

SPIS TREŚCI NUMERU 4 (443)

	str. 1	
Sieć optyczna – kryształ doskonały <i>Mateusz Łączki</i>	str. 4	
Urok zbioru μ <i>Michał Miśkiewicz</i>	str. 6	
Ilu mamy przodków? <i>Piotr Różański</i>	str. 9	
 Zadania	str.11	Miesięcznik <i>Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka</i> jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.
 Roztańczone pchły <i>Jakub Radoszewski</i>	str.12	Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.
Symetryzacja Steinera <i>Tomasz Tkocz</i>	str.14	Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.
 Badamy ciała niesztymne w ruchu obrotowym. Część II: Ciecze o dużej lepkości i materiały sypkie <i>Stanisław Bednarek</i>	str.16	Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk, Diana Gawronkiewicz / Podpunkt.
 Żnż <i>Magdalena Fikus</i>	str.18	Adres do korespondencji: Instytut Matematyki UW, Redakcja <i>Delty</i> , ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.
Informatyczny kącik olimpijski (40): Zapotrzebowanie na prąd <i>Tomasz Kulczyński</i>	str.19	Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja. Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.
Aktualności	str.20	FIRMY DYSTRYBUUJĄCE <i>Delte</i> Fran-Press: www.franpress.pl , infolinia 801-679-466. Garmond Press: www.garmondpress.pl Kolporter: www.kolporter.com.pl Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl RUCH S.A.: www.ruch.com.pl , infolinia 804-200-600, warunki prenumeraty w RUCH-u: Cena prenumeraty w 2011 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.
 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.21	1. Prenumerata krajowa: wpłaty przyjmują Regiony Sprzedaży RUCH SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania wpłat: do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.
Klub 44	str.22	2. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę: informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH SA, Pion Kolportażu, Zespół ds. Obrotu Zagranicznego, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-53-28-823 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Zespołu lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), fax 22-53-28-734, infolinia 800-1200-29. Płatność kartą kredytową (Visa, MasterCard, American Express) przez www.ruch.pol.pl
Patrz w niebo: Czyżby pierwsza planeta?	str.24	3. Prenumerata opłacana za granicą: przelewem na nasze konto: SWIFT banku: PKOPPLPWXXX; w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.
Kwiecień	str.24	
 Numerowanie <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25	

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

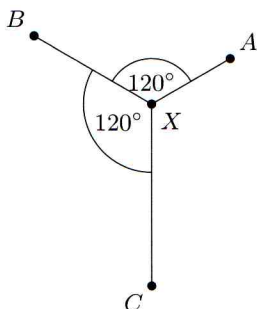
Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

Drzewo Steinera: jedno zagadnienie, mnóstwo problemów

Marek CYGAN*, Marcin PILIPCZUK*

W naszym zespole badawczym analizujemy wiele różnych zagadnień, które występują w różnych aspektach. Nic w tym dziwnego, wszak algorytmika jest bardzo szeroką dziedziną. Zdarza się i tak, że to samo zagadnienie pojawia się w wielu kontekstach. Taka sytuacja ma miejsce w przypadku problemu drzewa Steinera.

Zanim przejdziemy do formalnej definicji, przyjrzyjmy się następującemu klasycznemu problemowi geometrycznemu. Książę Piotruś jest władcą trzech miast: A , B i C . Chce je połączyć drogami tak, by z każdego miasta dało się dojechać do każdego innego, i oczywiście pragnie zminimalizować koszt budowy, czyli sumę długości zbudowanych dróg. Jedną z dostępnych opcji jest zbudowanie dróg wzdłuż dwóch krótszych boków trójkąta ABC . Jednak, co dla niektórych Czytelników może być zaskakujące, można lepiej! O ile tylko każdy kąt wewnętrzny trójkąta ABC ma miarę mniejszą niż 120° , taniej jest zrobić tak: znajdujemy wewnątrz trójkąta ABC punkt X , taki że $\sphericalangle AXB = \sphericalangle BXC = \sphericalangle CXA = 120^\circ$, i budujemy drogi XA , XB i XC . Czasem więc opłaca się wyjść poza schemat prowadzenia dróg bezpośrednio między miastami i zbudować dodatkowe skrzyżowanie. To dodatkowe skrzyżowanie nazywa się często **punktem Steinera**.

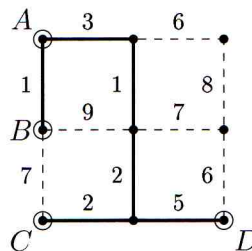


Rys. 1. Punkt X jest punktem Steinera dla wierzchołków A , B , C .

Przełożmy teraz problem księcia Piotrusia na język teorii grafów. Mamy dany spójny graf nieskierowany $G = (V, E)$, w którym każda krawędź $e \in E$ ma swoją długość $d_e \geq 0$. Graf to cały świat księcia Piotrusia: wierzchołki grafu odpowiadają możliwym skrzyżowaniom, a krawędzie możliwym drogom. Księstwo księcia Piotrusia to podzbiór wierzchołków $T \subseteq V$: te wierzchołki reprezentują miasta, które chcemy połączyć drogami. Mamy znaleźć najtańszą sieć dróg – czyli spójny podgraf grafu G – która łączy wszystkie miasta – czyli wierzchołki zbioru T . Zauważmy, że ten najtańszy podgraf zawsze będzie drzewem. Zbiór T często nazywa się zbiorem **terminali**. Tak określone zagadnienie to problem znalezienia najtańszego drzewa Steinera dla zbioru terminali T . Przykładowy graf z czterema terminalami znajduje się na rysunku 2.

Będziemy też czasem mówili o problemie drzewa Steinera bez długości; wtedy zakładamy, że każda krawędź grafu ma długość jeden. Zauważmy, że odpowiada to znalezieniu jak najmniejszego zbioru wierzchołków $X \subseteq V \setminus T$ tak, by zbiór $X \cup T$ indukował spójny podgraf grafu G , tzn. aby krawędzie, których oba końce znajdują się w tym zbiorze, wystarczały do

tego, aby z każdego terminalu dało się dojść do każdego innego terminalu. Zbiór X reprezentuje dodatkowe wierzchołki poza T w poszukiwanym drzewie Steinera. Jeśli weźmiemy $|X|$ dodatkowych wierzchołków, to drzewo rozpinające $X \cup T$ będzie miało $|X| + |T| - 1$ krawędzi i taki sam będzie koszt budowy dróg, co oznacza, że minimalizując $|X|$, minimalizujemy sumę długości krawędzi wybranych do drzewa Steinera.



Rys. 2. Cztery zaznaczone wierzchołki to terminale. Pozostałe wierzchołki oraz krawędzie to możliwe skrzyżowania i drogi. Pogrubionymi kreskami zaznaczono krawędzie najtańszego drzewa Steinera, którego koszt to 14.

Problem drzewa Steinera, nawet w wersji bez długości, jest NP-trudny, co oznacza, że najprawdopodobniej nie da się efektywnie znajdować optymalnych rozwiązań tego zagadnienia. Wobec tego będziemy próbowali radzić sobie z nim w dwojaki sposób: dla większych instancji (tj. większych danych wejściowych problemu) wystarczy nam rozwiązanie przybliżone, natomiast rozwiązanie dokładne będziemy znajdować w czasie wykładniczym dla grafów na tyle dużych, na ile pozwoli nam złożoność naszego algorytmu oraz moc obliczeniowa komputera.

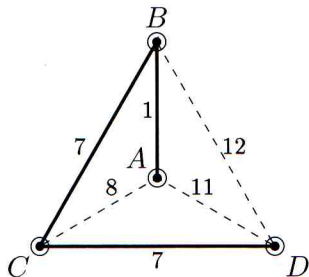
Zacznijmy od najbardziej klasycznej metody radzenia sobie z problemami NP-trudnymi, czyli od algorytmów aproksymacyjnych. Chcemy szybko – w czasie wielomianowym od rozmiaru grafu – znaleźć drzewo Steinera, które niekoniecznie będzie najlepsze, ale będzie niewiele gorsze od optymalnego.

Aby otrzymać prosty algorytm aproksymacyjny, wróćmy do oryginalnego problemu księcia Piotrusia na płaszczyźnie. Wymyślenie, by dodać punkt X , było dość trudne. A o ile gorzej byłoby, gdyby książę Piotruś zbudował drogi wzdłuż dwóch krótszych boków trójkąta ABC ? Otóż okazuje się, że niewiele gorzej.

Przeanalizujemy ten pomysł w języku teorii grafów. Zmierzmy najkrótsze odległości między każdą parą miast. Zbudujmy graf pełny H o zbiorze wierzchołków T . Dla miast $s, t \in T$ jako długość krawędzi st przyjmijmy długość najkrótszej ścieżki między s i t w grafie G . Graf H odpowiada grafowi składającemu się z boków trójkąta ABC w rozpatrywanym na początku problemie na płaszczyźnie, przy założeniu, że robotnicy księcia Piotrusia nie potrafią budować dodatkowych skrzyżowań, ale potrafią budować najkrótsze drogi między każdą parą miast. W grafie H znajdziemy minimalne drzewo rozpinające D – można to zrobić wielomianowo za pomocą jednego z klasycznych algorytmów, np. Kruskala lub Prima. Następnie dla każdej krawędzi st drzewa D , w grafie G zbudujemy ciąg dróg odpowiadający

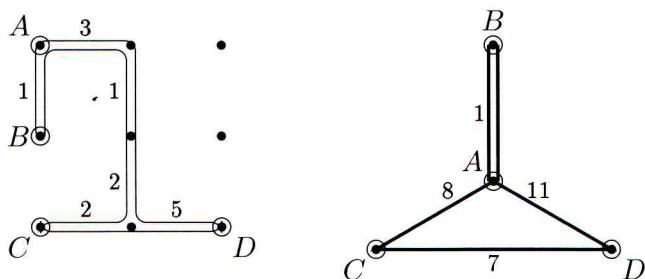
*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

najkrótszej ścieżce między s i t . W ten sposób w G połączymy wszystkie miasta. Zauważmy, że możliwa jest sytuacja, w której jedną drogę (krawędź oryginalnego grafu) będziemy chcieli wybudować więcej niż raz, gdyż była ona częścią kilku najkrótszych ścieżek wybranych do drzewa rozpinającego. Jednakże w takim wypadku uzyskane drzewo Steinera będzie tańsze niż drzewo D , więc jest to dla nas sytuacja jak najbardziej korzystna. Zastanówmy się, o ile droższe może być drzewo D od rozwiązania optymalnego?



Rys. 3. Graf H otrzymany poprzez wyznaczenie najkrótszych ścieżek pomiędzy każdą parą terminali grafu z rysunku 2. Pogrubione krawędzie to minimalne drzewo rozpinające D o koszcie 15.

Niech D^* będzie optymalnym drzewem Steinera. Wykonujemy następującą operację, kluczową dla całej analizy, mianowicie podwajamy krawędzie drzewa D^* . W ten sposób otrzymujemy graf spójny, w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty. Ma on więc cykl Eulera o długości równej dwukrotności kosztu drzewa D^* . Zauważmy, że fragmenty cyklu prowadzące pomiędzy kolejnymi terminalami mają długości co najmniej takie, jak długości odpowiednich krawędzi w grafie H , gdyż długości krawędzi w grafie H odpowiadają najkrótszym ścieżkom w G . Zatem podwojony koszt drzewa D^* jest nie mniejszy niż koszt pewnego zbioru krawędzi F rozpinającego graf H , który to koszt jest z kolei nie mniejszy niż koszt drzewa D , które jest minimalnym drzewem rozpinającym w grafie H . Stąd, nasz algorytm aproksymacyjny znajdzie drzewo Steinera o koszcie nie większym niż dwukrotność kosztu optymalnego drzewa Steinera.



Rys. 4. Lewy rysunek przedstawia cykl Eulera otrzymany przez podwojenie krawędzi drzewa D^* z rysunku 2. Po prawej stronie znajduje się zbiór krawędzi F rozpinający graf H odpowiadający temu cyklowi Eulera (kolejne terminale na cyklu łączymy krawędziami w H).

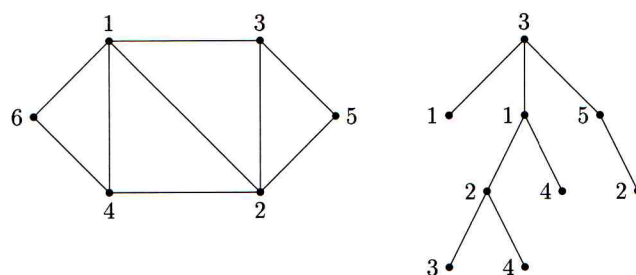
A czy da się lepiej? To znaczy, czy w czasie wielomianowym możliwe jest skonstruowanie drzewa Steinera, którego koszt będzie mniejszy niż dwukrotność optymalnego rozwiązania?

Okazuje się, że próbując lokalnie poprawiać otrzymane drzewo, np. starając się wybierać wierzchołki Steinera o stopniu 3, można otrzymać trochę lepszy współczynnik aproksymacji (największy iloraz znalezionej przez nas rozwiązania oraz rozwiązania optymalnego). Najlepszy aktualnie znany algorytm aproksymacyjny dla problemu drzewa Steinera znajduje zawsze rozwiązanie nie gorsze niż 1,39 optymalnego kosztu. Algorytm ten pochodzi z 2010 roku,

a jednym z jego autorów jest Jarosław Byrka z Uniwersytetu Wrocławskiego.

Na dziś starczy algorytmów aproksymacyjnych. Teraz będziemy próbowali rozwiązać problem drzewa Steinera w sposób dokładny, lecz w wersji bez długości. W tym sformułowaniu problem przejawia naturę kombinatoryczną.

Uporządkowanym etykietowanym drzewem nazwiemy drzewo z wyróżnionym korzeniem, w którym zbiór synów każdego wierzchołka jest uporządkowany (tzn. ich kolejność ma znaczenie). Każdy wierzchołek takiego drzewa ma etykietę będącą identyfikatorem wierzchołka z grafu G . Aby uporządkowane etykietowane drzewo D było poprawne, musi być spełniony warunek, że jeśli w drzewie D mamy krawędź łączącą wierzchołki o etykietach u, v , to w grafie G istnieje krawędź uv . Zauważmy, że nie wymagamy, aby etykiety wierzchołków drzewa były różne, jednakże etykieta każdego wierzchołka jest różna od etykiety ojca, gdyż w grafie G nie ma pętli.



Rys. 5. Graf G oraz jedno z poprawnych uporządkowanych etykietowanych drzew D . Zauważmy, że drzewo D nie musi zawierać wszystkich etykiet wierzchołków z grafu G .

Zauważmy, że jeśli w grafie G istnieje uporządkowane etykietowane drzewo D , którego zbiór etykiet zawiera identyfikatory wszystkich terminali, to optymalne drzewo Steinera ma nie więcej niż $|D|$ wierzchołków, gdyż możemy użyć drzewa D do konstrukcji zbioru dróg, które rozpinają cały zbiór terminali.

Wygodniej będzie, gdy zamienimy problem optymalizacyjny, jakim jest poszukiwanie minimalnej liczby wierzchołków w drzewie Steinera, na problem decyzyjny, w którym mamy stwierdzić, czy w danym grafie istnieje drzewo Steinera zawierające nie więcej niż d wierzchołków. Zamiast szukać drzewa Steinera, będziemy szukać uporządkowanego etykietowanego drzewa D , którego zbiór etykiet zawiera wszystkie identyfikatory terminali ze zbioru T . Okazuje się jednak, że dużo łatwiej szuka się drzewa, które nie zawiera pewnych etykiet, dlatego też użyjemy zasady włączeń i wyłączeń (czyli uogólnienia wzoru $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ na większą liczbę zbiorów). Niech $N(d, X)$ dla $d \geq 1$ i $X \subseteq T$ oznacza liczbę uporządkowanych etykietowanych drzew o d wierzchołkach, których zbiór etykiet nie zawiera identyfikatorów terminali ze zbioru X . Wartość $N(d, X)$ dla ustalonych d oraz X można obliczyć w czasie wielomianowym standardowym algorytmem programowania dynamicznego, co pozostawiamy Drogiemu Czytelnikowi jako ćwiczenie. Zauważmy też, że na mocy zasady włączeń i wyłączeń liczba uporządkowanych drzew d -wierzchołkowych zawierających wszystkie etykiety ze zbioru T jest równa:

$$\sum_{X \subseteq T} (-1)^{|X|} \cdot N(d, X).$$

Skoro każdą wartość $N(d, X)$ potrafimy obliczyć w czasie wielomianowym, to powyższą sumę możemy obliczyć w czasie $2^{|T|} \cdot \text{poly}(|V|)$, przy czym przez $\text{poly}(|V|)$ oznaczamy czas wielomianowy względem $|V|$. Ten algorytm zaprezentował w 2009 roku Jesper Nederlof, a główną zaletą tej metody jest to, że zależność wykładnicza dotyczy jedynie $|T|$, a nie całego $|V|$. Pytaniem otwartym jest, czy da się to zrobić szybciej, np. w czasie $(2 - \varepsilon)^{|T|} \text{poly}(|V|)$ dla jakiegoś $\varepsilon > 0$.

W artykule „Pokrycie wierzchołkowe kontratakuje” (*Delta* 4/2010) przedstawiliśmy ideę kernelizacji. Algorytm kernelizacyjny to taki, który szybko (w czasie wielomianowym) istotnie zmniejsza rozmiar problemu w ten sposób, że dla zmniejszonej instancji wynik jest taki sam jak dla oryginalnej. Spróbujmy zrozumieć, czego oczekiwaliśmy od algorytmu kernelizacyjnego dla problemu drzewa Steinera. Wejściem (decyzyjnej wersji) problemu drzewa Steinera bez długości jest graf $G = (V, E)$, zbiór terminali (miast) $T \subseteq V$ oraz liczba całkowita d ; chcemy znaleźć drzewo D o co najwyżej d wierzchołkach, zawierające wszystkie terminale. Chcielibyśmy w czasie wielomianowym zredukować rozmiar grafu; powiedzmy, że oczekujemy, że po redukcji graf będzie wielkości wielomianowej względem $k = |T|$. Pokażemy, dlaczego jest to niemożliwe (przy odpowiednich założeniach teoriozłożonościowych).

