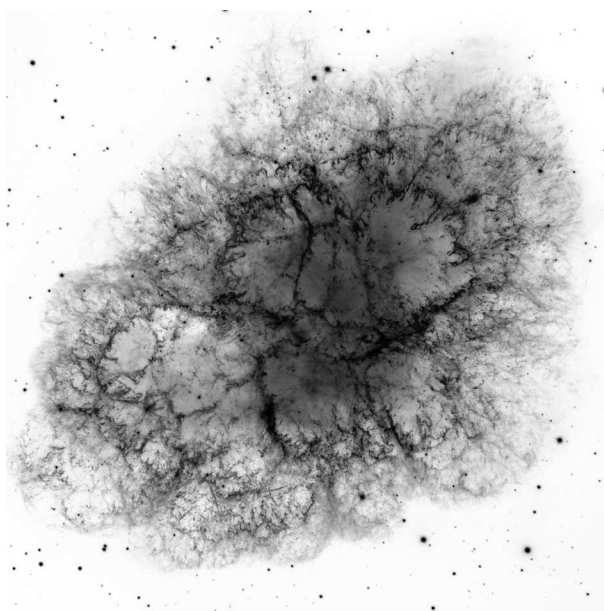


W następnym numerze polecamy



Credits: NASA, ESA and Allison Loll/Jeff Hester (Arizona State University).
Acknowledgement: Davide De Martin (ESA/Hubble).

SPIS TREŚCI NUMERU 10 (449)

Krowa, las i eksploracja terenu <i>Marcin Bieńkowski</i>	str. 1
Twierdzenie z happy endem <i>Zofia Miechowicz, Tomasz Bartnicki</i>	str. 4
$\pi^e < e^\pi$ <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 6
Cyfrowy dźwięk i wojna na decybele <i>Tomasz Idziaszek</i>	str. 8
Koniec globalnego ocieplenia? Oblicz to sam <i>Bożena Czerny, Krzysztof Hryniowicz</i>	str.10
Kąć przestrzenny (9): Kąty dwuszcienne <i>Michał Kieza</i>	str.13
Siatki, grafy, wielościany <i>Marek Kordos</i>	str.14
Z różnych szuflad <i>Andrzej Bartz</i>	str.16
Prosto z nieba: Świece standardowe i kalibratory <i>Michał Bejger</i>	str.17
Zadania	str.17
Informatyczny kącik olimpijski (46): Myjnia samochodowa <i>Tomasz Kulczyński</i>	str.18
Lato babci <i>Magdalena Fikus</i>	str.19
Aktualności	str.20
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.21
Klub 44	str.22
Październik <i>Agnieszka Majczyna</i>	str.24
$P = \frac{1}{2}ah$ <i>Joanna Jaszuska</i>	str.25

historię naturalną pulsara.

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk, Diana Gawronkiewicz, Patricija Bliuj-Stodulska / Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Fran-Press: www.franpress.pl, infolinia 801-679-466

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2011 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują Regiony Sprzedaży RUCH SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania wpłat: do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH SA, Pion Kolportażu, Zespół ds. Obrotu Zagranicznego, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-53-28-823 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Zespołu lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), fax 22-53-28-734, infolinia 800-1200-29. Płatność kartą kredytową (Visa, MasterCard, American Express) przez www.ruch.pol.pl

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:

SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;

w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;

w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;

kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numer archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

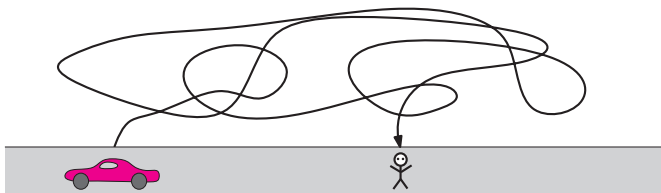
Cena 1 egzemplarza 4 zł

Krowa, las i eksploracja terenu

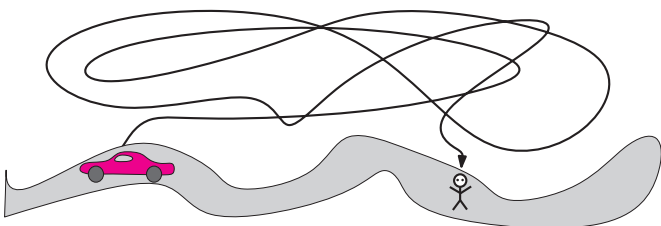
Marcin BIEŃKOWSKI Instytut Informatyki
Uniwersytetu Wrocławskiego

Ten artykuł został zapożyczony z Wrocławskiego Portalu Informatycznego <http://informatyka.wroc.pl>. Więcej informacji na temat portalu można znaleźć na tylnej okładce numeru.

Kilkanaście lat temu zgubiłem się w lesie. Nie na tyle, żeby sytuacja była beznadziejna: wiedziałem, że zostawiłem auto przy drodze, wszedłem do lasu, gdzie spędziłem jakiś czas, chodząc, a następnie wróciłem do tej samej drogi. Dodatkowo, podczas spaceru po lesie przeciąłem swoją drogę dostatecznie dużo razy, żeby nie mieć zielonego pojęcia, czy samochodu należy szukać, idąc w lewą stronę czy w prawą. Ot, mniej więcej tak jak na poniższym rysunku.



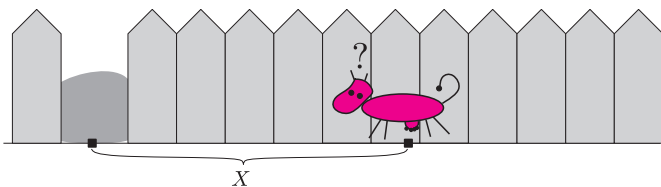
No dobrze, to jest zły rysunek. Tak naprawdę sytuacja wyglądała znacznie gorzej, a mianowicie tak:



To znaczy, drzewa na tyle skutecznie zasłaniały drogę, że widoczność była praktycznie zerowa. Nie miałem szans zobaczyć samochodu z odległości, musiałem się na niego natknąć.

Parę lat później (pomińmy chwilowo milczeniem to, ile się nachodziłem w drodze do samochodu) dowiedziałem się, że ktoś już wcześniej miał taki sam problem i zostało to dokładnie opisane w literaturze. A mianowicie, ten sam problem miała pewna krowa.

Krowa jaka jest, każdy widzi. Krowa stoi przy prostym płocie, w którym jest wejście na pastwisko. Wejście (które jest oddalone od krowy o co najmniej jeden metr) krowa zobaczy dopiero, gdy do niego dotrze. Co powinna zrobić, żeby jak najszybciej rozpocząć zjadanie trawy? Problem ten jest jednym z najprostszych wariantów zagadnienia eksploracji terenu. Jak okaże się poniżej, prostym, lecz nie trywialnym.



Postaramy się wyrobić sobie podstawowe intuicje. W całym artykule przez X będziemy oznaczać

początkową odległość, w metrach, dzielącą krowę od wejścia na pastwisko. Oczywiście, absolutnie genialna krowa, znająca mapę terenu, potrafi dojść na pastwisko, przeszedłszy X metrów. Co się dzieje, jeśli krowa jest trochę głupsza, czyli nie zna mapy, nie zna X , ale wie, że wejście na pastwisko jest z prawej strony? Oczywiście, idąc uparcie w tym kierunku, przejdzie też dokładnie X metrów.

A co ma zrobić krowa, jeśli w jakiś sposób poznała wartość X (przykładowo, wie, że od wymarzonego celu dzieli ją 10 metrów), ale nie wie, czy wejście jest z lewej, czy z prawej? Może wtedy zastosować następujący algorytm z parametrem $y = X$.

Algorytm Go-and-Eat(y)

1. Idź y metrów w lewo
2. Jeśli nie znajdziesz wejścia, zawróć do punktu startowego
3. Idź y metrów w prawo

Łatwo obliczyć, że w najgorszym przypadku (a tylko takie przypadki interesują biedne, pechowe krowy) krowa przejdzie $3X$ metrów (czyli w naszym przykładzie trzydzieści). Uważny Czytelnik zauważy, że to, czy krowa idzie na początku w lewo czy w prawo, w pewnym sensie nie ma znaczenia: jeśli krowa ma pecha, to wejście będzie i tak z drugiej strony niż ta, którą wybierze.

Krowa głodna to krowa zła. Prawdziwy problem krowy (który jest identyczny z moim poszukiwaniem samochodu) zaczyna się jednak wtedy, kiedy krowa nie zna ani wartości X , ani nie wie, z której strony jest wejście. Zamiast wyciągnąć gotowe rozwiązanie z kapelusza, zastanówmy się, co mogłoby pomóc krowie w tym zadaniu.

A gdyby krowa знаła jakieś oszacowanie na X , na przykład znała pewną liczbę $D \geq X$? Mogłaby uruchomić procedurę Go-and-Eat(D), tj. iść D metrów w lewo, wrócić do punktu wyjścia, a następnie iść w prawo. Przebyta droga w najgorszym przypadku wynosiłaby $2D + X$. Czyli jeśli D byłoby „tylko trochę” większe od X , to otrzymalibyśmy rozwiązanie niedużo gorsze niż w przypadku, kiedy znamy X . No dobrze, ale jak znaleźć takie D ? Pomoże nam w tym często stosowana w algorytmice **metoda podwajania**: uruchamiamy algorytm Go-and-Eat kolejno z wartościami 1, 2, 4, 8, 16, ... Cieszą nas dwie własności.

- Jeśli w końcu uruchomimy Go-and-Eat z potęgą liczby 2 większą od X , to krowa znajdzie pastwisko.
- Sumaryczna droga przebyta podczas uruchamiania Go-and-Eat ze zbyt małymi wartościami parametru jest niezbyt długa. (To dopiero wykażemy.)

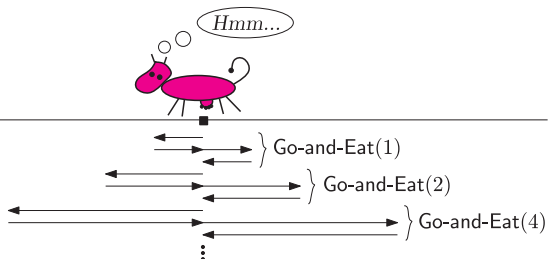
Ale moment! – powinien krzyknąć Uważny Czytelnik. Przecież po uruchomieniu algorytmu Go-and-Eat(1) krowa znajdzie się o 1 metr od punktu wyjścia, a algorytm Go-and-Eat(2) ma szansę zadziałać pod warunkiem, że krowa znajduje się początkowo w punkcie startowym. Możemy „załatać” algorytm, dodając do niego dodatkowy krok:

4. Zawróć do punktu startowego

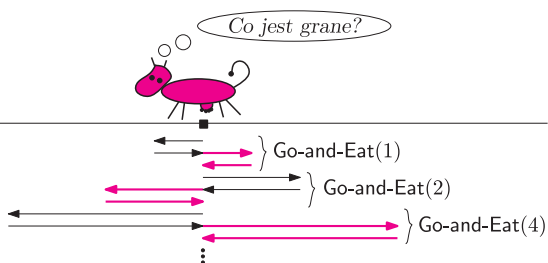
Łata na łacie. Tu mała dygresja – informatycy, jak i wszystkie umysły ściśle, uwielbiają: a) łątanie złych rozwiązań zamiast pisania ich od nowa, b) redukcje. Do tego stopnia uwielbiają, że często wpadają w pułapki jak w opisanej niżej historii (z długą brodą) o czajniku:

Mamy pusty czajnik, chcemy zagotować wodę. Co zrobić? Należy oczywiście: 1. nalać wody, 2. włączyć czajnik, 3. czekać. A co zrobić, jeśli mamy pełny czajnik i chcemy zagotować wodę? To proste – odpowie prawdziwy (i leniwy) informatyk – wylewamy z niego wodę i w ten sposób doprowadzamy sytuację do przypadku, który potrafimy rozwiązać.

Zastanówmy się zatem, czy przez „łatanie” algorytmu Go-and-Eat i dodanie punktu 4. nie postąpiliśmy przypadkiem jak prawdziwi informatycy (a nie chcielibyśmy tego robić, bo po co męczyć steraną życiem i mocno już wygłodniałą krowę). Zobaczmy, jak wygląda droga, po której teraz chodzi krowa.



Może nie jest oczywiste, co można tutaj poprawić. Ale... pamiętajcie, że to, w którą stronę krowa zaczyna wykonywanie algorytmu Go-and-Eat, nie ma znaczenia? W takim razie narysujmy drogę krowy, która nieparzyste wykonania algorytmu Go-and-Eat zaczyna w stronę lewą, a parzyste w prawą.

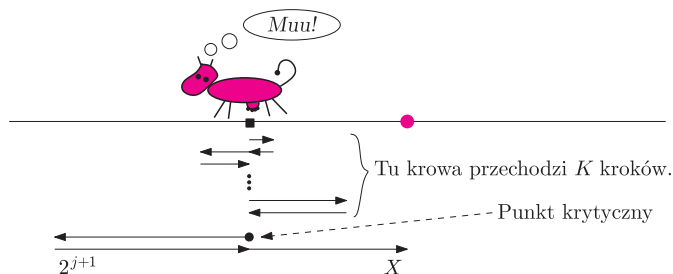


Bez sensu, prawda? Krowa idzie w jedną stronę 2^j metrów tylko po to, żeby wrócić do punktu wyjścia i pójść w tę samą stronę 2^{j+1} metrów! Wyrzucmy zatem nadmiarowe spacery (zaznaczone

kolorem na poprzednim rysunku). Zmodyfikowany algorytm prezentuje się następująco:

Algorytm Smart-Cow

1. Kierunek zwiedzania := lewo
2. $D := 1$
3. Dopóki nie znalazłeś wejścia na pastwisko, powtarzaj:
 - a. Przejdź D metrów w kierunku zwiedzania i wróć do punktu startowego
 - b. $D := D \cdot 2$
 - c. Odwróć kierunek zwiedzania



Spróbujmy teraz przeanalizować, jaki dystans pokona krowa w najgorszym przypadku. Weźmy takie naturalne j , że zachodzi $2^j < X \leq 2^{j+1}$. Oznacza to, że pierwsze j wykonania pętli w punkcie 3. powyższego algorytmu (z wartościami $D \leq 2^j$) nie spowoduje znalezienia pastwiska. Droga przebyta przez krowę do tego punktu wynosi

$$\begin{aligned} K &= (1 + 1) + (2 + 2) + (4 + 4) + (8 + 8) + \\ &\quad + \dots + (2^{j-1} + 2^{j-1}) + (2^j + 2^j) = \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{j-1} + 2^j) = \\ &= 2 \cdot (2^{j+1} - 1) < 4 \cdot 2^j. \end{aligned}$$

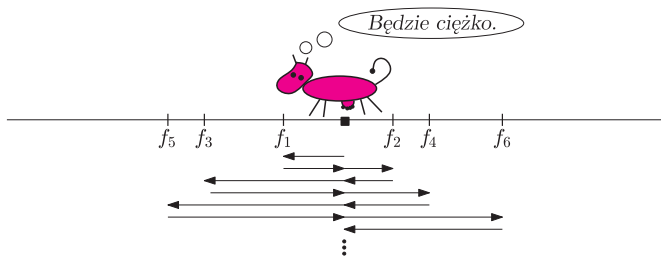
Nazwijmy ten punkt *krytycznym*, przyda się on w dalszej części artykułu. Następnie krowa chce iść 2^{j+1} metrów w jakimś kierunku. Oczywiście, ma pecha i idzie w kierunku przeciwnym do wejścia na pastwisko. Ten skok w niewłaściwy bok (wraz z powrotem) kosztuje ją kolejne $2^{j+1} + 2^{j+1} = 4 \cdot 2^j$ metrów. Następnie krowa zamierza iść 2^{j+2} metrów, ale już po X metrach napotyka pastwisko. Jej całkowita droga to co najwyżej

$$K + 4 \cdot 2^j + X < 8 \cdot 2^j + X < 8 \cdot X + X = 9X.$$

Czy naprawdę trzeba tyle chodzić? Krótka odpowiedź brzmi: tak, każdy algorytm dla krowy wymaga w najgorszym przypadku przejścia odległości dziewięciokrotnie przekraczającej początkową odległość krowy od pastwiska. Niestety, wykazanie tego jest dość trudne i wykracza poza ramy tego artykułu. Spróbujmy jednak uspokoić swoje sumienie i sprawdzić, że krowa zawsze musi przejść co najmniej dystans $5X$.

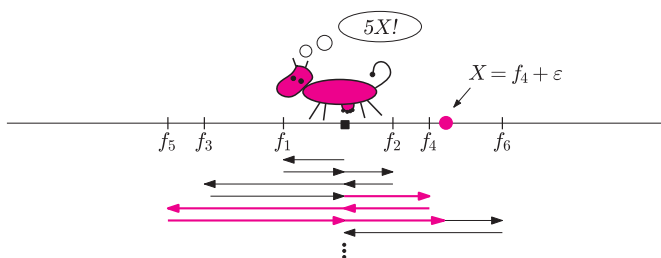
W tym celu zauważmy, że jeśli krowa nie robi głupich wycieczek (takich jak na dwóch wcześniejszych rysunkach), to wędruje, oddalając się od punktu startowego na przemian w lewo i w prawo.

Wyznacza to podział trasy krowy na kolejne fazy. Bez straty ogólności założmy, że na początku krowa idzie w lewo. Wtedy jej trasę można opisać liczbami $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$, gdzie f_j jest oddaleniem w fazie j . (W opisanym wcześniej algorytmie Smart-Cow mamy $f_j = 2^{j-1}$.)



Zauważmy teraz, że krowa wybiera taką samą trasę niezależnie od tego, jakie jest X . Powyższe zdanie wydaje się oczywiste (jak trasa mogłaby od tego zależeć, skoro X poznajemy dopiero w momencie odnalezienia pastwiska, a wtedy już nigdzie nie chodzimy?), ale warto je przeczytać więcej niż raz. Oznacza to, że dla danego wyboru trasy krowy (tj. liczb $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$) wystarczy postawić bramkę na pastwisko w jakimś bardzo złośliwym miejscu.

Przypatrmy się bliżej ciągowi $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$. Musi w nim istnieć jakaś taka kolejna para f_i i f_{i+1} , że $f_i \leq f_{i+1}$. Na powyższym rysunku jest to, na przykład, para f_4 i f_5 . W przeciwnym przypadku ciąg f_i byłby ściśle malejący (a jest to dość kiepski pomysł, jeśli krowa zamierza znaleźć odległe pastwisko). Załóżmy, że odległość f_i krowa przechodzi w prawą stronę. Postawmy zatem bramkę kawałeczek dalej niż w odległości f_i po prawej stronie od punktu startowego, tj. $X = f_i + \varepsilon$.



