






W następnym numerze polecamy anamorfizmy



Spójrz na ten obraz z góry pod kątem 30°.

SPIS TREŚCI NUMERU 5 (444)

Matematyka przyjemna i pożyteczna	str. 1
Jak one obiegują? <i>Aleksander Schwarzenberg-Czerny</i>	str. 4
Przychodzi filmowiec do fizyka <i>Szymon Charzyński</i>	str. 7
Matematyczne Noble 2010 <i>Stefan Jackowski</i>	str.10
 Zadania	str.11
Aktualności: Katastrofa w Japonii	str.12
Ciąg EKG, czyli zaskakująca zabawa z teorią liczb <i>Marcin Pilipczuk</i>	str.14
Jak wyznaczać wyrazy ciągu EKG? <i>Jakub Radoszewski</i>	str.15
Informatyczny kącik olimpijski (41): Samogenerujący się ciąg <i>Jakub Radoszewski</i>	str.18
 Sklonujmy sobie mamuta <i>Magdalena Fikus</i>	str.19
 Wspomnienia z dawnych lat <i>Marek Kordos</i>	str.20
 Wykłady popularne z matematyki	str.21
Klub 44	str.22
Patrz w niebo: Układ bety Pictoris	str.24
Maj	str.24
 Narysuj równoległobok! <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski. Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk, Diana Gawronkiewicz / Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

FIRMY DYSTRYBUUJĄCE *Deltę*

Fran-Press: www.franpress.pl, infolinia 801-679-466.

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600,

warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2011 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują Regiony Sprzedaży RUCH SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania wpłat: do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH SA, Pion Kolportażu, Zespół ds. Obrotu Zagranicznego, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-53-28-823 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Zespołu lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), fax 22-53-28-734, infolinia 800-1200-29. Płatność kartą kredytową (Visa, MasterCard, American Express) przez www.ruch.pol.pl

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:

SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;

w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;

w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;

kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesyłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.deltami.edu.pl/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Matematyka przyjemna i pożyteczna, czyli o konkursach Fundacji Matematyków Wrocławskich słów kilka



Fundacja Matematyków Wrocławskich została ustanowiona z inicjatywy prof. Andrzeja Hulanickiego w 1990 roku przez profesorów Stanisława Hartmana i Kazimierza Urbanika. Jej celem jest pomoc utalentowanym młodym ludziom w uczeniu się i studiowaniu matematyki oraz w pracy naukowej, a także doskonalenie zawodowe nauczycieli i popularyzacja nauki. Działalność ta finansowana jest z darowizn osób prywatnych oraz z dotacji różnych instytucji.



Popularyzacja matematyki

FMW wspiera wydawanie kwartalnika dla młodzieży pt. „Magazyn Miłośników Matematyki” oraz edytowanego w Internecie „Wrocławskiego Portalu Matematycznego”, organizuje międzyszkolne kółka matematyczne, obozy naukowe i odczyty dla uczniów, a także seminaria, kursy i wyjazdy szkoleniowe dla nauczycieli. Jednak najbardziej charakterystyczne w działalności fundacji są autorskie konkursy, wśród których wymienić należy: Maratony Matematyczne, Matematyczne Marsze na Orientację, Dolnośląskie Mecze Matematyczne, Konkursy Matematyczne „Koma”, Olimpiadę Lingwistyki Matematycznej, Zawody Lingwistyczne dla SP „Wieża Babel”, Konkursy Matematycznego Origami „Żuraw”, Mistrzostwa Wrocławia w Geometrii Elementarnej oraz Mistrzostwa Wrocławia w Szybkim Liczeniu. Są one adresowane do uczniów ze wszystkich poziomów szkół, a niektóre także do rodziców i nauczycieli. Mają otwarty charakter i często uczestniczą w nich szkoły z odległych regionów Polski. Cieszą się dużym powodzeniem, gdyż żaden nie ma typowej dla wielu innych konkursów formy, sprowadzającej się do kartki z zadaniami, ołówka, karty odpowiedzi i... „pokaż, co umiesz”. Forma wrocławskich konkursów zawsze jest atrakcyjna i sprzyja nie tyle sprawdzeniu wiedzy, co jej zdobywaniu. To konkursy, które uczą i bawią, pokazują, że matematyka jest pożyteczna i przyjemna. Ponieważ szczupłe rozmiary *Delty* nie pozwalają przedstawić wszystkich, ani nawet kilku konkursów, opowiem o moim ulubionym...



Konkurs matematyczny „Koma”

Jest fajny, bo nie korzysta ze szkolnej wiedzy, dzięki czemu może być skierowany nie tylko do najlepszych matematyków, ale do wszystkich uczniów o dużym potencjale intelektualnym. Ważna jest w nim umiejętność słuchania ze zrozumieniem, robienia dobrych notatek i przetwarzania informacji. Konkurs zaczyna się wykładem dotyczącym zupełnie nowego dla słuchaczy pojęcia. Po nim jest przerwa na uporządkowanie notatek, rozmowy z kolegami, nauczycielami i wykładowcą, zadawanie pytań i wyjaśnianie wątpliwości. Potem następuje część zadaniowa (można w niej korzystać ze sporządzonych wcześniej notatek). Na koniec jest dalsza część wykładu, dotycząca zastosowań poznanego pojęcia. Co ciekawe, wykłady finałowe dotyczą tego samego zagadnienia dla wszystkich poziomów szkół, powtarza się też 90% zadań. Analiza wyników wskazuje, że wiek uczniów i ich wcześniejsza wiedza nie mają w tym konkursie decydującego znaczenia. Jak to wygląda w praktyce, pokażemy na przykładzie tegorocznej edycji finałowej, której bohaterem był...



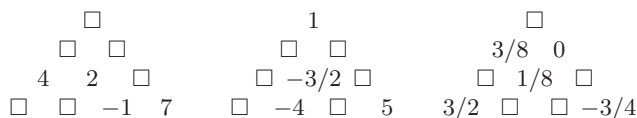
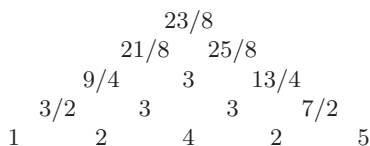
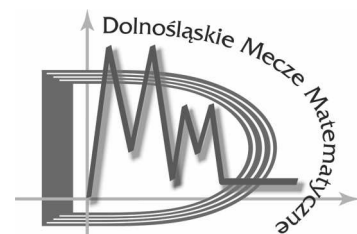
Wierzchołki piramid. Dla danej listy liczb L tworzymy nową listę $S[L]$ tak, że dodajemy i dzielimy przez 2 kolejne pary liczb, np. gdy $L = [1, 2, 4, 2, 5]$, to $S[L] = [3/2, 3, 3, 7/2]$, $S[3, 5, 9] = [4, 7]$, $S[5, -5, 7, 11, -11] = [0, 1, 9, 0]$.

Ćwiczenie. Spróbuj odgadnąć, co kryje się pod kratkami: $S[1, 5, \square, 13] = [3, 4, 8]$, $S[\square, 4, 8, \square] = [3, \square, 5]$. Czasem z uzupełnieniem list może być kłopot, bo można to zrobić na wiele sposobów albo żaden sposób nie jest dobry, np. $S[\square, 4] = \square$, $S[\square, 4, 8] = [3, 5]$.

Opisaną operację S uśredniania listy liczb można iterować, czyli powtarzać wiele razy, np. $S^3[1, 2, 4, 2, 5] = S[S[S[1, 2, 4, 2, 5]]] = S[S[3/2, 3, 3, 7/2]] = S[9/4, 3, 13/4] = [21/8, 25/8]$.

Wyniki kolejnych iteracji wygodnie jest notować w postaci piramidy, jak na diagramie obok. Możemy robić to tak długo, aż pozostanie jedna liczba, którą nazwiemy wierzchołkiem piramidy i oznaczymy $W[L]$, np. $W[1, 2, 4, 2, 5] = S^4[1, 2, 4, 2, 5] = S[21/8, 25/8] = 23/8$.

Ćwiczenie. Spróbuj uzupełnić poniższe piramidy.



Przy obliczaniu wierzchołków piramid zachodzą pewne ogólne prawidłowości. Czy potrafisz je uzasadnić?

1) $W[a, a, a, \dots, a] = a$.

Np. $W[8, 8, 8, 8, 8] = 8$, bo wtedy cała piramida składa się z ósemek. Sprawdźmy to dla drugiego poziomu:

$$S[8, 8, 8, 8, 8] = [(8 + 8)/2, (8 + 8)/2, (8 + 8)/2, (8 + 8)/2] = [8, 8, 8, 8].$$

2) $W[c \cdot a_1, c \cdot a_2, c \cdot a_3, \dots, c \cdot a_n] = c \cdot W[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$.

Np. $W[7 \cdot 2, 7 \cdot 3, 7 \cdot (-4), 7 \cdot 5] = 7 \cdot W[2, 3, -4, 5]$, bo wszystkie liczby w piramidzie o podstawie $[7 \cdot 2, 7 \cdot 3, 7 \cdot (-4), 7 \cdot 5]$ powstają z przemnożenia przez 7 liczb z piramidy o podstawie $[2, 3, -4, 5]$. Sprawdźmy to dla drugiego poziomu:

$$\begin{aligned} S[7 \cdot 2, 7 \cdot 3, 7 \cdot (-4), 7 \cdot 5] &= [(7 \cdot 2 + 7 \cdot 3)/2, (7 \cdot 3 + 7 \cdot (-4))/2, (7 \cdot (-4) + 7 \cdot 5)/2] = \\ &= [7 \cdot (2 + 3)/2, 7 \cdot (3 + (-4))/2, 7 \cdot ((-4) + 5)/2] = [7 \cdot (5/2), 7 \cdot (-1/2), 7 \cdot (1/2)]. \end{aligned}$$

3) $W[a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n] = W[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] + W[b_1, b_2, b_3, \dots, b_n]$.

Np. $W[2 + 5, 3 + 4, -4 + 11, 5 + 2] = W[2, 3, -4, 5] + W[5, 4, 11, 2]$, bo wszystkie liczby w piramidzie o podstawie $[2 + 5, 3 + 4, -4 + 11, 5 + 2]$ powstają z dodania odpowiednich liczb z piramid o podstawach $[2, 3, -4, 5]$ i $[5, 4, 11, 2]$. Sprawdźmy to dla drugiego poziomu:

$$\begin{aligned} S[2 + 5, 3 + 4, -4 + 11, 5 + 2] &= [(2 + 5 + 3 + 4)/2, (3 + 4 + (-4) + 11)/2, ((-4) + 11 + 5 + 2)/2] = \\ &= [(2 + 5)/2 + (3 + 4)/2, (3 + 4)/2 + ((-4) + 11)/2, ((-4) + 11)/2 + (5 + 2)/2]. \end{aligned}$$

4) $W[a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n] = W[a_n, a_{n-1}, \dots, a_3, a_2, a_1]$.

Np. $W[2, 3, -4, 5] = W[5, -4, 3, 2]$, bo piramida o podstawie $[5, -4, 3, 2]$ jest lustrzanym odbiciem piramidy o podstawie $[2, 3, -4, 5]$. Gdzie należy ustawić lustro?

Zatem jeśli obliczymy, że $W[2, 3, -4, 5] = 1/2$, to ten fakt możemy wykorzystać do obliczenia wierzchołków wielu innych piramid, np.

- $W[10, 15, -20, 25] = W[5 \cdot 2, 5 \cdot 3, 5 \cdot (-4), 5 \cdot 5] = 5 \cdot W[2, 3, -4, 5] = 5 \cdot 1/2 = 5/2$,
- $W[-20, -30, 40, -50] = W[(-10) \cdot 2, (-10) \cdot 3, (-10) \cdot (-4), (-10) \cdot 5] = (-10) \cdot 1/2 = -5$,
- $W[1, 3/2, -2, 5/2] = W[1/2 \cdot 2, 1/2 \cdot 3, 1/2 \cdot (-4), 1/2 \cdot 5] = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$,
- $W[3, 4, -3, 6] = W[2 + 1, 3 + 1, (-4) + 1, 5 + 1] = W[2, 3, -4, 5] + W[1, 1, 1, 1] = 1/2 + 1 = 3/2$,
- $W[1, 0, 7, -2] = W[3 - 2, 3 - 0, 3 - (-4), 3 - 5] = W[3, 3, 3, 3] - W[2, 3, -4, 5] = 3 - 1/2 = 5/2$.

5) Poniższe przykłady ilustrują jeszcze inny pomysł na sprytne obliczanie wierzchołków niektórych piramid:

- $W[6, 6, 6, 6, 6, 0, 0, 0, 0] = 2 \cdot W[3, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0] = W[3, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0] + W[0, 0, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3] = W[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3] = 3$,
- $W[1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2] = W[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] + W[0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1] = 1 + 1/2 \cdot (W[0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1] + W[1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]) = 1 + 1/2 \cdot W[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] = 1 + 1/2 \cdot 1 = 3/2$,
- $W[3, 5, 7, 9] = 1/2 \cdot (W[3, 5, 7, 9] + W[3, 5, 7, 9]) = 1/2 \cdot (W[3, 5, 7, 9] + W[9, 7, 5, 3]) = 1/2 \cdot W[3 + 9, 5 + 7, 7 + 5, 9 + 3] = 1/2 \cdot W[12, 12, 12, 12] = 1/2 \cdot 12 = 6$,
- $W[1, 4, 7, 10, 13, 16] = 1/2 \cdot (W[1, 4, 7, 10, 13, 16] + W[1, 4, 7, 10, 13, 16]) = 1/2 \cdot (W[1, 4, 7, 10, 13, 16] + W[16, 13, 10, 7, 4, 1]) = 1/2 \cdot W[1 + 16, 4 + 13, 7 + 10, 10 + 7, 13 + 4, 16 + 1] = 1/2 \cdot W[17, 17, 17, 17, 17, 17] = 1/2 \cdot 17 = 17/2$,
- $W[1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4] = 1/2 \cdot (W[1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4] + W[1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4]) = 1/2 \cdot (W[1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4] + W[4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1]) = 1/2 \cdot W[5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5] = 1/2 \cdot 5 = 5/2$.

6) Pokażemy jeszcze jedną własność wierzchołków piramid. Niech $\{a_i\}, \{b_j\}, \{c_i\}$ będą dowolnymi ciągami liczb, przy czym $\{a_i\}$ ma tyle samo wyrazów co $\{c_i\}$. Wówczas

$$\begin{aligned} W[\{a_i\}, 0, \{b_j\}, 0, \{c_i\}] &= W[\{a_i\}, 1, \{b_j\}, -1, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, -2, \{b_j\}, 2, \{c_i\}] = \\ &= W[\{a_i\}, 5, \{b_j\}, -5, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, -2/3, \{b_j\}, 2/3, \{c_i\}]. \end{aligned}$$

Wynika ona z poniższej prostej obserwacji. Niech $\{0_i\}$ i $\{0_j\}$ oznaczają ciągi zer tej samej długości co ciągi $\{a_i\}$ i $\{b_j\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, -1, \{0_i\}] &= W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, 0, \{0_i\}] + (-1) \cdot W[\{0_i\}, 0, \{0_j\}, 1, \{0_i\}] = \\ &= W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, 0, \{0_i\}] - W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, 0, \{0_i\}] = 0. \end{aligned}$$

Stąd wynika na przykład, że:

$$\begin{aligned} W[\{a_i\}, -2/3, \{b_j\}, 2/3, \{c_i\}] &= W[\{a_i\}, 0, \{b_j\}, 0, \{c_i\}] + (-2/3) \cdot W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, -1, \{0_i\}] = \\ &= W[\{a_i\}, 0, \{b_j\}, 0, \{c_i\}] + (-2/3) \cdot 0 = W[\{a_i\}, 0, \{b_j\}, 0, \{c_i\}]. \end{aligned}$$

Można też łatwo zobaczyć, że:

$$W[\{a_i\}, 7, \{b_j\}, 3, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 9, \{b_j\}, 1, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 6, \{b_j\}, 4, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 5, \{b_j\}, 5, \{c_i\}],$$

wystarczy do pierwszej piramidy „dodać” odpowiednio $\{0_i\}, 2, \{0_j\}, -2, \{0_i\}, \{0_i\}, -1, \{0_j\}, 1, \{0_i\}$ lub $\{0_i\}, -2, \{0_j\}, 2, \{0_i\}$.

7) Można mozolnie sprawdzić, że zachodzą równości: $W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] = 7/128$, $W[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] = 3 \cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ i $W[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] = 5 \cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$. Ta informacja pozwala łatwo obliczać wierzchołki niektórych piramid o podstawie długości 8, np.

- $W[0, 2, 7, 0, 0, 0, 0, 0] = 2 \cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] + 7 \cdot W[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] = 2 \cdot 7/128 + 7 \cdot 3 \cdot 7/128 = 23 \cdot 7/128$,
- $W[0, 1, 2, 6, 0, 0, 0, 0] = 1 \cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] + 2 \cdot W[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] + 6 \cdot W[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] = 1 \cdot 7/128 + 2 \cdot 3 \cdot 7/128 + 6 \cdot 5 \cdot 7/128 = 37 \cdot 7/128$,
- $W[0, 5, 1, 2, 7, 1, 3, 0] = (5 + 3) \cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] + (1 + 1) \cdot W[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] + (2 + 7) \cdot W[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] = 8 \cdot 7/128 + 2 \cdot 3 \cdot 7/128 + 9 \cdot 5 \cdot 7/128 = 59 \cdot 7/128$.



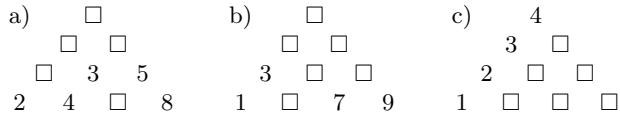
Tyle wykładu, a teraz zapraszamy do rozwiązania kilku konkursowych zadań.
Czy zrobisz to w 60 minut?



Zadanie 1. Uzupełnij zapisy.

- a) $S[0, 4, 6] = \dots$ c) $S^3[12, 4, 10, 2, 0] = \dots$ e) $S[\square, \square, 8, 2] = [1, 6, \square]$.
b) $S[12, 4, 10, 2, 0] = \dots$ d) $S[2, \square, 8] = [4, 7]$. f) $S[\square, \square, \square, 2] = [5/2, 22/4, 5]$.

Zadanie 2. Uzupełnij piramidy.



Zadanie 3. Podaj po trzy różne podstawy L takie, że:

- a) $S[L] = [-5, 2, 7]$, b) $W[L] = 1$, c) $W[L] = 0$.

Zadanie 4. Ile wynosi suma wszystkich liczb w piramidzie o danej podstawie?

- a) $[2/3, 2/3, 2/3, 2/3, 2/3, 2/3]$, d) $[-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$,
b) $[7, -7, 7, -7, 7, -7, 7, -7, 7]$, e) $[8, -8, 8, -8, 8, 8]$,
c) $[7, -7, 7, -7, 7, -7, 7, -7, 7, -7, 7]$,

Zadanie 5. Uzupełnij. Niech p oznacza ilość liczb w podstawie L pewnej piramidy.

- a) Dla $p = 37$ ilość liczb w $S[L]$ jest równa \dots , a w $S^3[L]$ jest równa \dots
b) Ilość liczb w $S^{47}[L]$ jest równa 123, więc $p = \dots$
c) Dla $p = 7$ ilość liczb w całej piramidzie jest równa \dots , a dla $p = 8$ jest równa \dots
d) Jeśli w całej piramidzie jest 21 liczb, to $p = \dots$, a jeśli jest ich 66, to $p = \dots$
e) Jeśli w całej piramidzie jest 3 razy więcej liczb niż w podstawie, to $p = \dots$,
a jeśli jest ich 9 razy więcej, to $p = \dots$

Zadanie 6. Spośród podanych liczb podkreśl:

- a) największą $W[173, 234, 439]$, $W[234, 173, 439]$, $W[173, 439, 234]$, $W[439, 234, 173]$.
b) najmniejszą $W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, $W[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, $W[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.
c) najmniejszą $W[0, 2, 4, 6, 8]$, $W[2, 4, 6, 8]$, $2 \cdot W[1, 2, 3, 4]$, $W[0, 2, 4, 6, 8, 10]$.
d) największą $W[-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7]$, $(-2) \cdot W[2, 2, 2, 2, 2, 2]$, $W[1, -2, -5, -8]$.

