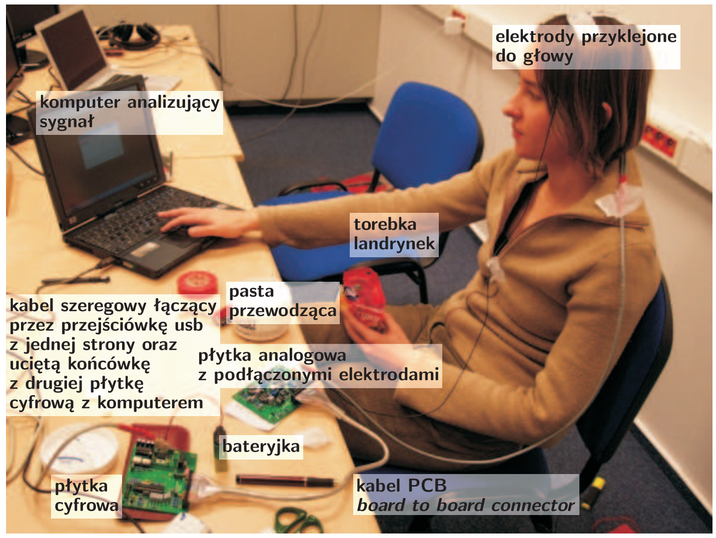
## W następnym numerze polecamy




Czy można skonstruować wyjście szeregowe z mózgu do komputera i sterować maszyną wyłącznie za pomocą myśli? Joanna Jędrzejewska-Szmek i Magdalena Michalska (na zdjęciu) podpowiedzą, jak to zrobić w warunkach domowych.

# SPIS TREŚCI
## NUMERU 1 (440)




Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.





Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.



Skład systemem TEX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.




Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):
http://www.mimuw.edu.pl/delta


Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

**Inne spojrzenie, czyli odpowiedź na pytanie, dlaczego**

# Martin Gardner był wielkim matematykiem, choć matematykiem nie był

Martin Gardner urodził się 21 października 1914 r., a zmarł 22 maja 2010 r. Dwadzieścia pięć lat (1956–81) z jego długiego żywota zajęło redagowanie kącika matematycznego w *Scientific American*. I można by dopisać tu listę jego książek i artykułów. Ale to byłoby bez sensu. Bo o tym, co człowiek zrobił naprawdę, decyduje jedynie to, co w świecie po jego śmierci jest – dzięki niemu – inne, niż gdy się rodził.

Dość rozpowszechnione jest mniemanie, że matematyka to jest to, co robią matematycy. I wydaje się na pozór, że nie ma możliwości różnych interpretacji tego zdania. Pewien niepokój może, co prawda, wywoływać fakt, że tego rodzaju pogląd mają również uczniowie szkół niższych szczebli, co dla tych z nich, którzy spróbują uprawiać matematykę zawodowo, może się stać traumatycznym przeżyciem po wstąpieniu na studia. Aby temu zaradzić, powstało (w szczególności) dzieło *Co to jest matematyka?* Couranta i Robbinsa, w którym w sposób przystępny zrelacjonowano główne pojęcia i wyniki matematyki u progu XX wieku. Zaplecze dla tej książki stanowiły (niezbyt, co prawda, liczne) opracowania, od *Geometrii poglądowej* Hilberta i Cohn-Vossena po *Kalejdoskop matematyczny* Steinhausa. I one definiowały matematykę, choć społeczną opinię na ten temat deformowały (obok programu szkolnego) rozliczne dzieła popularyzatorów. I wydawało się, że tak być musi i tak już zawsze będzie: matematyka to produkty końcowe tego, czym zajmują się zawodowcy, plus techniczne przepisy umożliwiające wykonywanie obliczeń praktycznych.

Martin Gardner nie był matematykiem. Może właśnie dlatego mógł dostrzec, że matematyka – nawet określona wedle powyższych zasad – zmienia się. Coraz więcej bowiem matematyków zaczęło zajmować się budowaniem matematycznych modeli rzeczywistości. Działalność ta zaczęła dotyczyć nie tylko oczywistych opisów zjawisk fizycznych i ich technicznych realizacji, ale również procesów chemicznych, struktur biologicznych, medycyny, reguł genetycznych, prawidłowości handlu – i szerzej – gospodarki, zjawisk społecznych i psychicznych, wszelkiej logistyki, a nawet kultury.

Powszechność stosowania modeli matematycznych we wszystkich dziedzinach życia kazała Gardnerowi postawić pytanie, co on powinien zaczerpnąć z matematyki, by mógł prawidłowo i bez obaw posługiwać się tymi wszystkimi strukturami. Odpowiedź była bardzo prosta – i może dlatego dla wielu do dziś niedostrzegalna – nie będąc matematykiem, z matematyki trzeba zaczerpnąć nie jej wyniki i pojęcia, lecz **sposób myślenia**. I upowszechnieniem tego przekonania zajmował się całe życie.

Każdy bez trudu w Internecie, bibliotece czy księgarni znajdzie wiele tekstów Gardnera. Nie będę więc ich wyliczał, a pragnę tylko zwrócić uwagę na niektóre zadania czy pomysły, które dobitnie wskazują, jak inne jest jego spojrzenie na matematykę od prezentowanego np. w wymienionych wyżej książkach.

## Puchary

Miałem okazję wraz z Pawłem Strzeleckim być obiektem agresji w Kawiarence Naukowej *Przekroju* – rozwiązania poniższego zadania nie tylko nie zrozumiano, lecz nawet nie uwierzono, że jest możliwe.

*W jednym pucharze jest woda, w drugim wino. Zaczerpnięto z drugiego pucharu kieliszek wina i wlano do pierwszego. Potem zaczerpnięto ten sam kieliszek z pierwszego pucharu i wlano do drugiego. Czy na końcu więcej było wody w winie, czy wina w wodzie?*

Powodem agresji był fakt, że rozwiązanie nie zależy od tego, czy puchary miały tę samą objętość, ani od stosunku objętości pucharów i kieliszka, ani od tego, czy po pierwszej operacji wymieszano płyn w pierwszym pucharze itd. Wynik zawsze jest taki sam: *tyle samo jest wody w winie, co wina w wodzie*.

W obu naczyniach na początku i po obu operacjach poziom cieczy jest taki sam: ile więc jednej ubyło, tyle drugiej przybyło.

## Kolejka

*Codziennie o 16:00 mąż powraca z pracy kolejką podmiejską do rodzinnego Iksinowa. W tym też momencie jego żona zajeżdża na przystanek swoim samochodem, by odwieźć go do domu. Pewnego razu mężowi udało się wsiąść do godzinę wcześniejszej kolejki. Po przyjeździe do Iksinowa ruszył pieszo na spotkanie żony. Gdy spotkała go na drodze i powrócili do domu, okazało się, że są 10 minut wcześniej niż zwykle. Ile czasu mąż szedł pieszo?*

I tu nie jest ważne, jaka była odległość przystanku od domu, z jaką prędkością jechał samochód i z jaką prędkością szedł bohater opowieści. Jakiekolwiek by one nie były, wynik jest zawsze ten sam: *mąż szedł 55 minut*.

Jeśli żona wróciła do domu 10 minut wcześniej, to zawróciła o 5 minut wcześniej niż zazwyczaj – a więc o 15:55.

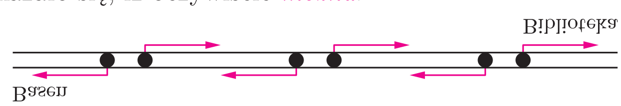
Obie metody, zastosowane przy rozwiązywaniu powyższych zadań, noszą w matematyce odpowiednio godne (może zresztą dla laików odstraszające) nazwy, ale nie ma najmniejszego powodu, by je przytaczać. U Gardnera nie uczymy się matematyki – uczymy się myśleć jak matematycy, a to zupełnie coś innego.

Najbardziej może istotnym elementem matematycznego myślenia według Gardnera (ale przecież wszyscy matematycy w istocie tak sądzą) jest obserwacja. Zobaczmy to na przykładach.

## Tramwaj

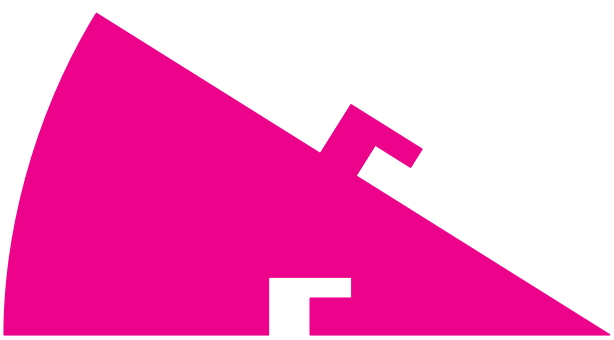
*Jaś po obiedzie biegnie na przystanek i wsiada w pierwszy nadjeżdżający tramwaj. Jadące w prawo wiozą go do biblioteki, a jadące w lewo – na basen. W każdą stronę tramwaje jeżdżą regularnie co dziesięć minut. Po półroczu okazało się, że Jaś cztery razy częściej bywał na basenie niż w bibliotece. Czy można wyjaśnić tę niesymetryczność, nie kwestionując tego, że obiady są podawane z dużą, losową nieregularnością, a Jaś tak samo lubi basen jak bibliotekę?*

Zadanie to, podane w bardziej frywolnej scenerii, było początkiem pierwszego wykładu z rachunku prawdopodobieństwa na moich studiach (w szkole wtedy probabilistyki nie było). I zawstydziliśmy się, gdy okazało się, iż oczywiście *można*.




Wystarczy ten rysunek?

## Odetnij połowę



czyli przetnij przedstawioną figurę na dwie identyczne części.

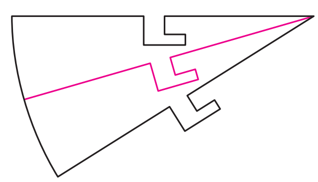


Figura ma dwie „dzikie" linie, które można nałożyć przez obrót względem ich wspólnego końca o pewien kąt. Obróćmy zatem „dziką" linię o połowę tego kąta. Otrzymana linia podzieli figurę na części jednakowe, bo dające się nałożyć przez obrót o tę samą połowę kąta.

## Turniej

*W turnieju tenisowym (a więc rozgrywanym systemem pucharowym) bierze udział 197 tenisistów. Jak zaplanować turniej, by wyłonić zwycięzcę, a przy tym – ze względu na wielką liczbę uczestników – żeby rozegrana została najmniejsza liczba meczów?*

Oczywiście, z punktu widzenia liczby meczów, *każde jego ułożenie jest jednakowo oszczędne*.

Istotnie, w każdym meczu odpada jeden zawodnik, więc meczów w każdym przypadku będzie 196.

To ostatnie zadanie przypomina znane zadanie o czekoladzie (np. $6 \times 4$): *jak najlepiej ją łamać, by każdy kafelek był osobno.*

Aby otrzymać dobry wynik (w naszym przypadku 23 łamania), trzeba dodać warunek, by nie łamać za jednym zamachem kilku kawałków położonych jedne na drugich. Wolne od takich ograniczeń jest kolejne zadanie.

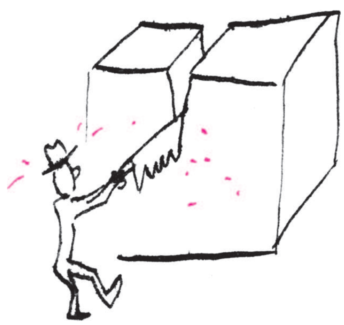
## Cięcie piłą

*Jak wiadomo, sześcian dzieli się na 27 sześcianów o trzy razy krótszej krawędzi. Jaka jest najmniejsza liczba cięć, które pozwolą to zrealizować? Uzyskane w jakimś cięciu kawałki można ułożyć jedne na drugich i ciąć za jednym zamachem.*

Pomalujmy sześcian jaskrawą farbą przed pocięciem. Po pocięciu jeden z sześcianików będzie miał wszystkie ściany niepomalowane. A ścian tych jest 6. Ponieważ żadnych dwóch z nich nie można otrzymać w jednym cięciu, więc mniej ich być nie może (a czy może być 6?).

Wszystko to pięknie, ale nie sposób nie zadać pytania

## czy taka gardnerowska matematyka to ta sama matematyka, którą uprawiają zawodowcy?

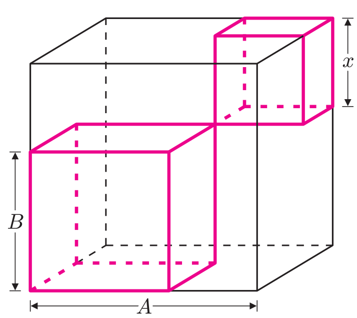


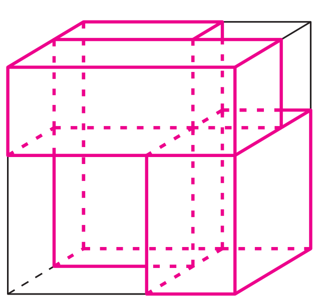
Innymi słowy, skąd wziąć pewność, że nie są to tylko jakieś „anegdotki” (by użyć sformułowania wybitnego autorytetu edukacji)? Jak udowodnić, że gardnerowskie myślenie to rzeczywiście myślenie matematyczne?

Przede wszystkim jest mocny dowód socjologiczny. Większość zarówno wybitnych, jak i szeregowych matematyków uważa, że to, co proponuje Gardner, wyraża ich sposób myślenia, a na dodatek jest – jako przygoda intelektualna – atrakcyjne również dla nich samych. Zostało to wyrażone w wielu publikacjach, w formie licznych nagród, w wydaniu kilku ksiąg ku czci Gardnera.

Ale o wiele lepszym dowodem jest jednak przyjrzenie się procesowi odkryć dokonywanych na pierwszej linii matematycznych zmagań. Tam, gdzie jesteśmy w stanie wyłuskać go z pancerza formalizmów, okazuje się on identyczny z przytoczonymi wyżej zadaniami.

## Równanie trzeciego stopnia



Tartaglia przyjrzał się temu, co będzie, gdy z przeciwległych rogów sześcianu o krawędzi $A$ wytniemy sześciany o krawędziach $B$ i $x$ stykające się jednym wierzchołkiem. I spostrzegł, że to, co zostanie, to trzy identyczne cegły o krawędziach $A$, $B$, $x$. Daje to zależność

$$A^3 = B^3 + x^3 + 3ABx, \quad \text{czyli} \quad x^3 + 3ABx = A^3 - B^3.$$

Gdy więc mamy rozwiązać równanie $x^3 + px = q$, możemy wyobrazić sobie taki sześcian, w którym $3AB = p$ (czyli $A^3B^3 = \frac{p^3}{27}$) i $A^3 - B^3 = q$. Otrzymaliśmy zwykłe, szkolne równanie kwadratowe:

$$(q + B^3)B^3 = \frac{p^3}{27}, \quad \text{czyli} \quad (B^3)^2 + q(B^3) - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Zatem

$$B^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2} \quad \text{i} \quad A^3 = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}.$$

Ponieważ z rysunku mamy $A = B + x$, więc

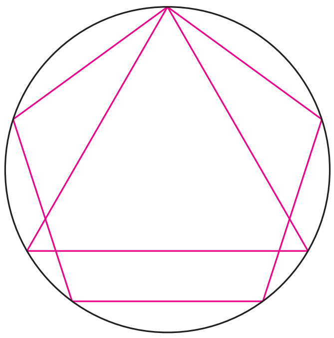
$$x = A - B = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}.$$

Na przykład dla $x^3 + 6x + 7 = 0$ mamy

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{49}{4} + 8} - \frac{7}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{49}{4} + 8} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{8} = 1 - 2 = -1.$$

Oczywiście, dalej mogą (muszą!) pojawić się kłopoty – już równanie $x^3 - 7x + 6 = 0$ zaskoczy nas niespodzianką – wzory się „zatną”, choć są oczywiste pierwiastki $-3$, 1, 2. Bo samo sprawne myślenie do tworzenia matematyki nie wystarczy – aby wzory Tartaglii udoskonalić tak, by działały zawsze, potrzebny jest sprawny matematyczny warsztat, ale początek został zrobiony przez cięcie sześcianu.

## Wielokąt foremny



Euklides po narysowaniu pięciokąta foremnego i trójkąta równobocznego (czyli też foremnego), które są wpisane w ten sam okrąg i mają wierzchołek wspólny, zauważył, że jeden z łuków wyznaczonych przez ich wierzchołki to 1/15 okręgu. Zatem gdy umiemy skonstruować pięciokąt foremny i trójkąt równoboczny (a to umiał i niektórzy spośród nas też umieją), umiemy też skonstruować piętnastokąt foremny. Ten wniosek z obserwacji obrazka był kluczowy dla sprawy konstruowalności wielokątów foremnych. Idąc bowiem dalej tym tropem, Euklides stwierdził, że jeśli umiemy skonstruować $n$-kąt foremny i $m$-kąt foremny, a przy tym $n$ i $m$ nie mają wspólnych dzielników, to rysując je wpisane w ten sam okrąg i tak, by miały wspólny wierzchołek, otrzymamy na okręgu łuk stanowiący jego $nm$-tą część, a więc będziemy umieli skonstruować $nm$-kąt foremny. Stąd już niedaleko do niepoprawialnego do dziś twierdzenia:

*jeśli umiemy skonstruować $p_i$-kąt foremny dla różnych liczb pierwszych $p_i$, $i = 1, \ldots, m$, to konstruowalne są $n$-kąty foremne, dla których*

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_m,$$

*gdzie $k$ jest dowolną liczbą naturalną.*

Gauss i Wanzel udowodnili, dla jakich liczb pierwszych jest spełnione powyższe *jeśli*, efektywnie znaleziono dotychczas 5 takich liczb i nie wiadomo nic więcej o tym, ile ich jest.

Jak widać, dystans, jaki dzieli podziwiany przez Euklidesa obrazek od do dziś nierozstrzygniętych pytań, jest niewielki.

## Liczby pierwsze

Euklides i liczby pierwsze nasuwają kolejną, gardnerowską w stylu, obserwację. Otóż właśnie Euklides zauważył, że przypuszczenie, iż 2, 3 i 5 to wszystkie liczby pierwsze, prowadziłoby do sprzeczności nawet wtedy, gdybyśmy nic o innych liczbach nie wiedzieli. Bowiem wtedy liczba

$$31 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$$

nie mogłaby istnieć: nie byłaby pierwsza (bo założyliśmy, że pierwsze są tylko wymienione trzy). Nie byłaby też złożona, bo przez żadną liczbę pierwszą (czyli 2, 3, 5) nie dzieli się.

