


SPIS TREŚCI NUMERU 2 (441)


Koło Matematyków
Studentów UJ
im. prof. Stanisława Zaremby str. 1

Jak matematyk rzuca igłą?
Mateusz Wróbel str. 4

Jak zaparkować samochód?
*Aleksander Horawa,
Krzysztof Kapulkin* str. 6

Flexor Connelly'ego
 **Zadania** str. 7

Od paraboli do
podziału sekretu
Tomasz Kazana str. 8

 Te ważne pytania
Magdalena Fikus str.10

Interfejs mózg-komputer –
zrób to sam (I)
*Joanna Jędrzejewska-Szmeł,
Magdalena Michalska* str.11

Wielomiany Lagrange'a str.15

Aktualności str.16

 Stowarzyszenie na rzecz
Edukacji Matematycznej str.17

Klub 44 str.18

Informatyczny kącik olimpijski
(38): Oszczędny kod
Tomasz Kulczyński str.23

Patrz w niebo:
Gwiazdy mało masywne str.24

Luty str.24

 Twierdzenie Cevy
Joanna Jaszewska str.25

meteory, meteority i w ogóle kosmiczny pył (zdjęcie wykonał Krzysztof Polakowski).

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski. Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk, Diana Gawronkiewicz / Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

FIRMY DYSTRYBUUJĄCE *Deltę*

Fran-Press: www.franpress.pl, infolinia 801-679-466.

Garmond Press: www.garmondpress.pl

str.23 **Kolporter:** www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600,

warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2011 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują Regiony Sprzedaży RUCH SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania wpłat: do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH SA, Pion Kolportażu, Zespół ds. Obrotu Zagranicznego, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-53-28-823 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Zespołu lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), fax 22-53-28-734, infolinia 800-1200-29. Płatność kartą kredytową (Visa, MasterCard, American Express) przez www.ruch.pol.pl

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:
SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;

w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;

w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;

kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesyłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

O Kole Matematyków Studentów UJ słów kilka

Koło Matematyków Studentów UJ im. prof. Stanisława Zaremby powstało w XIX wieku, pod nazwą *Kółko Matematyczno-Fizyczne Uczniów UJ*. „Zebranie przedwstępne” odbyło się 3 grudnia 1893. W protokole czytamy, że *wpisowe oznaczono na 1 Kr. a wkładki miesięczne na 40 gr.* Przewodniczącym wybrano Zdzisława Krygowskiego. Kółko zajmowało się przede wszystkim organizacją odczytów, a po kilku latach również rozwiązywaniem proponowanych przez studentów zadań. Kółko było co prawda „matematyczno-fizyczne”, ale tak wykłady, jak zadania były głównie matematyczne.

Zacytujmy fragment protokołu z zebrania z dn. 27 stycznia r. 1901 o godzinie 10 1/4, na którym Ewa Kramsztyk wygłosiła wykład „O funkcjach ciągłych nieróżniczkowalnych”. *W dyskusji zabrał głos Kol. Hoborski; przebiegł szybko historię tej kwestyi i wymienił nazwiska: Ampéra, Freycineta, Bertranda, Riemanna, Hankla, P. du Bois Reymonda i Weierstrassa. Potem streścił po krótko zarzuty Wienera umieszczone w 90^{ty} tomie Crelle's Journal für d. r. u. a. Math. i wykazał bezpodstawność zarzutów; następnie streścił geometryczne badania tegoż Wienera nad funkcją Weierstrassa $\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi)$. Wreszcie zastanawia się nad psychologicznym wyjaśnieniem dziwnego pomieszczenia pojęć ciągłości i różniczkowalności od Eulera do Riemanna; wyjaśnia to w zupełności odczyt Pierponta z Kongresu Towarzystwa matematycznego w Ameryce.*

O istotnej pozycji Kółka świadczą m.in. zdania protokołu z Walnego Zebrania 9 marca r. 1902: *Pn. Paulina Wasserberger żąda ogłoszenia posiedzeń w gazetach. Kol. Hoborski przyrzeka to zawsze czynić.* W roku 1902 ówczesny przewodniczący, Antoni Hoborski, zaproponował „aby Kółko podjęło się wydawania autografowanych wykładów profesora Zaremby”. Ten, a potem i inne wykłady pracowicie przepisywano i litografowano, a po I wojnie światowej prowadzono działalność wydawniczą na wielką skalę. Drukami ukazały się liczne znakomite matematyczne pozycje, od roku 1932 opatrzone wspólnym nagłówkiem „Biblioteczka Kółka Mat.-Fiz. U.U.J”. Numerem pierwszym była „Arytmetyka liczb całkowitych” Wilkosza (jednocześnie Kuratora Kółka). Wydawano książki napisane przez S. Zarembe, W. Wilkosza, A. Rosenblatta, A. Hoborskiego i J. Sleszyńskiego. O „Teorii dowodu” Sleszyńskiego S. Gołąb pisał w roku 1964, że: „i dziś jeszcze zasługiwałyby na ogłoszenie w obcym języku. Na ówczesne czasy był to podręcznik rewelacyjny”.

Przez lata pracy Koło dorobiło się wspaniałej biblioteki. Książki z niej służyły pomocą studentom, biorącym podczas okupacji udział w tajnych kompletach uniwersyteckich.

Po zakończeniu II wojny światowej Koło wznowiło pracę. Pomagano młodszym studentom, wygłaszano referaty naukowe, wydawano skrypty. Kuratorem Kółka był Franciszek Leja. Szybko jednak okazało się, że Kółko nie za bardzo pasuje do planowanego modelu studenckiego ruchu naukowego. W sprawozdaniu z zebrania zarządu 18.05.1949 czytamy: *...zabrał głos delegat FPOS [Federacji Polskich Organizacji Studenckich, powołanej rok wcześniej przez Ministerstwo Oświaty] kol. Chyłyński, który dość ostro skrytykował stosunek członków Koła do Zarządu. Wyjaśnił, że ramowy statut i kwestia przystąpienia do reorganizacji nie są narzucone, lecz wiążą się ze sprawą przebudowy*

ustroju. Chodzi tu przede wszystkim o wykonanie planu kulturalnego. A 12.10.1950: *Kol. Rumak oznajmił, iż w związku z instrukcjami otrzymanymi przez niego na odprawie przewodniczących K.N. ostateczna likwidacja Koła, oddawna już zapowiedziana, winna nastąpić około 20go bm. Utworzone zostaną nowe Kola Naukowe, do których wejdzie ok. 20% ogólnej liczby studentów. Bibliotekę Koła przejmie Senat Akademicki, resztę inwentarza Z.S.P.* Kilka tygodni później członkowie Koła zastali swój lokal zapiecztowany.

Do formalnego rozwiązania Koła jednak nigdy nie doszło. Co więcej, Koło pracowało! Tyle że chyba chwilami bez oficjalnie powołanych władz, także bez dostępu do własnej ogromnej biblioteki. . . W roku 1959 nastąpiła oficjalna reaktywacja Koła. Zebranie reaktywujące odbyło się 20 marca. W protokole widnieją m.in. nazwiska studentów: Stanisława Brzychczego (wybranego prezesem), Stanisława Sędziwego (wiceprezesa), Bohdana Grella, Józefa Nizioła, Andrzeja Pelczara, Zdzisława Skupienia oraz dra Zdzisława Opiala. Dwadzieścia lat później profesor Sędziwy wspominał:

– *Tak, proszę pana, znakomicie pamiętam! To było w marcu. Wie pan, ja studiowałem dwa fakultety, skończyła się sesja, chciałem odpocząć i pojechałem sobie wtedy na narty. Studenci na zajęciach, wyciągi chodzą puste, ja jeżdżę „na okrągło”, pogoda piękna, tak jak dziś, i nagle przychodzi od rodziców telegram z Krakowa, że dzwonił profesor Krzyżański i że mam natychmiast wracać. Oczywiście wracam i co się okazuje? Jestem potrzebny, bo trzeba reaktywować Koło Matematyków. Taki wściekły byłem!*

Protokół z zebrania zaczyna się od słów: *Porządek obrad. 1. Zagajenie – Kol. Stanisław Sędziwy.* Dalej czytamy m.in., że *Kol. Grell zaproponował reaktywowanie Koła Matematyków z tym żeby w miejsce elitarnego (zajmującego się wyłącznie pracą naukową) stworzyć masowe organizujące również działalność towarzysko-kulturalną między poszczególnymi latami.* I tak się stało. Przyjęto nazwę Koło Matematyków Studentów UJ. Opiekunem został Stanisław Gołąb. Fizycy reaktywowali swoje koło niezależnie, później.

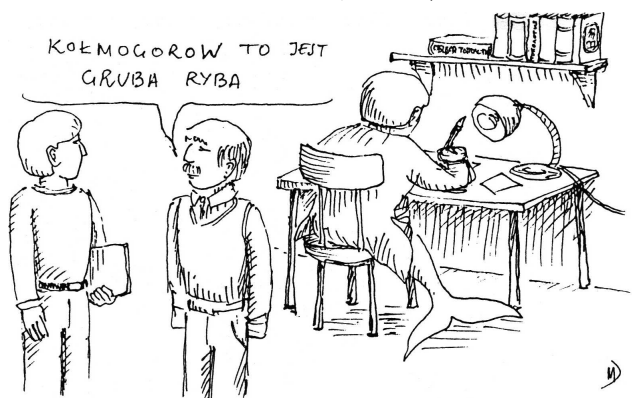
Koło zaczęło aktywnie realizować swoje zamierzenia. Edward Tutaj, „wepchnięty” do zarządu jesienią 1960 jako student I roku, wspomina: *Na zebraniu Zarządu ustalono, że najważniejszą formą działalności Koła będą cotygodniowe (!) „odczyty naukowe”, bo Koło jest „Kolem Naukowym”, a tytuły odczytów „dobrze wyglądają” w sprawozdaniach. Do pierwszego zgłosił się kolega Andrzej z tytułem „O pewnym równaniu diofantycznym”, do drugiego kolega Adam z tematem „Trygonometria sferyczna” i w ten sposób wyczerpał się zbiór ochotników. Zdecydowano, że „Edek wygłosi trzeci odczyt, a temat poda później”. Planowanie na tym zakończono i zebranie zresztą też, a ja zostałem z problemem przygotowania odczytu. Trafiłem na artykuł o imponującym tytule „Tendencje matematyki współczesnej”. Autorka, pracownik naukowy Instytutu Filozofii UJ, starała się w prosty sposób wytłumaczyć, na czym polega idea bourbakistowskiej rewolucji w matematyce. Częściowo to rozumiałem, bo prof. Opiał na wykładach z algebry często się do idei Bourbakiego odwoływał. Powiedziałem zatem, że „przeczytałem taki fajny artykuł o tym, na czym polega to, co nam Opiał wyklada i to streszczę”. Gdy w poniedziałek, w przeddzień odczytu, przyszedłem do instytutu, zobaczyłem w zamkniętej gablotce wielki plakat, na którym obwieszczano, że „kol. Edward Tutaj, student I-go roku wygłosi odczyt*

pt. »Tendencje matematyki współczesnej«”. Nie miałem możliwości zdjęcia plakatu. Gablotka zamknięta, rozbijać szyby nie chciałem. . . Wychodząc z instytutu, zobaczyłem, że przed omawianym plakatem stoi profesor Ważewski, czyta i „dusi się ze śmiechu”! Widząc mnie, zapytał: „No to panie Kolego, no to jakie są te tendencje”? Z trudem coś wymamrotałem. . . Ostatecznie plakatu usunąć nie zdołałem, a odczyt wygłosiłem budząc podziw u studentów starszych roczników, którzy po raz pierwszy słyszeli w tym kontekście używane słowo „struktura”.

A w sąsiedniej gablocie wisiało na małej karteczce zawiadomienie wystukane na zdezelowanym instytutowym „remingtonie”, że tego samego dnia i o tej samej godzinie w siedzibie PAN, nie opodal, wygłosi odczyt Prof. Bernard Malgrange z Paryża na temat twierdzenia przygotowanego w wersji Mathera-Łojasiewicza.

Parę lat później Tutaj został prezesem. . . Mijały lata. Skryptów już nie drukowano, ale odbywały się regularne referaty studenckie, działała odzyskana biblioteka (po latach sensację wzbudził odnaleziony rewers, podpisany przez jednego z obecnych profesorów UJ z wpisanym terminem zwrotu „+∞”), organizowano bale matematyków. Pod koniec lat sześćdziesiątych zaczęły się odbywać wyjazdy turystyczno-naukowe: Szkoły Letnie i Zimowe. A w roku 1970 przy Kole powstał Instytut Matematyki Najwspółczesniejszej. Uczestniczący w jego pracach studenci gromadzili osiągnięcia owej niestandardowej matematyki, często inspirowani kursowymi wykładami. Na przykład, odkryty został półpunkt, zbiór o mocy $\frac{1}{2}$, czyli przedział $[a, a)$ – jest to lewy półpunkt, w odróżnieniu od prawego półpunktu $(a, a]$. Warto wspomnieć o hipotezie kwantium („dla każdego twierdzenia istnieje taki układ kwantifikatorów, przy którym to twierdzenie jest prawdziwe”), czy o teorii rozbójnika. Ta teoria miała szerokie zastosowania, na przykład w rachunku prawdopodobieństwa. Otóż: *Rozbójnik działając na przedział $[0, 1]$ przekształca go w przedział $[0, -1]$. W ten sposób rachunek prawdopodobieństwa został przetworzony w rachunek nieprawdopodobieństwa. Praktyczne zastosowanie rachunku nieprawdopodobieństwa jest następujące: w dniu, w którym doc. Lasota ma wykład o godzinie 10, budzi się On o 11, przez co wykład regularnie zaczyna się z półgodzinnym opóźnieniem.*

Instytut Matematyki Najwspółczesniejszej pręźnie działał w okresie, gdy prezesem Koła był pomysłodawca IMN, Józef Piórek. Innym dokonaniem IMN było notowanie cytatów z wykładów, potem wykładowcy byli odznaczani Brązowymi, Srebrnymi i Złotymi Cudzysłowami, a Andrzej Lasota dorobił się nawet Złotego Cudzysłowu ze wstęgą Möbiusa. Niektóre cytaty ilustrowano (i, choć IMN od dawna nie działa, ilustruje się do dziś).



Obecną nazwę Koło przyjęło w roku 1974. Opowiada ówczesny prezes, Antoni Leon Dawidowicz: *Zgodnie z funkcjonującą tradycją przed Uroczystością Wszystkich Świętych przedstawiciele Koła złożyli kwiaty na grobie prof. Stanisława Zaremby. Wtedy pojawiła się inicjatywa, by Kołu nadać jego imię. Zorganizowaliśmy Nadzwyczajne Walne Zebranie, na którym przyjęliśmy stosowną uchwałę. Poparł ją opiekun Koła, prof. Józef Siciak. Po nadaniu Kołu imienia prof. Zaremby wystaraliśmy się o tablicę z nową nazwą Koła. Nasz lokal był wtedy, niestety, wykorzystywany jako sala wykładowa. Narobiliśmy dużo kłopotu, gdyż w czasie, gdy tablicę przybijaliśmy, w lokalu akurat odbywał się wykład i prowadzący wykład wielokrotnie, bezskutecznie prosił o przerwanie pracy.*

Koło było wówczas „na celowniku” Służb Specjalnych PRL. W archiwach IPN znajdują się dokładne informacje o wszystkim, co było wywieszane w gablocie Koła wraz z „recenzjami” informatorów.

Nie da się ukryć, że niektóre materiały mogły budzić zainteresowanie. . . Na przykład opowiadanie kryminalne „Zbrodnia nilpotenta” autorstwa Leszka Michalika, w którym w rozdziale „Tajniki pewnego urzędu” czytamy między innymi:

W miejscowości, gdzie zaszły opisane przez nas mroźące krew w żyłach wypadki, egzystowała pewna instytucja. (. . .) Instytucja nie zadowalała się jakże przyjemnym dla niej faktem, iż moc dowolnego jej pracownika była funkcją rosnącą ze względu na relację palki, ale postanowiła dodatkowo stworzyć naukowy program uporządkowania wszystkich kategorii ludzi. W tym celu opracowano trzy postulaty teorii kategorii stosowanej:

- postulat identyczności (wszystkich obywateli z ustalonym wzorcem),
- postulat złożenia (do grobu elementów niewygodnych),
- postulat przeniesienia (tych, których złożyć się nie da).

Myliłby się ten, kto by sądził, że działalność humorystyczno-matematyczna (kilkanaście lat później Marek Kordos napisze o „specyficznej linii metodologicznej Krakowiaków”, która mogłaby być nazwana *humoryzmem*) była głównym elementem pracy Koła. Ona jedynie wspaniale uzupełniała referaty, Szkoły, regularne naukowe seminaria studenckie, wycieczki, bibliotekę. . .

W roku 1978 Koło, na wzór mistrzów ze Lwowa, otwarło „Herbaciarnię Szkołą”. Tam studenci stawiali problemy, fundując nagrody za rozwiązanie (oferowano tabliczkę czekolady, pepsi-colę, baterię płaską; dziś brzmi to banalnie, ale wtedy były to rarytasy praktycznie nieosiągalne w sklepach). Problemy notowano w specjalnej „Książeczce Szkołkiej”. Największą sławę osiągnął problem nr 48 nazwany później *problemem izometrii*, postawiony w roku 1979 przez Edwarda Kanię. Sformułowanie jego jest nader proste: *czy funkcja z płaszczyzny w płaszczyznę, zachowująca euklidesową odległość 1, jest izometrią?* Z zadaniem walczyli przez rok studenci i asystenci, w październiku 1980 rozwiązanie podał rozpoczynający studia Sławomir Kołodziej.

W roku 1983 odbyła się w Warszawie najważniejsza światowa konferencja matematyczna, Międzynarodowy Kongres Matematyków (ICM). Koło w sposób niestandardowy zaznaczyło na nim swoją obecność. Zorganizowano mini-turniej gry w ogórka dla obecnych tam





prezesów Koła, a zaproszenie nań („Great Traditional Meeting – Presidents’ Cucumber”) zostało powieszono obok ogłoszeń o spontanicznie organizowanych mini-seminariach.

Tradycyjnie organizowane imprezy Koła wzbogacały się o dalsze uatrakcyjnijające je elementy, dochodziły imprezy kolejne. Organizowano regularne quasinaria. Quasinarium – jest to nazwa wyjazdowego seminarium, które ma się do klasycznego seminarium tak, jak quasinorma do seminormy. Na każdej szkole i quasinarium uzdolnieni artystycznie uczestnicy wykonywali specjalne pieczątki z gumki-myszki. Ogłaszano coroczne Konkursy na kalendarz i Konkursy Primaaprilisowe, które zaowocowały szeregiem niebanalnych prac, m.in. pewną pracą ho,ho!-bilitacyjną, „Przewodnikiem po Kole”, „Matebajką” i Encyklopedią Koła Matematyczną”. W roku 1986 odbył się pierwszy mecz piłkarski „Pracownicy–Studenti”. Pierwszą, historyczną bramkę strzelił co prawda pracownik, ale, jak twierdzili złośliwi, choć podstawowym kryterium przy kompletowaniu drużyny pracowników była umiejętność odróżnienia swojej bramki od bramki przeciwnika, to jednak nie wszyscy zostali przetestowani w tej umiejętności. . .

W innej formie powróciła działalność wydawnicza. Opublikowano dwa mini-skrypty z dorobkiem Koła w „matematyce na wesoło”: „Rozmaitości absurdalne” (I wydanie: 1978–1981 – tyle trwało załatwianie zgody na druk i druku; do dziś – 5 wydań) i „Rozmaitości uśmiechnięte” (I wydanie: 1986–87; do dziś 6 wydań). W roku 1986 powstał też „Semi-śpiewnik Koła Matematyków”.