Zadanie 7. Wiadomo, że $W[0, 0, 1, 0, 0, 0]$ jest 10 razy większe od $W[1, 0, 0, 0, 0, 0]$ i 2 razy większe od $W[0, 1, 0, 0, 0, 0]$. Ile razy większa od $W[1, 0, 0, 0, 0, 0]$ jest liczba:

- a) $W[0, 0, 4, 0, 0, 0]$, c) $W[1, 0, 2, 0, 0, 0]$, e) $W[2, 3, 4, 0, 0, 0]$, g) $W[0, 0, 0, 2, 0, 0]$,
b) $W[0, 7, 0, 0, 0, 0]$, d) $W[0, 2, 3, 0, 0, 0]$, f) $W[-7, 0, 3, 0, 0, 0]$, h) $W[0, 3, 0, 0, 5, 0]$.

Zadanie 8. Wiadomo, że podstawa L piramidy składa się z trzech liczb, których suma jest równa sumie liczb z $S[L]$. Oceń wypowiedzi Karola Omyłka.

- a) W L musi być choć jedno zero.
b) Suma liczb z L musi być równa zero.
c) W L musi być liczba ujemna.
d) Wszystkie liczby z L muszą być równe 0.
e) Suma liczb z $S[L]$ musi być równa $2 \cdot W[L]$.
f) Suma liczb z L musi być równa $2 \cdot W[L]$.

Zadanie 9. Wpisz jeden ze znaków: $<$, $=$, $>$:

- a) $W[22, 31, 2, 55, 32, 22, 2, 51, 47] \dots W[22, 31, 0, 55, 32, 22, 4, 51, 47]$,
b) $W[22, 31, -1, 55, 32, 22, 5, 51, 47] \dots W[22, 31, 0, 55, 32, 22, 4, 51, 47]$,
c) $W[22, 31, 3, 55, 32, 22, 2, 51, 47] \dots W[22, 31, 0, 55, 32, 22, 4, 51, 47]$,
d) $W[22, 31, -2, 55, 32, 22, -2, 51, 47] \dots W[22, 31, 0, 55, 32, 22, 4, 51, 47]$,
e) $W[4, 5, 7, 8, 9, 9, 9, 8, 7, 5, 4] \dots W[8, 10, 14, 16, 18, 18, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$,
f) $2 \cdot W[4, 5, 7, 8, 9, 9, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \dots W[8, 10, 14, 16, 18, 18, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$,
g) $W[2, 2, 2, 2, 2, 9, 9, 8, 7, 5, 4] \dots W[8, 10, 14, 16, 18, 18, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$,
h) $W[0, 0, 0, 0, 0, 18, 18, 16, 14, 10, 8] \dots W[8, 10, 14, 16, 18, 18, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

Zadanie 10. Oznaczmy $[k | m] = [1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0]$ (k jedynek, m zer). Wtedy np. $[9, 9, 3, 3, 0] = 6[2 | 3] + 3[4 | 1]$, $2S[2 + 3 | 1] = [4 | 1] + [5 | 0]$. Zapisz tymi symbolami:

- a) $[8, 7, 2, 1] = \dots$, d) $S^8[k | 0] = \dots$, g) $W[k | 1] = \dots$,
b) $[1, 6, 2, 5] = \dots$, e) $4S[k + 4 | m + 8] = \dots$, h) $W[k | 2] = \dots$,
c) $[5, -6, 0, 1] = \dots$, f) $S^2[k | m] = \dots$, i) $W[k | k] = \dots$

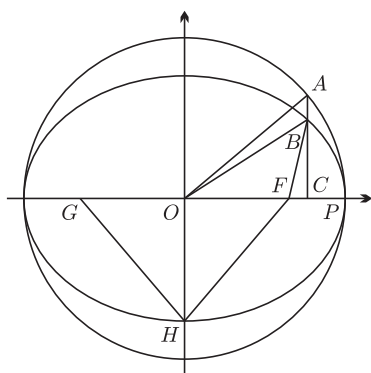


Mistrzostwa Wrocławia w Szybkim Liczeniu



Opracowanie tekstu: Małgorzata MIKOŁAJCZYK, autorem zadań z KOMY jest Krzysztof OMILJANOWSKI, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego.

Johannes Kepler wyprowadził swoje pierwsze dwa prawa, analizując obserwacje Marsa wykonane przez Tycho Brahego. Po stuleciach obserwacji okresy orbitalne (lata) Ziemi i Marsa, T_Z i T_M , były wtedy znane bardzo dokładnie. Kepler przytomnie zauważył, że po upływie każdego swojego roku Mars znajduje się w tym samym punkcie przestrzeni, ale obserwowany jest z innego punktu ziemskiej orbity, jako że w tym czasie Ziemia obiega całą swoją orbitę i jeszcze dodatkowy łuk, którego długość łatwo obliczyć, znając różnicę obu okresów. Znając ów łuk, Kepler mógł wyznaczyć długość boku Z_1Z_2 trójkąta MZ_1Z_2 o wierzchołkach w początkowym położeniu Marsa M , początkowym położeniu Ziemi Z_1 oraz położeniu Ziemi po upływie marsjańskiego roku Z_2 . Kąty przy boku Z_1Z_2 były znane dzięki obserwacjom Brahego, co pozwoliło Keplerowi wyznaczyć przestrzenne położenie Marsa. Powtarzając procedurę dla innych punktów orbity Marsa, Kepler określił kształt całej tej orbity, łącznie z informacją o czasie przejścia przez każdy punkt. Tu był tylko o jeden krok od empirycznego stwierdzenia, że orbita jest elipsą, a Słońce znajduje się w jej ognisku (pierwsze prawo Keplera), i że linia łącząca Słońce z planetą, tzw. *promień wodzący*, zakreśla równą część pola orbity w równym czasie (drugie prawo Keplera). Dopiero potem Newton wykazał teoretycznie, że z jego praw dynamiki i prawa grawitacji wynikają prawa Keplera.



Wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny, czyli suma iloczynów odpowiednich współrzędnych, jest równy zeru.

Dyskusję zagadnienia ruchu planet w potencjale grawitacyjnym Słońca, czyli tzw. problem Keplera, zazwyczaj przedstawia się dopiero na poziomie studiów uniwersyteckich, mimo że nie wymaga ona używania skomplikowanych pojęć fizycznych ani zaawansowanej matematyki. W tym artykule postaramy się rozwiązać elementarnie problem Keplera – pokazując, że empiryczne prawa Keplera, opisujące ruch planet, są zgodne z prawami dynamiki Newtona.

Wyjdziemy od zwykłego jednostajnego ruchu po okręgu o promieniu a , umieszczając środek O tego okręgu w początku układu współrzędnych, tak jak na rysunku obok. Wektor wodzący \vec{OA} punktu A na okręgu można wówczas opisać jako $\mathbf{r}_c = (a \cos E, a \sin E)$, gdzie $E = \sphericalangle AOP$. Prędkość ruchu jest styczna do okręgu, a więc prostopadła do promienia, zatem $\mathbf{v}_c \equiv \dot{\mathbf{r}}_c = a\dot{E}(-\sin E, \cos E)$, gdzie przez \dot{E} oznaczamy tempo zmiany kąta E (prędkość kątową). Oczywiście, pole koła ograniczonego przez rozważany okrąg jest równe $S_c = \pi a^2$.

Jeżeli na płaszczyznę zawierającą opisany wyżej okrąg będziemy patrzeć nie „z góry”, ale „z ukosa”, zobaczymy nie okrąg, ale elipsę o wielkiej półosi a . Załóżmy, że patrzymy z takiego kierunku, że wskutek rzutowania współrzędne y ulegają skróceniu o czynnik b/a , gdzie b to długość OH , a współrzędne x nie zmieniają się. Oczywiście, zmniejszeniu o taki sam czynnik ulegną także składowa y prędkości oraz pole powierzchni elipsy względem odpowiednich wielkości dla okręgu:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mathbf{r}_e = (a \cos E, b \sin E), \\ (2) \quad & \dot{\mathbf{r}}_e = \dot{E}(-a \sin E, b \cos E), \\ (3) \quad & S_e = \pi ab, \end{aligned}$$

gdzie \mathbf{r}_e to wektor \vec{OB} . Kąt E nazywamy teraz *anomalią mimośrodową*. Ogniskami elipsy będą takie punkty F i G na osi x , że suma ich odległości od dowolnego punktu elipsy będzie stała i równa $2a$. Jeśli długości odcinków HF i HG są równe a , zaś długości odcinków OF i OG są równe ae , gdzie $e \in (0, 1)$, to z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OFH mamy

$$(4) \quad b = a\varepsilon,$$

gdzie

$$(5) \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{(1 - e)(1 + e)}.$$

Zauważmy, że rzutowanie zachowuje równoległość wektorów, ale prostopadłości już nie. Wynika stąd w szczególności, że rzutowana prędkość w A pozostaje styczna do toru w B , ale nie jest już prostopadła do OB .

Jeśli przeniesiemy układ współrzędnych do F (lub G), promień wodzący \mathbf{r}_+ (\mathbf{r}_-) otrzymamy, odejmując od \mathbf{r}_e wektor $\vec{OF} = (ae, 0)$ (lub $\vec{OG} = (-ae, 0)$), a prędkość zostanie ta sama:

$$(6) \quad \mathbf{r}_\pm \equiv (x, y) = a(\cos E \mp e, \varepsilon \sin E),$$

$$(7) \quad \dot{\mathbf{r}} \equiv (\dot{x}, \dot{y}) = a\dot{E}(-\sin E, \varepsilon \cos E).$$

Powyższe wzory opisują tor zgodny z pierwszym prawem Keplera, tj. elipsę. Obliczając długości \mathbf{r}_\pm , łatwo przekonać się, że odległości FB i GB punktu B od ognisk F i G wynoszą

$$(8) \quad r_\pm = a(1 \mp e \cos E)$$

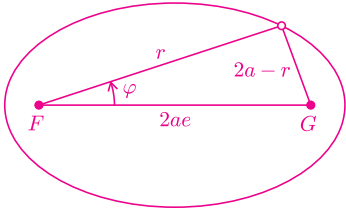
i ich suma rzeczywiście jest stała i równa $2a$. Ponadto, ze wzoru (8) wynika, że minimalna odległość od ogniska F , wynosząca $p = a(1 - e)$, jest osiągnięta w punkcie P

W *Epitome astronomiae Copernicanae* (V,2,3) Kepler wyjaśnia, że „choć ścisłe mówiąc, anomalia to niejednostajność, nieregularność w ruchu planety, astronomowie stosują ten termin do każdego ruchu, w którym pojawia się niejednostajność” (wiadomość od prof. J. Włodarczyka).

*Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika, Warszawa

Elipsa od sznurka do równania

Kepler, oczywiście, nie mógł używać kartezjańskiego układu współrzędnych. Dlatego też elipsę opisał w układzie współrzędnych biegunowych. Otrzymał go z najpopularniejszego sposobu rysowania tej krzywej: wbijamy w płaszczyznę dwie pinezki, do których przywiązujemy nitkę; napinając ją we wszystkich możliwych położeniach ołówkiem, otrzymujemy elipsę. Jeśli długość nitki jest równa $2a$, to odległość pinezek (ognisk elipsy) musi być równa $2ae$ dla pewnego $e \in (0, 1)$, bo inaczej nitka byłaby za krótka. Przy oznaczeniach z rysunku,



stosując twierdzenie cosinusów, otrzymujemy

$$r^2 + (2ae)^2 - 2r(2ae) \cos \varphi = (2a - r)^2,$$

czyli

$$r^2 + 4a^2e^2 - 4rae \cos \varphi = 4a^2 - 4ra + r^2.$$

Odejmując stronami r^2 i dzieląc przez $4a$, mamy

$$ae^2 - re \cos \varphi = a - r,$$

czyli

$$r(1 - e \cos \varphi) = a(1 - e^2) \quad \text{i} \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi}.$$

Stąd od razu wynikają wzory (6) i (8). [Red.]

dla $E = 0$; punkt ten nazywamy *perihelium*. Kosinus kąta między prędkością $\dot{\mathbf{r}}$ a promieniem wodzącym \mathbf{r}_{\pm} jest proporcjonalny do ich iloczynu skalarnego i odwrotnie proporcjonalny do długości każdego z tych wektorów. Skoro zaś $|\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{\pm}|/r_{\pm} = e\dot{E} \sin E$, kąty te dla ognisk $+$ i $-$ są położone symetrycznie względem $\pi/2$. Wynika stąd w szczególności, że promień światła wysłany z jednego ogniska i odbity zgodnie z prawami optyki geometrycznej od elipsy trafi w drugie ognisko. W dalszych rozważaniach nie będziemy już się więcej zajmować ogniskiem G i opuścimy indeks $+$.

W sposób czysto empiryczny, porównując wartości okresów T i pól a , Kepler odkrył jako trzecie prawo, że a^3/T^2 jest stałe. Postać tej stałej znalazł dopiero Newton, pokazując, że

$$(9) \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2},$$

gdzie G i M to stała grawitacji i masa Słońca. Dopiero z ostatniego wzoru tego artykułu przekonamy się, że właśnie taki wybór stałej jest poprawny. Jednak dla konkretnej planety T i a pozostają stałe i ich związek nie ma znaczenia w rozważaniach ruchu.

Dotąd nie zajmowaliśmy się czasem t , w którym jest osiągnany punkt B na elipsie, o ile znamy moment t_0 przejścia przez perihelium P . To zagadnienie Kepler rozwiązał w oparciu o prawo stałych pól. Cała powierzchnia elipsy $S_e = \pi ab$ jest zakreślana w czasie jednego okresu $T = 2\pi\sqrt{GM/a^3}$, stąd prędkość polowa to $\sigma = S_e/T = (ab/2)\sqrt{GM/a^3}$. Na podstawie prawa pól Kepler przyjął, że pole S_{BFP} wycinka elipsy zawartego w $\sphericalangle BFP$ jest proporcjonalne do przedziału czasu: $S_{BFP} = \sigma(t - t_0)$. Następnie zauważył, że $S_{BOP} - S_{\Delta BOF} = S_{BFP}$. To równanie Keplera było kluczem do rozwiązania problemu. Wycinek elipsy BOP jest rzutem wycinka koła AOP , stąd jego pole jest równe $S_{BOP} = (b/a)S_{AOP}$. Z wyznaczeniem pola trójkąta BOF o znanych współrzędnych wierzchołków uczoney poradził sobie bez trudu i ostatecznie przedstawił (w 1619 roku) równanie w postaci

$$(10) \quad E - e \sin E = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}(t - t_0) \equiv N,$$

gdzie kąt N jest zwany *anomaliami średnią*, a stała proporcjonalności została uwspółcześniona. Czytelnik Wnikliwy może sprawdzić, jaki to stały czynnik uczoney uprościł w polach, podając wzór w postaci (10). Ponieważ po okresie obiegu T lewa strona równania (10) rośnie o 2π , zatem to samo robi prawa strona: $N = 2\pi(t - t_0)/T$. Równanie Keplera nie ma rozwiązania analitycznego, ale dla danego N wartość rozwiązania E można szybko obliczyć metodą Newtona. Przyjmując pierwsze przybliżenie rozwiązania, np. jako $E_0 = 0$ lub $E_0 = \pi$, następane otrzymuje się ze wzoru

$$(11) \quad E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \sin E_n - N}{1 - e \cos E_n}.$$

Dla rosnącego n iteracje są szybko zbieżne do prawdziwego rozwiązania E spełniającego zależność (10).

Posłużymy się równaniem Keplera do obliczenia chwilowej prędkości kątowej \dot{E} , a stąd prędkości liniowej $\dot{\mathbf{r}}$. W tym celu zastanówmy się nad prędkością zmian każdej ze stron wzoru (10). Czynnikiem z pierwiastkiem jest stały, mamy więc do czynienia z „ruchem jednostajnym” z prędkością $\dot{N} = \sqrt{GM/a^3}$. Po lewej stronie wzoru (10) prędkość zmian E jest po prostu \dot{E} . Pozostaje zatem określić prędkość zmian wyrazu $e \sin E$. Wybierzmy sobie punkt o współrzędnej $s = \sin E$. W czasie ruchu stosunek tej współrzędnej do y na elipsie pozostaje stały: $s/y = \sin E/(ae \sin E) = 1/(ae)$. Zatem stosunek tempa ich zmian w czasie \dot{s}/\dot{y} musi być identyczny, więc ze wzoru (7), $\dot{s} = \dot{y}/ae = \dot{E} \cos E$. Mnożenie przez e odpowiada jedynie zmianie jednostek, zatem prędkość zmian $e \sin E$ wynosi $e\dot{s} = e\dot{E} \cos E$. Podsumowując rozważania o prędkościach zmian obu stron równania Keplera, otrzymujemy:

$$\dot{E} - e\dot{E} \cos E = \sqrt{GM/a^3}.$$

Zatem

$$(12) \quad \dot{E} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \frac{1}{1 - e \cos E}.$$

Po drodze otrzymaliśmy użyteczny wzór na \dot{s} . Postępując podobnie dla $w = \cos E$ i zmian położenia x , otrzymujemy odpowiednio:

$$(13) \quad \dot{s} = \dot{E} \cos E,$$

$$(14) \quad \dot{w} = -\dot{E} \sin E.$$



Czytelnik Wnikliwy zakrzyknie zaraz ze zgrozą, że przed chwilą po prostu wykonaliśmy różniczkowanie. Prawda to, ale korzystaliśmy tu nie tyle z rachunku różniczkowego, co z intymnego związku pochodnej z prędkością. Podstawiając wzór (12) do (7), otrzymujemy

$$(15) \quad \dot{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \left(\frac{-\sin E}{1 - e \cos E}, \frac{\varepsilon \cos E}{1 - e \cos E} \right).$$

Moment pędu planety o masie m to $j = mrv_{\perp}$, gdzie v_{\perp} jest składową prędkości prostopadłą do \mathbf{r} . W bardzo krótkim przedziale czasu Δt ruch planety może być traktowany jako prostoliniowy z przesunięciem $\mathbf{v}\Delta t$, tak że zakreślony obszar jest wydłużonym trójkątem o boku \mathbf{r} i wysokości $v_{\perp}\Delta t$. Jego pole to $\Delta S = rv_{\perp}\Delta t/2$, zatem prędkość polowa $\sigma = rv_{\perp}/2 = j/(2m)$. A zatem keplerowskie prawo stałych pól odpowiada newtonowskiemu prawu zachowania momentu pędu, gdy działająca siła nie ma składowej prostopadłej do promienia.

Dla $e = 1$ wzór (6) załamuje się, bo $\varepsilon = 0$, zatem zawsze $y = 0$, chyba że a staje się wielkie: $a \rightarrow \infty$. Ponadto we wzorze (12) dla $E = 0$ prędkość kątowna staje się wielka, $\dot{E} \rightarrow \infty$. By uniknąć tych problemów, wyrazimy $\sin E$ i $\cos E$ poprzez składowe jednostkowego wektora kierunkowego $(x/r, y/r)$. Ze wzorów (6) i (8) mamy $x/r = (\cos E - e)/(1 - e \cos E)$ i podobnie $y/r = \varepsilon \sin E/(1 - e \cos E)$. Rozwiązując względem $\cos E$ oraz $\sin E$, mamy

$$(16) \quad \cos E = \frac{\frac{x}{r} + e}{1 + e \frac{x}{r}},$$

$$(17) \quad \sin E = \frac{1}{\varepsilon} \frac{y}{r} (1 - e \cos E).$$

Teraz możemy podstawić (16) i (17) do wzoru (15), otrzymując

$$(18) \quad \dot{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{GM}{q(1+e)}} (-\sin \nu, \cos \nu + e),$$

gdzie zamiast a mamy $q = a(1 - e)$, a potęgi $1 - e$ uprościliśmy. Przy tym nowy kąt $\nu = \sphericalangle BFP$, zwany *anomalią prawdziwą*, wybrano tak, by $\cos \nu = x/r$ i $\sin \nu = y/r$. Taki wzór na prędkość to równanie parametryczne okręgu o środku przesuniętym o e względem środka układu. W tym wzorze nie dzieje się nic osobliwego dla $e = 1$ i można oczekiwać, że stosuje się on do ruchu keplerowskiego po paraboli $e = 1$ i po hiperboli $e > 1$. Przy tym dla paraboli początek układu $(0, 0)$ leży na obwodzie, czyli prędkość dąży do 0 dla $\nu \rightarrow \pi$. Natomiast dla $e > 1$ początek leży poza okręgiem prędkości, zatem prędkość nigdy nie spada do zera, a jej kierunek musi się zawierać w kącie ograniczonym stycznymi do okręgu wyprowadzonymi z początku układu. Z zachowania prędkości polowej wynika, że w perihelium, dla $\nu = 0$, prędkość ma być największa – zatem tylko dalsza od początku część okręgu pomiędzy stycznymi odpowiada rzeczywistemu ruchowi po hiperboli.

