znajomych. Ich najważniejsze dzieło, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, przedstawiało oryginalną koncepcję powstawania podstawowych figur geometrycznych, nazwanych przez nich kontinuumami. Twierdzili mianowicie, że linia to zapis dziejów punktu w jakimś przedziale czasu, powierzchnia to dzieje linii, a bryła to dzieje powierzchni. Przy takim podejściu istotne było podanie reguł, jak przy ruchu punktu powstaje długość, jak przy ruchu linii powstaje pole, a przy ruchu powierzchni – objętość.



Podobno w początkowej redakcji stosownego rozdziału Cavalieri napisał, że miary te są zsumowaniem elementów niższego wymiaru (tych tytułowych *niepodzielnych*): długość linii powstaje ze zsumowania punktów składających się na nią, pole – długości odcinków, a objętość ze zsumowania pól figur płaskich. Przeczytawszy to, Torricelli zaprosił znajomych na obiad, na którym stwierdził: *Mój kolega Bonaventura, oglądając (załączony) rysunek, udowodnił, że pole trójkąta prostokątnego z lewej strony jest równe polu trójkąta z prawej – przecież każdemu pionowemu odcinkowi składającemu się na jeden z nich odpowiada dokładnie jeden odcinek składający się na drugi!*

Podobno koledzy śmiali się i bawili przez wiele godzin, a Cavalieri po powrocie do domu sformułował zasadę, nazywaną dziś jego imieniem, już poprawnie.

M. K.



## Magiczna soczewka

Stanisław BEDNAREK

Prawa fizyki pomogą nam dziś wykonać sztuczkę, wykorzystującą właściwości bardzo prostej soczewki. Do przeprowadzenia doświadczeń będą potrzebne: przezroczysta, zakręcana, plastikowa butelka o średnicy kilku centymetrów z cienkimi i gładkimi ściankami bocznymi, duże naczynie z wodą, kilka kartek papieru, pisak lub drukarka oraz lupa.

Przed przystąpieniem do pierwszego doświadczenia butelkę, która będzie pełnić rolę soczewki, napełniamy całkowicie wodą, tak żeby nie było w niej widać żadnego pęcherzyka powietrza. Na kartce papieru piszemy (a jeszcze lepiej, drukujemy na drukarce) dwie kolumny słów, tych z rysunku 1. Najlepiej używać tzw. czcionki bezszeryfowej, czyli bez rozszerzeń na końcu odcinków i łuków tworzących litery (np. czcionka Arial). Wysokość liter powinna wynosić około 2–3 cm.

Kartkę z napisami kładziemy na dowolnej poziomej powierzchni, a tuż nad kartką trzymamy butelkę z wodą. Podłużna oś butelki powinna być też pozioma i równoległa do kierunku napisów, tak jak na rysunku 2. Patrzymy przez butelkę na wybraną linijkę napisów i staramy się zapamiętać właściwości zauważonych obrazów – ich wysokość oraz położenie w stosunku do napisów. Powoli oddalamy butelkę od kartki. Dla pewnej odległości stwierdzimy zadziwiający efekt – wysokość obrazów staje się równa wysokości napisów, a słowo z prawej strony zostaje odwrócone do góry nogami, słowo zaś z lewej strony widzimy bez odwrócenia. Zachowując osiągniętą odległość butelki do kartki, przesuujemy butelkę nad linie z innymi słowami i spostrzegamy tę samą prawidłowość. Co jest przyczyną tego zaskakującego efektu?

Przypomnijmy sobie, jak przy użyciu optyki geometrycznej objaśniamy wytwarzanie obrazów przez soczewki. Opis taki wymaga narysowania biegu dwóch promieni świetlnych wychodzących z dowolnego punktu  $A$  przedmiotu  $AB$ , tak jak na rysunku 3. Jeden z promieni przechodzi równoległe do głównej osi optycznej soczewki  $g$ , a drugi biegnie przez środek optyczny soczewki  $O$ . Pierwszy z tych promieni po dwukrotnym załamaniu na powierzchniach ograniczających soczewkę przechodzi przez jej ognisko  $F$ , drugi zaś pokonuje soczewkę bez zmiany kierunku. W punkcie  $A_1$ , gdzie przecinają się oba promienie po przejściu przez soczewkę lub ich przedłużenia, widzimy obraz punktu  $A$ , z którego te promienie wyszły. Jeżeli przecięciu uległy promienie, to obraz jest rzeczywisty i można go również zobaczyć na ustawionym w tym miejscu ekranie. Gdy przecinają się przedłużenia promieni, wówczas obraz jest pozorny (rys. 4). Obrazu pozornego nie można zobaczyć na ekranie, a widzimy go jedynie dzięki właściwościom naszego wzroku.