W roku 1993/94 uroczysto obchodzono jubileusz 100-lecia Koła. Na specjalnie zorganizowanej sesji wystąpiło wielu „weteranów” Koła, a profesor Andrzej Lasota opowiedział, jak w latach siedemdziesiątych rozwiązał pozytywnie zadany mu przez złośliwych studentów Koła problem,

czy matematyka opiera się na grzbietach trzech słoni. Po prostu pokazał profesorów Łojasiewicza, Siciaka i siebie i stwierdził, że to są te trzy słonie, na których matematyka się opiera. . .

We wrześniu 1998 zorganizowano imprezę mającą wywrzeć wielki wpływ na współczesne dzieje Koła Matematyków – pierwsze Warsztaty. Wspomina Prezes Anna Stasica: *Koncepcja była prosta – tygodniowy, intensywny kurs wprowadzający w tajniki wybranej dziedziny matematyki: rano wykłady, a po południu zajęcia w mniejszych grupach na zasadzie ćwiczeń. W kolejnych latach odstąpiono od tej formuły – Warsztaty Młodych Matematyków stały się konferencją studencką. Na pierwszy ogień wybrano geometrię algebraiczną – podług preferencji ówczesnego prezesa. Warsztaty odbyły się pod opieką prof. Piotra Tworzeńskiego i dr Ewy Cygan, a zajęcia prowadzili pracownicy Zakładu Geometrii Analitycznej i Algebraicznej. W ciągu tygodnia uczestnicy zapoznali się z teorią przecięć, geometrią rzutową, odwzorowaniami wielomianowymi oraz dowiedzieli się o efektywnych metodach w geometrii algebraicznej.*

Informacja o pierwszych Warsztatach rozchodziła się pocztą pantoflową. Jedyne plakaty wisiały w Instytucie Matematyki UJ. Udział w nich wzięło zaledwie kilkanaście osób, w tym dwie z Gdańska i jedna z Katowic. Z biegiem lat Warsztaty zyskały rangę międzynarodowych.

A co się dzieje obecnie? Głos ma Andrzej Grzesik, prezes w latach 2006–2009: *Koło stara się organizować życie studenckie w Instytucie Matematyki UJ, łącząc tradycję z nowymi pomysłami. Wciąż odbywają się Szkoły Letnie i Zimowe, Quasinaria, Herbatki Szkockie, Spotkania z Ciekawym Człowiekiem, Naukowe Sesje Studenckie i mecze piłki nożnej oraz siatkówki „Pracownicy-Studenti”. W ostatnich latach organizowane są cykle spotkań „Rozmowy o matematyce” czy turnieje: Blef, Ogórka i Pokera. Warsztaty dla Młodych Matematyków od kilku lat są największą studencką konferencją naukową w Polsce, gromadząc około 200 uczestników i zajmując stałe miejsce w kalendarzach wielu studentów i doktorantów. Na Warsztaty zapraszani są wybitni uczeni, wydawane są książki zawierające wygłoszone wykłady, odbywa się sesja otwartych problemów. Po przeprowadzce Wydziału na nowy Kampus siedziba Koła wzbogaciła się o szafy biblioteczne, nową kanapę, kącik kuchenny (z pięknymi kubkami z logo Koła) i kilka komputerów. W nowym lokalu Koła, gdzie licznie gromadzą się studenci, jest znacznie więcej miejsca.*

Co parę lat odbywa się wielka impreza jubileuszowa – z okazji okrągłej rocznicy powstania Koła czy też reaktywacji Koła. Przed spotkaniem z okazji 110. rocznicy w Instytucie wisiał olbrzymi plakat informujący wielkimi literami o uroczystym spotkaniu i wykładach D. Ciesielskiej, J. Piórka i E. Tutaja. Nie opodal, na małej kartce, wywieszono ogłoszenie o wykładzie Bernarda Malgrange’a, który na kilka dni przyjechał do Krakowa. Jak widać, pod pewnymi względami przez lata niewiele się na matematycznym wydziale UJ zmieniło.

Opracował Krzysztof Ciesielski, współpraca: Danuta Ciesielska, Antoni Leon Dawidowicz, Andrzej Grzesik, Zdzisław Pogoda, Edward Tutaj, Anna Valette. Rysunek na ostatniej stronie okładki i ilustracja cytatu: Maciej Denkowski. Na zdjęciach: prezesi na ICM oraz prezentacja indywidualnych „strojów organizacyjnych”.



Jak matematyk rzuca igłą?

Mateusz WRÓBEL

Jest to skrót pracy uczniowskiej nagrodzonej srebrnym medalem w XXXII Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki w 2010 roku (Olsztyn). Autor był uczniem I Publicznego Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Opolu.

Jednym z najbardziej znanych zagadnień prawdopodobieństwa geometrycznego jest problem *igły Buffona*. Treść tego zadania zna wiele osób, które, nawet jeśli nie znają sposobu rozwiązania, to wiedzą, że jest ono związane z liczbą π . Istotnie, pozwala to (w odpowiednim modelu matematycznym) wyznaczyć przez wykonanie serii doświadczeń wartość liczby π z dokładnością zależną od liczby doświadczeń.

Treść zadania brzmi: *na podłogę wyłożoną identycznymi, nieskończenie długimi deskami jedna obok drugiej (tak że nie ma między nimi przerw) rzucamy igłę o nierozróżnialnych końcach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła będzie dotykać miejsca styku dwóch desek?*

Podłogę możemy zastąpić płaszczyzną podzieloną rodziną prostych równoległych L_1 , reprezentujących miejsca styku dwóch desek. Odległość między dwiema kolejnymi prostymi jest równa a – szerokości deski. Jeżeli przyjmiemy realistyczne założenia, że grubość igły jest dużo mniejsza od szerokości deski oraz że igła nigdy nie upadnie na sztorc, to możemy traktować ją jak odcinek o długości l .

Nie napiszę kolejny raz standardowego rozwiązania – jest ono wystarczająco rozpowszechnione. Zastanówmy się nad innym podejściem do tego problemu.

Niech $f(l)$ oznacza średnią liczbę przecięć odcinka o długości l z prostymi rodziny L_1 przy jednym rzucie. Zauważmy, że jeśli nasz odcinek dowolnie podzielimy na dwie części o długości x i y (oczywiście $x + y = l$ oraz $x, y \geq 0$), to wartość oczekiwana liczby przecięć, liczona dla mniejszych fragmentów, po zsumowaniu da wartość oczekiwaną liczbę przecięć dla odcinka wyjściowego:

$$(1) \quad f(l) = f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Dodajmy jeszcze jedno proste spostrzeżenie: $f(0) = 0$.

Z powyższej równości wynika bardzo ważny wniosek: wartość $f(l)$ będzie taka sama, gdy zamiast odcinkiem będziemy „rzucać” dowolną łamaną o długości l – wystarczy podzielić ją na kawałki prostoliniowe i użyć równości (1) tyle razy, ile tych kawałków będzie. Stąd dla dowolnego wielokąta o obwodzie równym l w naszym doświadczeniu otrzymamy taką samą wartość oczekiwaną liczby przecięć z prostymi z rodziny L_1 jak dla igły o długości l . Tę własność mają również krzywe o długości l , które możemy podzielić na małe fragmenty wyglądające prawie jak odcinki. Takie krzywe mogą być zamknięte (na przykład okrąg spełnia powyższy warunek). Dla uproszczenia zakładamy, że nie mają samoprzecięć (czyli ósemki nie uwzględniamy).

Zależność (1) jest równaniem funkcyjnym, zwanym *równaniem Cauchy’ego*, które przy założeniu ciągłości szukanej funkcji f spełniają tylko funkcje liniowe:

$$(2) \quad f(t) = ct,$$

gdzie c jest stałą. Stałą c można wyznaczyć, zauważając, że okrąg o promieniu $r = \frac{a}{2}$, przy dowolnym ułożeniu na rozważanym podłożu, zawsze będzie miał dokładnie dwa punkty wspólne z narysowanymi prostymi. Obwód tego okręgu wynosi $l = a\pi$, stąd

$$2 = f(a\pi) = c \cdot a\pi,$$

a więc $c = \frac{2}{a\pi}$.

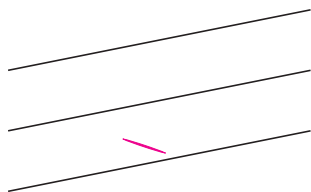
Zauważmy, że odcinek o długości $l < a$ może przeciąć co najwyżej jedną prostą z rodziny L_1 . Zatem w tym przypadku

$$f(l) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p,$$

gdzie p jest szukanym prawdopodobieństwem przecięcia odcinka i prostej z L_1 . To daje nam oczekiwany wynik:

$$p = f(l) = cl = \frac{2l}{a\pi}.$$

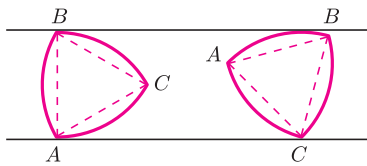
Stąd właściwie „za darmo” otrzymujemy dowód *twierdzenia Barbiera*. Zanim przejdziemy do szczegółów, zwróćmy uwagę, że do wyznaczenia stałej c z równości (2) może posłużyć dowolna krzywa o następującej własności:



Rys. 1. Igła rzucona na podłogę z desek.



Założenie ciągłości funkcji f opisanej zależnością (1) w rozpatrywanej sytuacji wydaje się bardzo naturalne: bardzo mała zmiana długości rzuconej krzywej spowoduje również niewielką zmianę wartości oczekiwanej liczby przecięć.



Rys. 2. Trójkąt Reuleaux.
Niech punkty A, B, C będą wierzchołkami trójkąta równobocznego. Zakreślmy łuk łączący punkty B i C i mający środek w punkcie A . Analogicznie zakreślmy łuki od punktu C do A i środka w B oraz od A do B o środka w C . Łuki te tworzą trójkąt Reuleaux.

przy każdym położeniu takiej krzywej na naszym podłożu, podzielonym prostymi równoległymi z rodziny L_1 , przecina się ona z prostymi w dokładnie dwóch punktach. Takie krzywe nazywają się *krzywymi o stałej szerokości*, a najpopularniejszym przykładem takiej krzywej, różnym od okręgu, jest trójkąt Reuleaux. Dodajmy jeszcze, że różnych, parami niepodobnych krzywych, o stałej (i ustalonej) szerokości jest nieskończenie wiele.

Twierdzenie (Barbier, 1860). *Figury o stałej szerokości a mają jednakowe obwody równe $a\pi$.*

Dowód. Załóżmy, że F jest figurą o stałej szerokości a . Figura F dowolnie umieszczona na płaszczyźnie z narysowaną rodziną prostych L_1 będzie mieć dokładnie dwa punkty wspólne z tymi prostymi. Jeśli $l(F)$ oznacza obwód figury F , to bezpośrednio z definicji funkcji f mamy

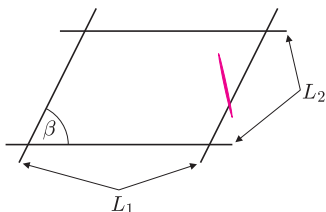
$$f(l(F)) = 2.$$

Z drugiej strony wiemy już, że $f(t) = \frac{2}{a\pi} \cdot t$, i dlatego

$$2 = f(l(F)) = \frac{2}{a\pi} \cdot l(F).$$

Skąd natychmiast otrzymujemy $l(F) = a\pi$ – obwód figury F zależy więc jedynie od szerokości a . \square

Zajmijmy się teraz nieco innym zadaniem. Dorysujmy na płaszczyźnie rodzinę prostych równoległych L_2 , takich że odległość między dwiema kolejnymi prostymi z tej rodziny jest równa b , a rodzina prostych L_2 przecina proste L_1 pod danym kątem $\beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$. W ten sposób otrzymujemy płaszczyznę podzieloną prostymi na przystające równoległoki. Obliczmy prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie równocześnie którąkolwiek z prostych rodziny L_1 i prostych rodziny L_2 w tej, nieco ogólniejszej, sytuacji. Poniżej przedstawię rozwiązanie metodą „standardową”, jednak zachęcam do poszukiwania metody podobnej do powyższej, za pomocą równania funkcyjnego.



Rys. 3. Igła rzucona na płaszczyznę podzieloną rodzinami prostych L_1 i L_2 .

Położenie igły w tym przypadku najlepiej określić, znając kąt $\alpha \in [0, \pi)$ między igłą a prostą rodziny L_1 , odległość $d_1 \leq \frac{a}{2}$ środka igły od najbliższej prostej z rodziny L_1 oraz odległość $d_2 \leq \frac{b}{2}$ środka igły od najbliższej prostej rodziny L_2 .

Przestrzenią zdarzeń elementarnych Ω jest zbiór

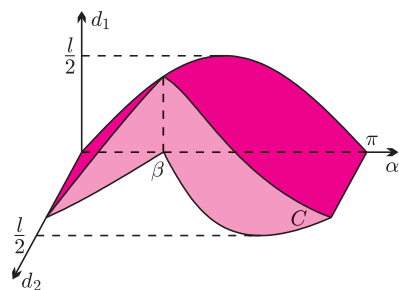
$$\Omega = [0, \pi) \times \left[0, \frac{a}{2}\right] \times \left[0, \frac{b}{2}\right].$$

Igła przetnie proste, gdy parametry $(\alpha, d_1, d_2) \in \Omega$ spełniają warunki

$$(3) \quad C : \begin{cases} \frac{l}{2} \sin |\alpha - \beta| \geq d_2, \\ \frac{l}{2} \sin \alpha \geq d_1. \end{cases}$$

Do obliczenia miary (objętości) powyższego podzbioru C przestrzeni Ω możemy wykorzystać regułę Cavalieriego: żeby otrzymać objętość C , całkujemy względem $t \in [0, \pi)$ pola przekrojów C płaszczyznami $\alpha = t$. Łatwo sprawdzić, że każdy przekrój figury C płaszczyzną $\alpha = t$ dla $t \in [0, \pi)$ jest prostokątem o wymiarach $\frac{l}{2} \sin |t - \beta|$ na $\frac{l}{2} \sin t$. Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} |C| &= \int_0^\beta \frac{l}{2} \sin(\beta - \alpha) \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha \, d\alpha + \int_\beta^\pi \frac{l}{2} \sin(\alpha - \beta) \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha \, d\alpha = \\ &= \frac{l^2}{4} \left(\sin \beta - \beta \cos \beta + \frac{\pi}{2} \cos \beta \right). \end{aligned}$$

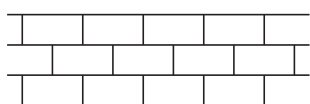


Rys. 4. Zbiór C zdarzeń, w których igła przecina prostą z L_1 i prostą z L_2 .

Gdy $a, b \geq l$, szukane prawdopodobieństwo wyraża się przez stosunek objętości obszaru C do objętości prostopadłościanu Ω :

$$\frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{l^2 \left(\sin \beta + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cos \beta \right)}{ab\pi}.$$

Można zastanawiać się nad podobnymi zagadnieniami: na przykład, ciekawy wydaje się rzut igły na płaszczyznę z narysowaną mozaiką złożoną z przystających prostokątów, tworzących „mur z cegieł”. Rozwiązanie tego problemu pozostawiam Czytelnikom.



Rys. 5. Mur z cegieł.

Jak zaparkować samochód?

Aleksander HORAWA*, Krzysztof KAPULKIN**

Rozważmy następujący problem: na pewnym parkingu znajduje się n miejsc, ustawionych w rzędzie, ponumerowanych liczbami naturalnymi $1, 2, \dots, n$. Każdy z parkujących tam n kierowców ma swoje ulubione miejsce: dla i -tego kierowcy niech będzie to miejsce o numerze a_i , przy czym dla różnych kierowców miejsca te nie muszą być różne. Kierowcy przyjeżdżają kolejno na parking: kiedy i -ty kierowca wjeżdża na parking, jedzie aż do swojego ulubionego miejsca, a następnie, jeśli jest wolne, parkuje tam, jeśli zaś jest zajęte, parkuje na następnym wolnym miejscu. Jeśli wszystkie następne miejsca są zajęte, odjeżdża. Spróbujemy określić liczbę wszystkich takich ciągów preferencji $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, że wszystkim kierowcom uda się zaparkować swoje samochody.

Ciąg $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ o wyrazach w zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$ będziemy nazywać *funkcją parkingową długości n* , jeśli wszystkim kierowcom uda się zaparkować samochody.

Na początek zobaczymy, ile wynosi liczba funkcji parkingowych długości n dla $n = 2$ i $n = 3$. Mamy mianowicie:

- dla $n = 2$ trzy takie ciągi: 11, 12, 21,
- dla $n = 3$ szesnaście takich ciągów: 111, 112, 121, 211, 113, 131, 311, 122, 212, 221, 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Problem wyznaczenia wszystkich funkcji parkingowych długości n został rozwiązany przez Pyke'a w 1959 roku oraz niezależnie przez Konheima i Weissa w 1966 roku. Okazuje się mianowicie, że zachodzi następujące

Twierdzenie. Liczba wszystkich funkcji parkingowych długości n wynosi $(n + 1)^{n-1}$.

Dowód. Zmodyfikujmy nieco nasz problem: na początku parkingu (tj. przed miejscem o numerze 1) dodajemy miejsce o numerze 0. Ponadto pozwalamy kierowcom, którym nie udało się zaparkować zgodnie ze starymi regułami, przejechać przez parking po raz drugi, począwszy od miejsca 0, aż do pierwszego wolnego miejsca.

Oczywiście, teraz wszystkim kierowcom uda się zaparkować samochody, a jedno miejsce pozostanie wolne. Łatwo zauważyć, że ciąg $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ jest funkcją parkingową wtedy i tylko wtedy, gdy po zaparkowaniu samochodów przez wszystkich kierowców miejsce 0 pozostanie wolne.

Niech $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ będzie dowolnym ciągiem o wyrazach w zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$. Jeśli zgodnie z tym ciągiem i -ty kierowca zaparkuje na miejscu p_i , to (dla $j \in \{1, \dots, n\}$) zgodnie z ciągiem

$$\langle a_1 + j, a_2 + j, \dots, a_n + j \rangle$$

(oczywiście modulo $n + 1$) zaparkuje na miejscu $(p_i + j) \bmod (n + 1)$.

Dla każdego ciągu $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ o wyrazach ze zbioru od 1 do n rozważmy zbiór:

$$(*) \quad \{ \langle a_1 + j, a_2 + j, \dots, a_n + j \rangle \bmod (n + 1) \}_{j=0,1,\dots,n}.$$

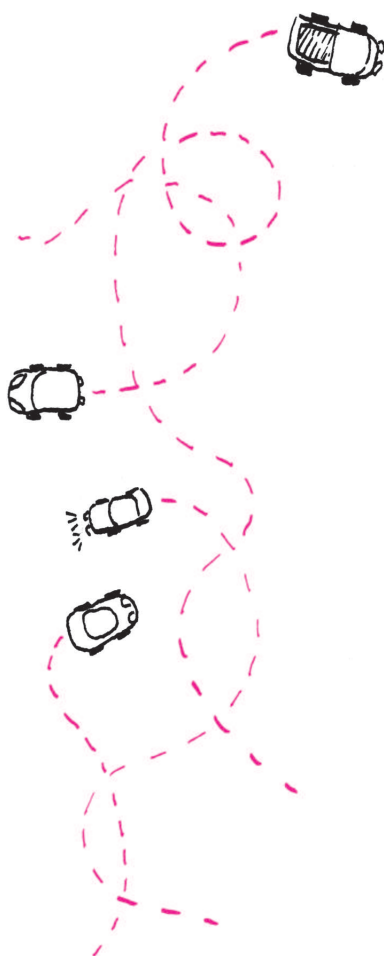
Każdy taki ciąg wyznacza n -elementowy podzbiór zbioru $\{0, 1, \dots, n\}$ – zbiór tych miejsc, na których zaparkują kierowcy. Odwrotnie: każdy taki podzbiór jest wyznaczony przez pewien ciąg postaci $\langle a_1 + j, a_2 + j, \dots, a_n + j \rangle \bmod (n + 1)$. Oczywiście, tylko jeden n -elementowy podzbiór zbioru $\{0, 1, \dots, n\}$ nie zawiera liczby 0, a zatem tylko jeden ciąg z powyższego zbioru jest funkcją parkingową. Suma wszystkich zbiorów $(*)$ jest zbiorem wszystkich ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, \dots, n\}$. Liczba takich ciągów wynosi $(n + 1)^n$. Zatem liczba funkcji parkingowych długości n musi być równa

$$\frac{(n + 1)^n}{n + 1} = (n + 1)^{n-1}. \quad \square$$

Funkcje parkingowe, o których mowa w powyższym twierdzeniu, znalazły szereg zastosowań w kombinatoryce, a w szczególności w teorii grafów. Jako przykład

*uczeń, I Społeczne LO z Maturą Międzynarodową w Warszawie

**doktorant, Department of Mathematics, University of Pittsburgh, Department of Philosophy, Carnegie Mellon University



Las, jak łatwo się domyślić, to po prostu zbiór drzew. A las ukorzeniony to zbiór drzew ukorzenionych.