A morał z tego taki, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, bo gdyby ich lista była skończona i miała długość $n$ (które, oczywiście, mogłoby być bardzo duże), to w analogiczny sposób wykluczałaby istnienie liczby

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

31 to liczba pierwsza. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$ to też liczba pierwsza. Można by z tego wysnuć wniosek, że *powiększony o 1 iloczyn każdej liczby początkowych liczb pierwszych jest liczbą pierwszą*, ale byłby to wniosek fałszywy, choć bardzo długo otrzymuje się faktycznie liczby pierwsze. Chwała Euklidesowi (choć pewnie nie dotarł do miejsca, gdy otrzymana liczba okazuje się złożona), że w tę pułapkę nie wpadł. Polecam sprawdzenie, kiedy po raz pierwszy otrzymuje się w ten sposób liczbę złożoną.

Uznajmy więc pogląd, że Gardner uczy myślenia matematycznego, za dowiedziony, ale zadajmy pytanie,

## czy można tak uczyć w szkole?

Faktycznie są to trzy pytania:

**czy** uczniowie uzyskaliby na tej drodze znajomość podstawowych faktów matematycznych?

**czy** takie wykształcenie matematyczne byłoby społecznie bardziej przydatne od realizowanego obecnie?

**czy** potrafilibyśmy to zrobić?

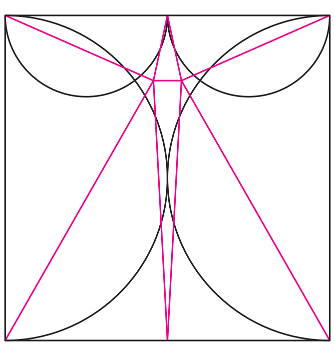
**Zacznijmy od pierwszego**. Oto przykład.

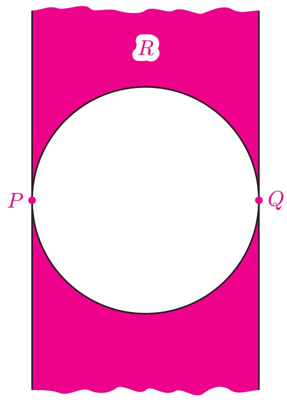
## Podział kwadratu

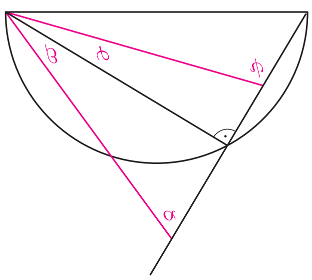
Poniższe zadanie wywodzi się z tzw. folkloru i ma tę cechę, że wielu matematyków uważa, iż to oni je pierwsi rozwiązali (w tej liczbie zarówno Gardner, jak i ja). Jest to, oczywiście, raczej niemożliwe, ale wskazuje na wysoką atrakcyjność problemu.

*Podziel kwadrat na trójkąty ostrokątne.*

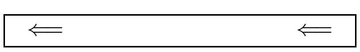
Rozwiązanie (ciekawe, że identyczne u wszystkich „autorów”) jest obok.






Zapewne wielu z Czytelników miało problem w wytłumaczeniu swoim dzieciom, uczniom, słuchaczom czy znajomym, jak z paska papieru zrobić wstęgę Möbiusa. Gardnerowskie podejście jest takie, by nie dać im możliwości popełnienia błędu. W tym celu należy poprosić o narysowanie na pasku strzałek, jak poniżej,



a następnie o złożenie paska tak, by strzałki dotykały się „całym ciałem”. Sprawdziłem to po raz pierwszy na dwustu niematematykach – wszyscy natychmiast uzyskali wstęgę.

Uzyskuje się w ten sposób podział na osiem trójkątów. Żmudnie można dowieść, że na mniej się nie da.

Ale na czym polega „szkolność” tego przykładu? Na tym, że jest to okazja do sprowokowania uczniów do własnego odkrycia kilku standardowych, podręcznikowych twierdzeń.

Po dłużej lub krócej trwającym zmaganiu się klasy z zadaniem (i ewentualnym podaniu jego rozwiązania) pytamy: ale dlaczego tak? Po co te okręgi? I proponujemy, aby pogłębić naszą wiedzę na temat trójkątów ostrokątnych. Stawiamy problem:

*Mamy punkty $P$ i $Q$. Gdzie leżą takie punkty $R$, że trójkąt $PQR$ jest ostrokątny*?

Wynikiem jest widoczna obok figura. I znów pytamy: dlaczego akurat taka? Trzymając się poprzednich konwencji, i tę odpowiedź podam lustrzanie.

Jeśli uczniowie wiedzą, że kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty, to dalej posługujemy się rysunkiem obok. Na nim mamy (wykorzystując informację, że suma kątów w trójkącie jest 180°)

$$\alpha + \beta = 90°,$$

więc kąt $\alpha$ jest ostry, oraz

$$\varphi + 90° = \psi,$$

więc kąt $\psi$ jest rozwarty.
Boczne ograniczenia z pewnością uczniowie uzasadnią sami.

I poprzestańmy na tym (przecież nie jedynym) przykładzie.

**Pytanie drugie.** Tu odpowiedź można zasugerować dwoma przykładami.

Nikt nie sądzi, że budowniczowie katedr gotyckich uprawiali lub przynajmniej znali geometrię na poziomie choćby Euklidesa, o Archimedesie nie wspominając. A to, co stworzyli, jest najpiękniejszym zastosowaniem geometrii wszech czasów. Oni geometrii nie znali – oni myśleli geometrycznie.

Każdy pas transmisyjny używany na dzisiejszej polskiej wsi jest wstęgą Möbiusa, co łatwo sprawdzić. Rzecz jasna, nikt tego nie wie – bo i po co? Wystarczy, że wszyscy wiedzą, że takie pasy ścierają się dwa razy wolniej od walcowych.

Bo – powtórzę istotę gardnerowskiego podejścia do matematyki – trzeba ją znać, gdy chce się ją tworzyć; natomiast gdy się chce w pełni korzystać ze stworzonych w oparciu o nią urządzeń, struktur, koncepcji, nie trzeba jej znać, ale trzeba myśleć matematycznie.

I w tym miejscu uważam, że mogę napisać, iż tytułowa teza została udowodniona. Jeden z moich przyjaciół głosił, że *dobrym kupcem bawełny nie jest ten, kto nią dobrze handluje, lecz ten, kto dba o rozwój handlu bawełną.* Sądzę, że ta myśl da się zastosować do Gardnera.

**Pozostaje pytanie trzecie.** Dzisiaj odpowiedzią na nie jest z całą pewnością **nie**. Jednak zarówno pomysł, by z wszystkich uczynić mniej lub bardziej sprawnych matematyków, jak pomysł, by traktować matematykę tak, jak za czasów mojej młodości traktowano w szkole łacinę (nieważne, że nieprzydatna, ale jak dyscyplinuje umysłowo!), nie nadają się do obrony. I nastąpi taki moment, gdy społeczeństwo samo upomni się, by je uczyć matematycznego myślenia, bo to jest opłacalne – tak stało się przecież, gdy ogromne pieniądze zostały przez ludzi włożone w naukę języka angielskiego i windowsów. I to będzie wielki sukces Gardnera, pierwszego, który odkrył tę sprawę.

Pewnie to nie będzie zaraz. Ale będzie, czego jestem tak pewien, jak tego, że swego czasu Pitagoras zapoczątkował istnienie dewiantów, zwanych matematykami (choć też przy tym nie byłem).

*Marek KORDOS*

# Gardner kontra pseudonauka: 60 lat walki

*Krzysztof TURZYŃSKI*

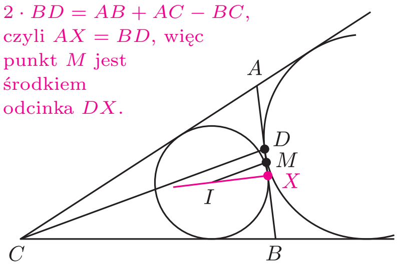
Pisanie o nauce do wysokonakładowych gazet może być niebezpieczne. Przekonał się o tym boleśnie Simon Singh, autor znanych także w Polsce książek popularnonaukowych, po tym, jak 19 kwietnia 2008 roku na łamach *Guardiana* odniósł się do działań Brytyjskiego Towarzystwa Kręgarskiego (*British Chiropractic Association*, *BCA*). Owo towarzystwo na swych stronach internetowych ogłaszało, że kręgarstwo jest skuteczną terapią w bólach ucha i napadach kolki u niemowląt. Komentarz Singha zaś stwierdzał, że *nie ma nawet odrobiny dowodów naukowych na te twierdzenia*, a BCA w tych przypadkach *radośnie promuje łże-terapię*. Singh mógł o tym co nieco wiedzieć, jest wszak współautorem książki o alternatywnej medycynie, analizującej naukowe podstawy kręgarstwa. Towarzystwo poczuło się zniesławione wyróżnionymi kursywą stwierdzeniami i podało Singha do sądu. Sprawa przetoczyła się przez dwie instancje, a stenogramy z rozpraw są fascynującą lekturą, zwłaszcza we fragmentach, gdzie BCA odnosi się do pierwszej wypowiedzi, przekonując, że korzystne dla kręgarstwa badania naukowe istnieją, tyle że nie są wiarygodne (pojęcie badań naukowych nie jest ściśle skodyfikowane, z niewątpliwym pożytkiem dla wolności tychże). Ostatecznie, po dwóch latach prawniczych batalii, sąd apelacyjny zadecydował, że słowa Singha należy traktować jako opinię, a nie jako stwierdzenie faktu. Ponieważ wolność wyrażania opinii jest prawem podlegającym szczególnej ochronie, BCA skargę wycofało, pozostawiając Singha z portfelem chudszym o 100 000 funtów. Kwestia zmiany prawodawstwa dotyczącego zniesławienia jest obecnie przedmiotem dyskusji w brytyjskim parlamencie.

*W latach dwudziestych to gazety stanowiły główny środek komunikacji ekscentrycznych uczonych z masową publicznością* [...] *Jednak stopniowo, w ciągu następnych dwóch dekad, dziennikarstwo naukowe doczekało się niepisanego kodeksu etyki naukowej* [...] *W dużym stopniu dokonało się to dzięki współdziałaniu wydawców czasopism i książek. Dziś wszakże wycofują się oni z tych dobrych praktyk* – ubolewał Martin Gardner we wstępie do swej pierwszej książki [1]. Książka ta jako jedna z pierwszych podejmowała kwestię penetracji świadomości społecznej przez bezwartościowe czy wręcz bzdurne teorie. Gardner zaproponował też używaną dość powszechnie po dziś dzień klasyfikację pozwalającą odróżnić pseudouczonego czy szalbierza od zasługującego na szacunek naukowca wyrażającego ryzykowne opinie. Ci pierwsi pracują w całkowitej izolacji, nie korzystając z wyników badań kolegów i nie przedstawiając wyników swoich badań na poświęconych temu forach, co gorsza, zatracają się w swoistej paranoi, twierdząc, że ich izolacja jest wynikiem spisku środowiska naukowego niebędącego w stanie zrozumieć przełomowości ich teorii. Często także oskarżają luminarzy nauki (w szczególności Newtona i Einsteina) o ciasnotę umysłową lub, przeciwnie, stawiają się w jednym z owymi luminarzami szeregu, czasem przypominając też o prześladowaniu Galileusza.

Niektóre historie opisane przez Gardnera mogą co najwyżej wywołać uśmiech na twarzach czytelnika. Weźmy poglądy Cyrusa Reeda Teeda, który w końcu XIX wieku postulował, że ludzkość żyje na sferycznej powierzchni planety – ale tej wewnętrznej, oświetlonej Słońcem znajdującym się w środku sfery. Albo przypadki Johanna Beringera, profesora z uniwersytetu w Würzburgu, który własnym sumptem rozpowszechniał katalogi swoich znalezisk archeologicznych, aż, odkrywszy glinianą tabliczkę z własnym nazwiskiem, przekonał się, że padł ofiarą okrutnego żartu studentów, i spędził resztę życia, tropiąc i wykupując egzemplarze publikacji swego autorstwa, które stały się przez to trudno dostępnymi i niezwykle kosztownymi rarytasami antykwarycznymi.

Inne fragmenty książki Gardnera mogą współczesnego czytelnika przygnębić. Wymyślona w końcu XIX wieku przez Andrew Taylora Stilla osteopatia twierdziła, że główną przyczyną niedomagań ludzkiego organizmu są niewielkie przemieszczenia kości kręgosłupa, powodujące ucisk na nerwy

**Rozwiązanie zadania M 1302.** Jeżeli trójkąt jest równoramienny ($AC = BC$), to teza zachodzi ze względu na symetrię całego rysunku. W przeciwnym przypadku oznaczmy przez $X$ punkt styczności okręgu wpisanego z bokiem $AB$. Sumując odpowiednio równości odcinków stycznych poprowadzonych z punktów $A$, $B$ i $C$ do okręgu wpisanego, otrzymamy $2 \cdot AX = AB + AC - BC$. Podobnie $2 \cdot BD = AB + AC - BC$, czyli $AX = BD$, więc punkt $M$ jest środkiem odcinka $DX$.




Oznaczmy przez $P$ drugi punkt przecięcia prostej $XI$ z okręgiem wpisanym. Jest to punkt antypodyczny do $X$, więc styczna poprowadzona przez $P$ jest równoległa do $AB$. Ponadto okrąg wpisany i dopisany są jednokładne względem punktu $C$ – jednokładność ta przenosi styczną w punkcie $P$ na prostą $AB$, a sam punkt $P$ na $D$. To oznacza, że $C$, $P$ i $D$ leżą na jednej prostej. Wystarczy więc wykazać, że proste $IM$ i $PD$ są równoległe, co uzyskujemy bezpośrednio z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, ponieważ

$$\frac{PX}{IX} = \frac{DX}{MX} = 2.$$

i zakłócające krążenie krwi (subluksacje kręgowe). Terapia osteopatyczna, poprzez odpowiednie uciskanie ciała pacjenta, ma przywracać owe kości do ich właściwego położenia. W szczególności, zdaniem wczesnych osteopatów, schizofrenia miała być wynikiem subluksacji szyjnego odcinka kręgosłupa. Pojęcie subluksacji i pomysł terapii manualnej zostały później zapożyczone przez Daniela D. Palmera, właściciela sklepu spożywczego i handlarza ryb oraz twórcy kręgarstwa. Pierwsi osteopaci i kręgarze (dziś te terminy stosowane są wymiennie) byli na tyle radykalni w swych poglądach, że odrzucali pomysł, że wiele chorób jest wynikiem działania drobnoustrojów. Ich propozycje terapeutyczne trafiłyby zapewne szybko do lamusa, gdyby nie talenty przedsiębiorcze B.J. Palmera (syna), który, skończywszy formalną edukację na poziomie dzisiejszego gimnazjum, założył pierwszą szkołę kręgarstwa w Davenport. Gardner zauważa, że kręgarstwo nie było jednolite w podejściu do terapii. B.J. Palmer nauczał, że dyfteryt jest skutkiem subluksacji szóstego kręgu piersiowego, podczas gdy szkoła chicagowska kręgarstwa zalecała masaże m.in. od pierwszego do piątego i siódmego, ale nie szóstego kręgu. Także wedle bardziej współczesnych źródeł masaże stosowane przez różnych kręgarzy w danym przypadku mogą obejmować rozłączne odcinki kręgosłupa.

Opinia Simona Singha odzwierciedla współczesną wiedzę naukową, chociaż masaże dawane przez kręgarzy potrafią w niektórych przypadkach przynieść ulgę osobom cierpiącym na przewlekłe bóle kręgosłupa. Jednak aspiracje terapeutyczne kręgarzy sięgają znacznie dalej, o czym można się przekonać, studiując ogłoszenia odpowiednich gabinetów. Skąd ta wiara w cudowną moc kręgarstwa? Gardner wyróżnia dwie przyczyny „wewnętrzne” i jedną „zewnętrzną”. Pierwsze dwie opierają się na tym, że niektóre dolegliwości ustępują samoistnie, niezależnie od terapii, oraz na tym, że część chorób miewa podłoże psychosomatyczne, zatem każda, najbardziej nieszkodliwa interwencja terapeutyczna może wpływać na morale pacjenta i łagodzić dolegliwości. Czynnik zewnętrzny polega na wzbudzaniu zaufania, poprzez tworzenie gabinetów i korporacji zawodowych na wzór lekarskich, odwoływaniu się do medycyny ludowej zamiast do dorobku Palmerów, obfitemu używaniu żargonu, wreszcie na umiejętnym posługiwaniu się technikami *public relations* (nawet opisany wyżej komentarz Singha był reakcją na zorganizowany przez BCA Tydzień Świadomości Kręgarskiej). To wszystko niewątpliwie kreuje popyt na tego rodzaju usługi. Autor tego artykułu do dziś pamięta zaskoczenie, kiedy, będąc w szpitalu klinicznym przy jednym z najlepszych amerykańskich uniwersytetów publicznych, znalazł wśród dostępnych opcji leczenia zabieg wykonywany przez pielęgniarkę naturopatyczną, która ruchami wytrenowanych dłoni miała usuwać zaburzenia pola elektromagnetycznego pacjenta.

Gardner wielokrotnie wracał w swych publikacjach do pseudonauki, także wielu innych autorów podejmowało zainicjowany przez niego wątek. Charles P. Pierce w książce *Idiot America* sarkastycznie podsumował powszechną obecność pseudonauki w mediach w postaci trzech postulatów. Po pierwsze, każda teoria jest dobra, o ile zwiększa sprzedaż książek, pozycję w rankingach itp. Po drugie, cokolwiek może być prawdą, jeśli ktoś proklamuje to wystarczająco głośno. Po trzecie, prawdą jest to, w co wierzy dostatecznie wiele osób. Postulaty te nie miałyby racji bytu bez ochoczej współpracy ludzi mediów. W jednym ze swoich ostatnich artykułów [2] w prowadzonej przez 27 lat rubryce na łamach czasopisma *Skeptical Inquirer*, Gardner surowo karcił Oprah Winfrey za promowanie wśród swej milionowej publiczności *medycznie bezwartościowych poglądów, które w niektórych przypadkach mogą prowadzić do śmierci*, takich jak ten, że autyzm jest powodowany przez szczepionki, które mają poza tym jeszcze liczne skutki uboczne, tak że powszechne szczepienia przynoszą więcej strat niż korzyści. *To, że tak liczni obywatele są naukowymi analfabetami, osłabia nasz naród* – wyjaśnia Gardner w ostatniej z wydanych za życia książek [3] swoje ponadsześćdziesięcioletnie zwalczanie obskurantyzmu.

