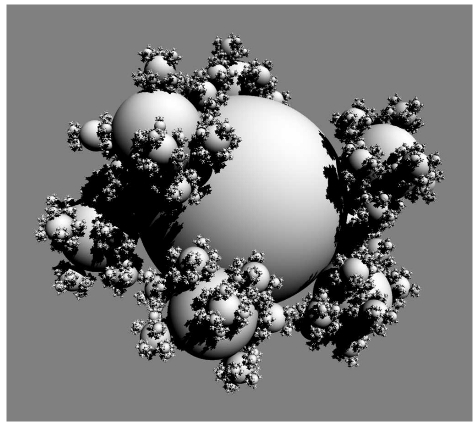
SPIS TREŚCI
NUMERU 8 (447)

Rozwiązania wszystkich problemów są w numerze – trzeba poszukać!

* * *

W następnym numerze objaśniamy,
jak za pomocą karty graficznej pomnożyć dwie macierze.



Autor programu generującego obrazek: Thierry Berger-Perrin.

Dawniej, aby narysować takie cuda jak na obrazku, należało mieć komputer z szybkim procesorem i dużo czasu. Dzisiaj takie obrazy są generowane przez specjalizowane układy scalone, znajdujące się w karcie graficznej komputera. Nie każdy jednak wie, że karty graficznej można także użyć do przyspieszenia obliczeń, które z grafiką mają niewiele wspólnego.

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: `delta@mimuw.edu.pl` tel. 22-55-44-402.

Skład systemem TEX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):
`deltami.edu.pl`

Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

Na dobry początek...

... spróbujmy odpowiedzieć na pytanie: **Co to jest matematyka rekreacyjna?**

Recreational mathematics is an umbrella term, referring to mathematical puzzles and mathematical games. Not all problems in this field require a knowledge of advanced mathematics, and thus, recreational mathematics often attracts the curiosity of non-mathematicians, and inspires their further study of mathematics.

Wikipedia

* * *

Nie można, oczywiście, całej matematyki sprowadzać do zagadek, ale stanowią one bardzo ważną jej część. Wielu ludzi swoją przygodę z matematyką rozpoczęło właśnie od zadań tego typu.

Zdzisław Pogoda, fragment recenzji
książki „Ostatnie rozrywki" Martina Gardnera

* * *

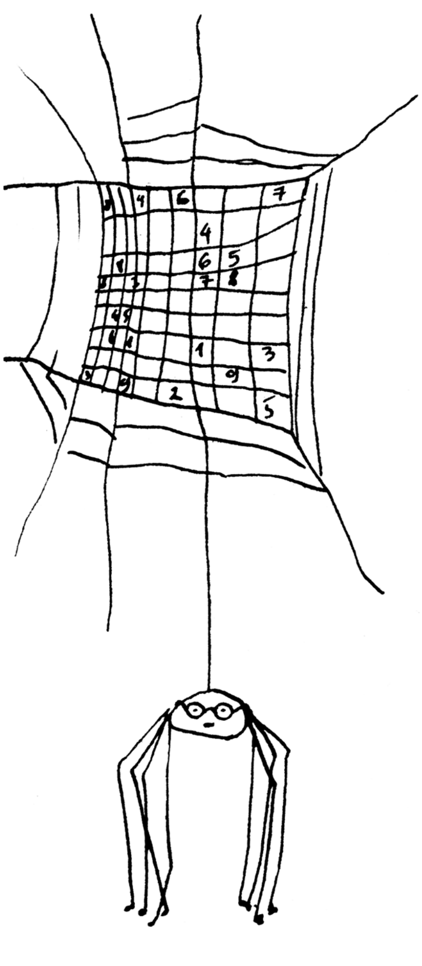
Sudoku, tetris [...] *należą do tak zwanej matematyki rekreacyjnej, dziedziny pozwalającej w dość przyjemny sposób zajmować się nią i bawić, bez przykrego wrażenia, że gdzieś nam umyka jakaś ważna definicja...*

Magdalena Galiczek, fragment recenzji książki Marka Penszko
„Łamigłówki. Podróże w krainę matematyki rekreacyjnej"

* * *

Do wycieczek po [...] *krainie łamigłowek i rekreacji matematycznych nie muszę szczególnie zachęcać. Szlaki są tłumnie uczęszczane od wielu lat z prostego powodu – pokonywanie przeszkód i zdobywanie szczytów może być przyjemne* [...] *także wówczas, gdy osiąga się to napinając, rozciągając i wyginając intelekt. Dodatkowym bodźcem jest świadomość, że takie ćwiczenia są tak samo pożyteczne dla umysłu, jak trening fizyczny dla mięśni.*

Marek Penszko, przedmowa do książki
„Łamigłówki. Podróże w krainę matematyki rekreacyjnej"



Z bogactwa matematyki rekreacyjnej wybrałam zadania szaradziarskie (bo szaradziarstwo to moja druga – po matematyce oczywiście – pasja): między innymi kryptarytmy, alfametyki, działania szkieletowe i krzyżówki liczbowe. Materiał dotyczący kryptarytmów opracował **Andrzej Bartz**, absolwent Sekcji Metod Numerycznych i Maszyn Matematycznych na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego; w latach 1969–87 pracownik Instytutu Matematyki Politechniki Warszawskiej. Od roku 1987 mieszka w Niemczech (do niedawna w słynnym Erlangen), pracuje jako informatyk w Herzogenaurach w siedzibie głównej koncernu Schaeffler Technologies GmbH & Co. KG. Czołowy popularyzator matematyki rozrywkowej, wybitny autor kryptarytmów i alfametyków (w ponad 20 językach). Jako jedyny na świecie tworzy wielojęzyczne układy alfametyków. Ułożył też najdłuższy możliwy alfametyk zapisany cyframi rzymskimi. Opracowanie materiału dotyczącego arytmetyki szkieletowej oraz krzyżówek liczbowych byłoby niemożliwe bez życzliwości i pomocy **Marka Penszko**, dziennikarza, znawcy i popularyzatora gier i rozrywek umysłowych, zwłaszcza matematyki rekreacyjnej, współpracownika wydawnictw szaradziarskich (m.in. *Rozrywki*) oraz działów łamigłówkowych w prasie codziennej, autora stałych rubryk w miesięcznikach popularnonaukowych: *Problemy* („Gry logiczne" – 1974–91), *Wiedza i Życie* („Puzeland" – od 1990), *Świat Nauki* („Umysł giętki" – od 2005), stałego współpracownika *Polityki* („Łamiblog"), któremu bardzo dziękuję za wyrażenie zgody na – jak sam napisał – „korzystanie pełnymi garściami" z jego tekstów i zadań. Dziękuję również **Krzysztofowi Ciesielskiemu** za wyszperanie w swych bogatych zbiorach archiwalnych numerów *Życia Warszawy* z „Rozkoszami Łamania Głowy", m.in. z krzyżówką pentominową, prezentowaną w części dotyczącej krzyżówek liczbowych. Nieoceniona była również pomoc **Arkadiusza Dybały** z redakcji *Rozrywki*, który udostępnił zadania matematyczno-szaradziarskie publikowane na łamach *Rozrywki. Nie Tylko Sudoku*.

Renata JURASIŃSKA

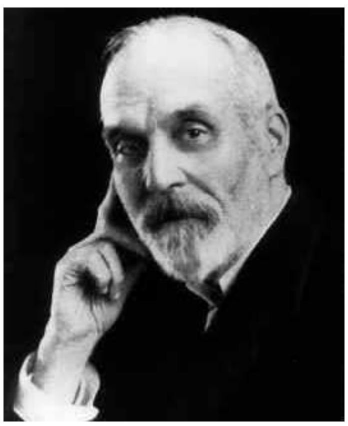
Instytut Matematyki Uniwersytetu Rzeszowskiego, Koszaliński Klub Szaradzistów „Diagram"

Alfametyki, czyli arytmetyka słów

Andrzej BARTZ

Większość materiału zawartego w tym artykule wykorzystałem wcześniej w moim opracowaniu „Alfametyki, czyli kryptarytmy z sensem”, który powstał dzięki inspiracji redaktora naczelnego *Rozrywki*, Romana Nowoszewskiego, i ukazał się w latach 2006/2007 w czasopiśmie *Rozrywka dla każdego* (2006 nr 1 i 2, 2007 nr 6). Artykuł niniejszy jest jego zmienioną i uaktualnioną wersją.

Założycielem miesięcznika beletrystycznego *Strand Magazine*, który ukazywał się w Wielkiej Brytanii w latach od 1890 do 1950, był George Newnes. To właśnie w *Strand Magazine* drukowane były po raz pierwszy liczne powieści i opowiadania wielu znanych autorów, do grona których należeli, między innymi, Arthur Conan Doyle, Agatha Christie, Rudyard Kipling, Georges Simenon, Graham Greene, Lewis Carroll i Edgar Wallace. Najpopularniejszymi postaciami ze stron *Strand Magazine* zostali niewątpliwie detektyw Sherlock Holmes i jego przyjaciel Dr Watson.

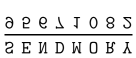


Henry Ernest Dudeney

W znakomitym towarzystwie wielkich pisarzy publikował swoje zadania z zakresu matematyki rekreacyjnej Henry Ernest Dudeney (1857–1930). Jego rubryka w *Strand Magazine* zatytułowana „Perplexities” ukazywała się co miesiąc od maja 1910 do czerwca 1930 i tym bardziej fascynowała czytelników, im większe sukcesy dzięki logicznemu rozumowaniu odnosił Sherlock Holmes.

Do znanych i wznawianych do dziś książek Dudeneya należą *The Canterbury Puzzles* (1907), *Amusements in Mathematics* (1917), *Modern Puzzles* (1926) oraz *Puzzles and Curious Problems* (1932). Kompletną bibliografię twórczości Dudeneya drukowanej w *Strand Magazine* opracował i niegdyś na pewien czas udostępnił w Internecie do celów badawczych Donald Knuth.

W lipcowym numerze *Strand Magazine* z 1924 roku (Vol. 68, 1924, s. 97) Dudeney opublikował Problem 708 (zadania w rubryce „Perplexities” przez cały czas jej istnienia były kolejno numerowane). Problem ten zatytułowany był „Verbal Arithmetic” (arytmetyka werbalna, arytmetyka słów) i zawierał cztery kryptarytmy. Były to kryptarytmy, w których litery, reprezentujące poszczególne cyfry, tworzyły powiązane semantycznie słowa lub sensowne frazy.



Wśród nich znalazł się:

$$\begin{array}{r} \texttt{SEND} \\ +\ \texttt{MORE} \\ \hline \texttt{MONEY} \end{array}$$

najpopularniejszy i najczęściej cytowany kryptarytm na świecie.

Dudeney i jego amerykański kolega po fachu, Sam Loyd, korespondowali przez pewien czas i wymieniali zadania, lecz Dudeney urwał wymianę listów i oskarżył Loyda o drukowanie jego, Dudeneya, zadań pod swoim nazwiskiem. Ciekawe, że tu i ówdzie za oceanem spotkać można twierdzenia, że to Loyd jest autorem jeszcze starszych zadań z dziedziny „arytmetyki werbalnej”. Są to jednak twierdzenia bezpodstawne.

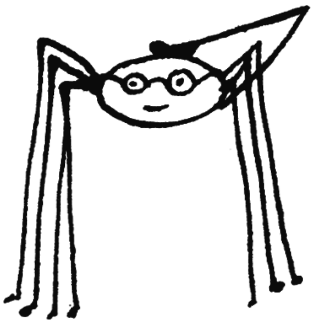
* * *

Wydawany w Belgii w latach od 1931 do 1939 francuskojęzyczny miesięcznik *Sphinx* (podtytuł: „Revue Mensuelle des Questions Récréatives”) poświęcony był całkowicie matematyce rekreacyjnej. Redaktorem naczelnym był wybitny matematyk, profesor brukselskiego uniwersytetu, Maurice Kraitchik.

W numerze tego czasopisma z maja 1931 roku M. Vatriquant, publikujący pod pseudonimem „Minos”, wprowadził po raz pierwszy termin *Cryptarithmie* (stąd terminy kryptarytmetyka i kryptarytm), poprzedzając swoje niepozornie wyglądające zadanie

```
  ABC
× DE
-----
  FEC
 DEC
-----
 HGBC
```

G H D F C B A E
9 4 3 8 5 2 1 7



takim wstępem: *Kryptografowie, szyfrując teksty, zastępują litery cyframi. My postąpiliśmy na odwrót, cyfry w działaniu zastąpiliśmy literami, a zadaniem czytelników jest rozszyfrować działanie, tzn. ustalić, jakie cyfry ukrywają się pod poszczególnymi literami.*

W dziale pod tytułem „Cryptarithmie” *Sphinx* zamieścił w okresie swego istnienia wiele problemów z dziedziny odtwarzania działań arytmetycznych. Autorem bardzo wielu z nich był mistrz tego gatunku i redaktor działu kryptarytmów, M. Pigeolet.

Definicję Vatriquanta prezentuje się zazwyczaj w nieco uściślonej postaci: litery należy zastąpić cyframi tak, aby powstałe w ten sposób liczby tworzyły prawidłowe działanie. Tej samej literze powinna odpowiadać ta sama cyfra, a różnym literom – różne cyfry. Żadna z liczb wielocyfrowych nie może zaczynać się zerem. Zadanie powinno mieć dokładnie jedno rozwiązanie.

Fr i Fi
$(625)^2 = 390625$

Mn
$(2396)^2 = 5740816$

Ge
$(2484)^2 = 6170256$

Op
$(6509)^2 = 42367081$

As
$(2394)^2 = 5731236$

Ga
$(7621)^2 = 58079641$

Po
$(3792)^2 = 14379264$

Rolę liter mogą spełniać inne symbole. *Sphinx* drukował, na przykład, kryptarytmy, w których cyfry reprezentowane były przez figury szachowe. M. Vatriquant został ojcem chrzestnym kryptarytmów, ale ich nie wynalazł. Znane one były ponoć już w starożytnych Chinach jako „arytmetyka liter” lub „arytmetyka słów”.

* * *

Kryptarytm, w którym cyfry zaszyfrowane są literami tworzącymi wyrazy powiązane pewną relacją znaczeniową albo słowa, składające się w sensowne frazy lub zdania, nazywa się alfametykiem (ang. *alphametic*). Termin ten wprowadził w 1955 roku J.A.H. Hunter (*The Globe and Mail*, Toronto, 27.10.1955, s. 27), kontynuując ideę arytmetyki werbalnej. Za najstarszy alfametyk uważany jest SEND + MORE = MONEY, H.E. Dudeneya zaś uważa się za ojca tego gatunku.

Termin ten w USA i Kanadzie konsekwentnie używany jest od swych narodzin przez wybitnych popularyzatorów matematyki rekreacyjnej i obejmuje swym znaczeniem najciekawszy, najbardziej spektakularny i najbardziej interesujący szaradziarsko rodzaj kryptarytmów. W Polsce przyjmuje się dopiero od kilku lat. Wydaje mi się, że należy go stosować zawsze wtedy, gdy określa rodzaj zadania w sposób bardziej precyzyjny niż termin „kryptarytm”.

Alan Wayne opublikował w roku 1947 w *The American Mathematical Monthly* (Vol. 54, s. 38) następujący alfametyk:

```
  FORTY
    TEN
+   TEN
-------
  SIXTY
```

X I S N E Y T R O F
4 1 3 0 5 6 8 7 9 2

Drukując najbardziej eleganckie rozwiązanie tego zadania (Vol. 54, s. 413), redakcja wprowadziła termin: kryptarytm urzekający (*charming*).

#1
SEVNIXTWY
687250134

Na ten przymiotnik zasługują kryptarytmy, które

(1) mają sens zarówno literowo, jak i cyfrowo,
(2) w rozwiązaniu zawierają wszystkie cyfry,
(3) mają dokładnie jedno rozwiązanie,
(4) dają się rozwiązać logicznym rozumowaniem, bez rozpatrywania niezliczonej liczby przypadków.

#2 N ↔ O
SEVNTHRWOL
8254197063

Termin ten jednak szerzej się nie przyjął.

Jeśli wszystkie słowa w alfametyku są liczebnikami lub jego litery w inny sposób przedstawiają liczby (np. w rzymskim zapisie liczb), to określa się go jako podwójnie prawdziwy (*doubly true*).

#3
TWENYFIOGH
3648275901

Jeśli alfametyk jest podwójnie prawdziwy, występują w nim wszystkie cyfry i ma dokładnie jedno rozwiązanie, to nazywa się go idealnym podwójnie prawdziwym (*ideal doubly true*). Oba powyższe określenia używane są w *Journal of Recreational Mathematics* od początku lat siedemdziesiątych XX wieku.