Wskazówka. Udowodnij (przez indukcję), że ciąg $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ jest funkcją parkingową wtedy i tylko wtedy, gdy jego niemalejąca permutacja jest funkcją parkingową.

można przytoczyć twierdzenie Sylwestera, Borchardta i Cayleya mówiące o tym, że liczba wszystkich lasów ukorzenionych o n ponumerowanych wierzchołkach jest równa liczbie funkcji parkingowych długości n . Czytelnik może w charakterze prostego ćwiczenia spróbować wykazać, że liczba niemalejących funkcji parkingowych wynosi dokładnie

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Na koniec powiedzmy, że liczby tej postaci, zwane *liczbami Catalana*, występują w wielu miejscach w bardzo różnych dziedzinach matematyki. Kombinatorycznie liczby Catalana można zdefiniować na ponad 60 różnych sposobów. Dla przykładu, liczby Catalana to: liczba poprawnych nawiasowań przy użyciu n par nawiasów, liczba ciągów zero-jedynkowych zdominowanych przez 0, liczba triangulacji $(n+2)$ -kąta wypukłego. Ale to już zupełnie inna opowieść.

Flexor Connelly'ego

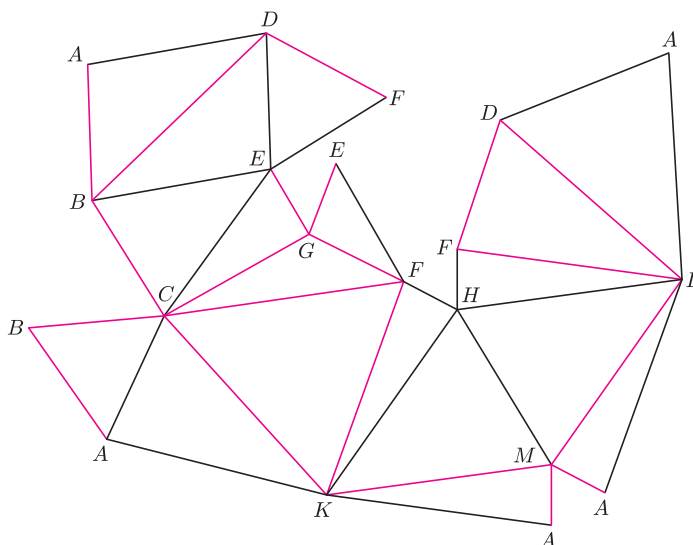
Prawie dwieście lat temu Augustin Cauchy udowodnił, że wielościan wypukły, który ma sztywne ściany, jest cały sztywny, choćby jego krawędzie były wyposażone w najlepsze zawiasy. I postawił problem, czy założenie wypukłości jest konieczne.

W 1978 roku Robert Connelly pokazał wielościan, którego siatka jest na rysunku. Należy ją skleić tak, by kolorowe krawędzie zwrócone były „ostrzem” na zewnątrz, a czarne – do wewnątrz. Wielościan ten jest **flexorem**, czyli wielościanem, który może się odkształcać bez odkształcania ścian.

Flexor Connelly'ego najlepiej wykonać dla następujących wymiarów krawędzi:

$$\begin{aligned} AK = AL = FK = FL = HK = HL = KM = LM &= 15a, \\ AB = AC = BC = DE = DF = EF = 9a, AM = FH &= 4a, \\ AD = BE = CE = HM = 12a, BD = CF = CK = DL &= 16a, \\ CG = 11a, EG = 5a, FG = 7a; \end{aligned}$$

M. K.

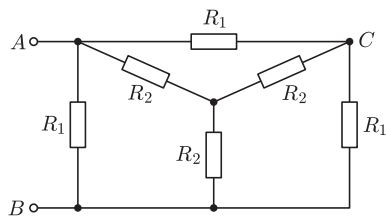


Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 781. Jaki jest opór między punktami A i B sieci pokazanej na rysunku 1? $R_1 = 9 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$.

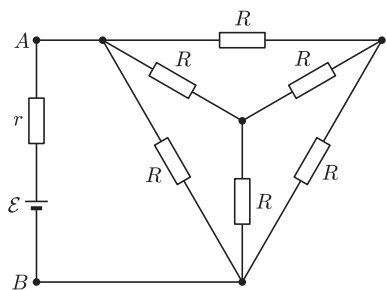
Rozwiązanie na str. 24



Rys. 1

F 782. Dla obwodu z rysunku 2 wyznaczyć wartość R , taką że moc wydzielana między punktami A i B jest maksymalna.

Rozwiązanie na str. 24



Rys. 2

Redaguje Przemysław MAZUR

M 1303. Częścią wspólną dwóch przystających kwadratów jest ośmiokąt. Jego boki będące na obwodzie jednego z kwadratów oznaczamy ciągłą linią kolorową, a boki na obwodzie drugiego – przerywaną. Udowodnić, że suma długości odcinków ciągłych jest równa sumie długości odcinków przerywanych.

Rozwiązanie na str. 9

M 1304. Dane są takie liczby niewymierne dodatnie p, q , że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Udowodnić, że każda liczba całkowita dodatnia występuje dokładnie raz w dokładnie jednym z ciągów $(\lfloor np \rfloor)_{n=1}^{\infty}, (\lfloor nq \rfloor)_{n=1}^{\infty}$.

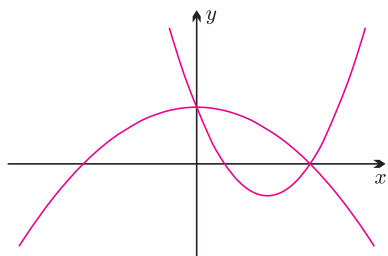
Rozwiązanie na str. 14

M 1305. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n i dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych x, y spełniających warunek $x + y = 1$ zachodzi nierówność $(1 - x^m)^n + (1 - y^n)^m \geq 1$.

Rozwiązanie na str. 8

Od paraboli do podziału sekretu

Tomasz KAZANA*



Zacznijmy od przypomnienia kilku podstawowych własności wielomianów nad liczbami rzeczywistymi. Skupmy się najpierw na funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Będzie nas interesowało to, ile *informacji* potrzebujemy, żeby ustalić parametry a , b i c . Na przykład, jeśli znamy dwa punkty $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, przez które przechodzi szukana „szkolna” parabola, to wiemy jeszcze *zbyt mało*. Co to znaczy? Weźmy dla przykładu $P = (0, 1)$ oraz $Q = (2, 0)$. Łatwo sprawdzić, że zarówno funkcja $f_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$, jak i $f_2(x) = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$ spełniają nasze oczekiwania, tzn. oba punkty leżą na wykresach obu funkcji. Okazuje się, że zawężenie kryteriów do trzech punktów sprawia, iż znajdziemy co najwyżej jedno rozwiązanie. Faktu tego nie będziemy ściśle dowodzić, intuicja powinna jednak podpowiadać, że właśnie trzy punkty są konieczne i wystarczające. Dlaczego? Jeden punkt przekłada się na jedno równanie liniowe z trzema niewiadomymi a , b , c . Trzy takie punkty dają trzy równania.

Podana wyżej własność funkcji kwadratowej uogólnia się na wielomiany wyższych stopni. Sformułujemy odpowiednie twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Jeśli liczby rzeczywiste x_1, x_2, \dots, x_{n+1} są parami różne, to przez ustalone punkty $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \dots, P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ przechodzi wykres dokładnie jednego wielomianu nad liczbami rzeczywistymi stopnia co najwyżej n .*

Możemy to uogólnić. Otóż twierdzenie jest wciąż prawdziwe, jeśli zmienimy zbiór, nad którym rozpatrywane są wielomiany. Przykładowo, w świecie liczb zespolonych to również jest prawdą. Dla osób zaznajomionych z podstawami algebry będzie jasne, jeśli powiemy, że jest ono prawdziwe nad każdym *ciałem*. Dla naszych rozważań nie będzie potrzebna dokładna definicja tej struktury. Zajmiemy się jednym konkretnym przykładem. Otóż niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech \mathbb{Z}_p będzie zbiorem liczb naturalnych od 0 do $p - 1$. Skojarzmy z tym zbiorem działania dodawania i mnożenia. Przyjmijmy, że aby dodać dwie liczby z tego zbioru, dodajemy je w sposób tradycyjny, po czym jako wynik bierzemy resztę z dzielenia przez p . Dla mnożenia robimy analogicznie. Poniższy przykład ilustruje te definicje dla $p = 13$:

$$3 + 11 = 1, \quad 4 \cdot 6 = 11, \quad 9 \cdot 9 + 10 = 0.$$

Nad taką dziwną strukturą będziemy badać tradycyjne wielomiany. Ponownie przyjmijmy $p = 13$ oraz $w_1(x) = x^3 + 2x^2 + 6$, $w_2(x) = x^5 + 3$, $w_3(x) = x + 4$. Mamy wówczas przykładowo:

$$w_1(4) = 11, \quad w_2(4) = 0, \quad w_3(10) = 1.$$

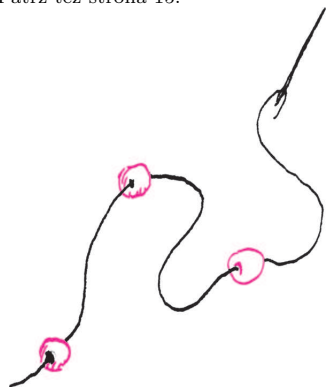
Jak uprzedziliśmy, w tym świecie również zachodzi twierdzenie o wielomianach.

Twierdzenie 2. *Jeśli elementy ciała $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{Z}_p$ są parami różne, to przez ustalone punkty $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \dots, P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ przechodzi wykres dokładnie jednego wielomianu nad \mathbb{Z}_p stopnia co najwyżej n , o ile $n < p$.*

A gdzie w tym wszystkim podział sekretu? Jeszcze chwila cierpliwości i wszystko się wyjaśni. Mamy już potrzebny aparat matematyczny, czas więc na ogólne wprowadzenie w problematykę sekretów, spisków i wzajemnej nieufności.

Rozważmy uproszczoną sytuację: pewna grupa k osób ma jakiś wspólny sekret M , który interpretujemy jako jedną liczbę z zakresu $0, \dots, p - 1$, czy raczej – mówiąc językiem algebry – jako element ciała \mathbb{Z}_p . Chcemy jakoś *rozdzielić* informację o M wśród grupy, aby uzyskać następujący poziom bezpieczeństwa sekretu M .

Patrz też strona 15.



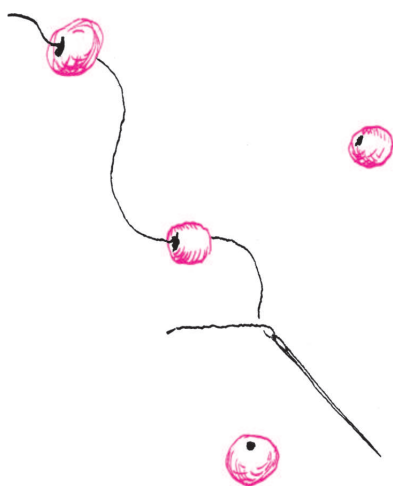
Rozwiązanie zadania M 1305. Rozważmy planszę o wymiarach $m \times n$ i na każdym polu dokonajmy losowania: z prawdopodobieństwem x postawimy tam biały pionek, a z prawdopodobieństwem $y = 1 - x$ – czarny. Wówczas prawdopodobieństwo tego, że na każdym z m pól wybranej kolumny stoi biały pionek, jest równe x^m . W takim razie $1 - x^m$ to prawdopodobieństwo tego, że w tej kolumnie znajdzie się chociaż jeden pionek czarny, a $(1 - x^m)^n$ możemy zinterpretować jako szansę na to, że w każdej kolumnie będzie przynajmniej jeden czarny pionek. Podobnie $(1 - y^n)^m$ to szansa zdarzenia, że w każdym wierszu jest co najmniej jeden biały pionek. Zauważmy jednak, że któreś z tych zdarzeń musi wystąpić, ponieważ jeżeli jakaś kolumna zawiera same białe pionki, to w każdym wierszu jest już biały pionek. To dowodzi podanej nierówności.

*Instytut Informatyki,
Uniwersytet Warszawski

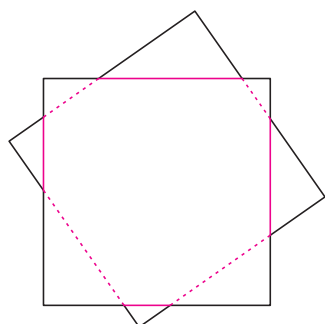
Poziom bezpieczeństwa 1 da się uzyskać znacznie prościej, niż opisano to w artykule. Wystarczy pierwszym $k - 1$ osobom przydzielić losowe liczby ℓ_i , a ostatniej liczbę

$$M - \sum_{i=1}^{k-1} \ell_i.$$

Jednak pomysł wykorzystujący własności wielomianów uogólnia się na inne problemy (np. te podane w dalszej części artykułu), których nie da się rozwiązać aż tak trywialnie.



Rozwiązanie zadania M 1303.
Zauważmy, że oprócz ośmiokąta powstało osiem podobnych trójkątów,



w każdym z których stosunek sumy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy α . Oznaczając sumę długości kolorowych odcinków ciągłych przez x , a przerywanych przez y , widać, że obwód jednego kwadratu jest równy $x + \alpha y$, a drugiego $y + \alpha x$, co po przyrównaniu daje $x = y$.

Poziom bezpieczeństwa 1. Dowolna podgrupa licząca $k - 1$ osób nie jest w stanie odtworzyć sekretu M na podstawie informacji posiadanych przez członków podgrupy. Pełna grupa k osób jest w stanie odtworzyć M .

Wróćmy do świata wielomianów. Niech W będzie losowym wielomianem nad \mathbb{Z}_p stopnia $k - 1$, takim że $W(0) = M$. Tylko ten wielomian będzie nam potrzebny, aby rozdzielić sekret. Pierwszej osobie zdradzimy wartość $W(1)$, drugiej – $W(2)$ itd. Ostatnia osoba pozna $W(k)$. Teraz z twierdzenia 2 wynika, że informacje posiadane przez te osoby pozwalają odtworzyć wielomian, a więc i obliczyć $W(0)$, to znaczy poznać sekret M . Gdy zabraknie choć jednej osoby, to wielomian nie jest wyznaczony jednoznacznie i wiadomość pozostaje tajna.

Co tu jest jeszcze do dowiedzenia? Powyższe rozumowanie zawiera, oczywiście, pewne uproszczenia. W szczególności nie wskazaliśmy, jak wykazać, że żadne $k - 1$ osób nie może odtworzyć M . Nie będziemy wszystkiego uzupełniać. Chcemy jednak dokładnie określić, czego należałoby ściśle dowieść, aby móc stwierdzić, że opisany schemat jest *bezpieczny*.

Przede wszystkim nie zdefiniowaliśmy precyzyjnie, co rozumiemy przez sformułowanie, że wiadomość jest tajna. Nie wystarczy powiedzieć, że posiadana wiedza nie wystarcza do jednoznacznego odtworzenia sekretu M . Mogłoby się przecież tak zdarzyć, że – w skrajnym przypadku – niejednoznaczność polega na tym, iż mamy dwóch kandydatów na M . Pierwsze przybliżenie definicji mogłoby więc iść w tę właśnie stronę. To znaczy chcielibyśmy, aby posiadana wiedza nie mogła wykluczyć żadnego kandydata na M . Jednak również i taka definicja jest za słaba. Nie wyklucza bowiem przypadku, gdy posiadana wiedza pozwala stwierdzić, że, na przykład, $M = 23821$ z prawdopodobieństwem 0,9 (a nie $\frac{1}{p}$, jak pewnie byśmy oczekiwali). Najsilniejsza definicja jest sformułowana właśnie w języku probabilistyki: dana wiadomość jest tajna, jeśli posiadana wiedza nie pozwala na ustalenie innego rozkładu prawdopodobieństw tajnego sekretu niż rozkład jednostajny.

Okazuje się, że dzielenie sekretu za pomocą wielomianu spełnia tę najsilniejszą definicję. Zachęcamy do udowodnienia tego faktu, a przynajmniej dokładnego sformułowania, co tak naprawdę trzeba udowodnić.

Dalsze zastosowania. Wielomiany dają nam jeszcze inne ciekawe możliwości (ponownie k oznacza liczbę osób).

Poziom bezpieczeństwa 2. Dowolna podgrupa $k - 4$ osób nie jest w stanie odtworzyć M . Każda podgrupa $k - 3$ osób jest w stanie odtworzyć sekret.

Powyższe bezpieczeństwo uzyskujemy, na przykład, następująco: losujemy wielomian stopnia $k - 4$ o wartości M w zerze. Osobom dajemy kolejne wartości $W(1), W(2), \dots, W(k)$. Ponownie twierdzenie 2 dowodzi tezy. Liczba 4 została tu wybrana przykładowo, można wybrać dowolną inną. Oczywiście, żeby zachować pełną ścisłość, należy udowodnić trudniejszy fakt dotyczący rozkładu prawdopodobieństw.

To jednak nie koniec. Jako ostatnią rzecz proponujemy ćwiczenie. Zachęcamy Czytelnika do pokazania, jak użyć techniki wielomianów, aby osiągnąć następujący poziom bezpieczeństwa (dla Czytelnika Leniwego rozwiązanie jest w numerze).

Poziom bezpieczeństwa 3. Niech k oznacza liczbę pięcioosobowych rozłącznych grup osób. Chcemy, aby do poznania sekretu konieczna była większość (a więc co najmniej trzy osoby) z co najmniej $\frac{k}{2}$ grup.

Opisany w artykule pomysł dzielenia sekretu zawdzięczamy izraelskiemu kryptografowi Adiemu Shamirowi. Zainteresowanych zachęcamy do samodzielnych poszukiwań i dalszego zgłębiania tej tematyki.

Te ważne pytania

Sala jest pięknie drewniana, wznosi się amfiteatralnie wokół centralnego kręgu. Na sali może siedzieć 1300 osób. Wszystkie miejsca są zajęte.

Na dole, w centrum, znajduje się okrągły stół i 6 wysokich krzeseł. Stół jest oświetlony, sala pozostaje w ciemności. Siedzący przy stole czują za sobą tych uważnie skupionych ludzi, ale ich nie widzą.

Tak właśnie wygląda posiedzenie Gdańskiego Areopagu – niesionego w świat już dziesięcioletnią tradycją. Dwa razy do roku zbierają się dyskutanci i publiczność, aby porozmawiać i posłuchać o ważnych dla wszystkich sprawach. Nie tych codziennych, zwyczajnych, lecz tych, które określają nasz wybór co do wartości życia własnego i innych. Wolność, sprawiedliwość, dobrobyt, sława, roztropność... To cnoty upostaciowione w Złotej Bramie Gdańska. W listopadzie 2010 centralnym problemem debaty był szacunek.

Temat szacunku „rozpisany” został na 3 wieczory. Szacunek: utopia czy konieczność? Szacunek i racja stanu. Szacunek, tolerancja czy arogancja – znaczenie słów. Pogarda, wykluczenie. Autorytety – czy można to nabyć, czy przychodzi „samo” – do osoby, do instytucji. Czy można autorytet utracić?