Na chwilę przenieśmy się do innego zagadnienia. W problemie znajdowania *motywu* w grafie mamy dany graf H , w którym każdy wierzchołek jest pomalowany na jeden z k kolorów. Chcemy wybrać po jednym wierzchołku każdego koloru tak, by wybrane wierzchołki tworzyły (indukowały) graf spójny. Taki zbiór wierzchołków nazywamy *motywem*. Co może wydać się zaskakujące, problem ten jest NP-trudny, nawet gdy H jest drzewem, którego wszystkie wierzchołki mają stopień nie większy niż trzy.

Zauważmy, że problem drzewa Steinera jest co najmniej tak trudny jak problem znajdowania motywu w grafie. Faktycznie, istnieje sprowadzenie (redukcja) przekształcające instancje problemu znajdowania motywu w grafie na instancje problemu drzewa Steinera. Mając daną instancję problemu znajdowania motywu w grafie H , dla każdego koloru i dodajemy terminal t_i połączony ze wszystkimi wierzchołkami koloru i . Łatwo zauważyć, że drzewo Steinera o $2k$ wierzchołkach w grafie H z dodanymi terminalami odpowiada motywowi w oryginalnym grafie H . Jest tak dlatego, że dwa różne terminale nigdy nie mają wspólnego sąsiada, co oznacza, że do drzewa Steinera musimy wybrać co najmniej k wierzchołków niebędących terminalami. Jednakże szukamy drzewa o co najwyżej $2k$ wierzchołkach, co oznacza, że zbiór nieterminali, które wybierzemy do drzewa Steinera, musi być spójny, gdyż nie możemy sobie pozwolić na wybranie żadnego dodatkowego wierzchołka. Ten spójny zbiór nieterminali odpowiada motywowi w oryginalnym grafie, jako że sąsiedzi różnych terminali mają różne kolory.

Teraz założmy, że mamy algorytm kernelizacyjny dla problemu drzewa Steinera w grafie bez długości, tj. algorytm, który w czasie wielomianowym redukuje rozmiar grafu G do wielkości wielomianowej od k – liczby terminali w grafie. Możemy wtedy wykonać następującą operację:

1. Załóżmy, że mamy dany długi ciąg instancji problemu znajdowania motywu w grafie H_1, H_2, \dots, H_t ; każda instancja ma dokładnie k kolorów.

2. Tworzymy graf H , który jest sumą rozłączną wszystkich grafów H_i , $1 \leq i \leq t$. Kolory wierzchołków są takie same jak w grafach H_i . Zauważmy, że w grafie H istnieje motyw wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje on w co najmniej jednym z grafów H_i ; motyw musi być spójny, więc musi zawierać się w jednej spójnej składowej grafu H .

3. Redukujemy problem znajdowania motywu w grafie H do problemu znajdowania drzewa Steinera, tak jak w poprzednim akapicie: dodajemy po jednym terminalu każdego koloru. Otrzymujemy graf G , w którym szukamy drzewa Steinera o $2k$ wierzchołkach.

4. Na grafie G uruchamiamy algorytm kernelizacyjny, który zmniejsza graf G do rozmiarów wielomianowych względem $2k$ (czyli wielomianowych względem k).

Przeanalizujmy, co się stało. Liczba początkowych instancji – t – mogła być bardzo duża, ponadwielomianowa w stosunku do k . Na końcu otrzymaliśmy jedną instancję problemu znajdowania drzewa Steinera o dużo mniejszej liczbie wierzchołków – wielomianowej względem k . Przy tym ta końcowa instancja jest „synteza” początkowych instancji: istnieje w niej odpowiednio małe drzewo Steinera wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna początkowa instancja miała motyw. Końcowa instancja jest jednak bardzo mała i nie ma szans pomieścić informacji o wszystkich początkowych instancjach problemu znajdowania motywu w grafie – intuicyjnie oznacza to, że musieliśmy większość instancji H_i w jakiś sposób rozwiązać. Okazuje się, że dla problemu NP-zupełnego taka operacja nie może nam się udać; powyższe rozumowanie można sformalizować i pokazać, że algorytm kernelizacyjny dla problemu drzewa Steinera pociągałby za sobą dużą rewolucję w teorii złożoności, co jest mało prawdopodobne. Dodajmy tylko, że użyta tutaj technika jest również stosunkowo nowa – pierwsi użyli jej Lance Fortnow i Rahul Santhanam w swojej pracy z 2008 roku.

Jak widać, problem drzewa Steinera ma wiele ciekawych obliczy i każdy znajdzie w nim coś dla siebie. Barwne jest życie algorytmika.

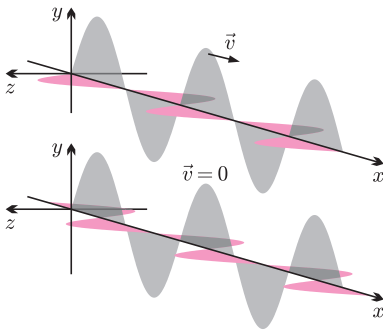
Do grupy naukowej badającej różne aspekty problemów NP-trudnych na wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego należą dr Łukasz Kowalik, dr Marcin Mucha, dr hab. Piotr Sankowski, dr Jakub Wojtaszczyk, a także doktoranci i studenci wydziału, w tym autorzy tego artykułu. Główne kierunki badań stanowią aproksymacja oraz algorytmy dokładne dla problemów NP-trudnych. Prace, których autorami są członkowie zespołu, są publikowane na najlepszych międzynarodowych konferencjach poświęconych informatyce teoretycznej oraz w uznanych periodykach naukowych. Członkowie grupy są laureatami programów stypendialnych Fundacji Nauki Polskiej, miesięcznika *Polityka* i nagród im. Witolda Lipskiego. Ponadto prace naukowe grupy badawczej prowadzone są w ramach grantów MNiSW, jak również prestiżowego grantu „Starting Independent Researcher Grant” ufundowanego przez European Research Council, którego kierownikiem jest dr hab. Piotr Sankowski.

Objaśnienie terminologii grafowej wykorzystanej w tym artykule można znaleźć np. w książce R.J. Wilsona *Wprowadzenie do teorii grafów*, natomiast opis wspomnianych algorytmów Kruskala i Prima służących do wyznaczania minimalnego drzewa rozpinającego – w książce T.H. Cormena, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, *Wprowadzenie do algorytmów*.

Sieć optyczna – kryształ doskonały

Mateusz ŁĄCKI*

W 1913 roku Niels Bohr zapostulował model atomu wodoru. Zgodnie z nim układ protonu i elektronu nie może mieć dowolnej energii wiązania, lecz musi ona wynosić $E_n = \frac{-13,6eV}{n^2}$, dla $n \in \mathbb{N}$. Przeskok między poziomami n_1 i n_2 jest powiązany z absorpcją lub emisją fotonu o energii $E_{n_1, n_2} = |E_{n_1} - E_{n_2}|$. Zbiór wszystkich liczb E_{n_1, n_2} tworzy tzw. widmo, czyli zbiór wartości energii fotonów, które atom może wyemitować lub absorbować. Foton o energii E ma określoną częstotliwość: $\nu = \frac{E}{h}$, gdzie h jest stałą Plancka.



Rys. 1. Fala elektromagnetyczna opisana równaniami (1)–(4). W górnym wierszu fala biegnąca (maksima przesuwały się wzdłuż osi), w dolnym stojąca (maksima wykonują ruch góra-dół, nie przemieszczają się wzdłuż osi).

Inne pierwiastki mają więcej elektronów, tym samym mają bardziej skomplikowane spektra, bardzo trudne do obliczenia nawet w przybliżeniu. Spektra (nawet wodoru) komplikują też nieuwzględnione efekty (choćby relatywistyczne). Spektra atomów, wyznaczone doświadczalnie lub obliczone komputerowo, są w dużej mierze skatalogowane w ogólnodostępnych źródłach.

Z klasycznego punktu widzenia światło (w tym wiązka lasera) jest falą elektromagnetyczną, którą opisują równania Maxwella. W układzie odniesienia, takim że wiązka propaguje się wzdłuż osi \hat{x} w prawo (rys. 1), falę tę można opisać jako układ pól elektrycznego i magnetycznego zmiennych w czasie i przestrzeni:

$$(1) \quad \vec{E}(x, y \approx 0, z \approx 0, t) = \hat{y}E_0 \cos(kx - \omega t),$$

$$(2) \quad \vec{B}(x, y \approx 0, z \approx 0, t) = \hat{z}B_0 \cos(kx - \omega t),$$

gdzie $E_0 = B_0c$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $2\pi\omega = f$ oraz λ jest długością fali, a f – częstotliwością. Założenie, że $y, z \approx 0$, bierze się stąd, iż powyższe równania opisują jedynie światło wewnątrz wiązki. Jeśli zestawimy dwie wiązki powyższego typu, propagujące wzdłuż osi \hat{x} w przeciwnie strony (tak by wektory \vec{E} leżały na jednej płaszczyźnie), otrzymamy falę stojącą:

$$(3) \quad \vec{E}(x, t) = 2\hat{y}E_0 \cos(kx) \cos(\omega t),$$

$$(4) \quad \vec{B}(x, t) = 2\hat{z}E_0 \sin(kx) \sin(\omega t).$$

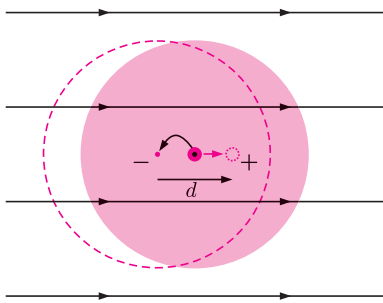
Opisaliśmy przypadek oddziaływania atomu z fotonami o energiach odpowiadających energiom przejścia między poziomami energetycznymi. Jeśli atom znajduje się w polu elektromagnetycznym, które jest falą stojącą o takiej częstotliwości ω , że nie odpowiada ona żadnej z częstotliwości przejścia atomowego, wówczas emisja i absorpcja fotonów jest niesłychanie rzadka (w skali zjawisk atomowych) i pomijalna. Z drugiej strony atom znajdując się w polu elektrycznym polaryzuje się (jądro przyciągane jest w przeciwną stronę niż chmura elektronów, indukowany jest moment dipolowy \vec{d} , co powoduje zmianę energii atomu o $\Delta E = -\vec{d} \cdot \vec{E}$).

Gdy pole elektryczne pochodzi od fali stojącej, której częstotliwość odpowiada fotonom o energii bliskiej różnicy energii między pewnymi dwoma poziomami $E_a < E_b$, okazuje się, że:

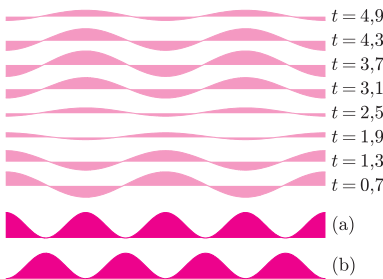
$$(5) \quad \Delta E = \frac{(eE_{\text{elektr.}})^2}{4} \frac{|M_{ab}|^2}{E_b - E_a - h\nu},$$

gdzie $|M_{ab}|^2$ jest proporcjonalne do prawdopodobieństwa przejścia między poziomami E_a i E_b , gdyby takowe mogło zajść, a $E_{\text{elektr.}}$ jest amplitudą elektrycznej składowej fali stojącej w danym punkcie przestrzeni – u nas $E_{\text{elektr.}} = E_0 \cos(kx)$. W praktyce „wyłapuje się” dziesiątki tysięcy atomów. By wszystkie miały energię E_a , trzeba obniżyć temperaturę do rzędu mikrokelwinów.

Na zmianę energii atomu można patrzeć, jakby ów znajdował się w zewnętrznym potencjale $V_{\text{opt}}(x) = \Delta E$. Potencjał ten nie zależy od czasu – tak naprawdę jest uśrednionym po czasie „efektywnym” oddziaływaniem z falą stojącą. Tworząc

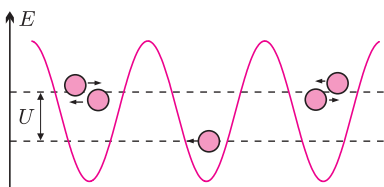


Rys. 2. Indukcja momentu dipolowego przez jednorodne pole elektryczne.

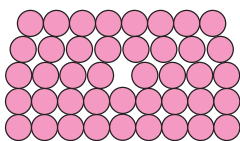


Rys. 3. Na jasny kolor zaznaczono pole \vec{E} fali stojącej dla różnych t (dla $\omega, k = 1$). Jeśli mianownik w równaniu 5 jest dodatni, to V_{pt} jest postaci (a), natomiast (b), jeśli jest ujemny.

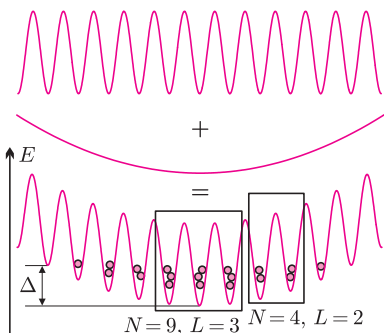
*Uniwersytet Jagielloński, doktorant I roku



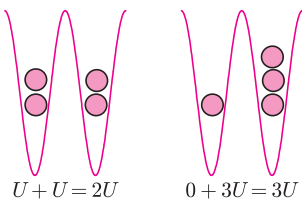
Rys. 4. Sieć optyczna: atomy zimnego gazu (np. ^{87}Rb) znajdują się w okolicach minimum $V_{\text{eff}}(x, y, z)$. W fizyce klasycznej niemożliwe jest przeskoczenie nad maksimum V_{eff} , (gdyż energia kinetyczna nie może być ujemna), dozwolone w fizyce kwantowej.



Rys. 5. Dyslokacja w strukturze krystalicznej metalu. Niedoskonałości w strukturze krystalicznej powodują nieregularności w dynamice elektronów i opór elektryczny.



Rys. 6. Cała sieć będzie składać się z kilku obszarów – w każdym z osobna N będzie wielokrotnością L . W praktyce sieci znajdują się w pułapce – zewnętrzny potencjał sprawia, że skończona ilość oczek jest obsadzana – $\frac{U}{2}n(n-1)$ jest mniejsze niż różnica między energiami na dnie oczek – Δ na rysunku.



Rys. 7. Minimalny koszt przeskoku atomu do U .

W przypadku klasycznego przewodnictwa można by powiedzieć, że pasmo przewodnictwa znajduje się w odległości $U = 3U - 2U$ od pasma „walencyjnego”.

układ trzech prostopadłych laserowych fal stojących, otrzymamy potencjał $V_{\text{eff}}(x, y, z) = V_{\text{opt}}(x) + V_{\text{opt}}(y) + V_{\text{opt}}(z) = k(\sin^2(kx) + \sin^2(ky) + \sin^2(kz))$ (rys. 3, 4, 6), który nazwiemy **siecią optyczną**.

Jeśli mianownik w równaniu (5) jest dodatni, wówczas potencjał przyjmuje wartość maksymalną, kiedy amplituda pola elektrycznego jest maksymalna. Atom jest odpychany od tych obszarów w stronę obszarów, gdzie pole elektryczne jest stale zerowe – minimum potencjału $V_{\text{eff}}(x)$. Jeśli mianownik jest ujemny, wówczas wspomniane obszary zamieniają się rolami maksimum i minimum.

Sieć optyczna jako kryształ

Sieć optyczna ma strukturę periodyczną wyznaczoną przez okresowość $V_{\text{eff}} : V_{\text{eff}}(x + \frac{L\pi}{k}, y + \frac{m\pi}{k}, z + \frac{n\pi}{k}) = V_{\text{eff}}(x, y, z)$, $m, l, n \in \mathbb{Z}$, można więc układ: sieć optyczna + atomy związane V_{eff} śmiało nazwać kryształem, podobnie jak układ: chmura elektronów i periodycznie ułożone atomy w kryształach metali.

Badając przewodnictwo (czyli grupowy ruch elektronów) różnych metali, rozważamy chmurę zdelokalizowanych elektronów poruszających się w całej objętości kryształu. Kryształy w mikroskali są siecią „żywą”, gdyż atomy metalu wykonują złożone drgania grupowo, powodując rozchodzenie się fal zwanych fononami. Niezwykle trudno jest opisać tego typu oddziaływania, a opisać je trzeba, gdyż możliwa jest zamiana energii elektronów na energię niesioną przez fonony. Możliwy jest jedynie opis przybliżony. W przypadku sieci optycznych nie ma fononów – maksima i minima V_{eff} są stałe w czasie i nie zmieniają położenia. Sieć optyczna jest także idealnie regularna – nie ma spotykanych w przypadku metali dyslokacji (rys. 5), czyli zaburzeń struktury krystalicznej. Dlatego sieć optyczna jest kryształem idealnym (na tyle, na ile możliwe jest wykonanie idealnie sinusoidalnego promienia laserowego).

W przypadku konkretnych gazów każdy atom oddziałuje z pozostałymi atomami w tym samym oczku sieci (i tylko z nimi). Jeśli w oczku znajduje się n atomów, wówczas mamy tam $\binom{n}{2}$ par atomów, z każdą zaś parą związana jest pewna energia oddziaływania U , przy czym $U > 0$, jeśli atomy odpychają się, a $U < 0$, jeśli się przyciągają. Załóżmy, że $U > 0$. Energia U zależy od budowy wewnętrznej atomów. Co ciekawe można manipulować wielkością U , oświetlając gaz dodatkowym laserem o odpowiednio dobranej częstotliwości oraz teoretycznie można ustalić U równe dowolnej liczbie rzeczywistej. Wykorzystywane jest zjawisko tzw. **rezonansu Feshbacha**.

Rozpatrzmy fragment sieci optycznej, składający się z L oczek sieci i zawierający N atomów. Jeśli V_{eff} ma wysoką amplitudę, wówczas tunelowanie (przeskakiwanie między oczkami sieci) nie jest łatwe, a w każdym oczku sieci znajdują się ustalona liczba atomów. Całkowita energia będzie minimalna, gdy oczka sieci będą równo obsadzone. Zakładamy, że N jest wielokrotnością L (rys. 6). W opisaney sytuacji układ zachowuje się jak izolator – przeskakiwanie atomów jest energetycznie kosztowne. Jeśli w dwóch oczkach znajduje się po dwa atomy, wówczas energia odpychania się atomów wynosi $2U$. Jeśli jeden z tych atomów przeskoczyłby do drugiego oczka, wówczas całkowita energia wyniosłaby $3U$ (rys. 7). Zatem przemieszczanie się atomów jest energetycznie kosztowne (koszt: U na cząstkę) i układ jest izolatorem. Jest to inny mechanizm powstawania izolatora: tunelowanie jako takie było możliwe (czyli układ powinien być przewodnikiem), jednak wzajemne odpychanie się atomów zdominowało ewentualne tunelowanie i układ okazał się izolatorem. Z tego powodu układ nazywamy **izolatorem Motta**.