Przyspieszenie $\ddot{\mathbf{r}}$ to szybkość zmiany prędkości $\dot{\mathbf{r}}$. Jedyną wielkość zmienną we wzorze (18) to ν , zatem, wykorzystując równania (14) i (13) dla prędkości zmian tej wielkości, mamy $\ddot{\mathbf{r}} = \sqrt{GM/q(1+e)} (-\dot{\nu} \cos \nu, -\dot{\nu} \sin \nu)$. Prędkość kątowną $\dot{\nu}$ trzeba wyznaczyć z prędkości polowej $2\sigma = rv_{\perp}$, gdzie po prostu $v_{\perp} = r\dot{\nu}$. Mamy zatem $2\sigma = r^2\dot{\nu}$, stąd $\dot{\nu} = 2\sigma/r^2$ i ostatecznie

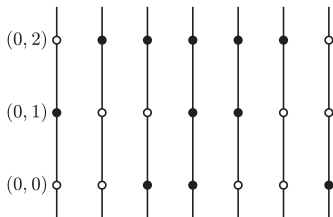
$$(19) \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right).$$

W ten sposób powtórzyliśmy dowód Newtona, że prawa Keplera wymagają ruchu z przyspieszeniem proporcjonalnym do $1/r^2$ i skierowanym do obieganego ciała w ognisku elipsy. To, że siła ma być proporcjonalna do m/r^2 , gdzie m to masa planety, wynika z drugiego prawa dynamiki, natomiast proporcjonalność do masy M Słońca (drugiego ciała) wynika z trzeciej zasady dynamiki i założenia symetrii prawa grawitacji względem obu przyciągających się ciał.

W całych rozważaniach popełniliśmy dwie niedokładności: zaniedbaliśmy ruch Słońca wokół środka masy układu dwóch ciał oraz przyciąganie innych planet. Z prawa ciążenia powszechnego wynika przyciąganie się wszystkich ciał układu słonecznego, a nie tylko Słońca i danej planety. Pomijając to, popełniliśmy błąd, wskutek którego rzeczywiste położenie planety na niebie może oscylować względem obliczonego o wielkość tarczy Księżyca. W rachunkach bardziej ścisłych oblicza się poprawki do przestrzennej orbity keplerowskiej lub dopasowuje się chwilową orbitę keplerowską styczną do prawdziwej, zwaną *orbitą oskulacyjną*. Oczywiście, jej parametry będą się nieco różnić od wyjściowych i będą również zmieniać się w czasie.



Rozwiązanie zadania M 1312.
Wyróżniamy dwadzieścia jeden punktów kratowych $(j, 0)$, $(j, 1)$, $(j, 2)$ dla $j = 0, 1, \dots, 6$.



Powiemy, że na danej prostej $x = j$ dominuje kolor a , jeśli co najmniej dwa spośród trzech wyróżnionych punktów na tej prostej są koloru a . Istnieją cztery proste, na których dominuje ten sam kolor – przyjmijmy, że biały. Możemy wybrać z nich taką parę, że albo przynajmniej jedna nie ma czarnego wyróżnionego punktu, albo obie mają po jednym na tej samej wysokości. Wśród białych wyróżnionych punktów na tych dwóch prostych są wierzchołki prostokąta.



Rozwiązanie zadania F 788.

Ciecz znajdująca się w silnie niejednorodnym polu elektrycznym w pobliżu okładek ulegnie polaryzacji i będzie wciągana w przestrzeń pomiędzy płytkami. Wzrost energii potencjalnej słupa cieczy kompensuje spadek energii pola między okładkami kondensatora. Zgodnie z prawem zachowania energii:

$$\frac{q^2}{2C_0} = \frac{q^2}{2C} + \frac{mgh}{2}.$$

Pojemności wynoszą $C_0 = \epsilon_0 ab/d$,

$$C = \epsilon_0 b[a + (\epsilon - 1)h]/d$$

(p. zadanie F 787), masa między okładkami to $m = \rho bhd$. Ładunek na okładkach jest równy $q = \varphi_0 C_0 = \epsilon_0 \varphi_0 ab/d$. Stąd otrzymujemy:

$$h^2 + \frac{a}{\epsilon - 1}h - \frac{\epsilon_0 a \varphi_0^2}{\rho g d^2} = 0.$$

Dodatknie rozwiązanie tego równania daje szukaną wartość wysokości, na którą wznieś się ciecz:

$$h = \frac{a}{2(\epsilon - 1)} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4\epsilon_0(\epsilon - 1)\varphi_0^2}{\rho d^2 ag}} \right].$$

*Wydział Matematyczno-Przyrodniczy Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego

Przychodzi filmowiec do fizyka

Szymon CHARZYŃSKI*

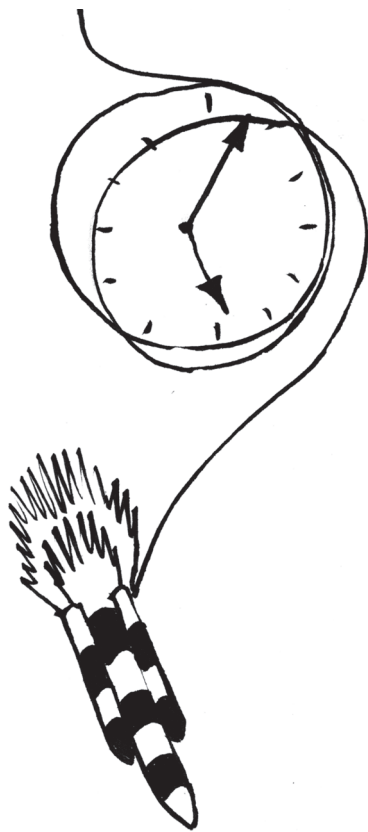
Czy człowiek o racjonalnym nastawieniu do świata powinien się irytować w kinie, oglądając film, w którym bohaterowie podróżują w czasie (w tempie różnym od 60 minut na godzinę), pojazdy kosmiczne przemierzają w jednej chwili dystanse rzędu lat świetlnych, a wideorozmowy z osobami znajdującymi się na drugim końcu galaktyki odbywają się bez opóźnień? Wyobraźnia scenarzysty filmowego nie jest, oczywiście, ograniczona niczym prócz budżetu filmu, ale warto się zastanowić, na jakie fundamentalne ograniczenia natrafilibyśmy, gdybyśmy chcieli zrealizować te scenariusze w rzeczywistości. Puśćmy zatem wodze fantazji i pozwólmy sobie na spekulacje, czego dowolnie zaawansowana cywilizacja, przezwyciężywszy wszystkie problemy techniczne, mogłaby dokonać w dziedzinie podróży w czasie i przestrzeni, nie naruszając znanych nam praw przyrody.

Jednym z fundamentów współczesnej fizyki jest szczególna teoria względności (STW) sformułowana przez Alberta Einsteina. Jednym z jej podstawowych postulatów jest niezależność wartości prędkości światła od ruchu obserwatora inercyjnego. Postulat ten był zgodny z przeprowadzonymi na przełomie XIX i XX wieku doświadczeniami, ale wydawał się przeczyć zdrowemu rozsądkowi (co nie przeszkadzało Einsteinowi, który zwykł mawiać, że *zdrowy rozsądek to zbiór uprzedzeń nabytych do osiemnastego roku życia*).

Jakie konsekwencje ma postulat niezależności prędkości światła od obserwatora? Jedną z nich jest względność upływu czasu, o czym można się przekonać, wykonując prosty eksperyment myślowy. Wyobraźmy sobie dwa równoległe lustra, pomiędzy którymi podróżuje tam i z powrotem światło lasera. Jeżeli czas, jaki upływa pomiędzy dwoma odbiciami światła od luster, przyjmiemy za pewną umowną jednostkę czasu, to opisany układ będzie zegarem odmierzającym tę jednostkę. Taki zegar możemy umieścić w poruszającym się ze stałą prędkością pojeździe tak, aby płaszczyzny luster były równoległe do prędkości. Co zobaczy, patrząc na ten zegar, obserwator, względem którego pojazd się porusza? Światło lasera będzie poruszać się po linii łamanej, przypominającej zęby piły. Oznacza to, że światło ma w tej sytuacji dłuższą drogę do przebycia niż w zegarze spoczywającym, a więc czas pomiędzy odbiciami będzie dłuższy. Skoro jednak prędkość światła ma być niezależna od ruchu, obserwator podróżujący w pojeździe razem z zegarem zmierzy czas pomiędzy odbiciami taki, jak dla spoczywającego zegara, ponieważ z jego punktu widzenia zegar spoczywa. Zatem z punktu widzenia zewnętrznego obserwatora czas w pojeździe „zwolni”, ponieważ czas pomiędzy tymi samymi wydarzeniami mierzony przez obserwatora zewnętrznego będzie dłuższy niż czas mierzony przez obserwatora poruszającego się.

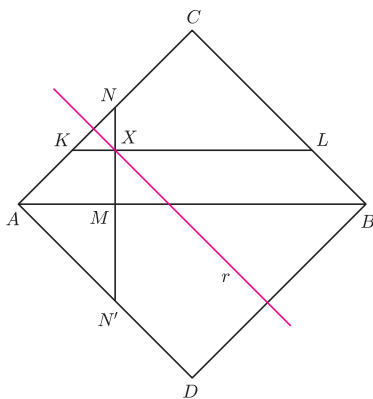
Przykładem dobrze ilustrującym względność upływu czasu jest tzw. *paradoks bliźniąt*. Wyobraźmy sobie dwóch braci bliźniaków, z których jeden pozostaje na Ziemi, a drugi wyrusza w daleką podróż kosmiczną: najpierw oddala się od Ziemi, a potem, wykonawszy w połowie podróży szybki zwrot, wraca na Ziemię. W pierwszej fazie wyprawy bliźniak-domator widzi, że czas bliźniaka-podróżnika płynie wolniej, ponieważ tamten porusza się względem niego. To samo zaobserwuje w czasie podróży powrotnej brata. Ostatecznie, kiedy bracia się spotkają, czas, jaki każdy z nich zmierzył pomiędzy początkiem i końcem wyprawy, będzie inny, w szczególności bliźniak-podróżnik będzie młodszy. Można się zastanawiać, co tak naprawdę różni historie obu braci, skoro z punktu widzenia bliźniaka-podróżnika to bliźniak-domator się poruszał, ale ich losy nie są dokładnie symetryczne, gdyż tylko bliźniak-domator pozostawał przez cały czas w spoczynku względem pewnego układu inercyjnego. Czy można względność upływu czasu wykorzystać do podróży w czasie? W pewnym sensie tak, ale będą to wyłącznie podróże w przyszłość, bez możliwości powrotu. Taką właśnie podróż wykonuje jeden z bohaterów historii o bliźniakach. Gdyby odpowiednio dobrać parametry swojej podróży, mógłby wrócić na Ziemię po dowolnie długim czasie. A co z podróжами w przeszłość?

Drugą istotną konsekwencją STW jest istnienie granicznej prędkości, równej prędkości światła w próżni, której żaden masywny obiekt przekroczyć nie może. W dynamice Newtona, która dobrze opisuje ruch obiektów przy prędkościach małych w porównaniu z prędkością światła, dostarczając poruszającemu się ciału energii, możemy uzyskać dowolnie dużą prędkość (energia kinetyczna jest proporcjonalna do kwadratu prędkości). W teorii względności w sytuacji, kiedy prędkość ciała zbliża się



Rozwiązanie zadania M 1314.

Rozważmy przypadek, gdy q przecina ramię AC . Rozszerzmy nasz trójkąt do kwadratu $ACBD$.



Punkt przecięcia prostej q z nowo dorysowanym bokiem kwadratu oznaczmy przez N' . Szukamy takich punktów X , że $KL = NN'$. Równoważnie takich, że odcinki KL i NN' są symetryczne względem prostej r prostopadłej do AC przechodzącej przez X . To zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty KLC i $NN'A$ są symetryczne względem tej prostej, co jest z kolei równoważne temu, że punkty A i C są symetryczne względem r (ponieważ punkty K i N zostały skonstruowane tak, że są symetryczne względem r).

Wobec tego szukany zbiór punktów X to te fragmenty symetrycznych przprostokątnych trójkąta ABC , które są zawarte w jego wnętrzu.

do prędkości światła, przyrost prędkości w miarę dostarczania stałych porcji energii staje się coraz mniejszy, co uniemożliwia przekroczenie prędkości światła.

Szczególne teorie względności nakładają górne ograniczenie na prędkość poruszania się pojazdów i prędkość rozchodzenia się wszelkich sygnałów. Prędkość światła w porównaniu z prędkościami, które znamy z życia codziennego, wydaje się praktycznie nieskończona, ale jeżeli nasze ambicje zaczynają sięgać podróży do odległych obiektów astronomicznych, jej wartość staje się poważnym ograniczeniem. Kiedy kontrolerzy lotów kosmicznych w bazie w Houston nadzorowali lądowanie modułu statku Apollo na Księżycu, zadawszy pytanie załodze, musieli czekać dwie i pół sekundy na odpowiedź – tyle czasu potrzebuje sygnał radiowy, by dotrzeć do Księżyca i z powrotem. To opóźnienie uniemożliwiało szybką wymianę informacji i kontrolerzy wspominają ten fakt jako istotne utrudnienie w krytycznych momentach misji księżycowej. Astronauci lądujący w przyszłości na Marsie będą – w sytuacjach wymagających podejmowania szybkich decyzji – praktycznie pozbawieni wsparcia kontrolerów lotu. Opóźnienie w komunikacji między Ziemią a Marssem waha się od 6 do 45 minut w zależności od wzajemnego położenia tych planet. Astronauci eksplorujący dalsze planety Układu Słonecznego będą doświadczali opóźnień w komunikacji z Ziemią mierzonych w godzinach. Gdyby w przyszłości udało się ludziom polecieć do innych gwiazd lub nawiązać kontakt z inną cywilizacją, prowadzenie dialogu rozumianego jako wymiana informacji byłoby praktycznie niemożliwe. Opóźnienie wyrażałoby się w dziesiątkach lat w przypadku najbliższych gwiazd i dziesiątkach tysięcy lat w przypadku odległych gwiazd naszej galaktyki. Na odpowiedź mieszkańca Galaktyki Andromedy (M31 jest najbliższą dużą galaktyką) przysłoby nam czekać 5 milionów lat. Przytoczone liczby dotyczą przesyłania sygnałów z prędkością światła. Ewentualne podróże załogowe do odległych obiektów astronomicznych, odbywane na pokładzie statku przemierzającego przestrzeń z prędkością mniejszą od prędkości światła, będą trwały jeszcze dłużej. Wynika stąd, że loty kosmiczne na zasadach prezentowanych w filmach, gdzie pilot obiera cel, włącza silniki, obserwuje przemykające za oknami gwiazdy i po chwili wyhamowuje w innej części galaktyki, są sprzeczne ze szczególną teorią względności.

Co ma zatem zrobić scenarzysta filmowy, którego wątek fabularny zmusza do szybkiego wysyłania ludzi w odległe zakątki wszechświata i który jednocześnie nie chce tworzyć historii rażąco sprzecznych z wiedzą o świecie, którą już mamy? Przed takim dylematem stanął kiedyś Carl Sagan, scenarzysta filmu „Kontakt”, którego bohaterka udaje się do gwiazdy Wega (25 lat świetlnych od Ziemi). Sagan, który sam był zawodowym astronomem, zadzwonił do swojego kolegi Kipa Thorne’a i poprosił o radę w tej sprawie. Thorne, specjalista od ogólnej teorii względności, stwierdził, że raczej nic się nie da zrobić, ale jeszcze zastanowi się nad tym.

Czym jest ogólna teoria względności (OTW) i jak może być przydatna scenarzyście filmu science-fiction? Nazwa sugeruje, że przy przejściu od STW do OTW mamy do czynienia z uogólnieniem. Na czym ono polega? Upraszczając, można stwierdzić, że OTW mówi nam, iż prawa STW stosują się tylko lokalnie. Oznacza to, że jeżeli rozważamy mały kawałek czasoprzestrzeni, to z dobrym przybliżeniem opisuje go STW, ale w większej skali czasoprzestrzeń może być zakrzywiona. Żeby lepiej wyobrazić sobie lokalność, możemy posłużyć się analogią do powierzchni Ziemi. Kiedy geodeta wyznacza działki pod budowę domów, to może spokojnie przyjąć, że powierzchnia, którą mierzy, jest płaska. Jeżeli spojrzymy na Ziemię z dalszej perspektywy, to zobaczymy, że jej powierzchnia ma kształt zbliżony do sfery. Inaczej mówiąc, o ile płaskie plany miast odwzorowują rzeczywistość bardzo dobrze, to, aby mieć dobre wyobrażenie o rozmieszczeniu kontynentów, lepiej jest popatrzyć na globus niż na płaskie mapy świata, na których Grenlandia wygląda na większą od Australii (mimo że w rzeczywistości jest ponad trzykrotnie mniejsza).

Równania OTW (równania Einsteina) w jednoznaczny sposób wiążą krzywiznę czasoprzestrzeni z rozkładem materii i energii. Znanych jest wiele różnych rozwiązań tych równań. Rozwiązania takie można otrzymywać, przyjmując jakiś rozkład materii i znajdując kształt czasoprzestrzeni, jaki taki rozkład wymusza. Czasoprzestrzeń można też przyjąć za daną i wyliczać rozkład materii. Szuka się także rozwiązań mających z góry zadane symetrie lub spełniających określone warunki brzegowe. Wiadomo, że istnieją rozwiązania równań Einsteina o tak zaskakującej właściwości, jaką jest występowanie zamkniętych krzywych czasowych, wykluczone w STW. Przypomnijmy, że krzywa czasowa w czasoprzestrzeni jest historią cząstki (lub

obserwatora), czyli zbiorem kolejnych zdarzeń (par czas i miejsce), które, następując po sobie, tę historię tworzą. Dla istoty zamieszkującej wszechświat z zamkniętymi krzywymi czasowymi oznacza to, że możliwe jest ponowne przeżycie zdarzenia, które miało miejsce w przeszłości, czyli, na przykład, spotkanie siebie z przeszłości (jak w siódmej podróży w „Dziennikach gwiazdowych” Stanisława Lema). Takie hipotetyczne spotkania są naturalnym źródłem paradoksów, ponieważ wydaje się, że nic nie powstrzyma mieszkańca tego dziwnego świata przed wpływaniem na własne losy w przeszłości. W ekstremalnym przypadku, zwanym *paradoksem dziadka*, można nawet unicestwić siebie lub swojego przodka, czego konsekwencją powinno być nieistnienie sprawcy tego mordu, na długo zanim został dokonany. Odpowiedź na pytanie, co się stanie w takiej sytuacji lub czy możliwe jest w ogóle, żeby do niej doszło, nie może być na razie udzielona na gruncie fizyki jako nauki doświadczalnej. Wiemy tylko, że nie zaobserwowano nigdy takiego zjawiska. Pozostają jedynie spekulacje.