Wtedy krowa przechodzi co najmniej $2 \cdot f_i$ w prawo, potem $2 \cdot f_{i+1}$ w lewo, a następnie (pod warunkiem, że nie jest bezdennie głupia i $f_{i+2} > f_i + \varepsilon$) krowa dochodzi do pastwiska, przeszedłszy odległość X . Całkowita droga przebyta przez krowę to

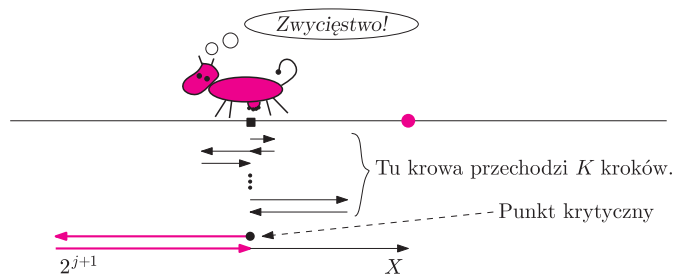
$$2 \cdot f_i + 2 \cdot f_{i+1} + X \geq 4 \cdot f_i + X = 5X - 4\varepsilon.$$

Ponieważ ε możemy wybrać dowolnie małe i zaniedbywalne, krowa przechodzi praktycznie pięciokrotnie więcej niż X .

Po co krowie pieniądze? Jak można ułatwić życie naszej krowie? Na początku poprzedniego rozdziału powiedzieliśmy, że nie da się poprawić wyniku osiąganego przez algorytm Smart-Cow. Cóż, jest to

tylko częściowa prawda. Nie można go poprawić, jeśli krowa chodzi *deterministycznie*. Możemy natomiast podarować jej monetę, którą może wspomóc się w trudnych chwilach (i nie chodzi nam o to, żeby kupiła sobie za to mapę czy coś do jedzenia).

Wróćmy do algorytmu Smart-Cow. Załóżmy, że w momencie, który nazwaliśmy krytycznym, krowa rzuca monetą. Jeśli wypadnie orzeł, idzie następnie 2^{j+1} metrów w prawo, w przeciwnym przypadku w lewo. Dla ustalonej pozycji bramki na pastwisko krowa ma $1/2$ szansy na to, że pójdzie w jej stronę. W takim przypadku części spaceru krowy (kolorowy fragment rysunku) o długości $2 \cdot 2^{j+1}$ w ogóle nie ma! Wtedy krowa przechodzi nie $9X$, a $5X$. W średnim przypadku przechodzi zatem $7X$.



To obniża średnią liczbę metrów przebytą przez krowę, pod warunkiem że... krowa wymyśli, iż dany moment jest krytyczny! Okazuje się jednak, że wcale nie musi tego robić. Wystarczy, żeby rzuciła monetą, wybierając kierunek na samym początku. Wtedy analiza jest dokładnie taka sama, a dodatkowo, w momencie kiedy krowa znajdzie się już w punkcie krytycznym, z prawdopodobieństwem $1/2$ będzie szła w lewo, a z prawdopodobieństwem $1/2$ – w prawo.

Quo vadis, droga krowo? Powyższe rozważania to tylko czubek góry lodowej tematyki eksploracji terenu. Oprócz „prawdziwych” zastosowań, istnieje jeszcze parę lepiej lub gorzej zbadanych podstawowych problemów. Przykładowo, Czytelnik Dociekliwy może zastanowić się, jaką strategię należy obrać, jeśli jest się kapitanem, który odpłynął od brzegu i stracił orientację. Zakładamy, że linia brzegowa jest linią prostą i chcemy dopłynąć do jej dowolnego miejsca. Możemy wyobrazić sobie następujące warianty tego problemu:

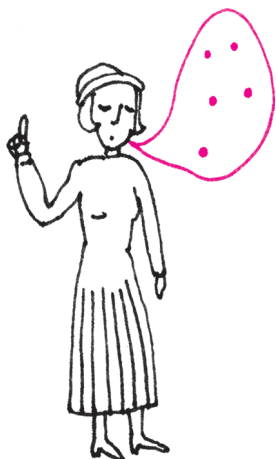
- Wiadomo, że linia brzegowa jest oddalona o 1 km, ale nie wiadomo, w którym kierunku.
- Mamy kompas i wiemy, że linia brzegowa przebiega albo z północy na południe, albo z zachodu na wschód, nie znamy natomiast odległości od linii brzegowej. (Warto zauważyć, że jeśli wiedzielibyśmy np., że linia brzegowa przebiega z północy na południe, to jest to taki sam problem, jaki miała nasza krowa.)
- Nic nie wiemy.

Temperować ołówki, siodłać krowy i do dzieła!

Twierdzenie z happy endem

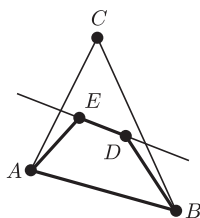
scenariusz Zofia MIECHOWICZ*

reżyseria Tomasz BARTNICKI*



Osobom nieobeznanym z językiem węgierskim przypominamy, że u naszych bratanków pisane *sz* wymawia się jak polskie *s* i na odwrót – pisane *s* wymawia się jak polskie *sz*. Zatem węgierskie *szekeres* powinniśmy wymawiać jak polskie *sekeresz*.

Zbiór na płaszczyźnie nazywamy *wypukłym*, jeżeli odcinek łączący dwa dowolne punkty tego zbioru w całości się w nim zawiera. Dla wielokąta warunek wypukłości jest równoważny temu, że miara każdego z jego kątów wewnętrznych jest mniejsza niż 180 stopni.



Rys. 1. Wypukły czworokąt



Zdarza się czasem, że zachód słońca i pusta, piaszczysta plaża zachwycają nas, kiedy patrzymy na nie, spacerując brzegiem morza, jednak zamknięte w martwe ramy zdjęcia przywodzą na myśl co najwyżej słowo „kicz”. Ta historia, gdyby jeden z hollywoodzkich reżyserów zdecydował się nakręcić film na jej podstawie, wydałaby się z pewnością banalna. Tymczasem napisało ją życie. Napisało i umieściło w niesamowitym, matematycznym świecie, przez co nabrała szczególnego uroku. Posłuchajcie opowieści o niezwyklej więzi, jaka połączyła dwoje ludzi. . . A może będzie to opowieść o tym, jak niezwykle więź połączyła dwoje ludzi z matematyką? Przeczytajcie i oceńcie sami.

Lata trzydzieste ubiegłego stulecia były, z wielu względów, dla mieszkańców Węgier czasem trudnym. Ale zima w roku 1933 była wyjątkowo piękna. Oprószony śniegiem urokliwy Park Miejski czy pełne czaru kawiarenki w Budapeszcie stanowiły idealne miejsce spotkań. Grupka młodych ludzi (między innymi Paul Erdős, Paul Turán, George Szekeres i Esther Klein) tę zimową scenerię uznała za idealne tło dla długich i inspirujących rozmów o . . . matematyce. Któregoś mroźnego, niedzielnego popołudnia Esther, która wyjątkową miłością pałała do problemów geometrycznych, podzieliła się z kolegami pewną obserwacją.

Twierdzenie (Esther Klein, 1933). *Wśród dowolnych pięciu punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, zawsze znajdziemy cztery punkty, które są wierzchołkami wypukłego czworokąta.*

Dowód. Wystarczy przeanalizować trzy rodzaje możliwych konfiguracji pięciu punktów na płaszczyźnie. Jeżeli leżą one w wierzchołkach pięciokąta wypukłego, to dowolne cztery z nich spełniają tezę twierdzenia. Zachodzi ona również, gdy cztery punkty tworzą wypukły czworokąt, a piąty punkt leży w jego wnętrzu lub na zewnątrz. Pozostaje do sprawdzenia „najgorszy” przypadek, gdy trzy punkty (A , B i C) są wierzchołkami trójkąta, wewnątrz którego leżą dwa pozostałe D i E (patrz rysunek 1). Wówczas prosta przechodząca przez wewnętrzne punkty D i E musi przeciąć dokładnie dwa boki trójkąta, gdyż zgodnie z założeniem o niewspółliniowości żaden z wierzchołków nie może na niej leżeć. Ale w takim przypadku wierzchołki A i B , które leżą po jednej stronie prostej, wraz z punktami D i E tworzą wypukły czworokąt $ABDE$. □

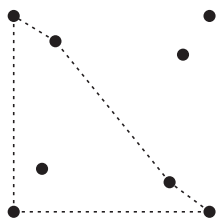
Ta niewinnie wyglądająca obserwacja geometryczna stała się dla Erdősa i Szekeresa inspiracją do dalszych badań nad ciekawymi problemami z pogranicza geometrii i kombinatoryki. Postawili nasuwające się od razu pytanie: czy twierdzenie Esther Klein o czworokącie można uogólnić na dowolne k -kąty wypukłe? Innymi słowy, czy w odpowiednio dużym i „porządnym” zbiorze punktów na płaszczyźnie można zawsze odnaleźć wielokąt wypukły o zadanej liczbie wierzchołków? Wkrótce opublikowali oni wspólną pracę, która stała się motorem szybkiego rozwoju geometrii kombinatorycznej. Ich główne twierdzenie dawało pozytywną odpowiedź na postawione wcześniej pytanie.

Twierdzenie (Erdős, Szekeres, 1935). *Dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba naturalna N , że wśród dowolnych N punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, zawsze znajdziemy k punktów, które są wierzchołkami wypukłego k -kąta.*

W dowodzie autorzy wykorzystali twierdzenie Ramseya (należy ono obecnie do klasyki kombinatoryki) oraz wcześniejszą obserwację Esther Klein. Jasne jest, że jeżeli znajdziemy jakąkolwiek liczbę N , która spełnia tezę powyższego twierdzenia, to każda liczba większa od niej też ją musi spełniać. Naturalny staje się problem wyznaczenia najmniejszej takiej liczby dla danego k .

Oznaczmy ją (tak jak w oryginalnej pracy) przez $N_0(k)$. Spróbujmy wyznaczyć wartości $N_0(k)$ dla kilku początkowych k . Trywialnie $N_0(3) = 3$.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski



Rys. 2. Osiem punktów bez wypukłego pięciokąta

Paul Erdős był mistrzem w stawianiu hipotez. Większość z nich była na tyle celna, że nie dawała się ani łatwo udowodnić, ani łatwo obalić. W późniejszym okresie zaczął on nawet oferować nagrody pieniężne za ich rozstrzygnięcie (w wysokości od 25 do nawet 3000 dolarów). Wiele z nich pozostaje otwartych po dziś dzień, a po śmierci Erdősa nagrody wypłaca jego bliski przyjaciel i współpracownik, Ron Graham.

Po wojnie Esther i George Szekeres osiedlili się w przepięknej, dziewiczej Australii. Ich miłość do siebie i miłość do matematyki przetrwała próbę czasu. Wspólnie dożyli sędziwego wieku (on 94, ona 95 lat), do końca oddając się swym matematycznym pasjom. Zmarli, po prawie siedemdziesięciu latach małżeństwa, tego samego dnia (28 sierpnia 2005 roku) w odstępie zaledwie jednej godziny.

Twierdzenie Esther Klein, połączone z obserwacją, że nie każdy czworokąt na płaszczyźnie jest wypukły, daje nam $N_0(4) = 5$. Wykazanie, że $N_0(5) = 9$, wymaga nieco więcej zachodu. Rysunek 2 przedstawia układ ośmiu punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej i żadne pięć nie tworzy wypukłego pięciokąta. Dowód, że wśród dziewięciu punktów sytuacja taka nie może zaistnieć, jest znacznie trudniejszy i po raz pierwszy znalazł go Makai (ten dowód nie został nigdzie opublikowany, ale był cytowany przez Erdősa i Szekeresa). Czy znając pierwsze trzy wartości ciągu $N_0(k)$, można dostrzec jakąś prawidłowość?

Erdős i Szekeres zauważyli, że

$$N_0(3) = 2^1 + 1, \quad N_0(4) = 2^2 + 1, \quad N_0(5) = 2^3 + 1$$

i, mimo że nie znali wartości $N_0(k)$ dla żadnego większego k , a oszacowania, które wynikały z dowodu ich twierdzenia, wyglądały na istotnie nadmiarowe, to pokusili się o postawienie bardzo śmiałej hipotezy, mówiącej, że dla dowolnego k

$$N_0(k) = 2^{k-2} + 1.$$

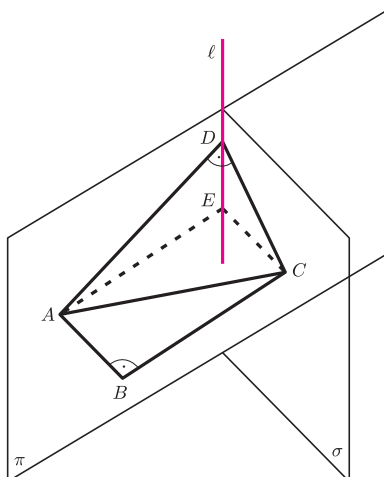
Dopiero w roku 1961 opublikowali oni pracę, w której pokazali (przez jawną konstrukcję), że $N_0(k) \geq 2^{k-2} + 1$. Niestety, wyznaczenie dokładnych wartości $N_0(k)$ okazało się zagadnieniem o wiele bardziej złożonym. Do dnia dzisiejszego pokazano jedynie, że $N_0(6) = 2^4 + 1 = 17$. Dokonali tego Szekeres i Peters wspomagani przez program komputerowy, który pomógł przeanalizować różne położenia 17 punktów na płaszczyźnie i stwierdzić, że w każdym z nich pojawił się wypukły sześciokąt. Wkład ludzki polegał w tym przypadku na znacznym ograniczeniu zbioru konfiguracji, które wymagały analizy komputerowej. Wynik ten ukazał się drukiem dopiero w 2006 roku, a więc rok po śmierci Szekeresa. Wydaje się niemożliwe, aby metoda komputerowa mogła pomóc przy wyznaczaniu $N_0(7)$, $N_0(8)$ i kolejnych wartości. Najlepsze, jak do tej pory, górne oszacowanie na $N_0(k)$ znaleźli w 2005 roku Tóth i Valtr, dowodząc, że

$$N_0(k) \leq \binom{2k-5}{k-2} + 1 \sim \frac{4^k}{\sqrt{k}}.$$

Jak widać, jest ono bardzo dalekie od tego, które 70 lat wcześniej przedstawili Erdős i Szekeres.

Tutaj historia tego twierdzenia wcale nie musi się skończyć. Być może to właśnie Ty, Czytelniku, będziesz autorem scenariusza do kolejnej części. Ale teraz pewnie zastanawiasz się, gdzie jest obiecany happy end. Otóż wspomniana na samym początku obserwacja geometryczna Esther Klein nie tylko zainspirowała George'a Szekeresa do zajęcia się problemem w ujęciu matematycznym, ale też skierowała jego uwagę na osobę autorki. Zaledwie w rok po opublikowaniu artykułu Erdősa i Szekeresa odbył się ślub George'a i Esther. Twierdzenie Esther Klein zyskało nazwę twierdzenia z happy endem, a państwo Szekeres żyli długo i szczęśliwie.

THE END



Rozwiązanie zadania M 1329.

I sposób. Załóżmy, że dane punkty nie leżą w jednej płaszczyźnie. Punkty B i D należą do sfery S_1 o średnicy AC . Podobnie, punkty A, C należą do sfery S_2 o średnicy BD . Ale sfera jest jednoznacznie wyznaczona przez cztery niewspółpłaszczyznowe punkty, więc $S_1 = S_2$. Dwie średnice ustalonej sfery leżą w jednej płaszczyźnie, więc w szczególności odcinki AC, BD leżą w jednej płaszczyźnie, co daje tezę.

II sposób. Gdzie leży punkt D ? Wobec $\angle DAB = 90^\circ$ leży on na płaszczyźnie π prostopadłej do AB i przechodzącej przez A . Podobnie wnioskujemy, że punkt D leży na płaszczyźnie σ prostopadłej do prostej BC i przechodzącej przez C . Punkt D leży więc na prostej $\ell = \pi \cap \sigma$, która przechodzi przez punkt E , uzupełniający trójkąt ABC do prostokąta $ABCE$.

Prosta ℓ jest rzutem prostokątnym prostej CD na płaszczyznę π . Ponieważ $CD \perp AD$, to z twierdzenia o trzech prostopadłych $AD \perp \ell$, więc $D = E$. Punkty A, B, C, D leżą więc na jednej płaszczyźnie.

$$\pi^e < e^\pi$$

Jarosław GÓRNICKI*



Określenie to jest poprawne, gdyż ciąg sum częściowych

$$x_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}$$

jest rosnący i ograniczony z góry przez $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 3$, więc zbieżny.

Gdy poznajemy matematykę, liczby oznaczane symbolami e oraz π pojawiają się bardzo często. Uznając ważność tych liczb, badamy ich arytmetyczną naturę. Wiemy, że e jest liczbą niewymierną (L. Euler, 1737 r.) oraz π jest liczbą niewymierną (J.H. Lambert, 1767 r.). Przystępność liczby e wykazał Ch. Hermite w 1873 r., a przystępność liczby π wykazał w 1882 r. F. Lindemann. Wyznaczenie dobrych przybliżeń wartości tych liczb nie jest zadaniem banalnym. Przypomnijmy, jak można to zrobić.

Obliczamy e . Liczbę e definiujemy wzorem Newtona z 1665 r.

$$(1) \quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Definicja (1) pozwala na obliczenie wartości liczby e z dużą dokładnością. Zauważmy, że dla $n \geq m + 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{(m+1)!(m+1)^{n-(m+1)}},$$

więc możemy oszacować resztę szeregu:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(m+1)!} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^{n-(m+1)}} = \frac{1}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{1}{m \cdot m!},$$

a stąd

$$0 < e - \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} < \frac{1}{m \cdot m!}.$$

Spróbujmy obliczyć wartość liczby e z sześcioma cyframi dokładnymi po przecinku, czyli wyznaczmy jej przybliżenie z dokładnością do $\frac{1}{10^7}$. W tym celu możemy wziąć $m = 10$, bo wówczas błąd nie przekracza $\frac{1}{10^7} < \frac{1}{10^6} < \frac{3}{10^8} < \frac{1}{10^7}$. Jeśli w wyrażeniu $x_{10} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{10!}$ pozostawimy bez zmian pierwsze trzy składniki, a każdy z pozostałych ułamków zastąpimy zaokrągleniem na ósmym miejscu po przecinku, to sumaryczny błąd nie będzie większy niż $0,5 \cdot \frac{1}{10^8} \cdot 8 = 4 \cdot \frac{1}{10^8}$. W ten sposób otrzymujemy $e = 2,718281\dots$, przy czym wszystkie wypisane cyfry są poprawne.

