







Prenumerujcie Deltę!

SPIS TREŚCI NUMERU 12 (439)

Fenomen rozkładu Benforda <i>Jakub Szymanowski</i>	str. 1
Słowa pierwsze <i>Jakub Radoszewski</i>	str. 3
Mira Ceti – Cudowna Wieloryba <i>Agnieszka Majczyna</i> <i>Mirosław Należyty</i>	str. 6
Czy π jest <i>constans</i> ? <i>Piotr Kopacz</i>	str. 8
 Zadania	str.10
Kąciak przestrzenny (5): Prostopadłość prostych i płaszczyzn <i>Michał Kieza</i>	str.11
 Ziomkowie i Wszechświat <i>Krzysztof Turzyński</i>	str.12
Amatorskie pomiary meteorologiczne: Kamera całego nieba <i>Krzysztof Markowicz</i>	str.14
XXXII Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	str.16
 Ile genów, ile genomów w człowieku? <i>Magdalena Fikus</i>	str.17
 Ruch obrotowy bryły sztywnej, część II <i>Stanisław Bednarek</i>	str.18
XXVII Ogólnopolski Sejmik Matematyków	str.19
Aktualności	str.20
 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.21
Informatyczny kąciak olimpijski (36): Zagadka <i>Tomasz Kulczyński</i>	str.22
Klub 44	str.23
Patrz w niebo: Jeszcze o wodzie na Marsie	str.24
Grudzień	str.24
 Własność Darboux w geometrii <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Diana Gawronkiewicz.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja „Deltę”, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 22-639-73-67)

internet: www.amos.waw.pl e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2011 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2011 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl infolinia 804-200-600

Cena prenumeraty w 2011 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują Regiony Sprzedaży RUCH SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania wpłat: do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH SA, Pion Kolportażu, Zespół ds. Obrotu Zagranicznego, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-53-28-823 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Zespołu lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), fax 22-53-28-734, infolinia 800-1200-29. Płatność kartą kredytową (Visa, MasterCard, American Express) przez www.ruch.pol.pl

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto: SWIFT banku: PKOPPLPWXXX; w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:
Martin Gardner

Fenomen rozkładu Benforda

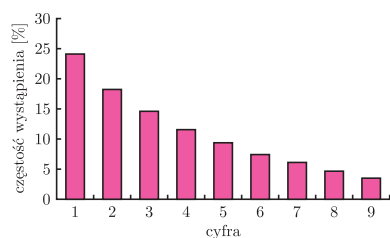
Jakub SZYMANOWSKI*



Większość osób świadomych powiązań między światem matematyki a rzeczywistością zgodzi się, że na każdym kroku spotykamy się z rachunkiem prawdopodobieństwa. Oprócz niektórych dobrze znanych zagadnień związanych z grami losowymi pewne prawidłowości probabilistyczne możemy spotkać również w bardziej niespodziewanych miejscach.

Przypadek czy coś więcej?

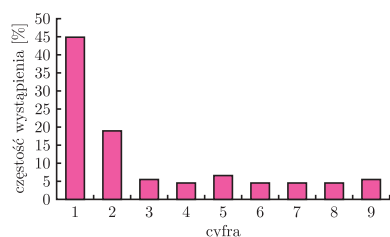
Wykonamy trzy eksperymenty na różnych, niepowiązanych seriach danych. W każdym z eksperymentów wyznaczmy częstość występowania każdej cyfry na najbardziej znaczącej pozycji w pewnym zbiorze wartości liczbowych. Wyniki przedstawimy za pomocą tabeli i wykresu.



Rys. 1. Wyniki eksperymentu I.

Eksperyment I. Ze zbioru liczb naturalnych z zakresu od 1 do 9999 losujemy liczbę p , wykorzystując generator liczb losowych o rozkładzie równomiernym. Następnie z zakresu liczb naturalnych od 1 do p losujemy, również wykorzystując rozkład równomierny, liczbę r . Całą tę operację powtarzamy 100 000 razy, otrzymując w ten sposób listę R wszystkich wylosowanych liczb r . Dla każdej cyfry wyznaczamy (procentowo) jej częstość występowania na najbardziej znaczącej pozycji w elementach listy R – przybliżone wyniki prezentuje poniższa tabela i wykres na rysunku 1.

cyfra	1	2	3	4	5	6	7	8	9
częstość wystąpienia [%]	24,27	18,40	14,61	11,65	9,32	7,46	6,08	4,74	3,47

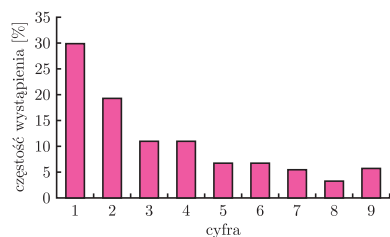


Rys. 2. Wyniki eksperymentu II.