Alan Wayne pierwsze swoje podwójnie prawdziwe alfametyki publikował już od 1945 r. w czasopiśmie *The Cryptogram*, wydawanym przez American Cryptogram Association, dla przykładu:

#1 SEVEN + SEVEN + SIX = TWENTY

#2 SEVEN + THREE + TWO = TWELVE

#3 TWENTY + FIFTY + NINE + ONE = EIGHTY

#4 ma niestety 20 rozwiązań
EIGHTFVOUR
1234865097
1234869057
1237568094
1237569084
1278063549
1278064539
1482075369
1482076359
1523074689
1523078649
1672583094
1672589034
1674385092
1674389052
1690583274
1690587234
1703684295
1703689245
1705486293
1705489263

FORTY + TEN + TEN = SIXTY był jednak pierwszym idealnym alfametykiem podwójnie prawdziwym i mającym naprawdę proste i eleganckie rozwiązanie. Fakt ten oraz duży zasięg *The American Mathematical Monthly* spowodowały znaczny wzrost popularności alfametyków na świecie. Dla mnie pozostanie na zawsze pierwszym alfametykiem, z jakim się w życiu zetknąłem – już jako dorosły matematyk i dydaktyk. Znalazłem go po raz pierwszy w 1971 r. w rosyjskim zbiorze zadań z międzynarodowych olimpiad matematycznych. Moja fascynacja była ogromna, lecz musiało upłynąć jeszcze kilka lat, zanim sam zacząłem układać tego typu zadania. Pozwoliły mi one połączyć trzy z moich pasji: matematykę, informatykę i szaradziarstwo.

Alan Wayne jest chyba słusznie uważany za autora pierwszego alfametyku podwójnie prawdziwego. Jednak kto wpadł na pomysł? Oczywiście Henry Ernest Dudeney! Już w jego werbalnej arytmetyce w 1924 roku znalazły się obok SEND + MORE = MONEY alfametyki:

#4 EIGHT − FIVE = FOUR

#5 TWO × TWO = THREE

#5 ma jedno rozwiązanie:
TWOHRE
138904

#6 SEVEN : TWO = TWO

```
 BOB
 ---
  JOE
  OVV
  ---
  VESN
  VESN
  ----
```

#6 ma trzy rozwiązania
TWOSEVN
1572469
1923684
2375619
przy czym cały schemat dzielenia spełnia
TWOSEVNBJ
237561948

Podwójnie prawdziwe to one jeszcze nie były, bo dwa razy dwa rzadko równa się trzy, ale cel dla autorów został wytyczony…

Pierwszym idealnym podwójnie prawdziwym układem alfametyków był

#7 FOUR + FIVE = NINE   FOUR + SIX = FIVE + FIVE

(A. Bartz, *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 16(2), 1983–84, s. 131)

* * *

#7
FOURIVENSX
1950287364

W latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych XX wieku alfametyki pojawiały się w USA i Kanadzie bardzo często w takich pismach, jak *Mathematics Magazine* czy *Recreational Mathematics Magazine*, a wraz z narodzinami *Journal of Recreational Mathematics* w 1968 r. znalazły stałe miejsce w dziale „Alphametics and Solutions”.

Donald E. Knuth

2621
KNIFEORSPU
8472693150

2651
SEVNTOHRIX
4508397261

2652
INETAUO
6905128

2653
TRIKVAN
5047936

2683
HOTNI
26391

Pierwszym redaktorem tego działu był do 1976 r. J.A.H. Hunter. Po nim przejął tę funkcję i pełni do dziś Steven Kahan, wykładowca matematyki w Queens College of the City University of New York oraz autor trzech książek traktujących o alfametykach.

Od czasu do czasu publikuje w *Journal of Recreational Mathematics* również Donald Knuth, matematyk i informatyk, laureat Nagrody Turinga (1974), czyli informatycznego Nobla, jeden z najwybitniejszych teoretyków i praktyków informatyki, emerytowany profesor Stanford University, twórca systemu formatowania dokumentów TEX i systemu projektowania czcionek METAFONT. Nade wszystko Knuth jest autorem wielotomowego dzieła *The Art of Computer Programming*, które jest monumentalnym kompendium z dziedziny algorytmów i struktur danych. Informatykowi, który nie wie, kim jest Donald Knuth, nietrudno wykazać, że nie jest informatykiem.

Knuth pasjonuje się również matematyką rekreacyjną, bardzo wiele jej problemów i zadań wykorzystując w swej pracy naukowej i dydaktycznej. Każda łamigłówka, gra czy zadanie logiczne jest dla niego wyzwaniem do poszukiwania algorytmów, czyli ogólnych metod postępowania, prowadzących niezawodnie do celu. *Journal of Recreational Mathematics* wydrukował kilka jego alfametyków:

$\mathtt{KNIFE} + \mathtt{FORK} + \mathtt{SPOON} + \mathtt{SOUP} = \mathtt{SUPPER}$ JRM 33(1) Problem 2621,
$\mathtt{SEVEN} + \mathtt{TEN} + \mathtt{ONE} = \mathtt{THREE} + \mathtt{NINE} + \mathtt{SIX}$ JRM 33(3) Problem 2651,
$\mathtt{HOT} \times \mathtt{HOT} = \mathtt{ONION}$ JRM 34(2) Problem 2683.

Problem 2651 ukazał się w sąsiedztwie dwóch alfametyków mojego autorstwa:

2651. *Two Ways To Eighteen* by Donald Knuth, Stanford, California
$\mathtt{SEVEN} + \mathtt{TEN} + \mathtt{ONE} = \mathtt{THREE} + \mathtt{NINE} + \mathtt{SIX}$

2652. *3-4-5 Triangle–Swahili* by Andrzej Bartz, Erlangen, Germany
$(\mathtt{INE})^2 + (\mathtt{TATU})^2 = (\mathtt{TANO})^2$

2653. *3-4-5 Triangle–Esperanto* by Andrzej Bartz, Erlangen, Germany
$(\mathtt{TRI})^2 + (\mathtt{KVAR})^2 = (\mathtt{KVIN})^2$

Czwarty tom *The Art of Computer Programming* zawiera obszerny rozdział poświęcony generowaniu permutacji (D.E. Knuth, *Sztuka programowania*, Tom 4, zeszyt 2, *Generowanie wszystkich krotek i permutacji*, WNT, 2007). Sporo miejsca zajmują w nim (jako przykład zastosowań) alfametyki i interesujące informacje na ich temat, np. szkic algorytmu rozwiązywania alfametyków addytywnych, czyli dających się przedstawić jako relacje liniowych wielomianów słów.

Trójkąt, czyli koło do kwadratu

Alfametycznych kwadratów poszukuję od ponad trzydziestu lat. Tylko dwa z nich dotąd opublikowałem (p. poniżej). Oba przykłady kwadratów słów trzyliterowych są ilustracją tzw. liczb automorficznych.

Liczba automorficzna to taka, której kwadrat kończy się nią samą. Kwadraty słów czteroliterowych są ogromną rzadkością, toteż wszystkie zasługują na uwagę. Nie są mi znane inne polskojęzyczne prócz poniższych sześciu przeze mnie skonstruowanych.

Andrzej BARTZ

Frazeologiczny
$(\mathtt{COŚ})^2 = \mathtt{NIECOŚ}$
Rozrywka, 1984, 19(678)

Filozoficzny
$(\mathtt{BYT})^2 = \mathtt{NIEBYT}$

Mnogościowy
$(\mathtt{DUŻO})^2 = \mathtt{MNÓSTWO}$
Szaradzista, 1984, 23/24(693/694)

Geometryczny
$(\mathtt{KOŁO})^2 = \mathtt{TRÓJKĄT}$

Optyczny
$(\mathtt{MROK})^2 = \mathtt{CIEMNOŚĆ}$

Astronomiczny
$(\mathtt{URAN})^2 = \mathtt{MERKURY}$

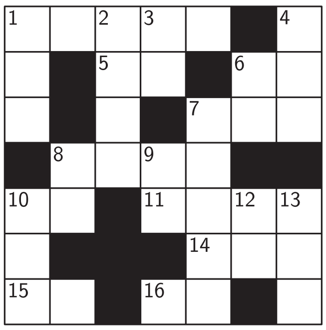
Gastronomiczny
$(\mathtt{STEK})^2 = \mathtt{RUMSZTYK}$

Podwórzowy
$(\mathtt{DWÓR})^2 = \mathtt{PODWÓRKO}$

Krzyżówki liczbowe

Renata JURASIŃSKA

Pierwsza tradycyjna (czyli „słowna”) krzyżówka (*crossword*, *mots croisés*, *Kreuzworträtsel*) ukazała się 21 grudnia 1913 roku w czasopiśmie *The New York World*, lecz dopiero w roku 1924 (po opublikowaniu przez Simona i Schustera książki z 50 łamigłówkami tego typu) wybuchła prawdziwa „krzyżówkomania”.



Niebawem nadszedł czas na krzyżówki liczbowe (*crossnumber*, *nombres croisés*, *Kreuzzahlrätsel*). Od krzyżówek tradycyjnych różniły się przede wszystkim tym, że do diagramu należało wpisywać nie wyrazy, lecz liczby, odgadnięte na podstawie różnego rodzaju objaśnień. Mogły to np. być własności poszczególnych liczb, ich wzajemne powiązania lub też historyjki z „wplecionymi” w nie liczbami. Z książki *The Strand Problems Book* (wydanej w roku 1935) autorstwa W.T. Williamsa i G.H. Savage’a pochodzi krzyżówka **Ferma Mała Łąka**.

Uwaga! Jedna z liczb pionowych jest taka sama, jak jedna z poziomych. Jest tylko jeden przypadek identyczności, choć zdarzyło się, że jedna z liczb w tej łamigłówce (związana z czymś nieco innym) jest powierzchnią prostokątnego pola znanego jako Psia Łączka w jednostkach *rood*.

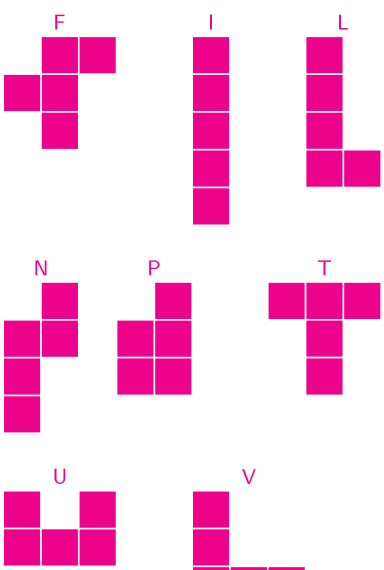
Wyposażeni w tę informację i proste wskazówki z objaśnień, jesteśmy zaproszeni do odkrycia zazdrośnie strzeżonego sekretu: **wieku pani Grooby, teściowej farmera Dunka** (1 mila to 1760 jardów, 1 akr to 4840 jardów kwadratowych, 1 rood to 1/4 akra, a 1 funt szterling to 20 szylingów).

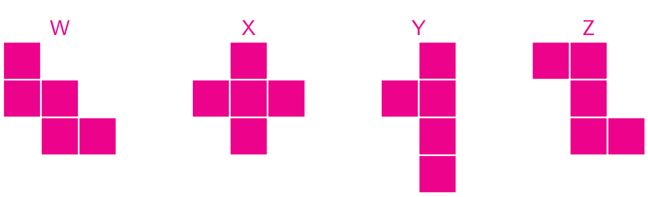
Poziomo: 1) Powierzchnia Małej Łąki w jardach kwadratowych; 5) Wiek Marty, córki farmera Dunka; 6) Różnica w jardach między długością a szerokością Psiej Łączki; 7) Powierzchnia Psiej Łączki w roodach $\times$ 9 pionowo; 8) Data (rok) przejęcia Małej Łąki przez rodzinę Dunków; 10) Wiek farmera Dunka; 11) Rok urodzenia Mary; 14) Obwód Psiej Łączki w jardach; 15) Prędkość spacerującego farmera Dunka w milach na godzinę podniesiona do sześcianu; 16) 15 poziomo minus 9 pionowo.

Pionowo: 1) Wartość Psiej Łączki w szylingach za akr; 2) Wiek pani Grooby do kwadratu; 3) Wiek Mary, najmłodszej córki farmera Dunka; 4) Wartość Psiej Łączki w funtach szterlingach; 6) Wiek Teda, pierworodnego syna farmera Dunka, który będzie w przyszłym roku dwa razy starszy od Mary; 7) Szerokość Psiej Łączki w jardach podniesiona do kwadratu; 8) Liczba minut potrzebnych farmerowi Dunkowi do obejścia Psiej Łączki 4/3 raza; 9) Patrz 10 pionowo; 10) 10 poziomo $\times$ 9 pionowo; 12) O jeden więcej niż suma cyfr drugiej w kolumnie; 13) Okres przejęcia na własność (w latach) Małej Łąki przez Dunków.

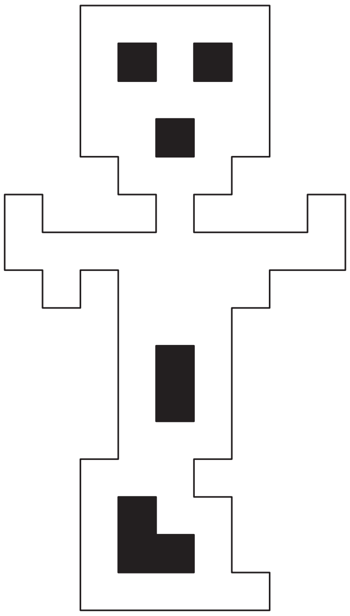
* * *

W polskiej prasie krzyżówki liczbowe pojawiały się w rubryce „Rozkosze Łamania Głowy”, redagowanej od 13 stycznia 1972 roku przez Lecha Pijanowskiego w *Życiu Warszawy*, początkowo w czwartkowym dodatku *Życie i Nowoczesność*, zaś po jego likwidacji – w numerach sobotnio-niedzielnych. Po śmierci twórcy RŁG Lecha (5 stycznia 1974 r.) rubryką zajmowali się (do 24 października 1998 roku) Wojciech Pijanowski, Józef Bester, Józef Archacki, Andrzej Paszewin i Lech Bogusz. Z RŁG z roku 1973 pochodzi bardzo ciekawa (i niełatwa!) **Krzyżówka pentominowa** (przedstawiamy ją z drobnymi zmianami ujednoznaczniającymi rozwiązanie, zaproponowanymi przez Tomasza Idziaszka).





Pentomino (gr. $\pi\acute{\varepsilon}\nu\tau\varepsilon$/*pente* – pięć + domino) – układanka logiczna, szczególny przypadek polinomina, składająca się z klocków (kamieni) zbudowanych z pięciu przylegających do siebie bokami kwadratów. Z pięciu kwadratów można ułożyć 12 różnych klocków. Są one oznaczane łacińskimi literami, do których są najbardziej podobne. Klocki można obracać i przekładać na drugą stronę.



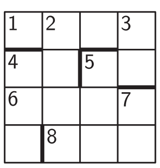
Do konstrukcji diagramu krzyżówki, którego kontur widać obok, użyto wszystkich dwunastu kamieni pentomina. Brzegi kamieni wyznaczają granice haseł krzyżówki. Należy odtworzyć diagram krzyżówki i rozwiązać ją.

Poziomo: A) kwadrat najmniejszy z większych od U pionowo; B) liczba mniejsza od E pionowo; E) liczba mniejsza od L pionowo; F) liczba najmniejsza z możliwych większa od E pionowo; G) liczba pierwsza; H) liczba mniejsza od J pionowo; I) liczba pierwsza, równa trzeciej części K pionowo; Ł) różnocyfrowa liczba zapisana innymi cyframi niż O poziomo; N) różnocyfrowa liczba zapisana innymi cyframi niż Ł poziomo, równa trzeciej części sumy O poziomo i Ł poziomo; O) różnocyfrowa liczba zapisana innymi cyframi niż N poziomo; S) liczba mniejsza od T pionowo; T) zobacz U pionowo; X) zobacz T pionowo; Z) liczba mniejsza od M pionowo; Ż) jedyna liczba pierwsza większa od U pionowo i mniejsza od A poziomo.

Pionowo: A) liczba podzielna przez najmniejszą liczbę pierwszą, której suma cyfr nie jest liczbą pierwszą; C) kwadrat; D) cyfra dziesiątek tej liczby jest identyczna z cyfrą jedności O pionowo; E) liczba mniejsza od F poziomo; H) liczba nie mniejsza od E pionowo; J) liczba mniejsza od S poziomo; K) liczba zapisana trzema kolejnymi cyframi; L) liczba mniejsza od Z poziomo; M) liczba mniejsza od H poziomo; O) cyfra jedności tej liczby jest taka sama, jak cyfra jedności N poziomo; P) wielokrotność G poziomo i L pionowo mniejsza niż podwojone W pionowo; R) sześcian E pionowo, największy z możliwych; T) liczba mniejsza od B poziomo; U) sześcian, największy z mniejszych od A poziomo; W) tę liczbę dzieli zarówno H pionowo, jak i T pionowo; Y) wielokrotność liczby zapisanej tymi samymi cyframi, co T pionowo, lecz w innym porządku; liczba mniejsza od A pionowo.