Rozważano, czy należy szanować naukę, jakie są konsekwencje arogancji wobec nauki?

Jak w każdej bardzo ogólnej dyskusji, konieczne są definicje pojęć dyskutowanych. A więc nauka? Postanowiliśmy rozmawiać o naukach ścisłych. Te nauki dążą do uzyskania prawdziwego obrazu rzeczywistości, sprawdzanego metodą naukową. No i mamy następne słowo do definiowania: „prawdziwy”. Nie należy sprowadzać tego terminu do absolutu – nauka dąży do opisu rzeczywistości dostępnymi w danym momencie środkami. W wyniku dalszego rozwoju nauki może dojść do rewizji tego opisu, uściślenia, a nawet odrzucenia. Nauka może być „namawiana” do zбочenia z tej drogi w imię innych niż naukowe wartości: ideologicznych, na przykład. Jeżeli zбочenie nie przybliży prawdy – zostanie prędzej czy później zdemaskowane. Można przywołać negocjowanie genetyki w Związku Radzieckim pod władzą Stalina. Największe w owym czasie na świecie zbiory zasobów genetycznych roślin, stworzone przez Nikołaja Wawiłowa, zostały zniszczone, aby nie świadczyły przeciw teoriom Łysenki o dziedziczeniu cech nabytych. Sam uczony aresztowany w 1940 roku został SKAZANY NA ŚMIERĆ pod zarzutem udziału w szpiegowskiej organizacji i zwalczania łysenkizmu. Wyrok zamieniono na 20 lat łagru. Wawiłow zmarł z wycieńczenia i głodu w więzieniu w Saratowie w 1943 roku.

Już na początku lat pięćdziesiątych w ZSRR zapomniano o Łysence, a w 1956 roku na wydziałach biologii w tym kraju nauczano o istnieniu DNA, jako cząsteczki odpowiedzialnej za dziedziczenie cech.

Nauka nigdy nie sądzi, że już dane zjawisko do końca poznała i opisała. Ludzkie poznanie wydaje się nie mieć kresu – o jego istnieniu zapewniali fizycy końca XIX wieku, a potem pojawiły się wyniki prac Bohra, Einsteina, Heisenberga, Diraca i bardzo wielu innych, które otworzyły zupełnie nowe horyzonty dla wiedzy. Dziś współczesny fizyk mówi, że nauka nie może opisać „momentu” Wielkiego Wybuchu, m.in. dlatego, że nie ma jeszcze matematyki, która by takiemu zadaniu podołała.

Pytania o stosunek do nauki stały się bardzo ważne w ostatnich dziesięcioleciach, ponieważ współczesny człowiek po raz pierwszy w historii może wpłynąć na losy całej planety, naszego gatunku i życia na Ziemi. Czyli nie są to pytania błahe.

O myśleniu naukowym mówi internetowa anegdota: Rzemieślnik, nauczyciel i naukowiec zobaczyli przez okno w pociągu czarną owcę.

O – powiedział rzemieślnik – w tej okolicy owce są czarne.

Masz na myśli – powiedział nauczyciel – że niektóre owce w tej okolicy są czarne.

Nie – zauważył naukowiec – wiemy tylko, że istnieje tu co najmniej jedna owca i co najmniej jeden z jej boków jest czarny.

Magdalena FIKUS

Interfejs mózg-komputer – zrób to sam

Część I: podstawowe wiadomości

Joanna JĘDRZEJEWSKA-SZMEK*, Magdalena MICHALSKA*

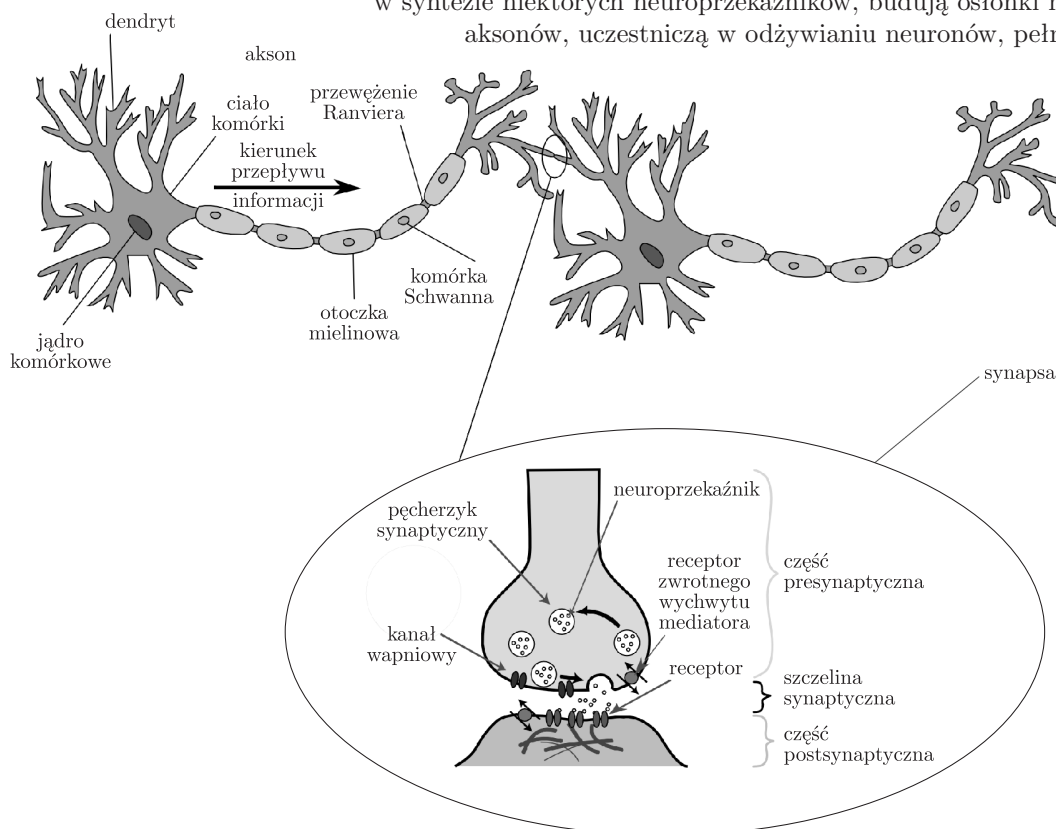
*Zakład Fizyki Medycznej,
Wydział Fizyki
Uniwersytetu Warszawskiego

Wyobraź sobie, że jesteś uwięziony w swoim ciele. Wszystkie Twoje mięśnie są sparaliżowane. Nie możesz wydać z siebie żadnego dźwięku. Nie możesz poruszyć żadną ze swoich kończyn. Jesteś w stanie najbliższym bycia zakopanym żywcem przy zachowaniu przytomności i pełnej świadomości swojego stanu. Taki stan nazywany jest stanem zamknięcia (ang. *locked-in syndrome*). Jeżeli Twoje mięśnie gałek ocznych też są sparaliżowane, jest to stan zamknięcia zupełnego.

Jeżeli masz szczęście, mięśnie Twoich gałek ocznych nie są sparaliżowane i możesz próbować komunikować się za pomocą mrugnięć. Wtedy można pokusić się o zbudowanie maszyny pozwalającej na rozszyfrowywanie i przekazywanie światu Twoich komunikatów w oparciu o ruchy gałek ocznych (ang. *eye-tracking*). Maszynę taką nazywać będziemy interfejsem mózg-komputer (BCI, ang. *Brain-Computer Interface*). Za pomocą podobnego interfejsu porozumiewa się i prowadzi prace badawcze Stephen Hawking. Z tego typu pomocy, jednak bez pośrednictwa maszyny, tylko przeszkolonej w tym kierunku osoby, korzystał przy pisaniu książki „Skafander i motyl” Jean-Dominique Bauby.

Człowiek znajdujący się w stanie zamknięcia zupełnego nie może bezpośrednio przekazywać komunikatów. Interfejs do komunikacji musi wówczas wykorzystywać sygnały generowane przez jego ciało, konkretnie przez mózg. Pewnie nikt z nas nie chciałby mieć elektrod wszczepionych inwazyjnie w korę mózgową, więc maszyna będzie musiała opierać się na EEG, czyli elektroencefalogramie – wyniku pomiaru czynności elektrycznej mózgu rejestrowanej na powierzchni skóry głowy.

Mózg jest niezwykle skomplikowanym tworem, zbudowanym z dwóch klas komórek – gwałtownych i neuronów. Komórki gwałtowne to swego rodzaju „system wspomagania” – m.in. współtworzą barierę krew-mózg, biorą udział w syntezie niektórych neuroprzekaźników, budują osłonki mielinowe aksonów, uczestniczą w odżywianiu neuronów, pełnią funkcje



Rys. 1. Przekazywanie informacji w układzie nerwowym.



obronne. . . A neurony odpowiedzialne są za większość wytworów naszego umysłu. Neurony składają się z dendrytów, do których przekazywana jest informacja, ciała komórki i aksonów, którymi przekazują informację do innych neuronów.

Przebieżność informacji w neuronach odbywa się za pomocą sygnałów elektrycznych, tzw. potencjałów czynnościowych. Przekaz informacji między neuronami jest w przeważającej części chemiczny. Aksony komórek nerwowych łączą się z dendrytami, tworząc synapsy. Gdy potencjał czynnościowy dotrze do wypustek aksonów (strona presynaptyczna synapsy), uwalniany jest związek chemiczny zwany neuroprzebieżnikiem, który następnie wyłapywany jest przez receptory chemiczne w błonie dendrytów (strona postsynaptyczna). W wyniku reakcji zachodzących w błonie i jej okolicach otwierają się kanały jonowe błony postsynaptycznej i do dendrytów wpływają jony, tworząc prąd postsynaptyczny.

Komórki nerwowe można traktować jak małe źródła prądowe – po transferze synaptycznym do neuronu postsynaptycznego wpływa prąd. EEG odzwierciedla taką skorelowaną aktywność synaptyczną – sumujące się prądy postsynaptyczne, czyli aktywność elektryczną dendrytów.

Amplituda sygnału EEG zmienia się w zakresie od 0 do 100 μV , ogólnie jednak rzadko przekracza wartość 20 μV . EEG jest sygnałem o charakterze szumu kolorowego – jego widmo amplitudowe nie jest płaskie i zależy od częstości f jak $\frac{1}{f}$.

W ciągu dziesięcioleci badań i zastosowań w medycynie sklasyfikowano szereg charakterystycznych rytmów i tzw. grafoelementów, czyli krótkich fragmentów sygnału wykazujących określone cechy i pojawiających się w określonych stanach mózgu. Te dotyczące EEG podczas czuwania są pokrótce opisane poniżej.

Fale alfa są rytmiczną aktywnością w paśmie 8–12 Hz. Występowanie rytmu alfa przypisuje się stanowi relaksu z zamkniętymi oczami. Fale alfa najlepiej widoczne są w odprowadzeniach tylnych, czyli z okolic części kory odpowiadającej za przetwarzanie informacji wzrokowych. Rytm o częstości 8–12 Hz rejestrowany w okolicach kory motorycznej nazywany jest też rytmem μ . W momencie wykonywania ruchu przez człowieka lub tylko zamierzenia jego wykonania można zaobserwować jego istotny zanik.

Fale delta – aktywność o niskiej częstości 0–4 Hz i wysokiej amplitudzie. Pojawiają się w trakcie snu głębokiego, głębokiej medytacji, u małych dzieci i w przypadku pewnego rodzaju uszkodzeń mózgu.

Fale theta – o częstości 3–7 Hz i amplitudzie rzędu kilkudziesięciu μV . Pojawiają się w trakcie snu płytkiego, medytacji, hipnozy, intensywnego marzenia, intensywnych emocji. Odmiennej rodzaj fal theta jest związane z aktywnością poznawczą,

kojarzeniem – w szczególności uwagę, a także procesami pamięciowymi.

Fale beta – o częstości w przedziale 12–30 Hz i niskiej amplitudzie. Charakteryzują zwykłą codzienną aktywność kory mózgowej u człowieka, percepcję zmysłową i pracę umysłową.

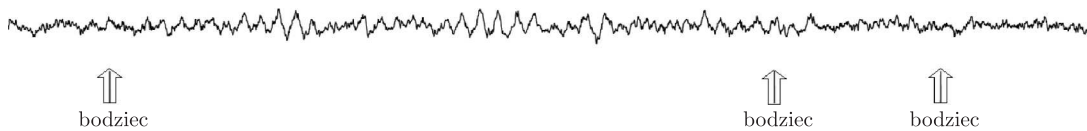
Fale gamma – to fale mózgowe o częstości od 30 Hz do 80 Hz. Fale gamma towarzyszą aktywności ruchowej i funkcjom motorycznym. Fale gamma związane są też z wyższymi procesami poznawczymi, m.in. percepcją sensoryczną, pamięcią. Przypuszcza się, że rytm gamma o częstotliwości około 40 Hz ma związek ze świadomością percepcyjną (dotyczącą wrażeń zmysłowych i ich postrzegania) oraz związany jest z integracją poszczególnych modalności zmysłowych w jeden spostrzegany obiekt.

Iglice – wyładowania padaczkowe, obserwowane także w czynności międzynaładowej. Wyróżniają się z podstawowego sygnału, mają ostry wierzchołek i amplitudę dużo wyższą od amplitudy tła.

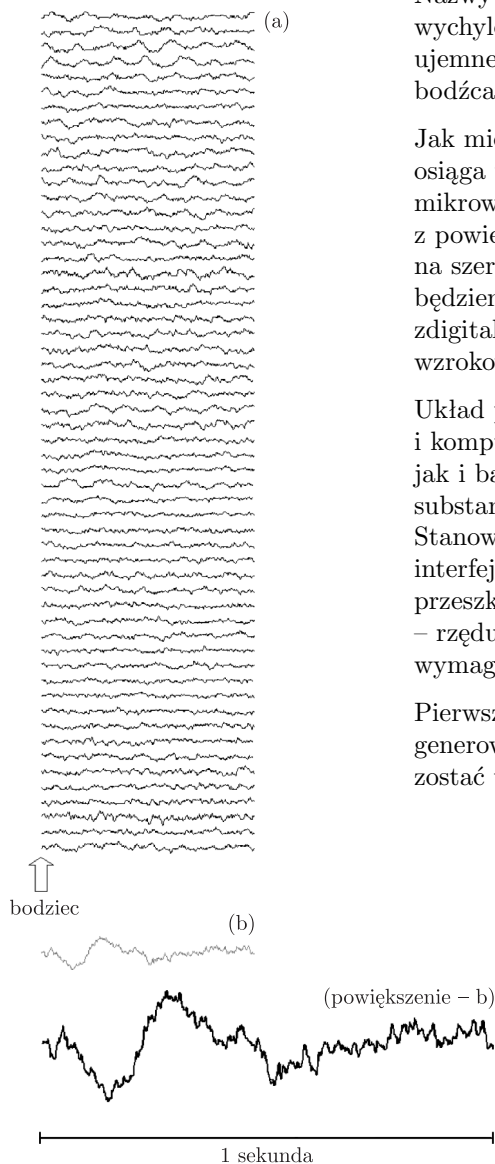
Należy zawsze pamiętać o tym, że EEG jest sygnałem wykazującym ogromną zmienność międzyosobniczą i międzyzapisową, co powoduje, że jego analiza i klasyfikacja cech nie jest wcale prosta.

Kolejnym grafoelementem występującym w zapisie czynności elektrycznej mózgu są tzw. potencjały wywołane (*evoked potentials*). Zwykle mają one bardzo niską amplitudę rzędu μV i bardzo trudno jest je wyróżnić na tle całego sygnału. Sposobem na ich wyodrębnienie z zapisu jest wielokrotne powtarzanie odczytu w takich samych warunkach i uśrednienie sygnału. Schemat ten przedstawiony jest na rysunkach 2 i 3.

W rzeczywistości potencjały wywołane są odpowiedzią na kilkanaście do kilkudziesięciu tysięcy bodźców. Gromadzona od dziesięcioleci wiedza



Rys. 2. Uśrednianie potencjałów wywołanych. Ciągły zapis EEG z wyróżnionymi momentami wystąpienia bodźca (w tym przypadku słuchowego).



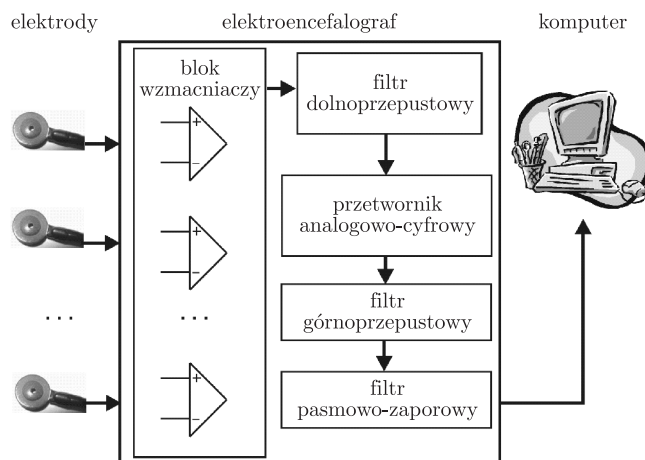
Rys. 3. Uśrednianie potencjałów wywołanych cd. (a) Kilkadziesiąt kolejnych odcinków, wyciętych jako sekunda EEG od momentu wystąpienia kolejnych bodźców, ustawione jeden pod drugim. (b) Uśredniony potencjał wywołany – widać m.in. załamek P300 ok. 300 milisekund po bodźcu.

o behawioralnych i klinicznych korelatach potencjałów wywołanych opiera się na rozpoznawaniu tzw. *załamków* w przebiegach uśrednionych, czyli przejściowych wzrostów lub spadków potencjału (np. na rysunku 3 widać załamek P300). Nazwy załamków składają się zwykle z litery „P” (od ang. *positive*), jeśli wychylenie jest dodatnie, lub „N” (od ang. *negative*), jeśli wychylenie jest ujemne, oraz liczby. Liczba określa przybliżoną liczbę milisekund od wystąpienia bodźca, czyli tak zwaną latencję.

Jak mierzyć potencjał elektryczny na głowie? Wiemy już, że EEG osiąga wartości 0–100 μV , dlatego też do jego rejestracji musimy użyć mikrowoltomierza. Potrzebujemy też sond do połączenia mikrowoltomierza z powierzchnią skóry i komputera, żeby analizować zebrany sygnał. Ze względu na szereg trudności pomiarowych oprócz samego woltomierza potrzebować będziemy kilku filtrów. Przetwornik analogowo-cyfrowy posłuży nam do zdigitalizowania sygnału, co umożliwi nam analizę bardziej zaawansowaną niż wzrokowa. Całe to oprzyrządowanie nazywać będziemy encefalografem.

Układ pomiarowy składać się będzie zatem z elektrod, elektroencefalografu i komputera; pokazany jest on na rysunku 4. W praktyce, zarówno klinicznej, jak i badawczej, stosuje się tzw. elektrody mokre – wymagające użycia substancji poprawiających przewodzenie prądu pomiędzy skórą a elektrodą. Stanowi to dużą niewygodę i utrudnia znacznie konstrukcję domowych interfejsów mózg-komputer. Aplikacja elektrod musi być dokonana przez przeszkoloną osobę, ponadto substancje, o których mowa, mają krótkotrwałe – rzędu kilkunastu, kilkudziesięciu godzin – działanie, dlatego też elektrody wymagają stosunkowo częstej replikacji.

