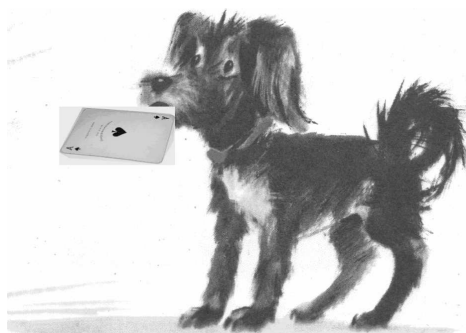




Następny numer to matematyka rekreacyjna



SPIS TREŚCI NUMERU 7 (446)

Układy iterowanych przekształceń
Przemysław Kiciak str. 1

Jak wygląda zbiór π -wymiarowy, czyli o wymiarze fraktali
Krzysztof Barański str. 4

Kilka słów o wymiarze
Sławomir Nowak str. 7

Fraktalny świat papierowej tasiemki
Tomasz Idziaszek str. 8

Informatyczny kącik olimpijski (43): Ploter
Tomasz Idziaszek str.10


Benoît Mandelbrot
Zdzisław Pogoda str.11

Doświadczenia myślowe: Wycinanki
Krzysztof Rudnik str.12

Interpolacja fraktalna, czyli dwukrotne fałszerstwo na zamówienie
Irmína Herbut, Paweł Rzężewski str.14

Fraktale kwantowe
Daniel Wójcik str.16

 Zadania str.18

 Chrońmy przyszłość
Magdalena Fikus str.19

Aktualności str.20

 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej str.21

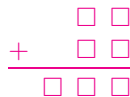
Klub 44 str.22

Prosto z nieba: Mikrowazar GRS1915+105
Michał Bejger str.24

Lipiec
Agnieszka Majczyna str.24

 Sumy nieskończone
Joanna Jaszńska str.25

Odgadnąć znaczenie rysunku i wpisać je do diagramu



Następnie należy każdej z liter przyporządkować cyfrę, tak aby otrzymane liczby utworzyły poprawne działania.

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski. Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk, Diana Gawronkiewicz / Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Fran-Press: www.franpress.pl, infolinia 801-679-466

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2011 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują Regiony Sprzedaży RUCH SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania wpłat: do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH SA, Pion Kolportażu, Zespół ds. Obrotu Zagranicznego, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-53-28-823 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Zespołu lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), fax 22-53-28-734, infolinia 800-1200-29.

Płatność kartą kredytową (Visa, MasterCard, American Express) przez www.ruch.pol.pl

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:

SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;

w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;

w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;

kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesyłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):

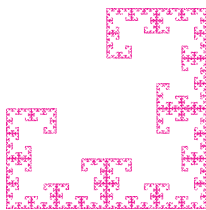
deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

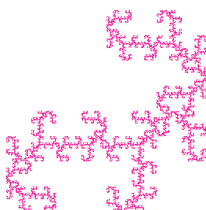
Cena 1 egzemplarza 4 zł

Układy iterowanych przekształceń

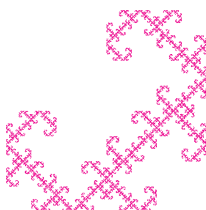
Przemysław KICIAK*



Kto chce, może wszędzie dalej płaszczyznę zamienić na przestrzeń, a wtedy koła trzeba będzie zamienić na kule.



Ubocznym wynikiem rozwiązania tego problemu będzie możliwość udzielenia odpowiedzi (w postaci liczby) na pytanie, jak bardzo różni się np. koło od kwadratu lub trójkąta.



Kto coś słyszał o fraktalach, zwykle potrafi wymienić dwie ich cechy charakterystyczne: figury te mają skomplikowany kształt (bardziej wtajemniczeni mówią o ułamkowym wymiarze; kto chce być bardziej wtajemniczony, przeczyta artykuł Krzysztofa Barańskiego na stronie 4) i wykazują samopodobieństwo (bardziej wtajemniczeni umieją powiedzieć, jakiego rodzaju: geometryczne, afiniczne, rzutowe, a może stochastyczne). Mówiąc ogólnie, cechy te ma również wiele obiektów spotykanych w świecie, a to otwiera szerokie pole do zastosowań fraktali w grafice komputerowej. Jej celem jest przecież naśladowanie rzeczywistości.

Zajmiemy się najprostszą metodą konstruowania i obrazowania fraktali, za pomocą *układów iterowanych przekształceń* (ang. *iterated function systems*, w skrócie IFS). U podstaw tej metody leży kilka twierdzeń. Choć twierdzenia te są niebanalne, ich dowody są niezbyt trudne, a komputerowe algorytmy generowania fraktali za pomocą IFS-ów są jeszcze prostsze.

Zacznijmy od ustalenia, co uważamy za fraktal. Przyjmijmy, że jest nim dowolny niepusty, domknięty i ograniczony zbiór punktów płaszczyzny euklidesowej E . Zwróćmy uwagę, że w ten sposób za fraktale uznaliśmy także bardzo „porządne” figury, takie jak wielokąty, których wymiar nie jest ułamkiem. Odrzucenie takich figur (przez kogoś, komu zależało tylko na „prawdziwych” fraktalach) bardzo (i niepotrzebnie) skomplikowałoby teorię, a poza tym w grafice zwykle wielokąty też się przydadzą, prawda?

Niech f oznacza ciągłe przekształcenie płaszczyzny w siebie. Jeśli zatem p oznacza dowolny punkt płaszczyzny, to $f(p)$ jest również jej punktem. Od razu zauważamy, że funkcja f wyznacza również przekształcenie zbioru wszystkich figur w płaszczyźnie w ten sam zbiór; jeśli A jest figurą (tj. dowolnym zbiorem punktów płaszczyzny), to $f(A)$ też jest figurą, która składa się z punktów $f(p)$ dla wszystkich punktów $p \in A$. Zauważmy też, że jeśli figura A jest fraktalem (zgodnie z przyjętą definicją), to figura $f(A)$ również nim jest.

Oznaczmy literą X zbiór wszystkich fraktali na płaszczyźnie i zajmijmy się problemem mierzenia odległości między fraktalami. W tym celu okreśmy *epsilonowe rozszerzenie figury*. Niech $A \in X$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy każdy punkt figury A nakryć kołem o promieniu ε (biorąc koło o środku w nakrywającym punkcie). Epsilonowe rozszerzenie figury A , które oznaczymy A_ε , jest sumą tych wszystkich kół. Dla $\varepsilon = 0$ przyjmujemy $A_\varepsilon = A$.

Dla dowolnych dwóch fraktali, A i B , istnieje takie nieujemne ε , że $A \subset B_\varepsilon$ oraz $B \subset A_\varepsilon$. Najmniejsze takie ε przyjmijmy za odległość figur A i B . W ten sposób w zbiorze X określiliśmy metrykę (tzw. *metrykę Hausdorffa*), którą oznaczymy symbolem ρ_X . Łatwo jest zauważyć, do czego są tu potrzebne założenia, że fraktale są niepuste i ograniczone. Założenie, iż są one domknięte, jest potrzebne m.in. po to, aby z równości $\rho_X(A, B) = 0$ wynikało, że $A = B$, i abyśmy mieli w zbiorze X wszystkie zbiory jednopunktowe.

Mamy zatem *dwie różne* przestrzenie metryczne: płaszczyznę E , w której odległość (punktów) mierzymy w zwykły sposób (tę metrykę oznaczymy ρ_E), i przestrzeń X z metryką ρ_X . Zauważmy, że dla dowolnych punktów $p, q \in E$ jest $\rho_X(\{p\}, \{q\}) = \rho_E(p, q)$. Możemy wybrać dowolne przekształcenia ciągłe f_1, \dots, f_n płaszczyzny E w siebie; przekształceniom tym odpowiadają przekształcenia f_1, \dots, f_n przestrzeni X w siebie. Użyjemy ich do określenia kolejnego przekształcenia $f: X \rightarrow X$, przyjmując, że dla dowolnego fraktala A jest

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^n f_i(A).$$

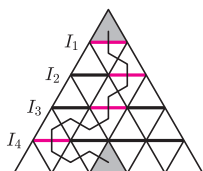
Mówimy, że przekształcenie g (dowolnej) przestrzeni metrycznej (z metryką ρ) jest *zwiężające*, jeśli istnieje taka stała $L < 1$, że dla dowolnych punktów x, y tej przestrzeni zachodzi $\rho(g(x), g(y)) \leq L\rho(x, y)$. Udowodnimy

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

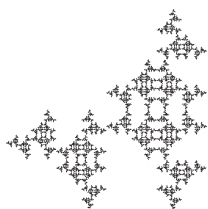


Rozwiązanie zadania M 1320.
Odpowiedź: 2010!

Oznaczmy poziome odcinki naszej planszy kolejno przez $I_1, I_2, \dots, I_{2010}$.



Zauważmy, że ścieżka przecina każdy z tych odcinków dokładnie raz. Ścieżka może przeciąć odcinek I_1 na jeden sposób, I_2 na 2 sposoby, I_3 na 3 itd., wreszcie I_{2010} na 2010 sposobów. Zatem ścieżek jest co najwyżej $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2010 = 2010!$ – nietrudno zobaczyć, że jest ich dokładnie tyle, gdyż każdy wybór jednego z k pododcinków odcinka I_k , który ma przeciąć ścieżka, definiuje poprawną ścieżkę.



Twierdzenie Hutchinsona. Przekształcenie $f: X \rightarrow X$ jest zwężające, jeśli wszystkie przekształcenia $f_1, \dots, f_n: E \rightarrow E$, użyte do zdefiniowania przekształcenia f , są zwężające.

Dowód. Przypuśćmy, że przekształcenia f_1, \dots, f_n są zwężające. Zatem istnieje taka liczba $L < 1$, że dla dowolnych punktów \mathbf{p} i \mathbf{q} oraz dla $i = 1, \dots, n$ jest $\rho_E(f_i(\mathbf{p}), f_i(\mathbf{q})) \leq L\rho_E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Niech $A, B \in X$ i niech $\delta = \rho_X(A, B)$. Stąd dla każdego punktu $\mathbf{p} \in A$ istnieje taki punkt $\mathbf{q} \in B$, że $\rho_E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq \delta$ (na przykład, należący do B środek koła o promieniu δ , w którym leży punkt \mathbf{p}). Ale wtedy dla każdego i mamy $\rho_E(f_i(\mathbf{p}), f_i(\mathbf{q})) \leq L\delta$, skąd wynika, że figura $f_i(A)$ jest zawarta w epsilonowym rozszerzeniu $f_i(B)$, dla $\varepsilon = L\delta$. Możemy więc napisać

$$f(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A) \subset \bigcup_{i=1}^n (f_i(B))_\varepsilon = (f(B))_\varepsilon$$

i podobnie dowodzimy, że $f(B) \subset (f(A))_\varepsilon$. Stąd

$$\rho_X(f(A), f(B)) \leq \varepsilon = L\delta = L\rho_X(A, B),$$

co kończy dowód. \square

Drugie z najważniejszych twierdzeń leżących u podstaw układów iterowanych przekształceń to

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym. W zupełnej przestrzeni metrycznej dowolne przekształcenie zwężające ma jednoznacznie określony punkt stały.

Nie będziemy dowodzi tu tego twierdzenia, podobnie jak faktu, że zbiór X z metryką ρ_X jest zupełną przestrzenią metryczną (choć nie są to trudne dowody). Punkt stały przekształcenia f , określonego zgodnie z opisem podanym wyżej, jest fraktalem, tj. pewną figurą niepustą, domkniętą i ograniczoną; oznaczmy ją literą F . Z jakich punktów składa się ta figura? Przekształcenia f_i są zwężające, a zatem każde z nich ma jeden punkt stały w płaszczyźnie E . Punkty te, oczywiście, należą do figury F . Weźmy dowolne (skończone) złożenie naszych przekształceń, $f_{i_k} \circ \dots \circ f_{i_1}$. Ono też jest przekształceniem zwężającym płaszczyzny E i jego punkt stały również należy do F . Można dowieść, że figura F jest domknięciem zbioru punktów stałych wszystkich takich złożzeń.

Poza ciągłością, a potem własnością zwężania, nie nakładaliśmy żadnych warunków na przekształcenia f_1, \dots, f_n . Najczęściej w praktyce IFS-y są budowane z przekształceń afinicznych. Każde afiniczne przekształcenie płaszczyzny może być reprezentowane za pomocą sześciu (czyli niewielu) liczb i obliczenia z nim związane zabierają bardzo mało czasu. Ma miejsce jeszcze jeden istotny fakt, którego ścisły dowód jest, niestety, dosyć żmudny: figura F zależy od liczb reprezentujących przekształcenia f_1, \dots, f_n w sposób ciągły. Bardzo małe zaburzenia tych liczb powodują zatem niewielkie zmiany otrzymanych obrazów.

Przejdźmy do praktyki: aby określić IFS, wybieramy na płaszczyźnie jeden duży trójkąt i n mniejszych; te mniejsze trójkąty przyjmujemy za obrazy trójkąta dużego, co określa poszczególne przekształcenia afiniczne.

Istnieje kilka metod tworzenia obrazu figury F ; wszystkie one polegają na iterowaniu przekształceń f_1, \dots, f_n , czyli stosowaniu ich do pewnej figury, a potem do jej obrazów w przekształceniach wykonanych wcześniej. Możemy zacząć od figury jednopunktowej. Najlepiej jest przyjąć, że składa się ona z punktu stałego dowolnego z przekształceń f_i – punkt ten łatwo jest znaleźć, rozwiązując układ dwóch równań liniowych, a jeśli zaczniemy od niego, to wszystkie kolejno otrzymane punkty będą należeć do figury F .

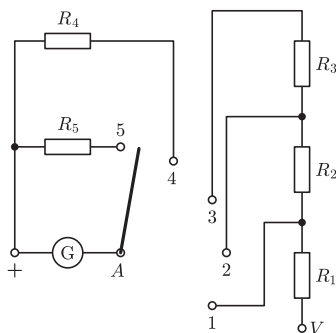
Metoda I. W każdej iteracji rysujemy bieżący punkt \mathbf{p}_k , a następnie losujemy liczbę $i_k \in \{1, \dots, n\}$ i obliczamy $\mathbf{p}_{k+1} = f_{i_k}(\mathbf{p}_k)$. Metoda ta potrzebuje bardzo mało pamięci. Jej wadą jest konieczność starannego dobrania rozkładu prawdopodobieństwa do losowania. Jeśli rozkład jest dobrze dobrany, to zwykle wystarczy wykonać od kilkunastu tysięcy do kilkuset tysięcy iteracji.



Rozwiązanie zadania F 792.

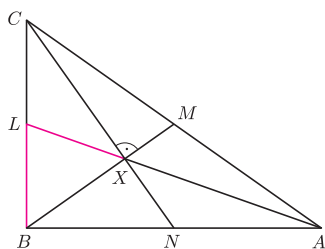
Przykładowe rozwiązanie z przełącznikiem pięciopozycyjnym przedstawiono na rysunku. Dla położenia 1–3 przyrząd można wykorzystać jako woltomierz o zaciskach „+” i V , a dla położenia 4 i 5 jako amperomierz o zaciskach „+” i A .

$R_1 = 33 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 0,3 \text{ M}\Omega$, $R_3 = 3 \text{ M}\Omega$, $R_4 = 0,181 \Omega$, $R_5 = 0,036 \Omega$.





Rozwiązanie zadania M 1319.
Oznaczmy przez X środek ciężkości trójkąta ABC , czyli punkt przecięcia odcinków CN i BM .



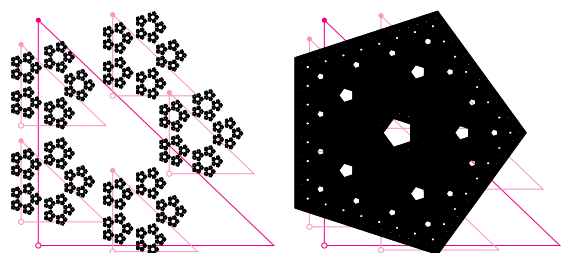
Zauważmy, że L jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCX . Zatem $LX = BL = \frac{1}{2}$. Ponieważ X jest środkiem ciężkości, więc $AL = 3LX = \frac{3}{2}$.

Metoda II. Użyjemy kolejki, do której wstawimy punkt p_0 . W każdej iteracji wyjmujemy punkt z kolejki, obliczamy jego obrazy we wszystkich przekształceniach f_1, \dots, f_n , każdy z nich wstawiamy do kolejki i rysujemy. Potrzebna jest zatem kolejka mogąca pomieścić prawie tyle punktów, ile chcemy wyznaczyć (zwykle co najmniej kilka tysięcy).

Metoda III. Podobnie jak w metodzie drugiej, użyjemy kolejki; nowością jest to, że wcześniej ustalamy wielkość (w pikselach) obrazu, który chcemy uzyskać. Obliczenia prowadzimy w układzie współrzędnych obrazu i po obliczeniu każdego punktu zaokrąglamy jego współrzędne do liczb całkowitych. Do kolejki wstawiamy tylko te piksele, które nie były zamalowane wcześniej. W tej metodzie wykonamy skończenie wiele iteracji – algorytm zakończy działanie po opróżnieniu kolejki. Otrzymany rysunek jest najlepszym przybliżeniem figury F przy ustalonej rozdzielczości rastra. Stosując tę i następną metodę, należy zadbać o to, aby cała figura F zmieściła się na obrazie.

Metoda IV. Rysujemy n poteksturowanych równoległoboków, będących obrazami prostokąta, w którym tworzymy obraz, w przekształceniach f_i ; otrzymanego obrazu używamy jako teksturę w następnej iteracji. W tej metodzie wystarczy wykonać kilkanaście lub najwyżej kilkadziesiąt iteracji. Kolejka nie jest tu potrzebna, ale bardzo się przydaje zrównoleglenie obliczeń przy użyciu nowoczesnej karty graficznej.

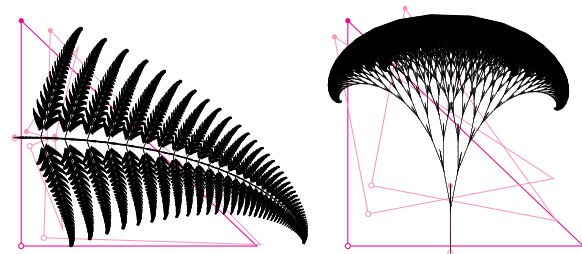
Zobaczmy kilka przykładowych obrazków.



Rys. 1

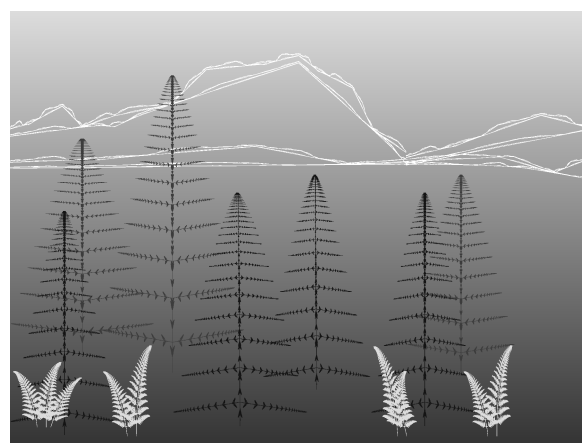
Na rysunku 1 mamy dwa fraktale otrzymane za pomocą układów pięciu przekształceń. Każde przekształcenie jest złożeniem jednokładności o skali s i przesunięcia, przemieszczającego pewien punkt na jeden z pięciu punktów rozmieszczonych równomiernie na okręgu. Z lewej strony mamy $s = 0,36$, a z prawej $s = 0,5$. Zwiększając dalej s , otrzymalibyśmy pięciokąt foremny.