Odpowiedź, jakiej po zastanowieniu udzielił Thorne Saganowi, brzmiała: wyślij bohaterkę przez *tunel czasoprzestrzenny* (ang. *wormhole*). Pytanie Sagana stało się ważną inspiracją dla Thorne’a, który opublikował na przełomie lat osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku serię artykułów na ten temat w renomowanych czasopismach naukowych. Z kolei Sagan, po początkowym fiasku projektu filmowego, napisał powieść „Kontakt”, która rozeszła się w milionach egzemplarzy, co skłoniło jednak Hollywood do realizacji filmu: obraz w reżyserii Roberta Zemeckisa z Jodie Foster w roli głównej trafił na ekrany w 1997 roku.

Czym jest taki hipotetyczny tunel czasoprzestrzenny? Wyobraźmy sobie – w dwóch wymiarach – prawie płaską powierzchnię, ilustrującą naszą czasoprzestrzeń, której dwa odległe miejsca (w sensie odległości na tej powierzchni) połączono przesmykiem, tak jak na rysunku. Przesmyk ten pozwala przemieścić się pomiędzy jego wylotami bez przemierzania w „zwykły” sposób, tj. po płaskiej części powierzchni, całej dużej odległości między nimi. Wygląda to obiecująco, ale okazuje się, że z ewentualnym istnieniem takich skrótów związane są liczne problemy. Po pierwsze, jak zauważył Thorne, mając tunel łączący oddalone przestrzennie miejsca, można, poruszając odpowiednio jego końcami, zmienić go w wehikuł czasu. Jest to efekt analogiczny do paradoksu bliźniąt. Jeżeli jeden koniec tunelu (nazwijmy go A) pozostawimy w spoczynku, a drugi (B) będzie się poruszał z przyspieszeniami, to stojący u wejścia B będą się starzeć wolniej niż stojący

u wejścia A. Zatem, wchodząc do tunelu od strony B, wyjdziemy po stronie A wcześniej, niż weszliśmy po stronie B. Jeżeli dodatkowo zbliżymy wystarczająco końce tunelu, to możliwe stanie się po wyjściu po stronie A przebycie dookoła, po płaskiej przestrzeni, drogi do wejścia B na tyle szybko, aby spotkać się tam z drugą kopią siebie, mającą dopiero wejść do tunelu. Oznacza to, że istnienie tuneli pozwalających na przemieszczanie się „na skróty” w czasoprzestrzeni prowadzi nieuchronnie do mierzenia się z paradoksem dziadka. Niestety, to jeszcze nie koniec problemów. Przypomnijmy, że, w pewnym uproszczeniu, można wyobrazić sobie, że równania OTW wiążą kształt czasoprzestrzeni z rozkładem materii. Okazuje się, że kształt czasoprzestrzeni w takim tunelu wymusza, aby był on utrzymywany przez materię o własnościach, których żaden znany nam rodzaj materii nie ma.

Rozważania dotyczące tuneli czasoprzestrzennych lub, ogólniej, czasoprzestrzeni zawierających zamknięte krzywe czasowe, prowadzi wielu fizyków, wśród nich Stephen Hawking. W swoich pracach, opierając się na postulatach, które powinna spełniać (nieistniejąca jeszcze) teoria opisująca w spójny sposób zjawiska grawitacyjne i kwantowe, argumentuje, że takie zamknięte krzywe nie mogą istnieć w sposób stabilny. Innymi słowy, za każdym razem, gdy ma dojść do uformowania się kawałka czasoprzestrzeni zawierającego zamkniętą krzywą czasową, prawa fizyki temu dynamicznie zapobiegają. To stwierdzenie zawarte w pracy z 1991 roku zostało nazwane *hipotezą ochrony chronologii*. Do sformułowania tej hipotezy doprowadziło Hawkinga dość wyrafinowane rozumowanie, przytacza on jednak jeden stosunkowo przekonujący fakt doświadczalny na poparcie swojej hipotezy, stwierdzając: *Jeżeli podróże w przeszłość będą kiedykolwiek możliwe, to gdzie są ci wszyscy turyści z przyszłości?*

Matematyczne Noble 2010

Stefan JACKOWSKI*

Współpraca:
Anna STERCZYŃSKA**



*Instytut Matematyki,
Uniwersytet Warszawski
**studentka, Wydział Socjologii,
Uniwersytet Warszawski

Dziewiętnastego sierpnia 2010 roku, podczas otwarcia Międzynarodowego Kongresu Matematyków w indyjskim Hajdarabadzie prezydent Indii wręczyła „matematyczne Noble” – medale im. Johna Charlesa Fieldsa – czterem wybitnym matematykom, z których żaden nie ukończył 40 lat. Laureatami medalu zostali: Izraelczyk Elon Lindenstrauss, Wietnamczyk Ngô Bao Châu, pracujący we Francji i USA, Rosjanin Stanislav Smirnov, pracujący w Szwajcarii, oraz Francuz Cédric Villani. Wspólnym mianownikiem ich osiągnięć jest zastosowanie metod z jednej dziedziny matematyki do odkryć w innej dziedzinie, na przykład analizy matematycznej czy geometrii algebraicznej w teorii liczb. Ostatnie dwa medale przyznano za osiągnięcia blisko związane z fizyką i praktycznymi zagadnieniami mechaniki cieczy i gazów.

Matematyka, matematycy i ich kongresy

Matematyka jest dziedziną, która nie daje się wpasować w ramy nauk przyrodniczych ani nauk humanistycznych. Amerykanie mówią o grupie dziedzin wiedzy STEM: *Science, Technology, Engineering, Mathematics*, podkreślając w ten sposób odrębność matematyki. Twórczość matematyczna jest pod wieloma względami bliższa naukom społecznym i humanistycznym niż doświadczalnemu. Z drugiej strony, w odróżnieniu od tych dyscyplin, nie zna granic państwowych ani kulturowych. Jest precyzyjnym językiem i narzędziem wielu nauk przyrodniczych i społecznych, co lapidarnie ujął Kant, określając ją jako *warunek wszelkiego dokładnego poznania*.

„Matematyczne Noble” silnie wiążą się z tradycją światowych kongresów matematyków. Od 1893 roku co cztery lata matematycy z całego świata zbierają się, żeby omawiać postępy królowej nauk. Program kongresów składa się z wykładów plenarnych i wykładów w (obecnie 20) sekcjach poświęconych różnym działom matematyki. Zaproszenie do wygłoszenia wykładu plenarnego jest jednym z najwyższych wyróżnień naukowych w matematyce. Tylko cztery razy plenarnymi mówcami byli matematycy pracujący w polskich instytutach badawczych – ostatni raz na kongresie w Warszawie w 1983 roku. Kongresy nie służą jednak wyłącznie dyskusji nad tym, co zostało już odkryte i udowodnione, lecz także projektowaniu przyszłości matematyki. Problemy przedstawione przez wielkiego matematyka z Getyngi Davida Hilberta na kongresie w Paryżu w 1900 r. miały ogromny wpływ na badania matematyczne w całym XX wieku. Sto lat później, na przełomie XX i XXI w. podobne wyzwanie sformułowania najważniejszych problemów matematyki podjęła specjalnie założona w tym celu w Bostonie prywatna fundacja – Clay Mathematics Institute.

Medal Fieldsa

W 1924 r. organizatorem kongresu matematyków w Toronto był kanadyjski matematyk John Charles Fields. Z pozostałych po kongresie pieniędzy postanowił ufundować medal przyznawany co cztery lata z okazji Międzynarodowego Kongresu Matematyków w uznaniu wybitnych wyników i perspektyw kolejnych osiągnięć. Fields zaproponował

przyjęcie zasady, że kandydat do nagrody nie może ukończyć 40 lat przed 1 stycznia roku, w którym odbywa się kongres. Ograniczenie wieku laureatów Fields uzasadnił tym, że medal powinien wskazywać dobrze zapowiadających się matematyków, którzy przez wiele lat będą wyznaczać kierunek badań matematycznych. Kryterium wieku jest przestrzegane z iście matematyczną precyzją: angielski matematyk Andrew Wiles, autor dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata – hipotezy, która czekała na rozwiązanie 350 lat – nieznacznie przekroczył granicę 40 lat i medalu nie dostał. Zamiast medalu Unia Matematyczna podarowała Wilesowi specjalną tabliczkę z wyrazami uznania światowej społeczności matematycznej.

Fields osobiście dopilnował projektu medalu, który stworzył kanadyjski rzeźbiarz R. Tait McKenzie. Na awersie znajduje się podobizna Archimedesa i łaciński cytat z dzieła *Astronomica* rzymskiego poety i astrologa Maniliusza: *Transire suum pectus mundoque potiri* (Wznieść się ponad granice ludzkich możliwości i przewodzić światu). Na rewersie – słowa *Congregati ex toto orbe mathematici ab scripta insignia tribuere* (Zebrani z całego świata matematycy honorują wielkie osiągnięcia). Przez 74 lata tylko 53 matematyków zostało wyróżnionych tym niezwykłym medalem. Większość z nich żyje, a wielu nadal prowadzi badania. Najwięcej medalistów – aż 17 – pochodziło z uczelni amerykańskich, z francuskich – 11, a z rosyjskich – 8. Niestety, dotąd nie ma wśród laureatów żadnego polskiego matematyka.

Alfred Nobel i matematycy

Wokół pytania, dlaczego Alfred Nobel, ustanawiając nagrody w wielu dziedzinach nauk ścisłych i twórczości literackiej, pominął matematykę, narosło wiele plotek i niejasności. Są one związane w dużej mierze ze współczesnym Noblowi wybitnym szwedzkim matematykiem i organizatorem życia naukowego Gustawem Mittag-Lefflerem. Obaj panowie należeli do szwedzkiego *establishmentu* intelektualnego i biznesowego, ale nie darzyli się szczególną sympatią. Nobel, który wspierał uniwersytet sztokholmski, odmówił Mittag-Lefflerowi sfinansowania katedry dla rosyjskiej matematyczki Soni Kowalewskiej, co tylko tę niechęć pogłębiło. Mimo odmowy Nobla Kowalewska profesurę otrzymała, stając się pierwszą kobietą-profesorem w Sztokholmie. Być może właśnie

antypatia do Mittag-Lefflera zdecydowała o tym, że Nobel w swoim testamencie pominął matematykę; a może po prostu uważał, że badania matematyczne nie przynoszą światu bezpośredniego pożytku. W testamencie Nobel zaznaczył bowiem, że nagroda ma być przyznawana tym, *którzy w poprzednim roku wyświadczyli ludzkości największe dobrodziejstwa*.

Wiele wskazuje na to, że Mittag-Leffler, który przyjaźnił się z Fieldsem od czasu jego długiego pobytu w Europie, miał wpływ zarówno na koncepcję „matematycznego Nobla”, jak i na sformułowanie zasad jego przyznawania. Być może chciał w ten sposób uzupełnić brak matematyki wśród dziedzin wyróżnianych Nagrodą Nobla. Sam Mittag-Leffler zapisał swój majątek na rozwój matematyki, a w jego rezydencji, przepięknie położonej nad sztokholmskim archipelagiem, mieści się obecnie międzynarodowy instytut badań matematycznych noszący imię fundatora. Podobny instytut w Toronto nosi imię Fieldsa.

Brak osobnej nagrody w dziedzinie matematyki wcale nie przeszkodził jednak matematykom w sięganiu po Nagrodę Nobla za zastosowanie metod matematycznych w innych dziedzinach, szczególnie w ekonomii. W 1994 r. za badania nad teorią gier ekonomicznego Nobla otrzymał wybitny amerykański matematyk John Nash, o którego życiu i zmaganiach z chorobą psychiczną opowiada oscarowy film *Piękny umysł*.

Matematyka i biznes

Zainteresowanie matematyków zagadnieniami ekonomicznymi przedstawiciele świata biznesu odwzajemniają wspieraniem badań matematycznych. W 1998 r. w Bostonie biznesmen Landon T. Clay i jego żona Lavinia powołali do życia Clay Mathematics Institute, którego zadaniem jest *rozwijanie i upowszechnianie wiedzy matematycznej*.

Członkowie rodziny Clay tworzą radę dyrektorów tej fundacji, a rada naukowa składa się z kilku wybitnych matematyków, w tym laureatów medalu Fieldsa.

Nawiązując do wspomnianych problemów Davida Hilberta, założyciele instytutu powierzyli gronu znakomitych ekspertów wskazanie najważniejszych problemów matematyki czekających na rozwiązanie w XXI wieku. W ten sposób powstała lista siedmiu problemów milenijnych. Za rozwiązanie każdego fundatorzy ustanowili nagrodę w wysokości miliona dolarów. Pierwsza nagroda została już przyznana matematykowi z Petersburga Grigorijowi Perelmanowi za rozwiązanie hipotezy Poincarégo, postawionej ponad 100 lat wcześniej, w 1904 roku. Perelman, który w 2006 r. odmówił przyjęcia medalu Fieldsa za to samo osiągnięcie – dzięki czemu stał się sławniejszy, niż gdyby wyróżnienie przyjął – odrzucił także milionową nagrodę.

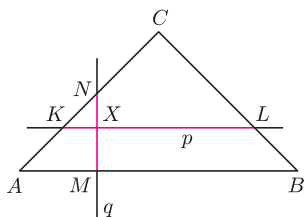
Krótko przed otwarciem kongresu w Hajdarabadzie hinduski matematyk Vinay Deolalikar, pracujący w laboratorium Hewlett-Packard w Kalifornii, ogłosił na swojej stronie internetowej rozwiązanie innego problemu milenijnego – zagadnienia, czy $P = NP$, będącego od lat motorem napędowym badań w zakresie informatyki teoretycznej. Niestety, tym razem była to pomyłka.

W Polsce też pojawiają się pierwsze sygnały sponsorowania rozwoju matematyki przez biznes. Łódzko-krakowska firma informatyczna Ericpol-Telecom ufundowała Międzynarodową Nagrodę im. Stefana Banacha za pracę doktorską z nauk matematycznych, przyznawaną we współpracy z Polskim Towarzystwem Matematycznym. Nagroda wynosi 20 000 zł i jest najwyższym w Polsce wyróżnieniem finansowym dla młodych matematyków. Może jeden z laureatów tej nagrody sięgnie kiedyś po milion dolarów państwa Clay? Trzeba się spieszyć, bo konkurencja i tempo badań w matematyce nieustannie rosną.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



Rys. 1

M 1312. Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na biało lub czarno. Udowodnić, że istnieje prostokąt o wierzchołkach pokolorowanych na ten sam kolor.

Rozwiązanie na str. 6

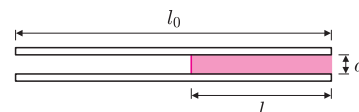
M 1313. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n istnieje taka liczba całkowita dodatnia k , że 3^k w zapisie dziesiętnym kończy się cyframi $\underbrace{00 \dots 01}_{n-1 \text{ zer}}$.

Rozwiązanie na str. 24

M 1314. Dany jest prostokątny trójkąt równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Znaleźć zbiór takich punktów X z wnętrza trójkąta ABC , że jeśli prosta p równoległa do podstawy AB przechodząca przez punkt X przecina ramiona AC i BC w punktach K i L , zaś q jest prostą prostopadłą do p przechodzącą przez X , przecinającą podstawę AB trójkąta w punkcie M , a ramię w punkcie N (rys. 1), to $KL = 2MN$.

Rozwiązanie na str. 8

Redaguje Ewa CZUCHRY



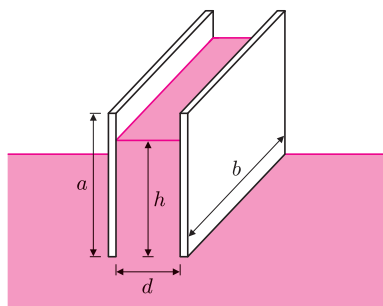
Rys. 2

F 787. Określić pojemność kondensatora, jeżeli część przestrzeni pomiędzy jego okładkami jest wypełniona dielektrykiem w sposób przedstawiony na rysunku 2.

Rozwiązanie na str. 17

F 788. Do dużego naczynia nalana jest ciecz o gęstości ρ i przenikalności elektrycznej ϵ . Dwie pionowe równoległe płyty stykają się krawędziami z powierzchnią cieczy (rys. 3). Płyty mają wymiary a i b , odległość między nimi wynosi d . Płyty naładowano do różnicy potencjałów φ_0 i odłączono od źródła. Na jaką wysokość h wzniesie się ciecz?

Rozwiązanie na str. 7



Rys. 3

Katastrofa w Japonii

Jak wszyscy wiemy, 11 marca 2011 roku o godzinie 14:46 czasu lokalnego (JST: UTC+9h) na północny wschód od Tokio, 130 km na wschód od półwyspu Oshika, na głębokości około 30 km, nastąpiło trzęsienie ziemi o sile około 9 stopni w skali Richtera. Było ono poprzedzone szeregiem mniejszych wstrząsów, z których największy, o sile 7,2 stopnia, wystąpił dwa dni wcześniej, a przez wiele dni później były rejestrowane wstrząsy wtórne.

System ostrzegania o trzęsieniach ziemi, wykorzystując skończoną prędkość propagacji fal sejsmicznych, uprzedził Japończyków na około minutę przed dojściem niszczącej fali wstrząsów. Miasta, dzięki stosowaniu od lat restrykcyjnych przepisów budowlanych, zniosły wstrząsy dość dobrze. Niestety, trzęsienie ziemi wywołało potężne tsunami o wysokości momentami przekraczającej 10 m, które spustoszyło wybrzeże do 10 km w głąb lądu. Choć ostrzeżenie przed tsunami zostało wydane na kilkadziesiąt minut przed dotarciem fali, to nie wszyscy zdążyli się ewakuować. Kilka miasteczek zostało dosłownie unieścwiezionych przez żywioł, który wyrządził dużo większe szkody niż samo trzęsienie ziemi. Ostateczna liczba ofiar nie jest jeszcze (w chwili pisania tego tekstu) znana, szacuje się ją na ponad dwadzieścia tysięcy.

Trzęsienie ziemi o tak dużej skali jest od lat w okolicach Japonii spodziewane, ale przewidywania nie dotyczyły ani najbliższej przyszłości, ani tego miejsca. Podejrzana struktura znajduje na południowy wschód od Tokio. Choć na ukos pod Polską biegnie granica płyt tektonicznych, jednak na szczęście wszystko wskazuje na to, że żadne naprężenie, które mogłoby się wyzwolić w postaci silnych wstrząsów, na tej granicy się nie tworzy. Żyjemy więc w rejonie bardzo spokojnym sejsmicznie i wydaje się nam, że trzęsienia ziemi są nieprzewidywalne.

Rzeczywiście, obecnie określenie z dużym wyprzedzeniem dokładnego momentu ich wystąpienia jest niemożliwe. Jednak prawdopodobieństwo takich zdarzeń, ze wskazaniem czasu, miejsca i siły, jest szacowane coraz precyzyjniej. Siła trzęsienia ziemi zależy od wielkości struktury, która w spodziewanym wstrząsie ma się przesunąć. Trzęsienia rzędu 9 stopni w skali Richtera wiążą się zazwyczaj z powstawaniem uskoków o długości ponad tysiąca kilometrów. W przypadku trzęsienia z 11 marca raptura miała „tylko” kilkaset kilometrów długości, za to przesunięcie było bardzo duże, po kilkadziesiąt metrów w pionie i poziomie. W efekcie północna część największej wyspy Japonii, Honsiu, przesunęła się o ponad 2 metry na wschód. Przesunięcie dna oceanicznego spowodowało nie tylko niszczycielskie tsunami, ale również zmianę kierunku osi Ziemi (bieguny przesunęły się o około 20 cm) oraz skrócenie doby (o około 1,8 mikrosekundy), co oznacza, że płyty tektoniczne przesunęły się do środka Ziemi. Tsunami rozprzestrzeniło się na cały basen Oceanu Spokojnego.

Na przykład w wybrzeże Chile, po około 20 godzinach, uderzyła fala o wysokości do 2 metrów, lokalnie powodując straty materialne.