Obliczamy π . Liczbę π definiujemy wzorem Leibniza z 1673 r. (wzór ten był znany J. Gregory'emu dwa lata wcześniej):

$$(2) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Definicja Leibniza ma poważną wadę – praktycznie nie nadaje się do wyznaczania dokładnej wartości liczby π , ponieważ szereg jest zbyt wolno zbieżny. Wyznaczanie wartości π ze wzoru (2) z dokładnością do trzech miejsc po przecinku wymaga obliczenia sumy aż 10 000 kolejnych składników. Skorzystamy więc z rozwinięcia Gregory'ego:

$$\arctg x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{dla } |x| \leq 1,$$

w którym zbieżność sumy jest tym szybsza, im bliżej zera wybierzemy punkt x . Wykorzystał to J. Machin w 1706 r., proponując bardzo sprytną metodę obliczenia wartości π z dużą dokładnością. Oto metoda Machina.

Niech $A = \arctg \frac{1}{5}$, wtedy $0 < A < \frac{\pi}{4}$ i $\tg A = \frac{1}{5}$. Następnie obliczamy:

$$\tg 2A = \frac{2 \tg A}{1 - \tg^2 A} = \frac{5}{12} \quad \text{i} \quad \tg 4A = \tg 2(2A) = \frac{120}{119}.$$

Ponieważ liczba $\frac{120}{119}$ jest bliska jedności, więc kąt $4A$ jest bliski $\frac{\pi}{4}$. Niech $B = 4A - \frac{\pi}{4}$. Wówczas $-\frac{\pi}{4} < B < \frac{3}{4}\pi$, a ponieważ

$$\tg B = \tg \left(4A - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tg 4A - 1}{1 + \tg 4A} = \frac{1}{239} > 0,$$

Uzasadnienie wzoru (2) nie jest trudne, gdy znamy podstawy rachunku różniczkowego i całkowego. Punktem wyjścia jest równość ($n = 2k + 1$)

$$\frac{1}{1+x^2} = (1-x^2+x^4-x^6+\dots + x^{2n-2}-x^{2n}) + \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Całkując obie strony, otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} + \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

i korzystamy z równości

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

oraz oszacowania

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx < \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3},$$

przechodząc z n do nieskończoności.

*Katedra Matematyki,
Politechnika Rzeszowska

więc $0 < B < \frac{\pi}{2}$ i $B = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$. Stąd otrzymujemy *wzór Machina*:

$$\begin{aligned} \pi &= 4(4A - B) = 16 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 16}{(2n+1) \cdot 5^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{(2n+1) \cdot 239^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz obliczyć kilka początkowych wyrazów pierwszego i drugiego szeregu, aby otrzymać dość dokładną wartość liczby π .

Przez s_k i t_k , dla $k \geq 0$, oznaczymy odpowiednio k -tą sumę częściową pierwszego i drugiego szeregu we wzorze Machina, a przez s i t sumy tych szeregów (które istnieją i są skończone, co wynika np. z kryterium Leibniza). Ponieważ $s_{2k+1} < s < s_{2k}$ oraz $t_{2k+1} < t < t_{2k}$, więc zachodzą nierówności $0 < s - s_3 < s_4 - s_3 = \frac{16}{9 \cdot 5^9} < \frac{1}{10^6}$ i $0 < t - t_1 < t_2 - t_1 = \frac{4}{5 \cdot 239^5} < \frac{2}{10^{12}}$. Stąd otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$-\frac{2}{10^{12}} < (s - s_3) - (t - t_1) = \pi - (s_3 - t_1) < \frac{1}{10^6}.$$

Wynika z niego, że jeśli dodamy składniki sum częściowych w wyrażeniu $s_3 - t_1$, zaokrąglone na ósmym miejscu po przecinku, to otrzymamy przybliżenie liczby π z poprawnymi początkowymi pięcioma cyframi rozwinięcia dziesiętnego: $\pi = 3,14159\dots$

Dowody nierówności. Możemy teraz przystąpić do wykazania tytułowej nierówności, co zrobimy pięcioma sposobami.

Sposób I. Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$ dla $x > 0$. Ponieważ

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^e - e^x \cdot ex^{e-1}}{(x^e)^2} = \frac{x^{e-1} \cdot e^x \cdot (x - e)}{(x^e)^2},$$

więc $f'(e) = 0$, $f'(x) < 0$ dla $0 < x < e$ i $f'(x) > 0$ dla $x > e$. W punkcie $x = e$ funkcja f osiąga minimum i, podstawiając $x = \pi$, otrzymujemy nierówność $f(\pi) = \frac{e^\pi}{\pi^e} > f(e) = 1$.

Sposób II. Udowodnimy pomocniczą nierówność $e^x > 1 + x$ dla $x > 0$. Niech $f(x) = e^x$ i $g(x) = 1 + x$ dla $x \geq 0$. Wówczas $f(0) = g(0)$ i $f'(x) > g'(x)$ dla $x > 0$. Rozważmy funkcję $F(t) = f(t) - g(t)$ określoną na dowolnym przedziale $[0, x]$, gdzie $x > 0$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej istnieje takie $\xi \in (0, x)$, że $F(x) - F(0) = F'(\xi)(x - 0)$. Stąd $F(x) = F'(\xi)x = (f'(\xi) - g'(\xi))x > 0$, czyli dla dowolnej wartości $x > 0$

$$e^x = f(x) > g(x) = 1 + x.$$

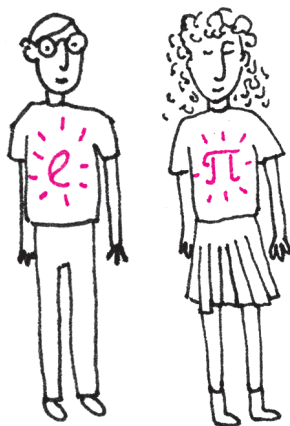
Podstawiając $x = \frac{\pi}{e} - 1$ do powyższej nierówności, otrzymujemy $e^{\frac{\pi}{e}-1} > 1 + (\frac{\pi}{e} - 1)$, a stąd $\frac{e^\pi}{e} > \frac{\pi}{e}$ i ostatecznie $e^\pi > \pi^e$.

Sposób III. Rozważmy funkcję $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ dla $x > 0$. Ponieważ $f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2} \cdot (1 - \ln x)$, więc $f'(e) = 0$, $f'(x) > 0$ dla $0 < x < e$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x > e$. W punkcie $x = e$ funkcja f osiąga maksimum. Zatem $f(\pi) < f(e)$, czyli $\pi^{\frac{1}{\pi}} < e^{\frac{1}{e}}$, a stąd otrzymujemy wyjściową nierówność.

Sposób IV. Niech $f(x) = \ln x - \frac{x}{e}$, $x > 0$. Ponieważ $f'(x) = \frac{e-x}{e \cdot x}$, więc łatwo sprawdzić, że w punkcie $x = e$ funkcja f osiąga maksimum. Zatem dla $x = \pi$ otrzymujemy $e \ln \pi < \pi$. Ponieważ e^x jest funkcją rosnącą, więc $e^{e \ln \pi} < e^\pi$, co kończy dowód.

Sposób V. Tym razem rozpatrzmy funkcję $f(x) = e^{1+\frac{x}{e}} - (x + e)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ $f'(x) = e^{\frac{x}{e}} - 1$, więc f ma minimum w $x = 0$. Stąd dla $x \neq 0$ mamy nierówność $e^{1+\frac{x}{e}} > x + e$. Dla $x > 0$ wynika z niej $e^{e+x} > (e+x)^e$. Wystarczy teraz podstawić $x = \pi - e$.

Na zakończenie odnotujmy, że obliczenia komputerowe dają przybliżone wartości $e^\pi \approx 23,140692$ i $\pi^e \approx 22,459157$. W 1929 r. A. Gelfond wykazał, że liczba e^π jest przestępna. Natomiast natura arytmetyczna liczby π^e jest dotychczas nieznana.



Jeśli znamy rozwinięcie e^x w szereg potęgowy

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots,$$

to oczywiście wiemy, że $e^x > 1 + x$ dla $x > 0$, ale, jak widać, można to udowodnić bardziej elementarnie.



Rozwiązanie zadania M 1327. Jeśli pewne trzy spośród rozważanych pięciu liczb dają tę samą resztę z dzielenia przez 3, to wybieramy je i ich suma jest podzielna przez 3. W przeciwnym przypadku pewne trzy liczby dają parami różne reszty z dzielenia przez 3 – te właśnie wybieramy.

Cyfrowy dźwięk i wojna na decybele

Tomasz IDZIASZEK

Aby opisać falę akustyczną, wytwarzaną przez głośnik, musimy podać, jak ciśnienie powietrza zmienia się w czasie – do tego wystarczy znać przebieg jednej wielkości – wychylenia membrany głośnika. Jeśli nasz głośnik jest podłączony do komputera, to stosowny opis fali jest produkowany przez kartę dźwiękową, która z kolei pobiera dane zapisane na jakimś nośniku danych. Na początku lat 80. XX wieku pojawił się nowy nośnik danych audio: płyta CD.

Dźwięk możemy zobaczyć: wystarczy spojrzeć na wykres amplitudy fali akustycznej. Fala ta jest sumą składowych o różnych częstotliwościach. Idealny ton obrazuje sinusoidalny wykres o odpowiedniej częstotliwości. Np. dźwiękowi A4 we współczesnym 88-klawiszowym fortepianie odpowiada ton o częstotliwości 440 Hz. Względem tej wartości liczone są częstotliwości tonów odpowiadających dźwiękom wszystkich klawiszy: i -temu klawiszowi odpowiada częstotliwość

$$440(\sqrt[12]{2})^{i-49} \text{ Hz,}$$

zatem dźwiękowi C3 (który jest dźwiękiem 28. klawisza) odpowiada częstotliwość 130,813 Hz. Na rysunku 1 przedstawiony został fragment wykresu fali dźwiękowej dla idealnego tonu tej częstotliwości. Poniżej na rysunku przedstawiono wykres fali dla rzeczywistego dźwięku C3 fortepianu – zawiera on więcej składowych harmonicznych, ale najniższa częstotliwość jest zachowana. Im bardziej skomplikowany jest dźwięk, tym więcej zawiera składowych harmonicznych.

Zapis w formacie cyfrowym. Ponieważ na płycie CD zapisujemy sygnał (opis fali dźwiękowej) w postaci zero-jedynkowej, musimy najpierw przekształcić go z postaci analogowej. Robimy to metodą LPCM (ang. *linear pulse-code modulation*), która przebiega dwutorowo: po pierwsze, nie zapisujemy wartości sygnału dla każdej chwili, a jedynie dla wybranych w równych odstępach chwil; taki proces nazywamy *próbkowaniem*. Po drugie, możemy zapisać tylko skończoną liczbę wartości sygnału, zatem dokonamy *kwantyzacji*. Pozostaje wobec powyższego ustalenie częstotliwości próbkowania i sposobu kwantyzacji.

Człowiek słyszy dźwięki w zakresie częstotliwości od 12 Hz do 20 kHz (zatem zakres fortepianu – od 27,5 Hz do 4186 Hz – jest dla niego dostępny). Zgodnie z twierdzeniem Nyquista-Shannona, aby móc prawidłowo odtworzyć sygnał ciągły z dyskretnego ciągu próbek, należy próbować z częstotliwością co najmniej dwa razy większą od największej częstotliwości występującej w sygnale. Z tego powodu przyjęto, że sygnał przed cyfryzacją zostanie poddany działaniu filtra dolnoprzepustowego, który obetnie częstotliwości wyższe niż 22 kHz (i tak ich nie usłyszymy), a następnie zostanie spróbkowany z częstotliwością 44,1 kHz (dokładna wartość ma uzasadnienie historyczne).

Co do kwantyzacji, przyjęto, że pojedyncza próbka będzie zapisana na 16 bitach (2 bajtach), co daje 2^{16} poziomów. W metodzie LPCM po prostu liniowo przekształcamy przedział wartości sygnału na dostępny zakres poziomów (u nas od -32768 do 32767).

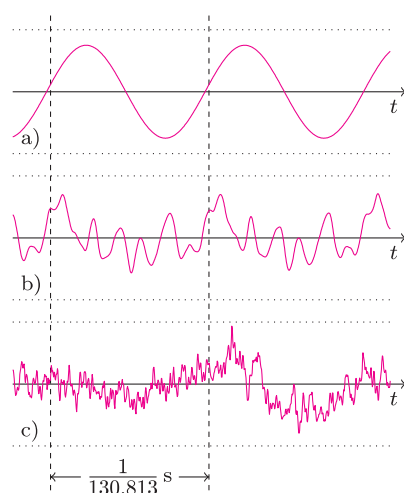
Ile potrzeba na to miejsca? Dźwięk na płycie CD zapisany jest stereofonicznie, to znaczy osobno zapisana jest fala dla lewego i prawego głośnika. Obliczmy zatem, ile bajtów zajmie minuta nagrania na płycie CD:

$$2 \cdot 60 \text{ s} \cdot 44100 \text{ Hz} \cdot 2 \text{ B} = 10\,584\,000 \text{ B} \approx 10,09 \text{ MB.}$$

Standardowa płyta zawiera do 80 minut muzyki, co daje około 807 MB. Czytelnik, któremu zdarzyło się nagrywać dane na płytę CD, może w tym momencie poddać nasze obliczenia w wątpliwość, jeśli widział na opakowaniu czystej płyty obietnicę, że pomieści ona 80 minut muzyki, ale tylko 700 MB danych. Skąd ta rozbieżność?

Otóż płyta CD jest wrażliwa na zarysowania powierzchni, które mogą skutkować błędnym odczytem. Dlatego też sygnał zapisuje się z użyciem kodowania umożliwiającego wychwytywanie błędów odczytu. W przypadku wykrycia

Więcej o dźwiękach i częstotliwościach można przeczytać w artykule *Harmonia w muzyce – skąd się bierze?* w *Delcie* 6/2009.

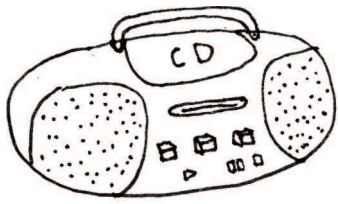


Rys. 1. Wykres amplitudy dwóch fal dźwiękowych o częstotliwości 130,813 Hz: a) idealnej sinusoidalnej, b) fortepianu oraz c) wykreś fragmentu piosenki. Po przekształceniu do formatu LPCM każdy z tych fragmentów zostanie zakodowany w 800 próbkach.



Rozwiązanie zadania M 1328.

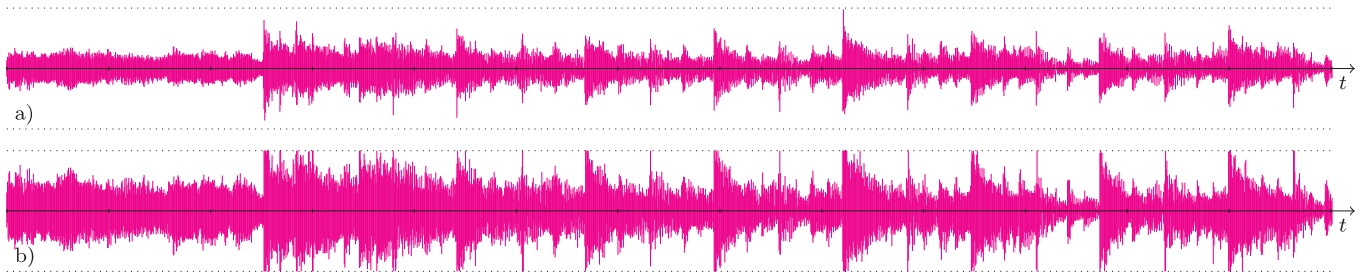
Wobec nierówności trójkąta mamy $\frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$. Podobnie, $\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}$ oraz $\frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}$. Dodając te trzy nierówności stronami, mamy tezę.



poważnego błędu na płycie audio stosuje się metody bazujące na interpolacji wartości sąsiednich próbek. Jest to rozsądne rozwiązanie dla sygnału dźwiękowego (i tak nie usłyszymy ewentualnej różnicy), jednak niedopuszczalne w przypadku płyty z danymi. Dlatego na takich płytach wprowadza się dodatkową warstwę synchronizacji i korekcji, która zajmuje 304 bity na każde 2352 bitów. Powoduje to, że na płycie z danymi zapiszemy około 0,87 raza mniej niż na płycie audio.

Morał z tego jest taki, że o ile zrobienie kopii płyty z danymi powinno udać się nawet dla dość porysowanych płyt, to idealne skopiowanie zawartości płyty audio (np. w celu słuchania muzyki z komputera) nierzadko przysparza kłopotów. Jeśli podczas odtwarzania skopiowanych piosenek słyszymy zacięcia lub trzaski, warto skorzystać z programów do tworzenia wiernych kopii, takich jak *cdparanoia* lub *Exact Audio Copy*.

Wojna na decybele. Możemy podejrzec, jak wygląda wykres fali dźwiękowej dla skopiowanej na komputer piosenki, np. używając programu Audacity. Na rysunku 2 przedstawiony został fragment piosenki – górny wykres to oryginał z roku 1988, natomiast dolny to wersja z albumu z roku 1995 będącego kompilacją wybranych utworów zespołu. Piosenka jest ta sama, jednak wykresy są inne – na drugim albumie piosenka jest po prostu nagrana głośniejsz. Jest to efekt niedobrej tendencji, nasilającej się od lat 90., a wiążącej się z przekonaniem, że im coś głośniejsze, tym bardziej nam się podoba. Skutkuje to tym, że producenci muzycy chcą, by to właśnie ich nagrania wybijały się z tłumu, czyli były jak najgłośniejsze; ich starania określa się jako tzw. *loudness war*. Niestety, zakres poziomów dostępnych na płycie CD jest ustalony i nie da się go obejść, chyba że zacznie się manipulować dźwiękiem.