Ale czy publicznego opowiadania bzdur można zakazać? Trzeba by, cytując wyrok sądu apelacyjnego w sprawie Singha, powołać Ministerstwo Prawdy…

**Rozwiązanie zadania M 1300.**
Z warunku $xy \equiv 1 \pmod z$ wynika, że $z$ jest względnie pierwsze zarówno z $x$, jak i z $y$. Podobnie $\gcd(x, y) = 1$, czyli liczby $x, y, z$ są parami względnie pierwsze. Stąd liczba $xy + zx + yz - 1$, jako podzielna przez $x$, $y$ i $z$, jest podzielna przez $xyz$. To oznacza, że liczba

$$A(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{xyz} = \frac{xy+zx+yz-1}{xyz}$$

jest całkowita. Przyjmując bez straty ogólności $x \leqslant y \leqslant z$, mamy $x \geqslant 2$, $y \geqslant 3$, $z \geqslant 5$ i wobec tego

$$A(x,y,z) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{30} = 1,$$

bo funkcja

$$A(x,y,z) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{yz}\right) + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

jest malejąca względem zmiennej $x$ i analogicznie względem pozostałych. Ponadto, jeśli choć jedna z tych nierówności jest ostra, to mamy $A(x,y,z) < 1$, co przy oczywistej nierówności $A(x,y,z) > 0$ daje sprzeczność. Stąd jedyne rozwiązania to wszystkie permutacje trójki $(2, 3, 5)$.

**Literatura**


[1] M. Gardner, *In the Name of Science*, GP Putnam's Sons, 1952; wersja rozszerzona *Fads and Fallacies in the Name of Science*, Dover Publications, 1957; wyd. pol. skrócone *Pseudonauka i pseudouczeni*, przekł. B. Krzyżanowski i W. Zonn, PWN, 1966; cytaty w tłumaczeniu własnym na podst. wyd. z 1957 r.

[2] M. Gardner, *Oprah Winfrey: Bright (but Gullible) Billionaire*, Skeptical Inquirer 34.2 (2010).

[3] M. Gardner, *When You Were a Tadpole and I Was a Fish and Other Speculations on This and That*, Hill and Wang, 2009.

## Gardner i liczby szczęśliwe

Nie wiem, czy wielu Czytelników *Delty* słyszało o szczęśliwych liczbach. Nie chodzi tu o to, że często siódemkę uważa się za liczbę szczęśliwą, trzynastkę zaś za pechową, ale o matematyczne pojęcie. Ja o liczbach szczęśliwych, ich rozmaitych własnościach oraz pewnych hipotezach dowiedziałem się z artykułu Martina Gardnera w kwartalniku *The Mathematical Intelligencer* w roku 1997. Okazuje się, że trzynastka też jest szczęśliwa.

Wiadomo, na czym polega metoda sita Eratostenesa, dzięki której znajdujemy liczby pierwsze. No to spróbujmy postąpić podobnie:

Wypisujemy wszystkie liczby naturalne od jedynki, po czym usuwamy co drugą (czyli wszystkie parzyste).

W tym, co zostanie, usuwamy co trzecią, czyli z ciągu $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots$ wyrzucamy $5, 11, 17, 23, \ldots$ i pozostaje: $1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 27, 31, \ldots$

Ale uwaga – usuwaliśmy liczbę co trzecią nie dlatego, że jest po dwójce, ale dlatego, że 3 była DRUGĄ liczbą w ciągu, na którym dokonywaliśmy operacji! Co teraz? Teraz popatrzmy, jaka liczba jest na TRZECIM miejscu w nowo otrzymanym ciągu. Siódemka. Usuwamy więc **co siódmą** liczbę; pierwszą wyrzuconą będzie 19. Z nowego ciągu usuwać będziemy liczbę co dziewiątą, bo w nim na CZWARTYM miejscu jest dziewiątka. I tak dalej, w nieskończoność. Liczby, które zostaną, to liczby szczęśliwe. Widzimy, że wśród nich jest trzynastka.

Można odnieść wrażenie, że jest to taka sobie dość dziwna zabawa. Przeczy temu jednak nazwisko pomysłodawcy tej konstrukcji... O nim za chwilę.

Liczb szczęśliwych jest nieskończenie wiele. Mają pewne ciekawe własności. Choćby taką, że ich „gęstość” w zadanym przedziale jest zaskakująco bliska „gęstości” liczb pierwszych. Na przykład, wśród liczb od 1 do 100 są 23 pierwsze i 25 szczęśliwych. Podobnie jest z „bliźniaczymi liczbami szczęśliwymi” (czyli różniącymi się o 2) i liczbami pierwszymi bliźniaczymi.

Są też otwarte problemy. Na przykład, czy każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb szczęśliwych (niektórym Czytelnikom chyba ten problem coś przypomina)? Sprawdzono komputerowo co najmniej do 100 tysięcy – nie znaleziono wyjątku...

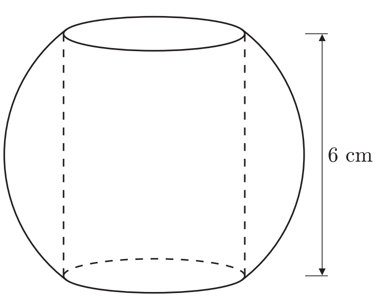
O tym, że liczb szczęśliwych jest nieskończenie wiele, można się przekonać, rozumując podobnie jak w słynnym dowodzie Euklidesa dla liczb pierwszych. Ale na pytanie, czy liczb, które są jednocześnie pierwsze i szczęśliwe, jest nieskończenie wiele, jeszcze niedawno nie znano odpowiedzi i nic nie wiem o tym, by to się zmieniło...

Charles Ashbacher postawił hipotezę, że każda liczba szczęśliwa jest „końcówką” większej liczby szczęśliwej. Na przykład, liczbą 7 kończy się 37, liczbą 13 kończy się 613. To też wciąż jedynie hipoteza.

W artykule Gardnera, o którym mowa na początku, czytamy: *The notion of lucky numbers originated about 1955 with Stanislaw Ulam, the great Polish mathematician* [...] Ulam wyjechał z Polski na stałe w roku 1935, w wieku 26 lat, i do końca życia, do roku 1984, żył i pracował w USA. Zagraniczni autorzy piszą zazwyczaj „American mathematician”, w najlepszym razie „Polish-born American mathematician”. A Gardner napisał „polski matematyk”. To miłe.

*Krzysztof CIESIELSKI*
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

## Kula i dziura




Przytoczmy za Martinem Gardnerem następujące zadanie. W kuli wywiercono na wylot otwór w kształcie walca o wysokości 6 cm, przechodzący przez środek kuli. Jaka jest objętość pozostałej części kuli? Gardner nazwał to zadanie „niewiarygodnym problemem”. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że danych jest za mało. A może to właśnie jest pewną wskazówką? Zadanie można rozwiązywać metodami klasycznymi, można wykorzystać rachunek całkowy, ale można też zastanowić się chwilę i rozwiązać je bez żadnych rachunków. Dodajmy jeszcze, być może dla ułatwienia, że powinno wyjść $36\pi$ cm$^3$. Czy wiesz, Czytelniku, jak to rozwiązać? A może znasz podobne zadania?

Jedno z nietypowych rozwiązań może wyglądać tak: zadanie powinno mieć jednoznaczne rozwiązanie, gdyż inaczej nie zaproponowano by go. Jeśli istnieje jednoznaczne rozwiązanie, to objętość poszukiwanej bryły jest stała, a więc będzie taka sama, gdy przyjmiemy, że promień otworu jest zerowy. Znaczy to, że objętość pozostałej części będzie równa objętości kuli o średnicy 6 centymetrów. (Wg Gardnera rozwiązanie to podał John W. Campbell, wydawca *Astounding Science Fiction*.) Proponujemy zweryfikowanie tego rozumowania poprzez przeprowadzenie standardowego rachunku, nie zrażając się tym, że danych jest jakby za mało.

*Zdzisław POGODA*
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

## Ile jest typów czworościanów?

Dziwne pytanie, oczywiście nieskończenie wiele. Są bardziej spłaszczone, wydłużone, szpiczaste, są też prawidłowe, foremne… Jeśli jednak pominiemy długości krawędzi, kąty płaskie i dwuścienne itp., zachowamy tylko ogólną strukturę, to widzimy, że jest tylko jeden typ czworościanu. Nie istnieje czworościan, który miałby ścianę nietrójkątną. W przypadku pięciościanów mamy dwa typy: typ ostrosłupa o podstawie czworokąta oraz typ graniastosłupa o podstawie trójkąta. Pierwszy ma jedną ścianę czworokątną i cztery trójkątne, a drugi trzy czworokątne i dwie trójkątne. Innych nie ma. Gdy zetniemy wierzchołek czworościanu, to dostaniemy pięciościan drugiego typu. Powołując się na Johna McClellana (artystę z Woodstock), Martin Gardner zadał pytanie: ile jest typów sześciościanów (w domyśle wypukłych)?

Dowód twierdzenia, że istnieje dokładnie siedem wypukłych sześciościanów, można znaleźć w pracy Donalda Crowe'a, *Euler's formula for polyhedra and related topics* w: A. Beck, M. Bleicher, D. Crowe, *Excursions into Mathematics*, Worth, 1969, str. 29–30.

Należy uważać na przypadki wyglądające na pozór różnie, a jednak dające ten sam typ. Można pójść dalej i zapytać o liczbę typów siedmiościanów, ośmiościanów itd. Może jest jakiś ogólny schemat postępowania?

Dla specjalistów podamy profesjonalne źródła:

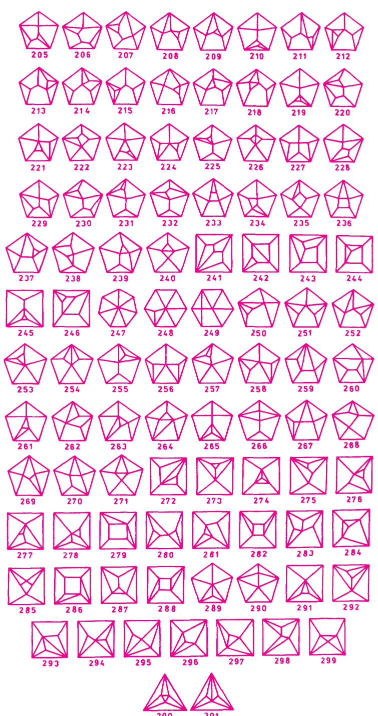
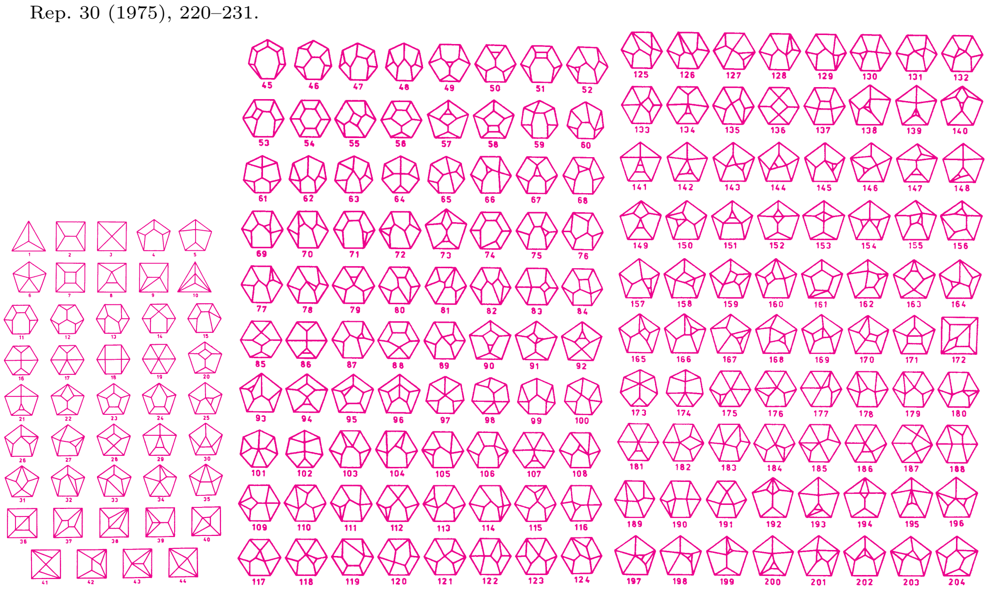
P.J. Federico,

- *Enumeration of polyhedra*: *The number of* 9*-hedra*, J. Combin. Theory 7 (1969), 155–161;
- *Polyhedra with* 4 *or* 8 *faces*, Geom. Dedicata 3 (1975), 469–481;
- *The number of polyhedra*, Philips Res. Rep. 30 (1975), 220–231.

Gardner przytacza 7 różnych typów wypukłych sześciościanów, dodając, iż nie zna prostego dowodu, że nie ma innych. Informuje też, że istnieją 34 rodzaje wypukłych siedmiościanów, 257 ośmiościanów i 2606 dziewięciościanów. Natomiast niewypukłych sześciościanów mamy trzy typy, 26 siedmiościanów i 277 ośmiościanów.

*Zdzisław POGODA*

Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

Oto diagramy Schlegela wszystkich 4-, 5-, 6-, 7- i 8-ścianów wypukłych – tak widać wielościan wypukły przez jedną z jego ścian.

## The Mathematical Gardner

W 1981 roku grupa amerykańskich matematyków w głębokiej tajemnicy przed Gardnerem przygotowała i wydała książkę, składającą się z 30 artykułów 29 autorów (autorem dwóch prac był Donald E. Knuth), książkę-niespodziankę, prezent i hołd na 65. urodziny *ogrodnika matematyki* (choć publikacja nieco się opóźniła). Wybitni matematycy (wśród nich – oprócz wymienionego już Donalda E. Knutha – Claude Berge, Solomon W. Golomb, Richard K. Guy, Harold S.M. Coxeter) analizują gry, badają ciekawe sytuacje geometryczne, rozciągają dętkę rowerową, projektują mozaiki płaskie i przestrzenne, obracają szklanki ustawione w rogach stołu, wchodzą w kryptografię. Autorzy są nie tylko popularyzatorami, ale i naukowcami – w pracach znajdują się ich własne wyniki, niekiedy bardzo „deltowe” w stylu (jak choćby przykład wyginającego się wielościanu Roberta Connelly'ego). Niektóre artykuły są wprost inspirowane zadaniami Gardnera, inne trafiają w jego klimat. Czy graliście kiedyś w pokera przez telefon? A w szachy – nie widząc (prawie) ruchów przeciwnika? Czy widzieliście magiczny sześcioośmiościan (z magiczną liczbą 26)? Z pewnością książka *The Mathematical Gardner* musiała jubilata bardzo ucieszyć.

*Wiktor BARTOL*

# Zagadki Gardnera

*Krzysztof CIESIELSKI*

Instytut Matematyki,
Uniwersytet Jagielloński

Rozmaite bywają drogi do zaawansowanej matematyki. Dla niektórych matematyczne początki związane są z rozwiązywaniem zagadek i łamigłówek matematyczno-logicznych. Jestem wśród nich.

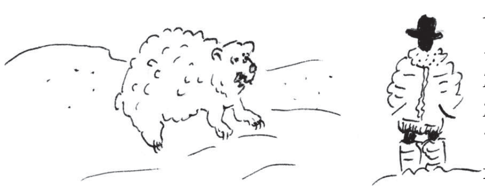
Może to zabrzmi dziwnie, ale jako uczeń nie słyszałem o Martinie Gardnerze. Po prostu nikt mi o nim nie powiedział, a Internetu nie było… Pasjonowałem się *Rozkoszami Łamania Głowy* Lecha Pijanowskiego, zagadkami z kółka matematycznego, rozwiązywałem zadania z *Lilavati*. Z nazwiskiem Gardnera zetknąłem się dopiero jako student, w efekcie nabycia rosyjskich wydań paru jego książek – kupowałem wtedy wszystko, co było po rosyjsku dostępne o matematyce, kosztowało grosze… Wtedy poznałem fenomen jednego z największych Mistrzów w tej dziedzinie, choć akurat w zakupionych książkach zagadki logiczne pojawiały się sporadycznie.

Kilka kapitalnych zadań propagowanych przez Gardnera jest już podanych w artykule Marka Kordosa w tym numerze *Delty*. Dla mnie jednak jest to temat, „o którym można w nieskończoność”. Ponadto, niezwykła jest różnorodność „gardnerowskich” zadań. Niektóre z nich są niemal „typowo matematyczne”, inne w zaskakujący sposób nawiązują do głębszej myśli matematycznej, a niektóre tak naprawdę oprócz logicznego myślenia czy tego, że podstawową sprawą jest pomysł, raczej większych związków z matematyką nie mają.

Zadania, których rozwiązanie proponuję Czytelnikom, pochodzą z wydanej ongiś przez oficynę Quadrivium cienkiej książeczki Gardnera: *Moje najlepsze zagadki matematyczne i logiczne* (w księgarniach praktycznie nawet wtedy niedostępnej). Niektóre z kilkudziesięciu umieszczonych tam zadań znałem wcześniej, niektóre poznałem dopiero dzięki książce.

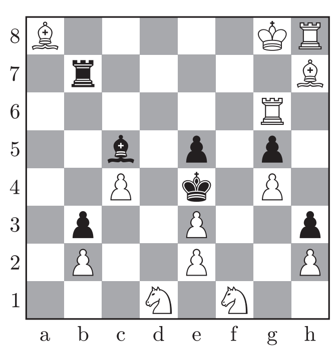
*Pewien mnich o świcie wybrał się na pewną górę, dotarł na szczyt o zmierzchu. Po spędzonej tam nocy wyszedł znowu o świcie, o zmierzchu był na dole. Wykazać, że gdzieś na ścieżce istnieje punkt, w którym mnich zarówno podczas wspinaczki, jak i podczas schodzenia był dokładnie o tej samej porze dnia.*

Wyobraźmy sobie, że zamiast o powrocie mnicha następnego dnia będziemy myśleć o innym turyście, wędrującym przez cały dzień tego samego dnia, co mnich, ale na dół. Muszą się spotkać… A zadanie jest pięknym modelem dla prostego twierdzenia o punkcie stałym czy własności przyjmowania wartości pośrednich przez funkcję ciągłą.