Najbardziej znanymi fraktalami, które można otrzymać, iterując przekształcenia afiniczne, są paprocie Barnsleya, generowane przez układy czterech przekształceń, ale można też „hodować” w ten sposób inne rośliny; już dla $n = 3$ można uzyskać ciekawe efekty (rys. 2).



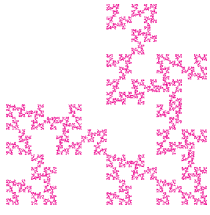
Rys. 2

Figury o skomplikowanym kształcie można zatem reprezentować przy użyciu bardzo niewielkiej ilości danych. Obrazek na rysunku 3 przedstawia figury wygenerowane za pomocą pewnej liczby IFS-ów, których opis składa się z dwustu kilkudziesięciu liczb rzeczywistych.



Rys. 3

Rozwinięciem układów iterowanych przekształceń są algorytmy fraktalnej kompresji obrazów – są to jedne z najskuteczniejszych stosowanych obecnie technik kompresji. Umożliwiają one zapisywanie reprezentacji obrazów w małej ilości miejsca, a potem odtwarzanie tych obrazów z małym błędem. Oczywiście różnicą wobec IFS-ów jest przejście od określonych na płaszczyźnie funkcji przyjmujących tylko dwie wartości (punkt albo należy, albo nie należy do ustalonej figury) do funkcji przyjmujących wartości rzeczywiste. Tak samo, jak w przypadku fraktali generowanych przez IFS-y, gdzie krótki ciąg liczb reprezentujących poszczególne przekształcenia afiniczne umożliwia wygenerowanie obrazu figury o skomplikowanym kształcie, zapisane przez procedurę kompresji dane reprezentują pewne przekształcenie zwięźające zbioru funkcji (obrazów) w siebie. Punktem stałym tego przekształcenia jest przybliżenie obrazu poddanego kompresji. Odtwarzanie obrazu polega na wykonaniu kilku lub kilkunastu iteracji tego przekształcenia.



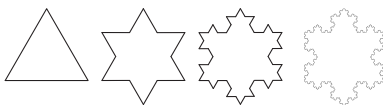
Jak wygląda zbiór π -wymiarowy, czyli o wymiarze fraktali

Krzysztof BARAŃSKI*

Co to znaczy, że linia prosta jest jednowymiarowa, płaszczyzna – dwuwymiarowa, a przestrzeń, w której żyjemy – trójwymiarowa? Można na to pytanie odpowiedzieć w ten sposób: na prostej możemy poruszać się w jednym kierunku (właśnie wzdłuż tej prostej), na płaszczyźnie – w dwóch niezależnych kierunkach, a w przestrzeni – w trzech (prawy-lewo, przód-tył, góra-dół). (Pozostaje tylko sprecyzować, co to są niezależne kierunki, co nie jest już takie oczywiste.) Mówiąc nieco inaczej, do opisu punktu na prostej wystarczy jeden parametr rzeczywisty (jedna współrzędna), punkty na płaszczyźnie mają dwie współrzędne itd. Matematycy posługują się pojęciem przestrzeni n -wymiarowej (dla dowolnej liczby naturalnej n), która jest zbiorem punktów opisanych przez n współrzędnych.

Sytuacja jest trudniejsza, gdy chcemy powiedzieć, jaki jest wymiar bardziej skomplikowanych zbiorów. Naturalne jest przyjąć, że okrąg jest obiektem jednowymiarowym, bo może być sparametryzowany jedną współrzędną (kątem), a sfera (powierzchnia kuli) i torus (powierzchnia dętki) mają wymiar 2, bo parametryzują się dwiema współrzędnymi kątowymi. Są to przykłady tzw. gładkich rozmaitości, których wymiar jest łatwo określić jako liczbę parametrów potrzebnych do ich opisanie. Ogólniej, istnieje pojęcie *wymiaru topologicznego*, który można zdefiniować dla szerokiej klasy zbiorów (patrz artykuł na stronie 7 bieżącego numeru *Delty*). Taki wymiar jest zawsze liczbą całkowitą.

Pod koniec XIX wieku w matematyce zaczęły pojawiać się niespotykane wcześniej obiekty geometryczne, charakteryzujące się skomplikowanym kształtem i zjawiskiem „samopodobieństwa” (podobieństwa dowolnie małych fragmentów do całości zbioru). Tego rodzaju zbiory nazywamy dziś *fraktalami*. Aby lepiej opisać geometrię takich obiektów, wykorzystuje się różne odmiany pojęcia wymiaru, zwane czasami wymiarami fraktalnymi. W odróżnieniu od „zwykłego” wymiaru, mogą one przyjmować wartości niecałkowite. Przyjrzyjmy się teraz na kilku przykładach, jak można takie wymiary zdefiniować i jak je obliczać.



Aby skonstruować krzywą Kocha, rysujemy trójkąt równoboczny o boku 1 i do każdego jego boku stosujemy następującą procedurę: dzielimy odcinek na trzy równe części, rysujemy brzeg trójkąta równobocznego o boku $1/3$ (skierowanego „na zewnątrz” dużego trójkąta), którego podstawą jest środkowa część odcinka, i usuwamy tę podstawę. W ten sposób z każdego odcinka uzyskujemy łamaną złożoną z 4 odcinków o długości $1/3$ – w sumie łamaną zamkniętą złożoną z 12 takich odcinków. Następnie stosujemy opisaną powyżej procedurę do każdego z tych 12 odcinków, uzyskując łamaną zamkniętą złożoną z 48 odcinków o długości $1/9$. Postępujemy tak dalej i po n krokach mamy łamaną zamkniętą K_n złożoną z $3 \cdot 4^n$ odcinków o długości $1/3^n$. Można wykazać, że przy $n \rightarrow \infty$ krzywe K_n dążą do krzywej zamkniętej K , którą nazywamy krzywą Kocha.

Jednym z pierwszych fraktali, który pojawił się w matematyce, była *krzywa Kocha*, zwana też *płatkiem śniegu* (patrz rysunek). Przykład ten został podany przez szwedzkiego matematyka Helge von Kocha w 1904 roku. Jest to samopodobna krzywa zamknięta bez samoprzecięć, która ma nieskończoną długość i nie ma stycznej w żadnym punkcie. Można zauważyć, że chociaż krzywa Kocha jest topologicznie obiektem jednowymiarowym, to zajmuje „więcej miejsca” na płaszczyźnie niż zwyczajna gładka krzywa. Aby opisać liczbowo to zjawisko, można wprowadzić pojęcie *wymiaru samopodobieństwa* (ang. *similarity dimension*). Zauważmy, że jednowymiarowy odcinek ma następującą własność: dla każdej liczby naturalnej k jest sumą k odcinków o długości k razy mniejszej, o rozłącznych wnętrzach (tzn. stykających się tylko końcami). Każdy z tych odcinków jest obrazem dużego odcinka przy podobieństwie o skali $1/k$. Mamy więc

$$sN = 1,$$

gdzie $s = 1/k$ to skala podobieństwa, a $N = k$ to liczba przeskalowanych kopii dających w sumie cały zbiór. Spójrzmy teraz na dwuwymiarowy kwadrat: jest on sumą $N = k^2$ kwadratów o rozłącznych wnętrzach (stykających się tylko brzegiem), które są obrazami dużego kwadratu przy podobieństwach o skali $1/k$. Mamy zatem

$$s^2N = 1,$$

a więc wykładnik przy skali s w powyższym wzorze to wymiar obiektu (podobnie w poprzednim wzorze wykładnik przy s , równy 1, jest wymiarem odcinka). Dla trójwymiarowej kostki mamy, analogicznie,

$$s^3N = 1$$

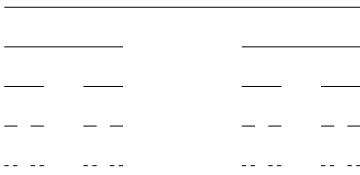
dla $s = 1/k$ i $N = k^3$ (kostka jest sumą k^3 kostek o boku k razy mniejszym, o rozłącznych wnętrzach) i znowu wykładnik przy skali s jest równy wymiarowi zbioru.

A jak jest dla krzywej Kocha? Wygodnie jest podzielić ją na trzy części (każda powstała z jednego boku dużego trójkąta) i rozpatrzyć każdą z nich osobno. Zauważmy, że taka część jest sumą czterech swoich kopii (stykających się tylko w pojedynczych punktach) przy odpowiednich podobieństwach o skali $1/3$ (patrz też strona 15).

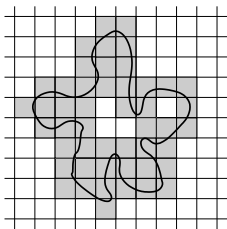
*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Trójkąt Sierpińskiego, opisany przez Wacława Sierpińskiego w 1915 roku, jest zdefiniowany w następujący sposób. Zaczynamy od trójkąta równobocznego o boku 1, dzielimy ten trójkąt na cztery trójkąty równoboczne o boku $1/2$ i usuwamy wnętrze środkowego. Następnie stosujemy tę samą procedurę do każdego z pozostałych trzech trójkątów, potem do kolejnych 9 trójkątów o boku $1/4$ i tak dalej. Po n krokach konstrukcji uzyskujemy zbiór T_n złożony z 3^n trójkątów o boku $1/2^n$. Trójkąt Sierpińskiego to część wspólna $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$.



Zbiór Cantora został zdefiniowany przez Geорга Cantora w 1883 roku. Konstrukcja jest następująca. Odcinek $[0, 1]$ dzielimy na trzy odcinki o długości $1/3$ i usuwamy wnętrze środkowego odcinka, czyli otwarty odcinek $(1/3, 2/3)$. Następnie tę samą procedurę stosujemy do pozostałych dwóch odcinków, potem do pozostałych czterech odcinków o długości $1/9$ i tak dalej. Po n krokach konstrukcji uzyskujemy zbiór C_n składający się z 2^n rozłącznych odcinków o długości $1/3^n$. Zbiór Cantora to $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.



Obliczanie wymiaru pudełkowego krzywej.

Górna (dolna) granica funkcji $f(x)$ przy $x \rightarrow a$ to największa (najmniejsza) z granic ciągu $f(x_n)$ przy dowolnym wyborze ciągu $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$.

W latach 60. XX w. obliczono (oczywiście w przybliżeniu) wymiar pudełkowy brzegu Wielkiej Brytanii, mierząc go z coraz większą dokładnością (od 200 km do 20 m). Okazało się, że jest on większy od 1 i wynosi około 1,2.

Wynika to wprost z konstrukcji płatka śniegu. Jeśli więc wymiar takiej części byłby równy w , to powinno zachodzić

$$s^w N = 1$$

dla $s = 1/3$ i $N = 4$, czyli

$$4\left(\frac{1}{3}\right)^w = 1.$$

To równanie jest spełnione dla $w = \log 4 / \log 3 \approx 1,261859$ (zauważmy, że można tu wziąć logarytm o dowolnej podstawie, co nie ma wpływu na wynik). Tę właśnie liczbę w nazywamy wymiarem samopodobieństwa krzywej Kocha. Jest to liczba leżąca pomiędzy 1 i 2, co odzwierciedla wysoki „stopień skomplikowania” tej krzywej.

Taki wymiar możemy łatwo obliczyć dla różnych samopodobnych zbiorów, które są sumą kilku swoich kopii o rozłącznych „wnętrzach”, przy podobieństwach o danej skali. Jeśli mamy N takich kopii, a skala jest równa s , to ten wymiar jest równy $-\frac{\log N}{\log s}$. Na przykład, wymiar samopodobieństwa trójkąta Sierpińskiego jest równy $\log 3 / \log 2 \approx 1,584962$, a dla zbioru Cantora jest on równy $\log 2 / \log 3 \approx 0,630929$ (patrz rysunki).

Możemy jeszcze uogólnić nasz wzór na przypadek, gdy badany obiekt jest sumą N swoich kopii o rozłącznych „wnętrzach”, uzyskanych przez podobieństwa o różnych skalach, powiedzmy s_1, \dots, s_N , gdzie $s_i \in (0, 1)$. Wymiar samopodobieństwa jest wtedy taką liczbą w , dla której zachodzi

$$s_1^w + \dots + s_N^w = 1.$$

Taka liczba w zawsze istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie (dlaczego?).

Wadą wymiaru samopodobieństwa jest to, że jest zdefiniowany tylko dla szczególnego rodzaju zbiorów, uzyskanych przez procedury podobne do opisanych powyżej. Dla innych zbiorów potrzebne jest więc ogólniejsze pojęcie wymiaru „fraktalnego”.

Zdefiniujemy teraz *wymiarem pudełkowy* (ang. *box dimension*, *box-counting dimension*), zwany też *wymiarem Minkowskiego* lub *Minkowskiego-Bouliganda*. Oznaczany jest zwykle \dim_B lub BD.

Weźmy pod uwagę dowolny ograniczony zbiór A na płaszczyźnie. Dla każdej liczby $\delta > 0$ istnieje taka liczba naturalna N , że możemy pokryć nasz zbiór N kwadratami o boku δ (dlaczego?). Niech $N(\delta)$ będzie najmniejszą taką liczbą N . Wtedy wymiar pudełkowy zbioru A jest równy

$$\dim_B(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta}$$

(podobnie jak poprzednio, ta wartość nie zależy od wyboru podstawy logarytmu). Nietrudno wykazać (jak?), że wynik będzie ten sam, jeśli zamiast dowolnych kwadratów o boku δ weźmiemy kwadraty tworzące na płaszczyźnie kratę o boku δ (patrz rysunek). Możemy też zastąpić kwadraty kołami o średnicy δ .

Jeśli zbiór jest podzbiorem prostej, to zamiast kwadratów bierzemy odcinki o długości δ , a jeśli jesteśmy w przestrzeni trójwymiarowej, to kwadraty zastępujemy kostkami o boku δ lub kulami o średnicy δ . Ogólnie, definicję rozszerza się na ograniczone podzbiory przestrzeni n -wymiarowej.

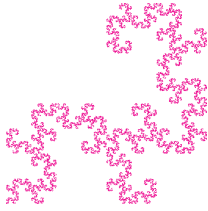
Może się zdarzyć, że granica w definicji wymiaru pudełkowego nie istnieje. Wtedy trzeba zastąpić zwykłą granicę przez granicę górną lub dolną, uzyskując tzw. górny lub dolny wymiar pudełkowy.

Można łatwo sprawdzić (jak?), że wymiar pudełkowy odcinka jest równy 1, kwadrat ma wymiar pudełkowy 2 i tak dalej. A jaki jest wymiar pudełkowy zbioru Cantora C ? Dla $\delta = 1/3^n$ mamy $N(1/3^n) \leq 2^n$, bo C jest pokryty przez 2^n odcinków o długości $1/3^n$, powstałych po n krokach konstrukcji. Z drugiej strony, końce tych wszystkich odcinków należą do zbioru Cantora, a „dziury” między nimi są długości co najmniej $1/3^n$ i łatwo zauważyć, że $N(1/3^n) \geq 2^n$. Mamy więc $N(1/3^n) = 2^n$, więc

$$\frac{\log N(1/3^n)}{-\log(1/3^n)} = \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} = \frac{\log 2}{\log 3},$$

co jest równe wymiarowi samopodobieństwa. Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że przy obliczaniu granicy w definicji wymiaru pudełkowego wystarczy brać $\delta = 1/3^n$, co daje $\dim_B(C) = \log 2 / \log 3$. Podobnie wyznaczamy wymiar pudełkowy trójkąta Sierpińskiego i krzywej Kocha. We wszystkich tych przykładach (i podobnych konstrukcjach) wymiar pudełkowy jest równy wymiarowi samopodobieństwa.

Zbiór przeliczalny to zbiór, którego wszystkie elementy można ustawić w ciąg a_1, a_2, \dots . Takim zbiorem jest np. zbiór liczb wymiernych.



Średnica zbioru U (ozn. $\text{diam } U$) to supremum odległości dowolnych dwóch punktów z U .

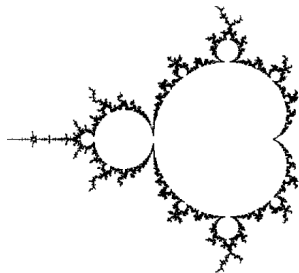
Supremum zbioru $X \subset \mathbb{R}$ (ozn. $\sup X$) to najmniejsza liczba nie mniejsza od wszystkich liczb ze zbioru X . Jeśli takiej liczby nie ma, to przyjmujemy $\sup X = +\infty$.

Infimum zbioru $X \subset \mathbb{R}$ (ozn. $\inf X$) to największa liczba nie większa od wszystkich liczb ze zbioru X . Jeśli takiej liczby nie ma, to przyjmujemy $\inf X = -\infty$.

Dla $s = n$ miara Hausdorffa jest równoważna „zwykłej” mierze Lebesgue’a w \mathbb{R}^n .

Zadanie. Wyznaczyć wymiar pudełkowy i wymiar Hausdorffa zbiorów $A = \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ i $B = \{1/2^n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\text{diam } A = \text{diam } B = 0$
 $\text{diam } B = \text{diam } A = 1 \setminus 0$, $\text{diam } B = 0$



W 1991 roku Mitsuhiro Shishikura udowodnił, że brzeg zbioru Mandelbrota ma wymiar Hausdorffa równy 2.

Wymiar pudełkowy nie ma jednak najlepszych własności matematycznych. Na przykład, okazuje się, że wymiar pudełkowy domknięcia zbioru A jest taki sam, jak wymiar samego zbioru A , co implikuje w szczególności, że zbiór liczb wymiernych w odcinku $[0, 1]$ ma wymiar pudełkowy 1. Przy „porządnej” definicji wymiaru każdy przeliczalny zbiór powinien mieć wymiar zero! Jakie więc pojęcie fraktalnego wymiaru, które zadowoli wymagającego matematyka?

Takim wymiarem jest *wymiar Hausdorffa*, zwany też czasami *wymiarem Hausdorffa-Besicovitcha*. Jego definicja jest jednak znacznie bardziej skomplikowana niż poprzednie. Omówimy ją teraz.

Niech A będzie dowolnym podzbiorem n -wymiarowej przestrzeni \mathbb{R}^n . Ustalmy $s > 0$. Weźmy pod uwagę dowolne przeliczalne pokrycie zbioru A , to znaczy zbiory $U_1, U_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$, takie że $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. (Zamiast dowolnych zbiorów można wziąć kule w \mathbb{R}^n , to znaczy odcinki na prostej dla $n = 1$, koła na płaszczyźnie dla $n = 2$, zwykłe kule w przestrzeni trójwymiarowej dla $n = 3$ itd.) Dla danej liczby $\delta > 0$ definiujemy

$$H_{\delta}^s(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s,$$

gdzie diam oznacza średnicę zbioru, a infimum jest wzięte po wszystkich takich pokryciach $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ zbioru A , że $\text{diam } U_i < \delta$ dla wszystkich U_i .

Bierzemy teraz

$$H^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_{\delta}^s(A).$$

Ta granica zawsze istnieje (być może równa $+\infty$), bo $H_{\delta}^s(A)$ maleje przy wzroście δ . Liczbę $H^s(A)$ nazywamy s -tą *miarą (zewnątrzną) Hausdorffa* zbioru A . Okazuje się, że istnieje taka liczba $t \geq 0$, że $H^s(A) = +\infty$ dla wszystkich $s < t$ i $H^s(A) = 0$ dla wszystkich $s > t$. Tę liczbę t nazywamy *wymiarem Hausdorffa* zbioru A i oznaczamy $\dim_H(A)$ lub $\text{HD}(A)$.