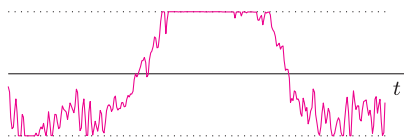


Rys. 2. Pierwsze 13 sekund piosenki *The Look* zespołu Roxette z płyty a) *Look Sharp!* (rok 1988) i b) *Don't Bore Us* (rok 1995).

Jeśli przyjrzymy się górnemu wykresowi, to dostrzeżemy, że pik w okolicach 8 s osiąga prawie maksymalną wartość. Wynika z tego, że głośność tego nagrania można zwiększyć bardzo nieznacznie, a jednak początkowy fragment dolnego wykresu ma 2 razy większą amplitudę niż odpowiadający mu fragment na górnym wykresie! Widać zatem, że dźwięk na drugim albumie jest zniekształcony w stosunku do oryginału. Takie zniekształcenie, które ma sprawić, by dźwięk wydawał nam się głośniejszy, można zrealizować na wiele sposobów.



Można np. nierównomiernie zwiększyć głośność muzyki – im cichszy jest dany fragment, tym bardziej zwiększamy jego głośność. To powoduje, że zakres dynamiczny (ang. *dynamic range*) piosenki (czyli różnica między głośnością najcichszego i najgłośniejszego fragmentu) jest mniejszy, a muzyka staje się monotonna. (Swoją drogą, niestety, jest to zaleta, jeśli słuchamy nagrania na kiepskim sprzęcie i w hałaśliwym miejscu, np. podczas jazdy samochodem.)



Rys. 3. Fragment piosenki *Stars* (300 próbek; okolice 210,5 s) z albumu *Have a Nice Day* (rok 1999) grupy Roxette.

Drugi sposób jest bardziej brutalny, gdyż nieodwracalnie niszczy fragmenty dźwięku: można po prostu obciąć wartości, które po zwiększeniu amplitudy przekroczyły dostępny zakres. Na rysunku 3 pokazano, jak to wygląda w praktyce – obcięty fragment ma długość aż 85 próbek.

Co dalej? Jeśli chcielibyśmy zarchiwizować naszą kolekcję płyt CD na komputerze, to na każdą płytę musimy liczyć średnio 650 MB, co np. dla 20 płyt daje 13 GB. Trochę dużo. Warto zatem zapisać nasze piosenki w formacie, który wspiera kompresję dźwięku. Ale to temat na osobny artykuł.

Koniec globalnego ocieplenia? Oblicz to sam

*Centrum Astronomiczne
im. Mikołaja Kopernika PAN,
Warszawa

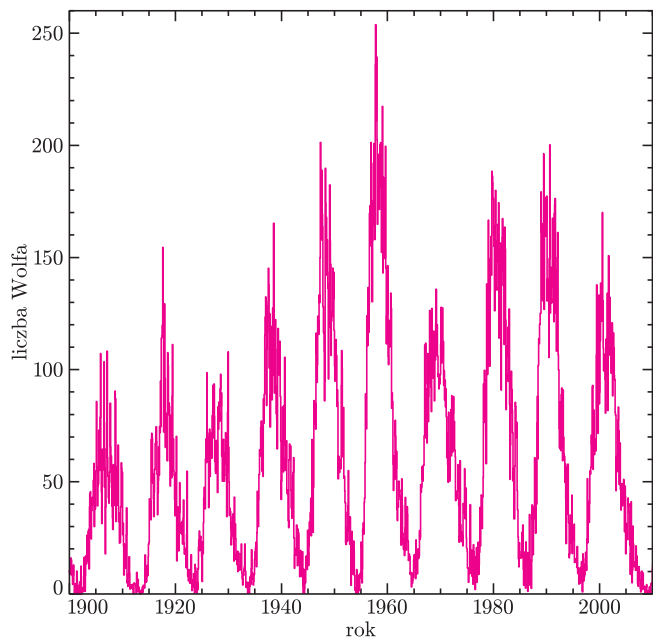
Bożena CZERNY*, Krzysztof HRYNIEWICZ*

Otwieramy gazetę i co widzimy? *Zbliża się globalne ocieplenie, człowiek produkuje tyle gazów cieplarnianych, że temperatura na Ziemi gwałtownie się podnosi i niedługo czeka nas megakatastrofa!* Otwieramy Internet, a tam na licznych forach krzyczą inne tytuły. *Spójrzcie ludzie za okno, zimy coraz bardziej srogie, aktywność Słońca zanika, 24. cykl aktywności słonecznej będzie bardzo słaby, jesteśmy na progu zjawiska podobnego do minimum Maundera, czeka nas epoka lodowcowa, jakie już przecież kiedyś na Ziemi bywały.*

Któremu stwierdzeniu uwierzyć? Przemysł, intensywne rolnictwo i hodowla rzeczywiście prowadzą do produkcji gazów cieplarnianych. Ale faktem jest też, że

epoki lodowcowe na Ziemi się zdarzają. W ciągu ostatnich stu tysięcy lat było głównie zimno, z niewielkimi przerwami po parę tysięcy lat (zwanymi interglacjami). Ciepło jest dopiero od dziesięciu tysięcy lat, a holocen to taki właśnie interglacjał. Ponadto, niezależnie od tego, czy jest ciepło czy zimno, występują spore wahania temperatury. Naukowiec nie rozumieją jeszcze w pełni tego zjawiska. Rozważane są różne hipotezy, a i dane obserwacyjne, którymi dysponujemy, nie są najlepsze. Precyzyjne pomiary wykonywane są przez stacje meteorologiczne od nieco ponad stu lat, a dokładniejsze globalne pomiary temperatury, obejmujące oceany, które przecież pokrywają ponad 70% powierzchni Ziemi, rozpoczęły się na dobre kilkanaście lat temu.

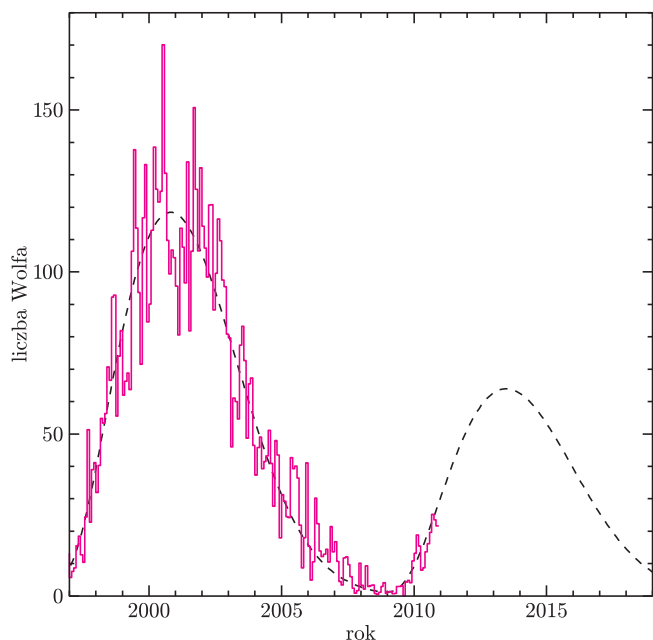
Mamy zatem do dyspozycji, przynajmniej dla ostatnich kilkunastu lat, zupełnie niezłe pomiary. I mamy to szczęście (albo nieszczęście), że w ostatnim czasie aktywność Słońca uległa niekwestionowanemu osłabieniu. Nasuwa się zatem pytanie, czy sprawcą zmian klimatu jest Słońce czy człowiek i w którą stronę ziemski klimat zmierza. Ponieważ otaczający nas zgiełk informacyjny utrudnia znalezienie jasnej odpowiedzi na te pytania, proponujemy Czytelnikom wykonywanie co jakiś czas, w miarę pojawiania się coraz nowszych i lepszych pomiarów, własnych obliczeń.



Rys. 1. Liczba Wolfa opisująca liczbę plam na Słońcu od roku 1900. Wyraźnie widać niemal cykliczną zmienność z okresem około 11 lat.

Oslabienie aktywności Słońca

Aktywność Słońca przejawia się w postaci częstego występowania plam słonecznych, rozbłysków, emisji rentgenowskiej i radiowej. Aktywność ta zmienia się prawie cyklicznie, z okresem około 11 lat. Aktywność w ciągu ostatnich 100 lat według danych z [1] przedstawiona jest na rysunku 1. Oprócz zmian cyklicznych widać jednak także, że nie wszystkie maksima są jednakowo wysokie i nie wszystkie minima jednakowo długie. Ostatnie maksimum, przypadające na rok 2000, jest już niższe niż to poprzednie (z roku 1990), ostatnie minimum było wyjątkowo długie, a wszystko wskazuje na to, że najbliższe maksimum (spodziewane około roku 2013) będzie jeszcze niższe. Na rysunku 2 przedstawiony jest przewidywany i rzeczywisty przebieg wartości liczby plam na Słońcu według stanu na grudzień 2010 według danych z [2]. Zobaczymy, czy te przewidywania się potwierdzą.



Rys. 2. Liczba Wolfa (linia ciągła) oraz jej przewidywana wartość (linia przerywana), otrzymana metodą opracowaną przez Hathaway'a i współpracowników.

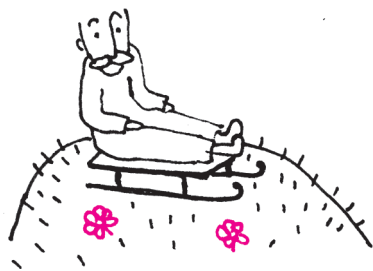
Aktywność Słońca a klimat na Ziemi

W czasach historycznych było kilka epizodów zmniejszonej aktywności słonecznej. Najbardziej znane i nagłębse to, zbiegające się z tzw. Małą Epoką Lodowcową, minimum Maundera w latach 1645–1717, kiedy to plamy słoneczne niemal nie występowały. Nie tak już głębokie było minimum Daltona w latach 1790–1830, w środku którego miała miejsce wyprawa Napoleona na Rosję, zakończona porażką m.in. z powodu ciężkiej zimy. Można sądzić, że osłabienie aktywności Słońca skutkuje spadkiem temperatury na Ziemi.

Pomiary emisyjności Słońca potwierdziły pewien związek – gdy Słońce jest aktywne, emituje więcej energii – ale ta zmiana jest zaledwie rzędu 0,1%. Modele klimatu Ziemi nie przewidują, żeby tak mała zmiana przekładała się na znaczącą zmianę temperatury. Obliczenia wskazują zmiany rzędu 0,1°C. Są jednak sugestie, że mogą działać także pewne sprzężenia zwrotne, związane ze zmianami w wietrze słonecznym oraz promieniowaniu kosmicznym. Mianowicie, słaby wiatr słoneczny nie chroni nas przed cząstkami promieniowania kosmicznego, które mogą mieć wpływ na formowanie się pewnego typu chmur w górnych warstwach atmosfery, to zaś może wpływać na osłabienie światła słonecznego. Nie ma jednak dobrego modelu tego zjawiska.

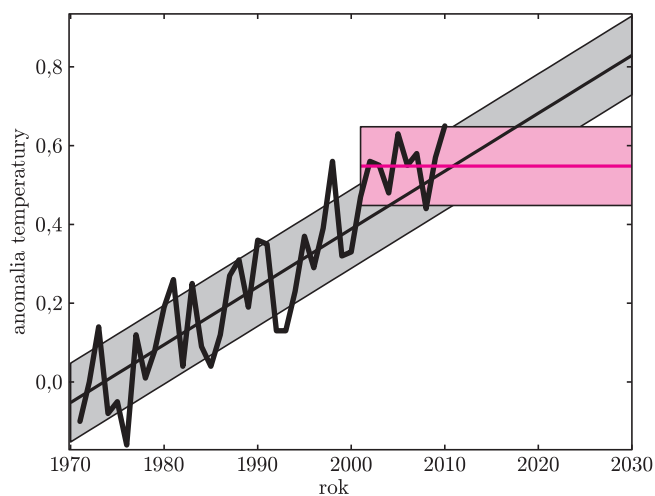
Opisane wyżej niepewności skłaniają nas do możliwie ostrożnego formułowania hipotez. Przyjmijmy zatem, że niewykluczone jest, iż aktywność Słońca wpływa na ziemski klimat, a zatem zmiany klimatu mogą odzwierciedlać zmiany aktywności Słońca.

Zmiany temperatury na Ziemi



Zajmijmy się zatem problemem temperatury: rośnie czy nie? Średnią roczną wartość odchylenia temperatury na powierzchni Ziemi (od roku 1880 do dziś) znaleźć można w bazie GISTEMP [3]. Dane te opierają się na pomiarach z meteorologicznych stacji naziemnych oraz pomiarach satelitarnych. Pomiary ze stacji naziemnych są starannie selekcjonowane (na podstawie obserwacji satelitarnych) w celu uniknięcia błędów związanych ze zjawiskiem miejskich „wysp ciepła”. Pomiary temperatury powierzchni wody w oceanach pochodzą z obserwacji satelitarnych, zbieranych przez National Oceanic and Atmospheric Administration (tzw. baza OISST.v2). Włączone tam są także pomiary na Antarktydzie, podawane co miesiąc przez Scientific Committee on Antarctic Research. Sposób opracowywania danych opisany jest szczegółowo w pracy [4]. Podane wartości obejmują zatem zarówno powierzchnię lądów, jak i oceanów. Uwzględnienie oceanów jest niezwykle ważne, ponieważ lądy stanowią mniej niż 30% powierzchni Ziemi, a w dodatku woda ma znacznie większą bezwładność cieplną i w mniejszym stopniu wykazuje wahania chwilowe, a w większym akumulujące się trendy. Opisywana baza podaje anomalie

(różnicę temperatury), a nie samą wartość, ponieważ pomiar taki jest obciążony mniejszym błędem. Okresem odniesienia w tej bazie jest okres lat 1951–1980. W chwili pisania artykułu nie ma tam jeszcze pełnych danych za rok 2010, ale są dane do listopada włącznie, więc można uśrednić dane od stycznia do listopada i uznać to za dobre przybliżenie. Czytelnikom radzimy skorzystać z nowszych danych.



Rys. 3. Wykres obserwowanego przebiegu anomalii temperatury (linia gruba łamana), dopasowanie trendu wznoszącego (linia czarna) oraz stałej wartości od roku 2001 (linia czerwona). Obszar zacieniowany to otrzymany zakres błędów (fluktuacji krótkookresowych).

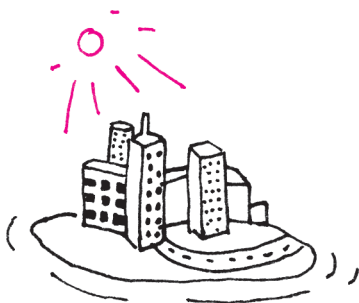
Dane zawarte w opisanej wyżej bazie pozwalają nam analizować zmiany temperatury w ciągu ostatnich dekad. Skupimy się tutaj na okresie od 1970 roku do chwili obecnej. Wykres, przedstawiony na rysunku 3, pozwala stwierdzić, że, ogólnie rzecz biorąc, temperatura rośnie, choć ostatnio jakoś mniej (szczególnie jeśli nie patrzeć na ostatni analizowany rok, czyli 2010). Podzielimy zatem dane na dwie grupy: okres 1970–2000 i okres 2001–2010. W tym pierwszym okresie temperatura niewątpliwie rośnie. Jest to zgodne z odczuciem jednego z autorów, pamiętającego z dzieciństwa (lata 60. XX w.) corocznie śnieżne zimy, w odróżnieniu od lat późniejszych. Ten wzrost możemy scharakteryzować ilościowo, dopasowując do trendu wzrostowego linię prostą. Metody statystyczne podpowiadają nam, że jest na to prosty przepis.

Prosta analiza statystyczna

Powiedzmy, że mamy zbiór pomiarów temperatury T_1, \dots, T_n , wykonanych w chwilach t_1, \dots, t_n . Szukamy takiej prostej $T = at + b$, która możliwie najlepiej opisuje trend pomiarowy. W tym celu określamy funkcję:

$$(*) \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(at_i + b - T_i)^2}{\sigma_i^2}.$$

Wyrażenie w licznikach to kwadrat różnicy między dopasowywaną prostą a prawdziwą wartością pomiaru w danej chwili t_i . Wyrażenia w mianowniku to kwadraty błędów pomiarowych. Tak zdefiniowana funkcja nawiązuje do pewnej koncepcji, niezwykle ważnej w statystyce. Załóżmy, że mamy ciąg n niezależnych zmiennych losowych, każda o standardowym rozkładzie normalnym o średniej zero i dyspersji 1. Wtedy zmienna losowa będąca sumą ich kwadratów ma rozkład χ^2 o n stopniach swobody.



Istnieje wiele ważnych twierdzeń na temat własności tego rozkładu, a niektóre pożyteczne własności są stabilizowane. My jednak do skomplikowanych twierdzeń tu odwoływać się nie będziemy, a nasze dalsze rozważania będą mieć charakter intuicyjny i jakościowy.

Funkcja (*) zależy od dwóch nieznanymi parametrów rzeczywistych a i b . Jest ona sumą wyrazów dodatnich, tym mniejszych, im lepiej nasza funkcja opisuje prawdziwy przebieg temperatury. Możemy to wykorzystać do obliczenia a i b , zakładając, że najlepiej opisują rzeczywistość te wartości parametrów, dla których funkcja przyjmuje wartość najmniejszą. Ponieważ jest to funkcja kwadratowa a i b , wyznaczenie jej minimum nie powinno nastroczać zbytnich trudności.

No właśnie, nie powinno, gdybyśmy znali wartości błędów pomiarowych. Tak jednak nie jest. Założmy zatem dla uproszczenia, że wszystkie są jednakowe (pomiarby były wykonywane tą samą metodą za pomocą takich samych urządzeń). Położenie minimum funkcji (*) nie zależy wtedy od wartości błędu pomiarowego. Wykonując obliczenia dla lat 1970–2000 (31 punktów pomiarowych), uzyskujemy $a = 0,015$, co oznacza, że przy najlepszym dopasowaniu temperatura rośnie o $1,5^{\circ}\text{C}$ na stulecie. Wartość b nie jest istotna z punktu widzenia kierunku trendu. Uzyskana w ten sposób prosta jest zaznaczona kolorem czarnym na rysunku 3, gdzie wykonano także ekstrapolację (czyli przedłużenie) trendu dla lat 2000–2010. Punkty pomiarowe dla lat 2000–2010 nie odstają zbytnio od tej prostej. W oparciu o nasze wcześniejsze rozważania, dotyczące związku klimatu z aktywnością Słońca, możemy jednak także założyć, że od roku 2000 temperatura już nie rośnie. W takim przypadku dobry opis punktów pomiarowych powinna zapewniać prosta pozioma odpowiadająca średniej wartości anomalii temperatury z lat 2001–2010. Zaznaczamy ją na wykresie kolorem. Patrząc na obie proste – tę wznoszącą się i tę poziomą – trudno powiedzieć, która jest lepszym opisem danych z ostatniej dekady.