Sieci optyczne są nowym materiałem, będącym cały czas aktywnym przedmiotem badań. W ostatnich latach bardzo szybko pojawiają się nowe możliwości eksperymentalne, rozwijana jest teoria. Można je zastosować do badania mechanizmów fizyki ciała stałego. Ostatnimi laty pojawiły się też możliwości symulowania oddziaływań znanych do tej pory z fizyki wysokich energii. W sierpniu 2010 ogłoszono sukces w manipulowaniu pojedynczymi oczkami sieci optycznej. Być może w niedalekiej przyszłości każde oczko sieci będzie mogło być kubitem w komputerze kwantowym opartym na sieci optycznej.

Urok zbioru μ

Michał MIŚKIEWICZ

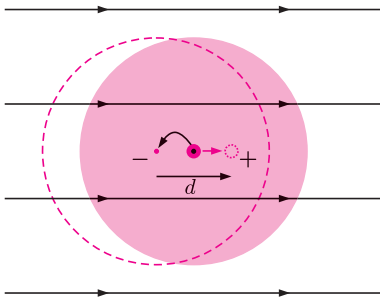
Jest to skrót pracy uczniowskiej nagrodzonej złotym medalem w XXXII Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki w 2010 roku (Olsztyn).

Tematem mojej pracy były własności pewnych szczególnych punktów na płaszczyźnie – punktów tytułowego zbioru μ . W poniższym tekście przedstawię niektóre z tych własności oraz przykłady pokazujące, że przy użyciu dowiedzionych twierdzeń można wyciągnąć wiele niemal natychmiastowych wniosków.

Definicja. Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie. Weźmy taki punkt X , że dla każdej prostej k przechodzącej przez X suma kwadratów odległości punktów A_1, \dots, A_n od k jest taka sama. Zbiór $\mu(\mathcal{A})$ definiujemy jako zbiór wszystkich punktów X spełniających powyższy warunek.

Na przykład, jest oczywiste, że dla dowolnego punktu A zachodzi $\mu(\{A\}) = \{A\}$. Natomiast pierwszy przypadek zbioru μ , z którym się zetknąłem, pochodzi z zadania Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Poniżej podaję rozwiązanie jednego z uczestników.

Przykład 1 (zadanie 3. z I etapu IV OMG). Dany jest kwadrat $ABCD$ o środku w S . Wówczas $S \in \mu(\{A, B, C, D\})$.



Weźmy dowolną prostą k przechodzącą przez S . Poprowadźmy do niej prostopadłą w S i nazwijmy ją l . Przez $|Ak|$ będziemy oznaczać odległość punktu A od prostej k . Z twierdzenia Pitagorasa zachodzi równość $|Ak|^2 + |Al|^2 = AS^2$ oraz analogiczne równości dla punktów B, C, D . Wobec tego sumy kwadratów odległości od k i l wzięte razem dają $AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2$. Ponadto, ze względu na symetrię sytuacji, sumy odległości wierzchołków kwadratu od prostych k i l muszą być równe. Stąd już otrzymujemy, że suma kwadratów odległości A, B, C, D od k wynosi $\frac{1}{2}(AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2)$, jest zatem niezależna od wyboru k .

Inną metodą rozwiązania jest wykazanie najpierw, że $S \in \mu(\{A, B\})$ i analogicznie $S \in \mu(\{C, D\})$; stąd już łatwo wynika teza. Można wyobrazić sobie sporo przykładów opartych na podobnych obserwacjach. Próba znalezienia ogólnych warunków na to, kiedy zbiór μ jest niepusty, lub też kiedy dany punkt należy do zbioru μ , w naturalny sposób prowadzi do poniższego twierdzenia. Podaje ono takie warunki wyrażone analitycznie, a ponadto pozwala na wyciągnięcie dość ogólnych wniosków, które zostaną zaprezentowane dalej.

Twierdzenie. Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie, a S – środkiem masy tych punktów. Wówczas zbiór $\mu(\mathcal{A})$ jest jedno- lub dwuelementowy i symetryczny względem S .

Dowód. Wprowadźmy układ współrzędnych zespolonych. Liczbę zespoloną odpowiadającą punktowi A_k będziemy oznaczać a_k . Sprawdźmy najpierw warunki równoważne temu, że $0 \in \mu(\mathcal{A})$. Zamiast liczyć odległości naszych punktów od zmiennej prostej przechodzącej przez 0 , będziemy dla zmiennej liczby α z okręgu jednostkowego liczyć odległości $\alpha a_1, \dots, \alpha a_n$, czyli obroconych wokół 0 punktów a_1, \dots, a_n , od prostej urojonej. Zgodnie ze wzorem $\Re(x) = \frac{1}{2}(x + \bar{x})$ suma kwadratów odległości tych punktów od prostej urojonej to

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\Re(\alpha a_k))^2 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\alpha a_k + \overline{\alpha a_k}}{2} \right)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha \overline{\alpha} a_k \overline{a_k}}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^2 a_k^2}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{\overline{\alpha}^2 \overline{a_k}^2}{4} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k \overline{a_k} + \frac{1}{2} \Re\left(\alpha^2 \sum_{k=1}^n a_k^2\right). \end{aligned}$$

Pierwszy człon jest, oczywiście, stały, natomiast gdy α przebiega okrąg jednostkowy, liczba w nawiasie przebiega okrąg o środku w 0 . Gdy $\sum_{k=1}^n a_k^2 \neq 0$, część rzeczywista, oczywiście, jest zmienna – dlatego $0 \notin \mu(\mathcal{A})$. W przeciwnym przypadku rozważany okrąg jest zdegenerowany do punktu i wtedy $0 \in \mu(\mathcal{A})$.

Obierając na płaszczyźnie protokątny układ współrzędnych, możemy punkt o współrzędnych (x, y) utożsamiać z liczbą zespoloną $x + iy$. Takie przyporządkowanie punktom liczb zespolonych nazywamy układem współrzędnych zespolonych.

Warto zauważyć, że jeśli warunek na należenie punktu x do $\mu(\mathcal{A})$ zapiszemy we współrzędnych kartezjańskich, to problem okazuje się równoważny następującemu: w przestrzeni dla danych prostych $a \parallel b$ i punktu S wykazać, że istnieje jedna lub dwie pary punktów $A \in a$, $B \in b$, takie że odcinki SA i SB są równe i prostopadłe.

Otrzymaliśmy więc warunek konieczny i dostateczny dla zera. Aby sprawdzić warunek dla punktu x , wystarczy przesunąć nasze punkty o wektor $-x$. Następujące warunki są więc równoważne warunkowi $x \in \mu(\mathcal{A})$:

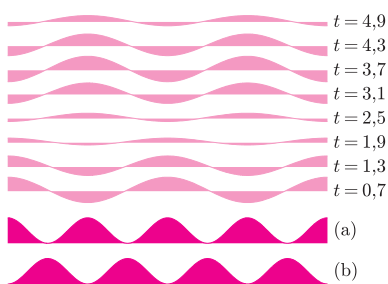
$$\sum_{k=1}^n (a_k - x)^2 = 0, \quad nx^2 - 2x \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n a_k^2 = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które, oczywiście, ma jedno lub dwa rozwiązania w zbiorze liczb zespolonych, przy czym ze wzoru Viète'a ich średnia arytmetyczna to $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$, czyli punkt S . \square

Korzystając z wyżej wykazanej własności zbioru μ , można łatwo wyprowadzać kolejne. W szczególności, po dokładnym przyjrzeniu się dowodowi okazuje się, że warunek z definicji można znacząco osłabić.

Wniosek. Niech \mathcal{A} będzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie. Wówczas zbiór $\mu(\mathcal{A})$ składa się ze wszystkich takich punktów X , że dla pewnych trzech różnych prostych k_1, k_2, k_3 przechodzących przez X suma kwadratów odległości punktów z \mathcal{A} od k_1, k_2 i k_3 jest taka sama.

Poniższe przykłady można rozwiązać przy użyciu układu współrzędnych (sprawdzając wyprowadzone w twierdzeniu warunki), ale łatwiej jest zastosować uzyskane wyniki jakościowo.



Przykład 2. Niech $A_1 A_2 \dots A_n$ będzie n -kątem foremnym o środku S . Wtedy $\mu(\{A_1, A_2, \dots, A_n\}) = \{S\}$.

Zgodnie ze wspomnianym wnioskiem, aby wykazać należenie S do zbioru μ , wystarczy zauważyć, że ze względu na symetrię suma kwadratów odległości od prostych SA_1, SA_2, SA_3 jest taka sama. Co prawda użyty argument wymaga naprawy dla $n = 4$, ale na szczęście ten przypadek został już rozważony. Skoro S to środek ciężkości rozważanych punktów, to zgodnie z twierdzeniem jest jedynym punktem zbioru μ .

Przykład 3. Zbadajmy zbiór $\mu(\{A, B, C, D\})$, gdzie $ABCD$ jest rombem o kątach 60° i 120° , czyli składającym się z dwóch trójkątów równobocznych. Przyjmijmy, że $AC > BD$.

Zauważmy, że odległości $|A, BD|, |A, BC|, |C, BD|, |C, AB|, |D, AB|, |D, BC|$ są równe. W związku z tym sumy kwadratów odległości wierzchołków rombu od prostych AB, BC i BD także są równe. Oznacza to, że $B \in \mu(\{A, B, C, D\})$. Stosując twierdzenie, otrzymujemy $\mu(\{A, B, C, D\}) = \{B, D\}$.

W dalszej części mojej pracy zajmowałem się, między innymi, charakteryzacją zbiorów o jednoelementowym zbiorze μ , to jest takich, że środek masy należy do zbioru μ . Opisałem także geometryczne znaczenie zbioru μ , gdy rozważamy zbiór wierzchołków trójkąta. Z możliwych dróg uogólnienia tego problemu szczególnie ciekawe wydaje mi się postawienie analogicznych pytań dla zbiorów w wyższych wymiarach. Otrzymane analitycznie warunki są podobne, ale nie doszedłem do dobrego opisu klasy takich skończonych zbiorów punktów przestrzeni co najmniej trójwymiarowej, które mają niepusty zbiór μ . Można też zastanowić się nad dostosowaniem definicji zbioru μ do zbiorów nieskończonych.



Rozwiązanie zadania F 786. Rozwiązanie nie zależy od kształtu naczynia – środek ciężkości leży najniżej, gdy naczynie napelnimy, tak by znalazł się on na powierzchni wody.

Jeśli bowiem poziom wody w naczyniu leży poniżej środka ciężkości, to dolanie do naczynia niewielkiej ilości wody spowoduje obniżenie środka ciężkości, gdyż środek ciężkości dodawanej wody leży poniżej środka ciężkości naczynia z wodą przed dolaniem.

Jeśli natomiast poziom wody w naczyniu leży powyżej środka ciężkości, to odlewanie

z naczynia niewielkiej ilości wody spowoduje również obniżenie środka ciężkości, gdyż środek ciężkości ujmowanej wody leży powyżej środka ciężkości naczynia z wodą przed jej ujęciem.

Z tych dwóch faktów wynika, że podwyższanie poziomu wody, gdy środek ciężkości leży powyżej tego poziomu, oraz obniżanie poziomu wody, gdy środek ciężkości leży poniżej tego poziomu, powodują obniżanie położenia środka ciężkości. Zatem środek ciężkości leży najniżej, gdy znajduje się na powierzchni wody.

Autorem rozwiązania jest Marcin Pecarski.



Ilu mamy przodków?

Piotr RÓŻAŃSKI*

Rozwiązanie zadania M 1310.

Załóżmy, że liczbę n zapisano jako $(k+1) + (k+2) + \dots + l$ dla pewnych liczb naturalnych k i l , takich że $l - k \geq 2$. To oznacza, że

$$n = \frac{l(l+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(l-k)(l+k+1)}{2}.$$

Zauważmy, iż jedna z liczb $l-k$, $l+k+1$ jest nieparzysta i większa od 1, czyli n ma czynnik nieparzysty, więc nie jest potęgą dwójki. Z drugiej strony, jeżeli n nie jest potęgą dwójki, to liczba $2n$ zapisuje się jako iloczyn liczby parzystej i nieparzystej pq . Jeśli p oznacza większą z tych liczb, to możemy przyjąć, iż

$$k = \frac{p-q-1}{2}, \quad l = \frac{p+q-1}{2}.$$

Jak wiadomo, każdy człowiek ma dwoje rodziców. Skoro każdy z rodziców też jest człowiekiem, ta rekurencyjna zależność pozwala w prosty sposób wyznaczyć liczbę przodków dowolnej osoby w linii prostej w kolejnych pokoleniach: czworo babć i dziadków, ośmioro prababć i pradziadków, a zatem ogólnie $(\text{pra})^n$ dziadków obojga płci mamy 2^{n+2} .

Na nieszczęście, powyższa zależność w dłuższym przedziale czasu prowadzi do paradoksu: jak bowiem możemy mieć ponad miliard przodków w trzydziestym pokoleniu, jeśli przewidywana liczba ludności świata w tym okresie (około roku 1300 n.e.) nie przekraczała 500 milionów? Aby wyjaśnić ten paradoks, wystarczy zauważyć, że w każdej ilościowo ograniczonej populacji pary zawsze tworzone są pomiędzy osobami spokrewnionymi, choćby w minimalnym stopniu. W związku z tym każdy ze wspólnych przodków tej pary będzie liczony dwukrotnie w drzewie genealogicznym każdego z jej potomków. Przy rozpatrywaniu wielu pokoleń (a więc wielkiej liczby przodków) zjawisko to zdarza się bardzo często.

Niestety, wyjaśnienie to nie zbliża nas do ilościowej odpowiedzi na zadane w tytule pytanie. Aby takiej odpowiedzi udzielić, należy dokonać pewnych założeń dotyczących przyjętego modelu populacji i dziedziczenia.

Założenia modelu

Pierwszym uproszczeniem, którego dokonamy, modelując populację, będzie podzielenie jej na pokolenia. Zakładamy, że pary czy też związki, mogą być zawierane tylko przez osoby należące do tego samego pokolenia. Dzięki temu ciągłe zagadnienie modelowania liczby ludności sprowadza się do zagadnienia dyskretnego. Przyjmujemy ponadto, że tworzone pary są ściśle monogamiczne oraz niezmiennie. W rozpatrywanym modelu zakładamy, że pary tworzone są w sposób losowy wewnątrz pokolenia, pomijając natomiast będziemy osoby niewchodzące w skład żadnej pary.

Dzięki przyjętym założeniom możemy za podstawową jednostkę modelu przyjąć nie pojedynczą osobę, lecz parę złożoną z dwóch osób przeciwnej płci. W tym ujęciu każda jednostka (para) pochodzi od dwóch jednostek (dwóch par rodziców) z poprzedniego pokolenia. Dzięki takiemu przedstawieniu sytuacji całkowicie unikamy problemów związanych z kategorią płci jako takiej. Od tego momentu (do odwołania) określenia „potomek” oraz „rodzic” będą dotyczyć jednostek, czyli *de facto* par.

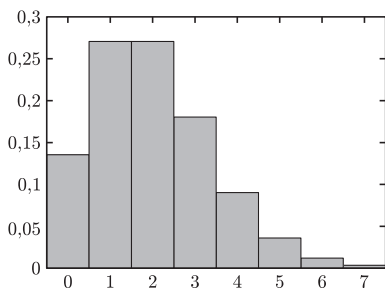
„Magiczne” założenie

Dotychczasowe założenia modelu wynikały w naturalny sposób z określonych wniosków dotyczących realnego świata. Dla odmiany, ostatnie przyjęte w modelu założenie będzie jego cechą charakterystyczną. Nazywamy je „magicznym”, ponieważ mimo pozornie trywialnej treści ma znaczące konsekwencje. Oto ono:

Dopasowania rodziców dla poszczególnych dzieci są od siebie niezależne.

Jak to rozumieć? Wyobraźmy sobie, że w pokoleniu dzieci wskazujemy dwie jednostki i oznaczamy je jako A i B. W tym momencie rodziców A może stanowić z równym prawdopodobieństwem każda nieuporządkowana dwójka jednostek z pokolenia rodziców. Istota założenia polega na tym, że niezależnie od wskazania rodziców dla jednostki A wybór rodziców dla jednostki B nadal jest losowy z równym prawdopodobieństwem dla każdej dwójki.

Okazuje się, że przy takich założeniach jedynymi parametrami modelu są liczebności poszczególnych pokoleń. W szczególności, znając liczebność pokolenia rodziców (R) i liczebność pokolenia dzieci (D), można wyznaczyć strukturę dzietności, czyli rozkład zmiennej losowej T opisującej liczbę potomków wybranej jednostki z pokolenia rodziców. Otrzymany wynik ma postać rozkładu dwumianowego z ilością prób równą D i parametrem $p = \frac{2}{R}$. Biorąc pod uwagę, że liczebności populacji są zwykle dość duże, dobrym przybliżeniem tego rozkładu staje się rozkład Poissona z parametrem $\lambda = \frac{2D}{R}$. Rozkład w szczególnym przypadku populacji o stałej liczebności (dla $\lambda = 2$) przedstawiony jest na wykresie.



Rys. 1. Rozkład dzietności (T) przy stałej liczebności populacji ($\lambda = 2$).

*

Funkcja przejścia

Założenia modelu mówią, że każda jednostka pochodzi od dwóch rodziców. Zastanówmy się w takim razie, od ilu rodziców pochodzą dwie jednostki? Naturalna wydaje się odpowiedź: „od czterech”, ale przecież zachodzi to tylko wtedy, gdy jednostki te nie mają wspólnych rodziców.

Rozważmy bardziej ogólną sytuację, w której spośród pokolenia dzieci wybieramy d jednostek i badamy wartość r – moc zbioru rodziców wybranych dzieci. Rozwiązaniem tego zagadnienia dla zadanego d jest zmienna losowa o rozkładzie $p_d(r)$, przyjmującym niezerowe wartości jedynie dla $2 \leq r \leq \min(2d, R)$.