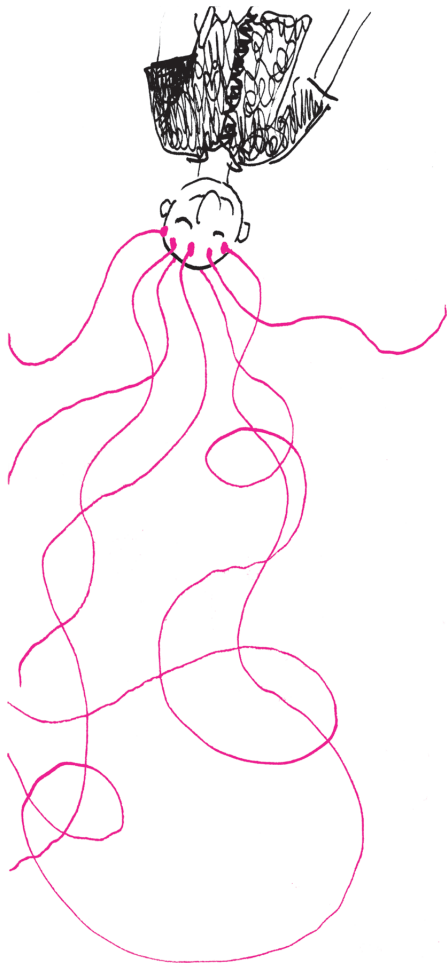
Pierwszą składową elektroencefalografu są oczywiście wzmacniacze. Sygnał generowany przez mózg ma bardzo małą amplitudę i przed dalszą analizą musi zostać wzmocniony.



Rys. 4.

Zebrany sygnał jest cyfrowy, czyli dyskretny – próbkowany z pewną częstotliwością oznaczaną zwyczajowo jako F_s . W czasie próbkowania sygnału z częstotliwością F_s składowe sygnału o częstotliwościach wyższych od $\frac{F_s}{2}$ będą nakładać się na składowe o częstotliwościach niższych od $\frac{F_s}{2}$, zniekształcając sygnał. W celu uniknięcia tego zjawiska, zwanego *aliasingiem*, sygnał przed zdigitalizowaniem należy przefiltrować analogowym filtrem dolnoprzepustowym, czyli pozostawiającym jedynie częstotliwości niższe niż $\frac{F_s}{2}$, co uwzględnione jest w schemacie układu doświadczalnego na rysunku 4.

Czynność elektryczna mózgu obserwowana na powierzchni głowy jest sygnałem o niewielkiej amplitudzie. Większość sygnałów elektrycznych



w naszym otoczeniu i organizmie ma amplitudę o rzędy wielkości większą, co zakłóca pomiar.

Pierwszym problemem jest, oczywiście, otaczające nas promieniowanie elektromagnetyczne o częstości 50 Hz, które emitowane jest przez wszystkie urządzenia elektryczne wokół nas. Często, by się od niego odizolować, pomiary przeprowadza się w klatkach Faradaya, aczkolwiek wiele urządzeń ma wbudowany filtr pasmowo-zaporowy eliminujący tę częstość z mierzonego sygnału.

Kolejnym problemem jest akcja serca pacjenta. EKG ma najwyższą amplitudę ze wszystkich sygnałów elektrycznych wytwarzanych przez nasze narządy (tak, nawet nasze jelita generują czynność elektryczną, a popularny wariograf w dużej mierze opiera się na pomiarze czynności elektrycznej skóry) i każda elektroda na powierzchni naszej skóry mierzy przede wszystkim EKG. Serca nie możemy wyłączyć. Jednakże, żeby nie skupiać się na jego akcji, stosuje się tzw. referencję – wybiera się odpowiedni sygnał bazowy, odzwierciedlający wszystkie inne sygnały elektryczne wytwarzane przez nasze ciało, i odejmuje się go od sygnałów mierzonych na głowie. Taką referencją może być elektroda przypięta na uchu czy brodzie, a może być też uśredniony sygnał ze wszystkich elektrod pomiarowych, który odejmowany jest w każdej chwili pomiaru.

Pomiędzy skórą, elektrolitem a elektrodą zachodzą różne zjawiska fizyczne i chemiczne. Przy pewnych połączeniach do wzmacniacza mogą spowodować one powstanie zakłócenia w postaci fali o bardzo niskiej częstości i dużej amplitudzie występującej w sygnałach z jednej lub wielu elektrod. Z tego powodu w elektroencefalografie znajduje się też filtr górnoprzepustowy.

Zwykle sygnał, którym dysponujemy, mierzony jest na powierzchni skóry za pomocą dużych (o średnicy ok. 0,5 cm) elektrod. Idealnie byłoby mierzyć sygnał z pojedynczych populacji neuronów, który, wydaje się, lepiej odzwierciedlałby zmiany zachodzące w mózgu, ale nikt chyba nie chciałby chodzić z dziurą w czaszce i cienkimi igłami – elektrodami wbitymi w odpowiednie ośrodki kory mózgowej.

Zatem to, co jesteśmy w stanie zmierzyć na powierzchni skóry głowy, to jedynie (w uproszczeniu) potencjały zsumowane w wyniku synchronicznej aktywności dużych grup neuronów i przefiltrowane przez czaszkę i skórę. A dokładniej, różnice pomiędzy tymi potencjałami. Wydaje się, że taki pomiar nie do końca pozwala nam poznać zachowanie populacji neuronów, lecz tylko pewne bardziej „wysokopoziomowe” procesy.

Można się zatem domyślić, że badając EEG, nie odczytujemy bezpośrednio myśli. Jak w takim przypadku możemy zbudować interfejs mózg-komputer? Brzmi to jak jakieś oszustwo. Okazuje się, że jest pewna ilość charakterystycznych zjawisk, zachowań dużych grup neuronów, które obserwujemy w EEG, odpowiadających różnym rodzajom aktywności mózgu. Możemy wykorzystać je do świadomego generowania sygnału sterującego. Oto niektóre z nich.

Potencjały wywołane (oznaczane też niekiedy z ang. ERP – *event-related potentials*), o których już wspomnieliśmy. Nasz mózg reaguje na różnorakie bodźce pojawiające się w naszym otoczeniu, a niektóre typy tych reakcji możemy zaobserwować w EEG w postaci potencjałów wywołanych, czyli charakterystycznych „załamek” pojawiających się w sygnale. Najbardziej charakterystyczny i najprostszy do zaobserwowania jest tzw. potencjał P300 (na rysunku 3), który pojawia się najczęściej około 300 ms od momentu wystąpienia bodźca (w praktyce waha się to w granicach 200–700 ms w zależności od pacjenta). Załamek ten występuje, na przykład, gdy wystąpi bodziec (wzrokowy, dźwiękowy), którego się spodziewamy, czy też związany z „rejonem”, na którym skupiamy uwagę. Obserwujemy go w sygnale zebrany głównie z trzech obszarów kory mózgowej: odpowiadających za uwagę i pamięć, przetwarzanie zadań i podejmowanie decyzji.

Jak na tym oprzeć budowę interfejsu mózg-komputer? Przykładowo można stworzyć aplikację do pisania w następujący sposób: prezentujemy pacjentowi ekran z literami alfabetu, które są w losowy sposób podświetlane. Pacjent



Rozwiązanie zadania M 1304.

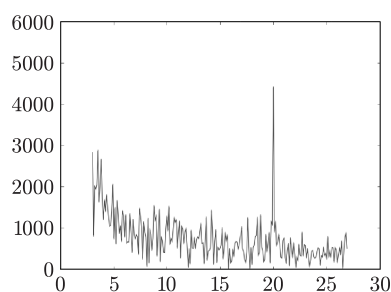
Niech N będzie liczbą całkowitą dodatnią. Zastanówmy się, ile jest liczb mniejszych od N , które występują w obu danych ciągach (każdą liczbę liczymy tyle razy, ile razy wystąpiła). Otóż nierówność $\lfloor np \rfloor < N$ jest równoważna $np < N$, innymi słowy $n < \frac{N}{p}$. To oznacza, że w pierwszym ciągu takich liczb mamy dokładnie $\lfloor \frac{N}{p} \rfloor$. Analogicznie w drugim ciągu jest ich $\lfloor \frac{N}{q} \rfloor$, co łącznie daje $\lfloor \frac{N}{p} \rfloor + \lfloor \frac{N}{q} \rfloor$. Dla liczby niewymiernej x mamy $x - 1 < \lfloor x \rfloor < x$, stąd:

$$N - 2 = \left(\frac{N}{p} - 1 \right) + \left(\frac{N}{q} - 1 \right) < \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor < \frac{N}{p} + \frac{N}{q} = N.$$

To oznacza, że $\lfloor \frac{N}{p} \rfloor + \lfloor \frac{N}{q} \rfloor = N - 1$, bo jest to liczba całkowita. Wiemy w takim razie, że liczb mniejszych od N jest w obu tych ciągach dokładnie $N - 1$. Podobnie dowodzimy, że liczb mniejszych od $N + 1$ jest dokładnie N . Odejmując te wyniki, wnioskujemy, że liczba N pojawia się w tych ciągach dokładnie raz.

skupia wzrok i uwagę na literze, którą chce napisać, a w momencie jej podświetlenia w sygnale EEG zanotujemy załamek P300.

Steady-state visually evoked potentials. Gdy obserwujemy bodziec wizualny pojawiający się z określoną częstością, neurony w rejonach kory wzrokowej zaczynają pracować z tą samą częstością. W widmie EEG zaobserwujemy zatem silniejsze występowanie składowej o częstości, z jaką występuje bodziec, co pokazane jest na rysunku 5.



Rys. 5. Widmo sygnału zarejestrowanego przez elektrodę znajdującą się nad korą wzrokową podczas stymulacji bodźcem o częstości 20 Hz.

Wyobrażenia ruchu. W różnych fazach „postępu” ruchu obserwujemy różne zjawiska w EEG. Tuż przed wykonaniem ruchu następuje chwilowy wzrost energii sygnału w pasmie gamma, zaczyna spadać energia w pasmie alfa i beta. Spadek ten utrzymuje się chwilę po wykonaniu ruchu i wtedy następuje też wzrost energii w pasmie beta, zwany odrzutem beta. Co ciekawe, nie musi to być faktyczne wykonanie, wystarczy jedynie wyobrażenie ruchu. Jest to bardzo istotne, bowiem daje szansę na obserwowanie wyobrażeń ruchu np. ręką u pacjenta, który tej ręki nie ma, bądź też w wyniku choroby neurodegeneracyjnej utracił kontrolę nad mięśniami. Tacy pacjenci też mogą korzystać z interfejsów mózg-komputer opartych o wyobrażenia ruchu.

W tym artykule pokrótce przedstawiliśmy podstawowe wiadomości dotyczące tworzenia interfejsów mózg-komputer opartych o nasze „fale mózgowe”, czyli EEG. W kolejnej części postaramy się przybliżyć bardziej praktycznie możliwości wykonania takiego urządzenia samodzielnie w domu, czy też w szkolnej pracowni. Do następnego odcinka!

Bibliografia

W artykule korzystaliśmy ze skryptu do encefalografii znajdującego się na stronie <http://brain.fuw.edu.pl/edu/EEG>. Rysunki 2, 3, 4 pochodzą z tego skryptu i są autorstwa odpowiednio dr. Rafała Kusia i prof. Piotra Durki. Rysunek 1 powstał na podstawie dwóch rysunków z Wikipedii: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Synapse_Illustration_unlabeled.svg autorstwa użytkownika Nrets; i http://en.wikipedia.org/wiki/File:Neuron_Hand-tuned.svg autorstwa użytkownika Quasar Jarosz.

Wielomiany Lagrange’a

Joseph Louis Lagrange (1736–1813) był ogromnie zniesmaczony ciągle nieudanymi próbami ścisłego zdefiniowania koniecznego dla zastosowań matematyki pojęcia pochodnej funkcji. Rzecz udawała się właściwie tylko dla wielomianów. Dlatego też – zamiast wymyślać kolejny sposób – postanowił uznać, że wszystkie funkcje to wielomiany – czasami bardzo wysokiego (żeby nie powiedzieć nieskończonego) stopnia (a więc również nieskończone szeregi potęgowe).

Aby teza taka dawała się stosować w praktyce, podał sposób zbudowania wielomianu, który w punktach x_1, x_2, \dots, x_n przyjmuje odpowiednio wartości a_1, a_2, \dots, a_n . Oto ten wielomian

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdot (x_i - x_2) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}$$

Mam nadzieję, iż Czytelnik bez trudu sprawdzi, że ten wielomian stopnia $n - 1$ rzeczywiście przyjmuje założone wartości, oraz sprawdzi, że wielomian niższego stopnia spełniający te warunki istnieje tylko dla specjalnego doboru wartości.

Pomysł Lagrange’a – jak by powiedział Józef Szwejk – był dobry, ale głupi. Ten drugi epitet bierze się stąd, że jeśli poznalibyśmy wartość poszukiwanej funkcji-wielomianu w jeszcze jednym punkcie, to uzyskany w wyniku algorytmu Lagrange’a wielomian stopnia n miałby wykres w niczym nie przypominający swego poprzednika stopnia $n - 1$. Dlatego też matematycy poszukiwali lepszego sposobu zastępowania dowolnych funkcji jakimiś prostymi szeregami. Największą karierę w drugiej połowie XIX wieku zrobiły szeregi trygonometryczne, a po następnych stu latach wymyślono już prawie doskonale „zastępujące” trygonometrię falki. Ale to już inna historia.

M. K.

Aby się przekonać, jak zmieniają się wielomiany Lagrange’a, gdy przybywa punktów, w których są określone wartości, proszę sprawdzić, że wielomian W , który dla $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ przyjmuje wartości $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, to $W(x) = x + 1$; gdy dodamy jeszcze dla $x_3 = 1$ wartość $a_3 = 4$, to będzie $W(x) = x^2 + 2x + 1$; a gdy dodamy dla $x_4 = 2$ wartość $a_4 = 15$, to $W(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. A po sprawdzeniu proszę narysować w jednym układzie współrzędnych wykresy tych trzech wielomianów.

Rozwiązana zagadka cefeid

Gwiazdy zmienne, od delty Cefeusza nazywane cefeidami, są niezbędnym ogniwiem procesu ustalania odległości we Wszechświecie. Wiąże się to z zależnością między ich jasnością absolutną a okresem zmienności, odkrytą 100 lat temu przez Henriettę Swan Leavitt dla tego typu gwiazd w Wielkim Obłoku Magellana. Bezpośrednie wyznaczenie odległości (za pomocą paralaksy) do jednej z takich gwiazd umożliwiło szacowanie dystansu do pozostałych. Dzięki temu Edwin Hubble mógł odkryć ucieczkę galaktyk i zapoczątkować obserwacyjną kosmologię.

Okazało się jednak, że cefeidy dzielą się na podklasy, z których główne dwie to cefeidy klasyczne (I rodzaju), które są pulsującymi nadolbrzymami, oraz cefeidy II rodzaju, które są mniejszymi od Słońca starymi gwiazdami o niskiej metaliczności, należącymi do II populacji gwiazd (zbieżność numeracji rzymskiej przypadkowa, choć symptomatyczna).

Od pół wieku trwa kontrowersja dotycząca mas cefeid klasycznych, które można szacować na dwa sposoby: albo wykorzystując teorię ewolucji gwiazd, albo teorię pulsacji gwiazd. Za pomocą pierwszego z tych sposobów otrzymuje się wynik o około 20% większy.

Do rozstrzygnięcia tej niepokojącej wątpliwości potrzebny by był niezależny pomiar masy jakiejś cefeidy klasycznej. Byłoby to możliwe po znalezieniu cefeidy klasycznej w układzie podwójnym, w płaszczyźnie orbity którego znajdowałby się Układ Słoneczny. Dzięki temu możliwa by była fotometryczna rejestracja wzajemnych zakryć gwiazd pozwalająca, w połączeniu z dokładnymi badaniami spektrometrycznymi, na precyzyjne wyznaczenie mas składników układu podwójnego.

Niestety, ani cefeidy, ani takie układy podwójne nie są wcale specjalnie częste. Dlatego do tego typu poszukiwań potrzebne jest zbadanie olbrzymiej liczby gwiazd. Tego typu przeglądy są uboczną korzyścią eksperymentów zaprojektowanych do poszukiwania zjawiska mikrosoczewkowania grawitacyjnego, takich jak MACHO lub OGLE.

I właśnie zespół OGLE, w którym dominującą rolę odgrywają astronomowie z Uniwersytetu Warszawskiego, opublikował, pod koniec zeszłego roku [1], wyniki pomiarów znalezionej przez siebie układu OGLE-LMC-CEP0227. Okazało się, że składniki układu mają (z dokładnością do procenta) identyczną masę, a jeden zakrywa drugi co 310 dni. Pierwszy jest poszukiwaną cefeidą o okresie pulsacji 3,8 dnia, a drugi gwiazdą trochę bardziej zaawansowaną ewolucyjnie, która przestała być cefeidą.

Obserwacje fotometryczne, wydobyte z danych zebranych przez lata obserwacji instrumentem OGLE, zlokalizowanym w Las Campanas Observatory w Chile, zostały uzupełnione o pomiary za pomocą spektrografu MIKE usytuowanego przy 6,5-metrowym teleskopie Magellan Clay zlokalizowanym w tym samym obserwatorium oraz za pomocą spektrografu HARPS (*High Accuracy Radial velocity Planet Searcher*), dołączonego do 3,6-metrowego teleskopu działającego w La Silla European Southern Observatory również w Chile. Precyzyjne pomiary spektrograficzne pozwalają na wyznaczenie prędkości radialnych (wzdłuż kierunku teleskop – badany układ) z dokładnością rzędu 100 m/s. Dopasowanie modeli do danych doświadczalnych umożliwiło wyznaczenie parametrów układu podwójnego, w tym (tzw. dynamicznej) masy cefeidy na $4,14 \pm 0,05$ masy Słońca, podczas gdy masa z modelu pulsacyjnego została określona na $3,98 \pm 0,29$ masy Słońca. Wskazało to na modele pulsacyjne jako właściwe przy określaniu mas klasycznych cefeid.

Piotr ZALEWSKI

O G Ł O S Z E N I E

Zrodził się pomysł na zorganizowanie ogólnopolskiego konkursu

Sztuka widzenia – zabawki dla dzieci słabowidzących

Adresatem konkursu są wszyscy, a w szczególności studenci oraz absolwenci kierunków ścisłych, technicznych i projektowych. Naszym celem jest zwrócenie uwagi na problemy dzieci słabowidzących, a w szczególności na brak prostych i tanich urządzeń, które mogłyby pobudzać koncentrację wzrokową poprzez zmianę nasilenia światła, zmianę koloru. To wszystko jest ważne w rehabilitacji dzieci słabowidzących, gdyż uczy spostrzegawczości, koncentracji oraz koordynacji wzrokowo-ruchowej. Dlatego ważne jest dla nas, aby jak najwięcej osób włączyło się w naszą akcję, gdyż uważamy, że może się z naszych działań zrodzić coś pięknego i niezwykle potrzebnego.

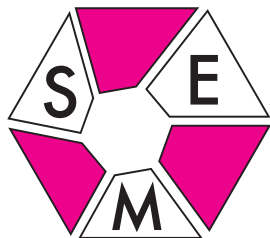
Studenckie kółka naukowe
przy Instytucie Fizyki UMK w Toruniu:
Nicolaus Copernicus University OSA
Chapter,
Nicolaus Copernicus University SPIE
Chapter

e-mail kontaktowy
danbu@fizyka.umk.pl

[1] G. Pietrzyński, I.B. Thompson, W. Gieren, D. Graczyk, G. Bono, A. Udalski, I. Soszyński, D. Minniti, B. Pilecki, *The dynamical mass of a classical Cepheid variable star in an eclipsing binary system*, *Nature* **468**(25/11/2010)542–544.
Zobacz także <http://xxx.lanl.gov/abs/1012.0231>

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl



W dniach 26–28 listopada 2010 roku w Ośrodku Szkoleniowo Wypoczynkowym *Mazowsze* w Soczewce koło Płocka odbyła się organizowana przez SEM wspólnie z wydziałami Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej i Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego konferencja *Gdzie jest matematyka?*. Organizując to spotkanie, Stowarzyszenie podtrzymało dobrą tradycję poprzednich dwóch konferencji: *Konkursy matematyczne w Polsce* oraz *Matematyka – jak uczyć?*, stwarzając okazję do spotkania wszystkim zainteresowanym odpowiedzią na przewodnie pytanie. W konferencji wzięło udział prawie 130 matematyków z całej Polski. Byli to zarówno nauczyciele matematyki szkół różnych typów, jak i pracownicy naukowcy wyższych uczelni. W trakcie konferencji prelegenci wskazywali, gdzie znajdują matematykę, prezentowali piękno matematycznego rozumowania i użyteczność matematycznych modeli w praktycznych zastosowaniach. Słuchacze mogli zobaczyć matematykę w bazgrołach, sztuce gotyckiej, sporcie, szaradach, łamigłówkach...