Eksperyment II. W drugim eksperymencie posłużymy się układem okresowym pierwiastków chemicznych, a dokładniej, jednym z parametrów każdego pierwiastka – masą atomową. Podobnie jak w eksperymencie pierwszym, interesuje nas jedynie pierwsza cyfra każdej liczby reprezentującej masę atomową. Częstość występowania wszystkich cyfr na tej pozycji (w przybliżeniu) można odczytać z poniższej tabeli i wykresu na rysunku 2.

cyfra	1	2	3	4	5	6	7	8	9
częstość wystąpienia [%]	44,94	19,10	5,62	4,49	6,74	4,49	4,49	4,49	5,62

Zbiór danych oparto o układ okresowy pierwiastków odkrytych do roku 1938 zatwierdzony przez IUPAC (ang. *International Union of Pure and Applied Chemistry*) <http://www.iupac.org>



Rys. 3. Wyniki eksperymentu III.

Eksperyment III. Ostatni eksperyment ma charakter geograficzny – posłużymy się tutaj powierzchnią w km^2 wszystkich państw świata. Znów badamy tylko częstość występowania poszczególnych cyfr na najbardziej znaczącej pozycji; przybliżone wyniki zawarte zostały w tabeli i na rysunku 3.

cyfra	1	2	3	4	5	6	7	8	9
częstość wystąpienia [%]	29,96	19,41	10,97	10,97	6,75	6,75	5,49	3,38	5,91

Pomysły na eksperymenty II i III zaczerpnięte zostały z publikacji F. Benforda *The law of anomalous numbers* [1]. W eksperymencie II posłużono się tylko tymi pierwiastkami, które odkryte zostały przed publikacją F. Benforda. Eksperyment I przeprowadzony został zgodnie z pomysłem autora.

Przyjrzyjmy się wynikom przeprowadzonych eksperymentów. Wykresy są niczym innym, jak empirycznie wyznaczonymi funkcjami gęstości prawdopodobieństwa dla następującego zadania: losujemy liczbę z danego zbioru i pytamy, z jakim prawdopodobieństwem jej pierwszą cyfrą będzie 1, z jakim 2, itd. Wykonaliśmy eksperymenty zupełnie niepowiązane, wyznaczone zaś funkcje gęstości prawdopodobieństwa wydają się podejrzanie podobne... Widać, że (na ogół) im niższa cyfra, tym bardziej prawdopodobne jest jej wystąpienie na początku losowej liczby ze zbioru danych.

Tablice logarytmiczne

Charakterystyczna zależność, jaką udało nam się spostrzec, została po raz pierwszy odnotowana w 1881 roku przez kanadyjskiego astronoma i matematyka Simona Newcomba. Przebywając w bibliotece United States Naval Observatory, Newcomb zauważył, że strony tablic logarytmicznych są brudniejsze na początku i coraz czystsze na dalszych kartkach. Wywnioskował, że korzystający z tablic

*inżynier Działu Systemów Statkowych w firmie IT-REM Sp. z o.o.

logarytmicznych częściej szukają liczb rozpoczynających się od niższych cyfr – te znajdują się na początku tablic. Swoje odkrycie (bez dowodu ogólnej prawidłowości) opublikował na stronach *American Journal of Mathematics*. Jego artykuł [4] nie spotkał się jednak z szerokim zainteresowaniem i niezwykle ciekawe zjawisko zostało zapomniane na 57 lat.

W 1938 roku Frank Benford, inżynier General Electric, nie zdając sobie sprawy z istnienia pracy Newcomba, dokonał tego samego odkrycia na podstawie stanu czystości tablic logarytmicznych. Zafascynowany tym zjawiskiem Benford zaczął sprawdzać, czy jego teoria znajduje potwierdzenie również w innych zbiorach danych, m.in. w powierzchniach rzek, liczbach drukowanych w gazetach, czy nawet cenach. Wyniki swoich badań przedstawił w artykule [1] wydrukowanym w *Proceedings of the American Philosophical Society*. Podobnie jak w artykule Newcomba, formalny dowód nie został przedstawiony.

Prawo Benforda

W ten sposób świat dowiedział się o niezwyklej prawidłowości, która obecnie nosi nazwę *prawa Benforda*, *rozkładu Benforda* lub *prawa pierwszych (znaczących) cyfr*.

Dyskretny rozkład Benforda opisany jest zależnością

$$(1) \quad P(x) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{x} \right),$$

gdzie x oznacza pierwszą znaczącą cyfrę ($x = 1, 2, \dots, 9$), natomiast $P(x)$ oznacza prawdopodobieństwo, z jakim cyfra x będzie pierwszą cyfrą liczby.

Przybliżone prawdopodobieństwo wystąpienia poszczególnych cyfr na najbardziej znaczącej pozycji przedstawia poniższa tabela, a funkcję gęstości prawdopodobieństwa – rysunek 4.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(x)$ [%]	30,1	17,61	12,49	9,69	7,92	6,69	5,80	5,12	4,58

Możemy teraz porównać wyniki przeprowadzonych przez nas eksperymentów z zależnością (1) – graficznie przedstawia to rysunek 5.