* * *

Krzyżówki liczbowe możemy dziś znaleźć, między innymi, w miesięczniku *Rozrywka. Nie tylko Sudoku*, wydawanym przez Spółkę Rozrywka (dawniej Spółdzielnię „Rozrywka”), najstarszego i największego wydawcę czasopism z krzyżówkami na polskim rynku.

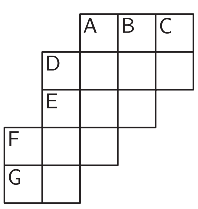


185

Obok diagram krzyżówki 185 z numeru 1/2009 (autor: Zbigniew Zarzycki).

Poziomo: 1) liczba składająca się z czterech kolejnych cyfr w porządku malejącym; 4) kwadrat kwadratu liczby; 5) kwadrat liczby; 6) liczba składająca się z czterech kolejnych cyfr w porządku rosnącym; 8) iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych.

Pionowo: 2) iloczyn sześcianu liczby i liczby pierwszej; 3) liczba pierwsza; 4) sześcian liczby; 5) kwadrat liczby pierwszej; 7) suma pięciu kolejnych liczb naturalnych.



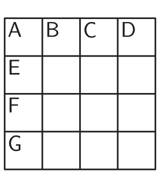
***Łamiblog*, czerwiec 2009**

Krzyżówki liczbowe pojawiają się też w *Łamiblogu* – blogu Marka Penszko (`http://penszko.blog.polityka.pl`), który gorąco polecam wszystkim zainteresowanym matematyką rekreacyjną! Prezentowana krzyżówka pochodzi z V Łamigłówkowych Mistrzostw Świata w Utrechcie z roku 1996 (*Łamiblog*, czerwiec 2009).

Poziomo: A) $3 \times$ F pionowo; D) G^2; E) $7 \times C - 1$; F) A poziomo $+$ E; G) C.

Pionowo: B) $6 \times G$; C) F pionowo $+ 6$; D) D poziomo $- 210$; F) $(B + 9) : 7$.

Również z *Łamibloga* (wrzesień 2010) pochodzi krzyżówka liczbowa biarytmetyczna (w rozwiązaniu używamy zapisu binarnego).



***Łamiblog*, wrzesień 2010**

Poziomo: A) 2B; E) liczba trójkątna; F) $(D - 2)^3$; G) C + F.

Pionowo: A) negatyw E; B) negatyw A poziomo; C) 2E; D) G − A poziomo.

W negatywie zera zmieniają się w jedynki, a jedynki w zera. Liczby krótsze niż czterocyfrowe dopełniane są zerami – np. zamiast 1 w diagramie pojawi się (jeżeli się pojawi) 0001.

Ekstremalne polskojęzyczne alfametyki podwójnie prawdziwe

Język polski nie jest zbyt przyjazny autorom alfametyków podwójnie prawdziwych. Mimo to w dziedzinie liczebników złożonych udało mi się skonstruować trochę spektakularnych zadań tej klasy. W języku polskim (podobnie jak w angielskim, a w przeciwieństwie do np. niemieckiego) liczebniki złożone pisze się oddzielnie. Ortograficznych purystów pragnę z góry uspokoić: jeśli ktoś chce w zgodzie z ortografią pisać te liczebniki oddzielnie – żaden problem, w matematyce odstępy w zapisie liczby nie mają znaczenia dla jej interpretacji!

Bywają alfametyki tak łatwe, że można je rozwiązać szybko nawet w pamięci, przez co są atrakcyjne dla przeciętnego śmiertelnika, rozwiązującego bez pomocy środków technicznych. Alfametyki podwójnie prawdziwe z rekordowo długimi słowami (powyżej 10 liter) są praktycznie nie do rozwiązania bez odpowiedniego programu komputerowego. Jest to „alfametyka wyczynowa”, fascynująca ustanawianiem coraz to nowych rekordów i penetrowaniem możliwości różnych języków.

Języki przyjazne autorom alfametyków to np. angielski, włoski i swahili, niezbyt zaś przyjazne – polski i niemiecki.

Wszystkie poniżej przedstawione alfametyki publikowałem już w piśmie *Rozrywka dla każdego*. Ostatni ukazał się w numerze 2007(6), pozostałe zaś wcześniej, w numerze 2006(2).

Andrzej BARTZ

P1 $10 \times \mathtt{OSIEMSETSIEDEM} + 7901 \times \mathtt{STO} + 227 \times \mathtt{OSIEM} + 2 \times \mathtt{SIEDEM} = \mathtt{OSIEMSETTYSIĘCY}$

P2 $100 \times \mathtt{SIEDEMSETOSIEM} + 6292 \times \mathtt{STO} = \mathtt{SIEDEMSETTYSIĘCY}$

P3 $\mathtt{SIEDEMDZIESIĄT} + 11 \times \mathtt{SIEDEM} + 554 \times \mathtt{JEDEN} = \mathtt{SIEDEMSETJEDEN}$

P4 $20 \times \mathtt{CZTERYTYSIĄCE} + \mathtt{TYSIĄCCZTERY} + \mathtt{TYSIĄCSTO} + 9 \times \mathtt{TYSIĄC} + 3 \times \mathtt{STOCZTERY} + 20 \times \mathtt{STOTRZY} + 27 \times \mathtt{STO} + 26 \times \mathtt{CZTERY} + 2240 \times \mathtt{TRZY} = \mathtt{STOTRZYTYSIĄCE}$

P5 $\mathtt{OSIEMTYSIĘCYSIEDEM} + \mathtt{STOTYSIĘCYSTO} + 6 \times \mathtt{STOTYSIĘCY} + 4 \times \mathtt{OSIEMSET} + 2 \times \mathtt{STOOSIEM} + 20 \times \mathtt{STOSIEDEM} + 851 \times \mathtt{STO} + 28 \times \mathtt{OSIEM} + 159 \times \mathtt{SIEDEM} = \mathtt{OSIEMSETTYSIĘCYSTO}$

P6 $2 \times \mathtt{OSIEMSETJEDEN} + 3 \times \mathtt{OSIEMSET} + 10 \times \mathtt{SIEDEMSET} + 20 \times \mathtt{STOOSIEM} + 80 \times \mathtt{STOSIEDEM} + 9786 \times \mathtt{STO} + 32 \times \mathtt{OSIEM} + 21 \times \mathtt{SIEDEM} + 75 \times \mathtt{JEDEN} = \mathtt{MILIONOSIEMSET}$

P7 $\mathtt{SIEDEMSETSIEDEMTYSIĘCYSTOOSIEM} + 3 \times \mathtt{STOOSIEM} + 32 \times \mathtt{OSIEM} + 16 \times \mathtt{SIEDEM} = \mathtt{SIEDEMSETSIEDEMTYSIĘCYOSIEMSET}$

P8 $\mathtt{OSIEMSETOSIEM} + 7 \times \mathtt{MILION} + \mathtt{OSIEMSET} + 2 \times \mathtt{STOOSIEM} + 9952 \times \mathtt{STO} + 372 \times \mathtt{OSIEM} = \mathtt{OSIEMMILIONÓW}$

Polski rekord długości słów w alfametyku osiągamy przez rozszerzenie ostatniego alfametyku do zakresu astronomicznego – nonilion to jedynka i 54 zera:

P9 $\mathtt{OSIEMSETOSIEMNONILIONÓWOSIEMSETOSIEM} + 7 \times \mathtt{MILION} + \mathtt{OSIEMSET} + 2 \times \mathtt{STOOSIEM} + 9952 \times \mathtt{STO} + 372 \times \mathtt{OSIEM} = \mathtt{OSIEMSETOSIEMNONILIONÓWOSIEMMILIONÓW}$

P1	O S I E M T D Y Ę C	2 1 0 5 8 7 9 4 6 3
P2	S I E D M T O Y Ę C	1 0 3 4 5 7 6 2 8 9
P3	S I E D M Z Ą T J N	7 2 4 3 5 1 0 8 6 9
P4	I Ą Y E R S T C Z O	3 4 9 8 1 5 6 2 7 0
P5	O S I E M T Y Ę C D	2 4 7 9 3 0 8 5 6 1
P6	O S I E M T J D N L	8 4 6 3 1 5 2 0 7 9
P7	T Y S I Ę C O E M D	6 2 1 0 4 8 7 5 3 9
P8	O S I E M T L N Ó W	2 1 0 6 9 8 3 4 7 5
P9	O S I E M T L N Ó W	2 1 0 6 9 8 3 4 7 5

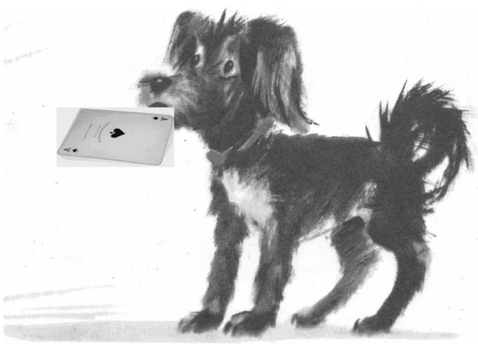
przy czym Y, Ę, C dowolnie zamienialne (P7)

Alfametyki w pozycyjnych systemach liczbowych o różnych podstawach

Zadanie z pieskiem, które zapowiadało w lipcu ten numer *Delty*, w nieco prostszej wersji (podstawa 10) opublikowałem w *Rewii Rozrywki*, nr 247 (10/2007). Pozostałe trzy, podane niżej, nie mają rozwiązania w systemie dziesiętnym i dotąd ich nie publikowałem.

Alfametyk z elementarza

Odgadnąć znaczenie rysunku i wpisać je do diagramu. Otrzymany alfametyk rozwiązać w systemie o dowolnej podstawie x, nie mniejszej niż 3.



```
   □□
+  □□
  ———
  □□□
```

Rozwiązanie: AS + MA = ASA A = 1 S = 0 M = $x-1$

60 minut na godzinę w systemie czternastkowym

```
  MINUTA ⎫
  MINUTA ⎪
  MINUTA ⎬ 60 razy
  ......  ⎪
+ MINUTA ⎭
————————
 GODZINA
```

G	O	D	Z	I	N	A	M	U	T
5	4	a	8	3	6	0	1	2	c

Ostatni zajazd na Litwie w systemie dwunastkowym

```
        PAN
    ———————
    TADEUSZ : EPOS
    TPYAS
    —————
     PDXNS
     PTPTS
     —————
      PSAZZ
      PSAZZ
      —————
          =
```

T	A	D	E	U	S	Z	P	N	O	X	Y
1	7	4	5	2	6	0	3	8	a	9	b

Podwójnie prawdziwy w systemie jedenastkowym

```
  CZTERY
+   TRZY
————————
  SIEDEM
```

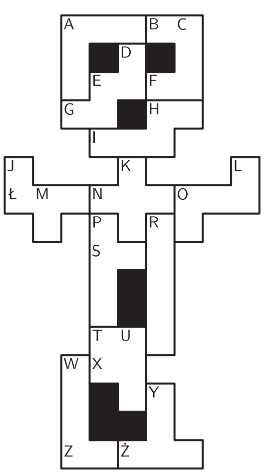
W systemie o podstawie 11 znaleźć rozwiązanie, w którym w liczbie odpowiadającej słowu CZTERY pojawiają się 3, 4 i 7.

W systemie o podstawie x mamy: C + 1 = S, Z = $x-1$, I = 0,
$2 \times$ Y = M, R + Z = E + x $\rightarrow$ R = E + 1
E + R + 1 = D (+x), $2 \times$ T (+1) = E + x.
Prowadzi to dla $x = 11$ do znalezienia dwóch rozwiązań bez warunku dodatkowego:

```
  4a8671            5a7341
+   87a1    oraz  +   74a1
————————          ————————
  506362            603832
```

Warunek dodatkowy spełnia drugie z nich.

Andrzej BARTZ



Krzyżówka pentominowa – układ kamieni pentomina w diagramie

Rozwiązania krzyżówek liczbowych

Ferma Mała Łąka
Poziomo: 1) 38720; 5) 32; 6) 44; 7) 352; 8) 1610; 10) 72; 11) 1913; 14) 792; 15) 27; 16) 16.
Pionowo: 1) 355; 2) 7396; 3) 22; 4) 142; 6) 45; 7) 30976; 8) 12; 9) 11; 10) 792; 12) 19; 13) 325.
Pani Grooby ma 86 lat.

Krzyżówka z *Rozrywki. Nie Tylko Sudoku*
Poziomo: 1) 6543; 4) 16; 5) 81; 6) 2345; 8) 210.
Pionowo: 2) 5632; 3) 31; 4) 125; 5) 841; 7) 50.

Krzyżówka z V Łamigłówkowych Mistrzostw Świata
Poziomo: A) 135; D) 2601; E) 356; F) 491; G) 51.
Pionowo: A) 1651; B) 306; C) 51; D) 2391; F) 45.

Krzyżówka biarytmetyczna
A (poziomo) = 1010; A (pionowo) = 1001; B = 0101; C = 1100; D = 0011; E = 0110; F = 0001; G = 1101.

Krzyżówka pentominowa
Poziomo: A) 225; B) 38; E) 30; F) 41; G) 19; H) 34; I) 229; Ł) 537; N) 486; O) 921; S) 36; T) 32; X) 71; Z) 32; Ż) 223.
Pionowo: A) 299; C) 841; D) 60; E) 39; H) 39; J) 35; K) 687; L) 31; M) 33; O) 96; P) 2356; R) 59319; T) 37; U) 216; W) 1443; Y) 292.

Arytmetyka szkieletowa

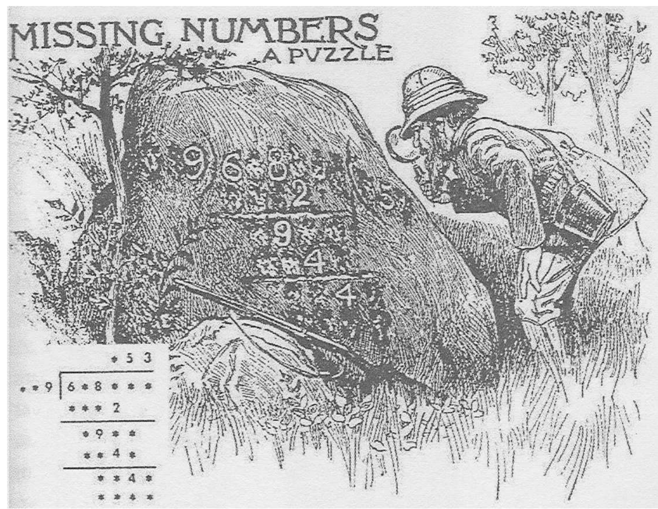
Renata JURASIŃSKA

Arytmetyka szkieletowa (ang. *skeleton arithmetic*, *skeletons*, *arithmetical restorations*) to dział matematyki rekreacyjnej, obejmujący zadania, które polegają na odtwarzaniu pełnego zapisu działania arytmetycznego na podstawie jego „szczątków”. Nazwa kojarzy się ze stosowaną m.in. w archeologii i kryminalistyce rekonstrukcją antropologiczną wyglądu twarzy na podstawie zachowanej czaszki. Na łamach czasopism szaradziarskich zadania takie nazywane są też „zamazanymi” lub „zaplamionymi” działaniami. Pod nazwą „molowe rachunki” (mole powygryzały papier, na którym zapisano działanie) znane są w Chinach i Japonii, gdzie były popularne już w XVIII wieku.

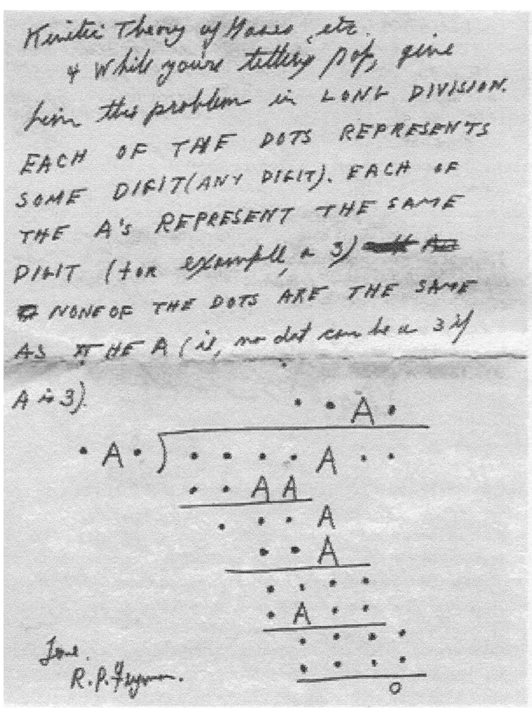
Do rozrywkowej rekonstrukcji najlepiej nadają się dwa rodzaje działań – **dzielenie** i **mnożenie**, głównie ze względu na iloczyny cząstkowe. Zapis można wówczas odtwarzać cyfra po cyfrze, często na różne sposoby, z wykorzystaniem przede wszystkim tabliczki mnożenia!