Wymiar Hausdorffa ma dobre właściwości matematyczne. Można sprawdzić, że $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$ i $\dim_H(A) = 0$ dla każdego przeliczalnego zbioru A . Poza tym, $\dim_H(M) = m$ dla każdej gładkiej różnicowości m -wymiarowej M . Mamy też $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup\{\dim_H(A_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dla dowolnych zbiorów A_1, A_2, \dots .

Wadą wymiaru Hausdorffa jest to, że zazwyczaj jest trudny do obliczenia! Już obliczenie tego wymiaru dla zbioru Cantora nastęrcza trudności, a przypadek trójkąta Sierpińskiego czy krzywej Kocha wymaga zastosowania odpowiednich narzędzi z geometrycznej teorii miary, teorii potencjału lub transformaty Fouriera. Pewnym ułatwieniem jest nierówność

$$\dim_H(A) \leq \dim_B(A),$$

która zachodzi dla wszystkich zbiorów A (jeśli granica w definicji wymiaru pudełkowego nie istnieje, to bierzemy dolny wymiar pudełkowy). W przypadku zbioru Cantora, krzywej Kocha i trójkąta Sierpińskiego mamy równość wymiarów Hausdorffa i pudełkowego, jednak taka sytuacja nie zawsze zachodzi (patrz np. zadanie na marginesie).

Odnotujmy jeszcze ważne twierdzenie Szpilrajna, mówiące o tym, że wymiar Hausdorffa jest większy lub równy wymiarowi topologicznemu. Z tego powodu fraktale można zdefiniować jako zbiory, dla których ta nierówność jest ostra.

Jest jeszcze kilka innych wymiarów fraktalnych, takich jak wymiar Rényi, wymiar korelacyjny czy wymiar pakujący, ale nie będziemy tu o nich mówili.

Na koniec odpowiemy na pytanie zawarte w tytule: jak może wyglądać zbiór π -wymiarowy? Aby zdefiniować taki zbiór, przeprowadzimy konstrukcję podobną jak dla zbioru Cantora, z tym że w każdym kroku będziemy zmieniać liczbę wyjętych odcinków i skalę zmniejszania. Niech dla każdej liczby naturalnej n zbiór $C_n \subset [0, 1]$ składa się z N_n rozłącznych odcinków o długości $d_n = N_n^{1/(3-\pi)}$ każdy, rozłożonych tak, że odległości między środkami kolejnych odcinków są równe $1/N_n$. Definiujemy zbiór „typu Cantora” jako $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Okazuje się, że jeżeli liczby N_n rosną dostatecznie szybko wraz ze wzrostem n , to wymiar Hausdorffa zbioru C jest równy $\pi - 3$ (nie dowodzimy tutaj tego, zauważmy tylko, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N_n}{-\log d_n} = \pi - 3$). Wtedy zbiór $C \times \mathbb{R}^3$ (iloczyn kartezjański zbioru C i przestrzeni trójwymiarowej), zawarty w przestrzeni czterowymiarowej, ma wymiar Hausdorffa równy π .

Kilka słów o wymiarze

Ideą teorii wymiaru jest przyporządkowanie przestrzeni X pewnej liczby całkowitej (wymiaru X) tak, by było to zgodne z intuicyjnym znaczeniem tego słowa. Dla uproszczenia skoncentrujemy się na podzbiórach przestrzeni Hilberta, która zawiera, między innymi, przestrzenie euklidesowe wszystkich wymiarów.

Oczywiste jest, że zbiór złożony ze skończenie wielu punktów ma wymiar 0, prosta euklidesowa \mathbb{R} i odcinek – wymiar 1, płaszczyzna \mathbb{R}^2 i koło – wymiar 2, a przestrzeń trójwymiarowa \mathbb{R}^3 i pełna kula – wymiar 3. Mając do czynienia z bardzo prostymi obiektami, uznajemy, że wymiar jest równy odpowiednio 1, 2 lub 3 wtedy, gdy uda się w nim umieścić odcinek, dwa lub trzy odcinki wzajemnie prostopadłe. Zastanówmy się, jakie własności powinno mieć przyporządkowanie zbiorowi jego wymiaru. Wydaje się przede wszystkim, że wymiar powinien być niezmiennikiem topologicznym. Jeżeli pełny kwadrat ma wymiar 2, to wymiar 2 powinien mieć także ten sam kwadrat po tym, jak się go powygina i porozciąga w różnych kierunkach. Spodziewamy się także, że wymiar przestrzeni $X = X_1 \cup X_2$, będącej sumą swoich domkniętych podzbiórów X_1, X_2 o wymiarach nie większych niż ustalona liczba n , także nie może być większy od n . Wynika stąd, że wymiar zbioru nie może być mniejszy niż wymiary jego podzbiórów. Nie może więc budzić także żadnych wątpliwości fakt, że wymiar wielościanu musi być równy największemu spośród wymiarów wszystkich sympleksów (odcinków, trójkątów, czworościanów itd.), których jest sumą (jest sumą skończenie wielu).

W wielu sytuacjach pojawiają się jednak obiekty bardziej złożone. Figury mogą np. być tak skomplikowane, że nie będą zawierać nie tylko żadnego odcinka, ale nawet podzbiór homeomorficznego z odcinkiem, a powinniśmy wiedzieć, w jaki sposób stwierdzić, czy są jedno-, dwu-, trój- czy więcej wymiarowe.

W 1912 roku Henri Poincaré zaproponował, by definicja wymiaru miała charakter indukcyjny oraz odwoływała się do własności rozcinania figury. Punktem wyjścia jego rozważań była obserwacja, że do rozcięcia prostej figury trójwymiarowej na części potrzeba powierzchni, do rozcięcia figury wymiaru 2 potrzebne są linie, a na to, by podzielić na części linię, potrzeba punktów.

Precyzyjną indukcyjną definicję wymiaru sformułowali niezależnie Paweł Uryson (1922) i Karl Menger (1923). Przyjęli oni, że zbiór pusty jest jedynym zbiorem o wymiarze równym -1 . Jeżeli n jest liczbą naturalną lub 0, to wymiar $\dim X$ jest nie większy niż n , gdy dla każdego punktu $x \in X$ oraz każdego jego otoczenia U w X istnieje otwarte otoczenie $V \subset U$ tego punktu, którego ograniczenie $\text{Fr}(V)$ ma wymiar $\dim \text{Fr}(V) \leq n - 1$. Jeżeli $\dim X \leq n$ i nie jest prawdą, że $\dim X \leq n - 1$, to przyjmujemy, że $\dim X = n$. Jeżeli $\dim X \neq n$ dla $n = -1, 0, 1, \dots$, to mówimy, że wymiar X jest nieskończony i piszemy $\dim X = \infty$.

Konsekwencją tej definicji jest np. to, że przestrzenie euklidesowa \mathbb{R}^n i kostka wymiaru n nie mogą być rozcinane przez zbiory o wymiarze mniejszym niż $n - 1$, natomiast podzbiór \mathbb{R}^n może sam mieć wymiar n tylko wtedy, gdy ma punkty wewnętrzne, czyli zawiera kulę otwartą przestrzeni euklidesowej.

Mówimy, że zbiór L jest przegródką między rozłącznymi podzbiórami A i B zbioru X albo przegródką oddzielającą A od B , jeżeli $X \setminus L = U \cup V$, gdzie U i V są takimi rozłącznymi otwartymi podzbiórami X , że $A \subset U$, $B \subset V$. Oznacza to w szczególności, iż L jest domkniętym podzbiorem X . Odcinek łączący środki dwóch przeciwległych boków kwadratu jest przegródką oddzielającą dwa pozostałe boki. Żaden podzbiór kwadratu, położony w jego wnętrzu, nie może, oczywiście, ich oddzielać.

Wymiar przestrzeni można scharakteryzować, używając pojęcia przegródek. Nierówność $\dim X \leq n$ zachodzi mianowicie wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych rozłącznych podzbiórów domkniętych A i B istnieje przegródka L oddzielająca A od B o wymiarze $\dim L \leq n - 1$.

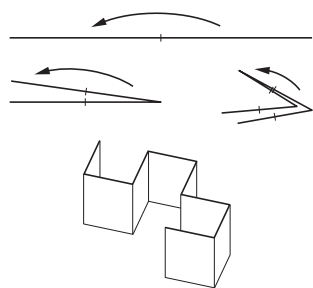
Na płaszczyźnie euklidesowej jest znacznie więcej miejsca niż na prostej i mniej niż w przestrzeni trójwymiarowej. Uogólniając to, możemy się spodziewać, że w przestrzeni o większym wymiarze musi być więcej miejsca niż w przestrzeni o wymiarze mniejszym. Jeżeli X jest przestrzenią zwartą, to okazuje się, na przykład, że nierówność $\dim X \leq n$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego pokrycia \mathcal{U} przestrzeni X zbiorami otwartymi można znaleźć drobniejsze pokrycie otwarte \mathcal{V} , które daje się rozłożyć na sumę $n + 1$ rodzin $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$, takich że zbiory należące do jednej ustalonej rodziny \mathcal{V}_i są parami rozłączne ($i = 0, 1, \dots, n$). Można także wykazać, iż nierówność $\dim X \leq n$ jest równoważna temu, że dla każdego skończonego pokrycia otwartego przestrzeni X można znaleźć takie drobniejsze pokrycie skończone, że przecięcie każdych $n + 2$ różnych zbiorów otwartych należących do niego jest zbiorem pustym.

Można się zastanawiać, czy lepszym i bliższym intuicji podejściem do problemu sformułowania ogólnej definicji wymiaru nie byłaby redukcja naszego zadania do badania wymiarów wielościanów coraz lepiej aproksymujących przestrzeń, której wymiar chcemy określić. Okazuje się jednak, że idąc tą drogą, otrzymuje się dokładnie to samo pojęcie, co poprzednio. Zbiór zwarty X ma w szczególności wymiar nie większy niż n wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przekształcenie f_ε w przestrzeń o tej własności, że punkt x oraz jego obraz $f_\varepsilon(x)$ są oddalone o mniej niż ε , natomiast obraz całego $f_\varepsilon(X)$ jest wielościanem wymiaru co najwyżej n .

Stawomir NOWAK
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski

Fraktalny świat papierowej tasiemki

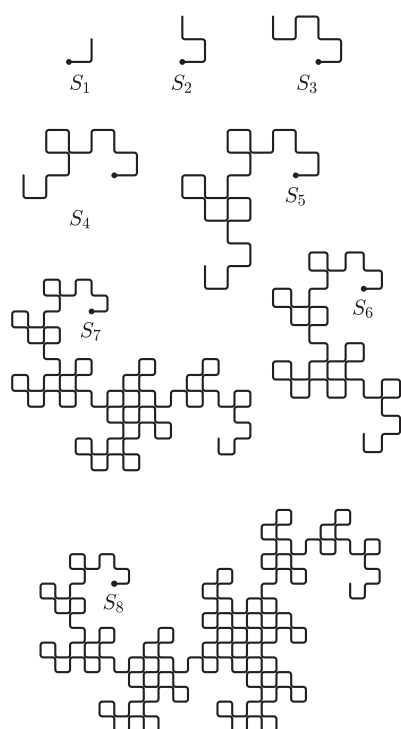
Tomasz IDZIASZEK



Rys. 1. Składanie paska papieru.

Weźmy długi pasek papieru i złożmy go na pół. Następnie, nie rozkładając, złożmy go w tę samą stronę jeszcze dwa razy. W końcu, rozprostujemy złożenia tak, by papier zgiął się pod kątem 90° . Otrzymamy obiekt jak na rysunku 1.

Jeśli przerysujemy kształt, który przyjmuje górna krawędź tasiemki, dostaniemy ciekawą krzywą. Gdy złożymy papier nie trzy, ale cztery lub więcej razy, krzywa, jaką otrzymamy, stanie się bardziej złożona (rys. 2). Coraz bardziej przypominać będzie brodzącego w wodzie smoka, stąd też jej nazwa – *smocza krzywa*. Po raz pierwszy była badana w roku 1966 przez fizyków z NASA: Johna Heighwaya i Williama Hartera. Do jej popularyzacji przyczynili się Martin Gardner w swoich *Grach Matematycznych* oraz pisarz Michael Crichton: jeden z bohaterów jego powieści *Park Jurajski*, specjalizujący się w teorii chaosu matematyk Ian Malcolm, ilustrował za pomocą smoczej krzywej swoje przemyślenia na temat przyszłości tak skomplikowanych przedsięwzięć, jak wskrzeszanie wymarłych gadów. Swoją drogą, krzywa S_8 równie dobrze jak smoka przypomina dinozaura.



Rys. 2. Rodzina smoczyczych krzywych; S_n jest krzywą rzędu n . Poniżej fragment S_{14} .

Jeśli całkowicie rozprostujemy tasiemkę, to na jej powierzchni dostrzeżemy rowki i górki. Odpowiadają one zakrętom, które będziemy brać, jeśli poczynając od wyróżnionego końca krzywej, będziemy ją rysować ołówkiem: rowek to zakręt w lewo (L), górka – w prawo (P). Jeśli zgięliśmy papier n razy, wskutek czego otrzymaliśmy krzywą rzędu n , to zrobimy $2^n - 1$ zakrętów. Oznaczmy przez K_n słowo składające się z liter L i P, opisujące ciąg zakrętów na krzywej rzędu n . Mamy:

$$K_1 = L, \quad K_2 = LLP, \quad K_3 = LLPLLPP.$$

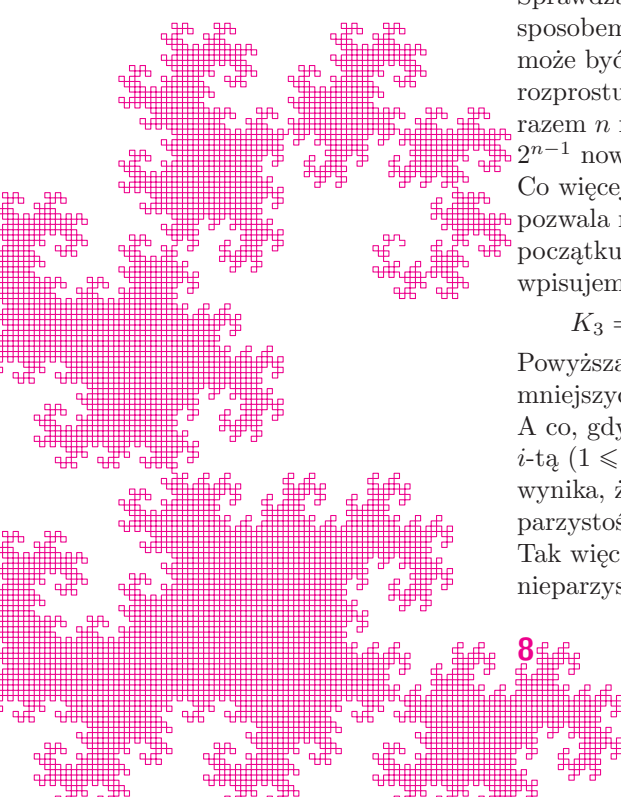
Ponieważ nasze możliwości składania papieru są dość ograniczone, spróbujemy znaleźć jakąś regułę opisującą słowo K_n , która pozwoli nam rysować dowolnie duże krzywe bez konieczności proszenia o pomoc specjalisty od origami. Złożymy tasiemkę n razy, a następnie rozprostujemy ostatnie $n - 1$ złożenia. Na powierzchni widzimy $2^{n-1} - 1$ zagięć, które powstały ze złożenia paska $n - 1$ razy, zatem opisuje je słowo K_{n-1} . Jeśli rozprostujemy pasek papieru n -ty raz, to będą one pierwszymi zagięciami, zatem słowo K_n zawsze zaczyna się od K_{n-1} . Zauważmy ponadto, że rowki na jednej połowie papieru odpowiadają górkom na drugiej połowie i vice versa. Innymi słowy, jeśli i -tym zagięciem (dla $1 \leq i < 2^{n-1}$) w K_n jest rowek, to i -tym zagięciem *od końca* będzie górka. Wprowadźmy operację r , która odwraca kolejność liter w słowie i jednocześnie zamienia litery L z P, dla przykładu $r(K_2) = LPP$. Wtedy

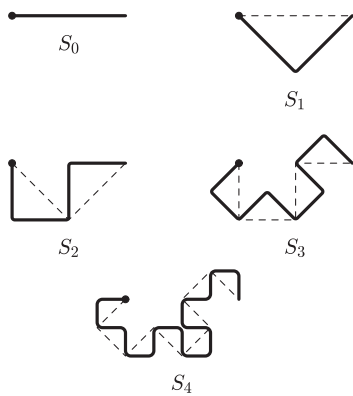
$$K_n = K_{n-1} L r(K_{n-1}).$$

Sprawdzamy, że istotnie $K_2 = K_1 L r(K_1) = L L P$ oraz $K_3 = LLP L r(LLP)$. Tym sposobem uzyskaliśmy rekurencyjny wzór na słowo K_n . Okazuje się jednak, że może być ono opisane również w inny sposób. Złożymy pasek papieru $n - 1$ razy, rozprostujemy go, a następnie pomalujemy zagięcia. Następnie złożymy go znowu, tym razem n razy, i rozprostujemy. Zauważmy, że n -te złożenie spowodowało powstanie 2^{n-1} nowych zagięć, które pojawiły się pomiędzy pomalowanymi zagięciami. Co więcej, nowe zagięcia występują regularnie: na przemian rowek i górka. To pozwala nam wyprowadzić nowy wzór: aby uzyskać K_n , wstawiamy puste pola na początku i na końcu słowa K_{n-1} oraz między jego kolejnymi literami. Następnie wpisujemy w puste pola na przemian litery L i P. Zatem K_4 powstaje następująco:

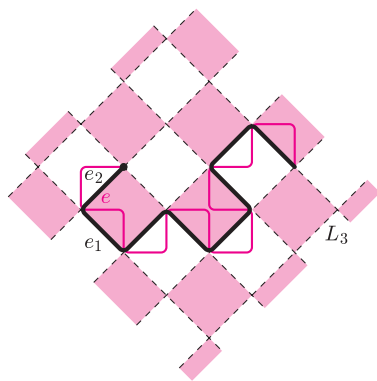
$$K_3 = LLPLLPP \rightarrow _L_L_P_L_L_P_P_ \rightarrow \underline{LLPLLPLLPLLPLLPP} = K_4.$$

Powyższa metoda jest również rekurencyjna (tzn. odwołuje się do słów dla mniejszych krzywych), ponadto obie metody konstruują słowa w całości. A co, gdybyśmy chcieli mieć wzór na i -ty zakręt na krzywej rzędu n , tzn. na i -tą ($1 \leq i < 2^n$) literę słowa K_n ? To proste: z tego, co powiedzieliśmy, wynika, że jeśli i jest nieparzyste, to tą literą jest L lub P w zależności od parzystości $(i - 1)/2$. W przeciwnym przypadku jest to litera $i/2$ w słowie K_{n-1} . Tak więc jeśli p jest największą potęgą dwójki dzielącą i , czyli $i = 2^p m$ dla nieparzystego m , to szukaną literą jest L wtedy, gdy $(m - 1)/2$ jest parzyste.