Skoro prawo Benforda działa dla trzech niezależnych zbiorów danych, to powinno działać również wtedy, gdy rozpatrzmy wyniki wszystkich eksperymentów jednocześnie, co pokazuje rysunek 6. Korzystając z mocniej zróżnicowanych danych, otrzymaliśmy wyniki bardziej zbliżone do przewidywań teoretycznych.

Uniwersalność prawa Benforda

Ważnym pytaniem jest, czy prawo Benforda jest uniwersalne: czy uzyskalibyśmy taki sam rozkład prawdopodobieństwa, gdybyśmy przeskalowali dane w zbiorze testowym? Na przykład, czy w eksperymencie III rozkład zmieni się, jeśli zastosujemy inne jednostki powierzchni, na przykład jardy, stopy lub mile kwadratowe?

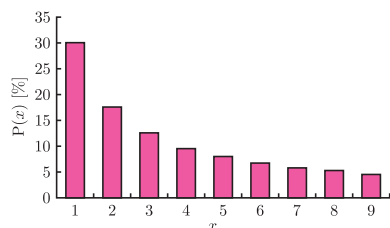
W 1961 roku Roger Pinkham stwierdził, że jeżeli prawo Benforda rzeczywiście występuje, to powinno mieć własność uniwersalności – wyniki powinny być takie same, niezależnie od tego, jakie miary stosujemy w danym zagadnieniu (zob. [5]).

Sprawdźmy to zatem, modyfikując eksperyment III: powierzchnie państw przeliczamy z kilometrów kwadratowych na angielskie mile kwadratowe i sprawdzamy częstotliwość występowania cyfr na najbardziej znaczącej pozycji.

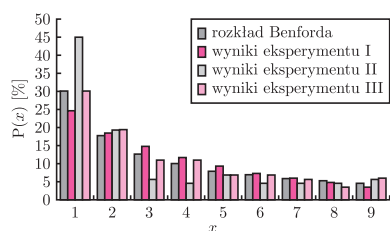
Z wykresu na rysunku 7 widać, że skalowanie danych prawie nie wpłynęło na rozkład prawdopodobieństwa. Niewielkie rozbieżności wynikają z faktu, iż dane te nie tworzą idealnego rozkładu Benforda.

Czy prawo Benforda działa zawsze?

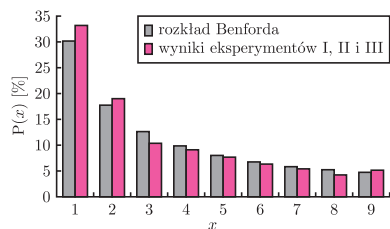
Przytoczone eksperymenty pokazują, że prawo Benforda sprawdza się (z większą lub mniejszą dokładnością) dla wyników działań na liczbach naturalnych, parametrów pierwiastków chemicznych i danych geograficznych. Dodatkowo w artykule Benforda [1] można znaleźć szereg innych zbiorów danych, w których



Rys. 4. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu Benforda.

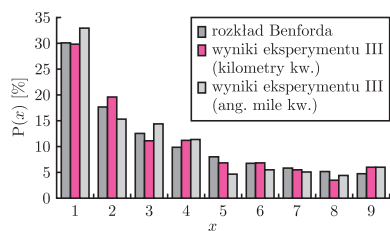


Rys. 5. Porównanie wyników eksperymentów z rozkładem Benforda.



Rys. 6. Porównanie wyników eksperymentów z rozkładem Benforda.

Mówimy, że rozkład prawdopodobieństwa $P(X)$ zmiennej losowej X jest niezmienny względem skalowania, jeżeli dla dowolnej liczby dodatniej α zachodzi równość $P(X) = P(\alpha \cdot X)$.



Rys. 7. Porównanie wyników eksperymentów z rozkładem Benforda.



Rozwiązanie zadania M 1298.

Liczba $a^2 + b^2 + c^2$ jest nieparzysta, a więc postaci $2p + 1$. Wybierzmy $d = p$. Wtedy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (p + 1)^2$. Pozostaje więc wykazać, że liczba p jest nieparzysta.

Liczby a, b, c są nieparzyste, a więc liczby a^2, b^2, c^2 dają z dzielenia przez 4 resztę 1. Wobec tego $2p + 1 = a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3 \pmod{4}$, skąd wynika, że liczba p jest nieparzysta.

odnajdujemy tę prawidłowość. Możemy się zatem pokusić o pytanie, czy rozkład Benforda działa dla każdego zebranych danych liczbowych? Odpowiedź, oczywiście, brzmi: nie!