Rozkłady $p_d(r)$, wyznaczone kombinatorycznie i zapisane w postaci rekurencyjnej, nie wyglądają zachęcająco:

$$p_d(r) = p_{d-1}(r-2) \cdot \frac{(R-r+1)(R-r+2)}{R(R-1)} + \\ + p_{d-1}(r-1) \cdot \frac{2(R-r+1)(r-1)}{R(R-1)} + p_{d-1}(r) \cdot \frac{r(r-1)}{R(R-1)}.$$

Jak się jednak okazuje po prostym badaniu metodami numerycznymi, każdy z nich przyjmuje znacząco niezerowe wartości tylko w niewielkim przedziale otaczającym maksimum. Na dodatek, szerokość tego przedziału zmniejsza się szybko wraz ze wzrostem liczebności populacji. Wobec tego przybliżymy poszczególne rozkłady $p_d(r)$ rozkładami jednopunktowymi zlokalizowanymi w maksimach – położenia owych maksimów oznaczmy przez r_0 . Będziemy zatem poszukiwać wartości r_0 w zależności od parametru d rozkładu. Poszukiwana funkcja $r_0(d)$ ma tutaj bardzo sensowną interpretację: jest to oczekiwana ilość rodziców dla d jednostek z pokolenia dzieci.

Wróćmy na chwilę do zmiennej losowej \mathbf{T} przedstawiającej strukturę dietności populacji. Zauważmy najpierw, że bezpośrednio z rozkładu tej zmiennej możemy odczytać wartość $r_0(D)$, czyli przewidywaną liczbę rodziców całego pokolenia. Wartość ta będzie równa $R \cdot P(\mathbf{T} > 0) = R(1 - e^{-\frac{2D}{R}})$.

Następnie zauważmy, że jeśli z pokolenia dzieci wyodrębnimy d jednostek, to (na podstawie „magicznego” założenia) jakiegokolwiek przyporządkowania dokonane dla nich będą niezależne od przyporządkowań dla pozostałych jednostek. Zatem, wynik dla d jednostek wybranych z pokolenia o liczebności D , czyli $r_0(d)$, powinien być taki sam, jak wynik dla całego pokolenia o liczebności d . Na mocy tej obserwacji otrzymujemy

$$r_0(d) = R(1 - e^{-\frac{2d}{R}}).$$

Można sprawdzić, że dla odpowiednio licznych populacji (R dużo większe od d) jest $r_0(d) \approx 2d$.

Zliczanie

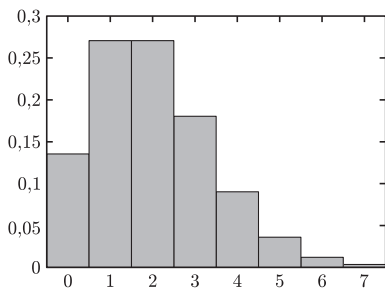
Aby policzyć przodków z poszczególnych pokoleń, musimy przyjąć określony model liczebności. Powracając do liczenia osób, a nie par, określić należy ciąg N_1, N_2, N_3, \dots wyrażający liczebności poszczególnych pokoleń (liczonych wstecz). Analogicznie, przez P_1, P_2, P_3, \dots oznaczmy liczby przodków kolejnych stopni (rodziców, dziadków, pradiadków...). Zauważmy, że dla dowolnego $n > 1$, przy rozpatrywaniu związku pomiędzy pokoleniami $n-1$ i n , liczba par z pokolenia dzieci równa jest $\frac{1}{2}P_{n-1}$, liczba zaś par rodziców $\frac{1}{2}P_n$. Jednocześnie, ilość wszystkich par z pokolenia rodziców, czyli R , wynosi $\frac{1}{2}N_n$. Zatem, korzystając z obliczonej poprzednio postaci funkcji $r_0(d)$ mamy

$$\frac{1}{2}P_n = r_0\left(\frac{1}{2}P_{n-1}\right)$$

dla dowolnego $n > 1$.

Dodatkowo, biorąc pod uwagę, że mamy dwoje rodziców ($P_1 = 2$), oraz podstawiając do powyższego wzoru jawną postać funkcji $r_0(d)$, możemy napisać następującą rekurencję:

$$P_1 = 2, \quad P_n = N_n \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{2P_{n-1}}{N_n}\right)\right].$$



Rys. 2. Wyniki dla modelu jednoparametrowego z $N_1 = 100000$ oraz $\alpha = 1,03$

Jednoparametrowy model liczebności

Przyjmując prosty model liczebności scharakteryzowany jednym parametrem $\alpha = N_n/N_{n+1} = \text{const}$, można jakościowo scharakteryzować wyniki otrzymane przez numeryczne rozwiązanie powyższej rekurencji. Wyróżniamy trzy fazy:

- faza wzrostu wykładniczego
dla najbliższych pokoleń, w której $P_n \approx 2P_{n-1}$;
- faza przejściowa,
w której $P_n < 2P_{n-1}$, występująca w okolicy $P_n \approx \frac{1}{2}N_n$;
- faza nasycenia
charakteryzująca się stałym ilorazem (współczynnikiem nasycenia) $\tau = \frac{P_n}{N_n}$.
Współczynnik nasycenia w powyższym modelu można obliczyć, szukając granicy ciągu (P_n/N_n) , a więc rozwiązując równanie $\tau = 1 - e^{-2\alpha\tau}$.

Przy populacji o stałej liczebności ($\alpha = 1$) współczynnik ten osiąga wartość $\tau \approx 0,797$. Oznacza to, że dla takiej populacji, w odległych pokoleniach, przodkowie stanowią niezmiennie prawie 80% całego pokolenia.

Co poza tym?

Nie da się nie zauważyć, że przedstawiony tu model obliczeń jest znacząco uproszczony. Dla rzeczywistych, dużych populacji, dobór osób w pary nie odbywa się całkowicie losowo, lecz zazwyczaj istnieje skłonność do szukania partnerów wśród bliższego otoczenia. Uzasadnione więc byłoby wyodrębnienie grup wewnątrz populacji, dopuszczając jednocześnie (z określonym prawdopodobieństwem) możliwość krzyżowania pomiędzy grupami. Ponadto, podział na pokolenia nie jest do końca naturalny, szczególnie w populacjach, w których nie obowiązują ściśle reguły (np. kulturowe) dotyczące różnic wieku.

Bardziej złożony model, uwzględniający rzeczywiste migracje ludności i izolacje poszczególnych grup (geograficzne, językowe...) wykorzystali Rohde, Olson i Chang w swoim artykule *Modelling the recent common ancestry of all living humans* opublikowanym w Nature. Oszacowali oni czas pojawienia się tzw. Ostatniego Wspólnego Przodka wszystkich obecnie żyjących ludzi na Ziemi na pierwsze lub drugie tysiąclecie p.n.e. Genealodzy, do pracy!



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 785. W naczyniu z wodą zanurzamy pionowo drewniany klocek o przekroju kwadratowym $a \times a$, ($a = 10$ cm) i długości $l = 20$ cm. Jaka ilość ciepła wydzieli się w wyniku przewrócenia się tego klocka? Przyjmujemy, że gęstość drewna jest równa połowie gęstości wody.

Rozwiązanie na str. 15

F 786. Jak należy napełnić naczynie wodą, by środek ciężkości leżał możliwie najniżej?

Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Przemysław MAZUR

M 1309. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano po zewnętrznej stronie podobne trójkąty prostokątne ADB i AEC , w których kąty przy wierzchołkach D i E są proste. Punkt M jest środkiem odcinka BC . Udowodnić, że $DM = EM$.
Rozwiązanie na str. 24

M 1310. Znaleźć wszystkie liczby naturalne, których nie da się zapisać jako sumy co najmniej dwóch kolejnych liczb całkowitych dodatnich.

Rozwiązanie na str. 9

M 1311. Dane jest słowo złożone z liter a, b (np. $baabab$). Na takim słowie możemy wykonać następujące operacje:

- dopisać lub wykreślić dwie kolejne litery a (np. $baabab \leftrightarrow bbab$),
- dopisać lub wykreślić trzy kolejne litery b (np. $bbab \leftrightarrow bbabbbb$),
- zamienić sekwencję liter ab na bba lub na odwrot (np. $bbabbbb \leftrightarrow abbbb$).

Rozstrzygnąć, czy za pomocą wielokrotnego wykonywania tych operacji można ze słowa a otrzymać słowo ba .

Rozwiązanie na str. 24



Roztańczone pchły

W Bajtocji można spotkać wędrownych treserów pcheł. Pchły uczone są tańca, polegającego na wykonywaniu precyzyjnych skoków w rytm muzyki. Dokładnie wygląda to tak: treser układa na stole w rzędki ponumerowane kolejno żetony. Na każdym żetonie, oprócz jego numeru, jest również napisany numer żetonu, na który powinna z niego skoczyć pchła – na każdym żetonie ten numer jest inny. Następnie treser ustawia po jednej pchle na każdym z żetonów i włącza muzykę. Na początku każdego taktu każda z pcheł wykonuje skok wprost na żeton, którego numer jest napisany na żetonie, na którym w danej chwili stoi.

Dzisiaj Bajtazar zamierza tresować swoje ulubione 10 pcheł, którym swego czasu nadał pieszczotliwe imiona będące kolejnymi literami alfabetu łacińskiego. Wiemy, że Bajtazar napisał na żetonach następujące liczby:

liczba na żetonie	7	4	8	2	10	1	6	5	9	3
żeton	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

oraz że ustawił swoje pchły w kolejności alfabetycznej. A zatem na początku tańca pchły tworzą układ

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

oznaczany w skrócie ABCDEFGHIJ, po pierwszym takcie muzyki – układ:

F	D	J	B	H	G	A	C	I	E
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

oznaczany w skrócie FDJBHGACIE, po drugim takcie muzyki – układ GBEDCAFJIH itd. Bajtazar zastanawia się, jaki będzie układ pcheł po odtąnczeniu całej piątej symfonii Bajthovena, która dziwnym trafem składa się z dokładnie 2011 taktów.

Spróbujmy pomóc Bajtazarowi przewidzieć ten układ. Zaczniemy od przyjrzenia się, jakie są kolejne pozycje zajmowane przez jedną, ustaloną pchłę Bajtazara, powiedzmy pchłę A. Swoją tanię zaczyna ona na żetonie 1, po pierwszym skoku znajduje się na żetonie 7, dalej na żetonie 6, po trzech skokach ląduje z powrotem na żetonie 1... Widać, że dalej pozycje pchły A będą się cyklicznie powtarzać, przy czym po skoku o numerze podzielonym przez 3 będzie to żeton 1, jeśli numer skoku daje resztę 1 z dzielenia przez 3, to żeton 7, a po wszystkich pozostałych skokach żeton 6. Ponieważ $2011 \bmod 3 = 1$, więc po odtąnczeniu symfonii pchła będzie odpoczywać na żetonie 7.

Po tym samym cyklu $1 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 1$ skaczą także pchły F i G, łatwo sprawdzamy, że po 2011. skoku znajdują się one odpowiednio na żetonach 1 i 6. Znamy już zatem część wynikowego układu: F???GA???

Widzimy dalej, że pchła I skacze w miejscu, mamy zatem: F???GA?I?. Coś takiego należało w sumie zauważyć wcześniej.

Dalej, pchła B: startuje z żetonu 2, po pierwszym skoku ląduje na żetonie 4, po drugim znów na żetonie 2. Mamy cykl $2 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ z pchłami B i D, a ponieważ $2011 \bmod 2 = 1$, więc możemy uzupełnić nasz układ: FD?B?GA?I?.

Pchła C: zaczyna na żetonie 3, przeskakuje na żeton 8, potem na żeton 5, potem na żeton 10, wreszcie po czwartym skoku ląduje z powrotem na żetonie 3. Mamy cykl $3 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 3$ z pchłami C, H, E, J. Ponieważ $2011 \bmod 4 = 3$, więc na końcu symfonii pchła C znajdzie się na żetonie 10, pchła H na żetonie 3, pchła E na żetonie 8, a pchła J na żetonie 5. Ostateczny układ po 2011 skokach to FDHBJGAEIC.

Bajtazara bardzo ucieszył fakt, że pomogliśmy mu obliczyć końcowy układ taneczny, gdyż dzięki temu nie będzie musiał wysłuchiwać całej symfonii, żeby go poznać. Teraz zastanawia się, ile różnych układów swoich pcheł zobaczyłby do końca symfonii.

Dotychczasowa analiza tańca pcheł pozwala dostrzec okresowość zmian ich położeń: mamy mianowicie cykle długości 1, 2, 3 i 4. Jeśli pchły wykonają 12 skoków, która to liczba jest najmniejszą wspólną wielokrotnością (w skrócie NWW) długości wszystkich cykli, to pchły w ramach każdego cyklu wrócą do początkowego układu, czyli otrzymamy układ ABCDEFGHIJ. Z naszego rozkładu na cykle widać, że ten początkowy układ nie powtórzy się wcześniej, a z tego faktu można wywnioskować, że żaden inny układ nie powtórzy się podczas pierwszych 12 taktów muzyki. Czyli mamy dokładnie 12 różnych układów, które w dalszych skokach będą powtarzały się w kółko.

Była to dla Bajtazara fatalna wiadomość – zaplanowany przez niego taniec okazał się strasznie monotony! W akcie desperacji poprosił nas o jeszcze jedną przysługę: chce, żebyśmy sprawdzili, czy nie da się jakoś inaczej napisać liczb na żetonach, żeby podczas tańca wystąpiło więcej różnych układów? Bajtazar gdzieś usłyszał, że wszystkich permutacji liter wyrazu ABCDEFGHIJ jest $10! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10 = 3\,628\,800$, i zastanawia się, na ile możemy zbliżyć się do tej liczby.

I tym razem wesprzemy Bajtazara i spróbujemy wskazać najlepszą konfigurację liczb na żetonach. Ograniczmy najpierw liczbę możliwości, jakie musimy rozważyć. Przede wszystkim zauważmy, że odkryte przez nas dotychczas własności związane z rozkładem na cykle zachodzą dla dowolnej konfiguracji. Po pierwsze, pchła startująca z danego żetonu musi w końcu na ten żeton wrócić – mówiąc obrazowo, trasa każdej pchły jest cyklem (litera „O”), a nie cyklem z odnózką (litera „P”), gdyż w przeciwnym przypadku oznaczałoby to, że jedna z liczb zapisanych na żetonach musiałaby się powtórzyć (ta na styku pałki i dolnej części brzuszka w literze „P”). Po drugie, liczbę różnych układów podczas tańca możemy obliczyć jako najmniejszą wspólną wielokrotność długości cykli poszczególnych pcheł. To oznacza, że rozwiązaniem zagadki Bajtazara jest taki podział liczby 10 na całkowite dodatnie składniki, w którym NWW jest największe.

Niestety, takich podziałów liczby 10 wciąż może być dużo. Spróbujmy znów zredukować liczbę możliwości. Intuicja podpowiada, że nie opłaca się wybierać dwóch składników, które mają jakiś wspólny dzielnik większy niż 1. Istotnie, jeśli mamy składniki a oraz b , przy czym w rozkładzie na czynniki pierwsze a zawiera czynnik p^i , a b czynnik p^j oraz $i \geq j$, to możemy bez straty dla NWW zastąpić b mniejszym składnikiem b/p^j , a powstałe w ten sposób niezagospodarowane żetony ustawić chociażby w cykle jednoelementowe.

Dalej, możemy ograniczyć zbiór rozważanych składników. I tak, zamiast brać do podziału składnik 6, możemy równie dobrze wziąć składniki 2 i 3 – NWW nie zmieni się, a zyskamy jeden wolny żeton do zagospodarowania. Podobnie, nie opłaca się rozważać składnika 10 i, ogólniej, żadnego składnika niebędącego potęgą liczby pierwszej. Akurat wśród liczb z zakresu $1 \dots 10$ wszystkie pozostałe są już potęgami liczb pierwszych.

Udało nam się już ograniczyć rozważania do podziałów liczby 10 na parami względnie pierwsze składniki, wśród których nie występują liczby 6 oraz 10. Tego już nie ma tak dużo; rozpatrzmy wszystkie możliwości, poczynając od największych możliwych składników. Przypomnijmy, że konfiguracja Bajtazara dała nam NWW równe 12, więc mniejszych NWW na pewno nie musimy rozważać.

W podziale zawierającym 9 lub 8 mogą występować już tylko same jedyńki – w ten sposób nie pobijemy konfiguracji Bajtazara. Jeśli weźmiemy 7, to możemy do tego dołożyć zestaw składników (3), (2, 1) lub (1, 1, 1), z których ten pierwszy jest najlepszy i daje NWW równe 21. Świetnie, już mamy konfigurację lepszą od konfiguracji Bajtazara. Szóstki nie rozważamy, to teraz piątka. Do piątki możemy dołożyć (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1) oraz pewne zestawy liczb nieprzekraczających 2, które na pewno się nam nie opłacają. Z wcześniejszych możliwości najlepsza jest środkowa, daje już NWW równe 30. Dalej jest już tylko gorzej: do czwórki nie jesteśmy w stanie dołożyć niczego, co pozwoliłoby przekroczyć NWW $4 \cdot 3 = 12$, a z trójką, dwójką i jedynką jest zdecydowanie nie lepiej.

No to koniec: rozważyliśmy wszystkie możliwości i możemy z dumą odpowiedzieć Bajtazarowi, że nie da się znaleźć konfiguracji liczb na żetonach, przy której pchły zaliczą więcej niż 30 różnych układów. A taką właśnie liczbę układów daje, przykładowo, konfiguracja: 2, 3, 4, 5, 1, 7, 8, 6, 10, 9, reprezentująca układ cykli (5, 3, 2).

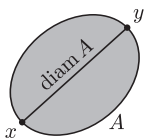
No dobrze, a ile jest różnych konfiguracji liczb na żetonach dających właśnie 30 różnych układów tanecznych? A co jeśli pozwolimy na to, żeby liczby zapisane na żetonach mogły się powtarzać? A tak w ogóle, czy przy każdej konfiguracji mamy pewność, że pchły nie zderzą się w locie, co z pewnością spowodowałoby istną katastrofę podczas pokazu? Odpowiedzi na te i dalsze pytania rozochoconego Bajtazara pozostawiamy Drogiemu Czytelnikowi.