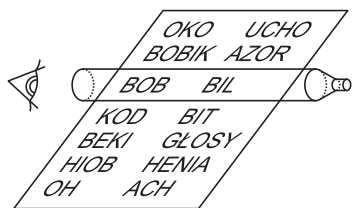
Dla odległości butelki od kartki mniejszej niż ogniskowa soczewki widzieliśmy pozorne i powiększone obrazy napisów, a słowa nie były odwrócone. Oddalając soczewkę od kartki, wytworzyliśmy obrazy rzeczywiste i powiększone, przy czym powiększenie to mała w miarę oddalania butelki. A odwrócenie? Przerysowując rysunek 3 dla przypadku, w którym odległość przedmiotu od soczewki jest dwa razy większa niż jej ogniskowa, łatwo sprawdzić, że wielkość obrazu będzie taka sama, jak wielkość przedmiotu, i obraz zostanie odwrócony. Dlaczego jednak widzieliśmy odwrócony obraz słowa jedynie z prawej strony, przecież oba znajdowały się w takiej samej odległości od soczewki? Oczywiście, słowa z lewej strony miały poziomą oś symetrii, ich odwrócenie nie powodowało zatem zmiany widzianego obrazu.

A gdyby użyć soczewki sferycznej, takiej jak lupa? Soczewka sferyczna nie ma wyróżnionej osi symetrii  $i$ , wytwarzając obraz rzeczywisty, powoduje nie tylko „zamianę” górnej części obrazu na dolną, ale również prawej na lewą. Do tworzenia napisów moglibyśmy wówczas wybierać tylko litery mające środek symetrii. W alfabecie używanym w języku polskim są nimi: l, H, N, o, O, s, S, x, X. Dodatkowo można by stosować cyfry 0 i 8. Z tych znaków trudno ułożyć większą liczbę słów, zwłaszcza że kolejność znaków byłaby odwracana, np. zamiast OH widzielibyśmy HO, a zamiast 80 \$ ujrzelibyśmy \$ 08. Używając soczewki cylindrycznej, możemy rozszerzyć tę listę o litery z poziomą osią symetrii: B, C, c, D, E oraz K (ale trzeba odrzucić N, s, S), co daje nam już pewne możliwości słowotwórcze. Można także tworzyć symetryczne napisy, układając litery jedna nad drugą, albo, co jest trudniejsze, ale robi niewątpliwie wrażenie, spróbować odwracać napisy i rysunki, tak by powstała historyjka (zabawną realizację tego pomysłu przy użyciu innych metod przedstawia filmik <http://www.youtube.com/watch?v=4mdEsouIXGM>).

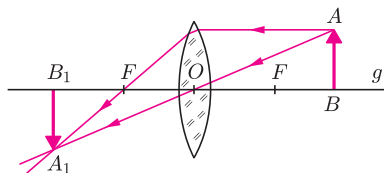
Zachęcam do eksperymentowania w oczekiwaniu na następny odcinek, w którym przedstawię dalsze sztuczki z użyciem soczewek.

OKO UCHO  
BOBIK AZOR  
BOB BIL  
KOD BIT  
BEKI GŁOSY  
HIOB HENIA  
OH ACH

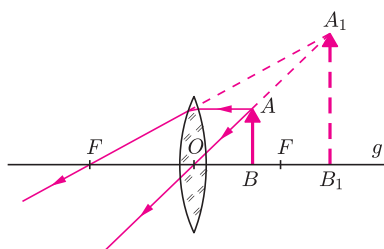
Rys. 1. Zestaw napisów przeznaczony do oglądania przez soczewkę.



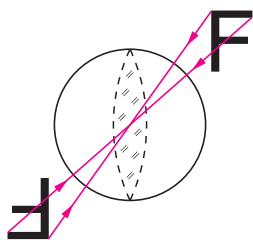
Rys. 2. Sposób oglądania napisów przez soczewkę.



Rys. 3. Graficzne objaśnienie wytwarzania obrazu rzeczywistego przez soczewkę.



Rys. 4. Graficzne objaśnienie wytwarzania obrazu pozornego przez soczewkę.



Rys. 5. Sposób odwracania obrazu przez soczewkę sferyczną.

## Nanorurki – zdradzieckie smakołyki

Zanim coś połknimy, warto sprawdzić, czy aby to coś nie jest większe od nas.

Spaghetti nie wydaje się specjalnie groźną potrawą. Gdybyśmy jednak podeszli do wielkiego gara z zawartością ugotowaną *al dente* i spróbowali niepostrzeżenie wessać tylko jedną nitkę, mogłoby się okazać, że trafiliśmy akurat na próbę bicia rekordu Guinnessa i ten jeden makaronik wypełnia cały gar.

Nadal moglibyśmy się od potrawy odciąć (zębami), ale co zrobić w podobnej sytuacji, gdy się nie ma ani ząbków, ani oczu, ani rozumu?

Niestety, tak żarłocznie zachowują się komórki wobec węglowych nanorurek, albo włókien azbestu, albo złotych nanodrucików. Tylko jaka komórka ma interes (ewolucyjnie wykształcony mechanizm), żeby taką nanorurkę zacząć wchłaniać?