W eksperymencie III posłużyliśmy się danymi geograficznymi: powierzchnią w km^2 wszystkich państw świata. Badamy zatem dane, na które ma wpływ wiele czynników. Powierzchnia poszczególnych państw jest bardzo zróżnicowana – od Rosji o powierzchni 17 075 400 km^2 po Watykan – 0,44 km^2 .

Jeżeli za bardzo zawężymy zakres danych, okaże się, że prawo Benforda nie ma dla nich zastosowania. Na przykład, badając długości samochodów osobowych lub wysokość dorosłej żyrafy stwierdzimy, że niewiele z nich zaczyna się od cyfry 1. Wynika to z faktu, iż wartości tych danych są silnie ograniczone innymi czynnikami. Mało która żyrafa, zwłaszcza dorosła, mierzy poniżej 2 metrów.

Może warto zatem pamiętać o prawie Benforda, rzucając sześcienną kostką do gry? Niestety, także nie. Każda liczba oczek ma takie samo prawdopodobieństwo wylosowania. Powtarzając wielokrotnie losowanie, uzyskamy rozkład prawdopodobieństwa zbliżony do równomiernego.

W 1995 roku amerykański profesor matematyki z Georgia Institute of Technology, Theodore P. Hill, przedstawił dowód prawa Benforda na łamach magazynu *Statistical Science* w tekście *A statistical derivation of the significant-digit law* [3].

Tylko ciekawostka?

Prawo Benforda jest samo w sobie bardzo ciekawym zjawiskiem, a w niektórych dziedzinach ma zastosowanie praktyczne. Służy jako narzędzie do sprawdzania poprawności obliczeń, prawdziwości danych statystycznych czy wykrywania oszustw w zeznaniach podatkowych i rozliczeniach finansowych.

Za pomocą prawa Benforda sprawdza się dokładność działania modeli matematycznych opisujących ewolucję danych z różnych dziedzin, na przykład modeli zmian populacji. Dla danych wejściowych spełniających prawo Benforda powinniśmy otrzymać dane wyjściowe, które również tę zależność spełniają. Jeżeli tak nie jest, oznacza to, że zastosowany model (algorytm) zakłócił „naturalny” rozkład danych.

Najpopularniejszym zastosowaniem prawa Benforda jest sprawdzanie poprawności zeznań podatkowych i rozliczeń. Okazuje się, że fałszerze bardzo często wybierają liczby rozpoczynające się od 4, 5 i 6 zamiast od 1, 2 i 3! Stąd, jeśli rozkład częstości występowania cyfr na pierwszych pozycjach nie jest zbliżony do rozkładu Benforda, to sprawdzający powinien zwrócić na to rozliczenie większą uwagę. Z całą pewnością o prawie Benforda nie wiedział skarbnik stanu Arizona, James Nelson, którego fałszerstwa na kwotę bliską 2 mln dolarów zostały wykryte przy zastosowaniu prawa pierwszych cyfr.

Literatura

- [1] F. Benford, *The law of anomalous numbers*, Proc. Amer. Philos. Soc. 78 (1938), 551–572.
- [2] T.P. Hill, *The first digit phenomenon*, Amer. Scientist 86 (1998), 358–363.
- [3] T.P. Hill, *A statistical derivation of the significant-digit law*, Statist. Sci. 10 (1995), 354–363.
- [4] S. Newcomb, *Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers*, Amer. J. Math. 4 (1881), 39–40.
- [5] R.S. Pinkham, *On the distribution of first significant digits*, Ann. Math. Statist. 32 (1961), 1223–1230.

Słowa pierwsze

Jakub RADOSZEWSKI

W numerze 10/2010 *Delty* pojawił się artykuł Wojciecha Plandowskiego, w którym autor po ciężkich bojach pokazuje rozwiązanie pewnego konkretnego typu równania na słowach. Mogłoby się wydawać: udało się, sprawa skończona. Tymczasem przy okazji w artykule pojawia się definicja i kilka ważnych własności słów pierwotnych, a stąd już tylko mały krok do innej ciekawej rodziny słów, mianowicie do słów pierwszych. To dobry pretekst, by coś o nich opowiedzieć.

Przypomnijmy, że słowo *pierwotne* to takie, które nie jest potęgą (u^k dla $k \geq 2$) żadnego niepustego słowa. Znamy już kilka własności takich słów, w szczególności to, że każde słowo w przedstawia się jednoznacznie w postaci $w = u^k$, gdzie u jest pierwotne; w tym artykule będzie nam wygodnie nazwać u *pierwiastkiem pierwotnym* słowa w . Dalej, wiemy, że każdy obrót cykliczny słowa pierwotnego jest pierwotny, a dodatkowo wszystkie takie obroty stanowią różne słowa. Wśród tych obrotów jedno słowo jest, w szczególności, najmniejsze *leksykograficznie*,



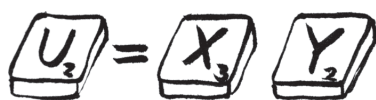
Obrót cykliczny słowa polega na przetrzuceniu dowolnej (w tym zerowej) liczby liter z początku słowa na koniec, np. wszystkimi obrotami cyklicznymi słowa *aba* są: *aba*, *baa* oraz *aab*.