Małą Deltę przygotował Jakub RADOSZEWSKI

Symetryzacja Steinera

Tomasz TKOCZ*

Bryłę A nazywamy **wypukłą**, jeśli wraz z każdymi dwoma swoimi punktami zawiera odcinek łączący te punkty.



Rys. 1. Średnica zbioru mierzy, jak duży on jest.

Rozważmy wypukłą bryłę A w przestrzeni trójwymiarowej \mathbb{R}^3 . Jedną z wielkości charakteryzujących to, jak duża jest bryła, może być jej **średnica**, którą oznaczamy przez $\text{diam } A$. Jest to kres górny odległości $|x - y|$ pomiędzy dowolną parą punktów $x, y \in A$. Na przykład, średnica sześcianu $[-1, 1]^3$ o wierzchołkach w punktach $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ wynosi $2\sqrt{3}$, bowiem dwa najbardziej oddalone od siebie punkty to np. wierzchołki $(1, 1, 1)$ i $(-1, -1, -1)$, które są od siebie odległe o

$$|(1, 1, 1) - (-1, -1, -1)| = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - (-1))^2 + (1 - (-1))^2} = 2\sqrt{3}.$$

Zauważmy też, że zgodnie z tą definicją, średnica kuli o promieniu R wynosi $2R$.

Czy bryła A o ustalonej średnicy d może mieć dowolnie dużą objętość $|A|$? Oczywiście, że nie, bo z definicji średnicy zbioru bryła A musi być zawarta w kuli o promieniu d i środku w dowolnie wybranym punkcie a bryły. Zapytajmy dalej.

Pytanie 1. *Które spośród wszystkich brył wypukłych A o ustalonej średnicy d mają największą objętość i ile ona wynosi?*

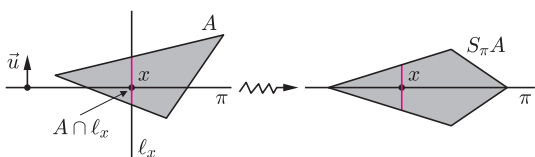
Jest to tzw. problem *izodiametryczny*. Można go łatwo rozwiązać przy użyciu silnego geometrycznego narzędzia, jakim jest tytułowa symetryzacja. Dla bryły A jej **symetryzacja Steinera** $S_\pi A$ względem płaszczyzny π to zbiór powstały przez zastąpienie każdego cięcia $A \cap \ell_x$ zbioru A prostą ℓ_x prostopadłą do płaszczyzny π i przechodzącą przez punkt $x \in \pi$ odcinkiem o środku w punkcie x i długości równej długości odcinka $A \cap \ell_x$. Jeśli ktoś lubi znaczki, to zapisujemy to formalnie tak

$$S_\pi A = \{x + t\vec{u} \mid x \in \pi, |t| \leq t_0(x), 2t_0(x) = |A \cap \ell_x|\},$$

gdzie \vec{u} jest ustalonym jednostkowym wektorem prostopadłym do obranej na samym początku płaszczyzny π .

Intuicyjnie, niezależnie nad każdym punktem x płaszczyzny π tak przesuujemy fragment bryły, żeby był on symetryczny względem płaszczyzny π . Ta operacja ma takie, kluczowe własności:

- (i) zachowuje wypukłość – jeśli A jest bryłą wypukłą, to $S_\pi A$ też,
- (ii) bryła $S_\pi A$ jest symetryczna względem płaszczyzny π ,
- (iii) nie zmienia objętości bryły – $|S_\pi A| = |A|$,
- (iv) nie powiększa średnicy – $\text{diam } S_\pi A \leq \text{diam } A$.



Rys. 2. Symetryzacja Steinera względem płaszczyzny π .

Nietrudno zobaczyć, że przecięcie zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym, więc przecięcie naszej wypukłej bryły A prostą ℓ_x jest wypukłym podzbiorem tej prostej, czyli odcinkiem.

Własność (ii) jest jasna z konstrukcji zbioru $S_\pi A$; (iii) podobnie, bo nalewając wody do A i do $S_\pi A$, nalejemy jej tyle samo, gdyż nad każdym punktem $x \in \pi$ nalejemy jej tyle samo. Dla dowodu własności (iv) ustalmy dwa punkty $p, q \in S_\pi A$. Naszym celem jest udowodnić, że $|p - q| \leq \text{diam } A$. Niech x i y to odpowiednio rzuty punktów p i q na π , a s i t niech będą rzutami x i y na prostą $\{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Przy tych oznaczeniach możemy napisać

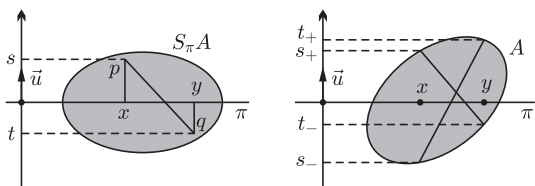
$$p = x + s\vec{u}, \quad q = y + t\vec{u}.$$

Oznaczmy jeszcze przez s_+, s_- i t_+, t_- odpowiednio końce lewy i prawy odcinków $A \cap \ell_x$ i $A \cap \ell_y$. Mamy wtedy

$$|s| \leq \frac{1}{2}|A \cap \ell_x| = \frac{s_+ - s_-}{2}, \quad |t| \leq \frac{1}{2}|A \cap \ell_y| = \frac{t_+ - t_-}{2}.$$

Stąd

$$|s - t| \leq |s| + |t| \leq \frac{s_+ - s_- + t_+ - t_-}{2},$$



Rys. 3. Symetryzacja Steinera nie powiększa średnicy zbioru.

*Student Wydziału Fizyki i Wydziału Matematyki Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Korzystamy po drodze z nierówności $(\lambda + \mu)^2 \leq 2\lambda^2 + 2\mu^2$, słusznej dla dowolnych liczb rzeczywistych λ i μ .

a więc

$$\begin{aligned} 4|p - q|^2 &= 4(|x - y|^2 + |s - t|^2) \leq 4|x - y|^2 + |s_+ - s_- + t_+ - t_-|^2 \\ &\leq 4|x - y|^2 + 2|s_+ - t_-|^2 + 2|t_+ - s_-|^2 \\ &= 2|(x + s_+ \vec{u}) - (y + t_- \vec{u})|^2 + 2|(y + t_+ \vec{u}) - (x + s_- \vec{u})|^2 \leq 4(\text{diam } A)^2. \end{aligned}$$

Dla jeszcze większego oswojenia się z naszym narzędziem dobrym ćwiczeniem, drogi Czytelniku, jest samodzielne udowodnienie własności (i).

Przyszła teraz pora na rozumowanie finałowe, jeśli chodzi o odpowiedź Pytanie 1. Mając dowolną wypukłą bryłę A o średnicy d , wysymetryzujemy ją kolejno względem każdej z trzech płaszczyzn $\pi_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = 0\}$, $i = 1, 2, 3$, wyznaczonych przez wszystkie możliwe pary osi $0x_1, 0x_2, 0x_3$ układu współrzędnych. Wtedy powstaje bryła $SA = S_{\pi_3} S_{\pi_2} S_{\pi_1} A$, która jako symetryczna względem każdej z płaszczyzn π_i jest środkowo symetryczna względem zera. Zatem dla dowolnego punktu $x \in SA$ jest też $-x \in SA$, więc

$$2|x| = |x - (-x)| \leq \text{diam } SA \stackrel{(iv)}{\leq} \text{diam } A = d,$$

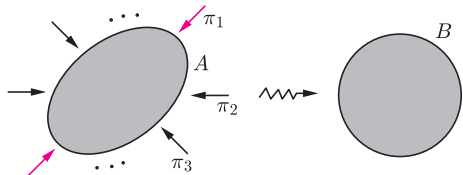
co oznacza, że bryła SA jest zawarta w kuli $B(0, d/2)$ o środku w zerze i promieniu $d/2$. Stąd

$$(D) \quad |A| \stackrel{(iii)}{=} |SA| \leq |B(0, d/2)| = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3.$$

Uzyskaliśmy tym samym (D) – tak zwaną *nierówność izodiametryczną*. Wynika z niej, że wśród ciał o ustalonej średnicy d największą objętość ma kula o promieniu $\frac{1}{2}d$. Jest to odpowiedź postawione na początku Pytanie 1. Trudne?

Przypomnijmy sobie, że zaczęliśmy od badania średnicy bryły wypukłej. Inną wielkością charakteryzującą to, jak duża może być bryła, jest z pewnością pole powierzchni $|\partial A|$ jej brzegu ∂A . W duchu poprzedniego pytania można się też zastanawiać, czy ma to jakiś związek z objętością bryły i zadać kolejne pytanie.

Pytanie 2. *Które spośród wszystkich brył wypukłych A o ustalonym polu powierzchni brzegu S mają największą objętość i ile ona wynosi?*



Rys. 4. Twierdzenie o kuli śnieżnej.

Jest to tzw. problem *izoperymetryczny*, pochodzący już od Dydony, postaci z mitologii rzymskiej. Ścisłego rozwiązania doczekał się on jednak dopiero w XIX w. Nasz bohater, Jakub Steiner, przy użyciu swojej symetryzacji rozwiązał go na płaszczyźnie w 1838 roku. Naszkicujemy teraz jego argument. Na początku kluczowe jest zauważenie kolejnej własności symetryzacji Steinera, że

$$(v) \text{ nie powiększa pola powierzchni brzegu } |\partial S_{\pi} A| \leq |\partial A|.$$

Dalej już wystarczy tylko wiedzieć, że startując z dowolnej bryły wypukłej A , można znaleźć taki ciąg płaszczyzn π_1, π_2, \dots , że symetryzując A kolejno względem nich będziemy w *pewnym* sensie coraz bliżej pewnej kuli B . Nazwa tego twierdzenia doskonale prezentuje jego ideę. Jest to tzw. twierdzenie o *kuli śnieżnej*.

Zatem

$$|\partial B| \leq |\partial(S_{\pi_n} S_{\pi_{n-1}} \dots S_{\pi_1} A)| \leq |\partial A|.$$

Ale symetryzacja nie zmienia objętości (pamiętamy o własności (iii)), więc kula B ma taką objętość jak bryła A . Czyli

$$(P) \quad 3\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3} |A|^{2/3} = 3\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3} |B|^{2/3} = |\partial B| \leq |\partial A|.$$

Otrzymaliśmy tym samym klasyczną *nierówność izoperymetryczną*. Znowu widać, że kule są ekstremalne — przy ustalonym polu powierzchni mają największą objętość.

Widzimy, że zupełnie elementarnie byliśmy w stanie odpowiedzieć na dwa wariacyjne pytania. Wszystko dzięki prostej geometrycznej idei symetryzacji. Do kompletności wywodu pozostał dowód twierdzenia o *kuli śnieżnej* i faktu, że symetryzacja nie powiększa pola powierzchni, ale to już temat na inną opowieść.

Dla dociekliwych, ściśle to jest tak, że ciąg zbiorów $(S_{\pi_n} S_{\pi_{n-1}} \dots S_{\pi_1} A)_{n \geq 1}$ zbiega w metryce Hausdorffa do pewnej kuli B .



Rozwi/azanie zadania F 785.

Oznaczmy przez m mas/e wody wypieranej przez klocek. Gdy jest on zanurzony pionowo, /srodek ci/e/zko/sci zanurzonej cz/e/sci jest na g/1/eboko/sci $l/4$, gdy poziomo, na głębokości $a/4$. A wi/ec po/lo/zenie /srodka ci/e/zko/sci klocka po przewr/oceniu podniesie si/e o $(l - a)/4$ i o tyle obni/zy si/e /srodek ci/e/zko/sci wypartej wody. Zatem energia potencjalna wody w naczyniu spadnie, a energia potencjalna klocka nie zmieni si/e. Wydzielone ciep/lo b/edzie wi/ec r/owne

$$Q = mg(l - a)/4 = 0, 25 \text{ J.}$$

Badamy ciała nieszttywne w ruchu obrotowym

Część II: Ciecze o dużej lepkości i materiały sypkie

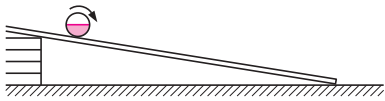
Stanisław BEDNAREK

W tym odcinku będziemy kontynuowali doświadczenia, pozwalające nam poznać zachowanie się ciał nieszttywnych w ruchu obrotowym. Skoncentrujemy się na cieczach o dużej lepkości i materiałach sypkich.

Do przeprowadzenia doświadczeń będzie nam potrzebne kilka okrągłych, przezroczystych, plastikowych pudełek o średnicy około 5 cm i wysokości 2 cm (np. po cukierkach) z nakładaną pokrywką, przezroczysta taśma klejąca, nożyczki, deska o długości ok. 1,5 m lub większej i szerokości ok. 10 cm, wiertarka elektryczna z regulacją szybkości obrotów, imadło, kółko z grubej sklejki lub plastiku o średnicy zbliżonej do średnicy pudełek, śruba i nakrętka z gwintem M6, przezroczysty silikon do uszczelnienia, wiertła oraz woda, sztuczny miód, keczup, mąka ziemniaczana, drobnoziarnisty, suchy, także wilgotny piasek.

Pudełka będziemy napełniać do połowy różnymi substancjami. Po napełnieniu nakładamy pokrywkę i uszczelniamy pudełka taśmą klejącą (gdy pudełek mamy mało i będzie trzeba wymienić ich zawartość) lub silikonem.

Pierwszą serię doświadczeń przeprowadzimy przy użyciu równi pochyłej. W tym celu na dużym stole albo innej, poziomej powierzchni, np. blacie kuchennym lub podłodze, kładziemy deskę. Pod jeden z końców deski podkładamy kilka grubszych książek albo płaskich pudełek, żeby była ona nachylona do poziomu pod kątem kilkunastu stopni.



Rys. 1. Równia pochyła do wprawiania pudełek w ruch i leżące na niej pudełko wypełnione cieczą. Przy niższym położonym końcu deski dobrze jest ułożyć gąbkę, która będzie zatrzymywała staczające się z równi pudełka, zapobiegając ich uszkodzeniu.

Na górnym końcu równi ustawiamy na początek pudełko z wodą i przytrzymujemy je palcami. Puszczamy pudełko swobodnie i obserwujemy, co się z nim dzieje oraz zachowanie się wody w jego wnętrzu.

Po ustawieniu (i przytrzymaniu) pudełka z wodą na górnej części równi pochyłej powierzchnia wody była płaska i pozioma, czyli prostopadła do działającej na nią siły ciężkości (rys. 2a). Kiedy puściliśmy pudełko i pozwoliliśmy mu staczać się po równi, powierzchnia wody nadal pozostała płaska i pozioma. Dzieje się tak, bo woda jest przykładem cieczy o małym współczynniku lepkości, słabo też zwilża ścianki pudełka, co powoduje, że oddziaływania różnych warstw wody oraz oddziaływanie wody ze ściankami toczącego się pudełka są słabe. Ścianki pudełka poruszające się ze stosunkowo małą prędkością nie są w stanie wprawić wody w ruch obrotowy i woda uczestniczy prawie wyłącznie w ruchu postępowym wzdłuż równi. Warto przypomnieć sobie doświadczenie z surowym jajkiem z I części artykułu.

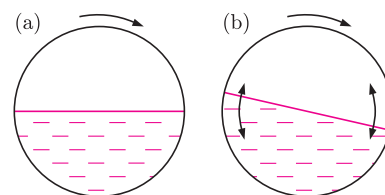
Na górnej części równi pochyłej ustawmy teraz pudełko zawierające sztuczny miód lub suchy piasek i obserwujemy, jak zachowuje się powierzchnia tych substancji. Stopniowo zwiększamy kąt nachylenia równi przez podłożenie pod jej koniec kolejnych książek lub pudełek. Dalej obserwujemy pudełko i jego zawartość. Okazuje się, że po umieszczeniu pudełka na równi powierzchnia znajdujących się w nim substancji jest płaska i ulega odchyleniu od pionu w kierunku niższej części równi (rys. 2b).

Pudełko przy tym również przechyla się. Następnie pudełko i zawarta w nim substancja przechylają się w przeciwną

stronę. Wahania te powtarzają się kilkakrotnie i są spowodowane zmianą położenia środka masy pudełka z zawartością umieszczonego na równi pochyłej. Zwiększając kąt nachylenia równi, powodujemy, że pudełko w pewnym momencie zaczyna się staczać, a powierzchnia zawartej w nim substancji, pozostając płaska, wykonuje wahania wokół kierunku poziomego. Przyczyną tych wahań jest oddziaływanie substancji z poruszającymi się ściankami pudełka. Sztuczny miód, ma duży współczynnik lepkości, a piasek znaczny współczynnik tarcia. Dzięki temu oddziaływanie tych substancji z będącymi w ruchu ściankami jest na tyle silne, że potrafi przynajmniej czasowo zmienić położenie substancji.

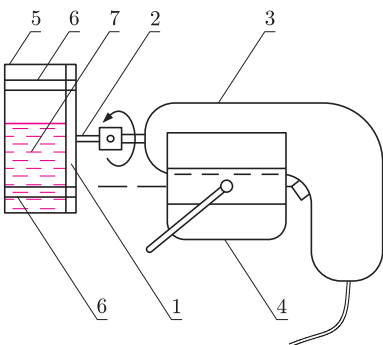
Na górnej części równi pochyłej możemy jeszcze umieszczać i puszczać kolejno pudełka wypełnione do połowy keczupem, zawiesiną mąki ziemniaczanej w wodzie oraz mokrym piaskiem, obserwując przy tym ruch pudełek oraz zachowanie się zawartych w nich substancji. W przypadku pudełka wypełnionego keczupem zauważamy, że w początkowym etapie ruchu próbował on obracać się wraz z pudełkiem i jego powierzchnia zakrzywiała się w kierunku ścianek pudełka. W następnym etapie, mimo że pudełko toczyło się szybciej, zaobserwowany efekt ulegał zmniejszeniu i powierzchnia keczupu stawała się bardziej płaska. Co jest przyczyną tego zaskakującego efektu?

Dotychczas lepkość badanych przez nas cieczy, takich jak woda czy sztuczny miód nie zależała od szybkości ich ruchu. Lepkość niektórych z tych cieczy, np. sztucznego miodu czy gliceryny, może być bardzo duża, ale jest stała przy różnych prędkościach. Dopiero wzrost temperatury cieczy powoduje zmniejszenie lepkości, a ich ochłodzenie efekt odwrotny. Takie ciecze nazywane są cieczami newtonowskimi.