Okazuje się, że kontakt z czubkiem nanorurki komórka bierze za spotkanie z czymś małym i obłym, czyli dla komórki czymś takim jak ciasteczko dla nas (a przynajmniej dla tych spośród nas, którzy nie mogą się ciasteczkom oprzeć). Okazuje się, że interakcja nanorurki i błony komórkowej najpierw powoduje ustawienie nanorurki prostopadle do powierzchni błony [1], a wtedy czubek takiej zaoblonej nanorurki staje się trojańskim ciasteczkiem.

Rozpoczyna się proces wchłaniania czegoś, czego wchłonąć w całości nie można, a procesu przerwać się nie da, bo komórka nie ma ani wystarczająco mocnych ząbków, ani mechanizmów pozwalających na wyplucie zdradzieckiego smakołyku.

Co ciekawe, nanorurka niezaoblona (nie jest dla mnie jasne, czy takie coś istnieje naprawdę, czy tylko wirtualnie, czyli w symulacjach) nie jest obracana prostopadle do powierzchni i nie jest wchłaniana.

Badania [1] nie tylko wyjaśniają mechanizm znanego niszczycielskiego wpływu włókien azbestu, ale stanowią ostrzeżenie przed bezkrytycznym wykorzystywaniem nanostruktur, które mogą okazać się bardzo niebezpieczne dla żywych organizmów.

## Nanowstążkowy efekt domina

Grafen ma niezwykle ciekawe własności. Już rok temu IBM zaprezentował pierwszy działający tranzystor grafenowy. Dzięki niezwykle wysokiej mobilności elektronów tranzystor ten działał szybciej niż jego krzemowe odpowiedniki, choć był od nich większy.

Jedną z przeszkód w rozwoju grafenowych układów scalonych jest to, że grafen sam z siebie nie jest półprzewodnikiem. Należy go odpowiednio domieszkować albo pociąć, gdyż wstążki grafenowe są półprzewodnikami.

Materiał będzie jednak tym lepszy, im bardziej regularny. Dlatego bardzo ciekawe byłoby ułożenie takiej wstążki z odpowiednich cząsteczek. Bardzo dobrym kandydatem jest antracen, czyli trzy pierścienie benzenowe ułożone płasko w szeregu.

W pracy [2] naukowcy, na razie za pomocą symulacji, sprawdzili, jak zachodzi reakcja układania antracenu na złotym podłożu. Okazuje się, że cząsteczki najbardziej lubią się układać jak kostki domina zetknięte dłuższymi bokami. Złoto działa jak katalizator, odbierając dwa atomy wodoru kolejnej kostce. Tworzy się w ten sposób grafenowe wiązanie węglowe, a cząsteczka, która ma już z jednego boku grafenowego towarzysza, łatwiej przyłącza następnego z drugiego boku. W ten sposób cząsteczki układają się jak przewracające się kostki domina. Ułożenie jednej pociąga następną, tworząc jedną z najwęższych możliwych wstążek.

Piotr ZALEWSKI

[1] <http://news.brown.edu/pressreleases/2011/09/nanotips>

[2] J. Björk, S. Stafström, F. Hanke, *Zippering up: cooperativity drives the synthesis of graphene nanoribbons*, J. Amer. Chem. Soc., DOI:10.1021/ja205857a.

O G Ł O S Z E N I E

### Turniej Młodych Fizyków

Rozpoczął się Turniej Młodych Fizyków 2012. Zawody dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych, o charakterze komplementarnym wobec Olimpiady Fizycznej. W Turnieju uczestniczą pięcioosobowe drużyny. Najlepsza z nich wyjedzie na Turniej Międzynarodowy, który odbędzie się w Niemczech (w 2011 roku Międzynarodowy Turniej odbył się w Iranie, polska drużyna zdobyła w nim brązowe medale). Szczegółowe informacje o Turnieju Młodych Fizyków są dostępne na stronie internetowej

<http://ptf.fuw.edu.pl/tmf.html>

Ewentualne zapytania można kierować pod adresem

[tmf@ifpan.edu.pl](mailto:tmf@ifpan.edu.pl)

Termin nadsyłania prac:

**31 stycznia 2012 r.**

**Przykładowe tematy do opracowania:**

#### Przecinanie powietrza

Podczas wirowania kawałka nici lub np. żyłki nylonowej z zamocowanym na końcu ciężarkiem daje się słyszeć wyraźny dźwięk. Zbadaj, w jaki sposób ten dźwięk powstaje oraz od jakich parametrów zależy.

#### Jasne fale

Oświetl płaski zbiornik z wodą. Gdy na jej powierzchni zostaną wytworzone fale, można będzie zobaczyć jasne i ciemne wzory na dnie zbiornika. Zbadaj zależność między falami a obserwowanymi wzorami.

#### Bąbelki

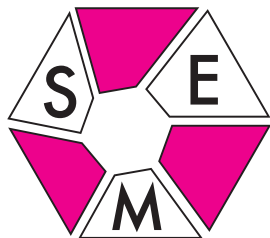
Czy jest możliwe pływanie na powierzchni wody, w której występuje dużo bąbelków? Zbadaj, jak pływanie przedmiotu zależy od obecności bąbelków.