*Znana jest zagadka „jakiego koloru był niedźwiedź” o podróżnym, który spotkał misia podczas nietypowej wędrówki: kilometr na południe, kilometr na zachód, kilometr na północ, po której znalazł się w punkcie wyjścia. Ale czy naprawdę mogło się to zdarzyć wyłącznie na biegunie północnym?*

Wystarczy rozważyć dowolny punkt odległy od bieguna **południowego** o $1 + \frac{1}{2\pi}$ km (z pewną dokładnością). Chodzi o to, by potem, po przebyciu kilometra, dojść w takie miejsce, skąd po kilometrowym marszu na zachód znów się w nim znajdziemy. Ale są jeszcze inne takie punkty! Można przecież, idąc na zachód, okrążyć biegun kilka razy… Mimo to biegun północny jest jedynym rozwiązaniem, gdyż na Antarktydzie nie ma niedźwiedzi. A niedźwiedź, oczywiście, jest biały.



*Na marginesie pokazana jest szachownica. Czy białe mogą wykonać taki ruch, by* ***nie dać*** *mata? I czy w ogóle taka pozycja mogła zostać uzyskana w prawdziwej grze?*

Przy tak tragicznym położeniu czarnego króla trudno odpowiedni ruch znaleźć… Jedynym wyjściem jest przesunięcie białej wieży o 4 pola w lewo. Co prawda, król dalej nie ma drogi ucieczki, ale w tej sytuacji atakujący go goniec może zostać zbity.

Gdy Gardner opublikował ten problem, wielu czytelników napisało do niego, że taka sytuacja jest niemożliwa, bo na szachownicy dwa białe gońce stoją na polach tego samego koloru. Czy istotnie tak się zdarzyć nie może?

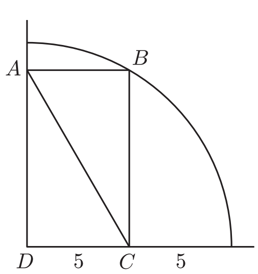
Gdy pion dojdzie do ostatniej linii, szachista ma obowiązek go „awansować” na figurę, ale niekoniecznie na hetmana…

*Wykreślić osiem liter tak, aby pozostałe utworzyły jedno słowo:*

O J S E I D E N M O L S I Ł T O E W R O

To jest zadanie z oryginalną pułapką. Wykreślmy litery stojące na nieparzystych pozycjach…

Na zadanie, które podam jako ostatnie, Gardner daje jedną minutę. Znam matematyków, którym zajęło ono więcej czasu…




*Czy można, znając długości dwóch odcinków, zaznaczone na rysunku obok, obliczyć długość odcinka AC?*

Obie przekątne prostokąta są równe, a ta druga to promień okręgu…

# Lehmus, Steiner, Gardner

*Zdzisław POGODA*

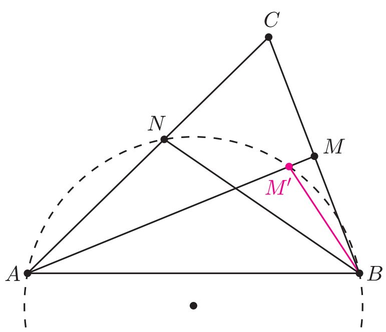
Instytut Matematyki,
Uniwersytet Jagielloński

Powszechnie znany jest fakt, że w trójkącie równoramiennym dwie dwusieczne mają równe długości, podobnie jak dwie wysokości i dwie środkowe. Naturalne jest pytanie: a odwrotnie, czy równość dwóch ze wspomnianych wielkości gwarantuje równoramienność trójkąta? Dla dwóch wysokości i dwóch środkowych jest to proste zadanie (może Czytelnik zechce sobie przypomnieć, jak to się robi). Wydaje się, że w przypadku dwóch dwusiecznych też powinno pójść łatwo, a jednak… Jakoś trudno od razu znaleźć prosty geometryczny dowód. Można w ostateczności wykorzystać rachunki, lecz nie o to chodzi. Przed podobnym problemem stanął w 1840 roku Daniel Christian Ludolph Lehmus: jak geometrycznie, bez długich rachunków, udowodnić ten fakt? Wysłał to pytanie do J.Ch.F. Sturma, ten, między innymi, do Jacoba Steinera, który dowód przedstawił. Później pojawiło się wiele innych dowodów, a i sam Lehmus też w końcu twierdzenie udowodnił.

Twierdzenie, nazwane twierdzeniem Steinera–Lehmusa, rozpropagował ponownie Martin Gardner w *Scientific American* (nr 204, 1961, str. 166–168) przy okazji recenzji książki H.S.M. Coxetera *Introduction to Geometry* (znanej w Polsce jako *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*). Otrzymał potem od czytelników setki listów z dowodami. Przeanalizował wszystkie i wybrał, jego zdaniem, najprostszy. Dowód ten, którego autorami byli dwaj angielscy inżynierowie, G. Gilbert i D. McDonnell, można znaleźć w *The American Mathematical Monthly* (7, 1963, str. 79–80). Zobaczmy, jak wygląda to rozumowanie. Jego podstawowym pomysłem jest udowodnienie „innego” spostrzeżenia na temat dwusiecznych:

*Jeśli w trójkącie są dwa różne kąty wewnętrzne, to dwusieczna wychodząca z kąta mniejszego ma większą długość niż dwusieczna wychodząca z kąta większego.*

Korzystając z niego, stwierdzamy: skoro trójkąt nierównoramienny ma każdą dwusieczną innej długości, więc taki, w którym dwie dwusieczne są równe, równoramienny być musi.




Poszło gładko, więc wypada jeszcze udowodnić spostrzeżenie, z którego skorzystaliśmy. Rozważmy zatem trójkąt $ABC$, w którym $\sphericalangle A < \sphericalangle B$. Niech $AM$ i $BN$ będą dwusiecznymi odpowiednich kątów. Na $AM$ wybierzmy taki punkt $M'$, żeby

$$\sphericalangle M'BN = \frac{1}{2}\sphericalangle A < \frac{1}{2}\sphericalangle B = \sphericalangle NBM.$$

Stąd $AM' < AM$. Punkty $A$, $B$, $M'$ i $N$ leżą na jednym okręgu, ponieważ $\sphericalangle M'BN = \sphericalangle M'AN$. Teraz zauważmy, że

$$\sphericalangle A < \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle B) < \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C).$$

A stąd wynika, że $\sphericalangle BAN < \sphericalangle M'BA < 90^\circ$, czyli $BN < AM' < AM$. Pierwsza nierówność bierze się stąd, że mniejszemu kątowi wpisanemu w okrąg odpowiada krótsza cięciwa, na której się ten kąt opiera (proszę sprawdzić).

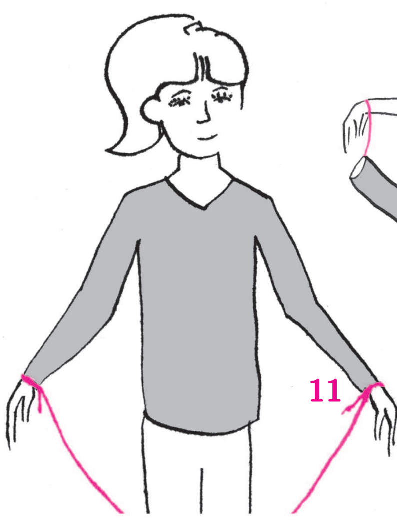
Podobno nieopublikowany dowód Lehmusa wyglądał dokładnie tak samo…

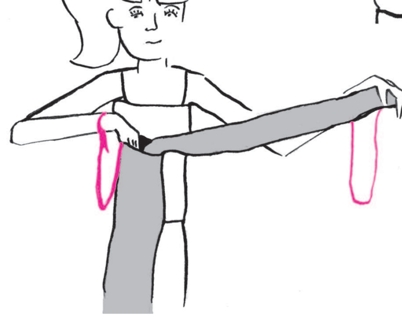
# Koszulka

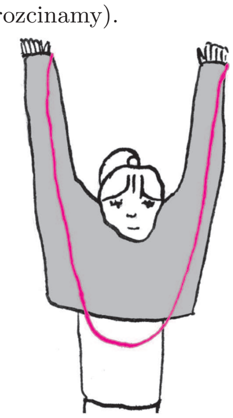
Martin Gardner opisał pewną sztuczkę, która wygląda niewiarygodnie. Mamy na sobie koszulkę założoną przez głowę (np. z napisem „Delta”). Bierzemy sznurek o długości np. około metra i jeden koniec obwiązujemy wokół nadgarstka jednej ręki, a drugi koniec wokół drugiego nadgarstka.

Jest raczej oczywiste, że w takiej sytuacji nie da się całkiem zdjąć koszulki, przeszkadza w tym właśnie sznurek. Ale da się tak pomanewrować koszulką, żeby w końcu mieć ją na sobie przenicowaną, to znaczy na lewą stronę, jak widać (oczywiście sznurka nie odwiązujemy ani nie rozcinamy).

*Z. P.*

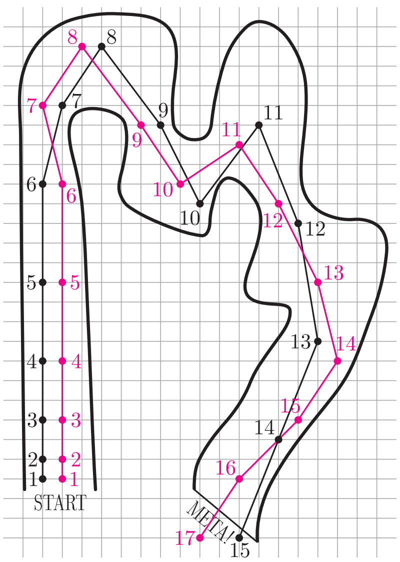






Patrz też strona 25.

## Matematyczne wyścigi




Nie będzie chyba zbyt śmiałym stwierdzeniem, jeżeli napiszemy, że matematycy uwielbiają gry. Zarówno takie, które można badać pod kątem matematycznym, jak i takie, w które się po prostu przyjemnie gra. Jeżeli znajdziemy grę o prostych zasadach, w której rozgrywka stanowi prawdziwe wyzwanie intelektualne, a do tego, by w nią grać, wystarczy zwykła kartka papieru i coś do pisania, możemy śmiało powiedzieć, że mamy grę idealną. Martin Gardner w jednej ze swoich książek [1] przedstawił grę spełniającą wszystkie powyższe wymagania (co więcej, dającą się badać matematycznie [2]). Grę „przywiózł" z podróży do Szwajcarii znajomy Gardnera, Jürg Nievergelt, informatyk z Uniwersytetu Illinois. Jest to prosta w formie, a zupełnie niebanalna, jeżeli chodzi o rozgrywkę, symulacja wyścigów samochodowych, przez Gardnera nazywana *RaceTrack*. Planszę stanowi kartka w kratkę z wyrysowaną trasą dowolnego kształtu (zob. rysunek). Na początku gry samochody wszystkich graczy (punkty, najlepiej w różnych kolorach) ustawione są na linii startu. Gracze przemieszczają swoje pojazdy między punktami kratowymi naprzemiennie, według wcześniej ustalonej kolejności (na przykład przez losowanie), oraz stosując się bezwzględnie do trzech następujących zasad:

- nowy punkt kratowy, w którym staje samochód, oraz odcinek łączący go z poprzednim muszą w całości leżeć na trasie,
- w każdym momencie gry w każdym punkcie może stać co najwyżej jeden pojazd,
- jeżeli w swoim poprzednim ruchu gracz przesunął się o $k$ kratek w pionie i $m$ w poziomie, to w kolejnym ruchu każdą z tych liczb może zmniejszyć lub zwiększyć co najwyżej o jeden (w pierwszym ruchu można się przesunąć co najwyżej o jedną kratkę do góry i jedną w bok, gdyż uprzednio samochód stał w miejscu).

Jak to zwykle w przypadku wyścigów bywa, wygrywa ten z graczy, który pierwszy przekroczy linię mety. Kierowca, który wypadnie z trasy lub zderzy się z innym pojazdem, kończy wyścig. Szerokiej drogi!

*Zofia MIECHOWICZ*
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski

**Literatura**

[1] M. Gardner, *Sim, Chomp, and RaceTrack*, w: Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments, W.H. Freeman and Company, New York, 1986, 56–57.
[2] M. Holzer, P. McKenzie, *The Computational Complexity of RaceTrack*, Fun with Algorithms, 2010.

# Zadania

*Redaguje Przemysław MAZUR*

**M 1300.** Znaleźć wszystkie takie trójki liczb całkowitych $x, y, z$, większych od 1, że liczba $yz-1$ jest podzielna przez $x$, $zx-1$ jest podzielna przez $y$, a $xy-1$ jest podzielna przez $z$.
Rozwiązanie na str. 7

**M 1301.** Ferdek rzuca monetą $n$ razy, a Halinka $n+1$ razy. Halinka wygrywa, jeżeli wyrzuci więcej orłów niż Ferdek, a w przeciwnym przypadku przegrywa. Kto ma większe szanse wygrać?
Rozwiązanie na str. 14

**M 1302.** W trójkącie $ABC$ punkt $M$ jest środkiem boku $AB$, punkt $I$ – środkiem okręgu wpisanego, a punkt $D$ – punktem styczności okręgu dopisanego do boku $AB$. Wykazać, że proste $IM$ i $CD$ są równoległe.
Rozwiązanie na str. 6

*Redaguje Ewa CZUCHRY*

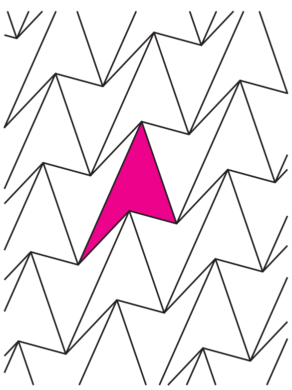
**F 779.** Długa jednorodna cienka taśma o stałej szerokości i długości $l$ leży na płaskiej powierzchni. Jej jeden koniec jest zagięty i ciągnięty poziomo ze stałą prędkością $v$. Znaleźć prędkość środka masy poruszającej się części taśmy.


Rozwiązanie na str. 24

**F 780.** Cienki jednorodny łańcuch o masie $m$ i długości $l$ jest utrzymywany pionowo nad stołem tak, że jego dolny koniec dotyka powierzchni stołu. Znaleźć siłę, którą wywiera na stół puszczony swobodnie łańcuch w zależności od czasu.
Rozwiązanie na str. 15

# mała delta

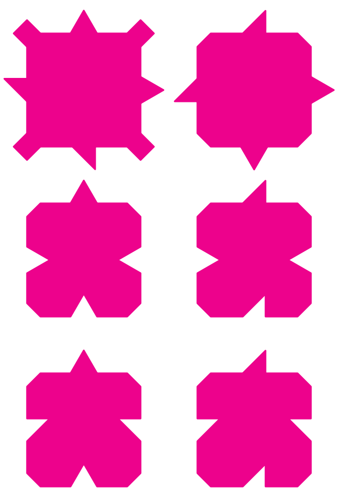
## Nadzwyczajne kafelki



Każdy wie, jak ułożyć posadzkę, mając do dyspozycji trójkątne kafelki. Jeden ze sposobów jest taki: obok każdego trójkąta kładziemy trójkąt będący jego odbiciem względem środka jego boku. Którego? Każdego. Gdy będziemy tak konsekwentnie postępowali, możemy wyparkietować całą płaszczyznę.

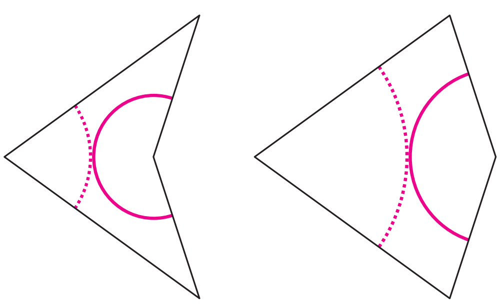
Ciekawsze jest spostrzeżenie, że ta sama procedura pozwala wyparkietować płaszczyznę dowolnymi czworokątami – na rysunku mamy parkiet ułożony (proszę sprawdzić, że w ten właśnie sposób) z jednakowych czworokątów niewypukłych.

Podany sposób ma (zarówno w przypadku trójkątów, jak też czworokątów) tę cechę, że każda z użytych symetrii przekształci nam obraz tego parkietu na niego samego. Podobnie będzie można ten parkiet przemieścić tak, aby nic się nie zmieniło, przesuwając go o odpowiedni wektor (łatwo wskazać jaki – prawda?). Takie parkiety, dla których istnieje możliwość przemieszczenia w ten sposób, by ich obraz się nie zmienił, nazywamy periodycznymi. Proszę spróbować, posługując się jednakowymi trójkątami albo czworokątami, ułożyć parkiet nieperiodyczny, to znaczy taki, którego każde poruszenie dałoby się wykryć. Nie wróżę sukcesu. Ale warto spróbować, by poznać trudności.



Można zabrać się do sprawy inaczej, a mianowicie poszukać takich kafelków, by z nich parkiet nieperiodyczny dał się ułożyć. Oczywiście, najpierw próbowano poszukiwać nieperiodycznych parkietów złożonych nie z jednego rodzaju, lecz z kilku rodzajów kafelków – *Wikipedia* podaje jakąś absurdalnie wielką (choć oczywiście skończoną) liczbę rodzajów kafelków, jakich użyto w pierwszej udanej próbie. Ale już w 1970 roku Raphael Robinson udowodnił, że sześć widocznych obok rodzajów kafelków pozwala na wyparkietowanie płaszczyzny, a otrzymany parkietaż jest zawsze nieperiodyczny. Polecam próby wykazania jednego i drugiego.

Liczba sześć nie jest już wielka, ale okazuje się, że można ją znacznie zmniejszyć. W 1977 roku Roger Penrose wymyślił, a Martin Gardner spopularyzował dwa rodzaje kafelków, które też parkietują płaszczyznę w sposób „obowiązkowo" nieperiodyczny.



To te widoczne obok. Penrose upiera się, że są to zwykłe czworokąty, ale przecież na obwodzie są wyróżnione punkty. Wolno je bowiem składać jedynie tak, by narysowane na nich linie przedłużały się. Aby pozbyć się tych linii, zmieniając kształt kafelków Penrose'a tak, by pozostały wielokątami, a nie straciły swych niezwykłych własności, musiałyby one stać się co najmniej ośmiokątami. Ale Penrose woli w nich widzieć udekorowane czworokąty i nazywa je *dart* i *kite*, czyli grot i latawiec. Grot ma kąty będące 1/5, 1/10, 3/5, 1/10 kąta pełnego, a latawiec 1/5, 1/5, 2/5, 1/5 kąta pełnego.