Uwaga mediów prawie natychmiast po katastrofie została przyciągnięta przez problemy elektrowni jądrowej Fukushima I. W wyniku trzęsienia ziemi zadziałały prawidłowo systemy bezpieczeństwa i wiele z kilkudziesięciu japońskich reaktorów automatycznie zostało wyłączonych.

Procedura wyłączenia polega na wsunięciu pomiędzy pręty paliwowe prętów zawierających absorber neutronów. Powoduje to zatrzymanie wymuszonej reakcji rozszczepienia. Nie znaczy to jednak, że reaktor przestaje być źródłem ciepła. W prętach dalej zachodzi deekscytacja (rozpad) wcześniej powstałych jąder radioaktywnych. Dlatego po wyłączeniu reaktor musi być dalej chłodzony przez kilka do kilkudziesięciu dni lub nawet dłużej. Trzy z sześciu reaktorów Fukushima I, które działały w chwili trzęsienia ziemi, to jedne z najstarszych w Japonii, uruchomione w latach siedemdziesiątych ubiegłego stulecia. Są to reaktory wodne wrzące (BWR) tzw. pierwszej generacji. Reaktory te są bezpieczne w tym sensie, że woda, która odbiera ciepło z reaktora, jest jednocześnie moderatorem, czyli spowalnia neutrony. Bez wody nie ma chłodzenia, ale też wymuszona reakcja rozszczepienia nie zachodzi, bo powstające w wyniku rozszczepienia neutrony są za szybkie, żeby efektywnie inicjować kolejne reakcje. Jest to zasadnicza różnica w stosunku do reaktora, który uległ awarii w Czarnobylu. Tam moderatorem był, prócz wody, również grafit, nie występowało więc opisane wyżej silne, ujemne sprzężenie zwrotne, co pozwoliło na gwałtowny, tysiąckrotny wzrost mocy reaktora, powodując przegrzanie i chemiczny wybuch.

Bezpieczne wyłączenie reaktorów wiąże się z koniecznością ich chłodzenia. Systemy chłodzenia są wielokrotnione, ale prawie wszystkie wymagają zewnętrznego zasilania. Pasywne chłodzenie jest we współcześnie budowanych reaktorach, ale nie w Fukushima. Jeden z systemów działa, wykorzystując jako napęd gorącą parę z grzejącego się reaktora, ale jego sterowanie wymaga zasilania z akumulatorów. Systemy te zatrzymały się po kilku godzinach.

Ze względu na uszkodzenia związane z trzęsieniem ziemi zewnętrzne zasilanie nie docierało do elektrowni. Automatycznie włączyły się generatory dieslowskie. Niestety, fala tsunami pokonała mur zabezpieczający o wysokości 6,5 metra i zniszczyła generatory. Później okazało się, że również zbiorniki z ropą zostały przez odchodzącą falę zabrane. W ten sposób po uderzeniu tsunami elektrownia została bez prądu. W takiej sytuacji woda podgrzewa się coraz bardziej, w konsekwencji odparowuje, odsłaniając pręty paliwowe.

Są one pokryte cyrkonem, który jest praktycznie jedynym materiałem o odpowiedniej wytrzymałości mechanicznej i termicznej, wystarczająco dobrej przewodności cieplnej i nadto niezatrzymującym neutronów. W kontakcie z parą wodną o wysokiej temperaturze i ciśnieniu cyrkon utlenia się powierzchniowo z uwolnieniem wodoru. Reaktor jest zamknięty w zbiorniku ciśnieniowym. Przy braku efektywnego chłodzenia ciśnienie w nim rośnie ze względu na powstającą parę i wydzielający się wodór. Żeby zapobiec wybuchowi wodoru, wewnątrz zbiornika tlen atmosferyczny jest zastąpiony azotem.

Szczelny zbiornik ciśnieniowy ma zawory bezpieczeństwa, przez które nadmiar gazów może zostać wypuszczony, ale jest to już poważna awaria, ponieważ gazy te zawierają pierwiastki radioaktywne. Dodatkowo wypuszczony wodór miesza się z powietrzem, a mieszanina zbiera się w budynku osłaniającym reaktor przed wpływem warunków atmosferycznych. Wybuch jest w tej sytuacji już tylko kwestią czasu.

Tak też stało się w Fukushima. Kolejne wybuchy zniszczyły cztery budynki, ale komory ciśnieniowe pozostały nienaruszone. (W reaktorze nr 2 wybuch, prawdopodobnie, nastąpił wewnątrz zbiornika ciśnieniowego, co oznacza, że zbiornik ten musiał się częściowo rozszczelnić.)

W budynku reaktora nr 4 problem wiązał się nie tyle z reaktorem, co z wykorzystanym paliwem, dezaktywującym się w otwartym zbiorniku wodnym, znajdującym się tuż obok komory ciśnieniowej nieaktywnego reaktora. Tam sytuacja rozwinęła się najpoważniej. Pręty paliwowe zostały prawie całkowicie odłonięte, co spowodowało co najmniej dwa pożary, które ugaszono. Jednak każdy pożar czy wybuch wodoru to emisja materiału promieniotwórczego.

W trakcie operacji ratowniczej przystąpiono do chłodzenia reaktorów wodą morską (bo innej nie było), również za pomocą specjalnych armatek wodnych i helikopterów. Użycie wody morskiej powoduje, że reaktory nie będą już mogły być użytkowane. Premier Japonii podjął zresztą decyzję, że cała elektrownia Fukushima I będzie wyłączona z użytkowania. Decyzja jest częściowo polityczna (dwa z sześciu reaktorów, w dodatku najnowsze i o największej mocy, być może można by było przywrócić do pracy), ale tylko częściowo.

Cały czas monitorowana jest dawka promieniowania przyjmowana przez wymieniające się ekipy ratownicze. Oczywiście, monitorowane jest również skażenie, nie tylko na terenie elektrowni, ale również w bliższej i dalszej okolicy. Dawka promieniowania, mierzona przy bramie elektrowni, wahała się około 1 milisiwerta na godzinę (1 mSv/h), podwyższała się przy każdej emisji, a następnie spadała, zwłaszcza jeżeli polewano reaktory wodą. Ludność została ewakuowana w promieniu 20 km, a w pierścieniu od 20 km do 30 km zalecono pozostawanie wewnątrz budynków.

Pręty paliwowe w trzech działających przed trzęsieniem ziemi reaktorach uległy częściowemu stopieniu na skutek niedostatecznego chłodzenia. Ryzyko całkowitego stopienia nadal istnieje. Spowodowałyby to spłynięcie materiału paliwowego do komory pod reaktorem. Nie wiązałoby się to z niebezpieczeństwem jakiegokolwiek wzmożonej reakcji rozszczepienia (bo w takim stopie nie będzie moderatora), ale spowodowałyby rozhermetyzowanie się komory reaktora i dalsze skażenia.

Podsumowując, sytuacja jest poważna, ale nadal jest to awaria o ograniczonych i w większości krótkotrwałych skutkach, nieporównywalna z katastrofą spowodowaną przez samo trzęsienie ziemi i tsunami. Gdyby takie trzęsienie ziemi wystąpiło w innym, równie gęsto zaludnionym miejscu, np. w Kalifornii, to szacunkowa liczba ofiar byłaby co najmniej rząd wielkości większa, o stratach materialnych nie wspominając.

Paradoksalnie, sytuacja po awarii w elektrowni Fukushima I pokazuje nie słabości, lecz mocne strony energetyki jądrowej. Elektrownie w Japonii pracują, ale w większości są to właśnie elektrownie jądrowe, bo one najmniej ucierpiały. Te konwencjonalne mają różne problemy logistyczne.

Reaktory w Fukushima były niemalże zostawione same sobie i nic naprawdę poważnego im samym się nie stało (po prostu się popsuly), nie spowodowały też niczego naprawdę poważnego. Głównie dlatego, że nie miały jak.

Należy pamiętać, że skażenia radioaktywne są niezwykle łatwe do wykrycia, a normy bardzo restrykcyjne. Z samego faktu, że w pewnej odległości od miejsca awarii wykryto jakieś skażenie, nie wynika, że ma ono jakiegokolwiek znaczenie dla zdrowia ludzi. Oczywiście, najbardziej niebezpieczne jest skażenie żywności. Przekroczenie norm już się obserwuje w pobliżu awarii, np. wiadomo, że skażeniu uległ szpinak.

Na dodatek, w Fukushima uległy awarii reaktory starego typu, a więc niewyposażone w szereg zabezpieczeń używanych we współczesnych reaktorach. Jednym z takich systemów jest układ automatycznej rekombinacji uwalnianego wodoru w cząsteczki wody. Systemy awaryjnego chłodzenia współczesnych reaktorów są tak projektowane, żeby mogły sobie poradzić bez zewnętrznego źródła zasilania (chłodzenie grawitacyjne) oraz aby wytrzymały atak terrorystyczny, np. przeprowadzony za pomocą uderzenia samolotu pasażerskiego. Reaktory te mają również specjalne komory przygotowane na przyjęcie stopionego materiału rdzenia, choć prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest w ich przypadku niezwykle małe.

Z awarii w Japonii zostaną wyciągnięte wnioski, więc margines bezpieczeństwa, już bardzo wyśrubowany, jeszcze wzrośnie.

Pomimo tego reakcja części świata jest, oczywiście, neurotyczna. Ciekawe, jak to wpłynie na polską energetykę jądrową *in spe*.

Piotr ZALEWSKI

Ciąg EKG, czyli zaskakująca zabawa z teorią liczb

Marcin PILIPCZUK*

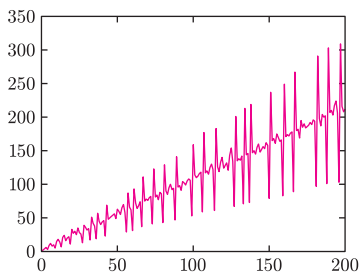
Teoria liczb w wielu miejscach jest zaskakująca i nieprzewidywalna, co – na poziomie elementarnym – objawia się przede wszystkim przez nieregularne i trudne do opisanie rozmieszczenie liczb pierwszych w zbiorze liczb naturalnych. Wraz z Piotrem Hofmanem zmierzaliśmy się z tym fenomenem, badając tzw. ciąg EKG: prosty do zdefiniowania, a z bardzo ciekawymi właściwościami.

Ciąg EKG a_n określamy następująco: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ i dalej a_{n+1} jest najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią niewystępującą wcześniej w ciągu, taką że $\text{NWD}(a_n, a_{n+1}) > 1$. Jako pierwszy zajmował się tym ciągiem Ayres, następnie badali go Lagarias, Rains i Sloane.

Skąd nazwa ciąg EKG? Pierwsze 40 wyrazów ciągu nam może tego nie powie:

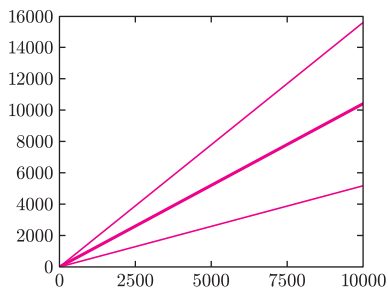
1	2	4	6	3	9	12	8	10	5
15	18	14	7	21	24	16	20	22	11
33	27	30	25	35	28	26	13	39	36
32	34	17	51	42	38	19	57	45	40

ale jeśli narysujemy wykres pierwszych 200 wyrazów (rys. 1), to zobaczymy coś ciekawego. Nasuwa się pytanie: czemu zawdzięczamy te „skoki” na wykresie, przypominające zachowanie elektrokardiogramu? Prześledzenie wyrazów ciągu EKG pokazuje, że te skoki to trójki kolejnych wyrazów postaci $2p, p, 3p$ dla liczb pierwszych p .



Rys. 1. Pierwsze 200 wyrazów ciągu EKG.

Lagarias, Rains i Sloane wykazali, między innymi, że ciąg a_n jest permutacją liczb całkowitych dodatnich, że liczby pierwsze pojawiają się w nim w kolejności rosnącej i że asymptotycznie zachowuje się on liniowo (dokładniej, $n/260 \leq a_n \leq 14n$ dla każdego n). Rysunek 2, pokazujący pierwszych 10 000 wyrazów ciągu EKG, sugeruje, że powinniśmy potrafić udowodnić dużo dokładniejsze ograniczenia: poza skokami, a_n jest równe prawie dokładnie n .



Rys. 2. Pierwsze 10 000 wyrazów ciągu EKG.

Oznaczmy $a'_n = 2p$, jeśli $a_n = p$ lub $a_n = 3p$ dla liczby pierwszej p , i $a'_n = a_n$ w przeciwnym przypadku. Ta definicja „łagodzi” skoki. Spodziewamy się więc, że będzie $a'_n \sim n$, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n/n = 1$. Bazując na eksperymentach numerycznych, Lagarias, Rains i Sloane postawili następujące hipotezy:

1. w ciągu EKG każda liczba pierwsza $p > 2$ występuje w trójce $2p, p, 3p$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n/n = 1$, a dokładniej $a'_n \sim n(1 + 1/(3 \log n))$.

Wraz z Piotrem Hofmanem udowodniliśmy pierwszą hipotezę i częściowo drugą: wykazaliśmy, że istnieje taka stała uniwersalna C , że

$$\left| \frac{a'_n}{n} - 1 \right| \leq \frac{C}{\log \log \log n},$$

co oczywiście implikuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n/n = 1$. Dowód powyższego oszacowania jest żmudny i wymaga wielu drobnych technicznych kroków. Za to dowód pierwszej hipotezy jest dość krótki i przedstawię go w dalszej części artykułu.

Jeśli q jest liczbą pierwszą dzielącą zarówno a_n , jak i a_{n-1} , to q nazywamy liczbą sterującą wyrazu a_n (to nie jest definicja jednoznaczna, dla jednego a_n możemy mieć wiele liczb sterujących). Zauważmy, że a_n jest najmniejszą liczbą niewystępującą wcześniej w ciągu, a podzielną przez q .

Kluczowe jest następujące spostrzeżenie. Ustalmy liczbę rzeczywistą $x \geq 0$. Wówczas, dla każdej liczby pierwszej q istnieje co najwyżej jeden taki wyraz ciągu a_n , że $a_{n-1} < x \leq a_n$ i q jest liczbą sterującą a_n . Istotnie, zauważmy, iż jeśli q jest liczbą sterującą a_n i $x \leq a_n$, to wszystkie liczby mniejsze od x podzielne przez q wystąpiły wcześniej w ciągu. Czyli jeśli dla pewnego $n' > n$ mamy $a_{n'-1} < x$, to q nie dzieli $a_{n'-1}$, a więc nie może być liczbą sterującą $a_{n'}$.

Załóżmy, że pewna liczba pierwsza p pojawia się w ciągu niepoprzedzona wyrazem $2p$, czyli $a_{n+1} = p$, $a_n = mp$ dla pewnych całkowitych $n > 1$ i $m > 2$. Lagarias, Rains i Sloane udowodnili, że wówczas a_n jest pierwszym wyrazem ciągu podzielnym przez p . W szczególności oznacza to, że $2p$ nie wystąpiło w ciągu przed pozycją n .



*doktorant, Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Rozpatrzmy zbiory

$$A = \{1 < i \leq n : a_{i-1} < 2p \leq a_i\} \quad \text{i} \quad B = \{1 \leq i < n : a_i \geq 2p > a_{i+1}\}.$$

Zauważmy, że $|A| - |B| = 1$, gdyż $a_1 < 2p$ i $a_n > 2p$. Doprowadzimy do sprzeczności, dowodząc, że jeśli $m > 2$ i p jest wystarczająco duże, to zbiór B jest dużo większy niż A .

Jak wykazali Lagarias, Rains i Sloane, liczby pierwsze pojawiają się w ciągu EKG w kolejności rosnącej, czyli przed pozycją n nie pojawiła się liczba pierwsza większa niż p . Jeśli q jest liczbą sterującą wyrazu $a_{n'}$ i $n' \leq n$, to q jest kandydatem na wyraz $a_{n'}$, więc pojawia się w ciągu na pozycji n' lub wcześniejszej. Wnioskujemy stąd, że wszystkie liczby sterujące do pozycji n są mniejsze niż p . Z podanego przed chwilą „kluczowego spostrzeżenia” wiemy, że dla każdej liczby pierwszej $q < p$ istnieje co najwyżej jeden taki indeks i , że $a_{i-1} < 2p \leq a_i$ i q jest liczbą sterującą a_i . Liczb pierwszych nie większych niż p jest nie więcej niż $cp/\log p$ dla pewnej stałej uniwersalnej c , czyli

$$|A| \leq cp/\log p.$$

Spójrzmy teraz na zbiór B . Niech q będzie liczbą sterującą wyrazu $a_n = mp$; oczywiście q jest dzielnikiem m . Wobec tego liczby kq dla $1 \leq k \leq (mp/q - 1)$ musiały pojawić się w ciągu wcześniej. Oznaczmy

$$B' = \{1 \leq i < n : 2q \mid a_i \text{ oraz } a_i > 2p\}.$$

Indeksy wszystkich parzystych wyrazów postaci kq (podzielnych przez 4, jeśli $q = 2$), większych od $2p$, należą do B' , wobec tego

$$|B'| \geq \left\lfloor \frac{mp - 2p}{2q} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{p}{6} \right\rfloor.$$

Z drugiej strony, jeśli $i \in B'$, to $2p$ jest potencjalnym kandydatem na wyraz a_{i+1} , czyli $a_{i+1} < 2p$. Mamy więc $B' \subseteq B$, zatem

$$|B| \geq |B'| \geq \lfloor p/6 \rfloor.$$

Wobec tego dla odpowiednio dużych p mamy $|B| > |A|$.

Wyliczywszy dokładnie stałe w powyższym rozumowaniu, można dowieść, że $|B| > |A|$ już dla $p > 25\,000$. Teza dla mniejszych wartości p została sprawdzona numerycznie przez Lagariasa, Rainsa i Sloane'a, więc hipoteza została udowodniona dla wszystkich $p > 2$. Dowód zakończony.

Jak wyznaczać wyrazy ciągu EKG?

Jakub RADOSZEWSKI

Po przeczytaniu artykułu Marcina Pilipczuka trudno nie odnieść wrażenia, że nasz zasób wiedzy o zachowaniu ciągu EKG opiera się przede wszystkim na wynikach eksperymentów komputerowych, natomiast dowody otrzymanych w ten sposób hipotez pojawiają się z pewnym opóźnieniem. Co więcej, niektóre własności nie doczekały się jeszcze ścisłych dowodów, choć dane doświadczalne pokazują je na tyle wyraźnie, że ciężko byłoby nie wierzyć w ich prawdziwość. Widzimy tu, że informatyka zaczyna pełnić funkcję eksperymentalnej poddziedziny matematyki. Co ciekawe jednak, nie chodzi tu tylko o łatwiejsze stawianie hipotez – wyniki obliczeń mogą stanowić fragmenty dowodu odkrytych za ich pomocą własności! W przypadku ciągu EKG przejawiało się to w automatycznym sprawdzeniu prawdziwości hipotezy dla pewnej liczby początkowych wyrazów ciągu (dla pozostałych zadziałało rozumowanie czysto matematyczne), ale zdarzały się już w historii problemy, dla których cały dowód opierał się na komputerowej analizie przypadków – na przykład dowód faktu, że każdą mapę (graf planarny) można pokolorować czterema kolorami, tak aby żadne dwa sąsiednie państwa (wierzchołki) nie miały tego samego koloru. Niektórzy twierdzą, że takie rozumowanie, oparte w znacznej mierze na programach komputerowych i często obszernych wynikach ich działania, nie jest właściwie żadnym dowodem. Jest to argument poniekąd słuszny – ciężko ręcznie zweryfikować poprawność tego typu wywodu. Ten medal ma jednak dwie strony. Otóż przypomnijmy sobie chociażby liczne „dowody” Wielkiego Twierdzenia Fermata, publikowane bez mała przez trzy stulecia, które nie używały żadnych podejrzanych metod informatycznych, a mimo wszystko okazywały się nieprawdziwe (niepełne). Czy autorzy tych „dowodów”

wierzyli w słusność przedstawianych wyników? Podejrzewam, że tak. Swoją drogą, zapewne większość Czytelników wierzy w prawdziwość dowodu Andrew Wileasa, mimo iż jest on tak długi i skomplikowany, że nie mieli ochoty go samodzielnie sprawdzić. Jeśli dołożymy do tego podobną konkurencję rozgrywaną w obecnych czasach – próby odpowiedzi na słynne pytanie: $P = NP?$, jedno z fundamentalnych w informatyce teoretycznej, których to prób – „dowodów” – były już dziesiątki (zainteresowany Czytelnik znajdzie ich systematycznie aktualizowaną listę na stronie <http://www.win.tue.nl/~gwoegi/P-versus-NP.htm>) – to zauważymy, że czysto matematyczne rozumowania wcale nie muszą być lepsze i mniej błędne od rozumowań opartych na wynikach badań eksperymentalnych.