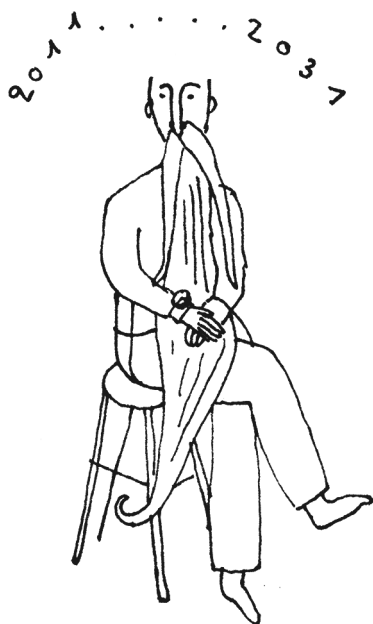
Prawda a statystyka

Metody statystyczne pozwalają na rozstrzygnięcie tego problemu, wymagają one wszakże dokładnej znajomości błędów występujących w równaniu (*). Nie ma ich jednak w żadnej tabeli. Musimy się więc odwołać do metod z pogranicza fizyki i sztuki. Dane z okresu 1970–2000 wydają się „na oko” zgodne z liniowym trendem wznoszącym. A zatem dla tych danych pomiary nie powinny odstawać od rzeczywistego trendu więcej niż o wartość błędu pomiarowego σ . Z kolei różnica dużo mniejsza niż σ jest mało prawdopodobna z uwagi na nieunikniony rozrzut w wyniku błędów pomiaru. Oznacza to, że dla najlepszego dopasowania wartość tej funkcji χ^2 powinna wynosić w przybliżeniu tyle, ile mamy pomiarów, czyli 31. Znając wartości a i b oraz podstawiając $\chi^2 = 31$, możemy wyznaczyć wartość σ . W naszym przypadku $\sigma = 0,1^{\circ}\text{C}$. To określenie błędu pozwala nam narysować wokół trendów pas niepewności wynikający z krótkoskalowych fluktuacji. Pas taki dodany do trendu wzrostowego pokazuje, że pomiary z okresu 2001–2010 dobrze mieszczą się w przewidzianym trendzie. Ale taki sam pas dodany do trendu poziomego (zaznaczony kolorem na rysunku 3) też dobrze opisuje sytuację, a oba pasy niemal się pokrywają dla rozważanego okresu. Czyli na pytanie, czy temperatura rośnie, czy nie rośnie, odpowiedź mamy taką: temperatura rośnie albo i nie rośnie... Niestety, obecny okres pomiarowy jest za krótki, aby coś stwierdzić, i nic na to nie można poradzić. Musimy więc czekać. Jak długo?

To można ocenić, ekstrapolując oba trendy na następne 20 lat. Przez następnych kilka lat pasy niepewności wokół obu prostych będą na siebie zachodziły, co oznacza, że nie da się rozróżnić dwóch hipotez. Ale za 20 lat różnice będą już wyraźne. Młodzi Czytelnicy pomyślą sobie, że taki szmat czasu to w zasadzie wieczność, ale w nauce czas potrafi płynąć bardzo powoli. Trzeba po prostu uzbroić się w cierpliwość. W jej braku można spróbować łączyć pomiary (użyć średniej z dwóch-trzech lat) i powtórzyć tę samą analizę. To może zmniejszyć trochę fluktuacje i ewentualnie skrócić nieco czas czekania na odpowiedź. Ćwiczenie to pozostawiamy do wykonania Czytelnikom.

Odnosiniki

1. <http://solarscience.msfc.nasa.gov/SunspotCycle.shtml>
2. <http://solarscience.msfc.nasa.gov/predict.shtml>
3. <http://data.giss.nasa.gov/gistemp/tabledata/GLB.Ts+dSST.txt>; ta baza danych tworzona jest przez NASA/Goddard Space Flight Center, Goddard Institute for Space Studies.
4. Hansen *et al.*, Reviews of Geophysics, grudzień 2010; pracę tę można pobrać ze strony internetowej NASA <http://data.giss.nasa.gov/gistemp/>



Kącik przestrzenny (9) Kąty dwuścienne

W tym odcinku przyjrzymy się kątom dwuściennym. Jedną z najbardziej skutecznych metod radzenia sobie z nimi jest przeformułowanie problemu tak, żeby zamiast kątów dwuściennych pojawiły się kąty płaskie. Można to zrobić w następujący sposób: bierzemy dowolny punkt P znajdujący się wewnątrz kąta bryłowego i rzutujemy go na płaszczyzny zawierające ściany tego kąta. Otrzymujemy w wyniku kąt bryłowy, w którym kąty płaskie są dopełnieniami odpowiednich kątów dwuściennych do kąta półpełnego, a kąty dwuścienne tego kąta są dopełnieniami do 180° kątów płaskich pierwszego kąta (zachęcam Czytelnika do sprawdzenia tego faktu). Taki kąt nazywamy *kątem dopełniającym* do danego albo *kątem biegunowym* (ang. *polar angle*). Po przeformułowaniu problemu możemy skorzystać z twierdzeń o kątach płaskich z poprzedniego odcinka. Jedno z nich przyda nam się w tym artykule, a więc przypomnijmy jego sformułowanie.

Twierdzenie 1. *W dowolnym wypukłym kącie bryłowym suma kątów płaskich jest mniejsza od 360° .*

Wykorzystamy opisaną metodę do rozwiązania następującego zadania.

1. (OM 33-III-6) *Udowodnić, że w dowolnym czworościanie suma kątów dwuściennych jest większa od 360° .*

Rozwiązanie. Teza wynika z następującego lematu: *w dowolnym kącie trójściennym suma kątów dwuściennych przy jego krawędziach jest większa od 180° .*

Dowód lematu. Niech P będzie dowolnym punktem leżącym wewnątrz danego kąta trójściennego, a A, B i C jego rzutami prostokątnymi na płaszczyzny zawierające ściany danego kąta trójściennego (rys. 1). Jeśli α, β i γ oznaczają miary kątów dwuściennych, to miary kątów płaskich BPC, CPA, APB są równe $180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta, 180^\circ - \gamma$. Z twierdzenia 1 wynika, że

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) < 360^\circ,$$

a stąd $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$.

Zamiana na kąty płaskie nie jest jedyną skuteczną sztuczką. Oto przykład innej metody:

2. (IMO LONGLIST 1986) *Punkt O jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$, przy czym prosta OD jest prostopadła do krawędzi AD . Znaleźć miarę kąta dwuściennego między płaszczyznami BOD i COD .*

Rozwiązanie. Wykażemy, że miara tego kąta jest równa 90° .

Niech P, Q, R będą punktami styczności sfery wpisanej odpowiednio ze ścianami ABD, ACD, BCD . Z równości $BP = BR, DP = DR$ i $OP = OR$ wnioskujemy, że czworościany $BODP$ i $BODR$ są przystające (rys. 2). Zatem kąt dwuścienny między płaszczyznami BOD i DOP jest równy kątowi dwuściennemu między płaszczyznami BOD i DOR . Analogicznie dowodzimy, że kąt dwuścienny między płaszczyznami COD i DOQ jest równy kątowi dwuściennemu między płaszczyznami COD i DOR . Wykażemy, że punkty D, O, P, Q leżą na jednej płaszczyźnie. Wtedy, korzystając z poprzednich obserwacji, łatwo obliczyć, że kąt dwuścienny między płaszczyznami BOD i COD ma miarę 90° .

Ponieważ płaszczyzna ABD jest prostopadła do prostej OP , to $AD \perp OP$ (rys. 3). Stąd i z danego w treści warunku $AD \perp OD$ dostajemy $AD \perp DOP$. Analogicznie udowodnimy, że $AD \perp DOQ$. Zatem punkty D, O, P, Q leżą na jednej płaszczyźnie prostopadłej do krawędzi AD , co kończy dowód.

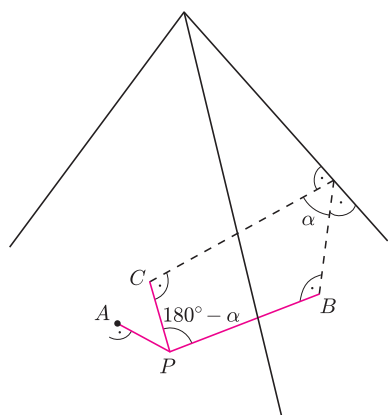
Zadania

3. *Udowodnić, że w dowolnym czworościanie suma miar kątów dwuściennych przy wszystkich krawędziach jest mniejsza od 540° .*

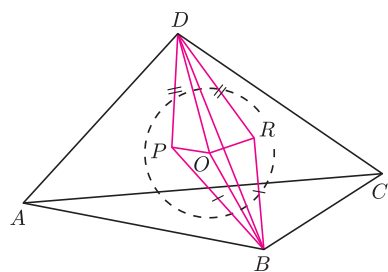
4. (OM 45-I-12) *Wykazać, że sumy przeciwległych kątów dwuściennych czworościanu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych krawędzi są równe.*

Więcej zadań na deltami.edu.pl.

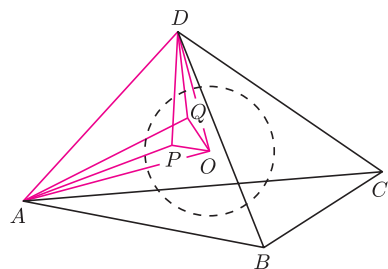
Michał KIEZA



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Wskazówka do zadania 4: Sumy długości przeciwległych krawędzi czworościanu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje sfera styczna do wszystkich krawędzi czworościanu.



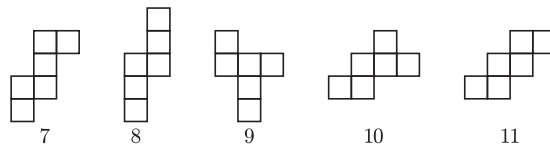
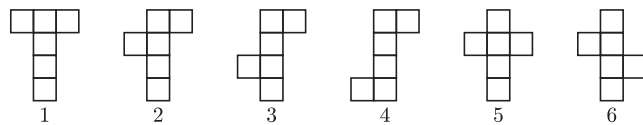
mała delta



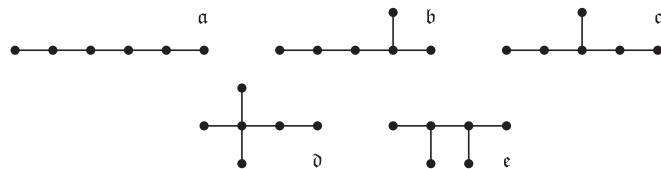
Siatki, grafy, wielościany

CZYTAJ W KOLEJNOŚCI WYZNACZONEJ PRZEZ STRZAŁKI

Sześcian ma 11 różnych siatek. Oto one:

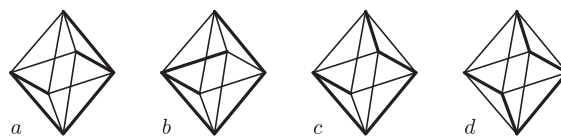


Łącząc środki sąsiednich kwadratów siatki, otrzymujemy 11 grafów w jednym kawałku i bez pętelek (czyli *spójnych* i bez *cykli*) – takie grafy nazywamy *drzewami*. Oto one:



Jest ich rzeczywiście 11, bo drzewo *a* jest cztery, *b* jest trzy, *c* – dwa, a *d* i *e* po jednym. **Które drzewo odpowiada którym siatkom?**

Położmy je na krawędziach ośmiościanów foremnych.

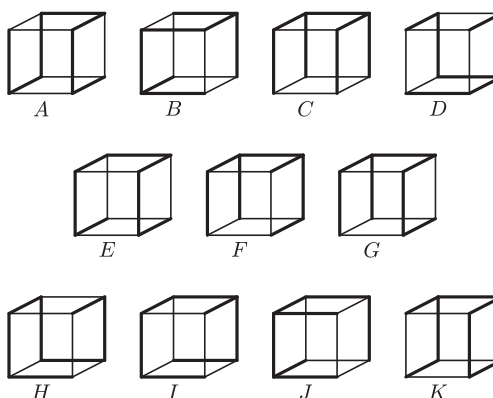


Które drzewo leży na którym ośmiościanie?



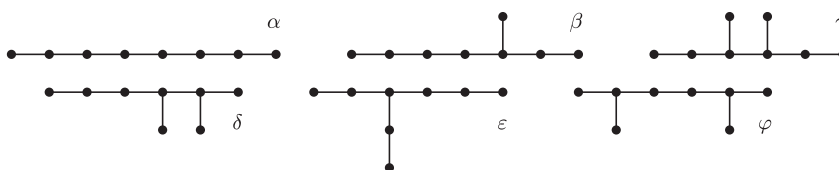
CZYTAJ W KOLEJNOŚCI WYZNACZONEJ PRZEZ STRZAŁKI

Po rozcięciu krawędzi, na których leżą drzewa, otrzymamy 11 siatek sześcianu, jak obok. **Która siatka powstała z którego rozcięcia?**

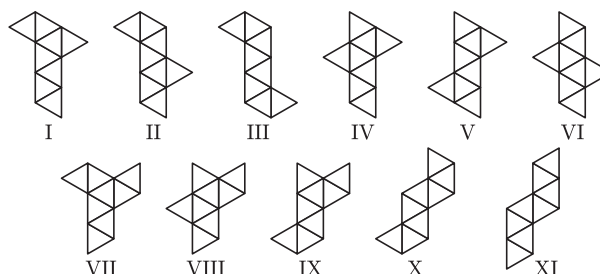


Położmy te drzewa na krawędziach sześcianu. **Które drzewo leży na których sześcianach?**

Rzeczywiście jest ich jedenaście, bo drzew α i β jest po trzy, γ – dwa, a δ , ε i φ po jednym. **Które drzewa powstały z których siatek?**



Łącząc środki sąsiednich trójkątów siatki, otrzymujemy 11 drzew.



Po rozcięciu krawędzi, na których leżą drzewa, otrzymujemy 11 siatek ośmiościanu foremego, jak wyżej. **Która siatka powstała z którego rozcięcia?**



Małą Deltę przygotował Marek KORDOS



Jaka powinna być

DELTA
EPSILON : PSI
PSI
ANI
ASS
PSLO
PEPP
DAEN
DAEN
=

5 7 8 1 3 0 0 1 2 0
5 2 1 D E F G L V O M

Z różnych szuflad

Publikowane po raz pierwszy!

Alfametyk z logarytmów

$$241 \times \text{LOGARYTM} = \text{KRYPTARYTM}$$

3 1 8 0 1 3 2 0 0 4
7 0 6 5 7 1 1 1 1 1 1

Alfametyk pitagorejski

$$(\text{CZTERY} - \text{JEDEN})^2 + (\text{CZTERY})^2 = (\text{CZTERY} + \text{JEDEN})^2$$

1 2 1 0 0 8 3 4 5
6 5 1 2 7 1 1 1 1 1

Układ alfametyków

$$\sqrt{\text{TAK}} = \sqrt{\text{CZY}} + \sqrt{\text{NIE}}$$

$$9 \times \text{NIE} = \text{TAK}$$

1 0 1 0 0 3 4 5 8
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

Wznowienia z *Journal of Recreational Mathematics*

Grecki układ alfametyków *JRM 35(4)*, s. 339

$$4(\epsilon\nu\tau\epsilon\kappa\alpha) + \delta\epsilon\kappa\alpha + \epsilon\nu\nu\epsilon\alpha + 2(\epsilon\varphi\tau\alpha) + 3(\epsilon\nu\alpha) = \sigma\gamma\delta\omicron\nu\tau\alpha$$

$$2(\delta\epsilon\kappa\alpha) + 7(\epsilon\varphi\tau\alpha) + 14(\delta\nu\omicron) + 3(\epsilon\nu\alpha) = \epsilon\kappa\alpha\tau\omicron$$

$$3(\delta\nu\omicron) + 14(\epsilon\nu\alpha) = 2(\delta\epsilon\kappa\alpha)$$

czyli $4(11) + 10 + 9 + 2(7) + 3(1) = 80$, $2(10) + 7(7) + 14(2) + 3(1) = 100$, $3(2) + 14(1) = 2(10)$

$$3(215) + 14(001) = 5(2041)$$

$$5(2041) + 1(0301) + 14(215) + 3(001) = 04105$$

$$4(000041) + 2041 + 00001 + 5(0301) + 3(001) = 582501$$

Angielskie sześciiany *JRM 33(4)*, s. 292

$$(\text{FOUR})^3 + (\text{FOUR})^3 = (\text{FIVE})^3 + (\text{ONE})^3 + (\text{ONE})^3 + (\text{ONE})^3$$

$$(1380)_3 + (1380)_3 = (1152)_3 + (342)_3 + (342)_3 + (342)_3$$

Portugalskie kwadraty *JRM 35(2)*, s. 151

$$(\text{SETE})^2 + (\text{SEIS})^2 = (\text{NOVE})^2 + (\text{DOIS})^2$$

$$\text{czyli } 7^2 + 6^2 = 9^2 + 2^2$$

$$(0181)_3 + (0100)_3 = (0431)_3 + (1400)_3$$

Włoski układ alfametyków *JRM 35(1)*, s. 62

$$\text{VENTUNO} + \text{DODICI} + \text{DIECI} + \text{NOVE} + 7(\text{DUE}) + 14(\text{UNO}) = \text{OTTANTA}$$

$$2(\text{DODICI}) + \text{UNDICI} + 5(\text{NOVE}) + \text{OTTO} + \text{DUE} = \text{NOVANTA}$$

czyli $21 + 12 + 10 + 9 + 7(2) + 14(1) = 80$, $2(12) + 11 + 5(9) + 8 + 2 = 90$

$$5(303010) + 013010 + 2(1028) + 0550 + 308 = 1024154$$

$$2815010 + 303010 + 30810 + 1028 + 1(308) + 14(010) = 0554154$$

Francusko-rzymski układ alfametyków *JRM 34(1)*, s. 59

$$\text{XXXIX} + \text{CCCXII} + \text{DCCCL} + \text{CMXC} = \text{MMCXCI}$$

$$2(\text{DEUX}) + 4(\text{DIX}) + 56(\text{UN}) = \text{CENT}$$

$$27(\text{DEUX}) + 53(\text{DIX}) + 416(\text{UN}) = \text{MILLE}$$

czyli $2(2) + 4(10) + 56(1) = 100$, $27(2) + 53(10) + 416(1) = 1000$

$$51(1438) + 23(108) + 410(30) = 00114$$

$$5(1438) + 4(108) + 20(30) = 2405$$

$$88808 + 222800 + 12221 + 2082 = 002820$$

Angielski układ alfametyków *JRM 35(3)*, s. 239

$$3(\text{NINE}) + 3(\text{TEN}) + 11(\text{TWO}) + 11(\text{ONE}) = \text{FORTY} + \text{FIFTY}$$

$$\text{THIRTY} + \text{FORTY} = \text{TWENTY} + \text{FIFTY}$$

$$403845 + 10845 = 410245 + 13145$$

$$3(2320) + 3(402) + 11(410) + 11(020) = 10845 + 13145$$

Więcej o alfametykach można przeczytać w *Delcie* 8/2011.