#### Granularny rozbryzg

Gdy kulka stalowa spada na powierzchnię suchego piasku, obserwuje się rodzaj piaskowego rozbryzgu, po którym może nastąpić wyrzucenie pionowej kolumny piasku. Odtwórz to zjawisko i je wyjaśnij.

# Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl



W ubiegłym roku szkolnym SEM podjęło inicjatywę mającą w założeniu wspierać wszystkich tych gimnazjalistów, którzy chcieliby samodzielnie ocenić swój stopień przygotowania do Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Od połowy sierpnia 2010 r., przez dziesięć kolejnych miesięcy, na stronie [www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl), w ramach Koła Matematycznego cyklicznie ogłaszane były zestawy 7 zadań, które zakresem zagadnień odpowiadały zadaniom z OMG. Po dwóch tygodniach od ogłoszenia treści zadań na stronie internetowej OMG pojawiały się do nich wskazówki, a po kolejnych dwóch tygodniach umieszczano tam pełne rozwiązania każdego z siedmiu problemów zadanych miesiąc wcześniej. W tym samym momencie pojawiała się tam również treść zadań kolejnej serii. Równoległe w kilkunastu miastach w Polsce oraz w Gimnazjum im. Jana Pawła II w Wilnie na Litwie odbywały się otwarte zajęcia poświęcone omówieniu zagadnień pojawiających się w ogłoszonym zestawie zadań. Forma tych zajęć odpowiadała zwyczajowym omówieniom zadań odbywającym się po zawodach II i III stopnia OM i OMG. Podczas tych spotkań uczestniczący w nich gimnazjaliści i ich opiekunowie mogli podzielić się pomysłami na rozwiązanie zadań z aktualnego zestawu, czy wymienić się spostrzeżeniami na temat trudności napotkanych podczas podejmowanych prób ich rozwiązania. W trakcie zajęć omawiano kolejne zadania zestawu, przedstawiając na zakończenie rozwiązania autorskie. Często okazywało się wtedy, że przedstawione wcześniej rozwiązania uczestników oparte były na tej samej idei, co proponowane rozwiązania wzorcowe. Poniżej prezentujemy rozwiązania dwóch spośród zadań z zestawów Koła Matematycznego.

Liczby  $a, b, c, d$  są liczbami rzeczywistymi dodatnimi.  
Wykaż, że wśród liczb:

$$a + b - \sqrt{cd}, \quad b + c - \sqrt{da}, \\ c + d - \sqrt{ab}, \quad d + a - \sqrt{bc}$$

co najmniej dwie są dodatnie.

**Rozwiązanie.** Zauważmy, że jeśli suma dwóch liczb jest dodatnia, to co najmniej jedna z tych liczb jest dodatnia. Przyjmijmy oznaczenia

$$x_1 = a + b - \sqrt{cd}, \quad x_2 = b + c - \sqrt{da}, \\ x_3 = c + d - \sqrt{ab}, \quad x_4 = d + a - \sqrt{bc}.$$

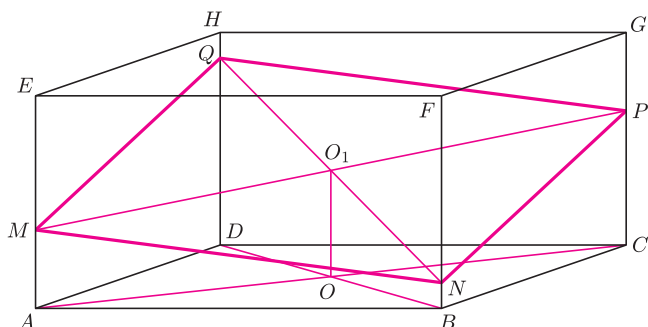
Ponieważ

$$x_1 + x_3 = a + b - \sqrt{cd} + c + d - \sqrt{ab} = \\ = a - \sqrt{ab} + \frac{1}{4}b + c - \sqrt{cd} + \frac{1}{4}d + \frac{3}{4}b + \frac{3}{4}d = \\ = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{c} - \frac{1}{2}\sqrt{d}\right)^2 + \frac{3}{4}b + \frac{3}{4}d,$$

więc  $x_1 + x_3 > 0$ . Zatem co najmniej jedna z liczb  $x_1, x_3$  jest dodatnia. Analogicznie pokazujemy, że  $x_2 + x_4 > 0$ , czyli co najmniej jedna z liczb  $x_2, x_4$  jest dodatnia. Wykazaliśmy tym samym, że wśród danych czterech liczb co najmniej dwie są dodatnie.

Dany jest prostopadłościan o podstawach  $ABCD$  i  $EFGH$ . Płaszczyzna przecina jego krawędzie boczne  $AE, BF, CG$  i  $DH$  odpowiednio w punktach  $M, N, P$  i  $Q$ . Wykaż, że

$$AM + CP = BN + DQ.$$



**Rozwiązanie.** Ponieważ odcinki  $MQ$  i  $NP$  zawierają się w jednej płaszczyźnie i jednocześnie zawierają się w płaszczyznach równoległych, więc są to odcinki równoległe. Analogicznie równoległe są odcinki  $MN$  i  $PQ$ . Stąd czworokąt  $MNPQ$  jest równoległobokiem.