W duchu powyższego, trochę przydługawego wstępu w tym artykule zastanowimy się, jak efektywnie wyznaczać kolejne wyrazy ciągu EKG. Nasz algorytm powinien być na tyle sprawny, aby dało się za jego pomocą sprawdzić poprawność wyników eksperymentu Lagarias, Rainsa i Sloane’a, czyli powinien działać co najmniej dla indeksów około 50 000 (w tych okolicach powinna pojawić się największa liczba pierwsza mniejsza od 25 000). A im lepszy algorytm, tym lepiej pozwoli nam badać asymptotykę ciągu EKG – a nuż uda się postawić kolejne ciekawe hipotezy?

Początek nie będzie zbyt odkrywczy: otóż metoda wyznaczania wyrazów ciągu EKG (a_n) jest obecna *implicite* w tekście Marcina Pilipczuka. Faktycznie, jeśli znamy a_{n-1} , to wiemy, że jeden z dzielników pierwszych tej liczby jest liczbą sterującą wyrazu a_n . Jeśli właśnie liczba pierwsza q jest tą liczbą sterującą, to a_n jest najmniejszą wielokrotnością q niewystępującą wcześniej w ciągu. Aby wśród wszystkich dzielników pierwszych a_{n-1} zidentyfikować liczbę q , wystarczy, rzecz jasna, przejrzeć wszystkie te dzielniki i wybrać ten o najmniejszej pierwszej wolnej wielokrotności.

Aby uzupełnić ten opis postępowania, musimy wymyślić sposób efektywnego przejrzania wszystkich **dzielników pierwszych** danej liczby naturalnej oraz sposób znalezienia **najmniejszej wolnej wielokrotności** każdego takiego dzielnika. Teraz zajmiemy się kolejno tymi dwiema lukami.

Problem rozkładu liczby naturalnej na czynniki pierwsze brzmi bardzo klasycznie: wydaje się, że powinien istnieć jakiś sympatyczny, efektywny algorytm dający sobie z nim radę. I faktycznie, jest to znany problem *faktoryzacji* liczby, lecz, niestety, w ogólności nie umiemy sobie z nim łatwo radzić – nie jest znany żaden wielomianowy algorytm rozwiązujący ten problem. Słowo *wielomianowy* oznacza tu algorytm o złożoności czasowej będącej jakimś wielomianem względem długości zapisu rozkładanej liczby, która to długość zapisu to mniej więcej logarytm z tej liczby.

Na szczęście, w naszej sytuacji nie musimy uciekać się do ogólnych rozwiązań problemu faktoryzacji. Wystarczy, jeśli przypomnimy sobie, że rozkładane przez nas liczby nie są zbyt duże, co w teorii wynika z górnego oszacowania $14n$ na wartość n -tego wyrazu ciągu, a w praktyce z wykresu wartości pierwszych 10 000 elementów ciągu zawartego w artykule Marcina Pilipczuka.

W przypadku tak niedużych liczb możemy użyć metody *sita Eratostenesa*. Podstawowa wersja tego algorytmu, służąca do wyznaczania kolejnych liczb pierwszych, jest na tyle znana, że w tym miejscu ograniczymy się do przypomnienia jej w postaci pseudokodu:

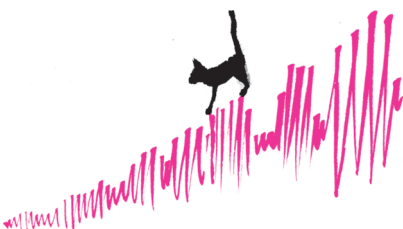
```

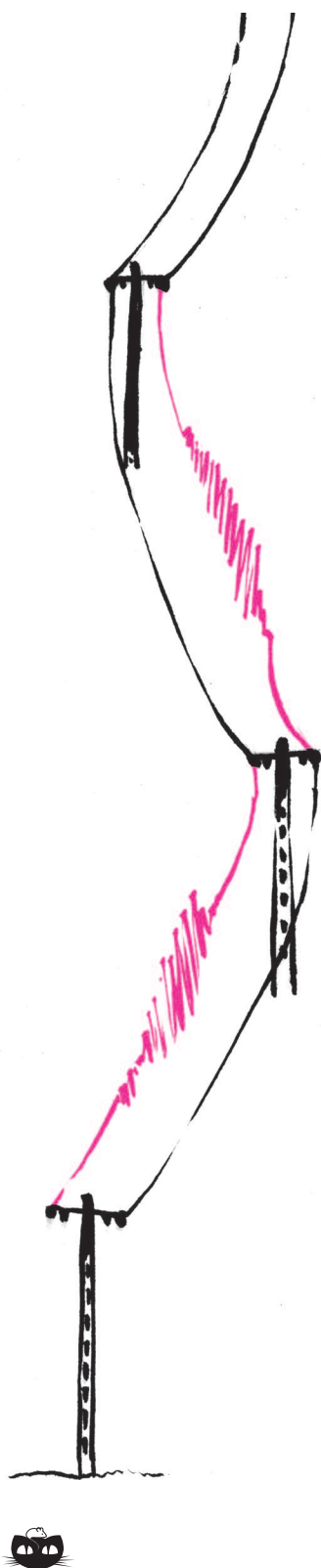
for i := 2 to M do pierwsza[i] := true;
for i := 2 to M do
  if pierwsza[i] then begin
    j := i2;
    while j ≤ M do begin
      pierwsza[j] := false;
      j := j + i;
    end;
  end;
end;

```

Obliczamy tu elementy boolowskiej tablicy $pierwsza[2..M]$, wykreślając wielokrotności kolejnych liczb pierwszych, tj. oznaczając je jako liczby złożone. Żeby było szybciej, przeglądanie wielokrotności liczby pierwszej i rozpoczynamy

Część Czytelników miała szansę spotkać się z obszerną klasą problemów NP-zupełnych, które są powszechnie uznawane za nierozwiązywalne w czasie wielomianowym, a do tego mają tę zabawną cechę, że gdyby choć jeden z nich udało się rozwiązać w czasie wielomianowym, to wszystkie pozostałe również. Jednakże o problemie faktoryzacji nie wiemy, czy znajduje się w tej klasie, co oznacza mniej więcej tyle, że *tym bardziej* nie wiemy, czy da się go rozwiązać wielomianowo, czy też nie.





Rozwiązanie zadania F 787.

Kondensator opisany w zadaniu jest układem dwóch połączonych równolegle kondensatorów o pojemnościach $C_1 = \epsilon_0 S_1 / d = \epsilon_0 S(l - l_0) / (dl_0)$ i $C_2 = \epsilon \epsilon_0 S_2 / d = \epsilon \epsilon_0 S l / (dl_0)$, gdzie ϵ jest względną przenikalnością elektryczną dielektryka, a $S_{1,2}$ oznaczają pola okładek kondensatorów składowych, $S = S_1 + S_2$. Zatem

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \frac{[l_0 + l(\epsilon - 1)] S}{dl_0}.$$

od i^2 , gdyż skądinąd wiemy, że wszystkie mniejsze musiały już zostać wcześniej wykreślone. Na końcu mamy zaznaczone (wartość **true**) wszystkie liczby pierwsze nie większe niż M .

Zapewne nie wszyscy wiedzą, że ten sam algorytm można wykorzystać także do rozkładania liczb na czynniki pierwsze. Wystarczy, mianowicie, dołożyć dodatkową tablicę *dzielnik*[2..M], w której będziemy przechowywać najmniejszy dzielnik pierwszy każdej liczby złożonej z zakresu. Elementy tej tablicy inicjujemy na zera, a wypełniamy ją w momencie wykreślania liczb, tzn. wewnątrz pętli **while**, za pomocą instrukcji:

if *dzielnik*[*j*] = 0 **then** *dzielnik*[*j*] := *i*;

Za pomocą tablicy *dzielnik* możemy już łatwo faktoryzować liczby nieprzekraczające M : dla danej liczby i jako pierwszy podajemy dzielnik *dzielnik*[i], następnie *dzielnik*[i /*dzielnik*[i]] i tak dalej, aż dojdziemy do jedynki. Takich kroków wykonamy nie więcej niż $\log_2 i$, gdyż za każdym razem i zmniejszamy co najmniej dwukrotnie. Dzięki temu, że w tablicy pamiętamy *najmniejsze* dzielniki pierwsze liczb, uzyskana w tym postępowaniu lista dzielników będzie zawsze niemalejąca, więc łatwo usuniemy z niej powtórzenia.

Stosując podobny argument (do tego z logarytmem), można wykazać, że złożoność czasowa sita Eratostenesa to $O(M \log M)$, co pozostawiamy Czytelnikowi (tak naprawdę złożoność tę można oszacować nawet przez $O(M \log \log M)$). Jeśli przypomnimy sobie, iż $M = O(n)$, przy czym n to indeks wyrazu ciągu EKG, który chcemy obliczyć, to słusznie zauważymy, że z problemem faktoryzacji poradziliśmy już sobie całkiem sprawnie.

Do zakończenia opisu całego algorytmu pozostała nam już tylko kwestia wyznaczenia **najmniejszych wolnych wielokrotności** poszczególnych liczb pierwszych z rozkładu. Z tą częścią rozwiązania możemy poradzić sobie całkiem prosto, o ile zastosujemy odpowiednio sprytną strukturę danych, przy czym nie będzie to wcale struktura wysublimowana.

Znów skorzystamy z tego, że zakres interesujących nas liczb pierwszych jest nieduży. Dla każdej liczby pierwszej p nie większej niż M będziemy przechowywać, jako *wiel*[p], jakąś wielokrotność liczby p , która wystąpiła już w ciągu. Zadbamy o to, aby w algorytmie jedynie powiększać te wartości, aktualizując je tylko w razie potrzeby. Początkowo *wiel*[p] = 0. Dodatkowo, w tablicy boolowskiej *użyte*[0..M] będziemy pamiętali informację o tym, które liczby wystąpiły już w ciągu EKG. Początkowo, dla wygody, ustawiamy *użyte*[0] = **true**, a resztę komórek na **false**. Okazuje się, że to już wystarczy – poniżej pseudokod wyznaczenia najmniejszej wolnej wielokrotności liczby p , w którym, w gruncie rzeczy, nic się nie dzieje.

while *użyte*[*wiel*[p]] **do** *wiel*[p] := *wiel*[p] + p ;

Powyższa pętla może i wygląda bardzo nieoptymalnie, ale nie jest w rzeczywistości taka zła. Otóż wystarczy zauważyć, że dana liczba i , $i \leq M$, może wystąpić jako *wiel*[p] dla nie więcej niż $\log_2 i$ liczb pierwszych p (będą to, oczywiście, dzielniki pierwsze liczby i). To oznacza, że łączna liczba obrotów powyższej pętli **while** z pewnością nie przekroczy $O(M \log M)$.

Możemy już podsumować cały algorytm wyznaczenia n -tego wyrazu ciągu EKG. Używamy w nim zaledwie czterech tablic rozmiaru co najwyżej $M + 1$, przy czym dwie z nich (*pierwsza* i *dzielnik*) wypełniamy na samym początku w czasie $O(M \log M)$, a dwie pozostałe (*wiel* i *użyte*) uzupełniamy w trakcie obliczania kolejnych wyrazów ciągu EKG, również w łącznym czasie $O(M \log M)$. W takim samym czasie możemy wyznaczyć wszystkie dzielniki pierwsze wszystkich liczb z podanego zakresu. Stąd całe rozwiązanie działa w czasie $O(M \log M)$ i w pamięci $O(M)$, przy czym $M = O(n)$. Algorytm szybki, a zarazem prosty – i o to w tym sporcie chodzi.

Można by jednak spytać, czy nie da się lepiej. W szczególności, w podanej metodzie przy wyznaczaniu a_n musimy najpierw obliczyć wszystkie wcześniejsze wyrazy ciągu EKG – a może dałoby się obejść szybciej i bez tego? Podobnie jak Lagarias, Rains i Sloane, którzy w swojej pracy opisują algorytm zbliżony do powyższego, autor tego artykułu nie zna odpowiedzi na to pytanie, ale może Czytelnik ma jakiś pomysł? Jeśli tak, zachęcamy do podzielenia się nim z Redakcją.

Informatyczny kącik olimpijski (41): Samogenerujący się ciąg

W tym numerze *Delty* dużo uwagi poświęcono ciągowi EKG, który zarówno z matematycznego, jak i z informatycznego punktu widzenia przejawia wiele interesujących własności. W kąciku kontynuujemy temat ciekawych ciągów liczbowych. Zajmiemy się zadaniem *Ciąg* z finału II Olimpiady Informatycznej Gimnazjalistów, w którym poproszono uczestników o wyznaczenie n -tego wyrazu pewnego ciągu, zwyczajowo wiążanego z nazwiskiem matematyka Solomona Golomba.

Ciąg ten jest niemalejącą sekwencją liczb całkowitych dodatnich $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, taką że a_k oznacza łączną liczbę wystąpień liczby k w tej sekwencji. To już cała definicja; spróbujmy rozszyfrować, jak wygląda ten tajemniczy ciąg.

Zacznijmy od początku, czyli od wyrazu a_1 . Ponieważ $a_1 > 0$, więc w ciągu musi wystąpić co najmniej jedna jedynka, a skoro ciąg jest niemalejący, to musi zaczynać się od jedynki, czyli $a_1 = 1$. Przejdźmy teraz do a_2 . Otóż nie może być $a_2 = 1$, gdyż w ciągu mamy dokładnie jedną jedynkę ($a_1 = 1$). Stąd $a_2 \geq 2$, czyli – podobnie jak poprzednio – w ciągu jest co najmniej jedna dwójka, więc $a_2 = 2$. To oznacza, że w ciągu mamy łącznie dwie dwójki, czyli $a_3 = 2$. A zatem w ciągu mamy dwie trójki, $a_4 = a_5 = 3$. To z kolei oznacza, że mamy po trzy czwórki i piątki, czyli nasz ciąg zaczyna się tak: 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5.

Widzimy, że możemy dalej rozumować w ten sposób; co więcej, otrzymujemy algorytm na generowanie wyrazów ciągu Golomba. Startujemy od $a_1 = 1$ i $a_2 = a_3 = 2$, po czym dla każdego kolejnego $k = 3, 4, \dots$ na koniec ciągu wstawiamy a_k wyrazów równych k (ciąg reprezentujemy w zwykłej tablicy). Za każdym razem dodajemy więcej niż jeden wyraz, więc nigdy nie będziemy musieli „zgadywać” – kiedy dojdziemy do indeksu k , będziemy już znali a_k . Kontynuujemy to postępowanie, aż przypiszemy wartość a_n . Koszt czasowy i, niestety, także pamięciowy to $O(n)$. Za taki naturalny algorytm można było na zawodach uzyskać 40% punktów.

Spróbujmy usprawnić ten algorytm, przede wszystkim pod względem zapotrzebowania na pamięć. Kluczowe spostrzeżenie już właściwie poczyniliśmy poprzednio: kiedy natrafiamy na wyraz a_k , dopisujemy na koniec ciągu pełne a_k nowych wyrazów, a tymczasem przesuwamy się indeksem zaledwie o 1 (do a_{k+1}). A im dalej, tym a_k jest większe. To oznacza, że istotnie rośnie nam „ogon” już obliczonych wartości, które pozostają do przejrzania. Algorytm może się zakończyć, gdy już przetworzony fragment ciągu wraz z tym ogonem ma co najmniej n wyrazów. Ponieważ ogon jest długi, więc będziemy przechowywać w tablicy tylko pewną początkową liczbę wyrazów ciągu, a ponadto będziemy pamiętać długość pozostałego ogona.

Oznaczmy przez A_k sumę k początkowych wyrazów ciągu a (niech $A_0 = 0$). W tablicy musimy przechowywać

jedynie pierwsze m wyrazów ciągu, takich że $A_m \geq n$. Jak duże musi być to m ? Sprawdźmy eksperymentalnie! Za pomocą poprzedniego algorytmu obliczamy, że $a_{1\,000\,000} = 6\,137$, co pozwala zgadnąć, iż $a_k \approx \sqrt{k}$. Przy tym założeniu mamy, że

$$\begin{aligned} A_m &= a_1 + \dots + a_m \approx \sqrt{1} + \dots + \sqrt{m} \approx \\ &\approx \frac{2}{3}m\sqrt{m} = \frac{2}{3}m^{3/2}. \end{aligned}$$

Stąd $A_m \geq n$ dla m rzędu $n^{2/3}$. Jest to istotnie lepiej niż poprzednio, a sam algorytm pozostał prosty: obliczamy początkowy fragment ciągu długości rzędu $n^{2/3}$ (dokładną długość możemy wyznaczyć eksperymentalnie, rozważając górne ograniczenie na n), po czym obliczamy kolejne A_k do momentu, gdy $A_k > n - 1$; wówczas $a_n = k$. Za takie podejście można było otrzymać 70% punktów; pozwala ono obliczyć np. $a_{2\,000\,000\,000} = 673\,365$.

To oznacza, że musi dać się jeszcze lepiej! W poprzedniej metodzie z m -elementowego początkowego fragmentu ciągu wnioskowaliśmy o A_m wyrazach ciągu. Teraz zwiększymy tę liczbę.

Załóżmy, że mamy obliczone a_1, \dots, a_m . Wówczas dla każdego $k = 1, 2, \dots, m$ wiemy, że na pozycjach $A_{k-1} + 1, \dots, A_k$ w naszym ciągu pojawia się liczba k . To z kolei oznacza, iż każda z a_k liczb $A_{k-1} + 1, \dots, A_k$ występuje w ciągu k razy. Nasz ciąg wygląda zatem tak: jedno wystąpienie liczby A_1 , po dwa wystąpienia liczb $A_1 + 1, \dots, A_2$, po trzy wystąpienia liczb $A_2 + 1, \dots, A_3$ itd. W ten sposób na podstawie pierwszych m wyrazów ciągu jesteśmy w stanie ustalić $B_m = \sum_{i=1}^m a_i \cdot i$ początkowych wyrazów ciągu. Liczbę B_m szacujemy podobnie jak poprzednio:

$$\begin{aligned} B_m &= 1 \cdot a_1 + \dots + m \cdot a_m \approx \\ &\approx 1 \cdot \sqrt{1} + \dots + m \cdot \sqrt{m} \approx \\ &\approx \frac{2}{5}m^2\sqrt{m} = \frac{2}{5}m^{5/2}. \end{aligned}$$

Stąd warunek $B_m \geq n$ zachodzi już dla m rzędu $n^{2/5}$. Dokładny opis algorytmu opartego na wartościach B_k , podobny do poprzedniego, pozostawiamy Czytelnikowi. To jest rozwiązanie wzorcowe tego zadania; za jego pomocą obliczamy, że np. $a_{10^{18}} = 160\,113\,790\,524$.

Na koniec winni jesteśmy Czytelnikowi drobne sprostowanie: otóż odgadnięte oszacowanie $a_k \approx \sqrt{k}$ jest nieprawdziwe, lecz nie jest zbyt odległe od poprawnego. W rzeczywistości $a_k \approx \phi^{2-\phi} \cdot k^{\phi-1}$, przy czym $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, czyli a_k jest rzędu $k^{0,62}$. Po więcej informacji na ten temat odsyłamy do Internetowej Encyklopedii Ciągów Liczbowych na stronie <http://oeis.org>, którą, swoją drogą, polecamy wszystkim miłośnikom ciekawych ciągów.