Ułamek

Rewia Rozrywki, 1991, 1(68)

$$\frac{\text{LICZNIK}}{\text{MIANOWNIK}} = \frac{1}{501}$$

1 2 0 4 0 0 1 3 8 5
7 1 5 2 1 1 1 1 1 1

The Big Apple

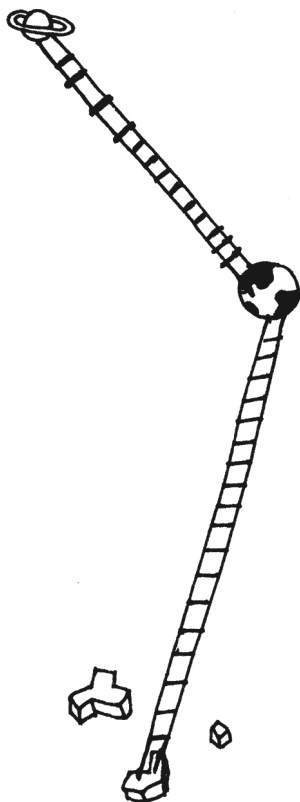
JRM 35(2), s. 151

$$(\text{NEW})^3 = (\text{YORK} - \text{CITY})^2$$

$$(100)_3 = (4280 - 1354)_3$$

Andrzej BARTZ

Prosto z nieba: Świece standardowe i kalibratory



Mierzenie odległości we Wszechświecie nie jest, jak wiadomo, sprawą prostą. Jako że nie da się po prostu przyłożyć do astronomicznych obiektów odpowiednio długiej „linijki”, musimy posługiwać się różnymi (czasami nie zawsze stuprocentowo skutecznymi) metodami pośrednimi. Znajomość procesów fizycznych prowadzących do emisji przez ciało niebieskie określonej ilości energii w określonym czasie pozwala nam na konstrukcję tzw. drabiny odległości, czyli wyznaczenie odległości od dalekich obiektów na podstawie dokładnie zmierzonej odległości do obiektów dość bliskich.

Takie odpowiednie obiekty nazywa się *świecami standardowymi*; przykładami są często używane cefeidy (gwiazdy pulsujące typu δ Cephei, których jasność zależy w prosty sposób od okresu pulsacji), a także supernowe typu Ia, czyli akreujące materię białe karły, eksplodujące z powodu niestabilności grawitacyjnej po przekroczeniu masy Chandrasekhara (około $1,4 M_{\odot}$). Badanie supernowych typu Ia pozwoliło powiązać lokalne odległości w Galaktyce z rozmiarem całego Wszechświata, czyli wyznaczyć stałą Hubble’a.

Podobną rolę standardu jasności, używanego przez astronomów do kalibrowania teleskopów oraz do definiowania systemów fotometrycznych, za pomocą których obserwuje się niebo w różnych filtrach, spełnia Wega (α Lyrae), gwiazda o stałej, w tym przypadku prawie zerowej jasności: $m_V = +0,03$ (w paśmie widzialnym V) i kolorze (czyli różnicy jasności w dwóch odpowiednio dobranych filtrach). Możemy ją oraz cały gwiazdozbiór Lutni obserwować w tym miesiącu wysoko na niebie, w kierunku południowo-zachodnim.

Dla badaczy nieba w zakresie rentgenowskim „gwiazdę odniesienia” stanowiła zwyczajowo mgławica Krab (M1). Znajduje się ona w gwiazdozbiorze Byka, pomiędzy Capellą (α Aurigae) a Betelgezą (α Orionis) i jest pozostałością po wybuchu supernowej z roku 1054. Można ją dostrzec w tym miesiącu późnym wieczorem i nocą na wschodnim niebie za pomocą lornetki (jasność $m_V = +8,4$). Legendarnie stabilna emisja rentgenowska mgławicy zyskała nawet swoją jednostkę, zwaną krabem (ang. *crab*), równą $2,4 \cdot 10^{-11}$ W/m² (przeważnie do badań używa się milikrabów).

W międzyczasie Krab postanowił jednak spłacać naukowcom psikusy: według ostatnich pomiarów mgławica przestała świecić jednostajnie i w ciągu ostatnich paru lat zmieniła jasność o około 7% [1]. Teleskop kosmiczny Fermiego rejestruje dodatkowo zupełnie niespodziewane intensywne rozbłyski promieniowania γ powstające w okolicach środka mgławicy, tj. w pobliżu pulsara [2]. Nie pierwszy to raz (i na pewno nie ostatni), gdy Natura okazuje się bardziej skomplikowana niż wyobraźnia badaczy; przypuszcza się, że rozbłyski te mogą być przejawem dynamicznej ewolucji pola magnetycznego pulsara, które przyspiesza strumienie naładowanych elektrycznie cząstek emitujących twarde promieniowanie, ale spójna teoria wyjaśniająca tę zagadkową aktywność, jak dotąd, nie powstała.

Michał BEJGER

[1] <http://physicsworld.com/cws/article/news/44783>

[2] <http://www.bbc.co.uk/news/science-environment-13362958>



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1327. Udowodnić, że spośród dowolnych pięciu liczb całkowitych (niekoniecznie różnych) można wybrać trzy, których suma jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie na str. 7

M 1328. Udowodnić, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, to zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Rozwiązanie na str. 8

M 1329. W przestrzeni dane są takie punkty A, B, C, D , że

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB = 90^\circ.$$

Udowodnić, że punkty A, B, C, D leżą na jednej płaszczyźnie.

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 797. Pozioma płaska rurka zawija się w pionową pętlę o promieniu r . Z jaką minimalną prędkością powinien poruszać się w poziomej części kawałek sznurka o długości $l > 2\pi r$, tak aby przejść przez pętlę? Założyć, że promień pętli jest dużo większy od promieni rurki i sznurka.

Rozwiązanie na str. 18

F 798. Wzdłuż równika rzucono kamień ze wschodu na zachód, tak że bardzo daleko od Ziemi jego prędkość stała się równa zero. Taki sam kamień z taką samą prędkością początkową rzucono wzdłuż równika, ale w przeciwną stronę – z zachodu na wschód. Z jaką prędkością będzie poruszał się ten kamień na tej samej odległości od Ziemi? Długość równika jest równa $l = 4 \cdot 10^4$ km, promień Ziemi $R = 6,4 \cdot 10^3$ km. Przyjąć, że przyspieszenie swobodnego spadku na powierzchni Ziemi wynosi $g = 10$ m/s².

Rozwiązanie na str. 24

Informatyczny kącik olimpijski (46): Myjnia samochodowa

Zadanie omawiane w tym kąciku pochodzi z obozu treningowego drużyn rosyjskich z 2008 roku (autor zadania: Andrew Stankevich).

Do myjni ustawila się długa kolejka samochodów (jest ich n), z których każdy należy wyczyścić w środku i umyć od zewnątrz. Dla samochodu numer i czynności te zajmują, odpowiednio, a_i oraz b_i sekund i są wykonywane niezależnie przez dwie różne osoby – jeden pracownik myje wszystkie samochody od zewnątrz, a drugi czyści wszystkie od wewnątrz. Każdy z pracowników może dowolnie ustalić kolejność czyszczenia samochodów. Każdy pracownik może pracować naraz tylko nad jednym samochodem i każdy samochód może być w jednej chwili czyszczony przez tylko jednego pracownika. Zadaniem jest takie ustalenie kolejności czyszczenia przez obu pracowników, żeby jak najszybciej zakończyć całą pracę.

W prawdziwej myjni prawdopodobnie liczby a_i nie różnią się zbyt dużo, podobnie jest w przypadku liczb b_i . Zachęcamy Czytelnika do zastanowienia się, czy dodatkowe założenie, że $\max_i a_i \leq 2 \min_i a_i$ i analogicznie dla b_i , pomaga w znalezieniu rozwiązania. W oryginalnym zadaniu jednak takich założeń nie było, zastanówmy się więc, jak je rozwiązać bez tego.

Oznaczmy przez T najkrótszy czas, w którym można zakończyć pracę. Łatwo zauważyć, że $T \geq \sum_i a_i$, $T \geq \sum_i b_i$ oraz $T \geq \max_i (a_i + b_i)$.

Niech $T_{\min} = \max(\sum_i a_i, \sum_i b_i, \max_i (a_i + b_i))$. Chcielibyśmy ułożyć plan, w którym $T = T_{\min}$.

Jeśli $T_{\min} = \max_i (a_i + b_i)$, rozważmy i_0 , które realizuje to maksimum. Wiemy wówczas, iż $\sum_{i \neq i_0} a_i \leq b_{i_0}$ oraz $\sum_{i \neq i_0} b_i \leq a_{i_0}$, czyli możemy ustalić, że jeden z pracowników najpierw czyści wszystkie samochody poza i_0 , a drugi w tym czasie czyści samochód i_0 , po czym zamieniają się. W ten sposób otrzymujemy plan spełniający $T = T_{\min}$.

Pozostał nam przypadek, w którym $T_{\min} > \max_i (a_i + b_i)$. Możemy w nim bez straty ogólności założyć, że $T_{\min} = \sum_i a_i$. W takiej sytuacji przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne. Jeśli są co najwyżej dwa samochody, sprawa jest oczywista. Jeśli są dokładnie trzy, to nie mogą zachodzić jednocześnie nierówności $b_1 > a_2$, $b_2 > a_3$, $b_3 > a_1$, bo mielibyśmy, wbrew założeniom, $b_1 + b_2 + b_3 > a_1 + a_2 + a_3$. Bez straty ogólności założymy, że $b_2 \leq a_3$. Jeśli dodatkowo $b_1 + b_2 \leq a_2 + a_3$, to widzimy, że można ustawić samochody następująco: u pierwszego pracownika a_1, a_2, a_3 , a u drugiego b_3, b_1, b_2 . Jeśli zaś nie, to naturalnie $b_3 \leq a_1$, a stąd $b_2 + b_3 \leq a_3 + a_1$ i sytuacja jest zupełnie analogiczna.

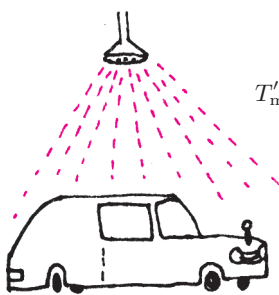
Założymy w takim razie, że umiemy rozplanować czyszczenie dowolnych $n - 1$ samochodów, i zastanówmy się, jak wyczyścić dane n samochodów ($n \geq 4$). Niech dwoma samochodami o najmniejszej sumie $a_i + b_i$ będą te o numerach 1 i 2. Ustalmy, że samochód drugi będzie czyszczony przez każdego z pracowników tuż po pierwszym, oraz założymy dodatkowo, że w czasie, gdy jeden z pracowników czyści którykolwiek z tych samochodów, drugi pracownik nie może czyścić drugiego z tych samochodów. Innymi słowy, zamieniamy te dwa samochody w jeden, o współczynnikach $a = a_1 + a_2$ i $b = b_1 + b_2$. Dla nowego zestawu samochodów mamy:

$$\begin{aligned} T'_{\min} &= \max((a_1 + a_2) + a_3 + \dots + a_n, (b_1 + b_2) + b_3 + \dots + b_n, \max_{i \geq 3} (a_i + b_i), a_1 + a_2 + b_1 + b_2) = \\ &= \max\left(\sum_i a_i, \sum_i b_i, \max_i (a_i + b_i), a_1 + a_2 + b_1 + b_2\right) = \max(T_{\min}, a_1 + a_2 + b_1 + b_2). \end{aligned}$$

Zauważmy, że z wyboru samochodów 1 i 2 wynika, że $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \leq \frac{1}{2} \sum_i (a_i + b_i)$. Stąd $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \leq \sum_i a_i$, czyli ostatecznie $T'_{\min} = T_{\min}$. Z założenia indukcyjnego $n - 1$ otrzymanych po zamianie samochodów można wyczyścić w czasie T_{\min} , a więc tym bardziej wyjściowe n samochodów można wyczyścić w czasie T_{\min} . To pokazuje, że T_{\min} jest szukanym minimalnym czasem czyszczenia samochodów w dowolnym przypadku.

Zauważmy, że nasz dowód jest w pełni konstruktywny: tak długo, jak $n \geq 4$ i $T_{\min} > \max_i (a_i + b_i)$, wybieramy dwa samochody o najmniejszej sumie $a_i + b_i$ i łączymy je w jeden. Przy użyciu odpowiedniej struktury danych (choćby kopca) tę procedurę można zrealizować w czasie $O(n \log n)$. Następnie rozwiązujemy problem dla trzech samochodów lub dla przypadku $T_{\min} = \max_i (a_i + b_i)$, co możemy wykonać w czasie stałym lub, odpowiednio, $O(n)$. Na końcu odzyskujemy rozwiązanie całości poprzez podstawianie, kolejno, par samochodów w miejsce tych sztucznie stworzonych.

Tomasz KULCZYŃSKI



Rozwiązanie zadania F 797.
Sznurek ma minimalną prędkość przejścia wtedy, gdy środek masy części sznurka o długości $2\pi r$ i masie $m = 2\pi M r/l$ zostaje podniesiony na wysokość r :

$$\frac{1}{2} M v_{\min}^2 = mgr.$$

Stąd $v_{\min} = 2r \sqrt{\pi g/l}$.



Wydawnictwo Literackie kontynuuje wydawanie książek popularnonaukowych. Niedawno ukazała się

książka *Johna D. Barrowa*

Jak wygrać na loterii,

czyli z matematyką na co dzień.

Tytuł jest mylący (bo przecież, aby wygrać, wystarczy kupić szczęśliwy los), tym bardziej że autor zatytułował książkę *Sto ważnych spraw, o których nie wiesz, że nie wiesz*. Ten tytuł oddaje zawartość książki: jest to faktycznie 100 króciuteńkich tekstów (średnia długość poniżej trzech stron) opisujących – często anegdotyczną – obecność prawidłowości matematycznych w realnym i w wymyślonym świecie. Lektura jest przyjemna i nieobciążająca intelektualnie. Miłośnicy matematyki większość z opisanych sytuacji znają, bo od lat są one obecne w tzw. folklorze, czyli zostały wielokrotnie opisane w najrozmaitszych publikacjach popularnonaukowych. Tak więc książka jest raczej dla tych „pozostałych”. Chyba że ktoś chce się przekonać, co napisał w nowomodnym facebookowym stylu autor cieszącej się przed laty powodzeniem książki π razy drzwi.

Lato babci

Piszę w trakcie ostatniego kapryśnego lata: burze, ściany wody, mgły i zamglenia, a z rzadka pełne słońce, tzw. lampa. Mój Czytelnik zapomniał już pewno tych wakacji. A czy kiedyś zastanowiliście się nad wakacjami człowieka starego? Czy starzy ludzie potrzebują wakacji?

„Co ty właściwie, babciu, robisz, jak siedzisz na tej wsi?” zapytał mnie mój ośmioletni wnuk (ten na prawo na fotografii). Pielęgnuję swoje róże, powiedziałam, a on się zaśmiał: „ale ja mówię o wakacjach, a nie o pracy”.

To samo słowo, a na naszych dwu biegunach wiekowych znaczy coś zupełnie innego. Człowiek stary, w tym przypadku babcia, ma bardzo wiele do zrobienia w trakcie wakacji. Przygląda się straży pożarnej, która ratuje obsuwający się do rzeki dom. W kółko gotuje i myje naczynia. I robi coś, czego nie widać – myśli.

Babcia mojego wnuka ma specyficzne zainteresowania wynikające z jej byłego życia zawodowego. Tę babcię interesuje człowiek ogólnie i w szczegółach.

Strasznie trudno jest zdefiniować człowieka (wszelakie debaty powinno się zaczynać od definicji). Krzysztof Szymborski w książce „Zwierzę polityczne” (pisałam już o niej miesiąc temu) tak definiuje człowieka: *... do gatunku homo sapiens należy każdy osobnik, który zdolny jest potencjalnie do posiadania płodnego potomstwa z innym osobnikiem tego gatunku o przeciwnej płci...*

Swoje geny ludzie otrzymali w toku rozwoju przyrody od całego świata żywego (także jakiejś pierwotnej komórki LUCA), ale gdy tę myśl uszczegółowić, to od najbliższego przodka nas i szympanów. Im dłużej obserwuje się szympany, tym bardziej widoczne są ich podobieństwa z ludźmi. Szympany prowadzą wojny, intrygi, samce tworzą ścisłe sojusze. Mają wolę i chęć, i imperatyw dominacji. Ich społeczności sterowane są przez koalicje samców. Nawet najwyższej położona w hierarchii grupy szympanów samica jest zawsze „gorsza” od najślabszego samca. Formalnie różni się w 1,5% sekwencji genowych.

Na pewno bliżej nas był jedyny dotychczas genetycznie poznany inny gatunek człowieka, odgałęziony znacznie później niż szympan – Neandertalczyk. W pięciotomowej sadze „Dzieci Ziemi”, napisanej jeszcze w XX wieku, Jean M. Auel życie człowieka z jaskini neandertalskiej opisała szczegółowo i zapewne blisko prawdy. Nam łatwiej – możemy się dziś oprzeć na danych genetycznych: porównaniach DNA współczesnych ludzi, współczesnych zwierząt, a także DNA archaicznego, uzyskanego z kilku pozycji wykopaliskowych szkieletów Neandertalczyków. Genom neandertalski opisali genetycy w 2010 roku. Znalaziono w nim geny związane z umiejętnością mowy, białą skórą i rudymi włosami i wiele innych.