Można zająć się dowodzeniem, że grotami i latawcami można wyparkietować płaszczyznę i że taki parkiet będzie nieperiodyczny.

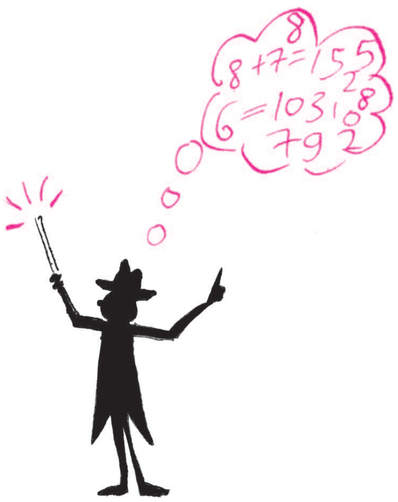
Ale można też wystartować w trudniejszej konkurencji i poszukać odpowiedzi na pytanie, czy istnieje taki jeden kafelek, że jego kopiami można nieperiodycznie wyparkietować płaszczyznę.

*Małą Deltę przygotował Marek KORDOS*

# Jaka to liczba?

*Francesc ROSSELLÓ*[*]

Na ogół matematycy nie są ulubionymi gośćmi na przyjęciach. Poprzedza nas reputacja nudziarzy, zanurzonych myślami w definicjach i twierdzeniach. A jednak możemy użyć naszej wiedzy, by oczarować zebranych magicznymi trikami, opartymi na własnościach matematycznych. Może przy okazji ktoś zainteresuje się matematyką?



W jednej ze swoich pierwszych książek *Mathematics, Magic and Mystery*, przywoływanej już w tym numerze *Delty*, Martin Gardner pokazuje wiele magicznych chwytów matematycznych. Niektóre z nich, polegające na odgadywaniu ukrytej liczby, wywodzą się z następującej własności liczby 9:

Niech $n$ będzie dodatnią liczbą naturalną. Sumujemy jej cyfry, a następnie sumujemy cyfry otrzymanego wyniku – i tak dalej, aż do uzyskania liczby jednocyfrowej (zwanej pierwiastkiem cyfrowym wyjściowej liczby i oznaczanej symbolem $[n]$). Wówczas jeśli

- $n$ jest wielokrotnością 9, to $[n] = 9$;
- $n$ nie jest wielokrotnością 9, to $[n]$ jest resztą z dzielenia $n$ przez 9.

Wynika stąd, że dla dowolnych dodatnich liczb naturalnych $n, m$ zachodzą równości $[n + m] = [[n] + [m]]$ oraz $[n \cdot m] = [[n][m]]$ (dlaczego?).

Książka Gardnera mieści wiele trików opartych na tej własności. Tu będzie mowa o takim, który – o dziwo – u Gardnera się nie pojawił, choć bardzo do niego pasuje. Wymaga on nieco wprawy obliczeniowej, a może także trochę umiejętności aktorskich. Prosimy kogoś (nazwijmy kogosia, na przykład, Anią) o wybranie w myślach liczby trzycyfrowej; nazwijmy ją $abc$. Teraz prosimy Anię, by gdzieś na kartce (niewidocznej dla nas) dodała wszystkie liczby otrzymane przez permutację cyfr wybranej liczby – bez niej samej – i podała nam tylko otrzymaną sumę. Na przykład, gdyby Ania pomyślała liczbę 527, powinna teraz dodać liczby 572, 257, 275, 725, 752. Przyjmujemy, że cyfry są rozróżnialne, a więc np. liczba 333 też daje 5 dodatkowych permutacji cyfr. Co więcej, nie przeszkadza nam 0, nawet jeśli pojawi się na początku nowej liczby.

Po otrzymaniu sumy prosimy Anię, by skoncentrowała myśli na wybranej na początku liczbie i po chwili (pokrywając umiejętnościami aktorskimi niezręczną przerwę potrzebną na obliczenia pamięciowe)... podajemy jej tę liczbę. Jak to możliwe? Zbadajmy całą sytuację.

Jeśli wymyśloną liczbą jest $abc$, to niech $S_{abc} = acb + bac + bca + cab + cba$ oraz $T_{abc} = abc + S_{abc}$. Rzecz jasna, znając $S_{abc}$, potrafimy podać liczbę $abc$, jeśli tylko potrafimy obliczyć $T_{abc}$, gdyż wtedy $abc = T_{abc} - S_{abc}$.

Zauważmy, że

$$T_{abc} = (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c) + \ldots + (c \cdot 100 + b \cdot 10 + a) =$$
$$= (2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c)(100 + 10 + 1) = 222 \cdot (a + b + c).$$

Widać, że znajomość liczby $a + b + c$ pozwoli wyznaczyć $T_{abc}$. Liczmy więc dalej:

$$S_{abc} = T_{abc} - abc = (2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c)(100 + 10 + 1) - (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c),$$

co po krótkich obliczeniach daje $S_{abc} = \textit{wielokrotność 9} + 5 \cdot (a + b + c)$, czyli $2 \cdot S_{abc} = \textit{wielokrotność 9} + 10 \cdot (a + b + c) = \textit{wielokrotność 9} + (a + b + c)$. Tak więc reszta $r$ z dzielenia $a + b + c$ przez 9 jest równa reszcie z dzielenia $2 \cdot S_{abc}$ przez 9, czyli pierwiastkowi cyfrowemu $[2 \cdot S_{abc}]$. A ten pierwiastek możemy obliczyć, ponieważ znamy $S_{abc}$ i wiemy, że $[2 \cdot S_{abc}] = [2 \cdot [S_{abc}]]$.

Znajomość reszty $r$ to nie wszystko, choć dużo. Mamy bowiem $1 \leqslant a + b + c \leqslant 27$, a to oznacza, że $a + b + c$ może być równe $r$, $r + 9$ lub $r + 18$. Które z nich? Wróćmy do $T_{abc}$ i rozpatrzmy te trzy możliwości:

$$T_{abc} = 222 \cdot (a + b + c) = \begin{cases} 222 \cdot r, \\ 222 \cdot (r + 9) = 222 \cdot r + 1998, \\ 222 \cdot (r + 18) = 222 \cdot r + 3996. \end{cases}$$

**Rozwiązanie zadania M 1301.**
Zauważmy, że Halinka, wykonując więcej rzutów, musi wyrzucić więcej orłów lub więcej reszek niż Ferdek. Z drugiej strony nie może wyrzucić jednocześnie więcej orłów i więcej reszek, ponieważ wtedy musiałaby oddać o co najmniej dwa rzuty więcej. To oznacza, że zajdzie dokładnie jedno z dwóch zdarzeń: Halinka wyrzuci więcej orłów albo wyrzuci więcej reszek. Ponieważ moneta jest symetryczna, więc prawdopodobieństwa obu tych zdarzeń są równe $\frac{1}{2}$.

[*]Universitat de les Illes Balears

**Rozwiązanie zadania F 780.**
Na stół działa siła ciężkości, wywierana przez leżącą na blacie część łańcucha, oraz impuls pędu. Górny koniec łańcucha po przebyciu odległości $x$ spada z prędkością $\sqrt{2gx}$. Długość łańcucha leżącego na blacie to $x = gt^2/2$. Pęd przekazywany stołowi wynosi $p = mv\Delta x/l$, a siła w ten sposób wywierana jest równa

$$N = \frac{mv}{l}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{mv^2}{l} = \frac{2mgx}{l}.$$

Ciężar łańcucha o długości $x$ wynosi $Q = mgx/l$. Zatem sumaryczna siła jest równa

$$F = 3mg\frac{x}{l} = \frac{3}{2}\frac{m}{l}g^2t^2.$$

Widzimy, że te możliwe wartości $T_{abc}$ różnią się o prawie 2000 (co najmniej), znamy $S_{abc}$ i wiemy, że $100 \leqslant abc < 1000$. Pozwala to jednoznacznie wybrać odpowiednią z tych wartości. To pierwsza z nich, która jest większa od $S_{abc} + 100$.

Prześledźmy to na przykładzie liczby 527 wybranej przez Anię. Dowiadujemy się od niej, że $S_{527} = 2581$.

- Obliczamy $[2581] = 7$, mnożymy przez 2 i znów obliczamy pierwiastek cyfrowy. Dostajemy $r = 5$.
- Mnożymy: $222 \cdot 5 = 1110$.
- Pierwszą możliwą wartością $T_{527}$ jest $1110 + 1998 = 3108$ i w rezultacie...
- ... wybraną liczbą jest $3108 - 2581 = 527$.

Pozostaje jeden szkopuł: jak szybko obliczyć w pamięci pierwiastek cyfrowy? Otóż jest prosta i szybka metoda. W trakcie sumowania cyfr wybranej liczby $n$ (na przykład, od lewej) zastępujemy każdą sumę częściową większą od 9 sumą jej cyfr. Zobaczmy to na przykładzie liczby 8742953 (symbol $\equiv$ oznacza zastąpienie liczby dwucyfrowej sumą jej cyfr):

$$8 \to 8 + 7 = 15 \equiv 6 \to 6 + 4 = 10 \equiv 1 \to 1 + 2 = 3 \to$$
$$\to 3 + 9 = 12 \equiv 3 \to 3 + 5 = 8 \to 8 + 3 = 11 \equiv 2.$$

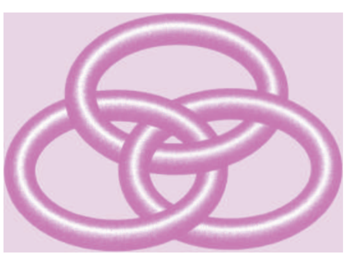
Tak więc $[8742953] = 2$. Trochę treningu i można iść na przyjęcie!

Zauważmy na koniec, że z własności pierwiastka cyfrowego można wyciągnąć interesujący wniosek. Jeśli w zapisie dziesiętnym pewnej wielokrotności liczby 9 brakuje jednej cyfry (i wiemy, że nie jest nią zero), łatwo możemy ją odtworzyć – jest nią ta cyfra, której brakuje pierwiastkowi cyfrowemu do 9, lub 9, gdy pierwiastkiem jest 9 (dlaczego?). Popatrzmy dla przykładu na liczbę 2308302, która jest wielokrotnością 9. Jeśli usunięto z niej cyfrę 8 i podano nam pozostałe cyfry (2, 3, 0, 3, 0, 2), obliczamy pierwiastek cyfrowy dowolnej liczby zbudowanej z tych cyfr, na przykład, $[230302] = 1$ i wiemy już, że brakującą cyfrą jest $9 - 1 = 8$.

Niestety, tak dobrze nie jest, gdy pozwolimy, by usuniętą cyfrą było 0. W naszym przykładzie mamy $[230832] = 9$, a to oznacza, że brakującą cyfrą może być 0 lub 9. Ale cóż, zgadywanie zawsze jest obarczone pewnym ryzykiem...

*tłumaczył Wiktor BARTOL*

## Poliboromeusze



Matematycy wiedzą, że zabawy ze sznurkiem mogą być źródłem różnych zadań i problemów matematycznych, często bardzo poważnych, o daleko idących konsekwencjach. Węzłem w matematyce nazywa się sznurek, zapleciony lub nie, z utożsamionymi (zawiązanymi lub sklejonymi) końcami, czyli taki powyginany i zapleciony okrąg. Kilka takich węzłów nazywa się splotem, a elementy splotu ogniwami. Ogniwa w splocie mogą być zaczepione lub nie. Znany jest dość zaskakujący przykład splotu, nazywanego splotem Boromeuszów, gdyż występuje w herbie tego rodu. Splot Boromeuszów ma niezwykłą cechę: wszystkie trzy ogniwa są splecione, ale dowolne dwa nie. Oznacza to, że gdy rozetniemy dowolne ogniwo, pozostałe dwa będą niezaplecione. Pojawia się naturalne pytanie: czy można w podobny sposób zapleść 4, 5, 6 lub więcej ogniw (np. wykonanych właśnie ze sznurka)? W podobny sposób, czyli tak, że rozcięcie dowolnego ogniwa spowoduje rozpad całego splotu. Martin Gardner podaje taki przykład dla dowolnej liczby ogniw. Czy wiesz, Czytelniku, jak go skonstruować? (Rozwiązanie Gardnera w numerze.) Pojawiają się jednak kolejne pytania. Na przykład: czy dla czterech ogniw istnieje rozwiązanie różne od zaproponowanego przez Gardnera? Ile jest takich rozwiązań i czy w ogóle to się da określić? A gdy liczba ogniw będzie równa 5, 6 lub więcej?

Sploty o opisanych własnościach nazywane są czasem *splotami Brunna*, za D. Rolfsenem, autorem pięknej książki *Knots and Links*.

*Zdzisław POGODA*
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

## Matemagik

Gardner napisał też niewielką monografię takich sztuczek: *Mathematics, Magic and Mystery*, Wyd. Dover, 1956.

W wielu książkach Martina Gardnera można spotkać opisy sztuczek magicznych z użyciem kart, monet, kości, zapałek i domino. Są tam pokazy znikania figur, dziwnych manipulacji z chusteczkami, sznurkami i recepturkami. Są też zgadywanki z tablicami liczb, kalendarzami, jak i różne sposoby zgadywania ukrytych liczb czy wieku uczestników zabawy.

Persi Diaconis był w młodości zawodowym magikiem, który dzięki pomocy Gardnera rozpoczął studia matematyczne na Uniwersytecie Harvarda. Jest profesorem statystyki i matematyki na Uniwersytecie Stanforda w USA.

Raymond Smullyan to matematyk amerykański, logik i filozof, autor wspaniałych książek z zagadkami logicznymi, wydanych również po polsku. Znany jako pianista koncertowy. W czasie studiów utrzymywał się z pokazu sztuczek magicznych.

Prezentacje opisane przez Gardnera nie wymagają sprytu rąk. Cała ich istota polega na wykorzystaniu własności liczb, figur czy przekształceń matematycznych. Magika korzystającego z matematyki nazwał matemagikiem. Wśród mistrzów matemagii byli oprócz niego m.in. słynni matematycy: Persi Diaconis i Raymond Smullyan. Swój ostatni zbiór łamigłówek matematycznych zadedykował Diaconisowi *...za jego niezwykły wkład w matematykę i sztukę iluzji...* Gardner intryguje widza sztuczką magiczną, a potem zachęca do jej wyjaśnienia. Daje to przedsmak prawdziwego odkrycia matematycznego. Sztuczki to *...eksperymenty, oparte na matematyce, na własnościach figur i liczb, tylko ukryte pod nieco ekstrawagancką postacią...* (G.E. Szyłow, wstęp do rosyjskiego wydania książki *Mathematics, Magic and Mystery*). Spróbuj odkryć, jakie fakty i techniki matematyczne kryją się za niektórymi sztuczkami opisanymi przez Gardnera.

**Odgadywanie cyfry.** (W czasie sztuczki matemagik stoi odwrócony plecami do publiczności.) Widz wybiera jakąś liczbę naturalną. Tworzy z niej drugą, różną od niej liczbę przez dowolne przestawienie cyfr. Odejmuje mniejszą od większej i z różnicy usuwa dowolną cyfrę, różną od 0. Podaje matemagikowi pozostałe cyfry w dowolnej kolejności. Matemagik odgaduje usuniętą cyfrę.

Różnica jest podzielna przez 9.

**Orzeł czy reszka.** Na stół kładzie się garść monet. Matemagik odwraca się i prosi kogoś o przewracanie monet. Za każdym obrotem należy powiedzieć głośno słowo „jest”. (Można odwracać wielokrotnie tę samą monetę.) Po zakończeniu jedną monetę zakrywa się. Matemagik odwraca się i odgaduje, czy na zakrytej monecie widać orła, czy reszkę.

Matemagik zapamiętuje liczbę reszek i dodaje liczbę wypowiedzianych „jest”. Parzystość tej liczby jest równa parzystości liczby reszek.

**Zgadywanie karty.** Matemagik rozdaje czterem osobom po pięć kart z potasowanej talii. Rozdaje też pięć kart dla siebie. Każdą z czterech osób prosi o zapamiętanie jednej karty. Zbiera karty od graczy i składa je razem ze swoimi, a następnie rozkłada na stole w pięciu kupkach po pięć kart. Prosi o wskazanie dowolnej kupki i otwiera ją wachlarzykiem. Każdy z czterech widzów zgłasza, czy widzi swoją kartę w wachlarzyku. Matemagik wskazuje tę kartę. Zgadywanie powtarza się dla każdej z pięciu kupek.

Matemagik zbiera karty po kolei kupkami, a następnie rozkłada od lewej do prawej po jednej karcie, tak aby utworzyło się 5 kupek. Karta wybrana przez $i$-tego od lewej widza jest w kupce na $i$-tym miejscu od lewej.

*Andrzej DĄBROWSKI*
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

Przykład splotu złożonego z 8 ogniw, takiego że rozcięcie dowolnego ogniwa powoduje rozpad całego splotu.

## Craigowi Venterowi ku uwadze

Venter to ten uczony amerykański, który już trzy razy na konferencjach prasowych oznajmił, że syntetyzował życie. Doświadczenia Ventera są rzeczywiście pionierskie i imponujące – w dużym skrócie i uproszczeniu polegają na tym, że syntetyzowany w pracowni genom „na zamówienie" wstawiono do pozbawionej własnego genomu komórki bakteryjnej i w tych warunkach komórka podjęła funkcje życiowe, dyktowane przez wprowadzony genom, wśród których najważniejszą: rozmnażanie. Czy to oznacza stworzenie życia *de novo*? Czy to już umiemy?

Grupa biologów i informatyków z laboratorium w Heidelbergu postanowiła zatem przeanalizować życie tego typu komórki, tworząc wirtualny model o znanych składnikach i parametrach ich działań. Cel końcowy: życie w pełni kontrolowane w komputerze. Warunki wyjściowe: prokariotyczna komórka *Mycoplazma pneumoniae*, bliska krewna bakterii wybranej przez Ventera, z jednym z najmniejszych genomów. Składa się on z 689 genów kodujących białka (genom człowieka ma 25 tys. genów).

Wszystkie organizmy mające jądro komórkowe kwalifikuje się jako **eukarioty**. Te bez jądra, mające DNA w bezpośrednim otoczeniu wnętrza komórki, to **prokarioty** (wszystkie bakterie).