Mówimy, że słowo u jest nie większe leksykograficznie niż słowo v (co zapisujemy po prostu jako $u \leq v$), jeśli albo u jest prefiksem (czyli początkowym fragmentem) v , albo na pierwszej pozycji, na której u i v różnią się, w u występuje litera mniejsza niż w v . Oczywiście $u < v$, jeśli $u \leq v$ i $u \neq v$. Przykładowo: $aba < abaab$, $aabab < abaab$.

1 oznacza słowo puste (czyli słowo zeroliterowe).

Miłośnicy algorytmów tekstowych (takich jak algorytm wyszukiwania wzorca KMP) rozpoznają zapewne w tym równaniu i jego rozwiązaniu związek między prefikso-sufiksami słowa a jego okresami.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że słowa pierwsze są bezokresowe (nie mają żadnego nietrywialnego okresu).



$|u|$ oznacza długość słowa u , czyli liczbę liter w tym słowie.

Polecamy Czytelnikowi sprawdzenie Twierdzenia 3 na jakimś przykładzie, np. dla słowa $abaababaabaab$.

tj. najmniejsze w porządku słownikowym. Każde takie słowo pierwotne najmniejsze w klasie swoich obrotów cyklicznych nazwiemy właśnie słowem *pierwszym* (inna nazwa: słowo Lyndona). Kilka przykładów słów pierwszych: b , $aabab$, $aaaab$ oraz niepierwszych: $aabaab$, $abaab$. Zanim wyjaśnimy nieco tajemniczą nazwę rozważanej rodziny słów, przyjrzyjmy się następującej, równoważnej definicji słów pierwszych:

Twierdzenie 1. *Niepuste słowo u jest pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy każdy właściwy sufiks u (czyli końcowy fragment różny od u i od słowa pustego 1) jest leksykograficznie większy niż u .*

Dowód. (\Leftarrow) Załóżmy, że słowo u jest mniejsze leksykograficznie od wszystkich swoich właściwych sufiksów. Słowo u musi być pierwotne, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $u = w^k$ dla $k \geq 2$ i sufiks u postaci w^{k-1} byłby mniejszy leksykograficznie niż u . Dalej, jeśli mamy $u = xy$ i $x, y \neq 1$, to $u < y$, a skoro y jest krótsze niż u , to u nie może być prefiksem y i mamy $u < yx$. To pokazuje, że dowolny obrót cykliczny u jest większy leksykograficznie niż u , czyli rzeczywiście u jest pierwsze.

(\Rightarrow) Załóżmy, że u jest pierwsze, i niech $u = xy$ dla $x, y \neq 1$; chcemy wykazać, że $u < y$. Dowód przeprowadzimy nie wprost. Gdyby zachodziło $y \leq u$ i y nie byłoby prefiksem u , to mielibyśmy także $yx < u$ i u nie byłoby pierwsze. Skoro tak, to y jest prefiksem u , ale przecież także i jego sufiksem, czyli $u = xy = yz$ dla pewnego z . Czytelnikowi zaznajomionemu z artykułem Wojciecha Plandowskiego taka równość może coś przypominać: otóż jest to dokładnie „główne” równanie, jakie zostało w nim rozwiązane! Korzystając z gotowego wyniku, mamy, że $x = (pq)^i$, $z = (qp)^i$ oraz $y = (pq)^j p$ dla pewnych słów p oraz $q \neq 1$, czyli $u = (pq)^k p$ dla $k = i + j \geq 1$. Dodajmy, że słowo p także musi być niepuste, gdyż w przeciwnym przypadku $j \geq 1$ (jako że $y \neq 1$) i $u = q^k$ dla $k \geq 2$, czyli u nie byłoby pierwotne ani, tym bardziej, pierwsze.

No to teraz pójdzie już z górki. Słowo u jest pierwsze, więc rozważając jego dwa wybrane obroty cykliczne, otrzymujemy: $u = (pq)^k p = p(qp)^k < (qp)^k p$ oraz $u = (pq)^k p < p(pq)^k$. Na mocy pierwszej nierówności mamy $pq < qp$, natomiast z drugiej, po usunięciu początkowego p otrzymujemy $qp < pq$. Te dwie nierówności dają nam oczekiwaną sprzeczność. Δ

Nie koniec na tym – istnieje jeszcze inna, równoważna, choć nieco bardziej egzotyczna definicja słów pierwszych. Jej uzasadnienie pozostawiamy Czytelnikowi, nam i tak będzie ona potrzebna jedynie jako własność tej rodziny słów.