Z książki *Mathematical Puzzles of Sam Loyd* pod redakcją Martina Gardnera (Dover Publications 1959) pochodzi zadanie **Missing numbers**.

Archeolog bada kompletny słupek dzielenia wyryty w głazie z piaskowca – jak to widać na obrazku obok. Większość znaków nie jest widoczna z powodu wietrzenia skały. Na szczęście dziewięć czytelnych znaków dostarcza wystarczającą ilość informacji, aby umożliwić ci uzupełnienie brakujących cyfr. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że poprawnych odpowiedzi powinno być całe mnóstwo, lecz z tego, co wiem, jest tylko jedna możliwość właściwego uzupełnienia pustych miejsc.



* * *



Kinetic Theory of Gases, etc.
& while you're telling pop, give
him this problem in LONG DIVISION.
EACH OF THE DOTS REPRESENTS
SOME DIGIT (ANY DIGIT). EACH OF
THE A's REPRESENT THE SAME
DIGIT (for example, a 3)
NONE OF THE DOTS ARE THE SAME
AS THE A (i.e., no dot can be a 3 if
A = 3).

```
          • • A •
• A • ) • • • • A • •
        • • A A
          • • • A
            • • A
            • • • •
            • A • •
              • • • •
              • • • •
                    0
```

Love.
R. P. Feynman.

Fotokopia listu Feynmana

* * *

Znanym zadaniem „szkieletowym” jest też tzw. **kryptarytm Feynmana** (nazwy „kryptarytm” dla zadań szkieletowych używał w swoich książkach i artykułach, między innymi, Martin Gardner, zmarły 22 maja 2010 roku amerykański dziennikarz i popularyzator nauki, specjalizujący się w matematyce rekreacyjnej), łamigłówka opublikowana w 1936 roku na łamach *American Mathematical Monthly*.

Richard Phillips Feynman, wybitny fizyk, noblista, jak większość umysłów ścisłych miał smykałkę do łamigłówek. W jednym z listów z czasów studenckich (z listopada 1939 roku) adresowanym do matki, syn zamieścił łamigłówkę przeznaczoną dla ojca (i choć nie był jej autorem, a jedynie ją spopularyzował, „przybrała” jego nazwisko). Oto jej bardziej czytelna postać.

```
      □□A□
□□□□A□□ : □A□
□□AA
 □□□A
  □□A
  □□□□
  □A□□
   □□□□
   □□□□
      0
```

Dwa zadania (z dzieleniem), należące do arytmetyki szkieletowej, uchodzą za klasyczne i wzorcowe (głównie ze względu na minimalną liczbę ujawnionych cyfr oraz jedno rozwiązanie).

Pierwsze to **samotna siódemka** (autorstwa H.E. Dudeneya) opublikowana w roku 1922 na łamach *Strand Magazine*, a drugie – **samotna ósemka** (autorstwa W.B. Carvera) z *American Mathematical Monthly* z roku 1954.

```
     □7□□□
□□□□□□□□ : □□□
□□□□
  □□□
  □□□
  □□□□
   □□□
    □□□□
    □□□□
    ====
```

```
     □□8□□
□□□□□□□□ : □□□
 □□□
  □□□□
   □□□
    □□□□
    □□□□
    ====
```

Jeszcze ciekawsze (ale i znacznie trudniejsze w rozwiązywaniu) są działania „szkieletowe” bez ujawnionych cyfr, jak, na przykład, poniższe dzielenie (bez żadnych „podpowiedzi”), czy też mnożenie z dodatkową informacją, że w zapisie działania występują wszystkie cyfry – każda dwukrotnie (autorem tego zadania jest holenderski matematyk Frederik Schuh, autor książki *The Master Book of Mathematical Recreations*).

```
□□□,□□□
□□□ : □
□
□□
□□
  □
  □
  □□
   □
   □□
   □□
    □□
    □□
    ==
```

```
   □□□
 × □□□
   □□□
  □□□
 □□□
 □□□□□
```

* * *

W polskiej prasie szaradziarskiej również pojawiają się działania „szkieletowe”.

RÓWNOŚĆ

$$\frac{\square\square}{7}+\frac{\square\square\square}{\square 8}=\square-\square$$

W kratki należy wpisać cyfry od 0 do 9 (ujawniono 7 i 8) tak, by otrzymane liczby utworzyły poprawną równość.

Rozrywka. Nie Tylko Sudoku 1/2009
Autor: Sławomir Koszelew

PODZIEL i DODAJ

```
  □□□
:   5
   □□
+  □□
   □□
```

W kratki należy wpisać brakujące cyfry od 0 do 9 tak, by otrzymane liczby utworzyły poprawne działania.

Rozrywka. Nie Tylko Sudoku 4/2009
Autor: Sławomir Koszelew

SIEDEM SIÓDEMEK

```
    □□□□
 ×  □7□
    □□7□
  □777□
  7□□7
  □□□□□□
```

Należy utworzyć mnożenie, w którym ujawniono wszystkie siódemki.

Rozrywka. Nie Tylko Sudoku 10/2009
Autor: Józef Archacki

I jeszcze trzy przykłady ze wspominanego już *Łamibloga* Marka Penszko (`http://penszko.blog.polityka.pl`; styczeń 2010, wrzesień 2010 i październik 2010); dodawanie ułamków – ze znanym jedynie wynikiem, mnożenie „z podpowiedzią” oraz mnożenie w systemie dwójkowym.

$$\frac{\square\square}{\square\square\square}+\frac{\square\square}{\square\square}=7$$

W kratki należy wpisać różne cyfry od 1 do 9.

```
    □□
 ×  □□
    ■□
  □□□
  □□□□
```

Dodatkowa informacja – wszystkie cyfry są nieparzyste, oprócz jednej – w zacieniowanej kratce.

```
     □□□□
  ×   □□□
     □□□□
   □□□□
 □□□1□□□
```

W zapisie mnożenia liczby zastąpiono kratkami. Ujawniona jest tylko jedna cyfra iloczynu. W systemie dziesiętnym rozszyfrowanie tego działania to zadanie dla komputera, a rozwiązań jest mnóstwo. W systemie dwójkowym rozwiązanie jest jedno.

Zadania tekstowe

ILE LAT MA MAMA?

Kiedy urodził się Felek, tata miał 30 lat. Obecnie tata ma tyle lat, co Bolek, Lolek i Felek razem, zaś mama tyle, ile w sumie mają Alek, Bolek i Lolek. Jednakowym literom odpowiadają w obu alfametykach takie same cyfry, a różnym literom – różne cyfry.

$$\mathtt{ALEK} + \mathtt{MA} + \mathtt{DWA} = \mathtt{LATA}$$

$$\mathtt{ILE} + \mathtt{LAT} + \mathtt{MA} = \mathtt{MAMA}$$

Rozrywka, 2001, 3(1106)

Mama ma 32 lata

```
I L E A T M K D W
-----------------
8 5 3 4 7 1 6 9 2
```

ANTYK

Pewien antyk ma STO lat. Przed 72 laty był on 3 razy starszy niż przed 264 laty.

```
    JAK
  STARY
   JEST
+   TEN
-------
  ANTYK
```

Rozwiązanie alfametyku powinno nie zawierać zera.

Rozrywka, 2002, 17(1146)

Antyk ma STO = 360 lat

```
J A K S T R Y E N O
-------------------
7 4 1 3 6 2 9 8 5 0
```

CIĘCIWY

W kole poprowadzono pewną liczbę cięciw. Każda cięciwa przecina się z każdą z pozostałych w punkcie wewnętrznym koła. Żaden z punktów przecięcia nie jest punktem wspólnym więcej niż dwóch cięciw. Łącznie powstało 406 punktów przecięcia.

```
  WYZNACZ
-  LICZBĘ
---------
   CIĘCIW
```

Rewia Rozrywki, 2001, 4(169)

29 cięciw $C(n) = n(n-1)/2$

```
W Y Z N A C L I B Ę
-------------------
1 2 4 9 0 5 6 7 8 3
```

KTO Z KIM GRA?

Na wstępie damskiego wieczoru brydżowego cztery panie wyjęły losowo z talii po jednej karcie, by ustalić, kto z kim gra. Wszystkie wyciągnęły figurę (asa, króla, damę lub waleta), każda inną i w innym kolorze.

– karo nie jest królem ani damą,
– figura Eli nie jest kierem i jest starsza od figury Oli,
– figura Uli nie jest karem ani damą i jest młodsza od figury Ali,

$$\mathtt{PIK} - \mathtt{TO} = \mathtt{AS}$$

$$\mathtt{KTO} - \mathtt{MA} = \mathtt{ASA}$$

Uwzględniając informację będącą treścią pierwszego alfametyku, należy odpowiedzieć na pytanie, będące drugim alfametykiem. Znaleźć trzeba również rozwiązanie układu alfametyków, które powinno nie zawierać piątki i szóstki. Jednakowym literom odpowiadają w obu alfametykach takie same cyfry, a różnym literom – różne cyfry.

Rewia Rozrywki, 2001, 4(169)

```
ALA  PIK    AS
ELA  TREFL  DAMA
OLA  KARO   WALET
ULA  KIER   KRÓL

P I K T O A S W
---------------
1 0 3 7 4 2 9 8
```

TERMIN

Termin nadsyłania rozwiązań minie w dniu, w którym suma cyfr numeru dnia będzie równa sumie cyfr numeru miesiąca, a numer dnia będzie trzy razy większy od numeru miesiąca.

```
   KIEDY
+  MINIE
--------
  TERMIN
```

Rozwiązanie alfametyku powinno nie zawierać dziewiątki.

Rewia Rozrywki, 2001, 4(169)

27 września

```
K I E D Y M N T R
-----------------
4 8 2 0 3 7 5 1 6
```

TOLEDO

Bolek i Lolek obliczyli, że jadąc bez przerwy z pewną ustaloną prędkością, dojadą stąd do Toledo w ciągu 50 godzin, zaś zwiększywszy prędkość o 10 km/h – w ciągu 45 godzin.

```
     JAK
  DALEKO
    JEST
    STĄD
+     DO
--------
  TOLEDO
```

Rozrywka dla każdego, 2002(1)

Stąd do Toledo jest 4500 km

```
J A K Ą L E O S D T
-------------------
7 9 5 4 6 8 0 1 2 3
```

WANNA

Wanna może pomieścić

$$294 \times \mathtt{L} = \mathtt{WODY}$$

Przy zatkanym odpływie i odkręconym kranie pusta wanna napełnia się w ciągu sześciu minut. Po zakręceniu kranu i otwarciu odpływu pełna wanna opróżnia się w ciągu dziewięciu minut. Pustą wannę napełniano, nie zatkawszy odpływu, przez dwanaście minut.

```
    ILE
   WODY
  WLANO
+    DO
-------
  WANNY
```

Należy odpowiedzieć na pytanie zawarte w drugim alfametyku i rozwiązać układ złożony z obu alfametyków, pamiętając, że jednakowym literom odpowiadają w obu alfametykach takie same cyfry, a różnym literom – różne cyfry.

Rewia Rozrywki, 1999, 12(153)

196 litrów

```
L W O D Y I E A N
-----------------
5 1 4 7 0 9 2 8 3
```

Jak rozwiązywać kryptarytm Feynmana?

Zauważmy najpierw, że A − A = 0 oraz że pierwsza cyfra w odjemnej jest równa 1. Mamy więc

```
      c d A□
    ─────────
    □□□□A□□ : a A b
    e f A A
    ───────
      1□□A
       g h A
       ──────
       □□0□
       □A□□
       ──────
         □□□□
         □□□□
         ────
            0
```

W celu wyznaczenia wartości A badamy iloczyny

```
   aAb          aAb
 ×   c    i   ×   d
 ─────        ─────
  efAA          ghA
```

i dochodzimy do wniosku, że b = 4, c = 7, d = 2.

Teraz już nietrudno zauważyć, że A = 8 i h = 6. Mamy więc

```
      7 2 8□
    ─────────
    □□□□8□□ : a 8 4
    e f 8 8
    ───────
      1□□8
       g 6 8
       ──────
       □□0□
       □8 7 2
       ──────
         □□□□
         □□□□
         ────
            0
```

Z iloczynu

```
   a84
 ×   8
 ─────
  □872
```

otrzymujemy a = 4.

Mamy więc od razu również e = 3, f = 3, g = 9.

```
      7 2 8□
    ─────────
    □□□□8□□ : 4 8 4
    3 3 8 8
    ───────
      1□□8
       9 6 8
       ──────
       □□0□
       3 8 7 2
       ──────
         □□□□
         □□□□
         ────
            0
```

Cyfra setek w ostatnim mnożeniu cząstkowym może być równa tylko 2 lub 3. Stąd ostatnią cyfrą ilorazu musi być 9, bo jedynie 9 × 484 = 4356 spełnia ten warunek. Ostatecznie otrzymujemy więc

```
      7 2 8 9
    ─────────
    3 5 2 7 8 7 6 : 4 8 4
    3 3 8 8
    ───────
      1 3 9 8
        9 6 8
      ───────
        4 3 0 7
        3 8 7 2
        ───────
          4 3 5 6
          4 3 5 6
          ───────
                0
```

MAREK I FRANEK

Na krótko przed wprowadzeniem waluty euro Marek i Franek spędzili wspólnie wakacje w Niemczech i we Francji. Po powrocie sprawdzili, ile zostało im pieniędzy.

Marek miał o 120 franków mniej niż Franek marek. Franek miał o 6 franków więcej niż Marek łącznie franków i marek, zaś Marek o 15 marek mniej niż Franek franków.

```
     ILE
   MAREK
 +  MIAŁ
 ───────
  FRANEK
```

W liczbie ILE powinny występować trzy kolejne cyfry.

Rozrywka, 2002, 1(1130)

I L E M A R K Ł N F
7 6 8 9 3 0 4 2 5 1
Franek miał 129 marek

HELIKOPTER

Helikopter odbył lot do celu i z powrotem. Całkowita

DROGA = 660 × KM

Postój w punkcie docelowym trwał 10 minut, zaś całkowity

CZAS = 2 × GODZ

Helikopter leciał w obu kierunkach ze stałymi prędkościami. Obliczyć prędkość helikoptera w drodze powrotnej, wiedząc, że była ona o 20% większa niż prędkość przelotu do celu.

Kalendarz Rozrywki i Rewii Rozrywki, 2002

K M D R O G A Z C S
7 9 5 2 1 4 0 3 8 6
396 z powrotem, tam 330

ROBAL

Jak wiadomo, kto pije i pali, ten nie ma robali. Wyjątkiem od tej reguły są pijący i palący wędkarze. Dobrze pasiony robal zwiększa każdego dnia swój ciężar o połowę. Gdyby robala tuczono cztery dni, to ważyłby o 135 gramów więcej niż po dwóch dniach.

```
   OBLICZ
 − CIĘŻAR
 ────────
   ROBALA
```

Rozrywka, 2001, 14(1117)

O B L I C Z Ę Ż A R
3 9 7 5 1 6 8 0 4 2
48 gramów

PLANTATOR

Plantator sprzedał zboże i owoce:

54 × TONA = ZBOŻE

34 × TONA = OWOCE

Gdyby sprzedał tyle zboża, co owoców, a owoców tyle, co zboża, to uzyskałby zaledwie 76% otrzymanej kwoty. Ile razy wyższa od ceny tony owoców była cena tony zboża?

Jednakowym literom odpowiadają w obu alfametykach takie same cyfry, a różnym literom – różne cyfry.

Kalendarz Rozrywki i Rewii Rozrywki, 2002

T O N A Z B Ż E W C
1 4 5 3 7 8 6 2 9 0
4 razy

Andrzej BARTZ

Rozwiązania pieskich problemów (po kolei)

P	R	E	C	Z	O	B	Ż	Ą
3	7	1	5	8	2	9	6	4

N	I	G	D	Y	A	S	M	C	Z
1	8	9	0	5	3	2	4	7	6

D	L	A	P	S	Ó	W	Ę	I	N
7	8	0	5	6	1	4	3	9	2

N	A	S	T	Ó	Ł	G	Y
5	4	1	7	6	8	9	2

D	O	G	I	W	Ł	A	Z	Y
7	8	9	4	6	1	5	3	2

K	O	T	Y	N	A	P	Ł
1	2	5	0	3	7	4	6

O	P	S	I	A	K	Ś	Ć
2	4	1	3	5	8	7	0

Ekstremalne alfametyki rzymskie

Rzymskie trzynastki

Próbując z liczb w zapisie rzymskim skonstruować alfametyk, przedstawiający pewną możliwie jak najdłuższą liczbę w postaci sumy możliwie niewielu składników, dochodzimy dość szybko do wniosku, że dla sum o długościach 15 i 14 nie ma szans na rozwiązania. Oto statystyka długich liczb rzymskich:

długość	10	11	12	13	14	15
ilość liczb	389	215	93	31	7	1

Dla sum o długości 13 sprawa nie była prosta, ale kilkakrotnie odniosłem sukces.