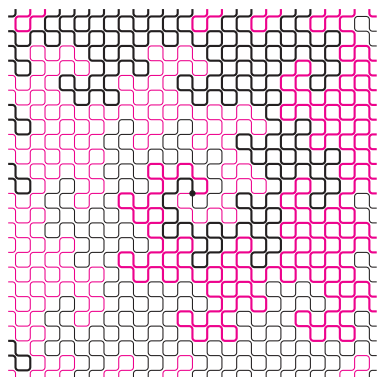




Rys. 3. Proces budowania krzywej S_n (linia ciągła) na krzywej S_{n-1} (linia przerywana).



Rys. 4. Siatka L_3 pomalowana w „szachownicę”. Na czarno zaznaczono krzywą S_3 , kolorem – krzywą S_4 .



Rys. 5. Cztery nieskończone smocze krzywe wypełniające płaszczyznę.

Bibliografia

- [1] Gerald Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer, 2008.
- [2] Chandler Davis, Donald Knuth, *Number Representations and Dragon Curves*, Journal of Recreational Mathematics 3 (1970), 66–81, 133–149. Także w: Donald Knuth, *Selected Papers on Fun and Games*, CSLI Publications, 2011.

Ponieważ słowo K_n zawsze zaczyna się od K_{n-1} , więc krzywą rzędu n możemy narysować, przedłużając krzywą rzędu $n - 1$. Z tego wynika naturalna konstrukcja *nieskończonej smoczej krzywej*, która odpowiada słowu

$$K_\infty = L LP LLPP LLLPPLPP LLLPLPPPLLPPLPP \dots$$

Rysując smoczą krzywą coraz wyższych rzędów, dostrzeżemy jej zaskakującą własność: krzywa ta nie ma samoprzecięć! Co więcej, o ile będziemy pamiętali, by na każdym zakręcie robić mały łuk, to krzywa ta żadnego punktu nie odwiedza dwa razy. Zanim udowodnimy, że jest tak w istocie, spójrzmy na jeszcze jeden sposób, w jaki możemy otrzymać smoczą krzywą. Zaczniemy od odcinka o długości 1, który jest smoczą krzywą rzędu 0; oznaczmy go przez S_0 (rys. 3). Teraz zbudujemy na tym odcinku trójkąt prostokątny równoramienny, dorysowując dwa odcinki o długościach $1/\sqrt{2}$. Te przyprostokątne tworzą krzywą rzędu 1. I dalej: na krzywej S_{n-1} dobudowujemy 2^{n-1} trójkątów, naprzemiennie po prawej i lewej stronie krzywej – w ten sposób uzyskujemy S_n . Zauważmy, że choć krzywa S_n składa się z 2^n kawałków, to jej długość wynosi $(\sqrt{2})^n$, gdyż odcinki kolejnych rzędów są $\sqrt{2}$ razy krótsze. Jeśli będziemy wykonywać tę operację dalej, to w granicy otrzymamy nieskończonej długości fraktalną krzywą zwaną *smokiem Heighwaya*. Smoczą krzywą możemy więc traktować jako aproksymację smoka.

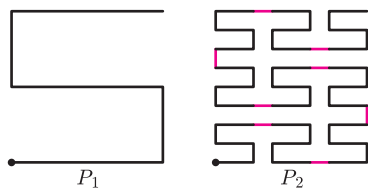
Teraz już jesteśmy gotowi do dowodu faktu, że smocza krzywa nie ma samoprzecięć. Dowód przytaczamy za Geraldem Edgarem [1]. Narysujmy krzywą S_n na kwadratowej siatce L_n o długości krawędzi $(1/\sqrt{2})^n$. Każdy odcinek krzywej pokrywa się z jedną krawędzią siatki. Ponadto pomalujmy kwadraty siatki L_n w „szachownicę” (rys. 4). Zauważmy, że gdy konstruujemy krzywą S_{n+1} , to rysujemy trójkąty naprzemiennie na kolorowych i białych kwadratach. Ponadto wszystkie trójkąty konstruowane na kolorowych polach pochodzą od odcinków S_n równoległych do jednej z osi siatki L_n , a trójkąty konstruowane na białych polach pochodzą od odcinków równoległych do drugiej osi.

Ponieważ w każdym wierzchołku siatki krzywa ma kąt prosty (który, być może, dotyka drugiego kąta prostego w tym wierzchołku), zatem aby uzyskać samoprzecięcie, któraś z krawędzi siatki musiałaby należeć do krzywej dwukrotnie jako jej odcinek. Załóżmy zatem, że w S_n nie ma takiego odcinka; pokażemy, że wynika z tego, iż w S_{n+1} również takiego nie ma. Niech P będzie dowolnym kwadratem w siatce L_n , e – krawędzią siatki L_{n+1} wewnątrz P , a e_1 i e_2 – krawędziami siatki L_n o wspólnym wierzchołku z e . Krzywa S_n odwiedza każdą z krawędzi e_1, e_2 co najwyżej raz, a krzywa S_{n+1} odwiedza krawędź e dokładnie raz dla każdego trójkąta skonstruowanego na e_1 lub e_2 . Ale ponieważ te dwie krawędzie są prostopadłe, wobec tego tylko na jednej z nich możemy zbudować trójkąt w kwadracie P – na tej, która jest kompatybilna z kolorem kwadratu P . To kończy dowód.

Równie ciekawy jest fakt następujący: jeśli narysujemy cztery nieskończone smocze krzywe mające swoje początki w tym samym punkcie, ale obrócone o wielokrotność 90° , to nie tylko nie będą się one ze sobą przecinać, ale, co więcej, pokryją całą płaszczyznę (tzn. każda jednostkowa krawędź siatki będzie należeć do jednej z krzywych; rys. 5). Dowód tego faktu jest trudniejszy – zainteresowanych Czytelników odsyłamy do artykułu Chandlera Davisa i Donalda Knutha [2], opisującego zaskakujące związki smoczyczych krzywych z systemami pozycyjnymi o podstawie zespolonej. Swoją drogą, Knuth, jako prawdziwy fan smoczej krzywej, ma w domu na ścianie krzywą S_9 ułożoną z 986 własnoręcznie wypalonych ceramicznych kafelków.

Czytelnik, który zapoznał się z artykułem Krzysztofa Barańskiego w tym numerze, może pokusić się o obliczenie wymiaru fraktalnego smoka Heighwaya. Jak pokazaliśmy, smocza krzywa ma strukturę rekurencyjną: składa się z dwóch krzywych mniejszych rzędów. Tak więc na S_n składają się dwie kopie S_{n-1} przeskalowane o czynnik $1/\sqrt{2}$. Z tego wynika podobna własność smoka Heighwaya: jest on sumą dwóch swoich kopii o rozłącznych wnętrzach, przy podobieństwie o skali $s = 1/\sqrt{2}$ (patrz okładka). To powoduje, że wymiar smoka w musi spełniać równanie $2(1/\sqrt{2})^w = 1$, zatem wynosi $w = 2$. Miłośników parkietaży ucieszy zapewne fakt, że smokiem można pokryć płaszczyznę – i to na wiele sposobów!

Informatyczny kącik olimpijski (43): Ploter



Rys. 1. Krzywa Peano rzędu i powstaje z połączenia dziewięciu krzywych rzędu $i - 1$.

W celu zaznajomienia się ze smoczą krzywą, zachęcamy do przeczytania artykułu *Fraktalny świat papierowej tasiemki*.

Najczęściej takie zadania nie są koncepcyjnie trudne. Przykładowo, gdybyśmy chcieli rozwiązać taki problem dla smoczej krzywej S_n , należy rozpatrzyć dwa przypadki:

- (a) $k < 2^{n-1}$ i wtedy rekurencyjnie znajdujemy rozwiązanie dla krzywej S_{n-1} , albo
- (b) $k \geq 2^{n-1}$ i wtedy znajdujemy punkt na krzywej S_{n-1} w odległości $k - 2^{n-1}$ od początku krzywej i odpowiednio przesuwamy go na płaszczyźnie.

Dla krzywej Peano rozwiązanie jest analogiczne, z tym że trzeba będzie rozpatrzyć nie dwa, ale 9 przypadków.

Można jednak zadanie sformułować na odwrót: mając dany punkt płaszczyzny (x, y) leżący na krzywej, pytamy się, w jakiej odległości od początku krzywej się on znajduje. Takie zadanie dla krzywej Peano pojawiło się m.in. na światowych finałach konkursu ACM ICPC w roku 2003 (zadanie pt. *Riding the Bus*). Jego rozwiązanie także jest łatwe: krzywa Peano P_n rzędu n mieści się na kwadratowej siatce rozmiaru $3^n - 1 \times 3^n - 1$, a jej długość to $9^n - 1$. Patrząc na wartości $\lfloor x/3^{n-1} \rfloor$ i $\lfloor y/3^{n-1} \rfloor$, jesteśmy w stanie stwierdzić, do której z dziewięciu mniejszych krzywych P_{n-1} należy punkt (x, y) . Jeśli należy do i -tej krzywej (w kolejności ich występowania w P_n), to wynikiem będzie suma $i \cdot 9^{n-1}$ oraz rozwiązania podzadania dla krzywej P_{n-1} i punktu $(x \bmod 3^{n-1}, y \bmod 3^{n-1})$, odpowiednio obróconego. Taki algorytm działa w czasie $O(n)$.

Odrotny problem dla smoczej krzywej został postawiony przed uczestnikami tegorocznych Potyczek Algorytmicznych w zadaniu *Ploter*. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że pomysł, którego użyliśmy dla krzywej Peano, tu się zupełnie nie sprawdzi. Brakuje nam bowiem istotnego składnika: jak dla punktu na krzywej S_n sprawdzić, do której z dwóch mniejszych krzywych S_{n-1} on należy. Spróbujmy więc trochę inaczej: wykonajmy procedurę rekurencyjnie dla *obu* mniejszych krzywych. Takie rozwiązanie działać będzie, oczywiście, w czasie $O(2^n)$. Ale zauważmy, że w wielu przypadkach, jeśli szukamy punktu na niewłaściwej krzywej mniejszego rzędu, to po kilku zejściach rekurencyjnych nasz punkt na tyle istotnie oddali się od aktualnie rozważanego kawałka krzywej, że będziemy mogli to łatwo wykryć i odciąć przeszukiwanie.

Zobaczmy, jak ta idea sprawdzi się w praktyce. Niech (x_n, y_n) oznacza ostatni punkt na krzywej rzędu n . Łatwo pokazać obliczającą go rekurencję ($n \geq 2$):

$$x_1 = y_1 = 1, \quad x_n = x_{n-1} - y_{n-1}, \quad y_n = x_{n-1} + y_{n-1}.$$

Niech $d(x, y, n)$ będzie funkcją, która zwraca zbiór odległości, w jakich punkt (x, y) leży od początku krzywej S_n (dany punkt może leżeć w co najwyżej dwóch odległościach od

Napisanie programu, który generuje rysunek fraktala, idealnie nadaje się na zadanie dla początkującego programisty. Proste reguły prowadzące do powstania skomplikowanych wzorów powodują, że przy stosunkowo niewielkim wysiłku programistycznym można osiągnąć całkiem ambitne efekty wizualne. Ponadto samopodobieństwo fraktali pozwala ćwiczyć jedną z podstawowych koncepcji programistycznych – rekurencję.

Nic więc dziwnego, że autorzy zadań na konkursach programistycznych chętnie sięgają po inspirację do świata fraktali. Jednym z popularnych typów zadań jest generowanie krzywych wypełniających płaszczyznę, np. krzywej Peano (zob. rysunek), Hilberta lub ich wariacji. Rozmiar takich krzywych rośnie wykładniczo względem rzędu krzywej, zatem zadanie zwykle jest formułowane następująco: dla krzywej rzędu n i liczby k , stwierdzić, jakie współrzędne ma punkt płaszczyzny, leżący w odległości k od początku krzywej. Oczekuje się, że program będzie działał w czasie $O(n)$.

początku krzywej). Funkcja ta wykona dwa wywołania rekurencyjne. Jej wynikiem będzie suma dwóch zbiorów:

$$d(x, y, n) = d(x, y, n - 1) \cup \{2^n - k \mid k \in d(y_n - y, x - x_n, n - 1)\}.$$

Dla S_1 mamy $d(x, y, 1) = \{x + y\}$ dla $0 \leq y \leq x \leq 1$, w przeciwnym wypadku $d(x, y, 1) = \emptyset$.

A kiedy możemy odciąć przeszukiwanie? Nie jesteśmy w stanie łatwo sprawdzić, czy dany punkt występuje na krzywej S_n , ale dla wielu punktów możemy powiedzieć, że na pewno na niej nie występują. Rozważmy bowiem najmniejszy prostokąt R_n o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, który zawiera wszystkie punkty krzywej S_n . Ilekroć funkcja $d(x, y, n)$ zostanie wywołana dla punktu (x, y) , który leży poza prostokątem R_n , możemy natychmiast zwrócić \emptyset . Niech r_n, t_n, l_n, b_n oznaczają odległości punktu $(0, 0)$ od krawędzi prostokąta R_n (odpowiednio prawej, górnej, lewej i dolnej). Możemy je obliczyć rekurencyjnie ($n \geq 2$):

$$\begin{aligned} r_1 &= t_1 = 1, \\ l_1 &= b_1 = 0, \\ r_n &= \max(r_{n-1}, t_{n-1} + x_n), \\ t_n &= \max(t_{n-1}, l_{n-1} + y_n), \\ l_n &= \max(l_{n-1}, b_{n-1} - x_n), \\ b_n &= \max(b_{n-1}, r_{n-1} - y_n). \end{aligned}$$

Pozostało pytanie, na ile powyższa optymalizacja wpływa na czas działania algorytmu. Narysujmy krzywą S_n i zaznaczmy wszystkie prostokąty otaczające 2^{n-m} krzywych S_m , które składają się na krzywą S_n . Oszacujmy, ile maksymalnie narysowanych prostokątów może zawierać dany punkt (x, y) ; ta liczba będzie oznaczać, ile razy wywołanie $d(\cdot, \cdot, m)$ nie zostanie odcięte. Wynika z tego, że jeśli liczba prostokątów będzie rzędu $O(1)$, to na każdym poziomie rekurencji będziemy mieli stałą liczbę wywołań, a zatem cały algorytm będzie działał w czasie $O(n)$.

Można udowodnić przez indukcję, że x_m i y_m są podzielne przez $M = 2^{\lfloor m/2 \rfloor}$, zatem każda z krzywych S_m zaczyna się w jednym z punktów zbioru $Z_M = \{(Mi, Mj) \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$. Można też pokazać, że $r_m + l_m, t_m + b_m < 2^{\lfloor m/2 \rfloor + 1}$, tak więc każdy z narysowanych prostokątów jest zawarty w kwadracie o boku $2M - 1$. Zatem prostokąty zawierające punkt (x, y) pokrywają w sumie co najwyżej 16 punktów ze zbioru Z_M . W każdym z tych punktów mogą zaczynać się co najwyżej cztery krzywe S_m , zatem (x, y) należy do nie więcej niż $16 \cdot 4$ prostokątów. Zatem nasz algorytm istotnie działa w czasie liniowym!

Tomasz IDZIASZEK

Benoît Mandelbrot

Wyjątkowo rzadko się zdarza, by śmierć nawet bardzo znanego matematyka została odnotowana przez stacje radiowe i telewizyjne. Matematyk, choćby miał osiągnięcia o znaczeniu wiekopomnym, to nie jest znany aktor, sportowiec, czy polityk i media raczej nie interesują się jego życiem lub śmiercią – chyba że pojawi się jakiś skandal lub wyjątkowa sensacja. Gdy 14 października 2010 roku zmarł Benoît Mandelbrot, to wiadomość o jego śmierci podały niemal wszystkie środki masowego przekazu i portale w Internecie.

„Ojciec fraktali” – bo takie zyskał miano – był postacią bardzo popularną w kręgach nie tylko matematycznych. Fraktale zrobiły ogromną karierę i to bardziej w zastosowaniach niż w samej matematyce. A i sam Mandelbrot nie jest autorem przełomowych twierdzeń ani twórcą rewolucyjnej teorii matematycznej, choć używa się terminu „teoria fraktali”. Czego zatem dokonał Benoît Mandelbrot, że zasłużył sobie na tak wielkie uznanie, 15 doktoratów honorowych i wiele bardzo prestiżowych nagród?

Przypomnijmy najpierw, że Benoît Mandelbrot urodził się 20 listopada 1924 roku w Warszawie. Jednak już w 1936 roku rodzina wyemigrowała do Paryża, gdzie edukacją matematyczną młodego Benoît zajął się stryj, Szolem Mandelbrojt, profesor matematyki w prestiżowym Collège de France. Benoît nie podobał się jednak styl, w jakim stryj uprawiał matematykę. Szolem Mandelbrojt, współpracujący przez pewien czas z boubakistami, był zwolennikiem wysoce abstrakcyjnej, teoretycznej matematyki. Benoît natomiast wolał rozważania intuicyjne prowadzące do zastosowań. Trudne (szczególnie ze względu na żydowskie pochodzenie) lata wojny Mandelbrot spędził we Francji. Po wojnie ukończył École Polytechnique. Nie specjalizował się jednak w jednej dziedzinie, interesując się różnymi zagadnieniami z fizyki statystycznej, termodynamiki, biologii molekularnej, a nawet aeronautyki i lingwistyki matematycznej. Gdy tylko nadarzyła się okazja opuścić „przeteoretyzowane” środowisko francuskich matematyków i w 1958 roku wyjechał do Stanów Zjednoczonych, podejmując pracę w świeżo powstałym Wydziale Badawczym IBM.



Benoît Mandelbrot z żoną w Krakowie (fot. Z. P.)

Tam właśnie zajął się tematem swojego życia: problemami samopodobieństwa i „nieregularności” w matematyce oraz zastosowaniach. Zwracał uwagę, że znakomita większość problemów praktycznych prowadzi do obiektów, które niewiele mają wspólnego z idealnymi trójkątami, kulami czy nawet wielościanami. Wymyślił nazwę „fraktal” na określenie tworów o nieregularnych, nieciągłych kształtach, których drobne części przypominają całość. W 1982 roku wyszła jego książka *The Fractal Geometry of Nature* będąca swoistym manifestem podejścia do matematycznego opisu przyrody. W przyrodzie nie ma idealnych figur geometrycznych, wszystko jest fraktalne. Nawet, a może przede wszystkim, zjawiska chaotyczne, ulotne mogą być opisane za pomocą fraktali. To była istna rewolucja w myśleniu matematycznym. Szybko się okazało, że fraktale znalazły liczne, zaskakujące zastosowania (kompresja obrazów, powiększenie cyfrowe, efekty specjalne w filmach). A przy tym są ładne, działają na wyobraźnię. Wystarczy spojrzeć na słynny zbiór Mandelbrota nazywany czasem „odciskiem palca Pana Boga”. Mandelbrot bardzo dużo podróżował i propagował swoje idee na licznych wykładach oraz pisząc książki. W maju 2005 roku odwiedził także Polskę, żeby odebrać przyznany mu Medal Sierpińskiego badacza pierwszych abstrakcyjnych fraktali (dywan, trójkąt Sierpińskiego).

W komunikatach po śmierci Mandelbrota często powtarzała się informacja, że odszedł człowiek, który ukazał światu niezwykle piękno matematyki.

Zdzisław POGODA



mała delta

Doświadczenia myślowe

Wycinanki

Zróbmy razem kilka doświadczeń myślowych z użyciem kwadratowej kartki papieru i nożyczek. Doświadczenia będą bardzo proste, ale ich wynik – wycinanki (bo cóż by innego) – będą całkiem zaskakujące.