Zadano ważne pytanie: wiemy, że nie jest to nasz przodek, ale skoro oba gatunki spotykały się na Bliskim Wschodzie i w Europie i choć różniły się wyglądem, to zastanawiamy się, czy się krzyżowały, czy przeżyło potomstwo z takich krzyżówek? Analizując sekwencje ludzkiego chromosomu X, genetycy kilka lat temu doszli do wniosku, że niesie on dziwny „archaiczny” fragment. Nie wiadomo było, skąd się tam wziął. A ostatnio porównano dane z 6000 próbek tego fragmentu pobranych od ludzi na całym świecie z odpowiednim fragmentem chromosomu Neandertalczyka. Archaiczny fragment DNA współczesnego człowieka jest bez wątpliwości pochodzenia neandertalskiego. Mają go wszyscy współcześni ludzie, poza mieszkańcami sub-saharyjskiej Afryki, co oznacza, że raz wywedrowawszy z Afryki Neandertalczycy już tam nie wrócili, i że z pewnością łączyły oba gatunki stosunki seksualne, z których rodziło się płodne potomstwo, czyli wg definicji Szymborskiego Neandertalczyka należałoby nazwać homo sapiens!

Dziś babcia sadziła cisy i czytała dalej Szymborskiego. Na kolację były pierogi z wiśniami.

Magdalena FIKUS

Czego nie udało się złamać, a czego nie udało się znaleźć?

Miesiące wakacyjne to dla niektórych okres najbardziej wytężonej pracy. Nie, nie tylko dla rolników, ratowników WOPR, czy instruktorów windsurfingu. Również dla fizyków cząstek. W tym ostatnim przypadku powodem są serie letnich konferencji, na których albo prezentuje się nowe rezultaty... albo się nie istnieje. W przypadku dużych międzynarodowych zespołów wiąże się to dodatkowo z przejściem przez niezwykle wymagający proces wewnętrznego zatwierdzania analiz (późniejsze recenzowanie przed opublikowaniem to już drobnostka). A jeżeli te wyniki miałyby mieć decydujące znaczenie, to sprawa zaczyna być złożona jak kajak składany.

Z początkiem wiosny, po zimowym letargu, wystartował Wielki Zderzacz Hadronów (LHC). Zeszłoroczna rozgrzewka zapowiadała, że tym razem można zacząć na poważnie spodziewać się odkrycia czegoś nowego. Na wynik trzeba jednak poczekać, a w tym samym czasie pojawiła się zaskakująca informacja z innej strony. W pewnym sensie za sprawą głównego konkurenta LHC, czyli działającego pod Chicago Tevatronu. Tamtejszy system akceleratorów zasila wiązką neutrin odległy o 735 kilometrów tzw. daleki detektor eksperymentu MINOS (znajdujący się w kopalni Soudan; po drodze wiązka przechodzi jeszcze przez kontrolny tzw. bliski detektor). Jednym z głównych celów tego przedsięwzięcia jest badanie oscylacji neutrin poprzez obserwację ich zanikania po drodze, które jest interpretowane (a interpretacja ta jest jednocześnie weryfikowana) jako zmiana ich rodzaju (tzw. oscylacja).

Przez cztery lata produkowano wiązkę neutrin mionowych i osiągnięto [1] najdokładniejszy pomiar wartości bezwzględnej różnicy kwadratów masy neutrin drugiego i trzeciego $|\Delta m_{23}^2| = 2,32_{-0,08}^{+0,22} 10^{-3} \text{ eV}^2$ (ponieważ neutrina mieszają się, to stany własne masy są mieszkankami trzech rodzajów neutrin, odpowiadających trzem rodzajom leptonów: elektronowi, mionowi i taonowi). Analiza wskazuje jednocześnie na maksymalny kąt mieszania. W 2009 roku postanowiono jednak przyjrzeć się antyneutrinom. Pierwszą wersję wyniku opublikowano [2] na początku kwietnia: $|\Delta \bar{m}_{23}^2| = 3,36_{-0,40}^{+0,46} 10^{-3} \text{ eV}^2$ z kątem mieszania niekoniecznie maksymalnym (choć zgodnym z maksymalnym w granicy dokładności pomiarowej). Czyli okazało się, że wyniki dla neutrin i antyneutrin zgadzają się zaledwie z dwuprocentowym prawdopodobieństwem. Gdyby coś takiego się potwierdziło (tzn. gdyby potencjalna zgodność stała się, zgodnie z przyjętymi w tej dziedzinie standardami, mniej prawdopodobna niż jedna milionowa), oznaczałoby to, że masy neutrin i antyneutrin nie są jednakowe, czyli że łamana jest kombinowana symetria CPT (jednoczesna zmiana ładunku, parzystości i strzałki czasu), co byłoby równoznaczne z koniecznością przemyślenia na nowo podstaw fizyki!

Wróćmy jednak na letnie konferencje. Najważniejsza: EPS-HEP (*European Physical Society – High Energy Physics*) odbyła się w lipcu w Grenoble z satelitarną

dogrywką *Higgs Hunting 2011* w Orsay pod Paryżem. Jednak niewiele mniej ważna, tradycyjnie nazywana *Lepton-Photon 2011*, odbyła się miesiąc później w Bombaju. Właśnie na te dwie konferencje, dwa najbardziej „myśliwskie” eksperymenty LHC (ATLAS i CMS) przygotowywały wyniki na podstawie, odpowiednio, około 1,2 odwrotnego femtobarna danych zebranych przed EPS-HEP [3] oraz po uzupełnieniu o dodatkowe pół femtobarna danych zebranych w międzyczasie [4]. Używana jednostka jest (dla niespecjalistów) dość enigmatyczna, więc należy się wyjaśnienie. W fizyce mikroświata potencjalne zdarzenia mają określone prawdopodobieństwa. Ich miarą jest przekrój czynny, wyrażany w jednostkach powierzchni (femtobarn to właśnie bardzo, bardzo mała jednostka powierzchni), tak jakby w eksperymentach zderzały się kulki o określonym przekroju. Taki obrazek zupełnie nie odpowiada zderzeniom przy naprawdę wysokich energiach, ale jednostka spełnia precyzyjnie swoją rolę, chociaż nie tyle jest miarą pola przekroju, co prawdopodobieństwa właśnie. Jeżeli liczbę zderzeń wyrazimy w jednostkach odwrotności powierzchni, to wystarczy pomnożyć tę wielkość przez przekrój czynny, żeby otrzymać oczekiwaną liczbę przypadków danego typu, np. jeden femtobarn to około 100 bilionów oddziaływań w LHC, wśród których może ukrywać się kilka-kilkanaście przypadków z produkcją bozonu Higgsa, a następnie jego rozpadem w możliwym do wyselekcjonowania kanale dezintegracji. Ciekawe, że eksperyment MINOS, który zaprezentował już wspomniane wyniki [1, 2] na konferencji EPS-HEP, na konferencji LP2011 również przedstawił aktualizację po zwiększeniu ilości danych o czynnik trochę większy od półtora [4].

Dodanie dodatkowych danych okazało się mieć ten sam efekt. Obiecująca nadwyżeczka w analizach poszukujących bozonu Higgsa w lipcu, została w znacznej części zasypana w sierpniu, a CPT naprężone w lipcu, zrelaksowało się w sierpniu (najbardziej prawdopodobna wartość dla antyneutrin spadła z 3.36 do 2.62).

Jeżeli chodzi o bozon Higgsa, to zgodnie z oczekiwaniami udało się go, z prawdopodobieństwem 95%, wykluczyć w szerokim zakresie jego potencjalnej masy. Pozostało najbardziej oczekiwane okno w okolicach 130 mas protonu (ze względu na olbrzymie tło LHC jeszcze nie uzyskało wrażliwości w tym oknie) oraz obszar dla bardzo dużych mas. Jakichkolwiek przejawów fizyki poza Modelem Standardowym nie znaleziono.

Pytanie, czy największym odkryciem LHC będzie nieodkrycie niczego (rzeczywiście poddające w wątpliwość nasze rozumienie mikroświata), na razie pozostaje otwarte.

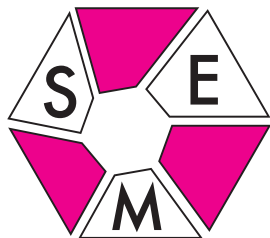
Piotr ZALEWSKI

[1] The MINOS Collaboration, arXiv:1103.0340v1 2/03/2011

[2] The MINOS Collaboration, arXiv:1104.0344v1 3/04/2011

[3] EPS-HEP: <http://eps-hep2011.eu>

[4] LP2011: <http://www.tifr.res.in/~lp11>



Z inicjatywy Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej oraz Instytutu Matematycznego PAN w zeszłym roku szkolnym zostało zorganizowane Olimpijskie Kółko Matematyczne przeznaczone przede wszystkim dla uczniów warszawskich liceów. Miałem olbrzymią przyjemność prowadzić te zajęcia. Odbywały się one raz w tygodniu, we środy o godzinie 16.30 w Instytucie Matematycznym PAN przy ul. Śniadeckich 8. Ich forma wzorowana była na podobnych zajęciach, które od kilku już lat prowadzę w Kielcach. Koło Matematyczne w Kielcach odbywa się również pod auspicjami SEM oraz Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jana Kochanowskiego w piątki o godzinie 16.15. Dane podaję dla wszystkich chętnych, których serdecznie zapraszam do uczestnictwa w bieżącym roku szkolnym.

Nasze kółka są zorganizowane następująco. Ja wyszukuję, wymyślam czy też zdobywam w inny sposób zadania i podaję je uczestnikom. Zadania te są z reguły pracą domową, a ich rozwiązania są prezentowane na kolejnych zajęciach. Zdarzało się jednak, że niektóre zadania zostały rozwiązane już na zajęciach, na których były podane. Zadania na naszych kółkach mają różny stopień trudności, ale zawsze staram się, żeby miały jedną wspólną cechę – były niesztampowe. Wiele z nich to zadania z Olimpiad Matematycznych z całego świata, często sprzed wielu, wielu lat. Staram się, aby ciągle sporo zadań było nierozwiązanych i żeby uczestnicy kółka mieli nad czym myśleć. Gdy jakieś zadanie zostaje rozwiązane, zwykle od razu podaję kolejne (przy czym uczestnik, który rozwiązał, ma prawo wyboru tematyki nowego zadania). Osiągnęliśmy już wymierny sukces – dwóch warszawskich uczestników zostało laureatami Olimpiady Matematycznej, a kółko kieleckie dochowało się nawet zwycięzcy Olimpiady.

Nieodmiennie dużą popularnością na kółkach cieszą się zadania związane z grami. Tytułem zachęty dla przyszłych uczestników przedstawię kilka, a jedno pozwolę sobie omówić dokładniej.

Zadanie 1. *Dwóch graczy na przemian wykonuje ruchy polegające na dodaniu do zastanej liczby naturalnej dowolnego jej dzielnika, mniejszego od niej. Zaczynają od 2. Wygrywa ten, który pierwszy przekroczy 10^{2011} . Który z graczy ma strategię wygrywającą?*

Zadanie 2. *Na stole leżą dwie kupki ze 100 i z 252 zapalkami. Dwoch graczy na przemian zabiera z dowolnej kupki liczbę zapalek będącą dzielnikiem liczby zapalek w pozostałej kupce. Który z graczy ma strategię wygrywającą?*

Zadanie 3. *Kupka to zbiór czterech lub większej liczby zapalek. W każdym ruchu jeden z dwóch grających może rozdzielić dowolną kupkę zapalek, leżącą na stole, na dwie części (niekoniecznie będące kupkami). Przegrywa ten, który nie może wykonać ruchu. Który z graczy ma strategię wygrywającą, w sytuacji, gdy na początku leżała na stole jedna kupka z n zapalkami?*

Zadanie 4. *Plansza do gry jest szachownicą o wymiarach $1 \times n$. Na jej ostatnich trzech polach stoi po jednym pionku. Dwoch graczy wykonuje naprzemiennie ruchy polegające na przestawieniu dowolnego pionka na dowolne wolne pole bliższe początku planszy. Przegrywa ten, który nie może zrobić ruchu. Który z graczy ma strategię wygrywającą?*

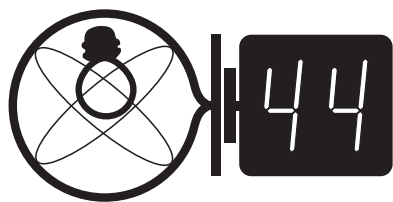
Zadanie to ma ładne rozwiązanie, bardzo ładne uogólnienie i nie jest mi znane jego rozwiązanie w przypadku najbardziej ogólnym. Przystawiając pierwszy lub ostatni pionek na początek planszy, pierwszy gracz może łatwo sprowadzić grę do planszy parzystej długości z dwoma pionkami na końcu z sobą jako drugim graczem. Jeżeli teraz podzieli planszę na „szufladki” po dwa kolejne pola i po każdym ruchu pionkiem swojego przeciwnika będzie przekładał drugi pionek do tej samej szufladki co przeciwnik, to zwycięstwo ma w kieszeni. Stosując tę samą metodę, można rozstrzygnąć losy gry ogólniejszej: gdy k pionków stoi na końcowych polach planszy. Jeżeli zarówno k , jak i n są parzyste, to dzieląc planszę na takie same szufladki i przystawiając po każdym ruchu pierwszego gracza drugi pionek z szufladki, w której stał pionek ruszony przez gracza pierwszego, do tej szufladki,

do której pierwszy gracz wstawił pionek, drugi gracz zapewni sobie zwycięstwo. Jeżeli k jest parzyste, a n nieparzyste – pierwszy gracz, przystawiając ostatni pionek tuż przed pionek pierwszy, sprowadzi grę do przypadku już rozważonego z sobą w roli drugiego, a więc wygra. Jeżeli zaś k jest nieparzyste, to pierwszy gracz, przystawiając, w zależności od parzystości n , pierwszy bądź ostatni z pionków, zawsze może sprowadzić grę do przypadku n i k parzystych – a więc zawsze wygra.

A oto problem, którego rozwiązania nie znam: przypuśćmy, że pionki na planszy stoją w całkiem dowolnej konfiguracji, nie w rzędzie jeden za drugim. Jak rozpoznać, który gracz ma strategię wygrywającą? Na tego, kto pierwszy poda rozwiązanie, czeka ufundowana przez autora nagroda w postaci zgrzewki napoju chłodzącego.

Michał WOJCIECHOWSKI

Klub 44

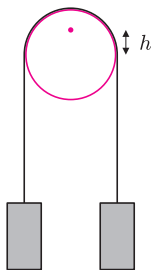


Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2011

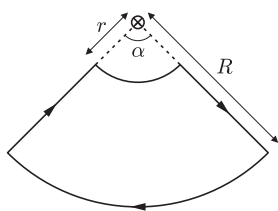
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
516 ($WT = 3,33$) i 517 ($WT = 1,98$)
z numeru 4/2011

Jerzy Witkowski	Radlin	45,25
Andrzej Idzik	Bolesławiec	41,54
Marian Łupieżowicz	Gliwice	37,70
Tomasz Wietecha	Tarnów	37,56
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	33,19
Michał Koźlik	Gliwice	24,36

Wskutek dołączenia p. Witkowskiego
liczba Weteranów zaokrągliła się do
dziesięciu.



Rys. 1



Rys. 2

520. Przechył krążka o kąt ε oznacza podniesienie jego środka o $h(1 - \cos \varepsilon) \approx h\varepsilon^2/2$, a zatem podniesienie środka masy ciężarków o tę samą wielkość. Łączna energia potencjalna ciężarków wzrośnie o

$$\Delta E_p = mgh\varepsilon^2,$$

gdzie m jest masą jednego ciężarka. Prędkość ciężarków v wystarczy wyznaczyć w pierwszym rzędzie względem prędkości kątowej krążka ω , ponieważ do energii kinetycznej wchodzi ona w kwadracie. Ze względu na długość nici ruch ciężarków odbywa się wzdłuż osi pionowej i widzimy, że w tym przybliżeniu

$$v = \omega r, \quad E_k = mv^2 = m\omega^2 r^2.$$

Z warunku $\Delta E_p + E_k = \text{const}$ znajdujemy

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{gh}}.$$

521. Ze względu na uproszczenie rozwiążemy zadanie równoważne: zbadamy oddziaływanie przewodnika

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 524, 525

Redaguje Jerzy B. BROJAN

524. Kula o masie $m_1 = 2$ kg, poruszająca się z prędkością początkową $v_1 = 1$ m/s, zderzyła się centralnie i doskonale sprężysto z kulą o masie m_2 , początkowo spoczywającą. Druga kula zderzyła się w podobny sposób z trzecią kulą o masie m_3 , ta z kolei z czwartą, czwarta z piątą itd. aż do kuli o numerze 2011. Dana jest masa ostatniej kuli $m_{2011} = 1$ kg. Dobrać masy pośrednie tak, aby ostatnia kula uzyskała największą prędkość, przy ustalonych wartościach m_1 , v_1 i m_{2011} . Ile wynosi ta największa prędkość? Pominąć efekty związane z obrotem kul.

525. Do naczynia nalano słonej wody, a na wierzch – wody czystej, tak że wysokość słupa wody wynosi $h = 30$ cm, a gęstość zmienia się liniowo z wysokością od $\rho_0 = 1$ g/cm³ przy powierzchni do $\rho_1 = 1,1$ g/cm³ przy dnie. W połowie głębokości naczynia pływa w stanie równowagi nurek Kartezjusza – niewielka probówka ze szkła o gęstości $\rho_s = 3$ g/cm³, zawierająca pewną ilość powietrza i otwarta od dołu. Czy ten stan równowagi jest trwały ze względu na małe przesunięcia pionowe murka? Ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_a = 10^5$ Pa.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2011

Przypominamy treść zadań:

520. Dwa ciężarki o jednakowych masach są połączone długą nicią przełożoną przez nieważki krążek o promieniu r , który może się swobodnie obracać wokół osi odległej o h od środka krążka (rys. 1). Nie ślizga się po krążku. Obliczyć okres małych drgań układu wokół położenia równowagi.