Rzymska trzynastka I

```
  DCCCLXXXVIII
  DCCCLXXXVIII
       CCCLIII
       CXXVIII
       LXXVIII
+         LIII
--------------
 MMCCCLXXXVIII
```

Rozrywka 13(1220), 26.06.2005, s. 14

D	C	L	X	V	I	M
5	6	7	3	2	0	1

Rzymska trzynastka II

```
  DCCCLXXXVIII
  DCCCLXXXVIII
     CDXXXVIII
     CCLXXXVII
     CCXXXVIII
         LXXIX
+           LX
--------------
 MMDCCCLXXVIII
```

Journal of Recreational Mathematics 35(3), s. 239, P2746, 13-Column Sum-Roman

D	C	L	X	V	I	M
5	7	2	6	0	3	1

Rzymska trzynastka III

```
  DCCCLXXXVIII
   DCCLXXXVIII
   CCCLXXXVIII
    CCLXXXVIII
     CLXXXVIII
     CLXXXVIII
     CLXXXVIII
     CLXXXVIII
     CLXXXVIII
          CDXL
          CLXI
            XL
       XXXVIII
+         XVII
--------------
 MMMCMLXXXVIII
```

Dotąd nie publikowany.

L	X	V	I	M	D	C
7	4	2	9	1	6	5

Układ rzymski

```
V × C = D
X × C = M
XI × C = MC
XII × C = MCC
XIII × C = MCCC
XIV × C = MCD
XV × C = MD
XVI × C = MDC
XVII × C = MDCC
XVIII × C = MDCCC
XIX × C = MCM
XX × C = MM
XXI × C = MMC
XXII × C = MMCC
XXIII × C = MMCCC
XXIV × C = MMCD
XXV × C = MMD
XXVI × C = MMDC
XXVII × C = MMDCC
XXVIII × C = MMDCCC
XXIX × C = MMCM
XXX × C = MMM
XXXI × C = MMMC
XXXII × C = MMMCC
XXXIII × C = MMMCCC
XXXIV × C = MMMCD
XXXV × C = MMMD
XXXVI × C = MMMDC
XXXVII × C = MMMDCC
XXXVIII × C = MMMDCCC
XXXIX × C = MMMCM
```

Warunki dodatkowe: V < X oraz D < M

Rozrywka. Nie Tylko Sudoku, 2007, 5(8)

I	V	X	C	D	M
1	3	4	2	9	8

Andrzej BARTZ

O, psia kość...

Kiedy po ustawowych zaostrzeniach wprowadzono surowy nakaz Kaganiec noś i przy pogodzie, rozdrażniony pieski świat wyległ na ulice. Choć jazgot był straszliwy, spontaniczna demonstracja pod hasłem Pieska ich niebieska odbywała się pokojowo i nikt nikogo nie ugryzł.

Demonstranci domagali się rozszerzenia psich swobód:

$$\texttt{PRECZ} \times \texttt{Z} = \texttt{OBROŻĄ} \qquad \texttt{NIGDY} \times \texttt{NA} = \texttt{SMYCZY}$$

oraz poprawy warunków bytowych:

$$\texttt{WĘDLINA} : \texttt{DLA} = \texttt{PSÓW} \qquad \texttt{GNATY} : \texttt{NA} = \texttt{STÓŁ}$$

Postulowano także zlikwidowanie podatku od psów i zniesienie segregacji rasowej.

Choć pogoda była pod psem, manifestacja trwała wiele godzin. Dopiero gdy grupki prowokatorów z radykalnego ugrupowania Koalicja Psów Z Rodowodem zaczęły wyszczekiwać:

$$\texttt{DOGI} \times \texttt{DO} = \texttt{WŁADZY} \qquad \texttt{KOTY} \times \texttt{NA} = \texttt{PŁOTY}$$

do akcji przystąpiły policyjne wilczury. Wtedy przywódca anarchistów Reksio warknął

$$\texttt{O} \times \texttt{PSIA} = \texttt{KOŚĆ}$$

Nie było to hasło do boju, lecz do odwrotu. Demonstranci podkulili ogony i jak zbite psy rozpierzchli się do swoich bud i domów. Wkrótce znów zapanował ład i porządek.

Ministerstwo Spraw Dyskretnych zwraca się do czytelników z apelem o współpracę w rozszyfrowaniu psich postulatów i hasła wichrzyciela Reksia. Jak wykazało dochodzenie wstępne, są one kryptarytmami. Rozwiązania prosimy nadsyłać nie do Spółdzielni Ucho, lecz do redakcji, z dopiskiem na kopercie „Nie dla psa kiełbasa”.

* * *

Oto, co zdołano dotychczas ponad wszelką wątpliwość ustalić:

```
WĘDLINA : DLA = PSÓW
ĘIAA
 WDLI
 WSLA
  ÓAIN
   DLA
    ĘÓNA
    ĘÓNA
       =
```

```
GNATY : NA = STÓŁ
**
***
3**
 3**
 3**
  *3*
  *3*
    =
```

bez zera, wszystkie trójki ujawnione

```
  NIGDY
×    NA
  YZCNY
NIGDY
SMYCZY
```

$\texttt{PRECZ} \times \texttt{Z} = \texttt{OBROŻĄ}$

bez zera

```
   DOGI
×    DO
  WZŁAY
AAYAO
WŁADZY
```

bez zera

```
  KOTY
×   NA
  8***
****
PŁOTY
```

bez dziewiątki, jedyna ósemka ujawniona

$\texttt{O} \times \texttt{PSIA} = \texttt{KOŚĆ}$

bez szóstki i dziewiątki

Rewia Rozrywki, 2001, 3(168)

Andrzej BARTZ

Rozwiązanie zadania z okładki

0316879542

Rozwiązania zadań szkieletowych

Missing numbers

638897 : 749 = 853

Samotna siódemka

12128316 : 124 = 97809

Samotna ósemka

10020316 : 124 = 80809

Dzielenie bez ujawnionych cyfr

969 : 8 = 121,125

Mnożenie bez ujawnionych cyfr

$179 \times 224 = 40096$

Równość

$35/7 + 204/68 = 9 - 1$

Podziel i dodaj

$(140 : 5) + 39 = 67$

Siedem siódemek

$2539 \times 372 = 944508$

Dodawanie ułamków

$95/247 + 86/13 = 7$

Mnożenie z jedną cyfrą parzystą

$15 \times 93 = 1395$

Mnożenie binarne

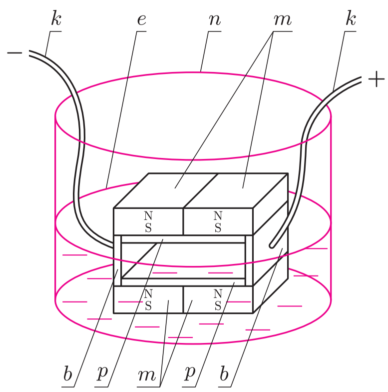
$1111 \times 101 = 1001011$

Silniki magnetohydrodynamiczne

Stanisław BEDNAREK

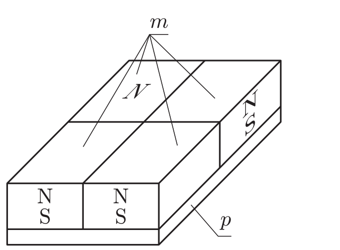
Magnetohydrodynamika to badanie oddziaływania pól magnetycznych z płynami (cieczami i gazami) przewodzącymi prąd elektryczny. Typowymi takimi płynami są ciekłe metale (np. rtęć), zjonizowane gazy (plazma) oraz elektrolity, stanowiące najczęściej wodne roztwory kwasów, zasad i soli. W proponowanych w tym odcinku doświadczeniach wykorzystamy oddziaływanie pola magnetycznego na elektrolit do zbudowania silnika przetwarzającego dostarczoną do niego energię elektryczną na energię kinetyczną ruchu.

Do zbudowania modelu silnika potrzebne będą: niewielki słoik, woda, sól kuchenna, trzy płaskie baterie albo trzy duże baterie okrągłe (typu R20), kilka mniejszych magnesów używanych do przytrzymywania kartek na tablicy lub lodówce, kawałek blaszki miedzianej o grubości ok. 0,2 mm i rozmiarach kilkunastu cm, szczypta sproszkowanego korka lub zmielonego pieprzu, ok. 1 m cienkiego, jednożyłowego przewodu w izolacji, klej cyjanoakrylowy, silikon do uszczelnień w małej tubce, pinezka, 20–30 m drutu nawojowego o średnicy ok. 0,5 mm w izolacji z emalii, kilka izolacyjnych płytek o grubości ok. 1 mm i rozmiarach kilku centymetrów (mogą być płytki z uszkodzonych obwodów drukowanych), kawałek grubego styropianu o rozmiarach ok. 20 cm, lutownica, cyna, piłka do metalu i nożyczki.



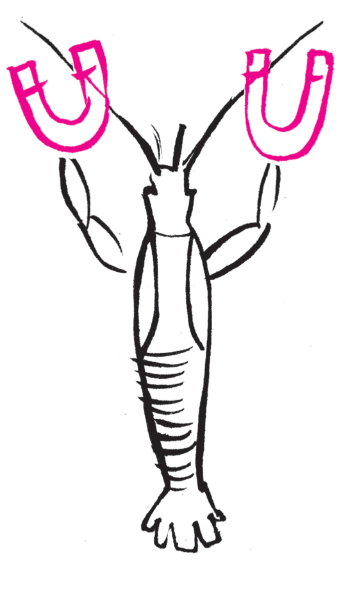
Rys. 1. Budowa liniowego silnika magnetohydrodynamicznego z magnesami trwałymi; p – płytka izolacyjna, b – płytka miedziana, e – elektrolit, k – przewody, n – naczynie, m – magnesy.

Budowany silnik przedstawiony jest na rysunku 1. Silnik ten można nazwać liniowym, ponieważ będzie w nim zachodził ruch postępowy elektrolitu. Najpierw przygotujemy elektrolit, którym będzie nasycony roztwór soli kuchennej: do wody łyżeczką dosypujemy soli kuchennej i mieszamy do rozpuszczenia, powtarzając to kilka razy, aż sól przestanie się rozpuszczać. Baterie łączymy szeregowo (plus jednej z minusem następnej) przylutowanymi kawałkami przewodów. Do skrajnych biegunów baterii też przylutowujemy po jednym kawałku przewodu. Przycinamy dwie kwadratowe płytki izolacyjne, do takich rozmiarów, żeby można było je swobodnie położyć na dnie słoika, oraz dwie płytki z blaszki miedzianej, których jeden bok będzie miał taką samą długość jak bok płytek izolacyjnych. Drugi bok płytek miedzianych powinien mieć długość równą w przybliżeniu połowie wysokości słoika. Obie pary płytek sklejamy, łącząc klejem cyjanoakrylowym boki o tej samej długości, tak by otrzymać prostopadłościenne, otwarte z obu stron pudełko. Do zewnętrznych powierzchni płytek izolacyjnych przyklejamy prostopadłościenne lub dyskowe magnesy, jak na rysunku 2. Na każdej z płytek wszystkie magnesy powinny być zorientowane jednoimiennymi biegunami w tę samą stronę i umieszczone jeden przy drugim. Do płytek miedzianych przylutowujemy odizolowane końcówki przewodów. Następnie wkładamy otrzymany układ płytek z magnesami do słoika i nalewamy tyle elektrolitu, żeby sięgał nieco poniżej górnej krawędzi płytek. Wolne końcówki przewodów łączymy ze skrajnymi biegunami poprzednio przygotowanych baterii. Posypujemy powierzchnię elektrolitu sproszkowanym korkiem lub pieprzem. Jak zachowuje się elektrolit?

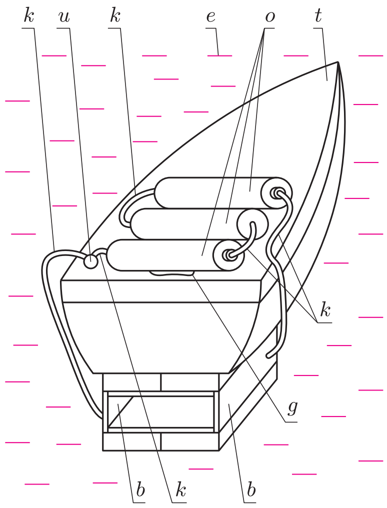


Rys. 2. Wygląd płytki z magnesami; N, S – bieguny magnesu.

Okazuje się, że w tym przypadku elektrolit z jednej strony wpływa do układu płytek z magnesami, a z drugiej z niego wypływa. Ruch elektrolitu spowodowany jest przez siłę Lorentza, która jest prostopadła do kierunku indukcji pola magnetycznego i do kierunku przepływu prądu. W naszym silniku kierunek przepływu prądu elektrycznego jest poziomy i prostopadły do płytek miedzianych, a kierunek wektora indukcji magnetycznej pionowy. Siła elektrodynamiczna ma więc kierunek poziomy i równoległy do płytek miedzianych. Możemy łatwo zbadać, jak na ruch elektrolitu wpływa zmiana liczby włączonych baterii oraz odwrócenie biegunów baterii i magnesów.



Zamiast z blaszki miedzianej, elektrody można wykonać z grubej folii aluminiowej (np. z foremki do pieczenia tart) i złączyć brzegi przez zagięcie. W przypadku użycia baterii płaskich łatwo połączyć ich bieguny spinaczami biurowymi. Szybszy obrót uzyskalibyśmy, stosując zamiast roztworu soli kuchennej wodny roztwór kwasu siarkowego o stężeniu ok. 10%, ponieważ ma on mniejszą oporność właściwą, co umożliwia przepływ prądu o większym natężeniu. Trzeba jednak pamiętać, że kwas siarkowy jest silnie żrący – powoduje oparzenia skóry, oczu, zniszczenie tkanin oraz podrażnienie dróg oddechowych – i dlatego może być użyty jedynie pod opieką nauczyciela. W warunkach domowych można natomiast bez obaw wypróbować ocet zamiast roztworu soli kuchennej.



Rys. 3. Budowa łódeczki napędzanej liniowym silnikiem magnetohydrodynamicznym; t – kadłub, o – bateria, g – silikon, u – pinezka.

Opisany wyżej liniowy silnik magnetohydrodynamiczny możemy wykorzystać do napędu pływającego modelu łódeczki (rys. 3). W tym celu ze styropianu wycinamy kadłub łódeczki. Od góry przyklejamy do niego połączone baterie, a od dołu układ płytek z magnesami, używając w tym celu silikonu do uszczelnień (klej cyjanoakrylowy rozpuszcza styropian). Wkładamy model do wanny lub miski napełnionej elektrolitem. Może się okazać, że wyporność użytego styropianu nie wystarcza do utrzymania modelu na powierzchni elektrolitu – wówczas wydłużamy kadłub, doklejając silikonem odpowiednio przycięty kawałek styropianu. Jeden z przewodów odchodzących od baterii przylutowujemy do dowolnej płytki miedzianej, a drugi owijamy wokół pinezki, którą wbijamy od góry w pokład łódeczki. Pod główkę tej pinezki będziemy wsuwać odizolowaną końcówkę drugiego przewodu, przylutowanego do drugiej płytki miedzianej, uzyskując przez to prosty wyłącznik. Umieszczamy model na środku naczynia z elektrolitem, wsuwamy końcówkę przewodu pod łepek pinezki i obserwujemy, co się dzieje. Widzimy, iż z układu płytek pod działaniem siły Lorentza wypływa elektrolit, zaś na model, zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona, działa skierowana przeciwnie siła, powodująca jego powolne płynięcie.

Przy użyciu tych samych materiałów i narzędzi można zbudować także inne typy silników magnetohydrodynamicznych, np. powodujące wirowy ruch elektrolitu. Ich budowa opisana jest na stronie `deltami.edu.pl`.

Silniki magnetohydrodynamiczne mogą być używane do napędu dużych jednostek pływających, np. jachtów i łodzi podwodnych. Oczywiście, jednostki takie mogą pływać tylko w odpowiednio zasolonych wodach, ale takie występują w prawie wszystkich akwenach świata. Już około 20 lat temu w Japonii zbudowano kilkunastometrowej długości jacht z silnikiem magnetohydrodynamicznym, wyposażonym w elektromagnesy nadprzewodnikowe. Silniki takie mają szereg zalet, m.in. są bardzo proste i ciche, dzięki czemu nie powodują zaburzeń wody umożliwiających wykrycie pływającego obiektu. Dlatego też interesuje się nimi wojsko i wiele wyników badań zostaje utajnionych.