Rys. 2. Zachowanie się powierzchni a) cieczy o małej lepkości umieszczonej w pudełku, toczącym się powoli; b) cieczy o dużej lepkości lub materiału sypkiego umieszczonego w pudełku, rozpoczynającym ruch lub toczącym się powoli.

Istnieje jednak duża grupa cieczy, których lepkość zależy od szybkości ruchu. Są one nazywane cieczami nienewtonowskimi. Ciecze te dzielą się na dwie grupy. Dla pierwszej z nich lepkość maleje wraz ze wzrostem szybkości i ciecze te nazywane są tiksotropowymi. W drugiej grupie ciecze sytuacja jest odwrotna i wzrost szybkości ruchu prowadzi do zwiększenia lepkości. Ciecze należące do drugiej grupy nazywane są reopeksyjnymi. Ciecze tiksotropowe i reopeksyjne mają zwykle złożoną strukturę i nie są jednorodne w skali molekularnej. Mogą to być m.in. zawiesiny cząstek jednego lub kilku ciał stałych o różnych kształtach w cieczach. Efekt tiksotropowy i reopeksyjny są spowodowane oddziaływaniem tych cząstek ze sobą oraz z cząsteczkami cieczy, w której zostały zawieszane. Ketchup jest łatwo dostępnym przykładem cieczy tiksotropowej. Na początku ruchu pudełka, gdy jego szybkość była mała, ketchup miał większą lepkość i był wprawiany w ruch przez poruszające się ścianki naczynia. Wraz z nabieraniem szybkości przez naczynie lepkość ketchupu malała i coraz trudniej było go poruszać. W przypadku zawiesiny mąki ziemniaczanej w wodzie zauważamy,



Rys. 3. Układ do badania substancji w ruchu obrotowym;
1 – tarcza, 2 – śruba z nakrętką,
3 – wiertarka, 4 – imadło, 5 – przezroczyste pudełko, 6 – przezroczysta taśma klejąca, 7 – badana substancja.

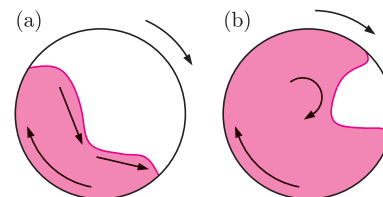
Po zmontowaniu układu powoli zwiększymy prędkość obrotów wiertarki i obserwujemy zachowanie się substancji zawartej w pudełku. Kiedy szybkość ta osiągnie odpowiednią, ale niezbyt dużą wartość, możemy zauważyć, że powierzchnia znajdującego się w pudełku suchego piasku wzniosła się po stronie przeciwnej do kierunku obrotu. Przy ustalonej prędkości obrotu kąt odchylenia od poziomu tej powierzchni jest stały. Widzimy również poruszające się w dół, wzdłuż powierzchni i tuż pod nią, uporządkowane warstwy piasku. Ponadto piasek unoszony jest w górę tuż przy ścianie naczynia. Tworzy się w ten sposób swoisty obieg piasku. Jest on transportowany ku górze dzięki siłom tarcia o ścianki naczynia i zsuwa się w dół, gdy kąt nachylenia powierzchni piasku przekroczy pewną wartość graniczną, odpowiadającą maksymalnemu współczynnikowi tarcia. Jeżeli jeszcze bardziej zwiększymy szybkość obrotów wiertarki, to powierzchnia piasku ulegnie załamaniu, ale opisany obieg będzie nadal zachowany (rys. 4a). Sugeruje to tworzenie się metastabilnego stanu pewnej ilości piasku w górnej części naczynia. Podobne efekty zaobserwujemy po wymianie pudełka z piaskiem na pudełko ze sztucznym miodem. Jeżeli do tarczy przymocujemy pudełko z mokrym piaskiem, to przy dostatecznie dużej szybkości obrotów będzie on rozrzucony prawie po całej objętości pudełka, tworząc wiry (rys. 4b).

że w początkowym etapie ruchu pudełka pozostawała ona prawie w spoczynku i jej powierzchnia była pozioma. Następnie niespodziewanie szybko została wprawiona w ruch, a jej powierzchnia ulegała zakrzywieniu. Zaobserwowany fakt można wyjaśnić opisanym wcześniej zjawiskiem reopeksji. Dokładniejsze badania wykazały, że pyłki mąki ziemniaczanej w zawieszynie wodnej, gdy nie jest ona poddana działaniom zewnętrznym, otoczone są bardzo cienką warstwą przylegających do nich cząsteczek wody. Tarcie między tak otoczonymi pyłkami jest małe i stąd niewielka lepkość. Kiedy jednak poddać zawiesinę silnemu, zewnętrznemu oddziaływaniu, np. szybko wprawić w ruch lub w nią uderzyć, wówczas warstewki te ulegają zniszczeniu, dochodzi do znacznego tarcia między bezpośrednio stykającymi się pyłkami mąki i lepkość zawiesiny wzrasta. Z kolei w pudełku zawierającym mokry piasek następuje stosunkowo silne oddziaływanie ze sobą jego ziarenek zwilżonych przez cząsteczki wody. Pojawiają się w wyniku tego siły przylegania między ziarnami i ściankami pudełka. Dzięki temu piasek w toczącym się pudełku łatwo jest wprawiany w ruch.

W przeprowadzonych dotychczas doświadczeniach nie mieliśmy możliwości precyzyjnej kontroli szybkości obrotów pudełka. Szybkość ta wzrastała wprost proporcjonalnie do czasu ruchu pudełka, ponieważ ruch ten był w przybliżeniu jednostajnie przyspieszony, a szybkość końcowa była stosunkowo niewielka. Możliwość zadawania ustalonej szybkości daje układ, przedstawiony na rysunku 3, w którym zastosowano wiertarkę elektryczną z regulacją szybkości obrotów.

Do zbudowania tego układu na początek wykonamy tarczę przeznaczoną do mocowania pudełek. W środku krążka ze sklejki lub plastiku wywiercimy przelotowy otwór, umożliwiając przelożenie śruby i poszerzymy go do połowy długości, tworząc zagłębienie, w którym schowa się łeb śruby, tak żeby nie wystawał ponad powierzchnię krążka. Przez krążek przekładamy śrubę i przykręcamy ją po przeciwnej stronie krążka nakrętką. Śrubę zaciskamy w uchwycie wiertarki, którą z kolei mocujemy w imadle, tak żeby jej wrzeciono mogło obracać się w pozycji poziomej. Regulator obrotów wiertarki ustawiamy na zero i przyłączamy wiertarkę do sieci elektrycznej. Do tarczy przykładamy wybrane pudełko, zawierające suchy piasek i mocujemy do niej za pomocą dwóch kawałków przezroczystej taśmy klejącej. Taśma powinna obejmować tarczę i pudełko w kierunku osiowym z przodu i tyłu. Takie rozwiązanie pozwoli nam na pewne zamocowanie pudełek i łatwą ich wymianę.

Z kolei po zamocowaniu i wprawieniu w szybki ruch obrotowy pudełka z cieczą reopeksyjną utworzy ona w przybliżeniu pierścień, przylegający do jego ścianek.



Rys. 4. Kształt powierzchni cieczy o dużej lepkości lub suchego materiału sypkiego umieszczonych w pudełku, obracającym się a) ze średnią szybkością; b) z dużą szybkością.

Wykorzystując układ z wiertarką o regulowanej szybkości obrotów i przygotowane wcześniej pudełka z różnymi substancjami, możemy przeprowadzić wiele interesujących obserwacji i samodzielnych badań zachowania się tych substancji w ruchu obrotowym. Dla przykładu, warto zbadać efektowne zachowanie się opiłków stalowych lub żelaznych podczas ich obrotu z różnymi szybkościami i przy zbliżaniu do pudełka magnesu. Bardziej skomplikowane badania tego rodzaju mają duże znaczenie dla optymalizacji konstrukcji wielu urządzeń przemysłowych, np. mieszalników czy homogenizatorów. Jednym z przykładów tych urządzeń jest powszechnie znana, pocziwa betoniarka.

Kolejna małpa rozszyfrowana

Ten, może niezbyt elegancki, tytuł nasunął mi artykuł w naukowym tygodniku *Nature* o rozszyfrowaniu genomu orangutana. Wraz z szympansem i gorylem tworzą grupę małp człekokształtnych, a ich genomy porównuje się z genomem człowieka. Na wyspach Borneo (50 tys. osobników) i Sumatra (7,5 tys.) żyją dwa różne gatunki orangutana (człowiek z lasu), które ewolucyjnie rozstały się 400 tys. lat temu. Jedynym naturalnym wrogiem orangutanów jest człowiek.

Genom orangutana jest identyczny z ludzkim w 97% (szympansa w 99%). Takie porównania pozwalają na ewolucyjne wnioski, a nawet na zaprojektowanie *in silico* pradawnego zestawu chromosomów dla hipotetycznego przodka ludzi i małp człekokształtnych. Rozdzieliliśmy się z orangutanem 16–12 milionów lat temu, z szympansem 6–4,5 mln lat. Zwróćmy uwagę na skalę czasu: nasz gatunek, *H. sapiens* istnieje od 200 tys. lat i w tej skali niepewność o 4 miliony wydaje się ... dość nieprecyzyjna.

Każde rozgałęzienie linii ewolucyjnej pozostawia oba gatunki na odrębnych, własnych drogach. Przez 16 milionów lat orangutan, szympansa i człowiek ewoluowały w różnym tempie (a raczej ewoluowały genomy ich przodków). Genom orangutana okazał się najbardziej stabilny, genom człowieka – po oddzieleniu się od linii szympansa – najbardziej zmienny. Ludzie i szympansy tracili lub zyskiwali nowe geny dwa razy częściej niż orangutany. Zadziwia fakt, że w niektórych fragmentach genom orangutana jest bliższy ludzkiemu. Widocznie od momentu rozejścia się linii ewolucyjnych człowieka i szympansa ten ostatni zgubił ze swojego genomu pewne odcinki wspólne z orangutanem, a człowiek je zachował.

Ważny wkład do rozważań ewolucyjnych wnosi także analiza genomów małp z Borneo i Sumatry – można spojrzeć z pozycji cząsteczek na proces powstawania gatunków. A obok tych wyników ciśnie się dodatkowa refleksja.

Jeszcze niedawno analizy pojedynczego genu mógł się podjąć jeden człowiek. Ale parę lat temu wymyślono nowe metody analityczne, które przyspieszyły gromadzenie danych wieleset razy. Z komputerów sterujących takimi maszynami spływa wieleset razy więcej danych w jednostce czasu. Powstały nowe systemy opracowań takich danych, aby stały się wynikami. Rozwinęto metody charakterystyki populacji, równoległej analizy danych, udostępniono wiedzę dotyczącą setek genomów już oznaczonych i zachowywanych w licznych bazach danych. Porównywanie genomów „ruszyło z kopyta”.

Zupełnie inne są w tej chwili wymagania stawiane ważnej pracy z genomiki, ponieważ jej wartość mierzy się nie liczbą oznaczonych sekwencji, lecz wnioskami, które z tych sekwencji płyną. Jednocześnie, aby praca była wiarygodna, trzeba odsłonić całą „kuchnię” uzyskiwania wyników. To dlatego publikacja w *Nature* liczy sobie kilka stron, ale „Suplement” dostępny w Internecie ... stron 90! Genom orangutana badano w 30 instytucjach, brało w tym udział ponad 100 osób, wiadomo też, kto jaką część pracy wykonał i za nią odpowiada.

Tak skończyła się biologia molekularna mojej młodości. W tej skali zespołowych badań pojedynczy człowiek może się czuć jedynie śrubką skomplikowanej konstrukcji. Znika indywidualna twarz twórcy i tylko tak można utrzymać tempo w światowym wyścigu.

Za prace w dziedzinie genetyki człekokształtnych Nagrodę Nobla może dostać tylko ten, kto obejmie intelektualnie i po nowemu skomentuje swoje i cudze wyniki. Moim kandydatem jest Svante Pääbo, badacz kopalnego DNA i genomu Neandertalczyka. Pääbo ucieszył się z komunikatu o orangutanie.

Centrum Studiów Zaawansowanych
Politechniki Warszawskiej
i Stowarzyszenie na rzecz Edukacji
Matematycznej zapraszają licealistów,
nauczycieli i wszystkich innych
zainteresowanych na

Wykłady popularne z matematyki

Michał Wojciechowski *Co widać
w bazgrołach?*
Michał Budzyński *Parkietaż Penrose'a*
Barbara Roszkowska-Lech *Kolorowa
kryptografia*

czwartek, 7.IV.2011, godz. 16:30–19:30,
sala 134, Gmach Główny Politechniki
Warszawskiej, pl. Politechniki 1,
wstęp wolny

<http://www.csz.pw.edu.pl>
<http://www.sem.edu.pl>



Informatyczny kącik olimpijski (40): Zapotrzebowanie na prąd

W tym kąciku spróbujemy rozwiązać zadanie *Electric needs* pochodzące z drużynowych zawodów studenckich z serii ACM ICPC, a konkretnie z mistrzostw Ameryki Łacińskiej 2010.

Rozważmy prostokątny obszar podzielony na kwadraty jednostkowe, w którym kolumny ponumerowane są od 1 do M , a wiersze od 1 do N . Każdy kwadrat jednostkowy reprezentuje działkę, która może być zajęta przez budynek lub nie. Na dokładnie P działkach, których współrzędne mamy podane, znajdują się budynki elektrowni. Wszystkie pozostałe pola są uszeregowane wedle swej wartości dla przedsiębiorców. Pola położone bliżej elektrowni są bardziej wartościowe od wszystkich odleglejszych (bierzemy pod uwagę odległość od najbliższego pola zajętego przez elektrownię w metryce maksimum, tzn. $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$). W przypadku jednakowej odległości od elektrowni za bardziej wartościowe uznajemy pola z wierszy o mniejszych numerach, a gdy także to kryterium nie jest rozstrzygające – z kolumn o mniejszych numerach. Naszym zadaniem jest odpowiedzieć na Q zapytań postaci: „podaj współrzędne pola, które jest K -te z kolei na liście najbardziej wartościowych”.

Naturalnym podejściem jest wyznaczenie odległości każdego pola od elektrowni. Można to zrobić, budując graf nieskierowany, którego wierzchołkami są nasze pola, a krawędzie łączą pola sąsiadujące bokiem lub rogami. W takim grafie wystarczy wykonać jedno przeszukiwanie wszerz (BFS), startując ze wszystkich pól elektrowni naraz. Zachęcamy Czytelnika, aby zastanowił się, dlaczego odległość w takim grafie jest równoważna odległości w metryce maksimum. Obliczywszy wszystkie odległości, sortujemy pola według kryteriów podanych w zadaniu, a na każde zapytanie odpowiadamy, po prostu podając współrzędne K -tego pola z posortowanej listy. Daje to łącznie $O(NM \log(NM) + Q)$ operacji albo nawet $O(NM + Q)$ operacji, jeśli sortowanie wykonamy metodą kubełkową. Prawdopodobnie byłby to najlepszy sposób postępowania, gdyby nie fakt, że w tym zadaniu górne ograniczenia na N i M są dużo większe niż na P i Q . Innymi słowy, szukamy rozwiązania, którego złożoność będzie zależała bardziej od P i Q niż N czy M .

W takim razie zastanówmy się najpierw, w jakiej odległości od najbliższej elektrowni położone jest szukane, K -te pole. Nie widać sposobu na obliczenie tego wprost, spróbujemy wyszukać wynik binarnie. W tym celu potrzebujemy metody sprawdzania, ile jest pól, których odległość od elektrowni wynosi co najwyżej D – za jej pomocą wyszukamy najmniejszą wartość D , taką że tych pól jest co najmniej K . Zauważmy, że pola, których odległość od ustalonego pola elektrowni wynosi co najwyżej D , tworzą kwadrat o boku $2D + 1$ (kwadrat może być ucięty, jeśli wystaje poza planszę) i środkiem w elektrowni. Stąd musimy obliczyć, ile pól łącznie zajmuje P takich kwadratów (względnie prostokątów).

Tym problemem zajmiemy się za chwilę, póki co spojrzmy, jak ma się to do rozwiązania całego zadania. Jeśli znamy już odległość D , obliczamy najpierw, ile jest pól w odległości co najwyżej $D - 1$ od elektrowni, odejmujemy tę liczbę od K i rozwiązujemy powstały problem: które z pól odległych od najbliższej elektrowni o dokładnie D jest na pozycji K' -tej na liście tychże pól w zadanej kolejności. Zaczniemy od ustalenia, w którym wierszu jest nasz K' -ty element. Znowu nie widać sposobu na obliczenie tego wprost, więc decydujemy się na wyszukiwanie binarnie. Potrzebujemy odpowiedzi na pytanie: „ile jest pól odległych od najbliższej elektrowni o dokładnie D , które znajdują się w pierwszych W wierszach?”. Naturalnie, będziemy szukali najmniejszego takiego W , że odpowiedź na to pytanie jest nie mniejsza niż K' . Problem jest podobny do poprzedniego. Tym razem jednak odległość dokładnie D od najbliższej elektrowni oznacza pola zawarte w kwadracie o boku $2D + 1$, ale niezawarte w kwadracie o boku $2D - 1$. Kwadraty te trzeba obcinać odpowiednio do prostokątów, jeśli wystają poza planszę (która ma teraz wymiary $W \times M$). Ponieważ wszystkie mniejsze kwadraty zawierają się w większych, więc należy po prostu obliczyć łączne pole sumy większych i odjąć od niego pole sumy mniejszych. Tak więc ponownie sprowadziliśmy problem do obliczenia pola sumy prostokątów. Na koniec pozostaje ustalić, które dokładnie z pól w danym wierszu należy wybrać. W tym celu od K' odejmujemy liczbę pól w odległości dokładnie D od elektrowni, które znajdują się w wierszach o numerach od 1 do $W - 1$, otrzymując w ten sposób nowy parametr K'' . Następnie w identyczny sposób wyszukujemy binarnie minimalne takie C , żeby w pierwszych C kolumnach wiersza o numerze W było co najmniej K'' pól o odległości od elektrowni równej D . Dla danego C wystarczy obciąć kwadraty o bokach $2D + 1$ i $2D - 1$ do żądanej części wiersza o numerze W , a potem obliczyć pole sumy powstałych prostokątów o jednym boku długości 1.