Twierdzenie 2. *Słowo u jest słowem pierwszym wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednoliterowe albo jest postaci $u = xy$, przy czym $x < y$ i x, y są słowami pierwszymi.*

Po tym wstępie możemy już wreszcie zdradzić, skąd wzięła się nazwa rozważanej rodziny słów. Chodzi mianowicie o następującą analogię do liczb pierwszych: każdą liczbę naturalną można przedstawić jednoznacznie (oczywiście z dokładnością do kolejności) jako iloczyn liczb pierwszych, a każde słowo w pewnym sensie jednoznacznie jako sklejenie słów pierwszych.

Twierdzenie 3. *Dowolne słowo u można przedstawić jednoznacznie jako sklejenie pewnej liczby słów pierwszych $u = l_1 l_2 \dots l_k$ dla $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_k$.*

Dowód. Czy każde słowo można w ogóle przedstawić jako sklejenie (jakichkolwiek) słów pierwszych? Można, wystarczy podzielić je na pojedyncze litery, które, jak by nie patrzeć, są słowami pierwszymi. Teraz, dopóki w bieżącym rozkładzie występują dwa kolejne słowa pierwsze l_i, l_{i+1} , takie że $l_i < l_{i+1}$, dopóty możemy takie słowa sklejać w jedno słowo pierwsze $l_i l_{i+1}$ na mocy Twierdzenia 2. Powtarzając tę operację do skutku, znajdziemy jakieś przedstawienie u w postaci sklejenia nierosnącego ciągu słów pierwszych.

No dobrze, a czemu takie sklejenie jest tylko jedno? Załóżmy, że byłyby dwa różne, $u = l_1 l_2 \dots l_k = l'_1 l'_2 \dots l'_m$. Możemy założyć, że $l_1 \neq l'_1$, w przeciwnym przypadku możemy tę parę słów wykreślić z rozkładu. Niech więc, bez straty ogólności, będzie $|l_1| > |l'_1|$. Wówczas musi istnieć rozkład: $l_1 = l'_1 l'_2 \dots l'_i \alpha$, przy czym α jest *niepustym* prefiksem l'_{i+1} . No i teraz możemy zapisać ciąg nierówności, który prowadzi do sprzeczności, a którego uzasadnienie pozostawiamy Czytelnikowi (jedynie nietrywialne miejsce polega na zastosowaniu Twierdzenia 1):

$$l'_1 < l_1 < \alpha \leq l'_{i+1} \leq l'_1. \quad \Delta$$

To w takim razie już „wszystko” jasne, poznaliśmy jakieś mniej lub bardziej interesujące własności słów pierwszych, w tym wyjaśniliśmy ich nazwę, można by właściwie zakończyć niniejszy artykuł. Niewykluczone jednak, że Czytelnikowi, który dobrnął do tego miejsca, pozostał po lekturze pewien niedosyt. Chciałoby się, żeby te słowa pierwsze miały jakieś *naprawdę* fajne własności (tak jak liczby pierwsze), a może nawet żeby miały jakiś

związek z teorią liczb... Autor niniejszego artykułu przygotował coś specjalnego, czym ma nadzieję uraczyć wciąż nienasyconych Czytelników.

Słowo cykliczne to ciąg liter bez wyróżnionego początku i końca – aby przekształcić zwykle słowo w cykliczne, wystarczy je sobie wyobrazić jako zapisane wzdłuż okręgu.

W *Delcie* 3/2009 pojawił się artykuł o ciągach de Bruijna. Przypomnijmy ich definicję w wersji ogólniejszej: *ciągami de Bruijna rzędu n* nazywamy słowo cykliczne długości k^n złożone z „liter” należących do zbioru $\{0, 1, \dots, k-1\}$, w którym każde n -literowe słowo występuje jako podsłowo (tzn. spójny fragment) dokładnie raz. Najłatwiej wyobrazić sobie ciągi de Bruijna dla $k=2$, przykładem takiego ciągu rzędu 4 jest 0000100110101111. Jak nietrudno się już teraz domyślić, asem w rękawie autora artykułu jest pewien związek między ciągami de Bruijna a słowami pierwszymi. A jest to związek zaiste niespodziewany – otóż, *sklejenie wszystkich słów pierwszych o długościach dzielących n w kolejności leksykograficznej daje ciąg de Bruijna rzędu n , a do tego najmniejszy leksykograficznie dla danych parametrów n, k* . Kilka przykładów:

$$n=4, k=2: 0 \cdot 0001 \cdot 0011 \cdot 01 \cdot 0111 \cdot 1,$$

$$n=3, k=3: 0 \cdot 001 \cdot 002 \cdot 011 \cdot 012 \cdot 021 \cdot 022 \cdot 1 \cdot 112 \cdot 122 \cdot 2.$$

Po napatrzeniu się na te i inne przykłady Czytelnik zada sobie zapewne pytanie, skąd się ten związek bierze. No i tu kolejna niespodzianka: autorowi nie jest znany żaden naprawdę prosty dowód faktu, że opisana konstrukcja faktycznie daje ciąg de Bruijna. Podobnie (a właściwie jeszcze gorzej) jest z uzasadnieniem faktu, że jest to zawsze najmniejszy leksykograficznie ciąg de Bruijna dla zadanych parametrów n oraz k . Być może któremuś z Czytelników uda się wymyślić jakiś elegancki dowód tych faktów, a tymczasem spróbujmy odpowiedzieć choćby na najprostsze z tego typu pytań: czy w ogóle *długość* sklejonego ciągu słów pierwszych zgadza się z długością ciągu de Bruijna?