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

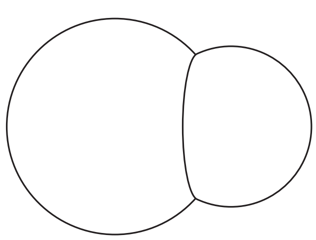
M 1321. Dane są: jeden klocek 1×1 i dwadzieścia jeden klocków 3×1. Udowodnić, że tymi klockami można pokryć szachownicę 8×8 (klocki 3×1 można kłaść poziomo lub pionowo) wtedy i tylko wtedy, gdy klocek 1×1 położony jest na jednym z pól c3, f3, c6 lub f6.
Rozwiązanie na str. 24

M 1322. Na płaszczyźnie danych jest $2n$ różnych punktów: n białych oraz n czarnych. Żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że można tak narysować n odcinków o końcach w danych $2n$ punktach, aby końce były różnokolorowe i aby narysowane odcinki nie przecinały się.
Rozwiązanie na str. 22

M 1323. Wśród 100 monet dokładnie 4 są fałszywe. Wszystkie prawdziwe monety ważą tyle samo. Podobnie fałszywe. Wiadomo, że fałszywa moneta jest lżejsza od prawdziwej. Jak znaleźć przynajmniej jedną prawdziwą monetę za pomocą dwóch ważeń na wadze szalkowej?
Rozwiązanie na str. 18

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 793. Między dwiema czystymi płytami szklanymi umieszczono kroplę wody o masie 0,1 g. Odległość między płytami wynosi 0,01 cm. Znaleźć siłę, z jaką przyciągają się płyty.
Rozwiązanie na str. 23



F 794. Dwie bańki mydlane o promieniach krzywizny R_1 i $R_2 < R_1$ są połączone tak, jak na rysunku. Jaki promień krzywizny ma błonka oddzielająca bańki?
Rozwiązanie na str. 19

Rozwiązanie zadania M 1323.
Podzielmy nasze 100 monet na trzy rozłączne podzbiory A, B i C, mające odpowiednio 33, 33 i 34 elementy. Najpierw ważymy zbiory A i B. Jeśli jeden, powiedzmy A, jest cięższy, to wiemy, że zawiera co najwyżej jedną fałszywą monetę. Wybieramy wtedy z A dwie monety i ważymy je. Wiadomo, że ta, która nie jest lżejsza, jest prawdziwa. Jeśli jednak A i B mają tę samą masę, to mamy trzy przypadki: (a) A i B nie zawierają fałszywej monety, (b) A i B zawierają po jednej fałszywej monecie, (c) A i B zawierają po dwie fałszywe monety. Wybieramy dowolną monetę $x \in A$ i ważymy zbiory $B \cup \{x\}$ i C. Jeśli mają równe masy, to musiał zajść przypadek (b), więc każda moneta z $A \setminus \{x\}$ jest prawdziwa. Jeśli $B \cup \{x\}$ jest cięższy, to nie mógł zajść przypadek (c), więc moneta x jest prawdziwa. Wreszcie, jeśli C jest cięższy, to mamy przypadek (c), więc każda moneta z C jest prawdziwa.

	A	B	C
(a)	0	0	4
(b)	1	1	2
(c)	2	2	0

Tabelka pokazuje liczbę fałszywych monet w każdym ze zbiorów w odpowiednim przypadku.

Informatyczny kącik olimpijski (44): Neon

Tytułowe zadanie pojawiło się na zeszłorocznym Obozie Naukowo-Treningowym im. A. Kreczmara: *Neon składa się z dwóch słów. Na ile sposobów można zgasić niektóre litery w neonie, tak by litery, które pozostaną zapalone, w obu słowach układały się w ten sam niepusty podciąg? Ile różnych podciągów da się w ten sposób uzyskać?* Na przykład dla neonu `supermarket stokrotka` możemy uzyskać 17 różnych niepustych podciągów (`skt`, `sra`, `srk`, `srt` i ich krótsze podciągi) na 27 sposobów (np. `srk` możemy uzyskać na 2 sposoby). Wynik należy obliczyć modulo pewna liczba całkowita.

Zadanie rozwiążemy, używając metody programowania dynamicznego. Niech $a[1..n]$ i $b[1..m]$ będą słowami neonu. Będziemy wypełniać prostokątną tablicę $w[0..n, 0..m]$. Dla $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant m$ oznaczmy przez $w[i,j]$ liczbę sposobów, na jakie możemy zgasić litery w słowach $a[1..i]$ oraz $b[1..j]$, tak by pozostałe litery tworzyły ten sam (być może pusty) podciąg. Odpowiedzią do pierwszej części zadania jest, oczywiście, $w[n,m] - 1$.

Jeśli $i = 0$ lub $j = 0$ (tzn. gdy jedno ze słów jest puste), to możemy utworzyć tylko pusty podciąg, zatem $w[i,j] = 1$.

Załóżmy zatem, że $i, j > 0$, i spójrzmy na ostatnie litery słów $a[1..i]$ i $b[1..j]$. Załóżmy na początek, że są one równe, tzn. $a[i] = b[j]$. Rozważmy cztery przypadki w zależności od tego, czy zostawiamy te litery zapalone, czy też nie. Jeśli obie będą zapalone, to znaczy, że uzyskane podciągi powstają z rozszerzenia jednego z podciągów dla słów $a[1..i-1]$ i $b[1..j-1]$ o dodatkową literę. To daje $w[i-1, j-1]$ możliwości. Liczba możliwych podciągów w przypadku, gdy litera $b[j]$ zostanie zgaszona, wynosi $w[i, j-1]$. Analogicznie liczba podciągów, gdy litera $a[i]$ zostanie zgaszona, wynosi $w[i-1, j]$. Zauważmy, że te podciągi, które wystąpią w przypadku zgaszenia obu tych liter, uwzględniliśmy już w wyniku, z tym że policzyliśmy je dwukrotnie, należy zatem odjąć ich liczbę (jest ich $w[i-1, j-1]$). Ostatecznie dostajemy prostą zależność $w[i,j] = w[i, j-1] + w[i-1, j]$.

Przypadek $a[i] \neq b[j]$ jest trochę łatwiejszy: nie możemy naraz zapalić liter $a[i]$ i $b[j]$, zatem $w[i,j] = w[i, j-1] + w[i-1, j] - w[i-1, j-1]$.

Zajmiemy się teraz drugą częścią zadania: obliczeniem liczby różnych wspólnych podciągów. Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że w tym przypadku będziemy musieli zastosować zupełnie inną strategię i potrzebna będzie jakaś struktura danych, która umożliwi nam wyłapywanie duplikatów. Okazuje się jednak, że i ten problem można rozwiązać za pomocą zaskakująco prostej zależności rekurencyjnej.

Niech $p[i,j]$ oznacza liczbę różnych wspólnych podciągów, które możemy utworzyć w słowach $a[1..i]$, $b[1..j]$. Dla $i = 0$ lub $j = 0$ mamy, oczywiście, $p[i,j] = 1$. Znów patrzymy na ostatnie litery słów. Niech $a[i] \neq b[j]$. Okazuje się, że w tym przypadku mamy po prostu $p[i,j] = p[i, j-1] + p[i-1, j] - p[i-1, j-1]$, a rozumowanie jest analogiczne jak dla tablicy w.

Niech teraz $a[i] = b[j]$. Każdy wspólny podciąg słów $a[1..i]$ i $b[1..j]$ należy do co najmniej jednego z dwóch zbiorów: zbioru A tych różnych podciągów, które mogą powstać, gdy obie litery $a[i]$, $b[j]$ są zapalone, oraz zbioru B tych różnych podciągów, które mogą powstać, gdy obie te litery są zgaszone. Zatem $p[i,j] = |A| + |B| - |A \cap B|$. Zbiory A i B mają po $p[i-1, j-1]$ elementów, pozostaje zatem obliczyć liczność ich części wspólnej $A \cap B$. Niech $\alpha(i)$ oznacza największą liczbę dodatnią mniejszą niż i, dla której $a[\alpha(i)] = a[i]$; analogicznie niech $\beta(j)$ będzie największą liczbą $0 < \beta(j) < j$, dla której $b[\beta(j)] = b[j]$. Jeśli choć jedna z tych liczb nie istnieje, to $|A \cap B| = 0$. W przeciwnym przypadku mamy $|A \cap B| = p[\alpha(i) - 1, \beta(j) - 1]$ i wówczas $p[i,j] = 2 \cdot p[i-1, j-1] - p[\alpha(i) - 1, \beta(j) - 1]$.

Pozostaje oszacować złożoność naszego algorytmu. Tablice α i β możemy obliczyć w czasie $O(n+m)$ i takiej pamięci. Czas wypełniania tablic w i p to $O(nm)$, bezpośrednia realizacja da też taką złożoność pamięciową. Zauważmy jednak, że w przypadku tablicy w możemy zastosować standardową sztuczkę: jeśli wypełniamy tablicę wierszami, wystarczy trzymać w pamięci jedynie aktualny (i-ty) i ostatnio wypełniony ($(i-1)$-szy) wiersz – nigdy bowiem nie odwołujemy się do komórek z wierszy o numerach mniejszych niż $i-1$. Problem powstaje w przypadku tablicy p, w której korzystamy z wiersza o numerze $\alpha(i) - 1$. Tu jednak radzimy sobie następująco: oprócz ostatnich dwóch wierszy trzymamy dodatkowo tablicę $q[1..n]$. W przypadku, gdy $a[i] = b[j]$, uaktualniamy ją według wzoru $q[j] = p[i-1, j-1]$. Dzięki temu mamy $p[i,j] = 2 \cdot p[i-1, j-1] - q[\beta(j)]$. Ostatecznie złożoność pamięciowa algorytmu wyniesie $O(n+m)$.

Tomasz IDZIASZEK

życie na żywo 11

Wirus czy bakteria

W dniu, w którym piszę, rolnicy hiszpańscy rozdają za darmo warzywa, Rosja zamknęła granicę dla truskawek. Kolejno podejrzane: ogórki, pomidory i sałatę ułaskawiono. W niektórych stacjach radiowych i telewizyjnych pojawia się sporadycznie określenie „groźny wirus”. Czas zatem przypomnieć, czym jest wirus i czy jest nim bardzo dla nauki zasłużony gatunek *Escherichia coli*.

Nim zobaczyliśmy wirusy, dowiedzieliśmy się w końcu XIX wieku, że są czynnikiem zakaźnym, przenikającym przez filtry zatrzymujące bakterie. Są od nich mniejsze, przeciętnie około 100 razy, są czymś na pograniczu życia i stanu nieożywionego. Udało się (1941 r.) uzyskać pierwszy kryształ wirusa TMV (czy kryształ jest żywy?), który poddano analizie rentgenograficznej, poznając jego strukturę atomową. Pasteur, zetknąwszy się z wścieklizną, sprawdził, że wywołuje ją przesączalny czynnik zakaźny, i stworzył niezwykle ryzykowną szczepionkę. W końcu XIX wieku odkryto wirusową naturę pryszczycy oraz mozaiki tytoniowej (wyniki badania tego wirusa przez Rosalind Franklin pomogły w rozszyfrowaniu struktury DNA).

Działania wirusów są niezwykle różnorodne, wystarczy wspomnieć takie choroby wirusowe, jak odra, półpasiec, grypa, polio, czarna ospa, wścieklizna, Ebola, HIV – do dziś opisano ich ponad 5 tysięcy. Gospodarzami różnych wirusów bywają bakterie, grzyby, rośliny, zwierzęta i, oczywiście, ludzie.

Wirusy bakteryjne zbudowane są z tzw. białkowego płaszcza, który okrywa ich materiał genetyczny: DNA lub RNA, często mają geny enzymów syntezy DNA lub RNA. Jeżeli zmieszać *in vitro* białka płaszcza i materiał genetyczny, to bez dodatkowych czynników może nastąpić samorzutne utworzenie zakaźnej, aktywnej formy: opłaszczonego DNA lub RNA. Wirusy roślinne i zwierzęce „pożyczają” błonę białkowo-lipidową od zakażonej komórki. Wirusy są zdolne do powielania swojego materiału genetycznego i w zasadzie na tym się kończy ich samodzielność.

Wirusy nie mogą istnieć poza komórką gospodarza, muszą „zmusić ją” genetycznymi narzędziami do usług metabolicznych. Dlatego tak trudno znaleźć skuteczny lek przeciw wirusom – niszcząc wirusa, zabija się jednocześnie gospodarza. Antybiotyki na wirusy NIE DZIAŁAJĄ.

Odnotowujemy niewiele zwycięstw nad wirusami. Uważamy, że zlikwidowaliśmy na Ziemi wirusa czarnej ospy, lecz nie lekami, a skuteczną polityką szczepionkową. W 2011 r. ONZ zaplanowała na 2020 r. zwycięstwo w wojnie z HIV. Życzę z całego serca powodzenia!

Materiałem genetycznym wirusów może być kilka genów, w największych jest ich około 250. Najmniejszy genom żyjącej niezależnie od innych komórek bakterii to około 380 genów, *E. coli* ma ich mniej więcej 4000. Taka jest granica między byciem wirusem a byciem bakterią.

Z naukowego punktu widzenia ciekawość budzą wirusy bakteryjne. Ich współczesne zachowanie (łatwe porywanie fragmentów DNA bakterii – gospodarza) sugeruje hipotezy pochodzenia. Wiadomo także, że proces „skakania DNA” występuje w całej przyrodzie, nie tylko u bakterii. Prawdopodobnie „skaczący” DNA mógł się w trakcie ewolucji co pewien czas przekształcać w „opłaszczone” cząstki, czyli prototypy dzisiejszych wirusów. Niestety, wirusy nie zachowały się w formie kopalnej. Z genetycznych badań współczesnych wynika, że nie mają jednego wspólnego przodka.

Komentatorom afery ogórkowej komunikujemy, że bakterie, do których należy *E. coli*, to nie wirusy, mogą one żyć samodzielnie i są znacznie większe (widać je pod optycznym mikroskopem). Co nie przeszkadza, że – gdy piszę ten tekst – inwazja zjadliwej bakterii na całą Europę stanowi tajemnicę. Natura kolejny raz uczy naukowców pokory.

Magdalena FIKUS

Rozwiązanie zadania F 794.
Ciśnienia z obu stron są takie same, tzn. $\Delta p_1 + \Delta p = \Delta p_2$, czyli

$$\frac{4\sigma}{R_1} + \frac{4\sigma}{R} = \frac{4\sigma}{R_2}.$$

Tutaj $\Delta p = 4\sigma/R$, ponieważ błonka ma dwie powierzchnie: zewnętrzną i wewnętrzną. Zatem

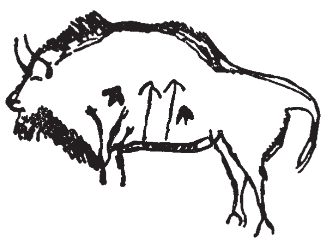
$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Wstęgi na glinie

Biolodzy zapewne mają rozmaite sposoby na umiejscowienie w czasie momentu, gdy nasi przodkowie dosłużyli się miana CZŁOWIEK i pewnie kłócą się o to, które kryteria powinny być uznane za najistotniejsze. Gdy jednak sięgnąć do historii kultury, moment taki jest dość zgodnie nazywany i dyskutować można tylko na temat jego kalendarzowego usytuowania. Tym momentem jest przełom neolityczny.

Za czasów mojej młodości neolit nazywano lubieżnie epoką kamienia gładzonego (bo wcześniej podobno brutalnie go łupano). Tymczasem podstawowe wyróżniki neolitu niewiele mają wspólnego z kamieniami.

Podstawowym, najważniejszym osiągnięciem neolitu była mowa. To ona spowodowała, że praludzkie stado stało się ludzkim plemieniem. Do zaistnienia struktury społecznej niezbędna jest intelektualna komunikacja, możliwość ustalania kontraktów, zbiorowe ocenianie zachowań – w każdej z tych spraw niezbędna jest mowa. Z początku słowa były nazwami konkretnych obiektów i osób, potem niezbędne okazały się pojęcia ogólniejsze, opisujące grupy zjawisk i typy zachowań, aż w końcu niezbędne okazały się tak skomplikowane pojęcia, jak *życie* czy *kierunek* – człowiek zyskał do swej dyspozycji abstrakty. I choć to prosta droga do matematyki, tutaj porzucimy ją.



W plastyce zaistnienie współdziałającej społeczności wyraziło się tym, że zamiast portretowania pojedynczych obiektów z dbałością o szczegóły rysowano teraz głównie współdziałanie schematycznie potraktowanych wielu jednostek.