1. Wycinanie. W pierwszym kroku doświadczenia wytnijmy cokolwiek, np. lewą górną ćwiartkę kartki. To było proste, ale szybko dostrzegamy techniczny problem polegający na tym, że będziemy musieli decydować, co wyciąć w drugim kroku wycinania, i w następnym, i w następnym... Dobrze byłoby znaleźć jakąś metodę, dzięki której nie musielibyśmy podejmować decyzji i która uprościłaby całe doświadczenie. Usunięcie lewej górnej ćwiartki ma nieoczekiwanie pozytywne konsekwencje. Wszak pozostały nam w ręku trzy kwadratowe ćwiartki i możemy z nimi postąpić **podobnie** – usunąć z każdej z nich jej lewą górną ćwiartkę. To, co zostanie, będzie sumą większej już liczby „ćwiartek ćwiartek”, z którymi – dzięki naszej metodzie – poradzimy sobie bez trudu. Na każdym kroku wycinania będziemy wiedzieli, co wyciąć, nawet jeśli zechcemy wykonać tych kroków nieskończenie wiele. To zaś nieuchronnie nastąpi – wszak przeprowadzamy doświadczenie myślowe.



Rysunek obok przedstawia dobre przybliżenie naszej pierwszej nieskończonej wycinanki. Przyglądając się mu uważnie, można dostrzec pewną własność nieskończonej wycinanki, której **nie mają** jej kolejne przybliżenia, a która jest konsekwencją wybranej metody wycinania. Skoro w trzech częściach wycinanki nasze nożyczki **pracowały podobnie** do tego, jak wycinały całą wycinankę, to każda z tych części **jest podobna** do całej wycinanki. To podobieństwo ma już jednak sens ściśle geometryczny, tzn.:

$$W = \phi_1(W) \cup \phi_2(W) \cup \phi_3(W),$$

gdzie W jest wycinanką, a ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 to trzy podobieństwa (w tym przypadku jednokładności) przekształcające kwadrat w jego odpowiednie ćwiartki. Własność figury W , polegająca na tym, że jest ona sumą podobnych do siebie fragmentów, nazywa się **samopodobieństwem**.

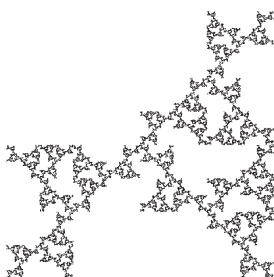
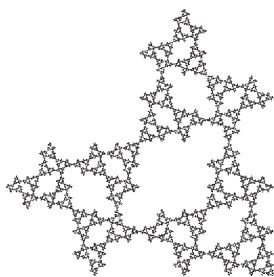
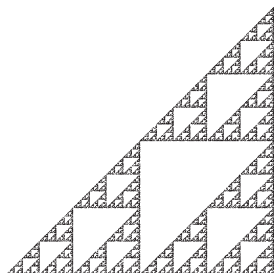
Opanowawszy zdziwienie, że tak prosta procedura prowadzi do tak skomplikowanego kształtu, prawdziwy „doświadczalnik” znalazł już zapewne pole do dalszych doświadczeń. Kwadrat jest przecież podobny do swojej ćwiartki na 8 różnych sposobów. Każde z takich podobieństw jest złożeniem jednokładności o środku w wierzchołku kwadratu z jedną z ośmiu izometrii własnych kwadratu (czterech symetrii osiowych lub czterech obrotów).

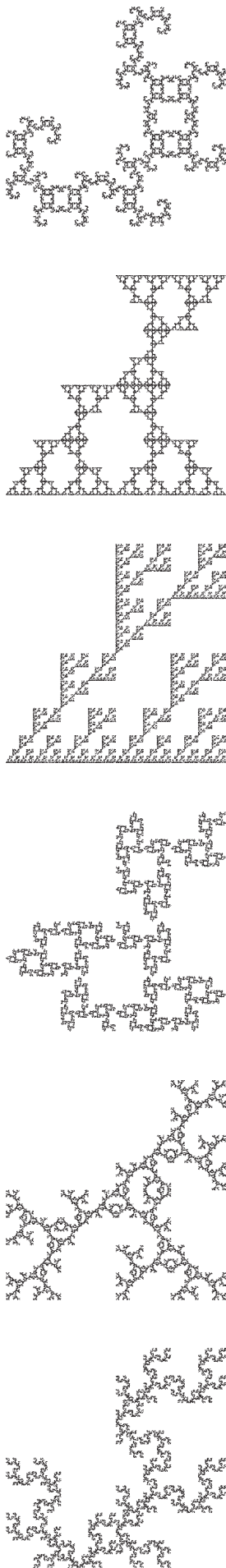
Czy, wybrawszy dowolny z $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ układów trzech podobieństw (ψ_1, ψ_2, ψ_3) przekształcających kwadrat w trzy ustalone ćwiartki, można tak „zaprogramować” nożyczki, żeby wycinanka W była sumą swoich kopii, czyli

$$W = \psi_1(W) \cup \psi_2(W) \cup \psi_3(W)?$$

Pozytywnej (ale i znacznie ogólniejszej) odpowiedzi na to pytanie dostarcza twierdzenie Hutchinsona z 1982 roku, o którym pisze dokładniej Przemysław Kiciak w artykule *Układy iterowanych przekształceń*.

Czy – pytając dalej – wszystkie tak powstałe wycinanki będą istotnie różne (tzn. nieizometryczne)? Odpowiedź na to pytanie jest bardzo prosta. Wskazówką niech będzie przykład wycinanki, która jest samopodobna na przynajmniej





4096 sposobów. Wystarczy w pierwszym kroku wyciąć „nic”, by następnie z każdą z czterech pozostałych ćwiartek postąpić podobnie (na 8 różnych sposobów) i powtórzyć tę czynność (dla porządku jedynie) nieskończenie wiele razy.

Na marginesach (nie tylko tego artykułu) prezentujemy niektóre spośród 512 wycinanek powstałych w opisany powyżej sposób. Nie zawsze łatwo zgadnąć, jakich podobieństw użyto do ich wykonania. Jeśli ktoś to zrobi bez użycia linijki, to na pewno ma doskonale wygimnastykowane oko. Album z kompletem wycinanek można obejrzeć na naszej stronie deltami.edu.pl.

2. Pomiary. W każdym doświadczeniu, nawet myślowym, powinno się dokonać jakichś pomiarów. Spróbujmy zatem zmierzyć wycinanki. W zasięgu ręki mamy linijkę (przyrząd do mierzenia długości) i przyrząd do mierzenia pola powierzchni. Niestety, szybko okazuje się, że nasza wycinanka ma nieskończoną długość – wystarczy dodać długości wszystkich odcinków w niej zawartych. Równie szybko dochodzimy do wniosku, że wycinanka ma zerowe pole – wystarczy dodać pola wycinanych ćwiartek i porównać z polem kartki, od której zaczynaliśmy. Mamy również nieodparte wrażenie, że nasze wycinanki są w pewnym sensie bardziej skomplikowane niż typowe figury dodatniej długości i mniejsze niż figury o dodatnim polu.

Intuicja podpowiada nam, że użyliśmy niewłaściwych przyrządów – tak, jak to się czasem dzieje w życiu codziennym, np. wtedy, gdy próbujemy się zważyć na wadze aptekarskiej lub na wadze do ważenia parowozów. Jeden z przyrządów jest za czuły, a drugi w ogóle nie reaguje.

Czy istnieje przyrząd pomiarowy odpowiedni dla wycinanek?

Posługując się jedynie intuicją, szybko pokażemy, jak powinien ów przyrząd wyglądać (jeśli istnieje, oczywiście). Zauważmy najpierw, że zarówno długość, jak i pole mają coś wspólnego z wymiarem topologicznym. Dodatnią długość miewają figury 1-wymiarowe (ich pole jest na pewno zerowe), a dodatnie pole miewają figury 2-wymiarowe (ich długość jest na pewno nieskończona). Szukamy takiej miary, która przy próbie zmierzenia wycinanki dawałaby wynik dodatni – jej „czułość” s powinna być pomiędzy 1 a 2, tzn. pomiary tą miarą figur 1-wymiarowych powinny dawać wynik 0, a figur 2-wymiarowych ∞ . Oznaczmy tę hipotetyczną miarę przez \mathcal{H}_s .

W konstrukcji naszej wycinanki główną rolę odgrywały podobieństwa. Wiemy, że długość zmienia się proporcjonalnie do pierwszej potęgi skali podobieństwa, a pole – do jej kwadratu. Możemy więc oczekiwać, że nasza hipotetyczna miara \mathcal{H}_s będzie się zmieniać proporcjonalnie do skali podobieństwa w potęgę s . Jeśli zatem istnieje właściwa miara o czułości $s \in (1, 2)$, która dla naszej wycinanki przyjmuje wartość dodatnią, a ponadto przy podobieństwach zmienia się w sposób analogiczny do długości i pola przekształcanych figur, to

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s(W) &= \mathcal{H}_s(\phi_1(W) \cup \phi_2(W) \cup \phi_3(W)) = \\ &= \mathcal{H}_s(\phi_1(W)) + \mathcal{H}_s(\phi_2(W)) + \mathcal{H}_s(\phi_3(W)) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}_s(W) + \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}_s(W) + \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}_s(W) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}_s(W), \end{aligned}$$

czyli (skoro przyjęliśmy, że $0 < \mathcal{H}_s(W) < \infty$) parametr s musi spełniać równanie $3 = 2^s$ i ostatecznie $s = (\log 3)/(\log 2) \approx 1,585$. Ten wynik doskonale potwierdzałby naszą intuicję, że Świat (przynajmniej wycinanek) nie jest całkiem bez sensu. Potwierdzałby, gdyby miara \mathcal{H}_s rzeczywiście istniała...

3. Na zakończenie. Miary \mathcal{H}_s dla $s > 0$ istnieją i noszą nazwę **miar Hausdorffa** (patrz też artykuł Krzysztofa Barańskiego). Parametr s , który roboczo nazywaliśmy czułością miary, nazywa się **wymiarem Hausdorffa**. Jeśli dla pewnej figury W i liczby $s > 0$ oraz takich dowolnych liczb a, b , że $0 < a < s < b$, mamy $\mathcal{H}_a(W) = \infty$ oraz $\mathcal{H}_b(W) = 0$, to mówimy, że figura W ma wymiar Hausdorffa s . Jeśli wymiar Hausdorffa figury W jest różny od jej wymiaru topologicznego, to W jest **fraktalem**. Każda z 512 naszych wycinanek jest fraktalem o wymiarze Hausdorffa równym $(\log 3)/(\log 2) \approx 1,585$.

Dziwne to uczucie wiedzieć, że nie mówimy prozą...

Małą Deltę przygotował Krzysztof RUDNIK

Interpolacja fraktalna, czyli dwukrotne fałszerstwo na zamówienie

Irmiona HERBURT*, Paweł RZAŻEWSKI*

Pierwsze fałszerstwo – interpolacja

Urządzenie pomiarowe zmierzyło wartości pewnej wielkości w czterech momentach (rys. 1). Wiemy więc bardzo niewiele o zależności tej wielkości od czasu.

Mimo to chcielibyśmy odtworzyć brakujące punkty wykresu, kierując się następującymi informacjami:

- pomiędzy każdymi dwoma kolejnymi punktami dzieje się tak dużo, jak pomiędzy pierwszym i ostatnim, tzn. kawałki wykresów pomiędzy kolejnymi punktami są takie, jak cały wykres po odpowiednim „przeskalowaniu”,
- wykres funkcji jest linią ciągłą.

Z wielu możliwych funkcji, które spełniają powyższe warunki, wybierzemy taką, która da się łatwo opisać. Punkty z wykresu tej funkcji potraktujemy jako uzupełnienie brakujących danych. Będzie to więc świadome fałszerstwo.

Taki sposób uzupełniania danych nazywamy *interpolacją*. Według *Słownika wyrazów obcych PWN* jednym ze znaczeń słowa „interpolować” jest zmieniać, fałszować tekst za pomocą wstawek. W matematyce jednak interpolacja to odtworzenie punktów z danych, według ustalonej metody, z których najprostsza jest *interpolacja liniowa* – w niej brakujące punkty wykresu uzupełniają się, łącząc kolejno dane punkty odcinkami (rys. 2).

Tutaj użyjemy innej metody, która pozwoli uzyskać wykres samopodobny, czyli będący fraktalem.

Konstrukcja interpolacji fraktalnej

1. Tworzymy łamaną łączącą kolejne punkty $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$. Otrzymujemy w ten sposób interpolację kawałkami liniową K_1 .

2. Otrzymaną łamaną K_1 przeskalujemy (zweźimy i ściśniemy) i wstawimy pomiędzy punkty A_1 i A_2 (rys. 3).

Podobnie łamaną K_1 przekształcimy i wstawimy kolejno pomiędzy punkty A_2 i A_3 oraz A_3 i A_4 .

Przekształcenie „przeskalowania” można opisać, podając wzór, według którego przekształcane są współrzędne punktów płaszczyzny. W naszym przypadku punkt o współrzędnych (x, y) przejdzie na punkt o współrzędnych (x', y') zgodnie z regułą

$$x' = ax + by + e, \quad y' = cx + dy + f.$$

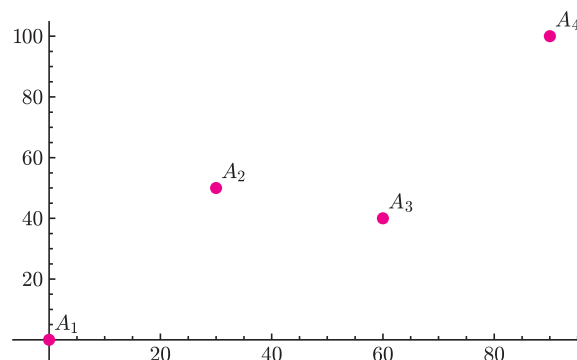
W przekształceniu f_1 , które odwzorowuje łamaną K_1 w łamaną łączącą punkty A_1 i A_2 , mamy

$$a = \frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_1}, \quad b = 0, \quad d = 0,5, \quad c = \frac{y_2 - y_1}{x_4 - x_1} - d \cdot \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1},$$

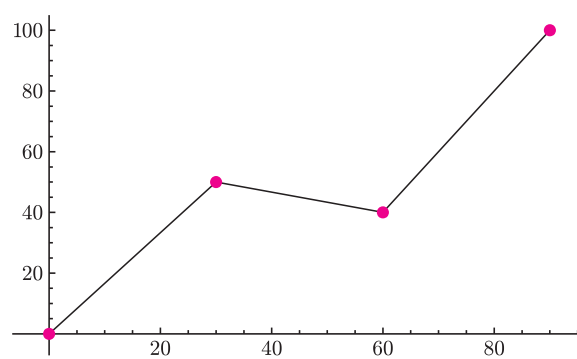
$$e = \frac{x_4 \cdot x_1 - x_2 \cdot x_1}{x_4 - x_1}, \quad f = \frac{x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_4 - x_1}.$$

Współczynnik d możemy wybrać dowolnie pomiędzy liczb z przedziału $[0, 1)$. Od niego zależy, jak bardzo „postrzępiona” jest końcowa krzywa fraktalna.

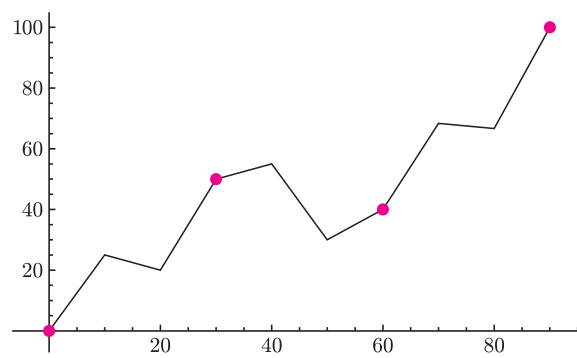
Podobnymi wzorami opisujemy przekształcenia φ_2 i φ_3 , które „wstawiają” łamaną K_1 odpowiednio pomiędzy punkty A_2 i A_3 oraz A_3 i A_4 .



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

3. W każdym następnym kroku powtarzamy te same czynności: krzywą otrzymaną w kroku poprzednim odwzorowujemy przekształceniem φ_1 pomiędzy punkty A_1 i A_2 , przekształceniem φ_2 pomiędzy punkty A_2 i A_3 oraz przekształceniem φ_3 pomiędzy punkty A_3 i A_4 .

Im więcej tych kroków wykonamy, tym dokładniejsze przybliżenie granicznej krzywej fraktalnej dostaniemy. W granicznej krzywej K_∞ każdy kawałek pomiędzy punktami A_i oraz A_{i+1} , dla $i = 1, 2$ lub 3 , jest podobny (afinicznie) do całości, a cała krzywa jest sumą swoich trzech kopii: $K_\infty = \varphi_1(K_\infty) \cup \varphi_2(K_\infty) \cup \varphi_3(K_\infty)$.

*Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych,
Politechnika Warszawska

Drugie fałszerstwo – narysowanie krzywej fraktalnej

Wszystkie obrazki krzywych fraktalnych powstają po wykonaniu tylko skończonej liczby kroków algorytmu, są to więc tylko przybliżenia granicznego fraktalnego obiektu.

Do narysowania (w przybliżeniu) krzywej K_∞ użyjemy tzw. algorytmu probabilistycznego. Tworzy on ciąg punktów coraz gęściej wypełniający wykres krzywej (rys. 4 i 5).

Algorytm probabilistyczny to następujący sposób postępowania.

Aby narysować zbiór samopodobny K , który jest sumą swoich kopii, tzn.

$$K = \varphi_1(K) \cup \varphi_2(K) \cup \dots \cup \varphi_n(K),$$

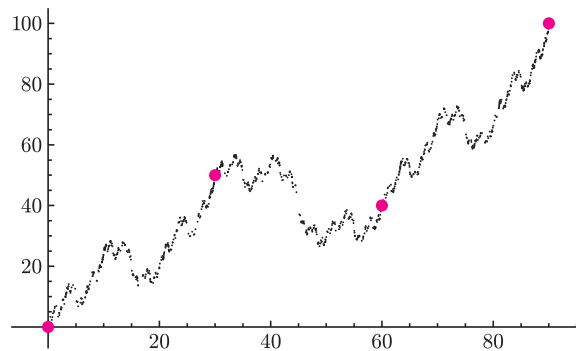
tworzymy ciąg punktów p_1, p_2, \dots wypełniających odpowiednio gęsto zbiór K . Algorytm wybiera punkt startowy p_1 i powtarza następujące operacje:

- losuje liczbę ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ (numer przekształcenia),
- przekształca wylosowanym przekształceniem poprzednio znaleziony punkt ciągu i tworzy w ten sposób następny punkt ciągu.

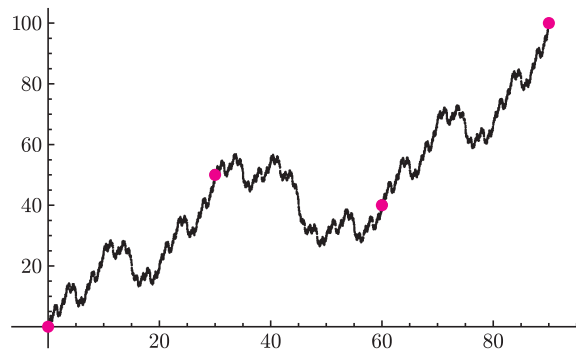
Oto stosowna procedura.

```

n ← liczba iteracji algorytmu
N ← liczba punktów startowych
(x1, y1), ..., (xN, yN) ← punkty startowe,
uporządkowane względem pierwszej współrzędnej
d = (d1, d2, ..., dN) ← parametr skali
Δ ← xN - x1
Dla i ← 2, ..., N wykonaj
    ai ← (xi - xi-1) / Δ
    ei ← (xN · xi-1 - x1 · xi) / Δ
    ci ← (yi - yi-1 - di · (yN - y1)) / Δ
    fi ← (xN · yi-1 - x1 · yi - di · (xN · y1 - x1 · yN)) / Δ
(X, Y) ← (x1, y1);
Dla i ← 1, ..., n wykonaj
    k ← losowa liczba ze zbioru {2, ..., N}
    X' = ak · X + ek
    Y' = ck · X + dk · Y + fk
    (X, Y) ← (X', Y')
    Dodaj punkt (X, Y) do wykresu
    
```



Rys. 4. Krzywa fraktalna po 5000 iteracji algorytmu probabilistycznego.