Życie każdej komórki składa się z podstawowych trzech etapów: utrzymywania w dobrej kondycji swojego genomu (DNA), procesów przenoszenia informacji z DNA na inny kwas nukleinowy (RNA), który służy jako matryca do syntezy białek. W dużej mierze te białka to enzymy, katalizujące wszystkie reakcje metaboliczne, czyli przekształcenia chemiczne żywej komórki. Metaboliczne procesy, ich intensywność, decydują o życiu tu i teraz.

Te trzy podstawowe zadania żywej komórki przebiegają różnie u prokariotów i eukariotów – udowodnienie tego zdania zajęło biochemikom i genetykom kilkadziesiąt lat. Upraszczając, prokarioty są dużo mniej skomplikowane. Nadszedł czas, pomyślano, żeby jakiegoś prokariota wyczerpująco opisać i syntetyzować. A potem zbudować taki sam organizm *in silico* i sterować jego wirtualnym życiem za pomocą programów informatycznych.

Najpierw wykonano szereg doświadczeń, w których badano **minimalne** potrzeby bakterii do wypełnienia podstawowych funkcji życia. Połączono istniejącą wiedzę o enzymach i ich katalitycznych reakcjach z wiedzą o aktywności genów. Te wzajemne reakcje okazały się bardziej złożone, niż przewidywać można w oparciu o podręcznikową wiedzę o regulacji metabolizmu w bakteriach (kanon stworzony przez noblistów Lwoffa, Monoda i Jacoba aż 50 lat temu). Enzymy łączą się w zespoły, często wieloskładnikowe. Funkcje pojedynczych cząsteczek enzymów są różne w kompleksie niż solo, 32 enzymy mogą prowadzić 91 różnych reakcji.

Znane fakty o regulacji reakcji w komórce wskazują także na rolę specyficznych białek, zwanych czynnikami transkrypcyjnymi. U mykoplazmy stwierdzono istnienie jedynie 9 takich czynników, choć złożony charakter regulacji wielu procesów sugeruje istnienie wielu innych, dodatkowych, alternatywnych mechanizmów regulacji. Jakich? Nie wiemy.

Z 411 przebadanych białek (60% całej liczby) większość tworzy wieloskładnikowe kompleksy, połowa z których nie była dotychczas opisana i scharakteryzowana. Kompleksy dodatkowo oddziałują ze sobą i lokalizują się w określonych regionach komórki.

Zatem poznanie sieci cząsteczek i ich oddziaływań najmniejszej żyjącej komórki znowu odsunęło się w nieokreśloną przyszłość. To dobry model badawczy – mówią uczeni. Z trudem przyznają, że jest to bardziej skomplikowany model, niż sądzili. Nie mówiąc już o tym, że oddaliła się perspektywa regulacji życia np. bakterii o tylko dwa razy większym genomie.

*Magdalena FIKUS*

## Kącik przestrzenny (6)

## Czworościany ortocentryczne

Tym razem, zgodnie z obietnicą, kącik poświęcimy czworościanom ortocentrycznym. Jak wiadomo, nie w każdym czworościanie istnieje punkt przecięcia wszystkich wysokości. Czworościany mające taki punkt nazywane są *ortocentrycznymi*. Spróbujmy opisać je dokładniej.

**Twierdzenie 1.** *Dla każdego czworościanu następujące warunki są równoważne:*

(a) *istnieje punkt przecięcia wszystkich wysokości,*
(b) *przeciwległe krawędzie są prostopadłe,*
(c) *sumy kwadratów długości przeciwległych krawędzi są równe,*
(d) *równoległościan opisany na czworościanie jest rombościanem,*
(e) *środki krawędzi leżą na jednej sferze,*
(f) *biśrodkowe są równej długości,*
(g) *kwadrat długości każdego odcinka łączącego środki przeciwległych krawędzi jest równy sumie kwadratów ich długości podzielonej przez* 4,
(h) *iloczyny cosinusów przeciwległych kątów dwuściennych są równe.*

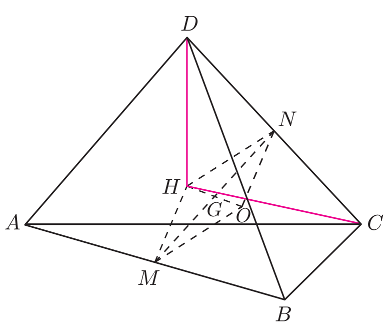
*Biśrodkowe*, czyli odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi czworościanu, pojawiły się w trzecim odcinku kącika przestrzennego (*Delta* 5/2010).

Dowód równoważności tych własności warto potraktować jako zadanie; rozwiązanie można znaleźć na internetowej stronie *Delty*.

Udowodnimy teraz pewną własność czworościanów ortocentrycznych analogiczną do prostej Eulera na płaszczyźnie, czyli prostej przechodzącej przez środek okręgu opisanego, środek ciężkości i ortocentrum danego trójkąta.

O prostej Eulera pisaliśmy ostatnio w numerze 1/2009.

**1.** *Środek ciężkości czworościanu ortocentrycznego, jego ortocentrum i środek sfery na nim opisanej leżą na jednej prostej, a ponadto środek ciężkości jest środkiem odcinka łączącego pozostałe dwa wymienione punkty.*




*Rozwiązanie.* W czworościanie ortocentrycznym $ABCD$ niech $O$ będzie środkiem sfery opisanej, a $M$ i $N$ – środkami krawędzi $AB$ i $CD$. Przez $G$ oznaczmy środek odcinka $MN$, czyli środek ciężkości czworościanu $ABCD$. Niech $H$ będzie punktem symetrycznym do $O$ względem $G$ (rysunek). Punkty $O, G, H$ leżą wtedy na jednej prostej, a $G$ jest środkiem odcinka $OH$. Wobec tego chcemy wykazać, że $H$ jest ortocentrum czworościanu $ABCD$.

Zauważmy, że czworokąt $MONH$ jest równoległobokiem. W szczególności proste $OM$ i $HN$ są równoległe. Z definicji punktów $O$ i $M$ wynika, że odcinki $OM$ i $AB$ są prostopadłe, więc również $HN \perp AB$. Stąd i z prostopadłości prostych $AB$ i $CD$ ($ABCD$ jest ortocentryczny!) wynika, że płaszczyzna $CDH$ jest prostopadła do prostej $AB$. W takim razie prosta $DH$ jest prostopadła do prostej $AB$. Analogicznie dowodzimy, że $DH$ jest prostopadła również do prostej $BC$.

To zaś oznacza, że jest prostopadła do całej płaszczyzny $ABC$, czyli stanowi wysokość czworościanu $ABCD$. Podobnie dowodzimy, że proste $AH, BH, CH$ są wysokościami rozpatrywanego czworościanu, co kończy dowód.

Na koniec zadanie dla Czytelników.

**2.** *Wykazać, że w czworościanie ortocentrycznym środki ciężkości ścian, spodki wysokości czworościanu oraz punkty dzielące odcinki łączące ortocentrum czworościanu z jego wierzchołkami w stosunku* $2:1$ (*licząc od wierzchołków*) *leżą na jednej sferze.*

*Wskazówka*: jaka jest średnica tej sfery?

Jest to *sfera dwunastu punktów* – przestrzenny odpowiednik okręgu dziewięciu punktów, czyli okręgu przechodzącego przez środki boków danego trójkąta, spodki jego wysokości i środki odcinków łączących wierzchołki z ortocentrum.

O okręgu dziewięciu punktów i sferze dwunastu punktów można przeczytać w *Delcie* 3/1999.

Więcej zadań o czworościanach ortocentrycznych można znaleźć na internetowej stronie *Delty*.

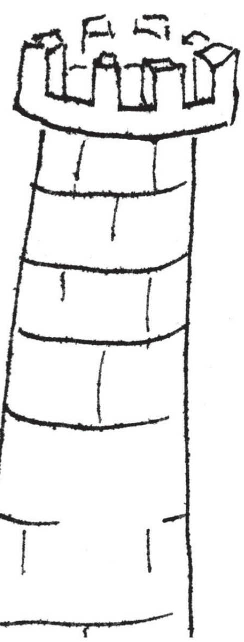
*Michał KIEZA*

## Informatyczny kącik olimpijski (37): Ogromna wieża

Tym razem przyjrzymy się zadaniu *Ogromna wieża* (ang. *A huge tower*) pochodzącemu z Olimpiady Informatycznej Europy Środkowej 2010 (CEOI 2010).

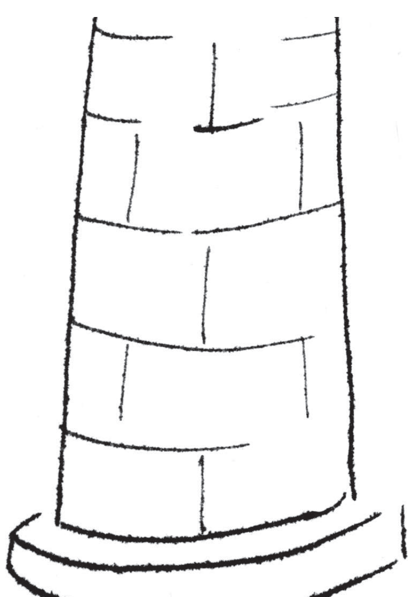
Mamy do dyspozycji $n$ kamiennych bloków różnych rozmiarów. Mamy obliczyć, na ile sposobów można zbudować z tych bloków wieżę, jeżeli należy użyć ich wszystkich, a jeden blok można położyć na drugim tylko wtedy, gdy rozmiar górnego jest nie większy niż rozmiar dolnego powiększony o ustaloną liczbę dodatnią $d$. Wynik należy zwrócić modulo jakaś nieduża liczba całkowita.

Oznaczmy przez $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rozmiary poszczególnych bloków, a wieżę zbudowaną z nich zgodnie z warunkami zadania nazwijmy *poprawną*. Pierwsze rozwiązanie, które przedstawimy, jest najmniej efektywne, ale nie wymaga żadnych spostrzeżeń. Wystarczy użyć programowania dynamicznego do stopniowego obliczania wartości $t(S, a)$, które oznaczają odpowiedź na pytanie „na ile sposobów można zbudować poprawną wieżę z bloków należących do zbioru $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, tak aby blok o numerze $a$ znalazł się na dole?". Naturalnie, zakładamy, że $a \in S$. Jeśli dostępny jest tylko jeden blok, wieżę można zbudować na dokładnie jeden sposób. Jeśli zaś mamy zbiór $S$ co najmniej dwóch bloków, a blok $a$ ma znaleźć się na dole, to należy na wszystkie sposoby wybrać blok, który ma się znaleźć bezpośrednio na nim. Jeśli ten przedostatni blok oznaczymy przez $b$, to pod warunkiem, że $r_b \leqslant r_a + d$, znaleźliśmy $t(S \setminus \{a\}, b)$ sposobów na zbudowanie naszej wieży. Sumujemy takie wartości po wszystkich możliwościach wyboru $b \in S$ i otrzymujemy $t(S, a)$. W ten sposób, szukając odpowiedzi w kolejności od najmniej licznych zbiorów $S$, każdą z nich znajdujemy w czasie proporcjonalnym do rozmiaru $S$, co oznacza, że cały problem zostanie rozwiązany po wykonaniu $O(2^n n^2)$ operacji.



Aby znaleźć bardziej efektywne rozwiązanie, warto inaczej pomyśleć o budowaniu wieży. Zamiast zastanawiać się, który z bloków położymy na spód albo wierzch, rozpatrujmy bloki kolejno, od najmniejszego do największego, ale za to dopuśćmy umieszczanie kolejnego bloku gdzieś w środku już zbudowanej konstrukcji. Załóżmy, że rozmiary bloków $r_i$ są uporządkowane niemalejąco, i rozważmy dowolną poprawną wieżę zbudowaną z bloków o numerach od 1 do $k-1$. Powiedzmy, że w tej wieży blok $a$ leży pod blokiem $b$ i pomiędzy nie chcemy teraz włożyć blok $k$. Zastanówmy się, kiedy nowa konstrukcja jest poprawna. Poza fragmentem zawierającym bloki $a$, $b$ i $k$, nowa wieża jest poprawna wtedy i tylko wtedy, gdy dotychczasowa była. Ponadto, musi być $r_k \leqslant r_a + d$ oraz $r_b \leqslant r_k + d$. Pamiętajmy jednak, że $r_b \leqslant r_k$, więc druga nierówność zawsze zachodzi. To znaczy, że jeżeli mamy poprawną wieżę zbudowaną z bloków $1, \ldots, k-1$ oraz $r_k \leqslant r_a + d$, to wstawiając blok $k$ między $a$ oraz $b$, otrzymamy poprawną wieżę dla bloków $1, \ldots, k$. Z drugiej strony, jeśli mamy poprawną wieżę dla bloków $1, \ldots, k$ i blok $k$ znajduje się w niej między blokami $a$ oraz $b$, to $r_k \leqslant r_a + d$. Ponieważ jednak $r_b \leqslant r_k$, więc mamy $r_b \leqslant r_a + d$ i rozważana wieża po usunięciu bloku $k$ staje się poprawną wieżą dla bloków $1, \ldots, k-1$.

Czytelnik Dociekliwy zauważy zapewne, że blok $k$ możemy chcieć położyć na spód lub wierzch wieży, a nie tylko pomiędzy dwa bloki. Czy zmienia to przedstawione rozumowanie? Jak poradzić sobie z takim przypadkiem?



Z powyższego rozumowania wyciągamy wniosek, że wieża ze wstawionym pomiędzy bloki $a$ i $b$ blokiem $k$ (nie mniejszym od wszystkich bloków wieży) jest poprawna wtedy i tylko wtedy, gdy była poprawna bez niego oraz gdy można go położyć na bloku $a$. Bardzo ważne jest spostrzeżenie, że w tym właśnie wniosku nie używamy tak naprawdę rozmiarów bloków innych niż $a$ oraz $k$.

Z takim spostrzeżeniem możemy śmiało konstruować algorytm rozwiązujący nasz problem. Oznaczmy przez $a_k$ liczbę tych bloków spośród $1, \ldots, k-1$, na które można położyć blok $k$. Każdy blok można też położyć na samym dole wieży. Widzimy, że używając tylko pierwszego bloku, poprawną wieżę można zbudować na $a_1 + 1 = 1$ sposób. Używając pierwszych dwóch, na $(a_1+1)(a_2+1)$ sposobów. I tak dalej: aby utworzyć poprawną wieżę z $k$ pierwszych bloków, należy jakoś zbudować wieżę z pierwszych $k-1$ bloków, a następnie na jeden z $a_k + 1$ sposobów ustawić blok $k$. Ostatecznym wynikiem jest więc $(a_1+1)(a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_n+1)$. Zauważmy jeszcze, że wartości $a_i$ możemy szybko obliczyć, korzystając z (niemalejącego) ciągu $r_i$. Używamy do tego dwóch indeksów, $x$ oraz $y$, przy czym $x$ przebiega kolejno wartości od 1 do $n$, a $y$ ma być zawsze najmniejszym takim indeksem, że $r_y + d \geqslant r_x$. W takim przypadku mamy, dla każdego kolejno rozpatrywanego $x$, równość $a_x = x - y$. Dodajmy, że oba wskaźniki w trakcie działania tego algorytmu jedynie wzrastają, co zapewnia, że czas obliczenia ciągu $a_i$ jest liniowy. Całkowity koszt czasowy jest więc uzależniony od sortowania rozmiarów bloków i wynosi $O(n \log n)$.

*Tomasz KULCZYŃSKI*

## Co LHC widziało?

Rok 2010 był pierwszym rokiem normalnego działania Wielkiego Zderzacza Hadronów (LHC – Large Hadron Collider). Po wstępnym uruchomieniu na jesieni 2009 roku i osiągnięciu niskiej, ale i tak rekordowej energii 2,36 TeV, przystąpiono do zderzania przeciwbieżnych wiązek protonów z energią pojedynczego protonu 3,5 TeV, czyli zbierania danych przy całkowitej energii zderzeń 7 TeV (to znaczy po przyspieszeniu każdego z protonów potencjałem 3,5 biliona wolt). Była to energia uznana za bezpieczną z punktu widzenia maksymalnego niezbędnego prądu krążącego w nadprzewodzących magnesach dipolowych, służących do utrzymywania wiązek protonów na „zakrętach” LHC. Ponieważ poziom bezpieczeństwa użytkowania akceleratora zależy także od liczby krążących w nim protonów, od której z kolei zależy tzw. świetlność urządzenia, czyli liczba zderzeń zachodząca w jednostce czasu, zdecydowano się na stopniowe podnoszenie tych wielkości przez cały rok. W rezultacie liczba zebranych danych rosła, mniej więcej, w postępie geometrycznym. Praktycznie co tydzień mieliśmy do dyspozycji dwa razy więcej danych niż tydzień wcześniej.

Ostatecznie uzyskano zamierzoną na zeszły rok chwilową świetlność sześć rzędów wielkości większą od początkowej. Detektory obejrzały po ponad bilionie przypadków, zapisując najciekawsze, mniej więcej co dziesięciotysięczny.

Na tym jednak nie koniec. W listopadzie w ciągu tygodnia przystosowano zderzacz do przyspieszania jonów (jąder) ołowiu $^{208}\mathrm{Pb}^{82+}$ i uzyskano ich przeciwbieżne wiązki zderzające się przy energii w środku masy 2,76 TeV na parę nukleonów, czyli maksymalnej całkowitej energii zderzenia ponad pół PeV ($10^{15}$ elektronowoltów). W ten sposób energia osiągana w zderzeniach ciężkich jonów została podniesiona czternastokrotnie.

Wieszczonego końca świata, pomimo rekordowego zbliżenia się do warunków panujących tuż po Wielkim Wybuchu, oczywiście nie było, ale i tak było ciekawie. LHC ma na swoim koncie dwa odkrycia, z których jedno było spodziewane, a drugie jest trochę zaskakujące. Głównym celem zeszłorocznej kampanii było jednak „odkrycie Modelu Standardowego na nowo”. Chodziło nie tylko o wszechstronne sprawdzenie detektorów, ale także o zrozumienie, jak dobrze zgadzają się przewidywane częstości zachodzenia poszczególnych znanych procesów z rzeczywistością w niezbadanym dotąd zakresie energii. Odtworzyliśmy wszystko, co powinniśmy. Zrekonstruowaliśmy rezonansowe stany związane ciężkich kwarków (spektroskopia stanów o masie trochę powyżej 3 GeV/c$^2$ dla par kwark-antykwark powabny oraz trochę powyżej 9 GeV/c$^2$ dla par kwark-antykwark piękny), bozony pośredniczące $W^+$, $W^-$ i $Z^0$ oraz produkcję par kwarków top, czyli najmasywniejszych znanych obiektów elementarnych.