W sferze kultury materialnej też najistotniejsza nie okazała się obróbka kamienia – powstała ceramika, czyli, mówiąc po prostu, zaczęto lepić garnki. Ten najnowocześniejszy wówczas produkt oczywiście ozdabiano. I tak pojawił się ornament wstęgowy.

Ornament wstęgowy to rytmicznie powtarzające się znaczki – dziś powiedzielibyśmy pewnie *ikonki* – tworzące szlaczek owijający gliniane naczynie. Specjaliści wyróżniają wiele tysięcy rodzajów takich szlaczków, pozwalających im identyfikować poszczególne formacje kulturowe i śledzić ich wzajemne wpływy. Gdy jednak na tę sprawę spojrzy niefachowiec, czyli matematyk, zainteresuje go przede wszystkim nie to, jaka ikonka jest odciskana w danym szlaczku, ale to, w jakim dzieje się to rytmie.

…LLLLLLLLLL…
…LΓLΓLΓLΓLΓ…
…L˥L˥L˥L˥L˥…
…DDDDDDD…
…LJLJLJLJLJ…
…L˥ΓJL˥ΓJL˥…
…HHHHHHH…

Zdefiniujmy zatem rytm. Jest to przekształcenie, które przeprowadza szlaczek na niego samego, ale przeprowadza każde odciśnięcie ikonki na sąsiednie (już z tego widać, że matematycy dopuszczają ornamenty nieskończonej długości – ale cóż byłby wart matematyk bez nieskończoności?). Obok narysowane jest siedem różnych rytmów. Pierwszy z nich to po prostu **przesunięcie** całego szlaczka. Drugi to **symetria z poślizgiem**, czyli symetria względem osi szlaczka połączona z przesunięciem takim, jak poprzednio. Trzeci to **symetrie środkowe** (gdzie są ich środki?). Następny rytm pozwala uzyskać kolejną ikonkę z poprzedniej na dowolny z wymienionych dotąd sposobów – wymaga to specjalnych własności ikonki (jakich?). Piąty rytm to **symetrie osiowe względem prostych prostopadłych do osi szlaczka** (które to proste?). Kolejny rytm to na przemian **symetria osiowa i symetria środkowa**. No i na koniec wszystkie wymienione poprzednio sposoby (znów potrzebna jest ikonka o specjalnych własnościach).

Każdy oczywiście widzi, jak taką wstęgą owinąć ulepiony garnek. Geniusz naszych przodków polega na tym, że używali wszystkich tych rytmów, a innych rytmów nie ma. Dziś matematycy wyrażają ten fakt, mówiąc, że *istnieje siedem jednowymiarowych grup krystalograficznych.*

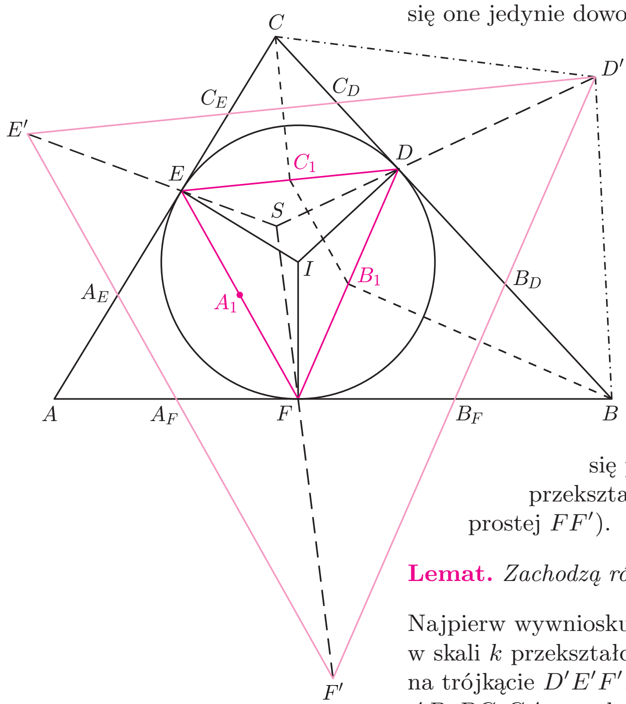
Marek KORDOS

A dla Czytelnika Współczesnego pytanie: jeśliby wstęgi ze szlaczkami nie tworzyły powierzchni bocznej walca, jak to jest na garnkach, tylko wstęgę Möbiusa, to czy wtedy możliwych rytmów byłoby więcej, czy mniej?

13 i 14 kwietnia odbyły się zawody finałowe LXII OLimpiady Matematycznej. Każdego dnia zawodów 139 uczniów z całej Polski, przez trzysta minut, rozwiązywało trzy zadania. Wszystkie bezbłędnie rozwiązał Filip Borowiec z Kielc, a Maciej Dulęba z Wrocławia i Damian Orlef z Zabrza rozwiązali po pięć i pół. Tym razem 126 finalistów rozwiązało przynajmniej jedno zadanie. Każdy z laureatów rozwiązał co najmniej trzy i pół zadania, a wyróżnieni po trzy. Finał był więc na pewno łatwiejszy niż przed rokiem.

Z zadaniami finału oraz szkicami ich rozwiązań można zapoznać się na stronie olimpiady pod adresem: `www.om.edu.pl`.

Niektórzy finaliści rozwiązali zadania bardzo elegancko w sposób nieprzewidziany przez osoby przygotowujące zadania. Omówimy dwa rozwiązania zadania drugiego. Różnią się one jedynie dowodem lematu.



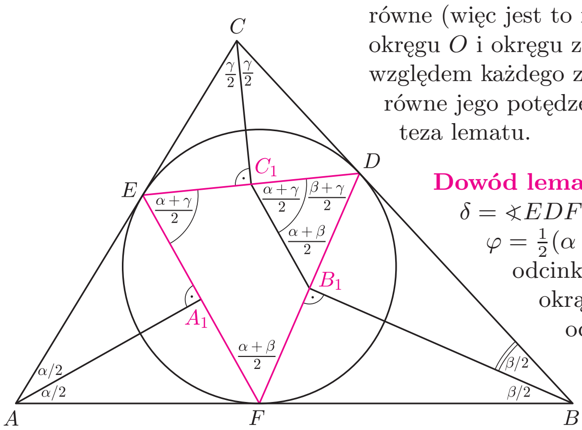
Zadanie 2. *Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prowadzimy trzy proste: przez środki odcinków AE i AF, przez środki odcinków BF i BD oraz przez środki odcinków CD i CE. Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie wyznaczonym przez te trzy proste pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.*

Niech $A_E, A_F, B_F, B_D, C_D, C_E$ będą środkami odcinków AE, AF, BF, BD, CD, CE. Z twierdzenia Talesa wynika, że $A_EA_F \parallel EF$, $B_DB_F \parallel DF$ i $C_DC_E \parallel DE$. Przez F' oznaczamy punkt wspólny prostych B_FB_C i A_EA_F. Analogicznie definiujemy punkty D' i E'. Boki trójkątów DEF i $D'E'F'$ są odpowiednio równoległe, więc punkt S, w którym przecinają się proste DD' i EE', jest środkiem jednokładności w skali $k = \frac{DE}{D'E'}$ przekształcającej trójkąt DEF na trójkąt $D'E'F'$ (S leży też na prostej FF').

Lemat. *Zachodzą równości*: $D'B = D'C$, $E'C = E'A$, $F'A = F'B$.

Najpierw wywnioskujemy twierdzenie z lematu. Jednokładność o środku S, w skali k przekształca okrąg O opisany na trójkącie DEF na okrąg O' opisany na trójkącie $D'E'F'$. Środek okręgu O leży na prostopadłych do prostych AB, BC, CA przechodzących przez wierzchołki D, E, F, więc środek okręgu O' leży na prostopadłych do prostych AB, BC, CA przechodzących przez wierzchołki D', E', F'. Na mocy lematu te prostopadłe są symetralnymi boków trójkąta ABC, więc ich punkt wspólny to środek okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Dowód lematu wg Wojciecha Nadary (nagroda im. A. Mąkowskiego). Potęga punktu B_F względem okręgu O jest równa $\frac{1}{4}BF^2$. Tyle samo jest równa potęga punktu B_F względem okręgu o środku B i promieniu 0 (czyli zdegenerowanego do punktu B). Analogicznie potęga punktu B_D względem okręgu O jest równa potędze punktu B_D względem okręgu zdegenerowanego do punktu B. Wobec tego jeśli punkt X leży prostej B_FB_D, to jego potęgi względem tych dwóch okręgów są równe (więc jest to ich oś potęgowa). Podobnie prosta C_DC_E jest osią potęgową okręgu O i okręgu zdegenerowanego do punktu C. Wobec tego potęgi punktu D' względem każdego z okręgów zdegenerowanych do punktów B i C są równe (bo równe jego potędze względem okręgu O). Oznacza to, że $BD' = CD'$, a to teza lematu.



Dowód lematu wg Anny Olech. Niech $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$ i $\gamma = \sphericalangle ACB$, $\delta = \sphericalangle EDF$, $\eta = \sphericalangle FED$, $\varphi = \sphericalangle DFE$. Wtedy $\delta = \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, $\eta = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$, $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, więc trójkąt DEF jest ostrokątny. C_1, A_1, B_1 będą środkami odcinków DE, EF, FD. Na czworokącie BB_1C_1C można opisać okrąg, bo $\frac{1}{2}\beta + \sphericalangle B_1C_1D + \sphericalangle DC_1C = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}(\alpha+\gamma) + 90^\circ = 180^\circ$, oczywiście $B_1C_1 \parallel EF$. Proste C_DC_E i B_FB_D są symetralnymi odcinków CC_1 i BB_1, więc ich punkt przecięcia czyli D' jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie BB_1C_1C, więc $D'C = D'B$, a to chcieliśmy udowodnić.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 611 ($WT = 2{,}65$) i 612 ($WT = 2{,}33$) z numeru 12/2010

Michał Kieza	Warszawa	47,30
Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,03
Zbigniew Skalik	Wrocław	34,60
Paweł Najman	Kraków	33,57
Piotr Sobczak	Łódź	33,20
Tomasz Tkocz	Rybnik	32,95

Michał Kieza – już po raz czwarty.

Rozwiązania zadań z numeru 4/2011

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

619. Szachownica o rozmiarach $n \times n$ została pokryta płytkami 2×2. Każda płytka pokrywa dokładnie cztery pola. Płytki zachodzą na siebie, ale nie wystają poza brzeg szachownicy. Liczba płytek przekracza $2(n^2 - n)/3$. Dowieść, że można usunąć jedną płytkę tak, by pozostałe płytki nadal pokrywały całą szachownicę.

620. Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje liczba całkowita n taka, że liczba $P(n)$ ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

619. W obrębie szachownicy jest $(n-1)^2$ punktów kratowych (w każdym spotykają się cztery pola szachownicy). Wyróżnijmy te punkty kratowe, na które padły środki płytek. Punkty kratowe leżą w $n-1$ rzędach po $n-1$ punktów; liczba punktów wyróżnionych przekracza $(n-1)(2n/3)$, więc w pewnym rzędzie jest ich więcej niż $\lfloor 2n/3 \rfloor$.

Numerujemy punkty kratowe w tym rzędzie od 1 do $n-1$. Wystarczy wykazać, że pewna trójka $(j, j+1, j+2)$ składa się z punktów wyróżnionych; można wtedy bezkarnie usunąć płytkę o środku w punkcie $j+1$.

Załóżmy, że tak nie jest; zatem w każdej z trójek $(1,2,3)$, $(4,5,6)$ itd. jest punkt niewyróżniony. Jest $\lfloor (n-1)/3 \rfloor$ trójek postaci $(3i-2, 3i-1, 3i)$. W takim razie liczba punktów wyróżnionych (w rozważanym rzędzie) nie przekracza różnicy $(n-1) - \lfloor (n-1)/3 \rfloor$; zaś ta różnica równa się $\lfloor 2n/3 \rfloor$, o czym można się przekonać, rozpatrując trzy możliwe reszty z dzielenia n przez 3. Sprzeczność – wyróżnionych punktów miało być w tym rzędzie więcej.

620. Niech $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ $(m \geqslant 1)$.

Gdy $a_0 = 0$, wystarczy wziąć dowolną liczbę n, będącą iloczynem k różnych liczb pierwszych. Są one oczywiście dzielnikami liczby $P(n)$. Dalej przyjmijmy, że $a_0 \neq 0$.

Najpierw wykażemy, że zbiór dzielników pierwszych *wszystkich* liczb $P(n)$ jest nieskończony. Przypuśćmy bowiem, że jest to zbiór skończony $\{p_1, \ldots, p_s\}$. Biorąc jako n dowolną liczbę postaci $n = a_0 l p_1 \ldots p_s$ (l całkowite), mamy

$$P(n) = a_0 \Big[1 + \sum_{i=1}^{m} a_i a_0^{i-1} (l p_1 \ldots p_s)^i\Big].$$

Liczba w nawiasie kwadratowym nie dzieli się przez żadną z liczb pierwszych $p_1, \ldots, p_s$ (a swoboda wyboru l pozwala przyjąć, że jest różna od ± 1); ma więc jakiś inny dzielnik pierwszy, wbrew uczynionemu przypuszczeniu.

Stąd wniosek, że dla dowolnego k istnieją różne liczby pierwsze $q_1, \ldots, q_k$ oraz takie liczby całkowite $n_1, \ldots, n_k$, że

$$P(n_i) \equiv 0 \pmod{q_i} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, k.$$

Znajdujemy liczbę n, spełniającą układ kongruencji

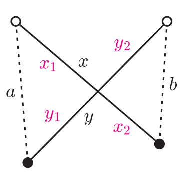
$$n \equiv n_i \pmod{q_i} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, k;$$

taka liczba istnieje, w myśl chińskiego twierdzenia o resztach. Wówczas

$$P(n) \equiv P(n_i) \equiv 0 \pmod{q_i} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, k;$$

liczba $P(n)$ ma więc co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

Rozwiązanie zadania M 1322.
Zbiór n odcinków o różnokolorowych końcach możemy skonstruować na skończenie wiele sposobów (dokładnie $n!$). Narysujmy go tak, aby suma długości narysowanych odcinków była możliwie najmniejsza. Wtedy te odcinki są parami rozłączne, bo w przeciwnym przypadku



parę x, y przecinających się odcinków można zastąpić parą odcinków nieprzecinających się a, b, zmniejszając jednocześnie sumę długości wszystkich odcinków. Wynika to łatwo z nierówności trójkąta: $|a| + |b| > (|x_1| + |y_1|) + (|x_2| + |y_2|) = |x| + |y|$.

Klub 44

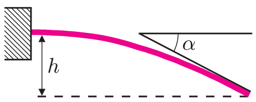
Rozwiązania zadań z numeru 4/2011

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

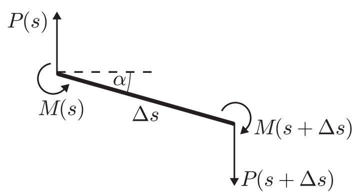
516. Sprężyście zginający się jednorodny pręt o długości l i masie m zamocowano jednym końcem poziomo, a drugi zwisa pod wpływem siły ciężkości (rys. 1). Miarą sztywności pręta jest dany parametr k, będący stosunkiem momentu siły zginającej M do kąta α między stycznymi do końców pręta, gdy M ma wzdłuż niego stałą wartość. Obliczyć numerycznie zwis pręta h oraz kąt opadania jego końca α, przy następujących danych: $l = 1$ m, $m = 1$ kg, $k = 1$ N $\cdot$ m/rad, przyspieszenie ziemskie $g = 10$ m/s^2.

Wskazówka: Obliczenia mogą być oparte na przedstawieniu pręta jako zespołu dużej liczby n sztywnych prętów o masach $m_1 = m/n$ i długościach $l_1 = l/n$, połączonych przegubami opisanymi przez współczynnik $k_1 = k \cdot n$.



Rys. 1

517. Równoległa wiązka światła o natężeniu (tzn. mocy na jednostkę powierzchni prostopadłej) I_0 pada na kulkę o promieniu r ze szkła o współczynniku załamania n. W odległości $R \gg r$ od kulki znajduje się ekran prostopadły do wiązki padającej, ale oświetlony tylko przez światło przechodzące przez kulkę. Jeśli można pominąć efekty dyfrakcyjne i odbicie światła od szkła, to jakie jest natężenie światła padającego na środek ekranu?