Niech ponadto punkt  $O$  będzie punktem przecięcia przekątnych  $AC$  i  $BD$  podstawy  $ABCD$ , a  $O_1$  – punktem przecięcia przekątnych  $MP$  i  $NQ$  równoległoboku  $MNPQ$ . Zauważmy, że odcinek  $OO_1$  jest odcinkiem łączącym środki nierównoległych boków trapezów  $ACPM$  i  $BNQD$ . Jest on równoległy do boków równoległych tych trapezów oraz

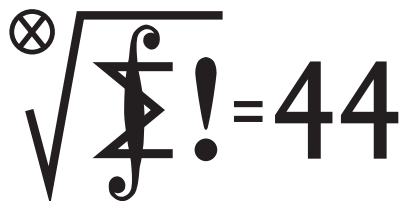
$$OO_1 = \frac{1}{2}(AM + CP) = \frac{1}{2}(BN + DQ),$$

stąd

$$AM + CP = BN + DQ.$$

Paweł KWIATKOWSKI

## Klub 44

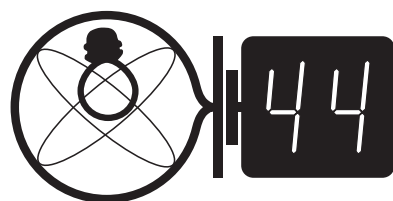


Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2012

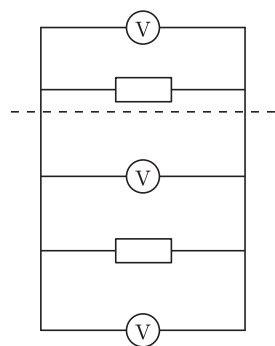
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 617 ( $WT = 1,53$ ) i 618 ( $WT = 3,47$ ) z numeru 3/2011

Bartłomiej Dydą	Wrocław	44,52
Paweł Najman	Kraków	44,30
Piotr Sobczak	Łódź	39,62
Tomasz Tkocz	Rybnik	37,14
Zbigniew Skalik	Wrocław	35,98
Paweł Kubit	Kraków	35,66
Michał Miodek	Zawiercie	31,96

Dwaj Weterani Klubu 44 M umocnili swój status: Bartłomiej Dydą i Paweł Najman jednocześnie zaliczyli „44” już po raz piąty.



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2012



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 518 ( $WT = 3,05$ ) i 519 ( $WT = 2,20$ ) z numeru 5/2011

Andrzej Idzik	Bolesławiec	46,79
Tomasz Wietecha	Tarnów	39,75
Marian Łupieżowiec	Gliwice	37,70
Jacek Piotrowski	Rzeszów	37,44
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	33,19
Michał Koźlik	Gliwice	26,87

Skokiem o długości 5,25 punktu Nadweteran Andrzej Idzik zaliczył klubową normę członkowską po raz **dziesiąty!**

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

### Zadania z matematyki nr 629, 630

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**629.** Niech  $n$  będzie liczbą naturalną większą od 2. Dowieść, że ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  można usunąć dwie liczby tak, by suma liczb, które pozostały, była kwadratem liczby naturalnej.

**630.** W trójkącie ostrokątnym o bokach długości  $a, b, c$  środkowa poprowadzona do boku  $c$  ma długość  $d$ . Wykazać, że dla każdej liczby dodatniej  $p < 2$  zachodzi nierówność

$$a^p + b^p > \left(d + \frac{c}{2}\right)^p + \left(d - \frac{c}{2}\right)^p.$$

Zadanie 630 zaproponował pan Tomasz Tkocz z Warszawy.

### Zadania z fizyki nr 526, 527

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**526.** Poniżej linii przerywanej (zob. rysunek) występuje jednorodne, prostopadłe do płaszczyzny rysunku i zmienne w czasie pole magnetyczne, a powyżej tej linii pola nie ma ( $B = 0$ ). Oporności oporników są jednakowe, jednakowe są także trzy pola powierzchni objęte oczkami obwodu: między linią przerywaną a środkowym woltomierzem, między środkowym woltomierzem a dolnym opornikiem oraz między dolnym opornikiem a dolnym woltomierzem. Jeśli dolny woltomierz wskazuje 1 V, to jakie jest wskazanie pozostałych woltomierzy?

**527.** Lodówka pobiera ciepło od ciała  $A$  o temperaturze  $T_1 = -5^\circ\text{C}$  i oddaje ciepło otoczeniu o temperaturze  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , działając na następującej zasadzie. Naczynie o stałej objętości początkowo zawiera powietrze atmosferyczne o temperaturze  $T_0$  i ciśnieniu  $p_0 = 10^5$  Pa, następnie przy zachowaniu doskonałej izolacji termicznej pompa próżniowa obniża ciśnienie w naczyniu do osiągnięcia temperatury  $T_1$ . Dalej odpompowuje się powietrze aż do stanu bliskiego próżni, przy czym temperatura pozostaje równa  $T_1$  wskutek pobierania ciepła od  $A$ . Następnie naczynie jest ponownie napełniane powietrzem atmosferycznym i cykl się powtarza. Ile wynosi minimalna wartość pracy pompy niezbędnej do odprowadzenia 1 J ciepła od  $A$ ?