Eksperyment CMS zarejestrował bardzo ciekawy przypadek czteromionowy, zgodny z hipotezą rozpadu pary bozonów $Z^0$ na miony. Właśnie tak powinien przejawiać się poszukiwany bozon Higgsa, jeżeli miałby masę ponad progiem umożliwiającym rozpad na dwa bozony $Z^0$. Przypadki takie są jednak oczekiwane również bez istnienia bozonu Higgsa o takiej masie, więc na razie nie ma co się ekscytować, ale znalezienie takiego rzadkiego okazu raduje serce łowcy.

Wracając do odkryć, to obydwa dotyczą własności gęstej materii jądrowej uzyskiwanej w LHC. Zacznę od drugiego, bo choć uzyskane później, to jest tzw. spodziewanym odkryciem, więc nie ma się co o nim rozpisywać. Mianowicie po raz pierwszy zaobserwowano produkcję bozonów pośredniczących, konkretnie bozonu $Z^0$, w oddziaływaniach ciężkich jonów. Obserwacji tej dokonał zespół badawczy eksperymentu CMS. Złośliwi twierdzą, że miał po prostu szczęście.

Ze szczęściem niewiele już wspólnego miało bardziej zaskakujące odkrycie, też dokonane przez CMS. Chodzi o tzw. *ridge effect*, czyli, w wolnym tłumaczeniu, o odkrycie „linii grzbietowej” na wykresie korelacji dwucząstkowych w oddziaływaniu proton-proton. Zostało to tak nazwane, bo na trójwymiarowych wykresach przypomina grzbiet górski. Odkrycie było możliwe dzięki zaprojektowaniu specjalnej ścieżki systemu wyzwalania zapisu danych, która mogła być używana tylko przy stosunkowo małej świetlności na początku roku 2010, gdyż później wysyciłaby całe pasmo rejestracji danych. Zjawisko zostało najpierw odkryte w zderzeniach jądro-jądro w RHIC-u (Relativistic Heavy Ion Collider), działającym w Brookhaven National Laboratory, zlokalizowanym na Long Island w Nowym Jorku, do niedawna dysponującym najwyższymi energiami zderzeń ciężkich jonów. Polega ono na zwiększonym prawdopodobieństwie obserwacji par cząstek, których pędy niewiele różnią się kątem azymutalnym $\phi$, ale mogą się znacznie różnić kątem polarnym $\theta$, czyli rozlatują się nawet prawie w przeciwne strony, ale w jednej półpłaszczyźnie, której brzegiem jest oś wiązki. Na trójwymiarowym wykresie, na którym miarę stopnia korelacji przedstawia się jako funkcję różnicy kąta azymutalnego $\Delta\phi$ i różnicy pewnej funkcji kąta polarnego $\Delta\eta$ (konkretnie $\eta = -\ln[\mathrm{tg}(\theta/2)]$), widać wydłużony garb dla $\Delta\phi \sim 0$. Występowanie takiego fenomenu w oddziaływaniach jądro-jądro zostało zinterpretowane jako jeden z (początkowo nieoczekiwanych) przejawów występowania plazmy kwarkowo-gluonowej. Wygląda na to, że w najbardziej centralnych zderzeniach proton-proton zachodzi to samo zjawisko.

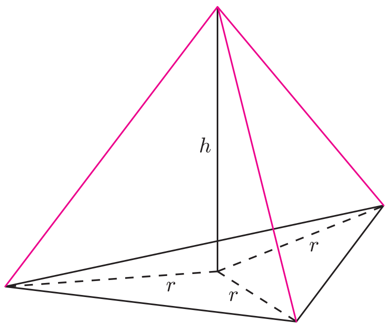
Obecny rok zapowiada się jeszcze ciekawiej. Mamy uzasadnioną nadzieję, że worek z tzw. nową fizyką może się rozwiązać. Pewności jednak nie ma i to, być może, jest właśnie najciekawsze.

*Piotr ZALEWSKI*

# Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

W roku szkolnym 2010/2011 odbywa się szósta edycja Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Jest to już od kilku lat najbardziej prestiżowy ogólnopolski konkurs matematyczny dla uczniów gimnazjów. Pierwszy etap (korespondencyjny) zakończył się 25 października. Wzięło w nim udział około 1000 uczniów (w momencie składania tego tekstu do druku nie była znana dokładna liczba uczestników). Jest to liczba porównywalna z poprzednią edycją OMG. Poniżej przedstawiamy wraz z przykładowymi rozwiązaniami trzy zadania z pierwszego etapu VI OMG, które – zdaniem autorów tego tekstu – należały do najciekawszych.

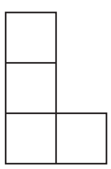



Rys. 1

**Zadanie 2.** *W pewnym czworościanie każdy wierzchołek połączono odcinkiem ze środkiem okręgu opisanego na przeciwległej ścianie. Okazało się, że otrzymane odcinki są wysokościami czworościanu. Wykaż, że czworościan ten jest foremny.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeżeli odcinek łączący wierzchołek czworościanu ze środkiem okręgu opisanego na przeciwległej ścianie jest jednocześnie wysokością tego czworościanu, to krawędzie wychodzące z tego wierzchołka są równej długości (patrz rysunek 1). Oznaczmy wierzchołki czworościanu przez $A_i$ oraz długość krawędzi wychodzących z wierzchołka $A_i$ przez $a_i$, gdzie $i = 1, 2, 3, 4$. Wtedy krawędź $A_iA_j$, gdzie $i \neq j$, wychodzi z wierzchołka $A_i$ oraz z wierzchołka $A_j$. Oznacza to, że $a_i = a_j$, a więc czworościan jest foremny.

L-tetraminem nazywamy figurę składającą się z czterech kwadratów o boku 1, ułożonych jak na rysunku:



L-tetramina można obracać i odbijać symetrycznie.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $a$ | $b$ |
| $c$ | $d$ | $c$ | $d$ |
| $a$ | $b$ | $a$ | $b$ |
| $c$ | $d$ | $c$ | $d$ |

Rys. 2

**Zadanie 5.** *W każde pole kwadratowej tablicy $100 \times 100$ wpisano liczbę rzeczywistą. Okazało się, że suma liczb wpisanych w każde cztery pola, które można nakryć L-tetraminem, jest równa zeru. Wyznacz sumę liczb wpisanych w pola, które znajdują się na obu przekątnych tablicy.*

Rozwiązanie. Oznaczmy liczbę wpisaną w $i$-ty wiersz i $j$-tą kolumnę tablicy przez $a_{i,j}$, gdzie $i, j = 1, \ldots, 100$. Przykrywając L-tetraminem liczby $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2}$, a następnie liczby $a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2}, a_{1,3}$, stwierdzamy, że $a_{1,1} = a_{1,3}$. Postępując analogicznie, zauważamy, że $a_{i,j} = a_{(i+2),j}$ dla $i = 1, \ldots, 98$, $j = 1, \ldots, 100$ oraz $a_{i,j} = a_{i,(j+2)}$ dla $i = 1, \ldots, 100$, $j = 1, \ldots, 98$. Otrzymany wynik oznacza, że rozważana tablica jest okresowa o okresie 2. Innymi słowy, dowolny kwadrat wymiaru $4 \times 4$, zawarty w tej tablicy, ma postać jak na rysunku 2. Przykrywając L-tetraminem pierwsze dwie kolumny rozważanego kwadratu, wnioskujemy, że $a + b + c + d = 0$. Przykrywając L-tetraminem liczby $a, c, a, b$, otrzymujemy $2a + b + c = 0$, co razem z poprzednią równością daje $a = d$. Przykrywając L-tetraminem liczby $b, d, b, a$, wnioskujemy analogicznie, że $a = c$. Zatem rozważana tablica zawiera tylko dwie różne liczby $a = a_{i,j}$ dla $i + j$ parzystych i $b = a_{i,j}$ dla $i + j$ nieparzystych. Ponadto widzimy, że $a + b + c + d = 2(a + b) = 0$. Stąd suma wszystkich liczb stojących na obu głównych przekątnych tablicy wynosi

$$a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{100,100} + a_{1,100} + a_{2,99} + \ldots + a_{100,1} = 100(a + b) = 0.$$

**Zadanie 7.** *Udowodnij, że nie istnieją liczby nieparzyste $a$ i $b$ spełniające równanie $a^2 - b^3 = 4$.*

Rozwiązanie. Zapiszmy rozważane równanie w postaci $(a + 2)(a - 2) = b^3$. Liczby $a + 2$ i $a - 2$ są nieparzyste i różnią się o 4. Jeżeli $d$ jest wspólnym dzielnikiem liczb $a + 2$ i $a - 2$, to $d$ dzieli także różnicę tych liczb. Liczba 4 (poza liczbami 1 i $-1$) ma tylko parzyste dzielniki i dlatego liczby $a + 2$ i $a - 2$ są względnie pierwsze. Wnioskujemy stąd, że $a + 2 = k^3$ i $a - 2 = l^3$, gdzie $k, l$ są liczbami nieparzystymi. Z definicji liczb $k$ i $l$ wiemy, że $k^3 - l^3 = (k - l)(k^2 + kl + l^2) = 4$. Zauważmy, że liczba $k - l$ nie może być równa 2, ponieważ liczba $k^2 + kl + l^2$ jest nieparzysta. Pozostał do rozważenia przypadek $k - l = 4$. Wtedy $k^2 + kl + l^2 = (k - l)^2 + 3kl = 16 + 3kl = 1$, co prowadzi do równości $kl = -5$. Jedyne pary liczb całkowitych $(k, l)$, gdzie $k > l$, spełniające tę równość, to $(5, -1)$ oraz $(1, -5)$. W obu przypadkach $k - l = 6$ i otrzymujemy sprzeczność, która kończy rozwiązanie zadania.

*Krzysztof CHEŁMIŃSKI*

# Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 601 ($WT = 1{,}57$) i 602 ($WT = 2{,}18$) z numeru 5/2010

| | | |
|---|---|---|
| Franciszek S. Sikorski | Warszawa | 43,92 |
| Janusz Olszewski | Warszawa | 41,94 |
| Piotr Kumor | Olsztyn | 40,19 |
| Bartłomiej Dyda | Wrocław | 37,34 |
| Michał Kieza | Warszawa | 36,46 |

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

## Zadania z matematyki nr 613, 614

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**613.** Czy da się rozmieścić na płaszczyźnie skończenie wiele kół o rozłącznych wnętrzach tak, by każde z tych kół było styczne do pięciu innych?

**614.** Wyznaczyć wszystkie liczby wymierne $x$, niecałkowite, dla których wartość wyrażenia $3x^3 + 10x^2 - 3x$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 614 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

## Rozwiązania zadań z numeru 9/2010

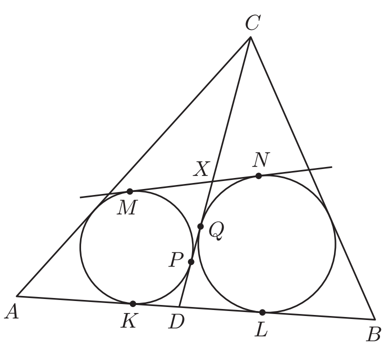
Przypominamy treść zadań:

**605.** Rozwiązać równanie $x^3 + x^2 = 16 + 2^y$ w liczbach całkowitych $x$, $y$.

**606.** Dany jest trójkąt $ABC$. Rozważamy punkt $D$, zmieniający swoje położenie na boku $AB$. Prosta styczna do okręgów wpisanych w trójkąty $ACD$ i $BCD$, rozłączna z odcinkiem $AB$, przecina odcinek $CD$ w punkcie $X$. Udowodnić, że wszystkie uzyskane w ten sposób punkty $X$ leżą na pewnym okręgu.

**605.** Łatwo sprawdzić, że wartość wyrażenia $x^3 + x^2 - 16$ może dać przy dzieleniu przez 7 wszystkie reszty z wyjątkiem 2 oraz 4. Potęgi dwójki dają jedynie reszty 1, 2, 4. Rozważane równanie może więc być spełnione tylko wtedy, gdy $2^y \equiv 1 \pmod 7$; to zaś ma miejsce jedynie dla wykładników $y$ podzielnych przez 3.

Jeśli więc równanie $x^3 + x^2 - 16 = 2^y$ jest spełnione, to $2^y$ jest sześcianem liczby całkowitej. Dla liczb całkowitych $x > 4$ wartość $x^3 + x^2 - 16$ leży pomiędzy $x^3$ a $(x+1)^3$, więc nie jest sześcianem. Dla $x < 3$ wartość $x^3 + x^2 - 16$ jest ujemna. Dla $x = 3$ dostajemy równanie sprzeczne $20 = 2^y$. Pozostaje wartość $x = 4$, która wraz z $y = 6$ daje jedyne rozwiązanie równania.




**606.** Przyjmijmy, że okręgi wpisane w trójkąty $ACD$ i $BCD$ są styczne do boku $AB$ odpowiednio w punktach $K$ i $L$; do prostej przechodzącej przez $X$ – odpowiednio w punktach $M$ i $N$; zaś do odcinka $CD$ – odpowiednio w punktach $P$ i $Q$.

Punkty styczności z okręgiem wpisanym w trójkąt wyznaczają na jego bokach odcinki o długościach wyrażających się znanymi wzorami:

$$|DK| = \frac{|AD| + |CD| - |AC|}{2}, \qquad |DL| = \frac{|BD| + |CD| - |BC|}{2}.$$

Po dodaniu stronami:

$$|KL| = |CD| - \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2}.$$

Odnotujmy także zależności

$$|DX| = \frac{|DP| + |PX|}{2} + \frac{|DQ| + |QX|}{2} = \frac{|DK| + |MX|}{2} + \frac{|DL| + |NX|}{2} = \frac{|KL| + |MN|}{2}.$$

Odcinki $KL$ i $MN$ są symetryczne względem wspólnej osi symetrii obu okręgów. Możemy zatem przepisać ostatnią równość jako $|DX| = |KL|$.

Z uzyskanych związków wnosimy, że

$$|CX| = |CD| - |DX| = |CD| - |KL| = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2}.$$

To znaczy, że punkt $X$ leży na okręgu o środku $C$ i promieniu zależnym jedynie od trójkąta $ABC$, a nie od położenia punktu $D$ na boku $AB$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 500 ($WT = 1{,}21$) i 501 ($WT = 3{,}73$) z numeru 6/2010

| | | |
|---|---|---|
| Mateusz Łącki | Kraków | 44,50 |
| Jacek Piotrowski | Rzeszów | 37,13 |
| Tomasz Rudny | Warszawa | 32,65 |
| Jerzy Witkowski | Radlin | 31,75 |
| Andrzej Nowogrodzki | Chocianów | 30,57 |
| Dariusz Wilk | Rzeszów | 26,57 |
| Andrzej Idzik | Bolesławiec | 26,47 |
| Tomasz Wietecha | Tarnów | 24,39 |

Witamy kolejnego członka naszego Klubu – p. Łąckiego.

# Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2011

## Zadania z fizyki nr 510, 511

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

**510.** Masa wolframowego włókna żarówki wynosi $m = 0{,}02$ g, a ciepło właściwe wolframu $c = 160$ J/(kg · K). Gdy żarówka była zasilana stałym napięciem 230 V, jej opór wynosił 800 Ω, a temperatura włókna była równa 2500 K. Podłączono tę żarówkę do napięcia sinusoidalnie zmiennego o częstotliwości 50 Hz i wartości skutecznej 230 V. Obliczyć przybliżoną głębokość modulacji promieniowania żarówki, tzn. wielkość $(I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min})$, gdzie $I$ – moc promieniowania. Założyć, że przepuszczalność szkła żarówki nie zależy od długości fali.

Można wykorzystać także następujące dane: gdy stałe napięcie zasilające zmieniano w niewielkim zakresie i powoli, na każdy 1 wolt jego przyrostu opór żarówki zwiększał się o 2,5 Ω, a temperatura włókna zwiększała się o 0,7 K.

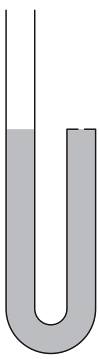
**511.** Pod wpływem różnicy ciśnień w rurce o stałym przekroju występuje stacjonarny (niezmienny w czasie) i laminarny (bezwirowy) przepływ cieczy. Jeśli dwukrotnie zwiększymy średnicę rurki, nie zmieniając jej długości, różnicy ciśnień i rodzaju cieczy, to ile razy wzrośnie ilość cieczy przepływającej w ciągu jednostki czasu? Uzasadnić odpowiedź.

*Wskazówka*: Opory ruchu cieczy charakteryzuje współczynnik lepkości $\eta$ zdefiniowany wzorem $\frac{F}{S} = \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$, gdzie $F$ – siła działająca stycznie na powierzchnię cieczy $S$, wzdłuż której następuje poślizg warstw, $\mathrm{d}v$ – różnica prędkości warstw na odcinku $\mathrm{d}y$ prostopadłym do $S$.

## Rozwiązania zadań z numeru 9/2010

Przypominamy treść zadań:

**502.** Stożkowe naczynie ma niewielki otwór w wierzchołku stożka i taki sam otwór w jego podstawie. Jeśli po nalaniu do pełna wody czas opróżnienia naczynia w pozycji wierzchołkiem do dołu jest równy $t_1$, to ile wynosi $t_2$ – czas opróżnienia w pozycji wierzchołkiem do góry?



**503.** Rurka U-kształtna ma pole przekroju poprzecznego $S_1 = 5$ cm$^2$, a jedno z jej ramion (o wysokości $l = 20$ cm) jest zamknięte, z otworkiem o powierzchni $S_2 = 3$ mm$^2$. Rurkę napełniono wodą do poziomu zamknięcia (rys. 1), następnie wprowadzono przez otworek powietrze, tak że poziom w otwartym ramieniu podniósł się o $h = 5$ cm, po czym pozwolono wodzie opaść.

a) Na jaką wysokość $H$ wytrysnęła woda przez otworek? Pominąć ściśliwość i lepkość wody, a także gęstość i lepkość powietrza.

b) Orientacyjnie oszacować wpływ czynników pominiętych w punkcie a) na wynik. Współczynnik ściśliwości wody jest równy $5\cdot 10^{-10}$ Pa$^{-1}$, lepkość wody wynosi 0,001 kg/(m · s), lepkość powietrza – $1{,}8\cdot 10^{-5}$ kg/(m · s).