Rys. 2

516. Niech s będzie zmienną wzdłuż pręta, od $s = 0$ (koniec zamocowany) do $s = l$ (koniec zwisający). Funkcjami zmiennej s są: siła oddziaływania jednej części na drugą $P(s)$ (czyli ciężar prawej części pręta), moment zginający pręt $M(s)$ oraz kąt odchylenia stycznej od poziomu $\alpha(s)$. Oczywiste jest, że $P(s) = mg(l - s)/l$, natomiast rozważając mały odcinek pręta o długości $l_1 = \Delta s$, stwierdzamy, że warunek równowagi ze względu na obrót ma postać (zob. rys. 2)

$$-\Delta M = M(s) - M(s + \Delta s) = P \Delta s \cos\alpha.$$

Pominęliśmy tu „wyrazy drugiego rzędu”, tzn. zaniedbaliśmy ciężar tego odcinka oraz różnicę między wartościami P na jego końcach. Dalej, różnica między kątami nachylenia sąsiednich odcinków zależy od M zgodnie ze wzorem

$$k_1 \Delta\alpha = M, \quad \text{czyli} \quad kl = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = M.$$

Zbierając zapisane równania, dochodzimy w granicy $\Delta s \to 0$ do równania różniczkowego

$$kl \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}s^2} = -mg \frac{l - s}{l} \cos\alpha,$$

które po wprowadzeniu zmiennej bezwymiarowej $z = s/l$ przybiera postać

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{mgl}{k}(1 - z)\cos\alpha.$$

Równanie to trzeba scałkować od $z = 0$ (gdzie $\alpha = 0$) do $z = 1$ (gdzie $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} = 0$), przy czym stała $\frac{mgl}{k}$ ma wartość 10. Zgodnie z treścią zadania obliczyć należy $\alpha(1)$ oraz sumę przesunięć pionowych $\mathrm{d}h = \mathrm{d}z \cdot \sin\alpha$. Autor stosował procedurę numeryczną, zaczynając od $z = 0$ i wybierając dowolną początkową wartość $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}$, a następnie korygując ją tak, aby w punkcie $z = 1$ otrzymać $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} = 0$. Okazuje się, że właściwą początkową wartością $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}$ jest 3,74, końcowy kąt nachylenia jest równy $\alpha(1) = 1{,}054$ rad, a zwis $h = 0{,}701$ m.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 512 ($WT = 3{,}30$) i 513 ($WT = 3{,}15$) z numeru 2/2011

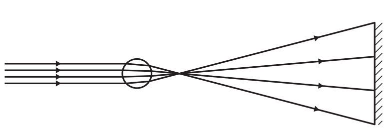
Jerzy Witkowski	Radlin	39,68
Andrzej Idzik	Bolesławiec	36,52
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,63
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	32,04
Michał Koźlik	Gliwice	20,94

Rozwiązanie zadania F 793.
Możemy założyć, że kropla rozpłynęła się symetrycznie i widziana z góry ma kształt koła o promieniu R. Powierzchnia tego koła wynosi $S = V/d = m/\rho d$. Siła przyciągania między płytkami równa jest $F = \Delta p/S$, gdzie $\Delta p = 2\sigma/d$ jest ciśnieniem wywieranym przez zakrzywioną powierzchnię cieczy. Ostatecznie

$$F = \frac{2\sigma m}{\rho d^2} = 0{,}72 \text{ N}.$$

517. Promień, którego przedłużenie jest odległe od środka kulki o h, pada na jej powierzchnię pod kątem $\alpha = \arcsin(h/r)$ i załamuje się pod kątem $\beta = \arcsin(h/rn)$. Ponieważ przy wyjściu z kulki kąty są te same, więc kąt odchylenia tego promienia od kierunku początkowego jest równy $\gamma = 2(\alpha - \beta)$. Rozpatrując promienie padające na ekran w pobliżu środka, należy przyjąć, że kąty są małe, tzn. $\gamma = 2\frac{h}{r}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Gdy spełniony jest warunek $R \gg r$, promienie odchylone o γ padają na ekran w odległości γR od środka. Widzimy, że wiązka o polu przekroju πh^2, której moc wynosi $\pi h^2 I_0$, oświetla na ekranie koło o polu $\pi(\gamma R)^2$. Szukane natężenie oświetlenia środka ekranu wynosi więc

$$\frac{\pi h^2 I_0}{\pi(\gamma R)^2} = I_0 \left(\frac{r}{2R}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-2}.$$



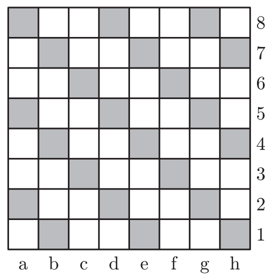
Rys. 3

Prosto z nieba: Najzimniejszy brązowy karzeł

Sierpniowe wieczorne obserwacje wschodu Jowisza i Urana zachęcają do rozmyślań o pochodzeniu Układu Słonecznego oraz odległych układów planetarnych. Obecnie „obowiązująca” teoria powstawania planet przewiduje we wczesnej fazie życia gwiazdy istnienie gazowo-pyłowego dysku protoplanetarnego, z którego, w procesie grawitacyjnego kolapsu oraz rotacji różniczkowej (cząstki na sąsiednich orbitach poruszają się z nieznacznie różniącymi się prędkościami) dysku połączonej z oddziaływaniami zderzeniowymi zgęstków materii, tworzą się „zaczątki” planet, akreujące okoliczną materię, które efektywnie czyszcząc okolicę swojej orbity, stopniowo przybierając kulisty kształt, zwiększając masę i promień. Te aspekty zostały zawarte w definicji planety, przyjętej przez Międzynarodową Unię Astronomiczną w 2006 r., co spowodowało „zdegradowanie” statusu Plutona do *planety karłowatej* (Pluton nie spełniał warunku „czystości” orbity). Podobne problemy pojawiają się przy próbach klasyfikowania małomasywnych, starych gwiazd, nazwanych *brązowymi karłami*. Tegoroczne prace [1], [2] donoszą o odkryciach bardzo chłodnych brązowych karłów, CFBDSIR J1458+1013B (o temperaturze $T = 100°\mathrm{C}$) oraz WD 0806-661B ($T = 30°\mathrm{C}$!). Szczególnie ten drugi obiekt, znajdujący się w odległości 63 lat świetlnych od Ziemi, w układzie podwójnym z białym karłem, rozemocjonował naukowców. Obliczona temperatura jest na tyle niska, że atmosfera brązowego karła może zawierać chmury składające się z kropelek wody. Pomiar ten, jak również pomiar masy (około 7 mas Jowisza) WD 0806-661B, klasyfikuje go raczej jako gazową planetę, a nie gwiazdę w układzie podwójnym. Separacja składników wynosi około 2500 jednostek astronomicznych, o rzędy wielkości więcej niż dla planet w Układzie Słonecznym (około 40 j.a.), jednak jest ona prawdopodobnie spowodowana ewolucją brązowego karła w dysku gwiazdy lub oddziaływaniem z otoczką, którą biały karzeł odrzucił, przechodząc przez fazę czerwonego olbrzyma. Wydaje się zatem, że ów obiekt jest pierwszym z nowo odkrytej klasy obiektów stanowiących, być może, „brakujące ogniwo” pomiędzy gazowymi planetami olbrzymami klasy Jowisza a bardzo lekkimi gwiazdami.

Michał BEJGER

Rozwiązanie zadania M 1321.
Załóżmy, że udało się pokryć danymi klockami szachownicę. Kolorujemy 22 pola szachownicy jak na rysunku.



Każdy klocek 3×1 przykrywa dokładnie jedno zamalowane pole. Tych klocków jest 21, więc klocek 1×1 musi leżeć na zamalowanym polu. Wykonujemy symetryczne kolorowanie, ale innym kolorem niż poprzednio, względem prostej zawierającej wspólny bok pól a4 i a5. Widać już, że klocek 1×1 musi leżeć na jednym z czterech pól zamalowanych obydwoma kolorami, a to właśnie pola wymienione w tezie zadania. Z drugiej strony łatwo sprawdzić, że jeśli leży on na jednym z tych pól, to można skonstruować odpowiednie pokrycie szachownicy.

Prace cytowane

[1] `http://arxiv.org/abs/1103.0014`.
[2] `http://arxiv.org/abs/1102.5411`.

Sierpień

Dłuższe i nadal ciepłe noce sprzyjają obserwacjom nieba. Na sierpniowym niebie niepodzielnie króluje jasny (−2,5 mag) Jowisz wschodzący w gwiazdozbiorze Barana nad wschodnim horyzontem. Choć widoczny będzie przez całą noc, to jednak niezbyt wysoko. Dwie inne planety-olbrzymy, Uran i Neptun, wędrować będą po niebie nad południowo-wschodnim i południowym horyzontem jeszcze niżej niż Jowisz. Choć widoczne całą noc, nie będą szczególnie jasne, bowiem Uran (w Rybach) mieć będzie jasność +5,8 mag, a słabszy od niego Neptun (w Wodniku) zaledwie +7,8 mag, zatem poza zasięgiem nieuzbrojonego oka. Obserwacje Marsa (+1,4 mag), wschodzącego nad ranem w gwiazdozbiorze Bliźniąt, zaczną poprawiać się pod koniec miesiąca, gdyż Mars będzie wschodził coraz wcześniej. Obserwacje Saturna (+0,9 mag) będą coraz trudniejsze; zachodzi on w gwiazdozbiorze Panny niemal jednocześnie ze Słońcem. Także Wenus i Merkurego nie zobaczymy na sierpniowym niebie. 20 sierpnia nastąpi koniunkcja Jowisza i Księżyca. Ciała te zbliżą się na odległość około 4,5 stopnia.

Od Skorpiona (na południowym zachodzie) aż do Łabędzia (okolice zenitu) rozciąga się najokazalsza część Drogi Mlecznej z licznymi gromadami i mgławicami. W samym tylko Strzelcu godne uwagi są gromada kulista M 22 (NGC 6656) o jasności +5,0 mag, M 24 (NGC 6603) – najjaśniejsza (+4,5 mag) grupa gwiazd w tej konstelacji; ich listę można by znacznie przedłużyć. Warto więc popatrzeć w tamto miejsce, zwłaszcza przez lornetkę czy niewielki teleskop.

Jednak to nie wędrówka planet czy gwiazd po sierpniowym niebie będzie główną atrakcją miesiąca, lecz jeden z najobfitszych rojów meteorów – Perseidy (wysoko nad wschodnim horyzontem). W okolicach 12 sierpnia przypada maksimum roju, kiedy to można będzie zobaczyć nawet 100 „spadających gwiazd” na godzinę. Jego aktywność potrwa około 20 dni, choć w miarę upływu czasu będzie coraz mniejsza. Generalnie sierpień obfituje w roje meteorów – takie jak Kappa Cygnidy z maksimum 17 sierpnia i 3 zjawiskami na godzinę, ale żaden z nich nie jest tak wysoko nad horyzontem ani nie jest tak obfity jak Perseidy.

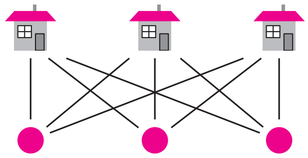
Pełnia Księżyca przypada 13 VIII, a nów 29 VIII. A więc czystego nieba!

Agnieszka MAJCZYNA

Domki i studnie

Joanna JASZUŃSKA

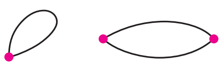
Zagadka. Bracia Jacek, Wacek i Placek mieszkają w trzech różnych domkach, w pobliżu których znajdują się trzy studnie: jedna z H_2O, druga z C_2H_5OH, trzecia z sokiem porzeczkowym. Każdy z braci chciałby poprowadzić ze swojego domu trzy chodniki, po jednym do każdej ze studni. Czy bracia mogą poprowadzić swoich 9 chodników tak, aby żadne dwa z nich się nie przecinały (rys. 1)?



Rys. 1. Czy da się poprowadzić chodniki tak, by żadne dwa się nie przecinały?

Zapewne wielu Czytelników jeszcze w dzieciństwie przekonało się, metodą prób i błędów, że odpowiedź brzmi „nie". Aby ją udowodnić, wprowadźmy kilka pojęć z teorii grafów.

Grafy dwudzielne. *Graf* to, mówiąc intuicyjnie, punkty (zwane *wierzchołkami*) połączone liniami (niekoniecznie prostymi, zwanymi *krawędziami*). Rozważać będziemy tylko grafy *spójne*, czyli „w jednym kawałku", i *proste*, czyli takie, w których każda krawędź ma dwa różne końce i żadnych dwóch wierzchołków nie łączy bezpośrednio więcej niż jedna krawędź (rys. 2).

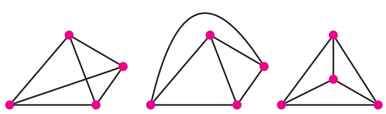


Rys. 2. Sytuacje niedozwolone w grafach prostych.

K_n oznacza graf *pełny* o n wierzchołkach, czyli graf o n wierzchołkach, z których każde dwa są połączone krawędzią (rys. 3 i 4).

Graf *pełny dwudzielny* K_n^m to taki graf, którego $n+m$ wierzchołków można podzielić na dwie grupy, po n i m, a krawędzie łączą wszystkie wierzchołki z jednej grupy ze wszystkimi z drugiej, przy czym innych krawędzi nie ma. W przypadku trzech domków i trzech studni występuje graf K_3^3.

Grafy planarne. Graf nazywamy *planarnym*, jeśli da się go narysować na płaszczyźnie tak, aby żadne dwie krawędzie się nie przecinały. Na przykład graf K_4 jest planarny (rys. 3). Nie wszystkie grafy są planarne.



Rys. 3. Różne sposoby narysowania grafu K_4.

W zagadce o domkach i studniach należy rozstrzygnąć, czy graf K_3^3 jest planarny.

Wzór Eulera i przydatna nierówność. Dla grafów planarnych zachodzi wzór Eulera: $w - k + s = 2$, gdzie w to liczba wierzchołków grafu, k – liczba krawędzi, a s – liczba ścian, czyli obszarów, na jakie graf dzieli płaszczyznę (wliczamy też „zewnętrze" grafu).

Wzór Eulera zachodzi także dla odpowiednio „przyzwoitych" wielościanów, np. dla wielościanów wypukłych.

Wykażemy teraz, że w planarnym grafie dwudzielnym zachodzi nierówność $(*)\ 2k \geqslant 4s$. Policzmy krawędzie takiego grafu. Każda ściana ma na przemian wierzchołki z każdej z dwóch grup, zatem jest parzystokątna, więc co najmniej czworokątna. Ma wobec tego co najmniej 4 krawędzie. W grafie jest więc co najmniej $4s$ krawędzi, ale – uwaga! – policzonych dwukrotnie (każdą krawędź liczymy przy każdej z dwóch ścian, które rozdziela). Stąd $2k \geqslant 4s$.

Rozwiązanie zagadki. Pokażemy, że graf K_3^3 nie jest planarny, czyli że bracia nie są w stanie poprowadzić nieprzecinających się chodników. Przypuśćmy przeciwnie. Wtedy ze wzoru Eulera mamy $w - k + s = 2$, przy czym $w = 6$, $k = 9$. Stąd $s = 5$. Jednocześnie na mocy $(*)$ zachodzi $2k \geqslant 4s$, czyli $18 \geqslant 20$, sprzeczność. □

Zadania domowe

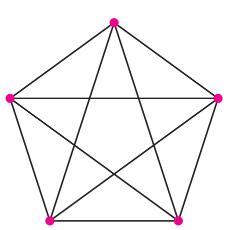
1. Udowodnij wzór Eulera.

2. Wykaż, że wierzchołki i krawędzie dowolnego wielościanu wypukłego tworzą graf planarny prosty.

3. Wykaż, że dla każdego wielościanu wypukłego zachodzi $2k \geqslant 3s$ oraz $2k \geqslant 3w$.

4. Wykaż, że graf K_5 nie jest planarny (rys. 5).

5. Czy istnieje takie $n > 5$, że graf K_n jest planarny?



Rys. 4. Graf K_5.

Ważna uwaga na koniec. Z rozwiązania zagadki o domkach i studniach oraz z zadania 4 można wywnioskować, że jeśli graf zawiera „fragment typu" K_3^3 lub K_5, to nie może być planarny (ponieważ już ten fragment nie daje się narysować bez przecinających się krawędzi, a co dopiero cały graf).

Słowa „fragment typu" bywają na różne sposoby doprecyzowywane, ale pozostańmy przy wersji mniej formalnej.

Twierdzenie Kuratowskiego głosi, że zachodzi także fakt odwrotny, czyli że *graf jest nieplanarny* ***wtedy i tylko wtedy****, gdy zawiera „fragment typu" K_5 lub K_3^3.* Twierdzenie to oznacza, że te dwa niezwykle proste grafy nieplanarne (K_3^3 i K_5) wystarczają, by rozstrzygać o planarności lub nieplanarności wszystkich innych grafów, a także że – w pewnym sensie – nie ma żadnego „naprawdę zupełnie innego" od nich grafu nieplanarnego.