Oznaczmy przez $L_d(k)$ liczbę słów pierwszych długości d , dla ustalonego k . Wówczas długość sklejonego ciągu dla danego n to $S(n, k) = \sum_{d|n} d \cdot L_d(k)$. Zauważmy, że $d \cdot L_d(k)$ to tak naprawdę liczba słów *pierwotnych* długości d . Faktycznie, wszystkie d obrotów cyklicznych danego d -literowego słowa pierwszego stanowi różne słowa, z czego wszystkie pierwotne, obroty cykliczne różnych słów pierwszych dają, oczywiście, różne słowa pierwotne, a każde słowo pierwotne można obrócić cyklicznie tak, by stało się pierwsze. To oznacza, że $S(n, k)$ jest równe łącznej liczbie słów pierwotnych o długościach dzielących n . A ile jest takich słów? Otóż jest ich dokładnie tyle, ile wszystkich n -literowych słów nad alfabetem k -literowym, czyli dokładnie k^n . A to dlatego, że dowolnemu słowu n -literowemu możemy przyporządkować jednoznacznie jego pierwiastek pierwotny, który jest słowem pierwotnym o długości dzielącej n . Z drugiej strony, dowolnemu słowu pierwotnemu o długości d , będącej dzielnikiem n , możemy przyporządkować (znow jednoznacznie) jego potęgę o wykładniku n/d , która jest słowem długości n . Podsumowując, $S(n, k) = k^n$, czyli długości rzeczywiście się zgadzają.

To jednak nie koniec, gdyż z uzyskanej równości możemy wyciągnąć pewne interesujące wnioski. Jednym z nich jest wyznaczenie wzoru na liczbę słów pierwszych długości n , czyli $L_n(k)$. Do tego celu możemy się posłużyć tzw. *wzorem inwersyjnym Möbiusa*, który dla dwóch funkcji f, g , przyjmujących argumenty całkowite dodatnie, wygląda następująco:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(n/d),$$

gdzie μ to funkcja Möbiusa zdefiniowana dla liczb naturalnych rekurencyjnie jako:

$$\mu(1) = 1, \quad \sum_{d|n} \mu(d) = 0 \quad \text{dla } n > 1.$$

Stosując wzór inwersyjny do $f(n) = S(n, k) = k^n$ i $g(n) = n \cdot L_n(k)$, otrzymujemy:

$$L_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) k^{n/d}.$$

Na koniec przyjrzyjmy się, jak wygląda wzór $S(p, k) = k^n$ dla p będącego liczbą pierwszą. Wówczas suma $S(p, k)$ ma tylko dwa składniki, $L_1(k)$ oraz $p \cdot L_p(k)$. Jeśli zauważymy, że pierwszy z tych składników jest równy po prostu k , możemy nasz wzór przekształcić do takiej postaci:

$$L_p(k) = \frac{1}{p}(k^p - k).$$

Ponieważ liczba słów pierwszych nie może być niecałkowita, więc otrzymujemy, że dla dowolnej liczby pierwszej p i liczby całkowitej dodatniej k zachodzi $p \mid k^p - k$, który to fakt znany jest powszechnie jako Małe Twierdzenie Fermata. Możemy więc stwierdzić, że przy okazji udało nam się udowodnić to twierdzenie, używając do tego jedynie faktów związanych ze słowami.

Poprawność tego wzoru można całkiem nietrudno sprawdzić, podstawiając lewą stronę w miejsce $f(n/d)$ i, odwrotnie, prawą w miejsce $g(d)$.

Kilka pierwszych wartości: $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = -1$, $\mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$. W ogólności można udowodnić, że $\mu(n) = 0$, jeśli n jest podzielne przez kwadrat liczby pierwszej, a w przeciwnym przypadku $\mu(n) = (-1)^k$, przy czym k to liczba różnych dzielników pierwszych n .