Sprowadziliśmy zatem cały problem do obliczenia pola sumy P prostokątów $O(Q(\log N + \log M))$ razy. Można ten problem rozwiązać dość prosto w czasie $O(P^3)$ lub $O(P^2)$, co było wystarczające w tym zadaniu (opracowanie takich rozwiązań pozostawiamy Czytelnikowi). Istnieje też efektywniejsze rozwiązanie, w złożoności czasowej $O(P \log P)$, wykorzystujące technikę zmiatania oraz drzewo przedziałowe, w którym w każdym węźle pamiętamy dodatkowo długość sumy przedziałów w jego poddrzewie. Szczegóły tego rozwiązania pomijamy, można o nim posłuchać na stronie <http://was.zaa.mimuw.edu.pl/?q=node/37>, przeczytać w książce Preparaty i Shamosa *Geometria obliczeniowa*. *Wprowadzenie* albo, najlepiej, wymyślić je samemu.

Rozwiązanie całego zadania wymaga zatem $O(Q(\log N + \log M)P \log P)$ operacji.

Tomasz KULCZYŃSKI

Rozmnażanie w pełni

Pełnia księżycy pełni zauważalną rolę w naszej kulturze. Na fazach księżycy oparte są najstarsze materialnie udokumentowane sposoby zliczania dni, a siódemka jest w większości cywilizacji jakoś wyróżniona. Liczba dni tygodnia jest najlepszym, ale nie jedynym przykładem. Typowa długość cyklu menstruacyjnego była, prawdopodobnie, jednym z głównych źródeł rozwoju medycznego aspektu astrologii. Choć współczesna nauka uważa to (w najlepszym razie) za ślepą uliczkę, to astrologia, obok rachuby czasu, stanowiła podstawę wniosków o dofinansowanie badań podstawowych tysiąclecie przed zaistnieniem Unii Europejskiej. (To, że, moim zdaniem, niewiele w kwestii argumentowania dofinansowania badań podstawowych się zmieniło, jest osobnym tematem, od rozwijania którego się jednak powstrzymam.)

Pełnia księżycy została zawłaszczona przez twórców „strasznych opowieści”, podobnie jak północ, która w naturalny sposób jest wyznaczona właśnie w czasie pełni.

Powyższe aspekty są jednak obciążone kulturą. Czy pełnia księżycy ma jakieś znaczenie dla bezkulturowego świata ożywionego? Wilkołaki, oprócz tego, że występują w przyrodzie podobnie często jak smoki, są niekulturalne w zbyt małym stopniu. Wystarczająco bezrozumne są natomiast koralowce.

Są one, w większości, rozdzielnopłciowe i rozmnażają się, przynajmniej niektóre, po prostu uwalniając żeńskie i męskie komórki płciowe do wody. Szansa na zapłodnienie jest większa, jeżeli czynności te są zsynchronizowane. I tak jest w istocie. Niektóre koralowce robią to z dokładnością do dwudziestu minut tylko kilka razy w roku.

Np. dla koralowców elkhorn *Acropora palmata*, występujących masowo w Morzu Karaibskim, dzieje się tak o zmierzchu w trzy i cztery dni po pełni księżycy [1]. Podobnie zadziwiająco zachowuje się większość rozmnażających się płciowo koralowców.

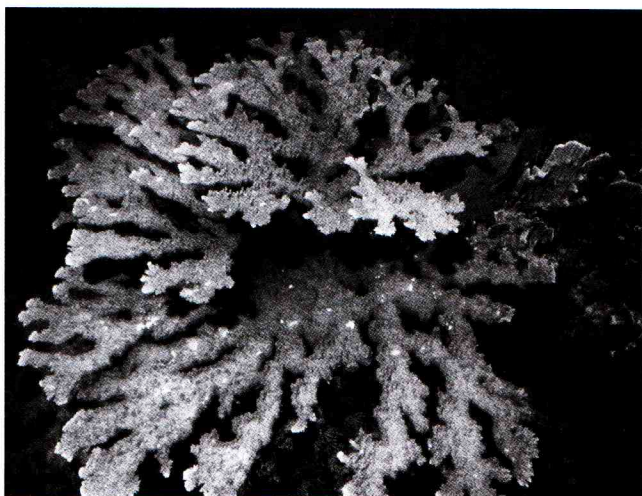
Po czym poznają one odpowiednią fazę księżycy, pozostaje tajemnicą. Uściślono jednak [1] interesującą hipotezę [2]. Dominującym odcieniem światła o zmierzchu jest niebieski, natomiast światło wschodzącego księżycy jest czerwone. W strefie równikowej, po pełni księżycy, jego wschód następuje po zachodzie słońca. Pojawia się wtedy okres dominacji światła niebieskiego, kończący się wraz ze wschodem księżycy. Do jego wykrycia wystarczyłyby dwa fotoczule barwniki z grupy opsyn np. dostrojone do wykrywania światła niebieskiego i zielonego, a tego typu białka wykryto u koralowców i sprawdzono ich reakcję na światło już cztery lata temu [2]. W takim razie rozmnażanie byłoby wyzwalane przez odpowiednio długą przerwę między zachodem słońca a wschodem księżycy. Pod warunkiem, że różnica ta jest wykrywalna pod wodą. To, że tak jest, udało się właśnie sprawdzić [1].

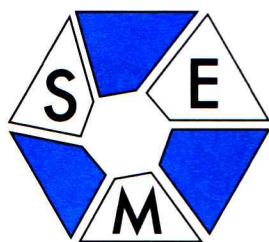
Hipoteza wydaje się interesująca i, jak to mówią ostatnio w zupełnie innej dziedzinie, rozwojowa. Wprost narzucają się badania, które należałoby wykonać, żeby to przypuszczenie sprawdzić.

Piotr ZALEWSKI

[1] A.M. Sweeney, C.A. Boch, S. Johnsen, D.E. Morse, *Twilight spectral dynamics and the coral reef invertebrate spawning response*, *J. Exp. Biol.* **214**(2011)770

[2] O. Levy, L. Appelbaum, W. Leggat, Y. Gothliff, D.C. Hayward, D.J. Miller, O. Hoegh-Guldberg *Light-Responsive Cryptochromes from a Simple Multicellular Animal, the Coral *Acropora millepora**, *Science* **318**(2007)467





Czworoscian i kule

W dniu 8 stycznia 2011 roku odbyły się zawody II stopnia VI Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, w których uczestniczyło 669 uczniów. Spośród nich 187 zostało zakwalifikowanych do zawodów stopnia III.

W czasie zawodów II stopnia uczniowie rozwiązywali pięć zadań, a my chcielibyśmy przedstawić rozwiązania jednego z nich.

Zadanie 5 miało treść następującą:

Dany jest czworoscian foremny opisany na sferze o promieniu 1. Udowodnij, że w tym czworoscianie można umieścić 6 kul o promieniu $\frac{1}{2}$ w taki sposób, aby każde dwie kule miały co najwyżej jeden punkt wspólny.

Kluczem do rozwiązania tego zadania okazała się pewna własność czworoscianu foremnego:

Wszystkie wysokości czworoscianu foremnego przecinają się w jednym punkcie, a punkt ten dzieli każdą z wysokości w stosunku 3 : 1, licząc od wierzchołka. Punkt ten jest jednocześnie środkiem kuli wpisanej i opisanej na czworoscianie foremnym.

Dowód własności pozostawiamy Czytelnikom.

Rozwiązanie 1

Ponieważ w czworoscian $ABCD$ można wpisać kulę S o środku O i promieniu 1, wysokość tego czworoscianu wynosi 4 (na podstawie przytoczonej własności). Przekształcimy czworoscian foremny $ABCD$ przez jednokładność względem punktu A o skali $\frac{1}{2}$. W efekcie otrzymamy czworoscian $AB'C'D'$ (rysunek 1). Korzystając z własności jednokładności, wnioskujemy, że płaszczyzna $B'C'D'$ przecina wysokość AH w punkcie G w taki sposób, że $AH = \frac{1}{2}AG$, a kula S jest również styczna do płaszczyzny $B'C'D'$. Zatem kula S_1 wpisana w czworoscian $AB'C'D'$ ma promień $\frac{1}{2}$ i ma tylko jeden punkt wspólny z kulą S .

Analogicznie pokazujemy, że istnieją cztery kule o promieniu $\frac{1}{2}$ umieszczone w każdym „rogu” czworoscianu $ABCD$. Każda z tych kul ma tylko jeden punkt wspólny z kulą S . Ponieważ kula S ma promień 1, więc można umieścić w niej dwie kule o promieniu $\frac{1}{2}$, które mają tylko jeden punkt wspólny.

Zatem otrzymaliśmy sześć kul, które spełniają warunki zadania.

Rozwiązanie 2

Niech $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ będą odpowiednio środkami krawędzi AB, BC, CD, DA, CA, BD . Przekształcimy kulę S i czworoscian $ABCD$ przez

- jednokładność o środku A_1 i skali $\frac{1}{2}$,
- jednokładność o środku C_1 i skali $\frac{1}{2}$.

Efektom tych przekształceń będą dwa czworosciany (rysunek 2), które mają tylko jeden punkt wspólny – jest to

środek kuli S . Zatem kule wpisane w te czworosciany nie mają punktów wspólnych.

Przekształcimy teraz kulę S przez

- jednokładność o środku A_1 i skali $\frac{1}{2}$,
- jednokładność o środku E_1 i skali $\frac{1}{2}$.

Obrazami środka kuli S będą środki kul o promieniach $\frac{1}{2}$ znajdujące się w połowie odcinków OA_1 i OE_1 . Wykażemy teraz, że kule te nie mają punktów wspólnych.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyliczamy, że czworoscian foremny o wysokości 4 ma krawędź długości $2\sqrt{6}$. Zatem odległość punktów A_1 i E_1 wynosi $\sqrt{6}$. Środki boków OA_1 i OE_1 w trójkącie OA_1E_1 pozostają w odległości $\frac{\sqrt{6}}{2}$, która jest większa od 1.

Zatem we wnętrzu czworoscianu $ABCD$ można umieścić sześć kul: każda z nich jest obrazem kuli wpisanej w czworoscian $ABCD$ w jednokładności o skali $\frac{1}{2}$ i środku będącym środkiem krawędzi czworoscianu.

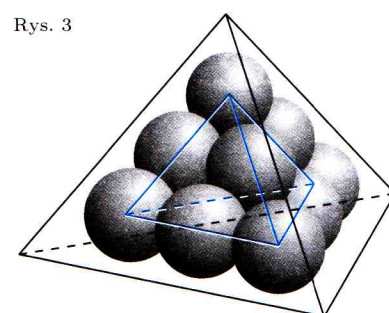
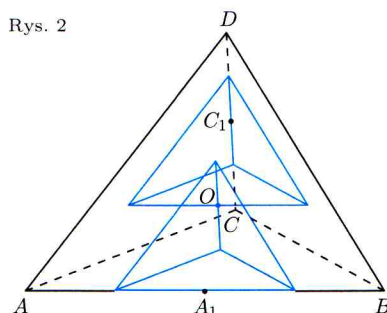
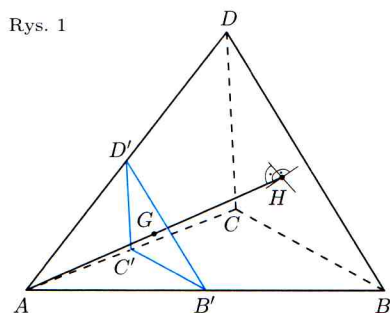
Nasuwa się pytanie, czy we wnętrzu podanego czworoscianu $ABCD$ dałoby się zmieścić więcej kul.

Okazuje się, że 4 kule umieszczone w narożach czworoscianu jak w rozwiązaniu 1 oraz 6 kul z rozwiązania 2 nie mają punktów wspólnych. Łatwo zauważyć, że środki dwóch sąsiednich kul są środkami boków AO i A_1O w trójkącie AOA_1 , a ich odległość jest równa $\frac{\sqrt{6}}{2}$, czyli jest większa od 1.

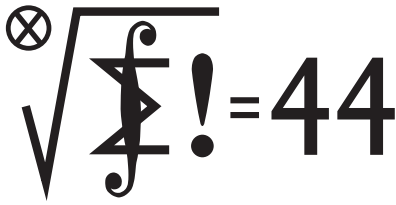
Zadanie z rozmieszczeniem 10 kul można również rozwiązać przez obliczenie wysokości czworoscianu „opisanego” na piramidzie złożonej z 10 kul (rysunek 3). Wystarczy zauważyć, że czworoscian „opisany” na piramidzie jest obrazem czworoscianu o krawędzi 2, którego wierzchołkami są środki czterech narożnych kul, w jednokładności o środku w punkcie przecięcia wysokości każdego z czworoscianów. Wysokość takiego czworoscianu wynosi $\frac{2\sqrt{6}+6}{3}$ i jest mniejsza od 4, czyli czworoscian ten mieści się w czworoscianie opisanym w treści zadania.

Zadanie z rozmieszczeniem 6 kul rozwiązało niewielu uczestników II etapu OMG. Można podejrzewać, że z rozwiązaniem zadania w wersji trudniejszej – o 10 kulach – poradziłoby sobie więcej osób, bo ustawienie tych kul w piramidę jest pomysłem naturalnym.

Jacek DYMEL, Michał NIEDŹWIEDŹ



Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2011

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>

Zadania z matematyki nr 619, 620

Redaguje Marcin E. KUCZMA

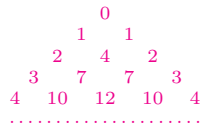
619. Szachownica o rozmiarach $n \times n$ została pokryta płytkami 2×2 . Każda płytka pokrywa dokładnie cztery pola. Płytki zachodzą na siebie, ale nie wystają poza brzeg szachownicy. Liczba płytek przekracza $2(n^2 - n)/3$. Dowieść, że można usunąć jedną płytkę tak, by pozostałe płytki nadal pokrywały całą szachownicę.

620. Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba całkowita n , że liczba $P(n)$ ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

Zadanie 620 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2010

Przypominamy treść zadań:



611. Diagram przedstawia początkowe wiersze nieskończonej tabeli trójkątnej. Skrajnymi elementami kolejnych wierszy są kolejne liczby naturalne. Ponadto obowiązuje reguła: jeśli liczby b , c są sąsiednimi elementami dowolnego wiersza, nad nimi znajduje się liczba a , zaś pod

611. Przekreścimy diagram o 45° tak, by otrzymać tabelę – nieskończoną macierz $A = [a_{m,n}]_{m,n \geq 0}$; jest to lewa z dwóch tabel poniżej:

$$\begin{array}{cccc}
 A: & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\
 & 1 & 4 & 7 & 10 & \dots \\
 & 2 & 7 & 12 & 17 & \dots \\
 & 3 & 10 & 17 & 24 & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccc}
 B: & 1 & 3 & 5 & 7 & \dots \\
 & 3 & 9 & 15 & 21 & \dots \\
 & 5 & 15 & 25 & 35 & \dots \\
 & 7 & 21 & 35 & 49 & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Zgodnie z treścią zadania, jej wyrazy są związane zależnościami: $a_{n,0} = a_{0,n} = n$,

$$a_{m,n} + a_{m+1,n+1} = a_{m+1,n} + a_{m,n+1} + 2.$$

Patrząc na tabelkę, odgadujemy wzór jawny $a_{m,n} = 2mn + m + n$. Sprawdzamy, że te liczby spełniają napisane przed chwilą równania (które wyznaczają zawartość całej tabeli jednoznacznie).

Tworzymy nową macierz nieskończoną $B = [b_{m,n}]_{m,n \geq 0}$ o wyrazach $b_{m,n} = 2a_{m,n} + 1$ (prawy diagram powyżej). Zachodzą równości $b_{n,0} = b_{0,n} = 2n + 1$,

$$b_{m,n} = 2(2mn + m + n) + 1 = (2m + 1)(2n + 1).$$

Tak więc B jest po prostu tabliczką mnożenia liczb nieparzystych. Każda liczba nieparzysta występuje w niej tyle razy, ile ma różnych dzielników dodatnich.

nimi liczba d , to $a + d = b + c + 2$. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $k \geq 2$ istnieje nieskończenie wiele liczb, z których każda występuje w tej tabeli dokładnie k razy.

612. Funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest dana wzorem

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 ax$$

(dla pewnej stałej rzeczywistej a). Dowieść, że jeżeli f jest funkcją okresową, to a jest liczbą wymierną.

Niech teraz $k \geq 2$ będzie zadaną liczbą całkowitą. Bierzymy dowolną liczbę pierwszą $p > 2$; wówczas liczba p^{k-1} wystąpi w tabeli B dokładnie k razy. Wracając do tabeli A , widzimy, że dokładnie k razy pojawi się w niej liczba $(p^{k-1} - 1)/2$. Jest nieskończenie wiele liczb pierwszych – mamy więc tezę zadania.

612. Niech T będzie okresem funkcji f . Z równości $f(T) = f(0)$, czyli

$$\cos^2 aT = 1 - \sin^2 T = \cos^2 T$$

(czyli jeszcze prościej: $\cos 2aT = \cos 2T$) wnosimy, że

$$2aT = \pm 2T + 2k\pi \quad (k - \text{liczba całkowita}).$$

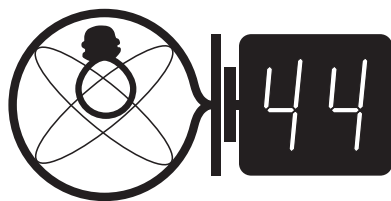
Pochodna $f'(x) = \sin 2x - a \sin 2ax$ też jest funkcją T -okresową: $f'(T) = f'(0)$, czyli

$$\sin 2T = a \sin 2aT = a \sin(\pm 2T + 2k\pi) = \pm a \sin 2T.$$

Zatem albo $a = \pm 1$ (liczba wymierna), albo $\sin 2T = 0$, skąd $2T = l\pi$ ($l \neq 0$),

$$a = \frac{\pm 2T + 2k\pi}{2T} = \pm 1 + \frac{2k}{l} \quad (\text{liczba wymierna}).$$

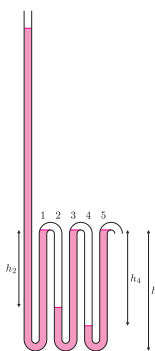
Redaguje Jerzy B. BROJAN



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2011



Rys. 1



Rys. 2

516. Sprężyste zginający się jednorodny pręt o długości l i masie m zamocowano jednym końcem poziomo, a drugi zwisa pod wpływem siły ciężkości (rys. 1). Miarą sztywności pręta jest dany parametr k , będący stosunkiem momentu siły zginającej M do kąta α między stycznymi do końców pręta, gdy M ma wzdłuż niego stałą wartość. Obliczyć numerycznie zwis pręta h oraz kąt opadania jego końca α , przy następujących danych: $l = 1$ m, $m = 1$ kg, $k = 1$ N-m/rad, przyspieszenie ziemskie $g = 10$ m/s².