Pompa zawiera niewielki cylinder pozostający stale w temperaturze  $T_0$  i tłok. Otwarcie zaworu łączącego cylinder z naczyniem następuje w chwili dojścia tłoka „do końca” (objętość cylindra równa zero), po osiągnięciu przez tłok położenia przeciwnego następuje zamknięcie tego zaworu, a po cofnięciu tłoka do położenia, w którym powietrze pobrane z naczynia zostanie sprężone do ciśnienia  $p_0$ , następuje otwarcie zaworu umożliwiającego odprowadzenie na zewnątrz sprężonej partii gazu. Ten zawór zostaje zamknięty tuż przed otwarciem pierwszego. Na każdy cykl przemian w naczyniu próżniowym przypada wiele cykli pracy pompy. Powietrze należy uważać za gaz doskonały o ciepłe molowym  $C_V$  równym  $(5/2)R$ .



### Rozwiązanie zadania M 1330.

Ponieważ

$$4 - \frac{2}{k} = \frac{4k - 2}{k} = \frac{2k(2k - 1)}{k^2},$$

więc liczba

$$\prod_{k=1}^n \left(4 - \frac{2}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{(2k - 1) \cdot 2k}{k \cdot k} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \binom{2n}{n}$$

jest oczywiście całkowita.



### Szanowna Redakcjo,

w moich notatkach z maja 1986 roku znalazłem zgrabny alfametyk (wtedy mówilo się chyba arytmograf), być może nawet publikowany w *Delcie*:

$$\text{pół} \cdot \text{pół} = \text{ćwierć}.$$

Oto rozwiązanie:

1. Jeśli  $\acute{e} = 1$ , to  $l = 9$  oraz  $102341 \leq \text{ćwierć} \leq 187651$ , a stąd  $329 \leq \text{pół} \leq 429$ . Wśród liczb ze zbioru  $\{329, 349, 359, 369, 379, 389, 409, 429\}$  tylko 409 spełnia warunki zadania.
2. Jeśli  $\acute{e} = 4$ , to  $l = 2$  lub  $l = 8$ ; wtedy  $401234 \leq \text{ćwierć} \leq 498764$ , a więc  $638 \leq \text{pół} \leq 702$ . Jednak liczby wyznaczone przez ten warunek: 638, 652, 658, 672, 678, 682, 692, 698, 702, nie spełniają warunków zadania.
3. Jeśli  $\acute{e} = 5$ , to  $l = 5$ .
4. Jeśli  $\acute{e} = 6$ , to  $l = 4$ ; wtedy  $601236 \leq \text{ćwierć} \leq 698756$ , a więc mamy  $775 \leq \text{pół} \leq 835$  i sprawdzamy, że żadna z liczb 784, 794, 804, 814, 824, 834 nie spełnia warunków.

Wreszcie

$$5. \acute{e} = 9, \text{ ale } \sqrt{900009} > 900.$$

Stąd jedynym rozwiązaniem jest

$$409 \cdot 409 = 167281.$$

Proszę przyjąć serdeczne pozdrowienia

Włodzimierz SZYMCZYK

## Listopad

Coraz dłuższe, choć chłodniejsze jesienne noce sprzyjają obserwacjom, o ile tylko dopisuje pogoda. W pierwszej połowie nocy na niebie królować wciąż będą planety olbrzymy. Najjaśniejszego Jowisza ( $-2,9$  mag) zobaczymy już po zachodzie Słońca w Baranie niezbyt wysoko nad wschodnim horyzontem. Z kolei niezbyt jasnego ( $+5,8$  mag) Urana w Pannie możemy obserwować jedynie w pierwszej połowie nocy nad południowo-wschodnim horyzontem. Pojawiający się też w pierwszej połowie nocy w Wodniku nad południowym horyzontem Neptun ze względu na swą małą jasność ( $+7,9$  mag) nie będzie widoczny gołym okiem. W drugiej połowie nocy nad wschodnim horyzontem we Lwie wschodzić będzie jasny ( $+1,0$  mag) Mars. W połowie miesiąca tuż przed wschodem Słońca możemy próbować obserwować jasnego ( $+0,7$  mag) Saturna w Pannie nad południowo-wschodnim horyzontem. Merkury i Wenus nie będą widoczne w tym miesiącu.