Kilku uczestników konferencji w swoich wystąpieniach nawiązało do nieco innego spojrzenia na indukcję matematyczną.

Niech $T(n)$ oznacza, że pewne twierdzenie jest prawdziwe dla liczby naturalnej n . Jeżeli istnieje ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $\{n_k\}$, taki że $T(n_k)$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz dla $m \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest implikacja $T(m+1) \Rightarrow T(m)$, to dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi $T(n)$.

Bardzo ładnym przykładem zastosowania takiej wstecznej indukcji jest poniższy dowód nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną n dodatnich liczb rzeczywistych.

$$T(n) : \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Zauważamy, że $T(2)$ jest standardową szkolną nierównością. Ponadto jeżeli zachodzi $T(2^n)$ dla pewnego naturalnego $n \geq 1$, to dla 2^{n+1} liczb dodatnich mamy

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_{2^n} + a_{2^n+1} + \dots + a_{2^{n+1}}}{2^{n+1}} &= \frac{\frac{a_1 + \dots + a_{2^n}}{2^n} + \frac{a_{2^n+1} + \dots + a_{2^{n+1}}}{2^n}}{2} \stackrel{T(2^n)}{\geq} \frac{(a_1 \dots a_{2^n})^{\frac{1}{2^n}} + (a_{2^n+1} \dots a_{2^{n+1}})^{\frac{1}{2^n}}}{2} \geq \\ &\stackrel{T(2)}{\geq} (a_1 \dots a_{2^n})^{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}} (a_{2^n+1} \dots a_{2^{n+1}})^{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}} = (a_1 \dots a_{2^{n+1}})^{\frac{1}{2^{n+1}}}. \end{aligned}$$

Wnioskujemy stąd, że $T(2^n)$ zachodzi dla dowolnej liczby naturalnej n . Pozostała do wykazania prawdziwość implikacji $T(m+1) \Rightarrow T(m)$.

$$\frac{a_1 + \dots + a_m}{m} = \frac{a_1 + \dots + a_m + \frac{a_1 + \dots + a_m}{m}}{m+1} \stackrel{T(m+1)}{\geq} (a_1 \dots a_m)^{\frac{1}{m+1}} \left(\frac{a_1 + \dots + a_m}{m} \right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Ostatnia nierówność redukuje się do postaci

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_m}{m} \right)^{\frac{m+1}{m}} \geq (a_1 \dots a_m)^{\frac{1}{m+1}}.$$

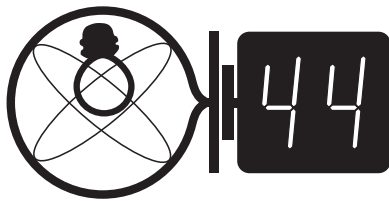
Podnosząc uzyskaną nierówność stronami do potęgi $\frac{m+1}{m}$, kończymy dowód.

Uczestnicy konferencji na co dzień zajmują się szeroko rozumianą edukacją matematyczną, więc to zrozumiałe, że przewodnim motywem konferencji było poszukiwanie matematyki w szkole. I chociaż nikt z uczestników nie negował ważności matematycznej erudycji ani potrzeby opanowania matematycznej techniki, trudno nie zgodzić się z konkluzją jednego z referentów, że *matematyka jest tam, gdzie jest matematyczne myślenie*. Więcej informacji o konferencji można znaleźć na stronie <http://sem.edu.pl/konferencja-2010>

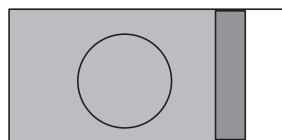
27 listopada 2010 w Soczewce odbyło się Nadzwyczajne Walne Zgromadzenie SEM. NWZ dokonało zmian w składzie Zarządu SEM. Z funkcji członka Zarządu SEM, na własną prośbę, został zwolniony Edmund Puczyłowski, a nowym członkiem Zarządu został wybrany Michał Krych. Ponadto NWZ wybrało delegatów na Walne Zgromadzenia Delegatów SEM w tej kadencji, które zastąpią od nowego roku Walne Zgromadzenia SEM.

Delegatami zostali: Wiktor Bartoł, Beata Bogdańska, Paweł Chrzastowski, Jacek Dymel, Adam Dzedziej, Wojciech Guzicki, Elżbieta Jabłońska, Joanna Jaszuska, Joachim Jelisiejew, Renata Jurasińska, Urszula Kapala, Anna Koronka, Tadeusz Koźniewski, Paweł Kwiatkowski, Katarzyna Matczak, Wojciech Martys, Maria Mędrzycka, Michał Niedźwiedź, Edmund Puczyłowski, Barbara Roszkowska-Lech, Waldemar Rożek, Paweł Rudecki, Leszek Sidz i Tomasz Szymczyk.

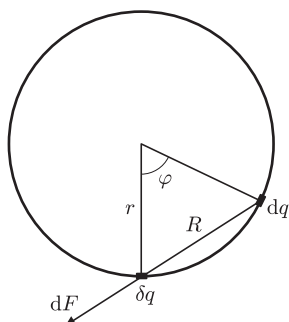
Klub 44



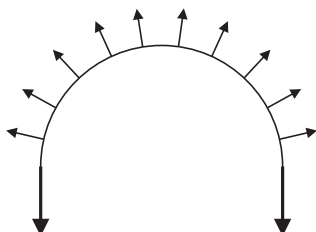
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2011



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

504. Oznaczmy dane (wg kolejności w treści zadania) jako v, f, d, s, v_d . Jeśli od wysłania dźwięku do jego dotarcia do krowy upływa czas t , to droga dźwięku wynosi $v_d t$, a droga lokomotywy – vt . Z odpowiedniego rysunku wynika równanie

$$(vt + \sqrt{s^2 - d^2})^2 + d^2 = (v_d t)^2,$$

którego rozwiązanie zapiszemy tylko w postaci liczbowej:

$t = 1,674$ s. Rzut prędkości lokomotywy na kierunek „do krowy” miał w chwili wysłania dźwięku wartość

$$v_a = v \frac{vt + \sqrt{s^2 - d^2}}{v_d t} = 42,49 \text{ m/s},$$

co po podstawieniu do wzoru na efekt Dopplera daje wynik

$$f_{\text{odb}} = f \frac{v_d}{v_d - v_a} = 1143 \text{ Hz}.$$

505. Siła δF działająca na mały fragment pętli o ładunku dq ze strony wszystkich pozostałych może być obliczona jako suma sił opisanych wzorem

$$dF = k \frac{\delta q dq}{R^2} = k \frac{\delta q dq}{(2r \sin(\varphi/2))^2},$$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>

Zadania z fizyki nr 512, 513

Redaguje Jerzy B. BROJAN

512. Dwóch studentów przechadzało się nad brzegiem stawu. W mętnej wodzie podskakiwała szyjka butelki wrzuconej przez jakiegoś wandalę.

– Założę się o dychę, że potrafię obliczyć średnią głębokość zanurzenia tej butelki – powiedział Fizyk.

– Ściemniasz, przecież nic nie widać w tej zupie! – zaproponował Humanista. – Przyjmuję zakład!

Fizyk ustawił funkcję stopera na swoim zegarku i zmierzył czas 10 okresów drgań butelki – wyszło mu 7,8 sekundy. Przetastawił zegarek na kalkulator i po paru obliczeniach zawołał:

– Piętnaście centymetrów, sprawdzamy i jesteś do tyłu o dychę!

Który student wygrał zakład?

513. W cylindrze zamkniętym tłokiem znajduje się powietrze, w którym unosi się bańka mydlana (rys. 1). Przesunięto tłok, sprężając powietrze. Jeśli przepływy ciepła można pominąć (przemiana adiabatyczna), to mocniej ogrzało się powietrze wewnątrz bańki, czy na zewnątrz niej, czy jednakowo?

Rozwiązania zadań z numeru 10/2010

Przypominamy treść zadań:

504. Lokomotywa jadąca po prostym torze ze stałą prędkością 180 km/h gwizdzie, wydając ton o częstotliwości 1000 Hz. W odległości 300 m od toru stoi krowa. Ile wyniesie częstotliwość tonu słyszanego przez krowę w momencie, gdy lokomotywa zbliży się do niej na odległość 500 m? Prędkość dźwięku w powietrzu ma wartość 340 m/s.

505. Obliczyć siłę rozciągającą kołową pętlę o promieniu 10 cm równomiernie naładowaną ładunkiem 10 μC . Pozostałe niezbędne dane ocenić orientacyjnie. Pętla jest wykonana z drutu.

gdzie symbole zostały opisane na rysunku 2. Rzut wektora dF na kierunek promienia ma wartość

$$dF' = dF \cdot \sin(\varphi/2) = k \frac{\delta q dq}{4r^2 \sin^2(\varphi/2)}.$$

Jeśli siłę δF spróbujemy obliczyć jako całkę (podstawiając $dq = \frac{q}{2\pi} d\varphi$), to napotykamy rozbieżność typu logarytmicznego

$$\delta F = \int dF' = \frac{kq \delta q}{4\pi r^2} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi/2)}.$$

Źródłem kłopotów jest nieuwzględnienie grubości drutu r_d , która ma znaczenie dla tych jego fragmentów, które są bardzo bliskie elementu wyróżnionemu. Ograniczenie siły oddziaływania na odległości rzędu r_d oznacza przyjęcie dolnej granicy całkowania równej około r_d/r (zamiast zera), czyli całka wyjdzie równa $2 \ln(4r/r_d)$.

Aby wyznaczyć naprężenie N pętli, można rozważyć siły działające na jedną jej połówkę. Spójrzmy na rysunek 3 – widać, że suma rzutów sił δF na oś symetrii tej połówki (czyli całka z wyrażenia $\delta F \cdot \cos \theta$ w granicach od $\theta = -\pi/2$

do $\theta = +\pi/2$) jest równoważona przez dwie siły N :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\delta F}{\delta \theta} \cos \theta \delta \theta = \frac{\delta F}{\delta q} \frac{q}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \delta \theta =$$

$$= \frac{kq^2}{4\pi^2 r^2} \ln \left(\frac{4r}{r_d} \right) \cdot 2 = 2N.$$

Po podstawieniu danych z treści zadania otrzymujemy $N = 2,28 \text{ N} \cdot \ln(4r/r_d)$, czyli np. dla drutu o średnicy 2 mm mamy $N \approx 14 \text{ N}$, a dla drutu o średnicy 0,2 mm wychodzi $N \approx 19 \text{ N}$. Jak widać, zależność wyniku od grubości drutu nie jest bardzo silna, jednak ma istotne znaczenie. Efekt ten uwzględniliśmy tylko orientacyjnie.

* * *

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej	
Klub 44 F	
po 501 zadaniach	
Jacek Piotrowski (Rzeszów)	1-37,13
Marian Łupieżowiec (Gliwice)	36,55
Tomasz Rudny (Warszawa)	32,65
Andrzej Nowogrodzki	
(Chocianów)	2-30,57
Jerzy Witkowski (Radlin)	2-31,75
Dariusz Wilk (Rzeszów)	26,57
Andrzej Idzik (Bolesławiec)	9-26,47
Tomasz Wietecha (Tarnów)	7-24,39
Radosław Poleski (Kolobrzeg)	23,47
Ryszard Woźniak (Kraków)	16,05

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2008-2010 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 15 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (9), T. Wietecha (7), J. Łazuka, M. Wójcicki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: J. Lipkowski, K. Magiera, A. Nowogrodzki, P. Perkowski, J. Witkowski;

„jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Karcia, M. Koźlik, M. Łącki, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.

Zadanie 487 [Pręt zawieszony w środku kołysze się w polu Ziemi wokół pionowego położenia równowagi] (współczynnik trudności $WT = 2,73$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 2$). „Zupełnie poprawnych” rozwiązań właściwie nie było, ale dwóch Klubowiczów prawidłowo przedstawiło dwa istotne elementy problemu: p. **T. Wietecha** uporał się z kierunkami sił działających na końce, a p. **J. Witkowski** – z niezależnością wyniku od długości i masy pręta oraz jej konsekwencją (możliwością uogólnienia wyniku na pręt jednorodny). Kompletne rozwiązanie wymagałoby tylko połączenia tych elementów – ale nie namawiamy Czytelników do zakładania spółdzielni...

Zadanie 490 [Dlaczego po zamieszanu herbaty fusy zbierają się w środku dna szklanki?] ($WT = 1,95$, $LPR = 4$). Jak się okazało, problem był analizowany w dostępnych źródłach: p. **A. Idzik** znalazł go w zbiorku Słobodeckiego i Asłamazowa, a p. **T. Wietecha** odwołał się do fachowych prac inżynierskich na temat

Pięćset zadań stuknęło fizycznej lidze w *Delcie!* To znaczy, 25 lat (uwzględniając przerwy wakacyjne), srebrny jubileusz! Oto dobry moment na dokonanie bilansu. W ciągu tego ćwierćwiecza rejestr odnotował około 290 uczestników, z tego jednak około 100 wzięło udział tylko w pierwszych 25 seriach (2,5 roku), a potem, gdy początkowy entuzjazm stopniał i liczba korespondentów zmalała, zawiesiło aktywność. Członkami Klubu zostały 33 osoby, w tym jedna Pani – Anna Gluza z Torunia. (Czy wciąż mieszka w Toruniu i czy nosi to samo nazwisko? Ileż mogło się zmienić po tylu latach! Ale wróćmy do tematu.) Dziewięciu mamy Weteranów, peleton prowadzi Andrzej Idzik z Bolesławca na Dolnym Śląsku, mając na koncie 9 razy 44 punkty, czyli trzykrotną normę weterańską. Za nim mknie Tomasz Wietecha z Tarnowa (7 rund), który drugie miejsce kompensuje sobie z nawiązką dzięki ośmiokrotnemu zaliczeniu normy w klubie matematycznym. Przy okazji, porównanie z ligą matematyczną wypada z grubsza jak 1 do 3 zarówno co do comiesięcznej liczby listów, jak i co do liczby członków klubu. Nie da się ukryć, że jesteśmy „młodszyimi braćmi” Klubu 44 M – ale jeśli ktoś woli, może uznać naszą ligę za bardziej elitarną...

Obok grupy mniej lub bardziej stałych uczestników mamy też korespondentów okazjonalnych, przysyłających rozwiązania w sporych odstępach czasu. Rekord długości takiej przerwy padł niedawno: 18 lat! Trudno powiedzieć, czy prowadzący rubrykę bardziej cieszy się z udziału starych znajomych, czy z „powrotu syna marnotrawnego” po kilku- lub kilkunastoletniej pauzie. To drugie pozwala przypuszczać, że przez cały ten czas pozostawał naszym Czytelnikiem, a tylko inne obowiązki nie pozwalały na udział w naszej zabawie.

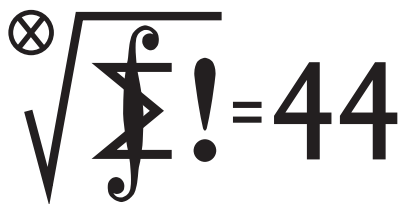
Przypominamy o możliwości przysyłania projektów zadań przez uczestników ligi, co w przypadku akceptacji punktowane jest – zgodnie z regulaminem – na równi z poprawnym rozwiązaniem. Czekamy zwłaszcza na pomysły oryginalne i zabawne!

A teraz zobaczymy, co ciekawego nadeszło z listami naszych Czytelników w ciągu ostatniego roku.

stożka osadu, wcześniej będącego przedmiotem rozważań Alberta Einsteina – ni mniej, ni więcej! Rozwiązania niezależne nadesłali p. **K. Magiera** i p. **M. Koźlik**.

Zadanie 497 [Ogrzewanie gazu w cyklu przemian nieodwracalnych] ($WT = 3,28$, $LPR = 2$). Punkty (a) (źródłem nieodwracalności jest przepływ ciepła i wyrównanie temperatury) oraz (c) (wyrównanie temperatury i ciśnienia) prawidłowo rozwiązali **M. Koźlik** i **A. Idzik**, natomiast nietypowy punkt (b) (wyrównanie tylko ciśnienia, skutek przepływu przez wąską rurkę) okazał się trudny, zgodnie zresztą z oczekiwaniami autora. Niektóre z nadesłanych wyników były wręcz zdumiewające: oto nieodwracalny cykliczny proces wyrównywania ciśnień miałby prowadzić do *obniżenia* temperatury gazu, w jawnej sprzeczności zarówno z I, jak i II zasadą termodynamiki! Towarzyszące w parze zadanie 496 [Obwód z woltomierzem o skończonym oporze własnym] ($WT = 1,00$, $LPR = 10$) spełniło rolę „damy do towarzystwa”, bo osiągnęło rekord łatwości.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2011

Lista uczestników ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
603 ($WT = 1,88$) i 604 ($WT = 1,81$)
z numeru 6/2010

Franciszek S. Sikorski	45,98
Janusz Olszewski	11-45,63
Tomasz Warszawski	2-42,26
Bartłomiej Dydą	4-41,03
Piotr Kumor	10-40,19
Michał Kieza	3-36,46
Łukasz Garncarek	1-33,48
Jerzy Cisło	7-32,86
Zbigniew Skalik	1-32,27
Jan Czardybon	30,48
Andrzej Daniluk	2-29,74
Andrzej Dorobisz	29,11
Paweł Najman	4-28,96
Paweł Kubit	4-28,93
Jacek Jendrej	27,67
Joachim Jelisiejew	27,50
Joanna Bogdanowicz	26,02
Piotr Sobczak	25,18
Zbigniew Sewartowski	1-24,03
Tomasz Tkocz	2-23,77
Wojciech Świeboda	23,15
Paweł Łabędzki	23,04
Roksana Słowik	22,99
Adam Dzedzej	1-22,72
Krzysztof Dorobisz	3-22,64
Tomasz Choczewski	22,41
Piotr Żmijewski	1-21,51
Michał Miodek	21,18
Michał Koźlik	21,00
Krzysztof Kamiński	1-20,83

Legenda (przykładowo): stan konta
7-32,86 oznacza, że uczestnik już
siedmiokrotnie zdobył 44 punkty,
a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 32,86
punktów.

Listę otwiera **Franciszek Salezy
Sikorski** – nowa twarz w naszym
Klubie. Za nim **Janusz Olszewski** –
rekomendacja zbędna! to już „44” po raz
dwunasty.

Zestawienie obejmuje wszystkich
uczestników ligi, którzy spełniają
następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie
wykonywanej rundzie) wynosi
co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej
jednego zadania z rocznika 2008, 2009
lub 2010.

Nie drukujemy więc nazwisk tych
uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy
lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli
ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do
naszych matematycznych łamigłówek,
jego nazwisko automatycznie wróci
na listę. Serdecznie zapraszamy!

Zadania z matematyki nr 615, 616

Redaguje Marcin E. KUCZMA

615. Każdemu podzbirowi B zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, który nie zawiera żadnej pary liczb kolejnych, przyporządkowujemy liczbę $p(B)$, będącą iloczynem liczb w zbiorze B (dla zbioru pustego przyjmujemy $p(\emptyset) = 1$). Obliczyć sumę kwadratów wszystkich uzyskanych liczb $p(B)$.

616. Udowodnić nierówność dla liczb dodatnich x, y, z :

$$\frac{(y+z)^2}{x^2+yz} + \frac{(z+x)^2}{y^2+zx} + \frac{(x+y)^2}{z^2+xy} \geq 6.$$

Zadanie 616 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2010

Przypominamy treść zadań:

607. Niech X będzie zbiorem n -elementowym ($n > 3$). Wyznaczyć największą liczbę m , dla której w zbiorze X istnieje m podzbiórów, z których żaden nie zawiera się w innym oraz żaden nie jest równoliczny z innym.