I jeszcze pytanie do Czytelnika: czy można dalej usprawniać podane algorytmy, wprowadzając odpowiednie ciągi pomocnicze C_k, D_k itd.?

Jakub RADOSZEWSKI

Sklonujmy sobie mamuta

życie na żywo 8

Wśród naukowych „obietnic” są takie, które budzą moje zainteresowanie: możliwość odtworzenia wymarłych już stworzeń. Zobaczenie na własne oczy żywego mamuta, tura czy też Neandertalczyka. Nie ma ich na Ziemi, ale zostawili jeszcze odtwarzalny DNA, a więc czemu by ich nie sklonować. Mówił o tym w lutym bywalcom BiotechCafé profesor Jacek Modliński z Instytutu Genetyki i Hodowli Zwierząt PAN.

Nim gatunek wymrze, przechodzi przez etap zagrożenia o różnych stopniach nasilenia. Obecnie, na przykład, dobrze się wiedzie jednemu gatunkowi orangutanów na Borneo, a zagrożone wyginięciem są orangutany na Sumatrze. Jest gorzej: niektórzy paleobiolodzy sądzą, że zaczyna się szóste wielkie wymieranie. Poprzednie zdarzyły się Ziemi, w ciągu ostatnich 540 milionów lat z różnych powodów. W ostatnim, 67 mln lat temu (wyginęły dinozaury, ich DNA nie przetrwał, a ssaki otrzymały swoją szansę), w ciągu 2,5 mln lat wyginęło 76% wszystkich gatunków. Paleobiolodzy oceniają także, że w ciągu 3,5 mld lat życia na Ziemi, dokumentowanego przez wykopaliska, wyewoluowało 4 miliardy gatunków, z których do dnia dzisiejszego 99% wymarło. Od 500 lat spośród 5570 gatunków ssaków wyginęło 80, spośród obecnych gatunków ssaków 50% wymrze w ciągu 1000 lat. Każdy gatunek od pewnego poziomu wielkości populacji jest już nie do uratowania, jeżeli nie brać poważnie pojedynczych osobników w ogrodach zoologicznych.

Wymieranie gatunków jest zatem naturalną konsekwencją ewolucji życia i nie należałoby się może za bardzo tym martwić, gdyby nie fakt, że to, co grozi nam przez kolejne 300 do 2000 lat, jest głównie spowodowane grabieżczą polityką ssaka, któremu wiedzie się dobrze – człowieka. Orangutany z Sumatry, a także setki gatunków w Ameryce Płd. wymierają dlatego, że człowiek wycina lasy, znaczenie ma globalne ocieplenie, nowe choroby, zatrucie atmosfery. Potrafimy też stwarzać dodatkowe przeszkody: na przykład wszystkie pandy wielkie są własnością Chińczyków, a ze względu na ich wierzenia dostęp do pand i jakiegokolwiek ich badania są niemożliwe. Nawet o klonowaniu trudno myśleć, bo prawie nic nie wiadomo o biologii pand, a ich pozycja w taksonomii jest niepewna (mimo że tak bardzo przypominają misia, to nie są niedźwiedziowi ewolucyjnie najbliższe).

Naukowcy może lubią straszyć, może chcą, abyśmy zmienili nasz sposób życia. Wróćmy więc do pytania o klonowanie zagrożonych lub niedawno wymarłych gatunków. Japońscy uczeni piszą o zamiarze klonowania mamutów. Trzy lata temu tygodnik *Nature* wyliczył kilka powodów, dla których jest to niemożliwe. DNA mamuta należałoby co najmniej 12 razy sekwencjonować w celu uniknięcia pomyłek przy formułowaniu prawdziwej sekwencji, sformować ten DNA jako chromosomy, zapakować do mamuciego jądra komórkowego (którego także nie mamy). Trzeba by uzyskać pewno kilkaset oocytów. . . słońca i znaleźć kilkaset słońc – matek zastępczych (samo w sobie niewykonalne). Trzeba by *de novo* syntetyzować mitochondrialny DNA mamuta. Trzeba by sklonować zwierzęta obu płci, a po uzyskaniu stadka mamutów znaleźć im ekosystem, aby mogły w nim żyć. Mała nadzieja, że Japończykom się uda . . .

Robi się wiele prób z innymi ssakami (wilk tasmański, gaur), ale widziane z boku próby te zmuszają do zadania pytania: po co? Wymagają wielkich nakładów finansowych. Najprostszą odpowiedzią jest: bo to ciekawe, a inni dodają: póki są tacy, którzy takie pieniądze chcą wydawać na podobne cele – niech wydają.

Tylko, że te działania na nadchodzące wielkie wymieranie nie wpłyną.

Magdalena FIKUS



Wspomnienia z dawnych lat

Oglądając szpargały, jakie w sposób nieunikniony gromadzą się w redakcyjnych szufladach, znalazłem plan lekcji wydany przez *Deltę* latem 1982 roku – kartonik, format B4.

W planie poszczególne dni są przedstawione jako kwadraty siatki sześciianu, więc można było tę siatkę wyciąć i skleić.

Pozostałą część powierzchni strony frontальной i całą stronę odwrotną zajmował algorytm układania kostki Rubika – będącej wówczas powszechnym obłędem.

Ciekawe są też napisy drobną czcionką: jeden z nich obwieszcza, że wydaliśmy ten plan w nakładzie 200 000 egzemplarzy (to nie pomyłka – dwieście tysięcy).

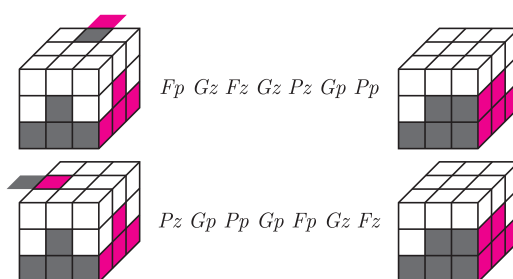
Ale powróćmy do algorytmu. Był on przedstawiony w postaci ikonki symbolizujących poszczególne ruchy – jak widać, byliśmy przygotowani na korzystanie z niego przez analfabetów. Chciałbym przypomnieć tutaj ten algorytm, nie korzystając z tego ułatwienia – opiszę go za pomocą symboli literowych.

Umówmy się, że litera z oznaczać będzie obrót o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a p – przeciwnie (patrzac na tekst, jak na rysunku). Będziemy też używać litery F na oznaczenie ściany frontowej, T – tylnej, G – górnej, S – środkowej (poziomej), D – dolnej, P – prawej i L – lewej. Zatem np. Fz oznacza obrót ściany frontowej o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

A oto jaki zaproponowaliśmy wtedy algorytm.

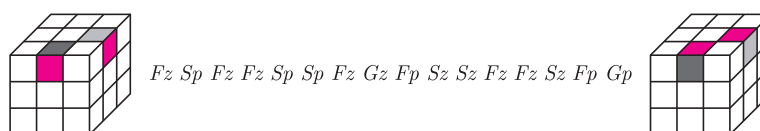
Na wejściu mamy kostkę z ułożoną pierwszą (dolną) warstwą.

Drugą można ułożyć, posługując się ruchami przedstawionymi poniżej:

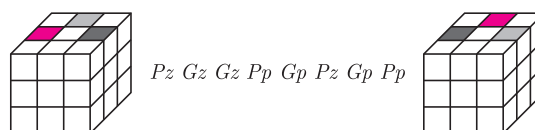


Są już ułożone dwie warstwy. Żadna z dalszych kombinacji ruchów nie psuje tego, co zostało przed nią ułożone.

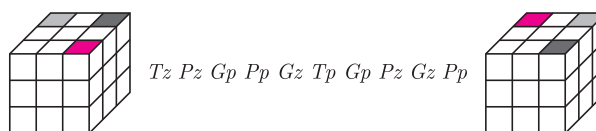
W ten sposób można obracać kostki na krawędziach (zawsze po dwie):



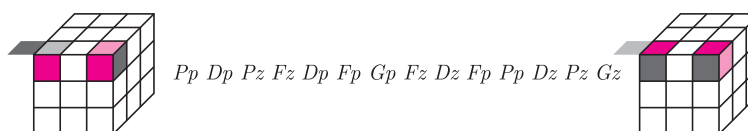
A w ten sposób je zamieniać (po trzy):



Tak zamienia się narożniki (też po trzy):



A tak się narożniki obraca (znów po dwa):



To wystarczy do ułożenia kostki Rubika.

Dwadzieścia ruchów zawsze wystarczy

Przedstawiony algorytm układania kostki Rubika jest łatwy do zapamiętania, ale niezbyt efektywny. Czytelnik może zatem zapytać o minimalną liczbę ruchów, która wystarczy do ułożenia kostki z dowolnej pozycji. Jeśli za pojedynczy ruch uznamy obrót o 90° jednej z sześciu ścian bocznych, to pytanie jest problemem otwartym: na dzień dzisiejszy wiemy, że 29 ruchów zawsze wystarczy i istnieje konfiguracja wymagająca 26 ruchów.

Sytuacja zmienia się, gdy rozszerzymy nasz katalog ruchów o obroty ścian o 180° (oznaczymy takie ruchy literą o). W roku 1995 Michael Reid udowodnił, że istnieje konfiguracja wymagająca 20 ruchów. Jest to tzw. *superflip*, w którym wszystkie narożniki są na właściwych pozycjach, a kostki na krawędziach są obrócone. Obrót wszystkich 12 krawędzi realizuje następujący ciąg ruchów:

$Gz Po Fz Tp Pz To Pz$

$Go Lp To Pz Gp Dz$

$Po Fz Pp Lp To Go Fo$

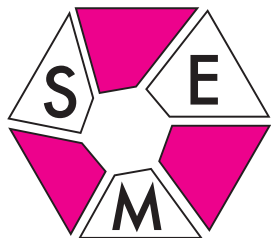
W roku 1981 Morwen Thistlethwaite pokazał algorytm układający kostkę Rubika w co najwyżej 52 ruchach i od tego czasu górne ograniczenie było sukcesywnie zmniejszane, aby w lipcu 2010 r. ostatecznie osiągnąć wartość 20. To, że 20 ruchów zawsze wystarczy, dowiedli Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson i John Dethridge, przy niemalym wsparciu (około 35 maszynołat) sprzętu komputerowego. Więcej informacji na temat ich wyniku można znaleźć na stronie www.cube20.org.

Tomasz IDZIASZEK

Marek KORDOS

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl



Wykłady popularne z matematyki

Począwszy od wiosny 2010 r., SEM wspólnie z Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej organizuje na PW zajęcia dla uczniów.

Wykłady popularne z matematyki adresowane są do licealistów, studentów, nauczycieli i innych pasjonatów. Organizowane są w sesjach po trzy, każdy wykład trwa 45 minut. Tematy dotychczasowych czterech sesji:

- *O przekątnych wielokątów foremnych, Zastosowanie nierówności między średnimi w geometrii oraz Paradoxy logiczne,*
- *Inne geometrie, Grafy oraz Sieci izogonalne i równowaga ładunków na sferze,*
- *Sumy nieskończone, Twierdzenie Halla oraz O pewnym zadaniu geometrycznym,*
- *Co widać w bazgrołach?, Parkietaż Penrose'a oraz Kolorowa kryptografia.*

Najbliższe Wykłady planowane są na jesień 2011 r.

Przykłady zagadnień omawianych na zajęciach

Podzielność, liczby pierwsze i złożone

1. Czy kasjer może wydać 20 zł siedmioma monetami o wartości 1 zł i 5 zł?
2. Czy istnieją różne liczby pierwsze p, q, r takie, że liczba $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ jest naturalna?

Gry i strategie wygrywające

3. Kot Bonifacy siedzi na pierwszym, najniższym szczeblu drabiny, kot Filemon na jedenastym. Grają w grę: na przemian przemieszczają się o jeden lub dwa szczeble, Bonifacy do góry, Filemon do dołu. Przegra ten, który nie będzie mógł wykonać ruchu (nie wolno przeskakiwać przeciwnika ani stawać na zajmowanym przez niego szczeblu). Zaczyna Bonifacy. Czy któryś kot może grać tak, by zapewnić sobie zwycięstwo?
4. Dwaj gracze ustawiają na przemian na szachownicy 8×8 wieże, tak by żadne dwie z nich się nie biły (wieża atakuje wszystkie pola w swoim wierszu i w swojej kolumnie, gracze mają duży zapas wież). Przegra ten z graczy, który jako pierwszy nie będzie mógł postawić kolejnej wieży. Który gracz (rozpoczynający czy drugi) może zawsze wygrać?

Twierdzenie Halla

5. Na balu spotkało się n pań i n panów, niektórzy są zaznajomieni. Jakie warunki muszą być spełnione, by mogli dobrać się do tańca w pary, w których się znają?

Kółka matematyczne dla gimnazjalistów i licealistów odbywają się co kilka tygodni, każde trwa około 1,5 godziny. Dotychczasowe tematy:

- *Różne sposoby mierzenia odległości (LO),*
- *Gry i strategie wygrywające (LO),*
- *Podzielność, liczby pierwsze i złożone (GIM),*
- *Środek ciężkości układu punktów z masami (LO),*
- *Przekształcenia geometryczne (GIM).*

Chętnie zorganizujemy kółko „na zamówienie”: dla określonej grupy uczniów, w dogodnym dla tej grupy terminie i na umówiony temat.

Zapraszamy!

Rozwiązania zadań

R1. Nie. Suma nieparzystej liczby nieparzystych liczb musi być nieparzysta, nie może być równa 20. \square

R2. Przypuśćmy, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = k \in \mathbb{N}$. Pomnóżmy obie strony równania przez pqr . Wtedy $qr + pr + pq = kpqr$, więc $qr = p(kqr - r - q)$. Stąd qr dzieli się przez p , sprzeczność. Zatem liczby p, q, r o żądanych własnościach nie istnieją. \square

R3. Tak, Filemon zawsze może wygrać. Początkowo liczba szczebli pomiędzy kotami równa jest 9. Filemon powinien grać tak, by po każdym jego ruchu liczba ta była podzielna przez 3. Może to zapewnić: jeśli Bonifacy ruszy się o dwa szczeble, Filemon rusza się o jeden i na odwrót. Wtedy zero szczebli, oznaczające koniec gry, nastąpi po ruchu Filemona, więc to Bonifacy nie będzie mógł się ruszyć i przegra. \square

R4. Ta gra zawsze kończy się po dokładnie 8 ruchach (dlaczego?) – przegrywa gracz rozpoczynający. \square

R5. Każdy pan musi znać jakąś panią, inaczej nie znajdzie partnerki. Każdych dwóch panów musi znać łącznie co najmniej dwie panie – jeśli znają tylko jedną, to jeden z nią zatańczy, a drugi zostanie bez pary. Każdych trzech panów musi znać łącznie co najmniej trzy panie i tak dalej, każdych k panów musi znać łącznie co najmniej k pań.

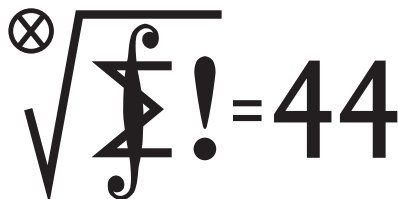
Czy jeśli powyższe warunki są spełnione, to już wystarczy i na pewno uczestnicy balu mogą dobrać się w pary? Tak, to właśnie orzeka twierdzenie Halla, którego dowód i zastosowania były tematem wykładu. \square

Joanna JASZUŃSKA

Szczegóły o dotychczasowych Wykładach i kółkach, informacje o planowanych zajęciach i dane kontaktowe znaleźć można na stronach SEMu oraz www.csz.pw.edu.pl (w dziale *Dla uczniów*).

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>



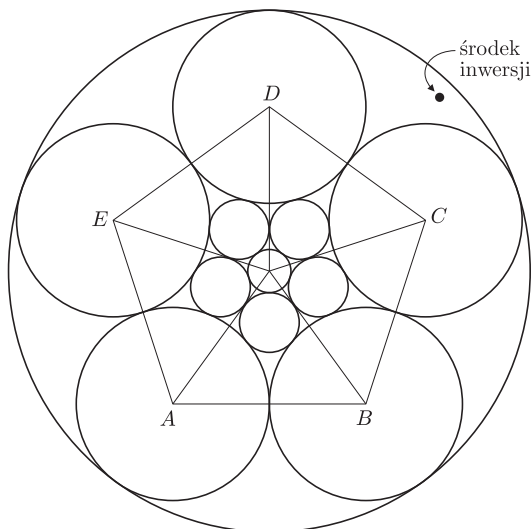
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 605 ($WT = 2,35$) i 606 ($WT = 2,16$) z numeru 9/2010

Piotr Kumor	Olsztyn	44,70
Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,03
Michał Kieza	Warszawa	38,62
Jerzy Cisło	Wrocław	37,37

Przez dobrych parę lat niezagrożony lider w kolekcjonowaniu rund „44” – Piotr Kumor – z przyczyn osobistych na dwa lata przerwał zabawę, oddając pozycję lidera Januszowi Olszewskiemu. Jednak powrócił do nas – z czego się ogromnie cieszymy – i właśnie zakończył rundę jedenastą!

613. To jest wykonalne. Bierzymy pięciokąt foremny $ABCDE$ i rysujemy pięć okręgów o środkach w jego wierzchołkach, o jednakowym promieniu $\frac{1}{2}|AB|$. Niech O będzie środkiem pięciokąta. W trójkącie AOB umieszczamy okrąg styczny do odcinków OA , OB oraz do narysowanych już okręgów o środkach A , B . Podobne okręgi umieszczamy w trójkątach BOC , COD , DOE , EOA . Wreszcie rysujemy dwa okręgi o środku O : mały, styczny zewnętrznie do pięciu okręgów, narysowanych przed chwilą – oraz duży, styczny do pięciu okręgów, narysowanych na początku i zawierający je wewnątrz.



Zadania z matematyki nr 621, 622

Redaguje Marcin E. KUCZMA

621. W nierównoramiennym trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, stycznego do boków BC , CA , AB odpowiednio w punktach X , Y , Z . Proste BC i YZ przecinają się w punkcie P . Dowieść, że proste IP i AX są prostopadłe.

622. Udowodnić nierówność

$$\frac{x+y}{1+x+y} + \frac{x+z}{1+x+z} \geq \frac{x}{1+x} + \frac{y+z}{1+y+z}$$

dla liczb $x, y, z \geq 0$.

Zadanie 622 zaproponował pan Tomasz Tkocz z Warszawy.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2011

Przypominamy treść zadań:

613. Czy da się rozmieścić na płaszczyźnie skończenie wiele kół o rozłącznych wnętrzach tak, by każde z tych kół było styczne do pięciu innych?

614. Wyznaczyć wszystkie liczby wymierne x , niecałkowite, dla których wartość wyrażenia $3x^3 + 10x^2 - 3x$ jest liczbą całkowitą.

W ten sposób mamy 12 okręgów, każdy styczny do pięciu innych. Styczność z największym okręgiem jest stycznością wewnętrzną. Każda inna jest stycznością zewnętrzną.

Bierzemy teraz dowolny punkt, leżący wewnątrz tego największego okręgu, ale na zewnątrz każdego z pozostałych, i stosujemy inwersję względem tego punktu. Obrazami naszych 12 okręgów jest znów 12 okręgów, każdy styczny do pięciu innych – i każda styczność jest zewnętrzna. Koła, których brzegami są powstałe okręgi, spełniają wymagany warunek.

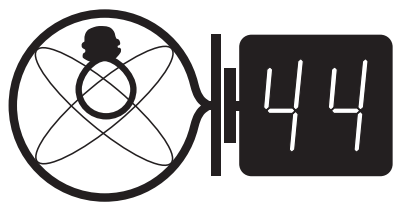
614. Niech x będzie jedną z szukanych liczb. Zapisujemy ją w postaci nieskracalnego ułamka $x = m/n$, o mianowniku $n > 1$. Liczba $3x^3 + 10x^2 - 3x$ ma być całkowita, co oznacza, że $3m^3 + 10m^2n - 3mn^2$ dzieli się przez n^3 . Stąd w szczególności wynika, że $3m^3$ dzieli się przez n , więc $n = 3$. Zatem $3m^3 + 30m^2 - 27m$ dzieli się przez 27.