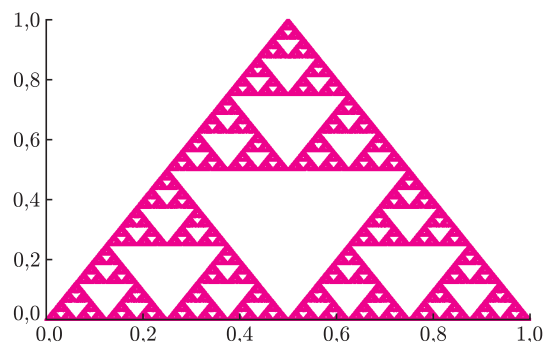


Rys. 5. Krzywa fraktalna po 50000 iteracji algorytmu probabilistycznego.

Trójkąt Sierpińskiego jest sumą swoich trzech kopii, możemy więc zastosować do jego narysowania algorytm probabilistyczny. Dla opisu wzorami odpowiednich przekształceń umieścimy wierzchołki trójkąta w punktach o współrzędnych $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$.

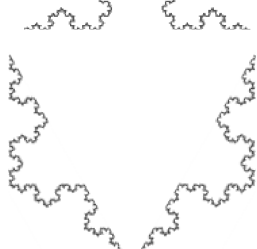
```

n ← liczba iteracji algorytmu
/* Zdefiniujmy następujące */
/* przekształcenia punktu x = (x1, x2) */
Zdefiniuj
    φ1((x1, x2)) ← (x1/2, x2/2)
    φ2((x1, x2)) ← (x1/2 + 1/4, x2/2 + 1/2)
    φ3((x1, x2)) ← (x1/2 + 1/2, x2/2)
x ← (0, 0)
Dla i ← 1, ..., n wykonaj
    k ← losowa liczba ze zbioru {1, 2, 3}
    x ← φk(x)
    Dodaj punkt x do wykresu
    
```



Płatek śniegu nie jest sumą swoich kopii, ale składa się z trzech kawałków, z których każdy jest już sumą swoich czterech kopii – każda kopia jest podobna do całego kawałka w podobieństwie o skali $1/3$.

Opisz wzorami te podobieństwa i zastosuj algorytm probabilistyczny do narysowania płatka śniegu.



Fraktale kwantowe

Daniel WÓJCIK*

W wyniku edukacji szkolnej można nabrać przekonania, że świat pełen jest gładkich obiektów, dobrze opisywanych przez linie proste, płaszczyzny, koła, kule itd. Poprosiwszy kogoś o narysowanie typowego wykresu funkcji, zwykle otrzymamy wykres wielomianu lub złożenia najbardziej znanych funkcji gładkich. A jednak, ściśle rzecz biorąc, typowa funkcja nie jest nigdzie ciągła, typowa funkcja ciągła nie jest nigdzie różniczkowalna itd. Odkrycie to było szokiem dla wielu matematyków, którzy jeszcze niewiele ponad sto lat temu uważali, że wszystkie funkcje ciągłe są różniczkowalne (opinię tę do dziś podziela wielu studentów na egzaminach analizy matematycznej).

Podstawy analizy matematycznej uporządkowano w drugiej połowie XIX wieku i wtedy zaczęto odróżniać funkcje różniczkowalne od ciągłych. Naturalnie pojawiło się pytanie, czy istnieją ciągłe funkcje, które nie są nigdzie różniczkowalne. Pierwszą osobą, która rozważała ten problem, był prawdopodobnie Riemann. W 1861 r. postawił hipotezę, że funkcja

$$(1) \quad r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

jest ciągła, ale nieróżniczkowalna, jednak nie był w stanie tego udowodnić. W 1872 r. Weierstrass podał inną funkcję, noszącą dziś jego nazwisko,

$$(2) \quad W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x \pi),$$

i udowodnił, że dla pewnych wartości a i b nie jest ona różniczkowalna dla żadnego x . Kolejny krok wykonał Godfrey Hardy (1877–1947), który udowodnił nieróżniczkowalność $W(x)$ dla wszystkich wartości a, b spełniających warunki $b > 1 > a > 0$, $ab \geq 1$. Dostarczył on również dowodu nieróżniczkowalności funkcji $r(x)$ dla dowolnego niewymiernego x . Później pokazano, że $r(x)$ jest różniczkowalna dla pewnych wymiernych wartości x .

Hardy nie tylko wykazał nieróżniczkowalność $W(x)$, ale też zmierzył ją: udowodnił mianowicie, że

$$(3) \quad \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \delta\} \sim \delta^H,$$

gdzie

$$H = \frac{\ln(1/a)}{\ln b}.$$

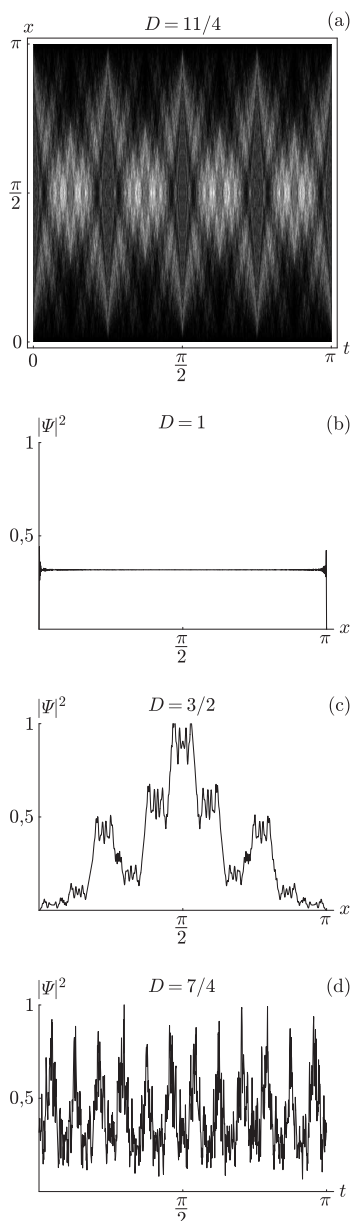
Korzystając z tego wyniku, można wykazać, że wymiar pudełkowy (opisany w artykule Krzysztofa Barańskiego) wykresu funkcji Weierstrassa $W(x)$ wynosi

$$(4) \quad D_W = 2 + \frac{\ln a}{\ln b} = 2 - \left| \frac{\ln a}{\ln b} \right|.$$

Funkcje, których wykresy mają niecałkowity wymiar pudełkowy, nazywamy funkcjami fraktalnymi.

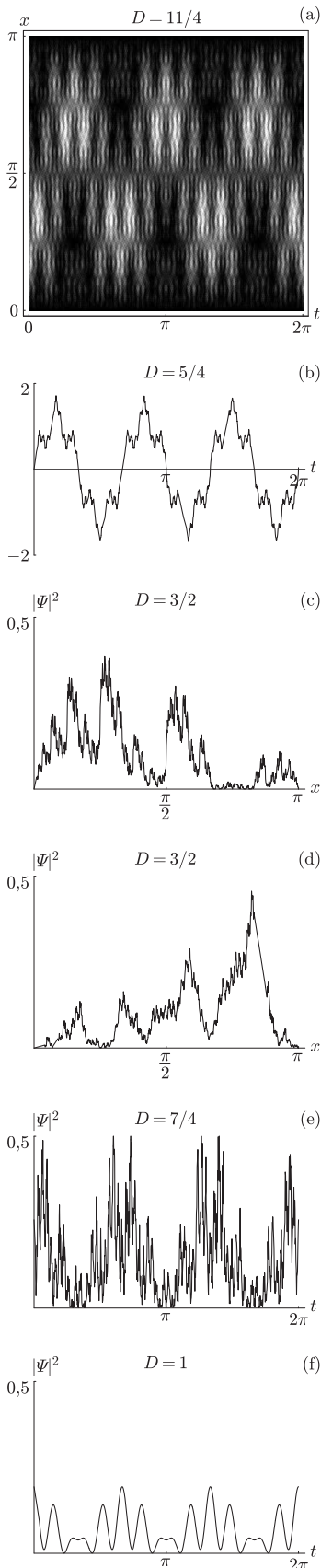
Czy jednak ma to cokolwiek wspólnego z opisem zjawisk w rzeczywistości? Okazuje się, że funkcje fraktalne mogą opisywać stany kwantowe prostych obiektów, np. cząstki w pudełku. Zanim to pokażemy, przypomnijmy podstawowe zasady mechaniki kwantowej. W mechanice klasycznej żeby opisać stan układu, musimy podać położenia i prędkości wszystkich jego elementów składowych. Jeżeli znamy wszystkie siły działające w układzie, możemy wyznaczyć jego przyszły stan, korzystając z praw Newtona, czyli rozwiązując równania ruchu. W mechanice kwantowej stan układu opisywany jest przez zespoloną funkcję falową $\Psi(x, t)$, której ewolucję opisuje równanie Schrödingera. Kwadrat modułu funkcji falowej, $\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$, jest gęstością prawdopodobieństwa zaobserwowania układu w danym punkcie x w chwili t .

Rozważmy jeden z najprostszych modeli fizycznych: poruszającą się w jednym wymiarze cząstkę o masie m w pudełku o nieskończenie sztywnych ściankach,



Rys. 1. (a) Fraktalny dywan kwantowy dla cząstki w pudełku, jaśniejszy odcień oznacza większą gęstość prawdopodobieństwa; (b) i (c) cięcia przestrzenne dywanu w $t = 0$ i $t = 1$; (d) cięcia czasowe w $x = 1$. Rysunki otrzymano, składając 200 początkowych składników we wzorze (9).

*Instytut Biologii Doświadczalnej im. M. Nenckiego PAN



Rys. 2. (a) Fraktalny dywan kwantowy dla cząstki w pudełku; (b) średnia prędkość; (c) i (d) cięcia przestrzenne w $t = 0$ i $t = 1$; (e) i (f) cięcia czasowe w $x = 1$ i $x = \pi/8$. Wykresy otrzymano, składając pierwsze 20 składników we wzorze (10) dla $q = 2$, $s = 3/2$.

a więc układ mechaniczny z potencjałem $V(x) = 0$ dla $x \in [0, \pi]$, poza tym $V(x) = \infty$. Wszystkie rozwiązania równania Schrödingera dla tego układu są postaci

$$(5) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) e^{-in^2 t},$$

gdzie

$$(6) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin(nx) \Psi(x, 0).$$

W 1996 roku Michael Berry zauważył, że jeżeli w chwili $t = 0$ wiemy o cząstce jedynie tyle, że jest ona gdzieś w pudełku, to wówczas jej stan początkowy możemy opisać funkcją falową, $\Psi(x, 0) = \text{const}$ wewnątrz pudełka oraz $\Psi(x, 0) = 0$ na zewnątrz. Wtedy gęstość prawdopodobieństwa $\rho(x, t)$ znalezienia cząstki w punkcie x dla ustalonego czasu $t > 0$ jest prawie zawsze funkcją fraktalną, której wykres ma wymiar $D_x = D + 1/2 > 1$, gdzie D jest wymiarem przestrzeni (u nas $D = 1$). Z kolei, jeżeli ustalimy punkt x w przestrzeni, to prawie zawsze wykres gęstości prawdopodobieństwa w tym punkcie jest funkcją fraktalną o wymiarze pudełkowym $D_t = 7/4$.

W opisywanym przypadku funkcja falowa Berry'ego ma w chwili $t = 0$ postać

$$(7) \quad \Psi_{\text{Berry}}(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{dla } x \in (0, \pi), \\ 0 & \text{dla } x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

Z równania (6) otrzymujemy

$$(8) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin nx \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{4}{\pi\sqrt{\pi n}}, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Zatem

$$(9) \quad \Psi_{\text{Berry}}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi\sqrt{\pi}(2k+1)} \sin((2k+1)x) e^{-i(2k+1)^2 t}.$$

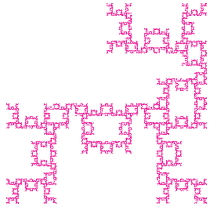
Dlaczego tak prosty stan początkowy staje się fraktalem podczas liniowej ewolucji zadanej równaniem Schrödingera? W istocie stan początkowy jest nieciągły na brzegu pudełka, co jest przyczyną omówionych wyżej fraktalnych własności stanu układu. Żeby złożyć funkcję stałą na odcinku z funkcji bazowych $\sin(nx)$, musimy wziąć ich nieskończenie wiele. Kiedy przybliżamy funkcję falową skończoną sumą sinusów, im bliżej brzegów, tym gorzej nam to wychodzi. Jest to tak zwany efekt Gibbsa, znany z analizy Fouriera. Ponieważ ewolucja kwantowa zmienia fazę każdej funkcji składowej proporcjonalnie do energii stanu, w każdej chwili t stan układu jest sumą nieskończonej liczby oscylacji o praktycznie losowych fazach, co prowadzi do fraktala. Okazuje się też, że energia stanu opisanego funkcją Berry'ego jest nieskończona.

Można tu zadać kilka pytań. Czy nieciągłość stanu początkowego jest koniecznym warunkiem fraktalności? Czy może raczej nieskończona energia? Czy wymiar fraktalny funkcji falowej jest zdeterminowany wymiarem przestrzeni? Okazuje się, że nieskończona energia stanu jest konieczna, żeby stan był „prawdziwym” fraktalem: funkcja falowa musi mieć składowe o dowolnie dużej energii (wysokiej częstości przestrzennej), żeby skalowanie występowało w najmniejszych skalach, a przy tym wagi składowych muszą być na tyle duże, żeby pochodna funkcji falowej nie była różniczkowalna. Natomiast można znaleźć fraktalne funkcje falowe wszędzie ciągle o dowolnym dozwolonym wymiarze fraktalnym. (Jasne jest, że wykres ciągłej rzeczywistej funkcji musi mieć wymiar nie mniejszy niż wymiar prostej, czyli 1, a nie może być większy niż wymiar przestrzeni, w której leży, czyli 2.)

Przykładową klasę funkcji falowych o zadanym wymiarze otrzymamy, biorąc dla cząstki w pudełku stan początkowy opisany funkcją Weierstrassa (2). Wówczas

$$(10) \quad \Psi_W(x, t) = N \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(s-2)} \sin(q^n x) e^{-iq^{2n} t},$$

gdzie $q = 2, 3, \dots$, $s \in (1, 2)$, a N jest stałą normalizacji.



Funkcja (10) ma kilka ciekawych własności. Okazuje się, że jej część rzeczywista i urojona, a także kwadrat jej modułu, czyli gęstość prawdopodobieństwa, są funkcjami fraktalnymi. Dla dowolnego ustalonego czasu t wykres przestrzennej zależności funkcji $\rho(x, t)$ jest fraktalem o wymiarze $D_x = s$. Dla prawie każdego ustalonego $x \in [0, \pi]$ wykres funkcji $\rho(x, t)$ jest fraktalem o wymiarze $D_t(x) = 1 + s/2$, ale dla gęstego, dyskretnego zbioru punktów x_d , funkcja $\rho(x = x_d, t)$ jest gładka, a więc $D_t(x_p) = 1$. Wykres funkcji dwóch zmiennych $\rho(x, t)$ jest fraktalem o wymiarze $D_{xy} = 2 + s/2$.

Dwuwymiarowe wykresy gęstości prawdopodobieństwa $P(x, t)$ nazywamy fraktalnymi dywanami kwantowymi, w analogii do pojęcia dywanów kwantowych używanego w przeszłości. Na rysunku 2(a) pokazujemy typowy fraktalny dywan kwantowy (jaśniejsze obszary oznaczają większą gęstość prawdopodobieństwa) dla $q = 2$, $s = 3/2$ i jego cięcia w czasie i przestrzeni. Okresowość w czasie z okresem $2\pi/3$, którą widzimy na dywanie, wiąże się ze strukturą widma częstości $\omega_{m,k} = 3(4^{m-1} + \dots + 4^{m-k})$, $m = 1, \dots, \infty$, $k = 1, \dots, m$, fraktalnej gęstości prawdopodobieństwa $\rho(x, t)$. W punktach $x_d = k\pi/q^m$ ($k = 0, 1, \dots, q^m$) suma (10) ma tylko m składników, w związku z czym funkcja $P_x(t)$ jest gładka ($D_t = 1$). Przykład takiego zachowania pokazany jest na rysunku 2(f). Tak więc funkcja $D_t(x)$ nie jest ciągła w żadnym punkcie x na przedziale $[0, \pi]$.

Oczywiście, żaden układ nie może mieć nieskończonej energii, co, między innymi, oznacza, że nie ma w przyrodzie „prawdziwych” fraktali, tak samo, jak nie ma idealnych okręgów, prostych itd. W praktyce mówimy o fraktalach „fizycznych”, mając na myśli obiekty, które w pewnym zakresie skali wykazują (statystyczne) samopodobieństwo. Ciekawe, że te fizyczne fraktale kwantowe, zdefiniowane jako skończone sumy składników w równaniu (10), zachowują swój charakter w czasie. Podobne rozwiązania można skonstruować dla całej klasy potencjałów wiążących cząstkę wystarczająco mocno (np. dla oscylatora harmonicznego).



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1318. Znaleźć wszystkie takie liczby pierwsze k , że liczba $2^k + k^2$ jest pierwsza. Rozwiązanie na str. 24

M 1319. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku B i boku BC długości 1. Punkty L , M i N to odpowiednio środki boków BC , CA i AB (rys. 1). Wiedząc, że proste BM i CN są prostopadłe, obliczyć długość odcinka AL .

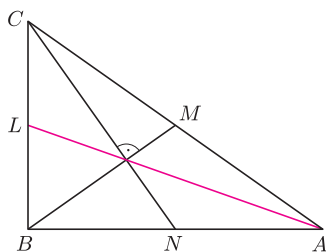
Rozwiązanie na str. 3

M 1320. Trójkąt równoboczny o boku długości 2011 podzielono na jednostkowe trójkąty równoboczne, analogicznie do rysunku 2. Ile jest ścieżek prowadzących od trójkąta w górnym rzędzie do środkowego trójkąta w dolnym rzędzie, takich że kolejne trójkąty na ścieżce mają wspólny bok, a ścieżka nigdy nie wraca do góry (z rzędu niższego do wyższego) ani nie przechodzi dwa razy przez żaden trójkąt? Rozwiązanie na str. 2

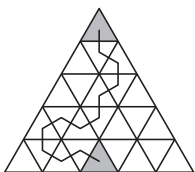
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 791. Kuchenka elektryczna przystosowana do napięcia 220 V jest wyposażona w dwie spirale grzejne o oporach 60 i 120 Ω . Zaprojektować schemat połączeń pozwalających użytkować kuchenkę w trzech zakresach mocy: 400, 800 i 1200 W. Rozwiązanie na str. 23

F 792. Galwanometr o czułości $3 \cdot 10^{-4}$ A i zakresie $1,5 \cdot 10^{-2}$ A, wyposażony w opornik wewnętrzny 60 Ω , należy przekształcić w miernik uniwersalny (amperomierz o zakresach 100 mA i 5 A oraz woltomierz 10 V, 100 V i 1000 V). Zaproponować schemat połączeń i obliczyć parametry niezbędnych oporników. Rozwiązanie na str. 2



Rys. 1



Rys. 2

Chrońmy przyszłość

Gdy miałam pięć lat – mówi Jane Goodall – mieszkałam na wsi i powierzono mi poważny obowiązek zbierania jajek kur, które je znosiły gdzie popadło. Byłam ciekawa, skąd się one biorą i poszłam do kurnika, w którym właśnie jedna kura jakoś tak się mościła. Jak mnie zobaczyła, uciekła z głośnym gdakaniem. Pomyślałam: chyba ją przestraszyłam i przyczaiłam się cichutko w tym kurniku. Za chwilę pojawiła się kolejna kura i jej składanie jajka już obejrzałam. Nauczyłam się wtedy zasad prowadzenia biologicznych obserwacji: należy wybrać właściwe miejsce i czas, wtopić się w otoczenie, a jeżeli zobaczymy nie to, czego się spodziewaliśmy – trzeba powtórzyć naszą obserwację od początku.