608. Znaleźć wszystkie funkcje określone na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające nierówność

$$f(x) - f(y) \geq f(xy)(y - x) \quad \text{dla } x, y > 0.$$

607. Niech \mathcal{F} będzie rodziną m podzbiórów zbioru X , spełniającą zadane warunki. Jeżeli do \mathcal{F} należy zbiór pusty lub zbiór pełny (cały zbiór X), to już żaden inny zbiór nie może do \mathcal{F} należeć. W tym przypadku $m = 1$.

Jeżeli do \mathcal{F} należy pewien zbiór jednoelementowy J oraz pewien zbiór $(n-1)$ -elementowy M , to muszą się one dopełniać (bo inaczej $J \subset M$) oraz żaden inny zbiór nie może do \mathcal{F} należeć (bo albo zawiera J , albo jest zawarty w M). W tym przypadku $m = 2$.

Przyjmijmy dalej, że żadna z tych sytuacji nie ma miejsca. Wszystkie zbiory w \mathcal{F} mają z założenia różne licznosci. Wykluczone zostały licznosci 0, n oraz albo 1, albo $n-1$. Pozostaje $n-2$ możliwych licznosci. Zatem $m \leq n-2$.

Pokażemy teraz, że dla każdego $n \geq 4$ istnieje w zbiorze $X = \{1, \dots, n\}$ rodzina $n-2$ podzbiórów $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_{n-2}\}$ o wymaganych własnościach. Najpierw przykłady dla $n = 4$, $n = 5$:

$$n = 4: \quad X = \{1, 2, 3, 4\}; \quad A_1 = \{4\}, \quad A_2 = \{1, 2\};$$

$$n = 5: \quad X = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \quad A_1 = \{5\}, \quad A_2 = \{3, 4\}, \quad A_3 = \{1, 2, 3\}.$$

Dalej indukcja ze skokiem o 2. Niech $\{A_1, \dots, A_{n-2}\}$ będzie „dobrą” rodziną podzbiórów zbioru $\{1, \dots, n\}$, ponumerowanych tak, że $|A_k| = k$ dla $k = 1, \dots, n-2$. Bierzymy zbiór $X = \{1, \dots, n+2\}$ i określamy:

$$B_k = A_{k-1} \cup \{n+1\} \quad \text{dla } k = 2, \dots, n-1; \quad B_1 = \{n+2\}, \quad B_n = \{1, \dots, n\}.$$

Widać, że $|B_k| = k$ dla $k = 1, \dots, n$ i że żaden ze zbiorów B_k nie jest podzbiorem innego. Tak więc $\{B_1, \dots, B_n\}$ jest rodziną podzbiórów X , o jaką chodzi.

Dostajemy odpowiedź: dla każdej liczby $n \geq 4$ maksymalna licznosc rodziny \mathcal{F} wynosi $n-2$.

608. Zamieniając miejscami x i y , a następnie mnożąc uzyskaną nierówność przez -1 , otrzymujemy nierówność taką samą, jak wyjściowa, lecz przeciwnie skierowaną. Treścią zadania jest więc równanie funkcyjne

$$f(x) - f(y) = f(xy)(y - x) \quad \text{dla } x, y > 0.$$

Podstawiając $y = 1$ i oznaczając $a = f(1)$, dostajemy równanie $f(x) - a = f(x)(1 - x)$, czyli $a = xf(x)$. Zatem

$$f(x) = \frac{a}{x} \quad \text{dla pewnej stałej } a > 0.$$

Proste sprawdzenie pokazuje, że każda taka funkcja spełnia rozważane równanie.

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
 J. Janowicz (8), P. Kamiński (5),
 M. Galecki (5), J. Uryga (4),
 A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał,
 T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin,
 J. Ciach (5), M. Prauz (4), P. Kumor (10),
 P. Gadziński (7), K. Jedziniak,
 J. Olszewski (12), L. Skrzypek (4),
 H. Kornacki, T. Wietecha (8), T. Józefczyk,
 J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (4),
 M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (4),
 J. Cisło (7), W. Bednarek (5), D. Kurpiel,
 P. Najman (4), M. Kieza, M. Kasperski,
 K. Dorobisz, A. Woryna
 (jeśli uczestnik przekroczył barierę
 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje
 to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M
 (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik,
 A. Daniluk, Z. Galias, P. Jędrzejewicz,
 H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza,
 J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta,
 E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski,
 K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, T. Tkocz,
 T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: T. Biegański,
 W. Boratyński, M. Czerniakowska,
 A. Dzedziej, P. Figurny, M. Fiszer,
 Ł. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza,
 T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, A. Idzik,
 K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Józwiak,
 K. Kamiński, G. Karpowicz, J. Klisowski,
 J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa,
 A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak,
 M. Łupieżowicz, J. Mańdziuk, B. Marczak,
 M. Marczak, M. Matłęga, R. Mazurek,
 H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek,
 R. Mitraszewski, M. Mostowski,
 W. Olszewski, R. Pikula, B. Piotrowska,
 W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz,
 A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski,
 Z. Skalik, A. Smolczyk, M. Spychała,
 Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk,
 K. Trautman, P. Wach, K. Witek,
 A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus,
 K. Zawisławski, P. Żmijewski.

* * *

Kolejny rok ligowy za nami. Czołowe postaci zeszłorocznego omówienia nie zamierzają oddać pola następcom. **Janusz Olszewski** idzie jak burza, co rok pełna runda 44 – właśnie zakończył dwunastą. **Tomasz Wietecha** w dwuboju *mat-fiz* nie ma sobie równych.

Wśród zadań minionego sezonu było kilka bardzo ciekawych. Rzetelnie trudnych, a przy tym dających pole do wykazania się pomysłowością. Dokładniejsze omówienie – niżej. Zwróćmy uwagę, że są to prawie wyłącznie zadania o numerach parzystych, czyli proponowane przez Czytelników; a właściwie grupkę kilku osób, których nazwiska powtarzają się cyklicznie, z dużą regularnością. Autorom tych zadań dziękujemy za to, co już, i prosimy o jeszcze. Innych uczestników też zachęcamy do próbowania sił w twórczości autorskiej. Dzięki Wam liga żyje!

Zadanie 586 [$X \subset \{1, \dots, 99\}$, $|X| = 9 \Rightarrow \exists A, B \subset X: A \neq B, (\sum A) = (\sum B)$] (współczynnik trudności $WT = 2,76$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 3$). Rozmiary danych mieściły się jeszcze w zasięgu domowego komputera; można było sprawdzić wszystkie możliwości – tak to zrobił **Zbigniew Galias**.

Janusz Olszewski przedstawił dowód dość podobny do firmowego (który dał **Krzysztof Dorobisz**, autor zadania), jednak różniący się na tyle, że warto go tu pokazać.

Niech $1 \leq x_1 < \dots < x_9 \leq 99$ i – nie wprost – przypuśćmy, że wszystkie podzbiory zbioru $X = \{x_1, \dots, x_9\}$ mają różne sumy. Patrzymy na niepuste podzbiory A zbioru $Y = X \setminus \{x_9\}$ o liczności $|A| \leq 5$; jest ich 218. Odrzucamy te, w których $(\sum A) < x_4$; jest ich ≤ 7 (tworzy się je jedynie z x_1, x_2, x_3). Niech S będzie zbiorem sum $(\sum A)$ wszystkich zbiorów, które pozostały; te sumy są różne, więc $|S| \geq 211 > 2x_9$. Zatem $\exists s, s', s'' \in S: s < s' < s'', s \equiv s' \equiv s'' \pmod{x_9}$. Ponieważ $(\max S) < x_4 + 4x_9$, $(\min S) \geq x_4$, więc $s'' - s < 4x_9$. Stąd $s' = s + x_9$ lub $s'' = s' + x_9$, co oznacza, że $\exists A, C \subset Y: (\sum A) = (\sum C) + x_9$. Biorąc $B := C \cup \{x_9\}$, dostajemy $(\sum A) = (\sum B)$.

Autor nadmienił jeszcze, że podobna metoda działa dla 9-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, \dots, 126\}$.

Obaj wymienieni autorzy sprawdzili numerycznie, że teza nie zachodzi dla zbioru $\{1, \dots, 161\}$, posiadającego podzbiór $\{77, 117, 137, 148, 154, 157, 159, 160, 161\}$, którego wszystkie podzbiory mają różne sumy. Zadali też pytanie, jak to jest ogólnie: dla $m \in \mathbb{N}$ – jaka jest najmniejsza liczba $w = w(m) \in \mathbb{N}$, dla której w zbiorze $\{1, \dots, w\}$ istnieje m -elementowy podzbiór Z , którego wszystkie podzbiory mają różne sumy. (Teza naszego zadania: $w(9) > 99$.) Jest to *problem Erdősa–Mosera*; ma sporą literaturę. **Piotr Kumor** wskazał pracę: P. Borwein, M. J. Mossinghoff, *Newman polynomials...*, opublikowaną w *Mathematics of Computation* (72 (2003), 787–800), dostępną także pod <http://www.cecm.sfu.ca/~pborwein/> (w dziale MY PAPERS), opisującą algorytm, który pozwoliło sprawdzić, że istotnie $w(9) = 161$ – oraz zawierającą dalsze odsyłacze bibliograficzne.

Zadanie 590 [$n \in \mathbb{N}$, parzysta; $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(\frac{1+x}{2}\right)^n \leq \frac{1+x+\dots+x^n}{n+1}$] ($WT = 2,66$; $LPR = 5$). Niech $P_n(x)$ oznacza wielomian po prawej stronie zadanej nierówności (dla $x \neq 1$: $P_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$). Teza brzmi zatem: $P_n(x) \geq P_1(x)^n$ dla $n = 2k$, $x \in \mathbb{R}$.

P. Kumor udowodnił lemat: $P_{n+1}(x) > P_1(x)P_n(x)$ dla $|x| < 1$, $n \in \mathbb{N}$ (badając pochodną różnicy między lewą i prawą stroną). Umożliwia on analizę danej w zadaniu nierówności dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, niekoniecznie parzystych. Wyniki dla $|x| < 1$ uzyskuje się z lematu indukcyjnie; z nich zaś, zastępując x przez $1/x$, wyniki dla $|x| > 1$:

$$P_n(x) < P_1(x)^n \quad \text{gdy } x < -1, n = 2k + 1, k \geq 1;$$

$$P_n(x) = P_1(x)^n \quad \text{gdy } x = 1 \text{ lub } n = 1 \\ \text{lub } (x = -1, n = 2k + 1);$$

$$P_n(x) > P_1(x)^n \quad \text{w pozostałych przypadkach.}$$

Z. Sewartowski doszedł do tych samych ustaleń, badając pochodną funkcji $P_n(x)/P_1(x)^n$.

Tylko **J. Olszewski** i **P. Najman** zauważyli, że teza zadania jest banalnym wnioskiem z (równie banalnej) *nierówności Hadamarda*

$$\int_a^b f(t) dt \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

zachodzącej dla funkcji $f \geq 0$, wypukłej w przedziale $(a; b)$ (prawa strona to pole trapezu pod styczną do wykresu w punkcie $\frac{a+b}{2}$); wystarczy przyjąć $f(t) = t^n$ w przedziale o końcach 1, x (to samo uzasadnienie miał na myśli autor zadania **T. Tkocz**).

Nieco inne, już nie tak proste rozumowanie z użyciem całek (dokładniej: średnich potęgowych) przedstawił **W. Bednarek**.

Zadanie 592 [Punkt P wewnątrz czworościanu $ABCD$; proste AP, BP, CP, DP przecinają sfery $PBCD, PCDA, PDAB, PABC$ w punktach $K, L, M, N \Rightarrow \frac{|AK| \cdot |BL| \cdot |CM| \cdot |DN|}{|AP| \cdot |BP| \cdot |CP| \cdot |DP|} \geq 256$] ($WT = 3,40$; $LPR = 3$). Uczestników ligi wyraźnie odstraszyła treść – tyle sfer!... Tymczasem – zacytujmy fragment jednej z prac: *Po rozwiązaniu analogicznego zadania płaskiego, przerobienie go na 3D jest już łatwie; spora liczba sfer, przecinających się w jednym punkcie, jest wskazaniem do zastosowania inwersji*. Tak właśnie – przez inwersję przestrzenną – biegnie rozwiązanie firmowe (autor zadania: **Michał Kieza**); i tak też je rozwiązała **Adam Dzedziej** (z jego pracy był cytaty) i **Janusz Olszewski**. Jeszcze **Adam Woryna** – wprawdzie nie używa słowa *inwersja*, ale konstruuje czworościan jednokładny do tego uzyskanego „inwersyjnie” w rozwiązaniu firmowym i dowodzi analogicznych proporcji.

Zadanie 593 [$a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2, a_{n+3} = (a_{n+1}a_{n+2} + 5)/a_n \Rightarrow$ wszystkie a_n całkowite] (WT = 1,71; LPR = 21). Zadanie nietrudne, dużo dobrych rozwiązań. **Tomasz Więtecha** rozwiązał zadanie nieco ogólniejsze, gdzie składnik 5 w formule rekurencyjnej jest zastąpiony dowolną liczbą naturalną p . Po wyprowadzeniu wzorów jawnych

$$a_{2k-1} = \frac{\beta^{k-1}(\alpha - 2) - \alpha^{k-1}(\beta - 2)}{\alpha - \beta},$$

$$a_{2k} = \frac{\beta^{k-1}(\alpha - 2 - p) - \alpha^{k-1}(\beta - 2 - p)}{\alpha - \beta},$$

gdzie α, β to pierwiastki trójmianu $x^2 - qx + 1$ ($\alpha > \beta$), zaś $q = (3p + 5)/2$, otrzymał zależności

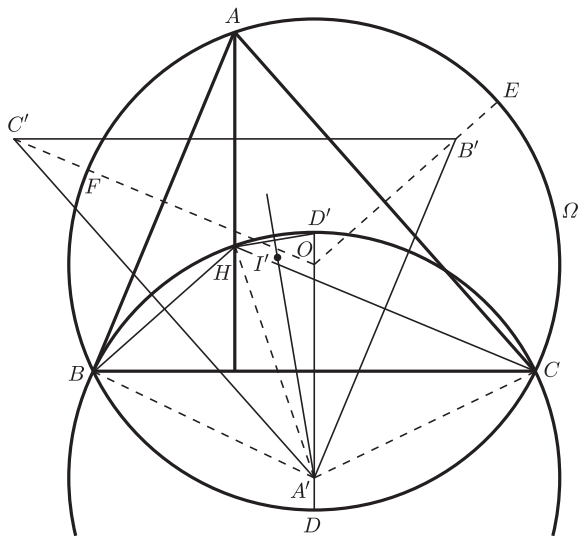
$$a_{2k+3} = qa_{2k+1} - a_{2k-1},$$

$$a_{2k+4} = qa_{2k+2} - a_{2k} \quad (a_4 = p + 2).$$

Jeśli p jest liczbą nieparzystą, to q jest liczbą całkowitą i wszystkie a_n są całkowite.

Zadanie 598 [$M = \{1, 2, \dots, m^2\}$; ile podzbiorów bez pary liczb o różnicy podzielnej przez m ? o różnicy równej m ?] (WT = 2,85; LPR = 7). Poprawne rozwiązania nie różniły się istotnie od firmowego: **R. M. Ayoush, J. Cisko, A. Dorobisz, A. Dzedzej, J. Garnek, P. Sobczak** oraz **P. Najman**.

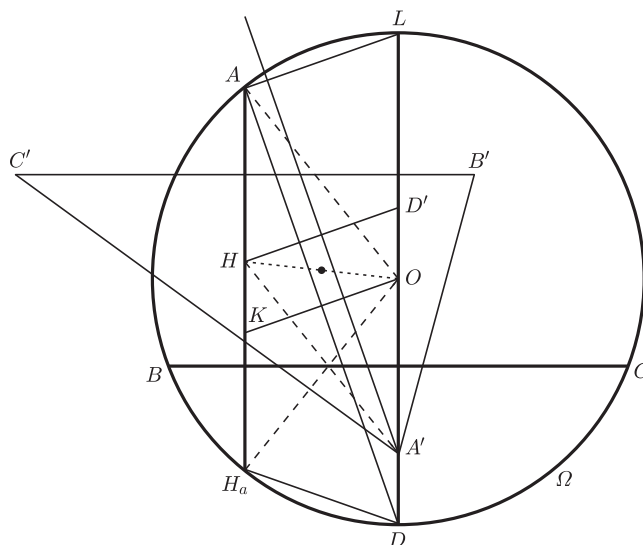
Zadanie 600 [$\triangle ABC$ wpisany w okrąg; D, E, F – środki łuków BC, CA, AB ; D', E', F' – ich odbicia symetryczne względem prostych BC, CA, AB ; H – ortocentrum $\Rightarrow D', E', F', H$ leżą na okręgu] (WT = 2,83; LPR = 4). Autor zadania, **Michał Kieza**, jest też autorem rozwiązania firmowego. Na uwagę zasługują dwa prostsze rozwiązania.



Jerzy Cisko: A', B', C' – punkty symetryczne do O (środkła okręgu opisanego Ω) względem prostych BC, CA, AB . Punkt A' jest środkiem okręgu symetrycznego do Ω , przechodzącego przez punkty B, C, D' oraz H ; leży on na symetralnych cięciw BH i CH . Analogicznie, te same symetralne przechodzą (odpowiednio) przez punkty C' i B' ; zatem półproste $A'C'$ i $A'B'$ połowią kąty $HA'B$ i $HA'C$. Stąd łatwo wynika, że dwusieczna kąta $C'A'B'$ jest też dwusieczną kąta $D'A'H$, czyli symetralną odcinka $D'H$. Punkt I' , w którym przecinają się dwusieczne trójkąta $A'B'C'$, jest więc środkiem okręgu, przechodzącego przez punkty D', E', F', H .

Marek Spychała: A', B', C', O, Ω – jak wyżej; $H_a = AH \cap \Omega$; DL – średnica Ω ; $OLAK$ – równoległobok.

Skoro $AD \perp AL$, zaś O jest środkiem DL , to AD jest symetralną odcinka OK . Odcinek HD' jest symetryczny względem prostej BC do cięciwy H_aD okręgu Ω ; jest więc równoległy do cięciwy AL i czworokąt $OKHD'$ jest równoległobokiem. Odcinek HA' jest symetryczny względem BC do H_aO ; jest więc równoległy do AO i czworokąt $OAHA'$ jest równoległobokiem. Symetria względem środka odcinka OH zamienia punkty: $O \leftrightarrow H, K \leftrightarrow D', A \leftrightarrow A'$, i analogicznie $B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$. Dwusieczna kąta A w trójkącie ABC , będąca symetralną OK , przechodzi na dwusieczną kąta A' w trójkącie $A'B'C'$, będącą symetralną $D'H$. Konkluzja jak w poprzednim rozwiązaniu.