Stąd wniosek, że liczba $3m^3 + 3m^2$ jest podzielna przez 27; innymi słowy, $m^2(m+1)$ dzieli się przez 9. Skoro zaś m jest liczbą względnie pierwszą z n (czyli z 3), liczba $m+1$ musi być podzielna przez 9.

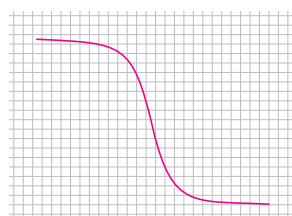
Dla pewnego k całkowitego mamy więc $m = 9k - 1$, skąd $x = 3k - \frac{1}{3}$. Na odwrót, gdy x ma taką postać, wówczas liczba $3x^3 + 10x^2 - 3x$ jest całkowita – o czym można się przekonać, analizując „wstecz” wcześniejsze rozumowanie, albo po prostu sprawdzając rachunkiem, że wartość tego wyrażenia wynosi $(9k - 1)(9k^2 + 8k - 2)$.

Szukany liczbami wymiernymi są więc liczby postaci $3k - \frac{1}{3}$ (k całkowite).

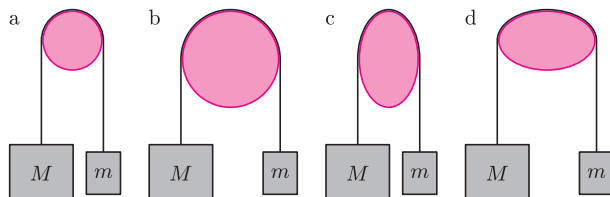
Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2011



Rys. 1



Rys. 2

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 506 ($WT = 2,92$) i 507 ($WT = 1,90$) z numeru 11/2010

Jerzy Witkowski	Radlin	37,45
Tomasz Rudny	Poznań	35,20
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	30,78
Tomasz Wietecha	Tarnów	29,21
Ryszard Woźniak	Kraków	16,47

510. Zapiszmy moc zasilającą żarówkę wzorem

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} \cos^2 \omega t = \frac{U_{sk}^2}{R} (1 + \cos 2\omega t),$$

gdzie U_0 – amplituda napięcia, $U_{sk} = U_0/\sqrt{2}$ – wartość skuteczna. Przyrównujemy zmienny składnik mocy do wyrażenia $mc dT/dt$ i znajdujemy amplitudę zmian temperatury równą

$$T_0 = \frac{U_{sk}^2}{2\omega mcR} = 33 \text{ K.}$$

Korzystając ze wzoru Boltzmanna $I \sim T^4$, stwierdzamy, że szukana głębokość modulacji wynosi

$$(2533^4 - 2467^4)/(2533^4 + 2467^4) = 5,3\%.$$

Dane wymienione na końcu zadania są istotne przy dokładniejszej analizie równania bilansu cieplnego

$$\alpha_1 T'(t) + mc dT'/dt = P'(t),$$

gdzie primami oznaczono odchylenie wielkości T i P od ich wartości średnich, natomiast α_1 jest przyrostem mocy odprowadzanej do otoczenia na jednostkę przyrostu temperatury. Przy wzroście napięcia o $\Delta U = 1 \text{ V}$ przyrost tej mocy jest równy $\frac{231^2}{802,5} - \frac{230^2}{800} = 0,37 \text{ W}$, czyli liczbowa wartość α_1 wynosi $0,37/0,7 = 0,53 \text{ W/K}$. Ponadto po prawej stronie równania należałoby wziąć pod uwagę zależność R od temperatury

Zadania z fizyki nr 518, 519

Redaguje Jerzy B. BROJAN

518. Źródło dźwięku o stałej częstotliwości poruszało się ruchem jednostajnym po linii prostej przebiegającej w pewnej odległości od nieruchomego mikrofonu. Wykonano staranny pomiar zależności częstotliwości rejestrowanej przez mikrofon od czasu odebrania sygnału i zapisano wykres $f(t)$ na papierze milimetrowym. Niestety, zapomniano oznaczyć osie, wskutek czego arkusz papieru mógł zostać obrócony. Czy wykres jest symetryczny względem obrotu o 180° ? Jeśli nie, to czy można rozstrzygnąć, czy jest on prawidłowy w danej postaci, czy też należy go obrócić? Załączony rysunek 1 jest tylko ilustracją problemu, a nie informacją o dokładnym przebiegu wykresu.

519. Na lince zawieszono ciężar o masie M , a linkę przełożono przez nieruchomy walec o promieniu R . Na drugim końcu linki zawieszono najmniejszy ciężar m wystarczający do tego, aby większy ciężar nie ześlizgnął się w dół (rys. 2a). Jeśli ten sam ciężar M zawiesić na:

- 1) walcu o większym promieniu (rys. 2b),
- 2) podporze, której przekrój jest elipsą wydłużoną wzdłuż osi pionowej (rys. 2c) lub poziomej (rys. 2d),

to czy niezbędny ciężar m będzie mniejszy niż na rysunku a, większy, czy taki sam? Współczynnik tarcia linki o podporę jest w każdym przypadku jednakowy.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2011

Przypominamy treść zadań:

510. Masa wolframowego włókna żarówki wynosi $m = 0,02 \text{ g}$, a ciepło właściwe wolframu $c = 160 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$. Gdy żarówka była zasilana stałym napięciem 230 V , jej opór wynosił 800Ω , a temperatura włókna była równa 2500 K . Podłączono tę żarówkę do napięcia sinusoidalnie zmiennego o częstotliwości 50 Hz i wartości skutecznej 230 V . Obliczyć przybliżoną głębokość modulacji promieniowania żarówki, tzn. wielkość $(I_{max} - I_{min})/(I_{max} + I_{min})$, gdzie I – moc promieniowania. Założyć, że przepuszczalność szkła żarówki nie zależy od długości fali.

Można wykorzystać także następujące dane: gdy stałe napięcie zasilające zmieniano w niewielkim zakresie i powoli, na każdy 1 V jego przyrostu opór żarówki zwiększał się o $2,5 \Omega$, a temperatura włókna zwiększała się o $0,7 \text{ K}$.

511. Pod wpływem różnicy ciśnień w rurce o stałym przekroju występuje stacjonarny (niezmienny w czasie) i laminarny (bezwirny) przepływ cieczy. Jeśli dwukrotnie zwiększymy średnicę rurki, nie zmieniając jej długości, różnicy ciśnień i rodzaju cieczy, to ile razy wzrośnie ilość cieczy przepływającej w ciągu jednostki czasu? Uzasadnić odpowiedź.

Wskazówka: Opory ruchu cieczy charakteryzuje współczynnik lepkości η zdefiniowany wzorem $\frac{F}{S} = \eta \frac{dv}{dy}$, gdzie F – siła działająca stycznie na powierzchnię cieczy S , wzdłuż której następuje poślizg warstw, dv – różnica prędkości warstw na odcinku dy prostopadłym do S .

w wyrażeniu $P = U^2/R$ – jak można wykazać, efekt ten jest równoważny dodaniu do α_1 członu $\alpha_2 = U_{sk}^2 \gamma/R$, gdzie γ jest temperaturowym współczynnikiem oporu. Wartość γ wynosi $2,5/(800 \cdot 0,7) = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, stąd $\alpha_2 = 0,30 \text{ W/K}$. Dla uwzględnionego wcześniej wyrażenia $mc dT'/dt$ wielkością analogiczną jest $2\omega mc = 2 \text{ W/K}$, co oznacza, że w pierwszym przybliżeniu można α_1 i α_2 pominąć, zwłaszcza że w dokładniejszym rozwiązaniu porównywane wielkości wystąpiłyby w kwadracie.

511. Zastosujemy metodę analizy wymiarowej. Ruch cieczy jest jednostajny, dlatego jej gęstość nie ma znaczenia i jedynymi parametrami, od których zależy przepływ Q (wyrażony w m^3/s), są: średnica rurki d , jej długość l , różnica ciśnień p i lepkość η , której jednostką w układzie SI jest $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$. Parametry p i l muszą wystąpić w postaci ilorazu $k = p/l$ o wymiarze N/m^3 , który jest „czynnikiem napędowym” przepływu. Zatem

$$Q = f(d, k, \eta).$$

Zgodność wymiarów w zależności

$$\frac{\text{m}^3}{\text{s}} = f\left(\text{m}, \frac{\text{N}}{\text{m}^3}, \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}\right)$$

wystąpi tylko wtedy, gdy pierwszy argument wystąpi w potęgę 4, drugi – w potęgę 1, a trzeci – w potęgę -1 (zależność ta jest znana jako wzór Hagen–Poiseuille’a). Po dwukrotnym powiększeniu średnicy rurki przepływ wzrośnie 16-krotnie.

Patrz w niebo: Układ bety Pictoris

Południowa gwiazda beta Pictoris (Malarza) była jedną z pierwszych, przy których zaobserwowano – w podczerwieni – dysk rozproszonej materii. Zdjęcie tej gwiazdy, a właściwie jej otoczenia, udało się uzyskać przy zasłonięciu w ognisku teleskopu obrazu samej gwiazdy bardzo małą przesłoną, ponieważ bez niej blask gwiazdy uniemożliwiłby dostrzeżenie czegokolwiek w pobliżu. Tak w koronografie przesłania się obraz tarczy Słońca, by móc obserwować jego koronę. Stąd od roku 1983 wiadomo, że gwiazdę otacza dysk, z tym że teraz wiadomo o nim więcej, ponieważ przybyły nowe obserwacje i ich analizy.

Okazało się, że główny dysk materii zaczyna się w odległości 80 j.a. od gwiazdy, co stanowi podwojoną odległość Plutona od Słońca. Powstało podejrzenie, że w tej centralnej dziurze w dysku mogą tworzyć się planety. I rzeczywiście, w dziurze tej zlokalizowano dwa pierścienie rozproszonej materii (o promieniu 16 i około 6,5 j.a.) oraz trzeci pierścień tuż przy gwiazdzie. Modelowanie takich pierścieni doprowadziło badaczy do wniosku, że w odległości 12 j.a. obiega gwiazdę stosunkowo masywna planeta, o masie porównywalnej z masą Jowisza. To ona swoim rezonansowym oddziaływaniem tworzy zarówno kołowe przerwy, jak i pierścienie o podwyższonej gęstości w dysku. Podobnie w Układzie Słonecznym Jowisz tworzy w pasie planetoid luki i zgęszczenia, co w tym przypadku może być łatwiejsze do zinterpretowania, ponieważ Układ Słoneczny jest dostatecznie leciwy, żeby przestrzeń międzyplanetarna była już w większości niemal oczyszczona z gęstego pyłu. Natomiast beta Pictoris jest gwiazdą bardzo młodą (jej wiek ocenia się na 12–20 mln lat), zatem ewolucja dysku i potencjalnego układu planetarnego jeszcze się tam toczy w najlepsze. Niemniej zwolennicy analogii między Układem Słonecznym a układem bety Pictoris nazywają np. wspomniany główny dysk (rozpościerający się od 80 j.a.) tamtejszym Pasem Kuipera, nie troszcząc się o jego wiek czy stabilność. Oceniono nawet, że cząstki pyłu w dysku są ziarenkami oliwiny o typowych rozmiarach 0,2 μm . Zauważmy przy tym, że wszystkie te niezwykle subtelne obserwacje dotyczą gwiazdy położonej w odległości prawie 20 pc.

Tomasz KWAST



Maj

Wieczorami w maju praktycznie nie widać Drogi Mlecznej. Przebiega ona od wschodu do zachodu nieba, ale nisko nad północnym horyzontem. Koło zenitu mamy więc okolice północnego bieguna Galaktyki, gwiazdozbiory Warkocza Bereniki i Psów Gończych, a co za tym idzie – obszar zawierający mniej gwiazd, za to mnóstwo galaktyk. Amatorów niezbyt to cieszy, gdyż przez amatorskie przyrządy na ogół nie da się obserwować galaktyk. Warto jednak wspomnieć, że w Psach Gończych jest galaktyka spiralna M51, zwana Wirem, o jasności około 9 mag, a więc w zasadzie widoczna przez większy amatorski teleskop. Towarzyszy jej mniejsza galaktyka nieregularna. Galaktyki te kiedyś się spotkały (powiedzmy – pół miliarda lat temu), co później zaowocowało m.in. powstaniem struktury spiralnej w M51, widocznej obecnie. Cały ten proces, czyli mechaniczną ewolucję pary galaktyk, udało się nawet wymodelować! Obie galaktyki znajdują się w odległości 5 Mpc od nas.

Merkury znajdzie się najdalej od Słońca 7 V i będzie go można szukać w zachodniej stronie nieba po zachodzie Słońca. Będzie to na granicy Ryb i Barana, ale z powodu bliskości Słońca gwiazd widać tam nie będzie. W tej samej okolicy nieba znajduje się Wenus, która – jako jaśniejsza – ma szansę zostać dostrzeżona. To samo dotyczy Jowisza, który też jest w Rybach, lecz jeszcze bliżej Słońca. Trochę dalej od niego, w Baranie, jest Mars. Naprawdę „przyzwoicie” daleko od Słońca jest tylko Saturn (w Pannie), którego widać od wieczora dłużej niż do północy. Mars i Jowisz zejdą się na odległość ułamka stopnia 1 V, podobnie blisko zejdą się Wenus i Jowisz 11 V. Nów Księżycy wypada 3 V, pełnia 17 V. Żadnych zaćmień ani zakryć jasných obiektów w maju nie będzie. Około 5 V można spodziewać się średnio obfitego roju eta-Akwarydów.

T. K.



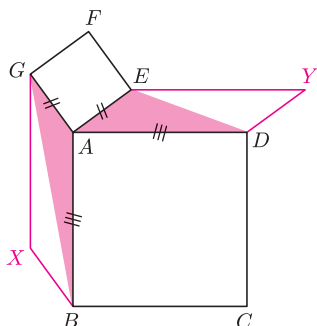
Rozwiązanie zadania M 1313.

Rozważmy 10^n liczb $3^1, 3^2, \dots, 3^{10^n}$. Żadna z nich nie dzieli się przez 10^n , więc możliwe reszty z dzielenia tych liczb przez 10^n to $1, 2, \dots, 10^n - 1$. Jest ich o jeden mniej niż liczb, więc istnieją dwie liczby, powiedzmy 3^i i 3^j , dla $1 \leq i < j \leq 10^n$, które dają tę samą resztę z dzielenia przez 10^n . Oznacza to, że 10^n dzieli $3^j - 3^i = 3^i(3^{j-i} - 1)$. Ale 10^n i 3^i są względnie pierwsze, więc 10^n dzieli $3^{j-i} - 1$. Zatem $k = j - i$ spełnia warunki zadania.

Narysuj równoległobok! Joanna JASZUŃSKA

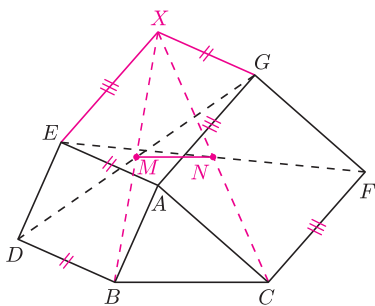
Ktoś mi kiedyś powiedział o zadaniach geometrycznych: *Jeśli nie wiesz, co zrobić, narysuj równoległobok!* Jakkolwiek żartobliwa i niepoważna może się ta porada wydawać, jednak czasem działa. Oto kilka przykładów.

Nawias kwadratowy oznacza pole figury.

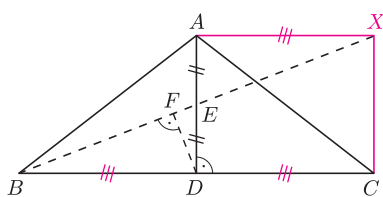


Rys. 1

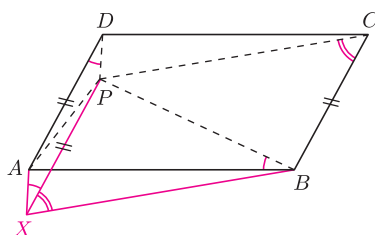
W deltoidzie 5/2009 opisano inne rozwiązanie zadania 2.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Zadania 2 i 9 pochodzą z LIII Olimpiady Matematycznej, zadanie 4 – z XLVIII OM.

1. Kwadraty $ABCD$ i $AEFG$, tak samo zorientowane, mają wspólny tylko punkt A . Wykaż, że $[ABG] = [ADE]$.

2. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF . Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$.

3. W trójkącie ABC zachodzi równość $AB = AC$. Punkt E jest środkiem wysokości AD . Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BE . Udowodnij, że $\sphericalangle AFC = 90^\circ$.

4. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ADP$. Wykaż, że $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$.

Rozwiązania

R1. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem równoległoboku $BAGX$, a Y – czwartym wierzchołkiem równoległoboku $EADY$ (rys. 1). Równoległoboki te są przystające, ponieważ $AB = AD$, $AG = AE$ oraz $\sphericalangle BAG + \sphericalangle DAE = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$. Stąd $[ABG] = \frac{1}{2}[BAGX] = \frac{1}{2}[EADY] = [ADE]$. \square

R2. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem równoległoboku $EAGX$ (rys. 2). Wtedy $CFXE$ także jest równoległobokiem (bo $\vec{CF} = \vec{AG} = \vec{EX}$). Wobec tego punkt N , jako środek jego przekątnej EF , jest też środkiem drugiej przekątnej XC . Analogicznie M jest środkiem XB . Stąd i z twierdzenia Talesa uzyskujemy $MN \parallel BC$ oraz $MN : BC = 1 : 2$. \square

R3. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem prostokąta $ADCX$ (rys. 3). Wtedy $ABDX$ jest równoległobokiem o środku E (bo $\vec{AX} = \vec{DC} = \vec{BE}$ oraz $\vec{AE} = \vec{ED}$), więc punkty B, F, E, X są współliniowe. Odcinki AC i DX są średnicami okręgu opisanego na prostokącie $ADCX$. Ponadto $\sphericalangle DFX = 90^\circ$, więc punkt F leży na tym okręgu. Stąd $\sphericalangle AFC = 90^\circ$. \square

R4. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem równoległoboku $PDAX$ (rys. 4). Wtedy $PCBX$ także jest równoległobokiem oraz zachodzą równości

$$(*) \sphericalangle AXP = \sphericalangle ADP = \sphericalangle ABP \quad \text{oraz} \quad (**) \sphericalangle PXB = \sphericalangle PCB.$$

Z równości $(*)$ (uwzględniając wzajemne położenie odpowiednich punktów) wynika, że punkty P, A, X, B leżą na jednym okręgu. Wobec tego $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PXB$, co razem z równością $(**)$ daje tezę. \square

Zadania domowe

5. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ o polu 1 przeciwległe boki są równe i równoległe. Wyznacz pole trójkąta ACE .

Wskazówka. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem równoległoboku $ABCX$. Wtedy $CDEX$ i $EFAQ$ też są równoległobokami...

6. W trapezie $ABCD$ punkty M i N są środkami odpowiednio ramion BC i AD . Wykaż, że $AB + CD = 2 \cdot MN$ i że $[ABCD] = 2 \cdot [AMD]$.

Wskazówka. Uzupełnij dany trapez do równoległoboku:



7. Dany jest trójkąt ABC . Wykaż, że z jego środkowych można zbudować trójkąt. *Wskazówka.* Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem równoległoboku $ABCX$.

8. Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Punkty D i E należą odpowiednio do boków BC i AB tego trójkąta i $CD = BE$. Punkt M jest środkiem odcinka DE . Udowodnij, że $AD = 2 \cdot BM$.

Wskazówka. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem równoległoboku $EBDX$.

9. Trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, jest podstawą ostrosłupa $ABCD$. Ponadto zachodzą równości $AD = BD$ oraz $AB = CD$. Wykaż, że $\sphericalangle ACD > 30^\circ$.

Wskazówka. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem prostokąta $BACX$.