Leżący w listopadzie niezbyt wysoko nad południowo-wschodnim horyzontem gwiazdozbiór Wieloryba jest chyba najbardziej znany ze względu na gwiazdę o Ceti, czyli Mirę. O tej niezwykle gwiazdzie pisaliśmy w *Delcie* 12/2010. Na Wieloryba warto jednak popatrzeć także z innego powodu, a mianowicie M77 (NGC 1068). Jasność tego obiektu wynosi  $+8,9$  mag i można go obejrzeć przez niewielką lunetę. Ta mglista plamka jest niezwykle galaktyką spiralną odległą o 47 mln lat świetlnych (14,4 Mpc). Patrzymy na nią prostopadle do płaszczyzny dysku, ale, niestety, ramiona tej galaktyki można zobaczyć jedynie na zdjęciu wykonanym przy użyciu większego teleskopu. Na pierwszy rzut oka nie różni się ona niczym od zwykłych galaktyk, takich jak Droga Mleczna. Jednak astronomowie po dokładniejszym zbadaniu stwierdzili, że M77 należy do klasy galaktyk o aktywnych jądrach (AGN, ang. *Active Galactic Nuclei*) zwanych czasem po prostu galaktykami aktywnymi. Charakteryzują się one niezwykle dużą jasnością centralnych obszarów. W ekstremalnych przypadkach (kwazary) jądro jest tak jasne, że przyćmiewa pozostałe jej części. Obiekty tego typu odkryto w połowie XX wieku. Choć wyróżnia się kilka typów galaktyk aktywnych, to sądzi się, że wszystkie one są podobnie zbudowane. Prawdopodobnie w centrum każdej galaktyki znajduje się supermasywna czarna dziura o masie przekraczającej  $10^5$  mas Słońca, ale w przypadku galaktyk aktywnych jest znacznie masywniejsza (nawet  $10^9 M_{\odot}$ ). To, co było zaskoczeniem w aktywnych galaktykach, to jasność jądra w połączeniu z jego rozmiarami. Moc promieniowania milionów gwiazd jest emitowana z obszaru o rozmiarach porównywalnych z rozmiarami Układu Słonecznego! Jedynie spadek dużej ilości materii na czarną dziurę może wyprodukować obserwowaną ilość energii. Materia nie spada jednak od razu na czarną dziurę, lecz krąży wokół niej, tworząc dysk, i powoli opadając ku centralnemu obiektowi. Dodatkowo w AGN-ach poza dyskiem znajduje się materia złożona z chłodnego gazu i dużych ilości pyłu, tworząca torus, a nad dyskiem gaz tworzy mniejsze lub większe obłoki poruszające się z różnymi prędkościami. Dla aktywnych galaktyk charakterystyczne są też wypływające z centralnych części ogromne strugi materii (dżety) poruszające się z prędkościami bliskimi prędkości światła. AGN-y są jednymi z najodleglejszych obiektów, jakie obserwujemy we Wszechświecie.

W listopadzie przypadają maksima kilku rojów meteorów o co najwyżej średniej aktywności. Najwięcej zjawisk przyniosą Południowe Taurydy z maksimum 5 XI i 5 zjawiskami na godzinę, Delta Erydanidy (10 XI, 2), Północne Taurydy (12 XI, 5), Zeta Puppidy (13 XI, 3). Być może w tym roku roje o zmiennej aktywności, Leonidy (17 XI) i Alfa Monocerotydy (21 XI) okażą się obfite. W listopadzie pełnia Księżyca przypada 10 XI, a now 25 XI. A więc czyste nieba!

Agnieszka MAJCZYNA



## Środek ciężkości

Joanna JASZUŃSKA

Środek ciężkości to – intuicyjnie – taki punkt, w którym trzeba coś podeprzeć, by owo coś utrzymało się w równowadze. Można go własnoręcznie poszukać na przykład dla długopisu, balansując nim poziomo na palcu.

1. Czy istnieje wielościan wypukły, w którym żaden rzut środka ciężkości na płaszczyznę zawierającą ścianę nie należy do tej ściany?

**Fakt 1.** Dla punktów  $X_1, \dots, X_n$  z masami odpowiednio  $m_1, \dots, m_n > 0$  istnieje dokładnie jeden środek ciężkości  $S = S((X_1, m_1), \dots, (X_n, m_n))$  i jedynie on spełnia warunek  $m_1 \cdot \overrightarrow{SX_1} + \dots + m_n \cdot \overrightarrow{SX_n} = \vec{0}$ . W szczególności  $S((X_1, m_1), (X_2, m_2))$  to jedyny taki punkt  $S$  na prostej  $X_1X_2$ , że  $X_1S : SX_2 = m_2 : m_1$ .

**Fakt 2.** Jeśli część spośród rozważanych punktów zastąpić ich środkiem ciężkości z masą równą sumie ich mas, to środek ciężkości całego układu nie zmieni się.

2. Wykaż, że środkowe trójkąta przecinają się w środku ciężkości jego wierzchołków.

3. Udowodnij, że środkiem ciężkości obwodu trójkąta jest środek okręgu wpisanego w trójkąt utworzony przez środki jego boków.

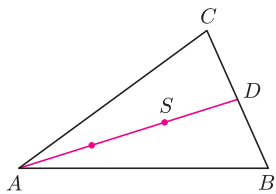
4. W wierzchołkach trójkąta ostrokątnego  $ABC$  umieszczono masy odpowiednio  $tg \sphericalangle A, tg \sphericalangle B, tg \sphericalangle C$ . Wykaż, że ich środkiem ciężkości jest ortocentrum  $\triangle ABC$ .