Rozwiązanie rachunkowe (trygonometryczne) przedstawił **Tomasz Tkocz**. Rozwiązanie firmowe (choć zapisane w języku rachunku na wektorach) znalazł **Janusz Olszewski**, który ponadto zauważył proste uogólnienie: *Jeśli X jest dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC , a proste AX, BX, CX przecinają okrąg opisany w punktach D, E, F , to punkty symetryczne do D, E, F względem środków boków BC, CA, AB leżą na jednym okręgu z ortocentrum ABC . (W zadaniu X jest środkiem okręgu wpisanego.) Rzeczywiście, aby uzyskać to uogólnienie, wystarczy w rozwiązaniu firmowym w jednym miejscu wykreślić słowo „prostokątnych” i wszędzie zastąpić I przez X .*

Zadanie 602 [$a, b, c > 0; bc + ca + ab = 1; A = \frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{1+a^2+\sqrt{bc}}}$; B, C określone analogicznie $\Rightarrow A + B + C \leq \frac{1}{a+b+c}$] (WT = 2,18; LPR = 11). Rozwiązania były w większości zgrabniejsze od firmowego. Wybierzmy to, które podał **R. M. Ayoush** (choć bardzo podobnie rozumowali **W. Bednarek, J. Cisko, J. Olszewski**). Z nierówności Cauchy'ego–Schwarza:

$$\sqrt{1 + \frac{a}{b}} \cdot \sqrt{1 + \frac{a}{c}} \geq 1 \cdot 1 + \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a}{c}} \geq 1 + \frac{2a}{b+c};$$

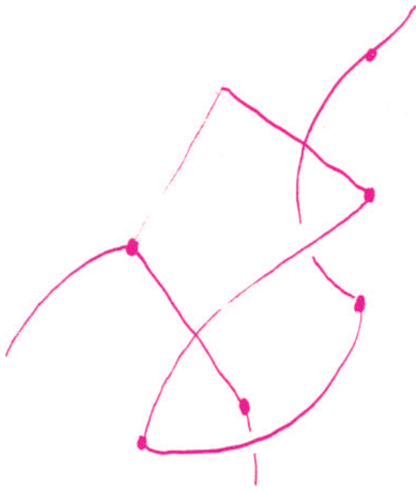
stąd

$$A = \frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{bc}} =$$

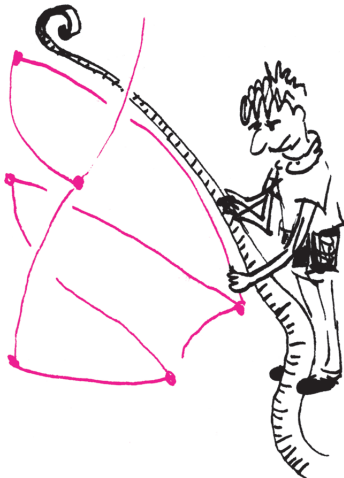
$$= a \left(1 + \sqrt{1 + \frac{a}{b}} \cdot \sqrt{1 + \frac{a}{c}} \right)^{-1} \leq$$

$$\leq a \left(2 + \frac{2a}{b+c} \right)^{-1} = \frac{ab+ac}{2(a+b+c)}.$$

Ta nierówność i jej dwa cykliczne odpowiedniki dają po zsumowaniu tezę zadania!



Jak osiągnąć poziom bezpieczeństwa 3
 Początkowo traktujemy każdą grupę jako pojedynczą osobę i rozwiązujemy problem w starym modelu dla k osób i dla wymagania, że do odzyskania sekretu potrzebnych jest $\frac{k}{2}$ osób. Następnie uzyskane punkty traktujemy jako kolejne sekrety, które w obrębie grupy ponownie szyfrujemy za pomocą tej samej techniki, ale tym razem dla pięciu osób łącznie i trzech potrzebnych do odszyfrowania.



Informatyczny kącik olimpijski (38): Oszczędny kod

Tematem kolejnej edycji Kącika jest zadanie pochodzące z zeszlórocznej Międzynarodowej Olimpiady Informatycznej o nazwie *Oszczędny kod* (ang. *Saveit*).

Naszym celem jest zakodowanie, a później odkodowanie pewnych informacji. Musimy zaimplementować dwie części programu, z których pierwsza otrzyma pewien nieskierowany spójny graf oraz liczbę H . Jej zadaniem jest wygenerowanie ciągu bitów. Na podstawie tegoż ciągu, liczby N – liczby wierzchołków grafu – oraz liczby H , druga część programu powinna odkodować interesujące nas informacje, tzn. najkrótsze odległości pomiędzy pewnymi parami wierzchołków grafu. Wyjaśnijmy teraz, że wierzchołki grafu są ponumerowane od 0 do $N - 1$, a interesują nas odległości wierzchołków o numerach od 0 do $H - 1$ do wszystkich wierzchołków grafu. Kluczowe w zadaniu jest wygenerowanie możliwie krótkiego ciągu bitów, który pozwoli na odkodowanie potrzebnych informacji. Przyjmujemy, że numery wierzchołków (oraz inne liczby mniejsze niż N) możemy zapisać, używając B bitów (czyli w istocie $B = \lceil \log N \rceil$).

Najprostszym sposobem jest po prostu przesłanie całego grafu. Niewątpliwie jest to wystarczające do uzyskania wszelkich informacji na jego temat. Graf można przesłać jako liczbę krawędzi, a następnie ich listę. W przypadku, gdy graf jest pełny, daje to $(N^2 - N + 2)B$ bitów. Można też przesłać macierz sąsiedztwa, która, naturalnie, zawiera $N(N - 1)/2$ istotnych bitów (mimo że jest ich łącznie $N(N - 1)$, ale połowę z nich można ustalić, korzystając z symetryczności tej macierzy).

Kolejnym pomysłem jest najpierw obliczyć wszystkie interesujące nas odległości, a następnie zakodować je i przesłać do drugiej części programu. Interesujących nas liczb jest NH i każda zajmie B bitów, co da łącznie NHB bitów. Jest to dosyć satysfakcjonujące rozwiązanie i było na Olimpiadzie doceniane połową liczby punktów za to zadanie.

Istnieją jednak lepsze rozwiązania, opierające się na następujących spostrzeżeniach. Przede wszystkim zwróćmy uwagę na to, jaki jest związek odległości dwóch sąsiednich wierzchołków a i b od ustalonego wierzchołka c . Otóż, nie mogą one różnić się o więcej niż 1. Weźmy bowiem najkrótsze ścieżki z c do tych dwóch wierzchołków, długości $d(c, a)$ i $d(c, b)$, odpowiednio. Oczywiście, moglibyśmy z c pójść do a , a następnie przejść krawędzią z a do b , co dałoby odległość $d(c, a) + 1$, a skoro długość najkrótszej ścieżki z c do b to $d(c, b)$, więc mamy $d(c, b) \leq d(c, a) + 1$. Analogicznie w drugą stronę. Różnica między $d(c, a)$ i $d(c, b)$ należy więc do zbioru $\{-1, 0, 1\}$.

Aby skorzystać z powyższego faktu, musimy najpierw wiedzieć o jakichś parach wierzchołków, że są sąsiadami. W związku z tym spójrzmy na wierzchołek o numerze 0 i dla każdego innego wierzchołka x znajdziemy f_x – najbliższy od x wierzchołek na najkrótszej ścieżce z x do 0. Zauważmy, że pary (x, f_x) to krawędzie naszego grafu, które tworzą drzewo rozpinające. Na ich podstawie możemy łatwo wyznaczyć odległości wszystkich wierzchołków od 0 ze wzoru $d(0, x) = d(0, f_x) + 1$. Zastanówmy się teraz, jak wyznaczyć odległości od wszystkich wierzchołków z wierzchołka $z \in \{1, 2, \dots, H - 1\}$. Przede wszystkim znamy $d(0, z) = d(z, 0)$. Ponadto, dla każdego $x \neq 0$ mamy: $d(z, x) = d(z, f_x) + r(z, x)$, przy czym wiemy już, że $r(z, x) \in \{-1, 0, 1\}$, gdyż x i f_x są sąsiadami. W takim razie wystarczy przesłać wszystkie liczby f_x oraz $r(z, x)$, które zajmują $B(N - 1) + 2(H - 1)(N - 1)$ bitów. Dwójka oznacza tu dwa bity potrzebne na przesłanie liczby ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$.

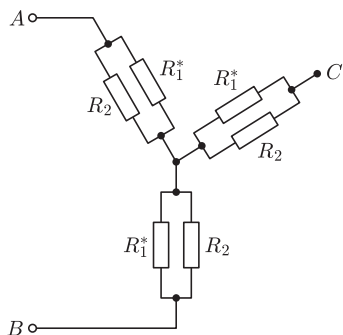
Ostatnie usprawnienie, wymagane na zawodach do uzyskania maksymalnej noty, polega na tym, aby zmniejszyć tę właśnie dwójkę do jakiejś mniejszej stałej. Widzimy bowiem, że nie wykorzystujemy w pełni tych dwóch bitów, skoro kodujemy na nich tylko trzy różne możliwości, zamiast dostępnych czterech. Dobrym pomysłem jest spojrzenie na pełen bajt (tzn. 8 bitów) i spostrzeżenie, że można w nim zakodować 256 różnych możliwości, a więc w szczególności $243 = 3^5$ różnych możliwości, czyli pięć wartości $r(z, x)$. Stąd dwójkę możemy mniej więcej zastąpić liczbą $\frac{8}{5}$ – liczbą wykorzystanych bitów to wówczas $\lceil \log N \rceil (N - 1) + 8 \lceil \frac{(H - 1)(N - 1)}{5} \rceil$.

Zachęcamy Czytelnika do zastanowienia się, czy do rozwiązania zadania wystarczy użyć $\lceil (N - 1) \log N \rceil + \lceil (H - 1)(N - 1) \log 3 \rceil$ bitów (zauważmy, że nie jest to wielka poprawka, gdyż $\log 3 \approx 1,58496$). Warto także zastanowić się, jak szybko działają wszystkie opisane wyżej rozwiązania.

Tomasz KULCZYŃSKI



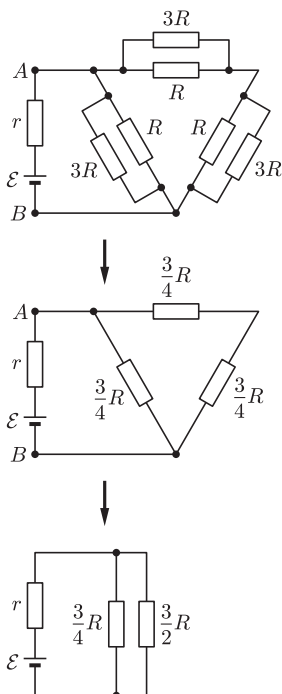
Rozwiązanie zadania F 781.
Redukcja trójkąta w obwodzie do połączenia typu „gwiazdka” pokazana jest na rysunku, przy czym $R_1^* = R_1^2/(3R_1) = 3 \Omega$.



Stąd $R_{AB} = 2 \frac{R_1^* R_2}{R_1^* + R_2} = 4 \Omega$.



Rozwiązanie zadania F 782.
Redukcja obwodu pokazana jest na rysunku, opór zastępczy między punktami A i B wynosi $0,5R$.



Moc wydzielana między punktami A i B jest równa $P = I^2 R/2$, przy czym $I = \mathcal{E}/(r + 0,5R)$. Zatem

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{r \left(\sqrt{\frac{2r}{R}} + \sqrt{\frac{R}{2r}} \right)^2}$$

Wyrażenie typu $x + 1/x$ ma najmniejszą wartość dla $x = 1$. Moc P będzie maksymalna, gdy wyrażenie w mianowniku będzie minimalne, a więc gdy $R = 2r$.

Patrz w niebo: Gwiazdy mało masywne

Jeszcze pod koniec poprzedniego wieku odkryto setki gwiazd chłodniejszych niż gwiazdy typu widmowego M, czyli o temperaturze poniżej 2200 K. Zaszła więc naturalna potrzeba rozszerzenia klasyfikacji widmowej, a dokładniej – wydłużenia sekwencji symboli OBAFGKM w kierunku niższych temperatur. Dodano więc symbol L dla gwiazd o temperaturze między 2200 a 1300 K oraz symbol T dla jeszcze chłodniejszych.

Wystąpił jednak problem, czym właściwie jest obiekt o tak niskiej temperaturze. Typem M może bowiem być brązowy karzeł, który jeszcze nie zdążył wystygnąć (czyli dostatecznie młody), zaś typem L może być młoda gwiazda, która jeszcze nie zdążyła rozgrzać się na tyle, by osiągnąć typ M. A może to nawet nie jest gwiazda? Wszystko zależy od masy obiektu, gdyż – jak wiadomo – gwiazda zasługuje na tę nazwę, czyli świeci kosztem reakcji termojądrowych, jeżeli jej masa jest nie mniejsza niż 0,08 masy Słońca, czyli około 80 Jowiszów. Niestety, masy brązowych karłów można wyznaczać tylko sposobami okrężnymi, np. przez porównanie ich cech fizycznych z modelami stygnących obiektów.

Ale na początku XXI wieku udało się wyznaczyć masy pewnych gwiazd niemal bezpośrednio, czyli na podstawie praw mechaniki nieba. Grupa kilkunastu astronomów niemieckich śledziła względny ruch gwiazd w układzie podwójnym o numerze katalogowym J0746425+2000321 w katalogu obiektów podczerwonych 2MASS (od *2 Micron All Sky Survey*). Siedem obserwacji układu wykonanych w okresie niemal czterech lat za pomocą czterech wielkich teleskopów (jednym z nich był nawet Teleskop Kosmiczny Hubble’a), doskonale ukazało orbite jednej gwiazdy (słabszej) względem drugiej. To, oczywiście, pozwoliło na określenie elementów orbity oraz mas obu gwiazd: 85 i 65 Jowiszów. Tak więc gwiazdy te okazały się (przy uwzględnieniu błędów obserwacji) obiektami niemal na granicy „bycia gwiazdą”. Jest to bardzo cenny wynik, ponieważ niesie informację dotyczącą gwiazd najmniej masywnych, a ponadto uzyskaną metodą niewymagającą żadnych dodatkowych założeń, poza prawem grawitacji.

Tomasz KWAST

Luty

W lutowe wieczory niemal w zenicie widzimy gwiazdozbiór Woźnicy. Trochę trudno go rozpoznać z powodu mnóstwa gwiazd Drogi Mlecznej w okolicy, na szczęście jest tam jedna bardzo jasna gwiazda, Capella, alfa Woźnicy. Jest ona jedną z najjaśniejszych gwiazd nieba i ma jasność 0,08 mag. Jest to gwiazda podwójna, czego nie da się dostrzec za pomocą amatorskich przyrządów, i leży w odległości 14 pc. Jest żółtym olbrzymem typu G8, a więc zbliżonego do słonecznego, ma więc też temperaturę zbliżoną do słonecznej i tylko rozmiary (dominujący składnik) ma 17 razy większe. Gwiazdozbiór tradycyjnie rysowany jest na mapach jako wielokąt przypominający latawca, w którego wnętrzu (i na zewnątrz, blisko jego obwodu) mamy aż sześć gromad otwartych, wszystkie widoczne przez niewielki teleskop. Co ciekawe, pięć z nich znajduje się w odległościach między 1,3 a 1,5 kpc od nas, czyli praktycznie identycznych. Trochę to dziwny ich rozkład. Sama zaś liczba gromad nie powinna dziwić z powodu wspomnianej obecności tam Drogi Mlecznej.

W tym roku luty jest ubogi w okazałe zjawiska niebieskie. Merkury z powodu bliskości Słońca jest praktycznie niewidoczny. Wenus jest w Strzelcu i widać ją przed wschodem Słońca, czyli w porze mało popularnej, zwłaszcza zimą. Mars jest w Koziorożcu i też zbyt blisko Słońca (4 marca ma złączenie ze Słońcem). Jowisz jest w Rybach i zachodzi szybko po zachodzie Słońca. Jedyne Saturna, który jest w Pannie, można oglądać w drugiej połowie nocy. Nów Księżyca wypada 3 II, a pełnia 18 II. Nie ma w lutym żadnych zaćmień ani zakryć jasných obiektów. Nie będzie nawet żadnych przewidywalnych rojów meteorów. A może trochę szkoda, bo noce są długie i można by je wykorzystać.

T. K.

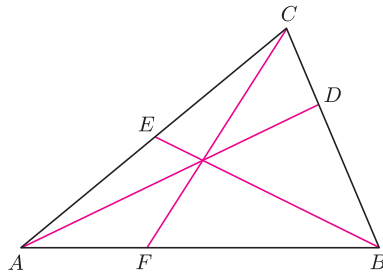
Twierdzenie Cevy

Joanna JASZUŃSKA

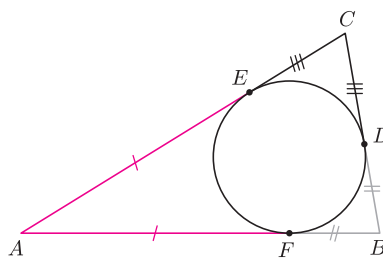
W wielu zadaniach dane są trzy proste, które albo przecinają się w jednym punkcie, albo należy to o nich udowodnić. Wygodnym narzędziem bywa wtedy

Twierdzenie Cevy. Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC (rys. 1). Wówczas proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

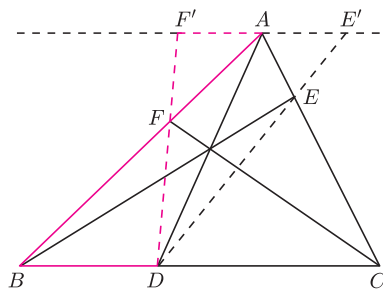
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$



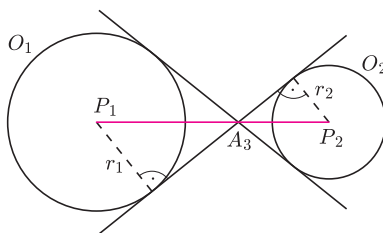
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4. Dla $i = 1, 2, 3$ przez r_i oznaczamy promień okręgu O_i .

1. W sytuacji z rysunku 1 wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia

$$\frac{AF}{FB} + \frac{BD}{DC} + \frac{CE}{EA}.$$

2. Punkty D, E, F są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC odpowiednio do boków BC, CA, AB . Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie (tzw. *punkcie Gergonne'a*).

3. Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC , proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie. Proste DE i DF przecinają prostą równoległą do BC , przechodzącą przez punkt A , odpowiednio w punktach E' i F' . Udowodnij, że punkt A jest środkiem odcinka $E'F'$.

4. Dane są rozłączne zewnętrznie okręgi O_1, O_2, O_3 o środkach odpowiednio P_1, P_2, P_3 . Te dwie styczne do obu okręgów O_1, O_2 , które rozdzielają te okręgi, przecinają się w punkcie A_3 . Punkty A_1 i A_2 zdefiniowane są analogicznie. Wykaż, że proste P_1A_1, P_2A_2, P_3A_3 przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązania

R1. Z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną i z twierdzenia Cevy mamy

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{AF}{FB} + \frac{BD}{DC} + \frac{CE}{EA} \right) \geq \sqrt[3]{\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA}} = 1.$$

Stąd najmniejszą wartością sumy jest 3. Kiedy jest ona osiągnana? \square

R2. Zachodzą następujące równości odcinków stycznych do okręgu (rys. 2): $EA = AF, FB = BD, DC = CE$. Stąd

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{BD} \cdot \frac{BD}{CE} \cdot \frac{CE}{AF} = 1,$$

co na mocy twierdzenia Cevy kończy dowód. \square

R3. Skoro $AF' \parallel BD$, to $\triangle AF'F \sim \triangle BDF$ (rys. 3). Stąd $AF/FB = AF'/BD$. Podobnie $CE/EA = DC/E'A$. Z twierdzenia Cevy otrzymujemy tezę:

$$1 = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF'}{BD} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{DC}{E'A} = \frac{AF'}{E'A}. \square$$

Wskazówka 4. Punkty P_1, A_3, P_2 są współliniowe (rys. 4) i z twierdzenia Talesa $P_1A_3/A_3P_2 = r_1/r_2$.

Zadania domowe:

5. Punkty D, E, F są punktami styczności okręgów dopisanych do trójkąta ABC odpowiednio do boków BC, CA, AB . Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie (tzw. *punkcie Nagela*).

6. Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym $\sphericalangle ADB = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ADF$. Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

7. Wykaż, że w jednym punkcie przecinają się: środkowe dowolnego trójkąta, dwusieczne dowolnego trójkąta, wysokości trójkąta ostrokątnego.

8. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P . Punkt M jest środkiem boku AB . Prosta MP przecina bok CD w punkcie Q . Udowodnij, że stosunek pól trójkątów BCP i ADP jest równy stosunkowi długości odcinków CQ i DQ .

Zadanie 8 pochodzi z I etapu I Olimpiady Matematycznej, rozwiązanie można znaleźć na stronie www.om.edu.pl