**502.** Ze względu na małą lepkość wody możemy pominąć straty energii, a w takim razie prędkość $v$ wypływu przez otwór jest równa $\sqrt{2\mathrm{g}h}$ (gdzie $h$ – wysokość słupa wody). Objętość wody wypływającej w ciągu jednostki czasu jest opisana wzorem

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = Sv = S\sqrt{2\mathrm{g}h},$$

gdzie $S$ jest polem powierzchni otworu, z ewentualną korektą zależną od ostrości jego krawędzi (chodzi o efekt zwężania strumienia na zewnątrz). Podstawiamy tu $\mathrm{d}V = A\mathrm{d}h$, gdzie $A$ jest polem powierzchni wody w naczyniu, równym $A = A_0(h/H)^2$ w przypadku ustawienia wierzchołkiem do dołu, a $A = A_0((H-h)/H)^2$ w przypadku ustawienia odwrotnego ($A_0$ oznacza pole podstawy stożka, a $H$ – jego wysokość). Całkowanie po czasie daje wyniki

$$t_1 = \frac{2}{5}\,\frac{A_0}{S}\sqrt{\frac{H}{2g}}, \qquad t_2 = \frac{16}{15}\,\frac{A_0}{S}\sqrt{\frac{H}{2g}},$$

zatem $t_2 = \frac{8}{3}t_1$.

**503.** Podniesienie poziomu wody w jednym ramieniu o $h$ połączone z obniżeniem o tyle samo poziomu w drugim ramieniu oznacza zwiększenie energii potencjalnej o $\varrho\mathrm{g}S_1h^2$ ($\varrho$ – gęstość wody). Z przyrównania tego wyrażenia do $\frac{1}{2}mv_1^2$ (gdzie $m = 2\varrho S_1 l$ jest masą całej wody) wyznaczamy prędkość $v_1$ uderzenia o zamknięty koniec

$$v_1 = h\sqrt{\mathrm{g}/l} = 0{,}35 \text{ m/s}.$$

Jeśli woda w szerokiej części rurki nie zwolni w wyniku uderzenia, a pominiemy ściśliwość, to w otworku musi poruszać się z prędkością $v_2 = v_1S_1/S_2 = 58$ m/s, zatem wzniesie się na wysokość

$$H = \frac{v_2^2}{2\mathrm{g}} = \frac{h^2}{2l}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = 174 \text{ m}.$$

Tę zaskakująco wielką wartość spróbujemy urealnić, uwzględniając różne zjawiska pominięte wyżej. W każdym z poniższych punktów bierzemy pod uwagę tylko jeden efekt.

a) Nadanie wodzie w otworku tak dużej energii kinetycznej musi nastąpić kosztem zmniejszenia prędkości reszty wody. Przyjmijmy, że pierwsza wyrzucona porcja wody ma wszystkie trzy wymiary jednakowego rzędu, czyli objętość $\Delta V$ rzędu $S_2^{3/2}$. Z przyrównania początkowej energii potencjalnej do sumy energii kinetycznych $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m v_2^2$ znajdujemy skorygowane $v_1$ i $v_2$, a dalej

$$H = \frac{S_1h^2}{2lS_2^2/S_1 + S_2^{3/2}} = 101 \text{ m}.$$

b) Ściśliwość wody oznacza, że nawet w przypadku otworka pomijalnie małego ciśnienie $p$ w chwili zatrzymania słupa wody nie wzrośnie nieograniczenie, lecz tylko do wartości wynikającej z rozchodzenia się w niej fali dźwiękowej, tzn. z zatrzymywania i sprężania kolejnych warstw wody. W przedziale czasu $\Delta t$ zatrzymaniu ulega odcinek $\Delta h$ słupa wody, którego objętość jest równa $V = S_1\Delta h$, a zmiana tej objętości spowodowana wzrostem ciśnienia o $p$ wynosi $\Delta V = \beta V_p = \beta pS_1\Delta h$ (gdzie $\beta$ – współczynnik ściśliwości); z drugiej strony przemieszczenie niesprężonego słupa wody wynosi $v_1\Delta t$, więc $\Delta V = v_1S_1\Delta t$. Gdy do II zasady dynamiki $F = \Delta p/\Delta t$ podstawimy $F = pS_1$, $\Delta p = v_1\Delta m = v_1\varrho V$, otrzymamy

$$p = v_1\sqrt{\varrho/\beta}.$$

(To rozumowanie jest zwykle wykorzystywane do wyprowadzenia wzoru na prędkość fali dźwiękowej.) Z równania Bernoulliego wynika prędkość wypływu wody

$$v_2 = \sqrt{\frac{2p}{\varrho}} = \frac{\sqrt{2v_1}}{\sqrt[4]{\varrho\beta}} = 31 \text{ m/s}.$$

Jest to nieprzekraczalna wartość prędkości wypływu przez najmniejszy nawet otworek. Odpowiednia wartość $H$ wynosiłaby 50 m.

c) Lepkość wody oznacza wystąpienie siły oporu w czasie jej opadania. Podstawiamy orientacyjne dane: $S = 0{,}015$ m$^2$ (powierzchnia boczna walca o długości $2l$ i promieniu równym połowie promienia rurki), $\Delta z = 0{,}013$ m (promień rurki), $\Delta v = 0{,}25$ m/s (średnio) i otrzymujemy siłę oporu równą $3\cdot 10^{-4}$ N. W porównaniu z początkową wartością siły wprawiającej wodę w ruch, równą ciężarowi 10-centymetrowego słupa wody (0,5 N), jest to mniej niż 1/1000, więc efekt można uznać za nieistotny.

d) Lepkość powietrza da o sobie znać w okolicy otworka. Zakładając prędkość równą 40 m/s i przybliżenia podobne do poprzednich, otrzymuje się opór rzędu $10^{-5}$ N, czyli jeszcze mniej niż w punkcie c).

e) Niezerowa gęstość powietrza oznacza, że do wypchnięcia go przez otworek potrzebna jest pewna nadwyżka ciśnienia, która hamuje podnoszenie się poziomu wody. Dla prędkości 40 m/s i gęstości 1,3 kg/m$^3$ to ciśnienie wynosiłoby 1000 Pa, czyli siła hamująca 0,5 N – tyle samo, ile maksymalna siła wprawiająca w ruch wodę. Jest to obok punktu b) najważniejszy efekt zmniejszający realną wartość $H$. Numeryczne całkowanie równania ruchu wody dało wynik $v_1 = 0{,}11$ m/s, stąd $v_2 = 18{,}3$ m/s i $H = 17$ m.

f) Z gęstością powietrza związana jest też siła oporu działająca na wystrzeloną porcję wody... ale na dalsze oszacowania nie ma już miejsca na tej stronie.

## Patrz w niebo: Materia międzygwiazdowa

Wiedza o tym, że materia międzygwiazdowa jest rozłożona w przestrzeni wysoce nierównomiernie, jest obecnie dobrze ugruntowana. Gęste obłoki materii widać w postaci niezliczonych mgławic. Jedne mogą po prostu odbijać światło gwiazd (są to mgławice refleksyjne), inne mogą świecić światłem własnym, ale wskutek pobudzenia przez światło gwiazd (są to mgławice emisyjne), jeszcze inne to mgławice ciemne, widoczne przez to, że przesłaniają gwiazdy położone dalej. W rezultacie materia międzygwiazdowa tworzy zbliżoną do gąbki strukturę o większej gęstości niż średnia, a dziury (wypełnione materią o niższej gęstości) mają rozmaite nieregularne kształty i, oczywiście, nigdzie między nimi nie ma ostrych granic. Wśród astronomów panowało dotychczas przekonanie, że Układ Słoneczny mieści się w jednej z takich dziur o rozmiarach ponad 100 pc i o gęstości 10 razy niższej od średniej. Z początkiem XXI wieku pogląd ten należało nieco zmienić.

Wspomniane tu liczby, bardzo przybliżone zresztą, nie ulegają zmianie. Natomiast obserwacje w nadfiolecie, wykonane głównie przez astronomów francuskich, sugerują, że „Lokalna Bańka”, zawierająca Słońce i inne gwiazdy Układu Lokalnego, w istocie (można by uczenie powiedzieć – topologicznie) nie jest bańką, lecz tunelem między północną i południową stroną dysku galaktycznego. Inaczej mówiąc, dysk Galaktyki ma w miejscu Słońca dziurę na wylot, a w każdym razie przejście z północy na południe wypełnione materią o obniżonej gęstości. Przypuszcza się, że ośrodek międzygwiazdowy miliony lat temu został rozdmuchany przez supernowe lub jasne i gorące gwiazdy. Taką bańkę rozdmuchują wokół siebie np. Plejady lub asocjacja Skorpiona-Centaura. W innych miejscach za to tworzą się obszary wyraźnie gęstszej materii, jak np. w Byku, Wężowniku, Kameleonie, i tam powstają nowe gwiazdy. Zagadką pozostaje, dlaczego nasza „Lokalna Bańka” została rozdęta tak energicznie, aż poza granice Galaktyki, skoro w pobliżu Słońca nie ma gwiazd emitujących silny wiatr gwiazdowy. Przypuszcza się też, że materia wyrzucona poza dysk galaktyczny opada z powrotem na dysk jako tzw. deszcz galaktyczny, nasilając zgęszczanie się obszarów gwiazdotwórczych. Program badawczy jest w toku.

*Tomasz KWAST*

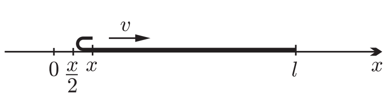
## Styczeń

Znowu witamy Czytelników *Delty* w Nowym Roku! Oby był szczęśliwy! A niebo w styczniu jest jak zawsze w styczniu. W całej okazałości na południu widzimy Oriona, a wysoko – prawie przez zenit – przechodzi Droga Mleczna. Widać też największe gromady gwiazd, Hiady i Plejady w Byku, który w styczniowe wieczory też znajduje się wysoko. Optymiści twierdzą, że nieuzbrojonym okiem powinno się dostrzec 10 gwiazd Plejad, ale zanieczyszczona atmosfera może ten optymizm stłumić. Gromada ta leży 1,3 kpc od nas i liczy około 250 gwiazd. Jest to bardzo młoda gromada, jej wiek ocenia się najwyżej na 100 mln lat. Najosobliwszym, a słynnym obiektem w Byku jest mgławica M1, Krab, będąca wraz ze swoją gwiazdą centralną pozostałością po wybuchu supernowej w 1054 roku. Jest to jednak obiekt o jasności 9 mag i bardzo mały, więc niewdzięczny do obserwacji amatorskich. Gwiazdą centralną Kraba jest jedna z najszybciej wirujących gwiazd neutronowych, czyli pulsar o okresie 0,033 s. Jego kilkakrotne gwałtowne zmiany okresu, zaobserwowane około roku 1970, zinterpretowano jako skutki pękania skorupy gwiazdy w miarę spowalniania jej obrotów. Z Byka (z punktu położonego w pobliżu Plejad) wybiegają meteory należące do roju Taurydów, ale jest to rój listopadowy.

Merkury znajdzie się najdalej na zachód od Słońca 9 I, czyli można będzie go zobaczyć przed wschodem Słońca. Wenus jest w Wężowniku i najdalej na zachód od Słońca znajdzie się 8 I, czyli również będzie ją widać na wschodzie pod koniec nocy. Mars jest w Koziorożcu i wczesnym wieczorem zachodzi. Jowisz jest w Rybach i też wieczorem zachodzi, a Saturn jest w Pannie i koło północy dopiero wschodzi. Księżyc 4 I będzie w nowiu i spowoduje wtedy częściowe zaćmienie Słońca, którego maksimum nastąpi około godz. 5, a więc u nas jeszcze przed wschodem. Poza Europą będzie ono widoczne w północnej części Afryki, w zachodniej Azji i na północnym zachodzie Chin. Pełnia Księżyca będzie 19 I. Około 3 I można śledzić dość obfity rój Kwadrantydów. Tego dnia też Ziemia znajdzie się najbliżej Słońca, ale temu nie towarzyszą żadne efektowne zjawiska.

*T. K.*

**Rozwiązanie zadania F 779.**
Weźmy układ odniesienia, w którym drugi, nieruchomy odcinek taśmy spoczywa w punkcie $l$, a ruchomy koniec znajdował się początkowo w punkcie $x = 0$:




W pewnej chwili ciągnięty ze stałą prędkością koniec taśmy znajduje się w punkcie $x$. Środek masy ruchomej części znajduje się w takim razie w punkcie $3x/4$. Punkt $x$ porusza się ze stałą prędkością $v$, zatem prędkość środka masy ruchomej części taśmy wynosi $3v/4$.

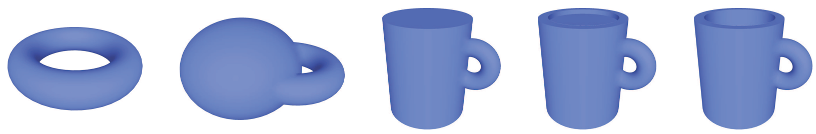
Z drugiej strony, dla $x > 2l$, środek ciężkości porusza się (jak cała taśma) z prędkością $v$. Jak wyjaśnić nieciągłość w punkcie $x = 2l$?

# Zabawy z plasteliną

*Joanna JASZUŃSKA*

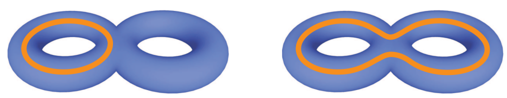
Powiemy, że dwie bryły są *plastelinowo równoważne* (w skrócie *równoważne*), jeśli jedną z nich można otrzymać z drugiej za pomocą rozciągania, ściskania, wyginania itp., ale bez sklejania lub rozrywania. Plastelinowy sześcian można w ten sposób przekształcić w kulę, „wklepując” wierzchołki i krawędzie (więc te dwie bryły są plastelinowo równoważne), ale nie można z sześcianu otrzymać obwarzanka (bo wymagałoby to jakiegoś sklejenia lub rozerwania plasteliny).

Innym klasycznym przykładem jest równoważność obwarzanka i kubka z uszkiem:

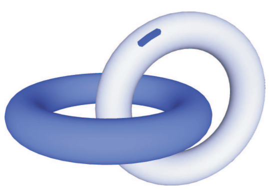


Rys. 1. Kolejne etapy przekształcania plastelinowego obwarzanka w kubek z uszkiem.

**1.** Na plastelinowej ósemce narysowano pomarańczową pętelkę, jak na rysunku 2a. Jak przekształcić tę ósemkę, by uzyskać sytuację z rysunku 2b?

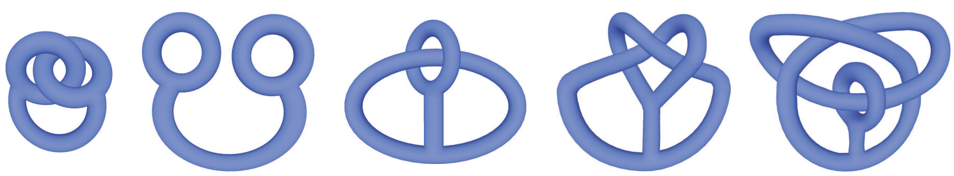


Rys. 2a Rys. 2b



Rys. 3. Dętka z dziurką (zewnętrzna część jest jasnoniebieska, wewnętrzna granatowa) i niebieski obwarzanek.

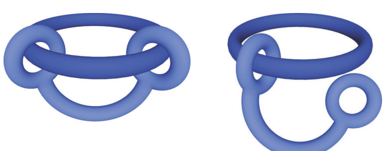
**2.** Wykaż, że wszystkie poniższe bryły są plastelinowo równoważne.



Zadanie 3 pochodzi z książki M. Gardnera *The Colossal Book of Mathematics*, wyd. W. W. Norton & Company, 2001.

**3.** Wyobraźmy sobie dętkę z bardzo rozciągliwej gumy, pustą w środku, z dziurką (otwartą buzią) oraz zaczepiony o nią obwarzanek (rys. 3). Czy dętka, odpowiednio się rozciągając i zniekształcając, może zjeść obwarzanek?

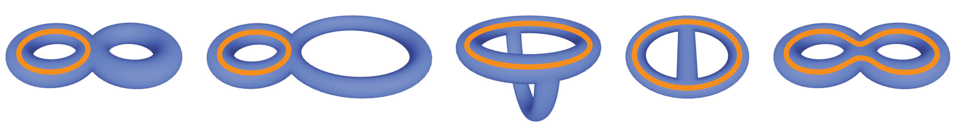
**4.** Jak przekształcić pierwszą z brył z rysunku 4, by uzyskać drugą?



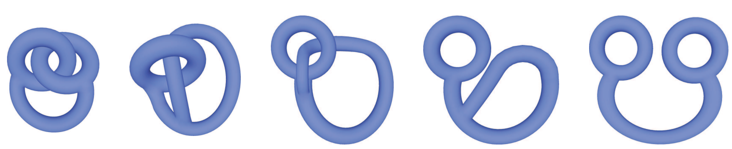
Rys. 4

## Rozwiązania niektórych zadań

**R1.** Wystarczy prawą część „przełożyć” do środka:

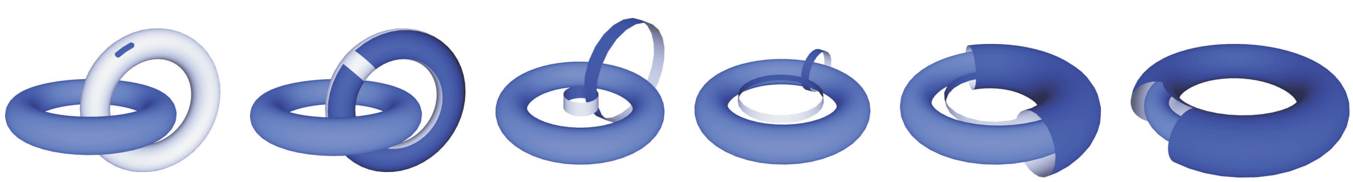


**R2.** Równoważność pierwszych dwóch brył:



Warto też zauważyć, że „równoleżniki” i „południki” dętki zamieniają się rolami.

**R3.** Dętka może zjeść obwarzanek, ale musi się „wywlec” na drugą stronę:



Rys. 5. Dętka najpierw rozszerza buzię wzdłuż (mówi „iii”), potem w poprzek („aaa”), aż cała składa się jedynie z dwóch cienkich połączonych pasków. Wtedy „owija” obwarzanek (mówi „ooo”) i z powrotem zmniejsza buzię.

*Rysunki wykonała Maria SZOSTAK*