Wskazówka: Obliczenia mogą być oparte na przedstawieniu pręta jako zespołu dużej liczby n sztywnych prętów o masach $m_1 = m/n$ i długościach $l_1 = l/n$, połączonych przegubami opisanymi przez współczynnik $k_1 = k \cdot n$.

517. Równoległa wiązka światła o natężeniu (tzn. mocy na jednostkę powierzchni prostopadłej) I_0 pada na kulkę o promieniu r ze szkła o współczynniku załamania n . W odległości $R \gg r$ od kulki znajduje się ekran prostopadły do wiązki padającej, ale oświetlony tylko przez światło przechodzące przez kulkę. Jeśli można pominąć efekty dyfrakcyjne i odbicie światła od szkła, to jakie jest natężenie światła padającego na środek ekranu?

Rozwiązania zadań z numeru 12/2010

Przypominamy treść zadań:

508. Rurka składa się z pięciu pionowych segmentów wysokości $h = 1$ m i jednego segmentu dłuższego (rys. 2). Jeśli początkowo rurka nie zawierała wody, to do jakiej wysokości należy jej nalać do dłuższego segmentu, żeby zaczęła wyciekać drugim końcem? Średnica rurki jest znacznie mniejsza od h , ale na tyle duża, że przepływ wody i przepływ powietrza mogą w niej zachodzić niezależnie. Temperatura powietrza w rurce się nie zmienia, a ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_0 = 10^5$ Pa.

509. W zjawisku Comptona obserwuje się promieniowanie rentgenowskie rozproszone na swobodnych elektronach, przy czym zwykle zakłada się, że początkowo elektrony były nieruchome. Przyjmijmy, że rozproszenie następuje na elektronach w atomach wodoru, będących początkowo w stanie podstawowym. Ile wynosi poszerzenie zakresu długości fali promieniowania rozproszonego wstecz ($\theta = 180^\circ$), wynikające z ruchu elektronów? Wystarczy wynik przybliżony oparty na modelu Bohra, dla długości fali promieniowania padającego równej $\lambda_0 = 0,1$ nm.

508. Po przelaniu przez górne kolanko 1-2 woda zamyka dolne kolanko 2-3 i odcina w segmencie 2 rurki słup powietrza o początkowej długości h (pomiary objętość samego kolanka); później sytuacja się powtarza w segmencie 4. Wzrost poziomu wody w segmentach 3 i 5 powoduje sprężenie tych słupów powietrza – oznaczmy długości słupów po sprężeniu jako h_2 i h_4 . Zatem ciśnienie powietrza w segmencie 4 wynosi $p_0 + \rho gh_4$ (gdzie p_0 - ciśnienie atmosferyczne), a w segmencie 2 – $p_0 + \rho gh_4 + \rho gh_2$. Zgodnie z równaniem przemiany izotermicznej

$$p_0 h = (p_0 + \rho gh_4) h_4 = (p_0 + \rho gh_4 + \rho gh_2) h_2$$

Obliczamy

$$h_4 = \frac{-p_0 + \sqrt{p_0^2 + 4p_0 h \rho g}}{2\rho g} = 91,8 \text{ cm,}$$

podobnie $h_2 = 85,2$ cm.

Wysokość słupa w lewym segmencie powinna być równa co najmniej $h + h_2 + h_4 = 277$ cm (177 cm powyżej górnych kolanek).

Praktycznym przykładem opisanego tu problemu może być lanie wody węzłem częściowo zwiniętym na bębnie. Na poziomie jakościowym było to tematem jednego z zadań Olimpiady Fizycznej w 1982/83 r.

509. Energia kwantu promieniowania o długości fali 0,1 nm wynosi 12 keV, czyli około 1000 razy więcej od energii wiązania elektronu. W bilansie energii pominiemy więc energię wiązania, gdyż nie zależy ona od ruchu elektronów i może powodować niewielką zmianę długości fali λ_1 rozproszonego promieniowania, ale nie rozmycie widma. Zasada zachowania

energii wyraża się więc „zwykłym” równaniem

$$\frac{hc}{\lambda_0} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda_1} + \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2},$$

gdzie p jest pędem elektronu wyrzuconego z atomu. Zasadę zachowania pędu zapiszemy natomiast w postaci jednowymiarowej

$$\frac{h}{\lambda_0} + \Delta p = -\frac{h}{\lambda_1} + p,$$

gdzie Δp jest początkowym pędem elektronu, a minus po prawej wynika z danej wartości kąta rozproszenia kwantów (180°). Jeśli elektron krążył po pierwszej orbicie Bohra, to zależnie od zwrotu jego ruchu mamy $\Delta p = \pm \frac{me^2}{2\epsilon_0 h}$, co – jak łatwo sprawdzić – jest wielkością około trzykrotnie mniejszą od pędu fotonu. Do celów przybliżonej oceny możemy więc, podnosząc równanie stronami do kwadratu, pozostawić tylko wyraz liniowy w Δp i po wyeliminowaniu p otrzymujemy

$$mc(\lambda_1 - \lambda_0) = 2h + \Delta p(\lambda_1 + \lambda_0).$$

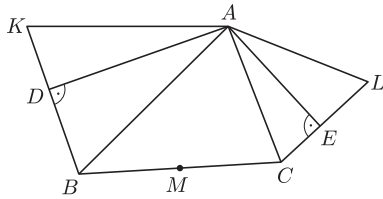
Wyznaczając stąd λ_1 , warto pamiętać, że Δp jest wielokrotnie (137-krotnie) mniejsze od mc , a comptonowska długość fali elektronu $\lambda_c = h/mc$ jest równa $2,4 \cdot 10^{-12}$ m, czyli znacznie mniej od λ_0 . W wyniku przekształceń znajdujemy

$$\lambda_1 \approx \lambda_0 + 2\lambda_c + 2\lambda_0 \frac{\Delta p}{mc}.$$

Ostatni człon po prawej stronie jest szukanym rozmyciem widma promieniowania rozproszonego. Jego liczbowa wartość wynosi $\pm 1,5 \cdot 10^{-12}$ m. W porównaniu z samym zwiększeniem długości fali równym $2\lambda_c = 4,8 \cdot 10^{-12}$ m jest to wielkość mniejsza, ale nie pomijalnie mała.



Rozwiązanie zadania M 1309.
Niech K i L oznaczają punkty symetryczne do B i C względem punktów D i E odpowiednio.



Wówczas z twierdzenia Talesa $CK = 2DM$ i $BL = 2EM$. Zauważmy, że trójkąty ABK i ACL są równoramienne: $AB = AK$ i $AC = AL$. Ponadto, ponieważ $\angle BAD = \angle CAE$, więc $\angle BAL = \angle KAC$. Wobec tego trójkąty BAL i KAC są przystające. To oznacza, że $BL = CK$, co wraz z pierwszą obserwacją kończy dowód.

Patrz w niebo: Czyżby pierwsza planeta?

Planeta obiegająca dowolną gwiazdę może przejawiać swoją obecność na kilka sposobów. Jej działanie grawitacyjne powinno powodować okresowe zmiany położenia gwiazdy. Jeżeli gwiazda już się porusza, to obserwator zobaczy, że jej tor jest wężykiem. Ruch gwiazdy wzdłuż promienia widzenia przejawia się jako zmiany jej prędkości radialnej. Jeżeli Ziemia leży w płaszczyźnie orbity planety, to ma ona czasami możliwość przejścia przed tarczą swojej gwiazdy, powodując jej przyćmienie. Ma też szansę przejść przed inną, bardziej odległą gwiazdą, powodując wtedy jej pojaśnienie wskutek zjawiska mikrosoczewkowania grawitacyjnego. Wszystkie te zjawiska obserwuje się, dzięki czemu obecność we Wszechświecie planet pozasłonecznych nie ulega wątpliwości i kolejne odkrycia nie są niczym nadzwyczajnym. Prawdopodobnie jednak każdy badacz marzy o tym, żeby skierowawszy gdzieś teleskop, mógł powiedzieć coś w rodzaju „punkcik w środku pola widzenia jest planetą”.

Pojawiło się podejrzenie, że to marzenie się spełniło. W roku 2004 za pomocą 8,2-metrowego teleskopu w Chile wykonano w podczerwieni zdjęcie pewnej gwiazdy, leżącej w asocjacji w Hydrze. Gwiazda występuje pod skróconym symbolem 2M 1207, a koło niej, w odległości $0,78''$ znajduje się obiekt znacznie słabszy i znacznie chłodniejszy. Interpretacja tego obrazu, jak można przewidzieć, jest trudna i niepewna, a zagadka w skrócie przedstawia się następująco. Znajomość odległości (bo znana jest odległość asocjacji) pozwala oszacować jasności absolutne obiektów, a z porównania z modelami gwiazd wynika, że słabszy obiekt ma masę poniżej masy pozwalającej na palenie wodoru – a więc powinien być planetą. Jednak ich duża wzajemna odległość sugeruje, że ten słaby obiekt nie byłby wtedy w stanie aż tak świecić światłem odbitym – a więc powinien być gwiazdą. Trzeba przyznać, że nie upłynęło jeszcze dość czasu, by dało się zaobserwować względną orbitę ciał, co dopiero dałoby niepodważalną ocenę ich mas, przez co oszacowania wszelkich parametrów stałyby się pewniejsze. Może więc nie należy się przedwcześnie ani cieszyć, ani martwić, a tylko spokojnie poczekać na dalsze obserwacje.

Tomasz KWAST

Kwiecień

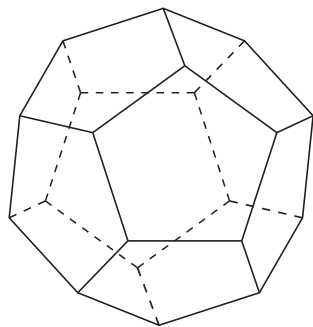
Wysoko, trochę ku zachodowi, widzimy w kwietniowe wieczory niepozorny gwiazdozbiór Raka. W przybliżeniu 2000 lat temu Słońce przechodziło przez ten gwiazdozbiór w okolicy przesilenia letniego, czyli w czerwcu. Teraz przechodzi przezeń w sierpniu, a po dawnych czasach została nazwa punktu Raka i zwrotnika Raka, gdzie Słońce znajduje się, jak za dawnych czasów, około 21 czerwca. Przez lornetkę można dostrzec w Raku dwie gromady otwarte gwiazd, symbolicznie „diametralnie” różne, mianowicie jedna należy do najmłodszych, druga do najstarszych, co ocenia się po fazie ewolucji ich gwiazd. Pierwsza, młoda M44 (Żłóbek lub Praesepe), ma w przybliżeniu pół miliarda lat. Liczy ponad 300 gwiazd, jej jasność to 3,9 mag, odległość 160 pc. Druga, M67, ma około pięciu miliardów lat. Zawiera 100 gwiazd, jej jasność to 4 mag, a odległość 800 pc. Obie więc widać przy czystym niebie gołym okiem, a na niebie dzieli je odległość poniżej 10 stopni.

Merkury, Wenus, Mars i Jowisz są zbyt blisko Słońca, przez co praktycznie niewidoczne. Z nich czterech jedynie Wenus można próbować dostrzec przed wschodem Słońca. Przez całą noc widać tylko Saturna, który jest w Pannie; w dodatku 4 IV znajdzie się w opozycji (tj. w miejscu nieba przeciwnym Słońcu). Nów Księżyca wypada 3 IV, pełnia 18 IV. Żadnych zaćmień ani zakryć jasných obiektów w kwietniu nie będzie. Z przewidywalnych rojów meteorów można około 21 IV oczekiwać słabego roju Lirydów.

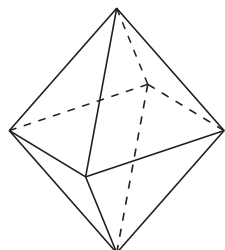
T. K.



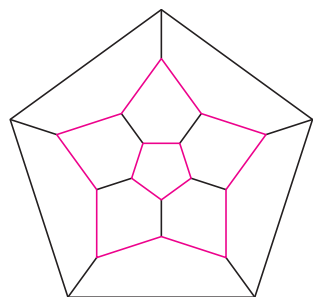
Rozwiązanie zadania M 1311.
Rozważmy trójkąt równoboczny ABC o środku O . Każdemu słowu przyporządkujemy przekształcenie tego trójkąta w ten sposób, że literze a odpowiada symetria względem osi OA , a literze B obrót wokół punktu O o 120° zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Na przykład słowo $baabb$ oznacza „obróć, potem symetria, znów symetria i jeszcze dwa obroty”. Zauważmy, że podane operacje nie zmieniają przypisanego przekształcenia. Istotnie, możemy dodać lub odjąć dwie kolejne symetrie względem tej samej osi, trzy obroty o 120° wokół tego samego punktu, a oba słowa ab i bba oznaczają symetrię względem osi OB . W takim razie nie istnieje żądany ciąg operacji, gdyż a oznacza symetrię względem osi OA , a ba symetrię względem osi OC .



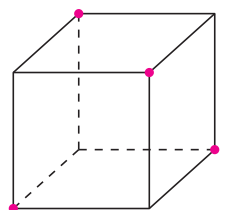
Rys. 1. Dwunastościan foremny: 12 ścian, 30 krawędzi i 20 wierzchołków.



Rys. 2. Ośmiościan foremny: 8 ścian, 12 krawędzi i 6 wierzchołków.



Rys. 3. Dwunastościan widziany przez przednią ścianę.



Rys. 4

Na pierwszym etapie tegorocznej Olimpiady Matematycznej pojawiło się poniższe zadanie 1 o numerowaniu krawędzi dwunastościanu. Spośród licznych zadań o podobnej tematyce prezentujemy kilka o dość różnorodnych rozwiązaniach.

1. Krawędzie dwunastościanu foremnego (rys. 1) chcemy ponumerować liczbami $1, 2, \dots, 30$, używając każdej z nich dokładnie raz. Rozstrzygnij, czy można to uczynić, tak aby suma numerów krawędzi wychodzących z dowolnego wierzchołka była:

- (a) parzysta; (b) podzielna przez 4.

2. W wierzchołkach sześcianu napisano siedem zer i jedną jedynkę. Do każdej z liczb na końcach dowolnej krawędzi można dodać 1. Czy wykonując szereg takich operacji, można sprawić, by wszystkie liczby w wierzchołkach były (a) równe? (b) podzielne przez 3?

3. Rozstrzygnij, czy liczby $1, 2, 3, \dots, 18$ można rozstawić w wierzchołkach i na środkach krawędzi ośmiościanu foremnego (rys. 2), tak aby każda liczba na krawędzi ośmiościanu była średnią arytmetyczną liczb na jej końcach.

4. Na każdej ścianie sześcianu zapisano dodatnią liczbę całkowitą, a w każdym wierzchołku iloczyn liczb występujących na trzech ścianach z danym wierzchołkiem. Suma wszystkich liczb zapisanych w wierzchołkach tego sześcianu jest równa 2009. Jaka jest suma liczb zapisanych na jego ścianach?

5. Każdemu wierzchołkowi sześcianu przyporządkowano liczbę 1 lub -1 , a każdej ścianie — iloczyn liczb przyporządkowanych wierzchołkom tej ściany. Wyznacz zbiór wartości, które może przyjąć suma 14 liczb przyporządkowanych ścianom i wierzchołkom.

Rozwiązania

R1. (a) Można (rys. 3). Kolorem zaznaczono krawędzie o nieparzystych numerach.

(b) Nie można. Niech S oznacza sumę wszystkich numerów krawędzi:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 30 = \frac{30 \cdot 31}{2}.$$

Niech a_i oznacza sumę numerów w i -tym wierzchołku ($i = 1, 2, \dots, 20$). Wtedy $a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 2S$, bo numer każdej krawędzi jest liczony dwukrotnie — przy każdym z jej końców. Gdyby każda z liczb a_i była podzielna przez 4, to $2S$ także. Jednak $2S = 30 \cdot 31$ nie dzieli się przez 4. \square

R2. (a) Nie. Opisana operacja zwiększa o 2 sumę wszystkich liczb. Początkowo suma ta jest równa 1, więc zawsze jest nieparzysta, czyli niepodzielna przez 8.

(b) Nie. Wyróżnijmy liczby w czterech wierzchołkach, jak na rysunku 4. Niech S oznacza ich sumę, a T — sumę pozostałych czterech liczb. Opisana operacja nie zmienia $S - T$. Początkowo $3 \nmid S - T$. Tymczasem gdyby $3 \mid S$ i $3 \mid T$, to $3 \mid S - T$. \square

R3. Nie można. Liczby we wszystkich wierzchołkach muszą być tej samej parzystości, aby dla każdej krawędzi liczba umieszczona na jej środku była całkowita. Liczba 1 nie jest średnią arytmetyczną żadnych liczb większych od niej, zatem musi stać w wierzchołku, podobnie liczba 18. Nie są one jednak tej samej parzystości. \square

R4. Oznaczmy przez a_1 i a_2 , b_1 i b_2 oraz c_1 i c_2 liczby zapisane na parach przeciwległych ścian sześcianu. Zauważmy, że w każdym wierzchołku występuje inny spośród ośmiu możliwych iloczynów $a_i b_j c_k$, gdzie $i, j, k \in \{1, 2\}$. Suma liczb w wierzchołkach jest więc sumą tych ośmiu iloczynów i można ją zapisać jako

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2) = 2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41.$$

Liczby 7 i 41 są pierwsze, a sumy w nawiasach po lewej stronie większe od 1, więc

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 7 + 7 + 41 = 55. \quad \square$$

Wskazówka 5. Jak zmieni się wartość sumy, gdy zmienimy znak liczby w jednym z wierzchołków?

Zadania 3 i 4 pochodzą z broszury *Przed konkursem matematycznym* Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej (Wyd. Szkolne Omega, Kraków 2010). Zadanie 5 pochodzi z XLV Olimpiady Matematycznej.