Jane Goodall przyjechała do Warszawy z okazji 8. *Planete Doc Film Festival*, na którym pokazywano o niej film. Przesłaniem filmu była myśl, że jeżeli ma się marzenie (jej marzeniem był wyjazd do Afryki i obserwacja dzikich zwierząt) i bardzo się tego chce, to marzenie może się spełnić. Prawdziwe życie Jane zaczęło się od jej podróży statkiem z Anglii do Afryki. Pierwszy etap to wejście w społeczność szympanсів w Tanzanii. Wymagało to więcej czasu i cierpliwości niż zasadzka w kurniku, ale się w pełni udało. Obserwacje czynione w przyrodzie, a nie w ogrodach zoologicznych, nauczyły Jane tego, że szympanсы są nam niezwykle bliskie w zachowaniach, w sposobie reagowania na otoczenie. Zapytana, z kim jej się łatwiej w życiu pracowało – z ludźmi czy z szympanсами, odpowiada bez wahania, że z szympanсами. Nie oszczędziliśmy jej też pytania o różnice między nimi i nami. Mówi, że powstanie mowy i rozwinięcie sposobów komunikacji uczyniło człowieka wyjątkowym w świecie żywych istot, ale zarówno ludzie, jak i szympanсы – więcej, każda jednostka w tych gatunkach to osoba niepowtarzalna, jedyna.

Od kilkunastu lat Jane Goodall porzuciła społeczności szympanсів i jeździ po świecie, tłumacząc ludziom, jak należy ratować naszą planetę przed zagładą biologiczną. Nie godzi się też z ciężkim życiem ludzi w regionach nędzy. Jest wędrowcem, wszędzie witanym entuzjastycznie, znanym i szanowanym. Twórca polskiego Klubu Gaja, Jacek Bożek, w majowe Dni Ziemi też prosił, żeby pomyśleć, jak daleko doprowadzić nas może chęć zdobywania za wszelką cenę wszelkich wytworów bogatego świata. Rezygnacja z takich przedmiotów i urzędzeń, mówił Pan Jacek, może uczyniłaby lepszym życie kolejnych pokoleń. A Jane dodaje: *my nie pożyczamy od naszych wnuków, bo pożyczki się oddaje – my po prostu im kradniemy ich Ziemię i przyszłość.*

Jane Goodall namawiała Polaków i w szczególności polskie dzieci, żeby zakładały kluby *Roots and Shoots* (korzenie i pędy). Każdy może w swojej najbliższej okolicy coś dla Ziemi zrobić, a takie kluby powstały już w ponad 100 krajach różnych kontynentów. Jedni w Tanzanii hodują kury, żeby nie zjadać dzikich zwierząt, inni w Anglii pomagają w budowie drózek rowerowych, żeby mniej ludzi jeździło samochodami.

Jane Goodall porywa słuchaczy przesłaniem i prostotą wywodu. W Warszawie, jak w Nowym Jorku, ludzie stojąc, długo biją brawo. Potem przychodzi refleksja, że namawia do zachowań niemożliwych, nierealnych na tym etapie rozwoju cywilizacji. A jednak źle by było, gdyby nie ogłaszano na świecie roku **ochrony bioróżnorodności** (przy pełnej świadomości, że lasy tropikalne w każdej minucie nadal są wycinane, że powstają plany przeprowadzenia autostrad przez największe parki narodowe Afryki), źle by było, gdyby Jane Goodall czy Jacek Bożek, idealisci nie z tego świata, nie przypominali nam swoim istnieniem i działalnością o tym, że planetę mamy jedną i że rodzą się na niej kolejne pokolenia dzieci i wnuków.

Magdalena FIKUS

Ostatnie tradycyjne łowy w lasach ser Petera Higgsa z Edynburga?

Jak uwolnić okolicę od smoka? Sporym problemem jest samo osaczenie mitycznej bestii. Pewną szansą byłoby zaangażowanie matematyka, który by nieistnienie smoka udowodnił. Koszty byłyby jednak horrendalne. Ścisłe udowodnienie nieistnienia wymaga dokładnego zdefiniowania smoka, co nie byłoby możliwe bez szczegółowego opisanego jego samego, o zwyczajach i interakcji ze środowiskiem nie wspominając. Do tego potrzebna by była cała rzesza biologów, socjologów etc. Koszta można by było ograniczyć, wynajmując informatyka, który smoka mógłby wysymulować (wiedza, jak smok wygląda, nie byłaby mu do niczego potrzebna), a następnie unicestwić. Niestety, nie byłoby to rozwiązanie ostateczne, bo raz powołane do elektronicznego życia smoki odradzają się w nieskończoność (stąd zresztą wziął się mitologiczny aspekt odrastających głów).

Z takim problemem musi się zmierzyć fizyk cząstek, bez oglądania się na pomoc uczonych kolegów, bo odgłosy wydobywające się z pierwotnej puszczy (początków Wszechświata) wymagają wyjaśnienia ich przyczyny. Rodzajów poszukiwanej zwierzyny jest dużo, choć wiadomo, że zdecydowana większość z nich w Przyrodzie na pewno nie występuje, bo musiałyby zamieszkiwać te same niepodzielne nisze. Jest jednak nadzieja, bo coś w tych lasach przecież żyć musi. Wśród hipotetycznej fauny poczesne miejsce zajmuje tradycyjny smok, o którym wiemy praktycznie wszystko. Nazywany jest standardowym bozonem Higgsa. Jest on jedynym nieodłownym reliktem tzw. Modelu Standardowego (królestwa) oddziaływań elementarnych, artefaktem minimalnej wersji spontanicznego naruszenia równowagi (symetrii) elektroslabej. Legenda ta wyjaśnia niezerowe masy cząstek poprzez oddziaływanie z polem ser Higgsa. Wiemy, jak smok powstaje, jak oddziałuje i jak się rozpada. Jedyne nieokreśloną przez teorię wielkością jest jego masa, ale i ona jest ograniczona od dołu poprzez dotychczasowe poszukiwania, a po dodaniu żądania konsystencji teorii również od góry.

W tak ograniczonym mateczniku (w nadziei na rękę królowy) polują już tylko dwaj najlepiej uzbrojeni rycerze: doświadczony kilkoma odwrotnymi femtobarnami Tevatron (tuż przed przejściem w stan spoczynku) oraz młody LHC. Tevatron przetrzebił nie tak dawno okolice wodopoju w środku matecznika (czyli obszar, w którym zwierzynę najłatwiej, co nie znaczy łatwo, znaleźć). Doświadczenie LHC jest jeszcze małe (około 50 odwrotnych pikobarnów pod koniec zeszłego roku, czyli dwa rzędy wielkości mniejsze niż Tevatronu), ale siła ramion większa: masa zderzającego się układu proton-proton w LHC jest prawie cztery razy większa niż układu proton-antypoton w Tevatronie. Dzięki tej sile LHC już depta po piętach Tevatronowi, a w tym roku jego doświadczenie ma wzrosnąć kilkadziesiąt razy, podczas gdy Tevatronu najwyżej dwukrotnie przed jego odwołaniem ze służby po skończonym sezonie.

Miarą rosnącego doświadczenia jest po prostu liczba zapisanych przez skrybę przypadków. Polowanie jest

bezkrwawe: rycerze szukają śladów smoka, a te są różne. Dokumentacja każdego rodzaju śladów jest zbierana oddzielnie. Pojedyncza pozostałość, wyglądająca jak ślad obecności smoka, nie ma decydującego znaczenia, bo jest wiele zwykłych zwierząt, które mogą zostawić podobne tropy. Dopiero nagromadzenie śladów w jednym miejscu można uważać za dowód.

Jak duże musi być takie nagromadzenie? Jeżeli w obszarze, odpowiadającym wielkością legowisku smoka, po ℓ polowaniach oczekuje się $n = x \cdot \ell$ przypadkowych śladów, to za legowisko uznane zostanie miejsce, w którym takich śladów będzie o $5\sigma = 5\sqrt{n}$ więcej, a jeżeli spodziewamy się, że smok powinien zostawić 2σ śladów ponad oczekiwane tło, a nie widzimy żadnej nadwyżki, to takie miejsce uznaje się za wykluczone (na poziomie ufności 95%). Wielkość $\sigma = \sqrt{n}$, używana jako miara, jest po prostu odchyleniem standardowym oczekiwanej liczby zliczeń n .

O powodzeniu polowania decyduje więc liczba ℓ wypraw do lasu oraz selektywność metody, czyli stosunek spodziewanej liczby śladów smoka do liczby śladów przypadkowych. Jak łatwo sprawdzić przy pomocy znajomego statysty, dla ustalonej selektywności zdolność do wykluczenia skaluje się z doświadczeniem rycerza jak $\sqrt{\ell}$. Przed tegorocznym sezonem łowieckim LHC, w najmniej dostępnym miejscu, wykluczał egzotyczne smoki o kilkanaście razy silniejszym niż tradycyjny feromonie. Do wykluczenia standardowego smoka wystarczy zatem wzrost liczby polowań o dwa rzędy wielkości. A tego właśnie oczekujemy najdalej do końca przyszłorocznego sezonu!

Jak widać, łowy wchodzą w decydującą fazę. Zdając sobie sprawę, że, tak jak średniowieczny rycerz był (typowo) jednostką bojową złożoną z rycerza właściwego, giermka, dwóch pachołków, koni i uzbrojenia, tak nasi rycerze są hybrydami sprzętu, oprogramowania i wielo-tysiąc-głowego czynnika ludzkiego, trudno oczekiwać bezwzględnej przestrzegania etosu rycerskiego. Wypadek przy pracy zdarzył się niedawno Atlasowi, jednemu z dwóch tytanów LHC. Wyciekły wewnętrzne, niedopracowane informacje o świecących (kanał foton-foton) bobkach wyjątkowo silnie (około 30 razy za silnie) pachnącego smoka, natychmiast rozpuszczone przez truwerów. Incydent został napiętnowany, a kolejne wycieczki do lasu pokazały [1], że kumulujący się przez pewien czas sygnałopodobny zarodek był fluktuacją tła.

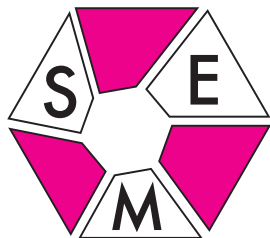
W każdym razie zbliża się moment, w którym albo zobaczymy głowę tradycyjnego smoka, albo okaże się, że królowa (Model Standardowy) jest bez ręki lub tych rąk ma za dużo, czyli (w zgodzie z powszechną nadzieją) nie jest bez skazy.

Piotr ZALEWSKI

[1] **Atlas Collaboration**, *Update of Background Studies in the Search for the Higgs Boson in the Diphoton Channel with the ATLAS detector at $\sqrt{s} = 7$ TeV*, ATLAS-CONF-2011-071, 8 maja 2011.

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl



W dniu 19 marca 2011 roku w budynku Szkoły Przymierza Rodzin w Warszawie przy ulicy Grzegorzewskiej 10 odbył się finał VI Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. W czasie trzech godzin uczestnicy zawodów zmagali się z pięcioma zadaniami finałowymi, z których jedno (naszym zdaniem najtrudniejsze) omawiamy poniżej.

Zadanie 5. Wewnątrz koła o promieniu 1 znajdują się punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$. Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt P , dla którego

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{100} \geq 100.$$

Większość poprawnych rozwiązań tego zadania była podobna do rozwiązania zaproponowanego przez Komitet Główny OMG.

Rozwiązanie firmowe. Niech P i Q będą końcami dowolnej średnicy rozważanego koła. Wtedy dla dowolnego punktu X płaszczyzny mamy $PX + XQ \geq PQ = 2$. Nierówność ta jest tzw. nierównością trójkąta dla trójki punktów P, Q i X . Więc dla $i = 1, 2, \dots, 100$ otrzymujemy $PA_i + QA_i \geq 2$. Dodając te nierówności stronami, wnioskujemy, że

$$(PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{100}) + (QA_1 + QA_2 + \dots + QA_{100}) \geq 200.$$

Z otrzymanej nierówności wynika, że co najmniej jeden z punktów P lub Q spełnia warunki zadania.

Uczestnicy zawodów znaleźli kilka innych rozwiązań tego zadania. Chcielibyśmy przedstawić jedno z nich. Rozwiązanie to opiera się na definicji środka ciężkości układu punktów materialnych. Załóżmy, że w punktach A_1, A_2, \dots, A_n umieszczono masy m_1, m_2, \dots, m_n . Oznaczmy przez m masę całego układu punktów $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ oraz przez O środek kartezjańskiego układu współrzędnych. Wtedy środkiem ciężkości tego układu punktów materialnych nazywamy taki punkt S , że

$$\vec{OS} = \frac{m_1}{m}\vec{OA_1} + \frac{m_2}{m}\vec{OA_2} + \dots + \frac{m_n}{m}\vec{OA_n}.$$

Nietrudno zauważyć, że wtedy dla dowolnego punktu P zachodzi

$$\vec{PS} = \frac{m_1}{m}\vec{PA_1} + \frac{m_2}{m}\vec{PA_2} + \dots + \frac{m_n}{m}\vec{PA_n}.$$

Rozwiązanie z wykorzystaniem środka ciężkości. Niech środek układu współrzędnych O znajduje się w środku rozważanego koła. W każdym z punktów A_1, A_2, \dots, A_{100} umieszczamy masę 1. Niech S będzie środkiem ciężkości tego układu punktów materialnych. Zauważamy, że S jest punktem wewnętrznym koła, gdyż z nierówności trójkąta mamy $OS \leq \frac{1}{100}(OA_1 + OA_2 + \dots + OA_{100}) < 1$. Niech P będzie dowolnym punktem z brzegu rozważanego koła. Wtedy z definicji S mamy $100\vec{PS} = \vec{PA_1} + \vec{PA_2} + \dots + \vec{PA_{100}}$. Ponownie korzystając z nierówności trójkąta, otrzymujemy

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{100} \geq 100PS.$$

Wystarczy więc tak wybrać punkt P , aby $PS \geq 1$, co zawsze jest możliwe (patrz rysunek).

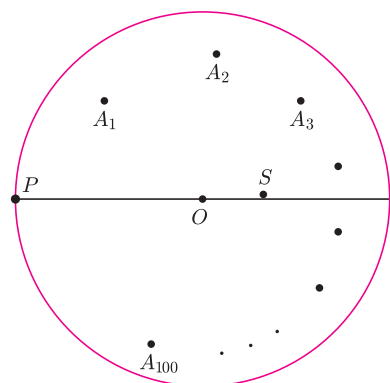
* * *

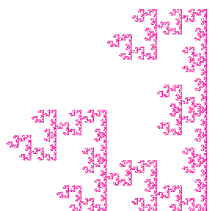
W trakcie trwania zawodów finałowych VI OMG, o godzinie 11.00 w budynku Szkoły Przymierza Rodzin w Warszawie odbyło się Pierwsze Walne Zgromadzenie Delegatów Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej. Obecnych było 19 delegatów, co stanowi około 80% wszystkich wybranych delegatów.

Walne Zgromadzenie Delegatów SEM jednogłośnie przyjęło sprawozdanie z działalności Zarządu SEM oraz sprawozdanie z działalności Komisji Rewizyjnej SEM za ostatni rok sprawozdawczy.

W czasie dyskusji programowej poruszono dwa ważne tematy. Pierwszy to stworzenie internetowej bazy danych członków SEM ułatwiającej komunikację pomiędzy członkami. Drugim była organizacja czwartej konferencji SEM.

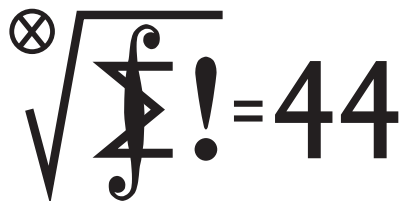
Krzysztof CHEŁMIŃSKI, Andrzej FRYSZKOWSKI





Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Rozwiązania zadań z numeru 3/2011

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

617. Znaleźć wszystkie funkcje F , określone na zbiorze wszystkich liczb całkowitych dodatnich, o wartościach rzeczywistych, spełniające równanie $F(3m + 2n) = F(m)F(n)$ dla każdej pary liczb całkowitych $m, n \geq 1$.

618. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym środek odcinka AD jest jednakowo odległy od punktów P i C , a środek odcinka CD jest jednakowo odległy od punktów P i A . Punkt Q jest środkiem odcinka BP . Wykazać, że $|\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle PCQ|$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
609 ($WT = 1,20$) i 610 ($WT = 3,03$)
z numeru 11/2010

Jerzy Cisło	Wrocław	44,58
Michał Kieza	Warszawa	42,85
Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,03

W Klubie 44 M twarz doskonale znana:
Jerzy Cisło – już ósmy raz!

617. Niech F będzie jedną z szukanych funkcji. Oznaczmy wartości $F(1), \dots, F(6)$ kolejno przez a, b, c, d, e, f ; oznaczmy ponadto $F(8) = h$, $F(10) = j$. Kładąc w równaniu $m = n = 1$ oraz $m = n = 2$, dostajemy

$$(1) \quad e = a^2, \quad j = b^2.$$

Każda czwórka $(m, n; m', n')$, w której $3m + 2n = 3m' + 2n'$, daje informację w postaci równości $F(m)F(n) = F(m')F(n')$.

Biorąc czwórki $(3, 2; 1, 5)$, $(5, 1; 3, 4)$, $(3, 1; 1, 4)$, $(4, 1; 2, 4)$, $(3, 3; 1, 6)$, otrzymujemy w ten sposób związki

$$(2) \quad bc = ae = cd, \quad ac = ad = bd, \quad c^2 = af.$$

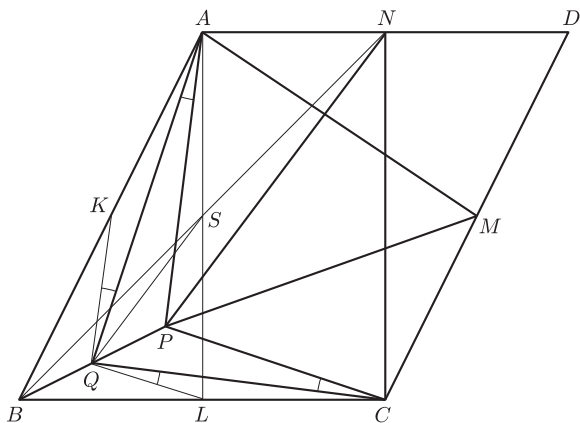
Natomiast czwórki $(3, 3; 1, 6)$, $(6, 1; 4, 4)$, $(6, 6; 8, 3)$, $(2, 10; 8, 1)$ dają zależności

$$(3) \quad c^2 = af = d^2, \quad f^2 = ch, \quad bj = ah.$$

Jeżeli $a \neq 0$, to z pierwszej równości (1) oraz ze związków (2) wnosimy kolejno, że $e \neq 0$; $b, c, d \neq 0$; $b = d$; $c = d$; $a = b$; $c = e$; $f = c^2/a$. Tak więc $a = b = c = d = e = f$; skoro zaś $e = a^2$, ta wspólna wartość wynosi 1.