5. Trzy muchy o równych masach i zaniedbywalnych rozmiarach spacerują po obwodzie trójkąta, jedna z nich przeszła cały obwód. Wykaż, że jeśli środek ciężkości much nie zmienia położenia, to pokrywa się ze środkiem ciężkości trójkąta.

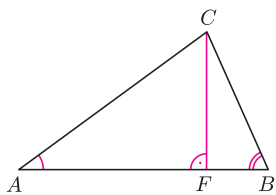
6. Wykaż, że wszystkie osie symetrii wielokąta przecinają się w jednym punkcie.

Wiadomo, że środek ciężkości „pełnego” trójkąta pokrywa się ze środkiem ciężkości jego wierzchołków (dowód np. w *Delcie* 7/2008). Środek ciężkości obwodu trójkąta może być gdzie indziej.

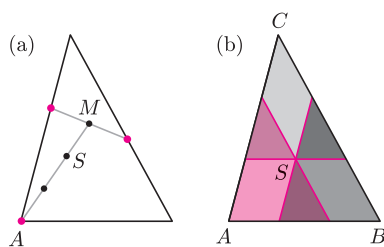
Za miesiąc dalsze zastosowania środka ciężkości do zadań pozornie z nim niezwiązanych.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3 (a) i (b).  $\mathcal{J}_A^{2/3}$  oznacza jednokładność o środku  $A$  i skali  $2/3$ .

### Rozwiązania

**R1.** Jeśli rzut środka ciężkości wielościanu wypukłego nie należy do ściany, na której on stoi, to wielościan ten przewraca się. Gdyby istniał opisany w zadaniu wielościan, przewracałby się w nieskończoność. Ale to jest niemożliwe.  $\square$

**R2.** Umieścimy w wierzchołkach  $\triangle ABC$  równe masy  $m$ . Wtedy  $S((B, m), (C, m)) = D$ , gdzie  $D$  to środek  $BC$  (rys. 1). Środek ciężkości trójkąta  $S = S((A, m), (D, 2m))$  leży na środkowej  $AD$ ; analogicznie leży na pozostałych środkowych. Ponadto  $AS : SD = 2 : 1$ , czyli środkowe dzielą się w stosunku  $2 : 1$ , licząc od wierzchołka.  $\square$

**Wskazówki 3.** Każdy bok zastąpmy punktem w jego środku z masą odpowiadającą jego długości. Jaki trójkąt tworzą te punkty? Jeśli punkt  $K$  na boku  $EF$  trójkąta  $DEF$  spełnia  $EK : KF = DE : DF$ , to jest spodkiem dwusiecznej  $\sphericalangle EDF$ .

**R4.** Jeśli  $CF$  jest wysokością  $\triangle ABC$ , to  $tg \sphericalangle A = CF/AF$  i  $tg \sphericalangle B = CF/BF$  (rys. 2). Stąd  $AF/BF = tg \sphericalangle B / tg \sphericalangle A$ , czyli  $F = S((A, tg \sphericalangle A), (B, tg \sphericalangle B))$ . Szukany środek ciężkości leży więc na  $CF$  i analogicznie na wysokościach z  $A$  i z  $B$ .  $\square$

**R5.** Rozważmy moment, gdy mucha, która przeszła cały obwód, jest w wierzchołku  $A$  trójkąta. Środek ciężkości pozostałych dwóch much jest w środku  $M$  odcinka pomiędzy nimi (rys. 3(a)). Środek ciężkości  $S$  wszystkich much jest na odcinku  $AM$  oraz  $AS : SM = 2 : 1$ , czyli  $S = \mathcal{J}_A^{2/3}(M)$ . Stąd  $S \in \mathcal{J}_A^{2/3}(\triangle ABC)$ .

Analogiczne rozumowanie dla wierzchołków  $B$  i  $C$  prowadzi do wniosku, że jedynym możliwym położeniem  $S$  jest środek ciężkości trójkąta (rys. 3(b)).  $\square$

**R6.** Każda oś symetrii wielokąta przechodzi przez środek ciężkości  $S$  jego wierzchołków, bo obrazem  $S$  w symetrii względem takiej osi jest on sam.  $\square$

### Zadania domowe

7. Udowodnij, że w dowolnym czworoboku odcinki łączące wierzchołki ze środkami ciężkości przeciwległych ścian przecinają się w jednym punkcie.

8. Czy dla dowolnego punktu  $S$  wewnątrz trójkąta można w jego wierzchołkach umieścić takie masy, by ich środkiem ciężkości był w  $S$ ?

9. Na płaszczyźnie danych jest sześć punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Środek ciężkości trójkąta utworzonego przez pewne trzy z nich oznaczmy jako  $S$ , zaś środek ciężkości trójkąta utworzonego przez pozostałe trzy – jako  $T$ . Wykaż, że wszystkie tak wyznaczone proste  $ST$  przecinają się w jednym punkcie.