521. W prostoliniowym przewodniku płynie prąd o natężeniu I_1 , a w ramce leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do tego przewodnika – prąd o natężeniu I_2 . Ramka składa się z dwóch odcinków radialnych o kącie rozwarcia α oraz łuków okręgowych odległych od przewodnika prostoliniowego o r i R (rys. 2). Względna przenikalność magnetyczna ośrodka jest równa 1. Znaleźć siłę i moment siły oddziaływania ramki na przewodnik prostoliniowy.

prostoliniowego na ramkę. Na łuki okręgów nie działa żadna siła (pole przewodnika jest skierowane stycznie), natomiast na odcinek radialny o długości dr działa siła

$$dF = I_2 B(r) dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dr}{r},$$

gdzie

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

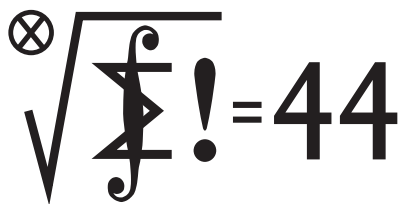
jest indukcją pola przewodnika prostoliniowego. Na analogiczny odcinek drugiego przewodnika radialnego działa siła równa i przeciwnie skierowana, więc całkowita siła oddziaływania wynosi zero. Odległość wzajemna tych dwóch odcinków jest równa $2r \sin(\alpha/2)$, stąd moment pary sił wynosi

$$dM = 2r \sin(\alpha/2) dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \sin(\alpha/2) dr.$$

Całkowity moment siły jest równy

$$M = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \sin(\alpha/2) (R - r).$$

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
615 ($WT = 1,65$) i 616 ($WT = 3,36$)
z numeru 2/2011

Bartłomiej Dydą	Wrocław	42,99
Paweł Najman	Kraków	42,77
Piotr Sobczak	Łódź	38,09
Tomasz Tkocz	Rybnik	37,14
Zbigniew Skalik	Wrocław	35,98
Paweł Kubit	Kraków	34,44

Zadania z matematyki nr 627, 628

Redaguje Marcin E. KUCZMA

627. W okienka tabeli prostokątnej o rozmiarach $n \times 2$ (n wierszy, 2 kolumny, $n > 2$) wpisujemy liczby od 1 do $2n$, losowo, z jednakowym prawdopodobieństwem każdego rozmieszczenia. Które z następujących zdarzeń jest bardziej prawdopodobne?

- (A) W dokładnie jednym wierszu znajdzie się para liczb różniących się o 1.
(B) W żadnym wierszu nie znajdzie się para liczb różniących się o 1.

628. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ściśle rosnącą, odwzorowującą zbiór wszystkich liczb wymiernych \mathbb{Q} na cały zbiór \mathbb{Q} . Czy stąd wynika, że funkcja f jest przedziałami liniowa (tzn. że \mathbb{R} jest sumą skończenie lub nieskończenie wielu przedziałów dodatniej długości, o rozłącznych wnętrzach, i w każdym z tych przedziałów f jest liniowa)?

Zadanie 628 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2011

Przypominamy treść zadań:

623. Czy można umieścić w polach szachownicy $n \times n$ liczby $1, \dots, n^2$ tak, by w każdym wierszu suma liczb była całkowitą potęgą dwójki?

624. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1. Dla jakich dodatnich liczb rzeczywistych b można znaleźć funkcję f , ciągłą na przedziale $\langle 0; b \rangle$, różniczkowalną wewnątrz tego przedziału oraz spełniającą warunki: $f(0) = 1$, $f'(x) \geq f(x)^k$ dla $x \in \langle 0; b \rangle$?

623. Nie można, jeśli $n > 1$. Przypuśćmy, że to się udało i niech 2^m będzie minimalną sumą liczb w wierszu. Jest ona dzielnikiem sumy liczb w każdym wierszu, więc i sumy liczb we wszystkich wierszach, równej $n^2(n^2 + 1)/2$. Jasne, że $m > 0$. Zatem liczba $n^2(n^2 + 1)/2$ musi być parzysta, co oznacza, że n jest liczbą parzystą. Liczba 2^m , względnie pierwsza z czynnikiem $(n^2 + 1)$, musi dzielić $n^2/2$. To już daje sprzeczność, bowiem $2^m \geq 1 + \dots + n = (n^2 + n)/2$.

624. Niech f będzie funkcją, spełniającą podane warunki. Zauważmy, że $f(x) > 0$ w przedziale $\langle 0; b \rangle$ (w przeciwnym razie, oznaczając przez β najmniejsze miejsce zerowe funkcji f , mielibyśmy w przedziale $\langle 0; \beta \rangle$ nierówności $f(x) > 0$, $f'(x) \geq f(x)^k > 0$, skąd $f(\beta) \geq f(0)$, czyli $0 \geq 1$).

Weźmy pod uwagę funkcję $g(x) = -f(x)^{1-k}$ z pochodną

$$g'(x) = (k-1)f(x)^{-k}f'(x) \geq k-1.$$

Dostajemy oszacowanie

$$g(x) \geq g(0) + (k-1)x = -1 + (k-1)x \quad \text{dla } x \in \langle 0; b \rangle.$$

Ale wartości funkcji g w przedziale $\langle 0; b \rangle$ są ujemne. Tak więc $(k-1)x < 1$ dla wszystkich $x \in \langle 0; b \rangle$; to znaczy, że liczba $1/(k-1)$ nie należy do tego przedziału – czyli zachodzi nierówność $b \leq 1/(k-1)$.

Na odwrót, jeżeli $b \leq 1/(k-1)$, to określamy funkcję f wzorem

$$f(x) = ((1-k)x + 1)^{1/(1-k)} \quad \text{dla } x \in \langle 0; b \rangle$$

(suma w nawiasie jest dodatnia w tym przedziale, więc określenie jest poprawne). Ma ona wymagane własności: $f(0) = 1$, $f'(x) = f(x)^k$.

Stąd odpowiedź: liczby b , o które pyta zadanie, są scharakteryzowane nierównością $b \leq 1/(k-1)$.

Siatki, grafy, wielościany – odpowiedzi

a – {4, 7, 8, 11} – {c, d, h, j}; **b** – {1, 3, 10} – {a, b, k}; **c** – {2, 9} – {e, g}; **d** – 5 – i; **e** – 6 – f.

a – II; **b** – X; **c** – I; **d** – V; **e** – VII; **f** – VI; **g** – IX; **h** – III; **i** – VIII; **j** – XI; **k** – IV.

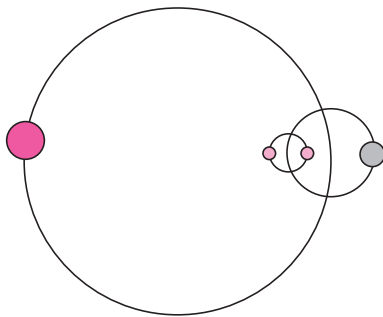
α – {III, X, XI} – {A, E, H}; β – {I, II, IX} – {G, I, K}; γ – {VI, VIII} – {C, F}; δ – IV – J; ε – VII – D; φ – V – B.

A – 4; **B** – 11; **C** – 5; **D** – 9; **E** – 1; **F** – 6; **G** – 2; **H** – 8; **I** – 7; **J** – 10; **K** – 3.

Październik

Jesień rozpoczęła się już na dobre, noce są coraz dłuższe, ale i chłodniejsze, sprzyjają jednak obserwacjom. W pierwszej połowie nocy królować będą planety olbrzymy. Bardzo jasny Jowisz ($-2,9$ mag) wschodzić będzie wcześniej w Baranie nad wschodnim horyzontem. Z kolei niezbyt jasnego Urana ($+5,7$ mag) zobaczymy w Rybach na południowym wschodzie. Neptun pojawiający się na północnym wschodzie w Wodniku będzie poza zasięgiem nieuzbrojonego oka ($+7,8$ mag), ale wystarczy już lornetka czy niewielki teleskop, by go obserwować. Druga połowa nocy należy do boga wojny – Marsa ($+1,3$ mag) – wschodzącego na północnym wschodzie w gwiazdozbiorze Raka. Wenus, Merkurego i Saturna nie zobaczymy w tym miesiącu.

Jesienne niebo jest królestwem gwiazdozbiorów grupy Perseuszowej (Kasjopea, Andromeda, Wieloryb, Pegaz, Woźnica, Cefeusz, Jaszczurka i Trójkąt). Zaczynają też pojawiać się nad wschodnim horyzontem gwiazdozbiory nieba zimowego na czele z Orionem. Z kolei na zachodzie znikają powoli gwiazdozbiory nieba letniego – Herkules, Orzeł, Lutnia i Łabędź. Dysponując lornetką czy niewielkim teleskopem, warto spojrzeć na południową część nieba, gdzie wysoko, niemal w zenicie znajduje się gwiazdozbiór Andromedy. Ciekawą gwiazdą w tej konstelacji jest widoczny gołym okiem ($+2,21$ mag) Almah – $\gamma^{1,2}$ Andromedy. Jednak już przy użyciu lornetki dostrzeżemy, że jest to piękna gwiazda podwójna. Jej składniki obiegają środek masy z okresem 61 lat. Jaśniejszy składnik ($+2,28$ mag) γ^1 Andromedy jest nadolbrzymem typu widmowego K3II, z kolei γ^2 And ma jasność $+4,84$ mag i leży w odległości 9,6 sekund łuku. W październiku 1842 roku Wilhelm Struve odkrył, że γ^2 jest w rzeczywistości układem podwójnym złożonym z dwóch gwiazd odległych od siebie o mniej niż $1''$ i jasnościach $+6,3$ mag (γ And C) oraz $+5,5$ mag (γ And B). Obiegają one środek masy z okresem 64 lat. Pod koniec lat pięćdziesiątych XX wieku, kiedy to zbadano widmo składnika B, okazało się, że to też jest układ podwójny! Składa się z gwiazd ciągu głównego typu B obiegających środek masy z okresem 2,67 dnia. Tak więc Almah jest układem aż czterech gwiazd.



Schemat ułożenia gwiazd układu Almah.

Jednak gwiazdozbiór Andromedy najbardziej znany jest z powodu obecności w nim Wielkiej Mgławicy w Andromedzie (M31, NGC 224). Jest to duża galaktyka spiralna, podobna do naszej, o jasności $+3,44$ mag. W ciemną, bezksiężycową noc M31 powinna być dostrzegalna nawet gołym okiem, choć posłużenie się lornetką lub teleskopem znacznie ułatwi odnalezienie jej na niebie. Galaktyce tej towarzyszą dwie mniejsze – galaktyka eliptyczna M32 o jasności $+8,2$ mag oraz tego samego typu NGC 205 (M110) o jasności $+8,07$ mag. Tę ostatnią wyróżnia barwa. Podczas gdy normalnie galaktyki eliptyczne mają barwę białą z zielonkawym odcieniem, NGC 205 jest wyraźnie niebieska. Niezwykła też jest obecność pyłu i fakt, że niedawno w galaktyce tej powstawały gwiazdy.

Październik nie jest bogaty w obfite roje meteorów. Najobfitszy z nich, Orionidy (20 zjawisk na godzinę), niestety, ma radiant dosyć nisko nad horyzontem. Maksimum tego roju przypada 21 X. Być może w tym roku będziemy mieli szczęście i zmienny rój Drakonidów, którego maksimum przypada 8 X, okaże się obfity. Pozostałe roje są raczej ubogie w zjawiska i trzeba sporej cierpliwości, by zobaczyć należące do tych rojów meteory. W tym miesiącu pełnia Księżyca wypada 12 X, natomiast nów 26 X. A więc czyste nieba!

Agnieszka MAJCZYNA



Rozwiązanie zadania F 798.

Zasada zachowania energii, napisana dla rzutu z zachodu na wschód i ze wschodu na zachód, to, odpowiednio,

$$\frac{m(v_0 + v_\omega)^2}{2} - mgR = \frac{mv^2}{2},$$

$$\frac{m(v_0 - v_\omega)^2}{2} - mgR = 0,$$

gdzie $v_\omega = l/T$. Stąd otrzymujemy:

$$v = 2\sqrt{v_\omega(v_\omega + \sqrt{2gR})} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{l}{T} \left(\frac{l}{T} + \sqrt{2gR} \right)} \approx 4,7 \text{ km/s.}$$

$$P = \frac{1}{2}ah$$

Najpopularniejszy wzór na pole trójkąta to jedna druga podstawa razy wysokość. Proste wnioski z tego wzoru pozwalają rozwiązać niełatwe czasem zadania.

Trójkąty o równych podstawach i wspólnej wysokości mają równe pola

1. Punkt X leży wewnątrz sześciokąta wypukłego $ABCDEF$. Punkty K, L, M, N, P, Q są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DE, EF, FA . Wykaż, że $[QAKX] + [LCMX] + [NEPX]$ nie zależy od wyboru punktu X .

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ o polu 1. Punkt K jest symetryczny do punktu B względem punktu A , punkt L jest symetryczny do punktu C względem punktu B , punkt M jest symetryczny do punktu D względem punktu C , punkt N jest symetryczny do punktu A względem punktu D . Oblicz $[KLMN]$.

3. Udowodnij, że środkowe dzielą trójkąt na sześć trójkątów o równych polach.

4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L należą do boku AB , przy czym $AK = KL = LB$, a punkty M i N należą do boku CD , przy czym $CM = MN = ND$. Wykaż, że $[KLMN] = \frac{1}{3}[ABCD]$.

Trójkąty o wspólnej podstawie i równych polach mają równe wysokości

5. Dany jest taki pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym pola trójkątów ABD, BCE, CDA, DEB i EAC są równe. Udowodnij, że każda przekątna tego pięciokąta jest równoległa do pewnego jego boku.

6. Każda z przekątnych AD, BE, CF sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ dzieli go na dwa czworokąty o równych polach. Wykaż, że trójkąty ACE i BDF są podobne.

Trójkąty o wspólnej podstawie i równych wysokościach mają równe pola

7. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L należą odpowiednio do odcinków AB i AD , przy czym czworokąt $AKCL$ jest równoległobokiem. Odcinki KD i BL przecinają się w punkcie M . Wykaż, że $[AKML] = [BCDM]$.

Trójkąty o wspólnej wysokości mają stosunek pól równy stosunkowi podstaw

8. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E . Wyznacz $[ABE]$, jeśli $[BCE] = 4, [CDE] = 2, [DAE] = 3$.

9. Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E . Dane są $[ABE] = P_1$ i $[CDE] = P_2$. Wyznacz $[ADE], [BCE]$ oraz $[ABCD]$.

Zadania 1 i 5 pochodzą z VI Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, zadanie 2 – z III OMG (www.omg.edu.pl).

Rozwiązania niektórych zadań

R1. Skoro $AK = BK$, to $[AKX] = [BKX]$ (rys. 1). Podobnie $[CLX] = [BLX], [CMX] = [DMX], [ENX] = [DNX], [EPX] = [FPX], [AQX] = [FQX]$. Dodając stronami, uzyskujemy $[QAKX] + [LCMX] + [NEPX] = [KBLX] + [MDNX] + [PFQX]$, czyli $[QAKX] + [LCMX] + [NEPX] = \frac{1}{2}[ABCDEF]$. \square

R2. Zauważmy, że $[LAK] = [LAB]$, bo trójkąty te mają równe podstawy $KA = AB$ i wspólną wysokość z L (rys. 2). Ponadto $[LAB] = [CAB]$ (ponieważ $LB = BC$). Analogicznie $[NCM] = [NCD] = [ACD]$. Stąd $[LBK] + [NDM] = 2[ABCD] = 2$. Podobnie $[MCL] + [KAN] = 2$ i ostatecznie $[KLMN] = 5$. \square

R5. Trójkąty ABD i CDA mają wspólną podstawę AD i równe pola, więc też równe wysokości (rys. 3). Punkty B, C są po tej samej stronie prostej AD , stąd $AD \parallel BC$. Dla pozostałych przekątnych dowód jest analogiczny. \square

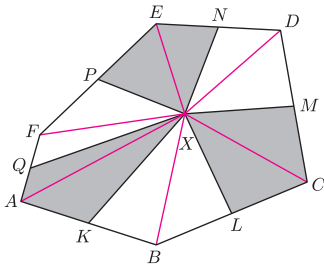
R7. Zachodzą kolejno (rys. 4) równości $[AKML] + [DLM] = [AKD] \stackrel{(*)}{=} [ACD] = [LCD] + [ACL] \stackrel{(**)}{=} [LCD] + [BCL] = [BCDL] = [BCDM] + [DLM]$, przy czym $(*)$ wynika z równoległości $KC \parallel AD$, a $(**)$ z $AB \parallel LC$. \square

R9. Trójkąty ABD i ABC mają wspólną podstawę i równe wysokości, więc też równe pola (rys. 5). Stąd $[ADE] + [ABE] = [BCE] + [ABE]$, czyli $[ADE] = [BCE]$.

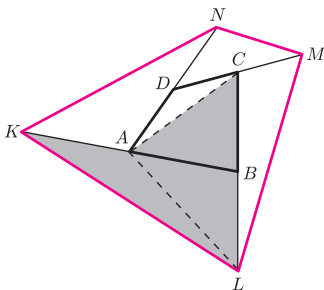
Trójkąty ADE i CDE mają wspólną wysokość z D , więc $[ADE]/[CDE] = AE/CE$. Podobnie $[ABE]/[BCE] = AE/CE$. Stąd $[ADE]/P_2 = P_1/[ADE]$, czyli $[ADE] = [BCE] = \sqrt{P_1 P_2}$. Wobec tego $[ABCD] = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2} = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2$. \square

O podobnych zastosowaniach pojęcia objętości brył można przeczytać w *Delcie 9/2010*.

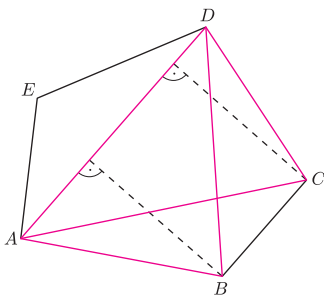
Nawias kwadratowy oznacza pole figury.



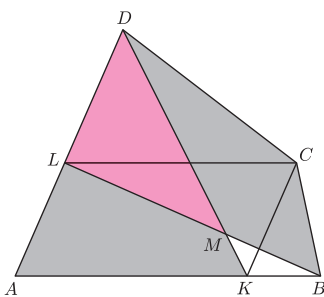
Rys. 1



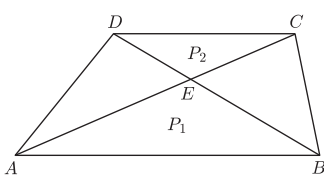
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5