Jeżeli natomiast $a = 0$, to korzystamy z zależności (3) oraz (1) i łatwo stwierdzamy, że $c = d = f = 0$; $e = 0$; $b = 0$.

Zatem na zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ funkcja F jest stała, o wartości 1 lub 0. Każda liczba naturalna $x > 6$ daje się zapisać w postaci $3m + 2n$ dla pewnych $m, n < x$. Przez oczywistą indukcję uzyskujemy wniosek, że F jest funkcją tożsamościowo równą 1 lub 0. Każda z nich spełnia zadane równanie.



618. Oznaczmy środki boków AB, BC, CD, DA odpowiednio przez K, L, M, N . W myśl założenia, $|MP| = |MA|$, $|NP| = |NC|$. Niech S będzie wspólnym środkiem przekątnych AL i BN równoległoboku $ABLN$. Odcinek SQ łączy środki dwóch boków trójkąta NBP , więc

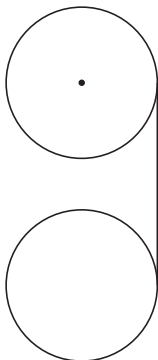
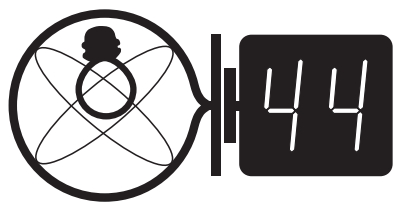
$$|SQ| = \frac{1}{2}|NP| = \frac{1}{2}|NC| = |SL| = |SA|.$$

Zatem punkt Q leży na okręgu o średnicy AL , wobec czego kąt AQL jest prosty. Analogicznie, kąt CQK jest prosty. Stąd wynika, że $|\sphericalangle AQL| = |\sphericalangle CQK|$.

Punkty K, Q są środkami dwóch boków trójkąta ABP , więc $KQ \parallel AP$. Analogicznie, $LQ \parallel CP$. Stąd, ostatecznie,

$$|\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle AQL| = |\sphericalangle CQK| = |\sphericalangle PCQ|.$$

Klub 44



Rozwiązania zadań z numeru 3/2011

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

514. Jednorodny krążek (blok) może się obracać bez tarcia wokół poziomej osi, oznaczonej na rysunku kropką. Drugi taki sam krążek jest połączony z pierwszym nawiniętą na nie nitką. Z jakim przyspieszeniem spada dolny krążek?

515. Zbiornik zawierający $n = 100$ moli gazu doskonałego o temperaturze $T_1 = 400$ K i pod ciśnieniem $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Pa znajduje się w otoczeniu powietrza atmosferycznego o temperaturze $T_0 = 290$ K i pod ciśnieniem $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Pa. Obliczyć maksymalną pracę, którą może wykonać zespół gaz+otoczenie (zarówno bezpośrednio, jak za pośrednictwem maszyn cieplnych). Ciepło molowe gazu przy stałej objętości jest równe $C_V = \frac{5}{2}R$.

514. Oznaczmy siłę napięcia nici przez N , promień krążków przez r , a masę przez m . Równanie ruchu obrotowego ma dla każdego z krążków jednakową postać

$$Nr = I\varepsilon = \frac{1}{2}mr^2\varepsilon,$$

gdzie I jest momentem bezwładności, a ε – przyspieszeniem kątowym, jednakowym – jak widać – dla obu krążków. Iloczyn $r\varepsilon$ jest przyspieszeniem pionowego odcinka nici, a także przyspieszeniem dolnego krążka względem tego odcinka. Zatem przyspieszenie a dolnego krążka względem układu nieruchomego jest równe

$$a = 2r\varepsilon.$$

Stąd $N = \frac{1}{2}mr\varepsilon = \frac{1}{4}ma$. Po podstawieniu tego wyrażenia do równania ruchu postępowego dolnego krążka

$$mg - N = ma$$

otrzymujemy rozwiązanie: $a = \frac{4}{5}g$.

515. Warunek maksymalnej pracy odpowiada doprowadzeniu gazu do temperatury T_0 i ciśnienia p_0 w procesie odwracalnym. Na przykład, można najpierw rozprężyć gaz adiabatycznie do temperatury T_0 , a następnie dokonać sprężenia lub rozprężenia izotermicznego, aby osiągnąć ciśnienie p_0 . Pomijając na razie pracę powietrza atmosferycznego, pracę przy rozprężeniu adiabatycznym W_{ad} znajdziemy jako różnicę początkowej i końcowej energii wewnętrznej:

$$W_{ad} = nC_V(T_1 - T_0).$$

Praca przy rozprężeniu izotermicznym jest natomiast równa całce

$$\int p dV = nRT_0 \int dV/V = nRT_0 \ln(V_0/V'),$$

gdzie V' jest objętością gazu po rozprężeniu adiabatycznym, a V_0 – objętością końcową. Z równania przemiany adiabatycznej w zmiennych V - T

$$VT^{1/(\gamma-1)} = \text{const} \quad (\text{gdzie } \gamma = C_p/C_V, 1/(\gamma-1) = C_V/R)$$

znajdujemy

$$V' = V_1 \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{C_V/R}.$$

Po podstawieniu $V_1 = nRT_1/p_1$, $V_0 = nRT_0/p_0$ dochodzimy do wzoru na pracę przy rozprężeniu izotermicznym

$$W_{izot} = nRT_0 \ln(V_0/V_1) - nC_V T_0 \ln(T_1/T_0).$$

Dla przyjętych danych wielkość ta jest ujemna, bo $V' > V_0$ (mamy więc sprężenie izotermiczne, a nie rozprężenie). Od sumy $W_{ad} + W_{izot}$ należy jeszcze odjąć pracę powietrza atmosferycznego

$$W_{atm} = p_0(V_0 - V_1).$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} W &= W_{ad} + W_{izot} - W_{atm} = \\ &= nC_V \left(T_1 - T_0 - T_0 \ln \frac{T_1}{T_0} \right) + nRT_0 \ln \frac{p_1 T_0}{p_0 T_1} - nRT_0 + nR \frac{p_0}{p_1} T_1 = 49,5 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

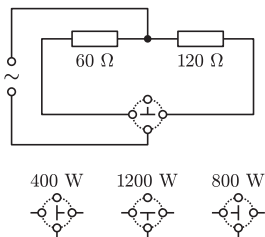
Ten sam wynik otrzymamy także w innych procesach odwracalnych prowadzących do wyrównania ciśnień i temperatur. Na przykład, można by najpierw w przemianie izochorycznej odwracalnie obniżyć temperaturę do T_0 (tzn. zastosować doskonały silnik cieplny korzystający z gazu w zbiorniku jako grzejnika, a z otoczenia jako chłodnicy), a następnie zastosować rozprężenie izotermiczne jak poprzednio.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 510 ($WT = 2,44$) i 511 ($WT = 1,60$) z numeru 1/2011

Jerzy Witkowski	Radlin	39,05
Tomasz Rudny	Poznań	35,20
Tomasz Wietecha	Tarnów	33,64
Andrzej Idzik	Bolesławiec	32,85
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	30,78
Michał Koźlik	Gliwice	19,00



Rozwiązanie zadania F 791. Połączenia wg schematu pokazanego na rysunku poniżej pozwalają otrzymać każdą z trzech pożądanych mocy.





Rozwiązanie zadania M 1318.

Załóżmy, że liczba $2^k + k^2$ jest pierwsza. Jest ona większa od 2, więc nieparzysta. Zatem liczba k musi być nieparzysta. Ale wówczas 2^k daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Skoro kwadrat liczby całkowitej daje resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 3, to aby $2^k + k^2$ nie było podzielne przez 3, potrzeba, aby k było podzielne przez 3. Ponieważ k jest liczbą pierwszą, jedyną możliwością to $k = 3$ i wówczas $2^k + k^2 = 17$ jest liczbą pierwszą.

Kwazary biorą swą nazwę od pierwotnej klasyfikacji ich jako punktowych, bardzo jasnych obiektów – *quasi-stellar objects*; w rzeczywistości są to aktywne jądra odległych galaktyk, emitujące olbrzymie ilości promieniowania elektromagnetycznego w szerokim zakresie częstotliwości.

Pierwsza co do jasności gwiazda Orła, Altair, tworzy wraz z Denebem (α Łabędzia) oraz Wegą (α Lutni) formację zwaną Trójkątem Letnim – pisaliśmy o nim w poprzednim numerze.

Prosto z nieba: Mikrokwazar GRS1915+105

Czarne dziury ujawniają nam swe istnienie poprzez oddziaływanie z otaczającą materią. Szczególnie spektakularne świadectwa ich obecności zapewniają obserwacje układów podwójnych, ponieważ oddziaływanie grawitacyjne czarnej dziury z towarzyszem, będącym często zwykłą gwiazdą ciągu głównego, prowadzi w sprzyjających okolicznościach do utworzenia dysku akrecyjnego. Materia dysku, spływająca na czarną dziurę po coraz ciasniejszych orbitach, rozgrzewa się w wyniku tarcia w procesie zwanym różniczkową rotacją, emitując wysokoenergetyczne promieniowanie rentgenowskie, którego parametry rejestrowane są przez kosmiczne detektory. Obiekty te nazywane są często *mikrokwazarami*, czyli miniaturowymi, galaktycznymi wersjami kwazarów. Interesującym przedstawicielem tego typu układów jest GRS1915+105, odkryty w 1992 r. przez rosyjskiego satelitę Granat. Układ GRS1915+105 intryguje naukowców z wielu powodów. W nim, jako pierwszym, zaobserwowano pozornie nadświetlne prędkości wyrzucanych ponad powierzchnię dysku strug materii (dżetów) – efekt ten tłumaczy się złudzeniem wywołanym obserwacją prostopadłej do sfery niebieskiej składowej prędkości elementów dżetu poruszających się z relatywistyczną prędkością. Oszacowano również masę czarnej dziury na $14 \pm 4 M_{\odot}$, co stanowi rekord w kategorii „galaktycznych gwiazdowych czarnych dziur”. Niezwykajny jest także jej spin – według niedawnych badań, kręci się ona z częstością bliską maksymalnej możliwej, przewidzianej przez tak zwane rozwiązanie Kerra w ogólnej teorii względności (1150 razy na sekundę).

Patrząc wieczorem w niebo w kierunku południowo-wschodnim, zauważymy bez trudu gwiazdozbiór Orła. Opisany wyżej układ podwójny GRS1915+105 znajduje się w odległości 40 tysięcy lat świetlnych od Ziemi, w prawym skrzydle Orła – niestety, zbyt daleko na obserwację gołym okiem, a nawet na wykonanie zdjęcia precyzyjnym teleskopem. A szkoda, ponieważ szczegóły interakcji dysku akrecyjnego, wiatru gwiazdowego i dżetu byłyby kamieniem z Rosetty dla wielu astrofizyków.

Michał BEJGER

Lipiec

Lipcowe noce wciąż, niestety, będą niezbyt długie i jasne, szczególnie te na początku miesiąca. Podobnie też jak czerwcowe, nie będą nas rozpieszczały, jeśli chodzi o planety. Wieczorem i w pierwszej połowie nocy, nisko nad południowo-zachodnim horyzontem, w gwiazdozbiore Panny, możemy spróbować odszukać Saturna (0,9 mag), jednak warunki jego obserwacji pogorszą się wraz z upływem dni. W tym samym mniej więcej czasie nad południowo-wschodnim horyzontem pojawiają się Neptun (7,9 mag) w gwiazdozbiore Wodnika i, nieco później, Uran (7,9 mag) w konstelacji Ryb.

Obie planety są zbyt słabe, by móc je obserwować gołym okiem, jednak możemy spróbować odszukać je za pomocą teleskopu, a jeśli to będzie Uran, to nawet lornetki. Nisko, na coraz bardziej jaśniejącym wschodnim niebie powinniśmy bez trudu odnaleźć Jowisza, mniej więcej gdzieś na pograniczu Ryb, Barana i Wieloryba. Warunki do obserwacji Neptuna (7,8 mag) i Urana (5,8 mag), a przede wszystkim jasnego Jowisza (-2,4 mag) znacznie się poprawią pod koniec miesiąca, planety te bowiem zobaczymy nie tylko wcześniej, ale i wyżej nad horyzontem na coraz ciemniejszym niebie. Marsa i Wenus trudno będzie obserwować ze względu na to, że wschodzą krótko przed wschodem Słońca, z kolei Merkury leży zbyt blisko naszej dziennej gwiazdy.

Trójkąt Letni, tworzony przez Wegę, Deneba i Altaira, jak przystało na lato, będzie doskonale widoczny przez całą noc wysoko na niebie. Gromadę kulistą M13 w Herkulesie

powinniśmy łatwo odnaleźć za pomocą lornetki, a pod koniec miesiąca, w sprzyjających warunkach, poza miastem i po zachodzie Księżyca, być może uda się nam ją nawet zobaczyć gołym okiem. Nad północno-wschodnim horyzontem jak zwiewna mgiełka zaprezentuje się nam galaktyka spiralna M31 w Andromedzie. A skoro jest lipiec i wspomnieliśmy już o Trójkącie Letnim, warto poszukać w gwiazdozbiore Łabędzia mgławicy NGC 7000, „Ameryka Północna”. Rzeczywiście, na zdjęciach mgławica, oświetlona przez gwiazdę Deneb, przypomina kształtem kontynent amerykański z widoczną „Florydą”, „Zatoką Meksykańską” i „Meksykiem”. Mimo nie tak małej jasności (4 mag) mgławica ta, ze względu na swoje rozmiary, nie jest widoczna gołym okiem. I choć jej strukturę można dostrzec wyłącznie na fotografii, warto jej się przyjrzeć za pomocą lornetki.

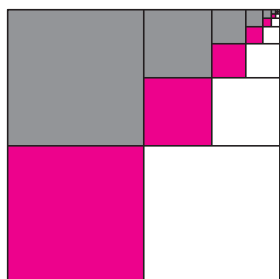
Warto też może odnaleźć nad południowym horyzontem niewielki gwiazdozbiór o nazwie Tarcza Sobieskiego. Nazwę tę wprowadził Jan Heweliusz na cześć króla Jana III Sobieskiego. W gwiazdozbiore tym znajduje się urodziwa gromada otwarta M11 (Dzika Kaczka) o jasności 6,3 mag i średnicy 12', a więc można ją podziwiać już przy użyciu lornetki.

Nów Księżyca przypada na początek miesiąca (1 VII) oraz na jego koniec (30 VII), natomiast pełnia wypadnie 15 VII. Tuż po północy 24 VII można będzie popatrzeć na złączenie Jowisza i Księżyca, a 28 VII Księżyca i Marsa. A zatem czystego nieba!

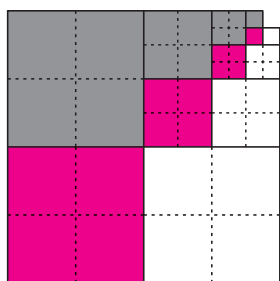
Agnieszka MAJCZYNA

Niektóre sumy nieskończone można zilustrować, tworząc nieskończony rysunek, którego pewna część jest podobna do całości. Na przykład na rysunku 1 taką częścią jest jego prawa górna ćwiartka, a także prawa górna ćwiartka tej ćwiartki itd. Poniżej kilka przykładów sum nieskończonych wraz z tego rodzaju ilustracjami. Na każdym z rysunków kolorowa część odpowiada rozważanej sumie.

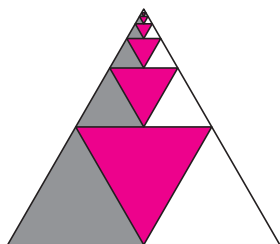
Dlaczego poszczególne rysunki ilustrują odpowiednie sumy? Które części rysunków są podobne do całości?



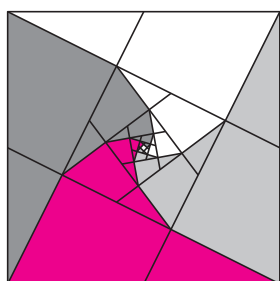
Rys. 1



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

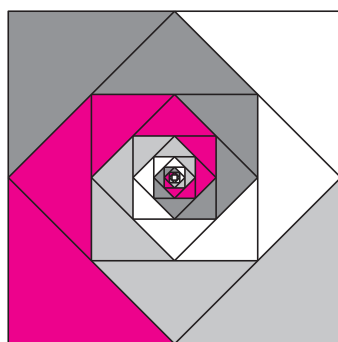
Literatura

C. Alsina, R. Nelsen, *Math Made Visual*, The Mathematical Association of America, 2006.

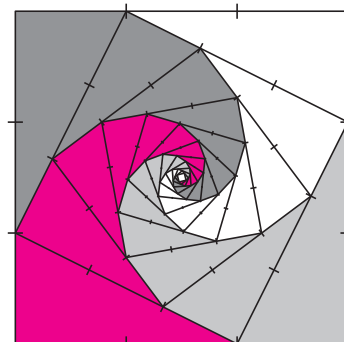
Rys. 1. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{1}{3}$.

Rys. 2. $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{4}$.

Rys. 3. $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^3 + \dots = \frac{1}{4}$.



Rys. 2

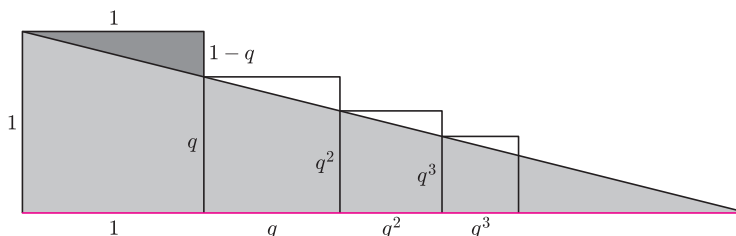


Rys. 3

Równości 1–3 można też uzyskać ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego:

Rys. 4. Dla $0 < q < 1$ zachodzi równość $1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$.

Opis: Ustawmy kolejno kwadraty o bokach $1, q, q^2, q^3, \dots$



Rys. 4

Połączmy lewe górne wierzchołki kolejnych kwadratów. Uzyskane odcinki leżą na jednej prostej, bo w każdym kwadracie prawy bok podzielony jest w takim samym stosunku $(1 - q) : q$. Jasny trójkąt jest podobny do ciemnego (bo mają równe kąty), stąd równość stosunków długości ich przyprostokątnych:

$$\frac{1 + q + q^2 + q^3 + \dots}{1} = \frac{1}{1 - q}. \square$$

Podobnymi rysunkami można ilustrować niektóre sumy skończone:

Rys. 5. Dla całkowitych $n > 0$ zachodzi $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$.

Opis: Kwadraty w każdym z trzech kolorów mają łączne pole $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n$, a wszystkie razem mają pole $4 \cdot 4^n - 1 = 4^{n+1} - 1$. \square

Zadania domowe

1. Znajdź ilustracje sum:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots = \frac{1}{8}.$$

2. Ilustracją jakiej sumy jest rysunek 6?

3. Sprawdź, że rysunek 7 jest ilustracją sumy $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots = \frac{1}{4}$.