Mira Ceti – Cudowna Wieloryba

Agnieszka MAJCZYNA*, Mirosław NALEŻYTY**

Trochę historii. W 1596 roku holenderski astronom David Fabricius, obserwując Merkurego, odkrył nową gwiazdę o jasności 3 mag. Obserwując ją nadal, zanotował, że w ciągu następnych dwóch tygodni zwiększyła swą jasność o 1 mag, a następnie zaczęła ją zmniejszać, by dwa miesiące później stać się niewidoczną. Fabricius założył, że była to gwiazda nowa – jedyny w tym czasie znany rodzaj gwiazdy zmiennej. Siedem lat później, w 1603 roku, Johann Bayer umieścił ją w swym katalogu pod nazwą *o Ceti*. Najpopularniejszą nazwę – Mira – nadał jej w 1662 roku Jan Heweliusz, opisując ją w jednym ze swych licznych dzieł. Już w 1638 roku holenderski astronom Johannes Phocylides Holwarda zauważył, że gwiazda ta pojawia się i znika w cyklu 330 dni. Jest to pierwsza odkryta okresowa gwiazda zmienna. Wyznaczenie okresu zmian poprawił w 1667 roku Ismael Boulliau, otrzymując 333 dni, wielkość zaledwie o jeden dzień większą od współcześnie wyznaczonej. Z kolei w 1923 roku R. G. Aitken odkrył na podstawie obserwacji fotograficznych, że *o Ceti* jest układem podwójnym o separacji składników $0,9''$. Współcześnie zmierzona przez zespół M. Karovskiej w 1997 roku separacja wynosi $0,6''$. Okres orbitalny jest słabo znany i wynosi 500 dni (niektórzy badacze podają 400 dni). Tak więc to, co przez 400 lat uważano za gwiazdę pojedynczą *o Ceti*, jest układem podwójnym ze składnikiem głównym *o Ceti* (Mira A) i składnikiem wtórnym VZ Ceti (Mira B). Jest to stosunkowo bliski układ, ale odległość do niego jest znana ze słabą dokładnością: 103–130 parseków.



Mira A. Mira A jest czerwonym olbrzymem leżącym na diagramie Hertzsprunga–Russella (diagram H–R) na asymptotycznej gałęzi olbrzymów. Szacuje się, że jej promień jest 500 razy większy niż promień Słońca, ale sama Mira A jest niewiele cięższa niż Słońce – jej masa wynosi $1,18 M_{\odot}$. Jej typ widmowy zmienia się od M6e w maksimum jasności do M9e w minimum. Tutaj litera „e” przy symbolu oznacza, że w widmie gwiazdy, w odróżnieniu od normalnych gwiazd tego typu, występują linie emisyjne. Wielkość gwiazdowa absolutna w filtrze V wynosi $+0,96$ mag (dla Słońca wielkość ta wynosi $+4,82$ mag). Jak każdy czerwony olbrzym, Mira A traci masę poprzez silny wiatr gwiazdowy, w jej przypadku w tempie $\sim 10^{-7} M_{\odot}/rok$. Mechanizm fizyczny odpowiadający za powstawanie wiatrów gwiazdowych w przypadku pulsujących czerwonych olbrzymów nie jest w pełni poznany. Obserwacje w zakresie ultrafioletu wykonane za pomocą teleskopu GALEX (*Galaxy Evolution Explorer* – kosmiczna misja NASA) w 2007 roku ujawniły niezwykle mgławicę w kształcie komety otaczającą Mirę. Jej długość szacuje się na prawie 4 parseki! Mira porusza się z bardzo dużą prędkością dochodzącą do 130 km/s. „Głowa komety” powstała na skutek oddziaływania wiatru pochodzącego z Miry A z otaczającą materią międzygwiazdową, natomiast struktura podobna do warkocza komety powstaje z materii traconej z gwiazdy i pozostawionej wzdłuż toru jej ruchu. Zarówno „głowa”, jak i „warkocz” widoczne są w ultrafiolecie.



Rozwiązanie zadania M 1299.

Oznaczmy przez O punkt przecięcia przekątnych AC i BD . Rozpatrzmy jednokładność j o środku O , która przeprowadza punkt A na punkt C . Wówczas punkt B przechodzi w tej jednokładności na punkt D . Z danych równości wynika, że $DP \parallel BC$ oraz $CQ \parallel AD$. Wobec tego jednokładność j przeprowadza punkt C na punkt P , a punkt D na punkt Q . Stąd wniosek, że $PQ \parallel CD$.

*Instytut Problemów Jądrowych

**Obserwatorium Astronomiczne,
Wydział Fizyki,
Uniwersytet Warszawski

Mira A jest gwiazdą pulsującą, zmieniającą jasność od 2,0 mag do 10,1 mag z okresem 331,96 dnia. Jest prototypem dosyć licznej grupy długookresowych gwiazd zmiennych zwanych mirami. Wyznacznikiem przynależności do tej grupy jest duża amplituda zmian jasności, przekraczająca w filtrze V 2,5 mag, oraz okres zmienności w zakresie od 60 dni do 1000 dni. Wszystkie miry są olbrzymami typów widmowych Me (atmosfera bogata w tlen), Ce (bogata w węgiel) bądź Se (typ pośredni między M i C). Z punktu widzenia badania ewolucji gwiazd są obiektami niezwykle interesującymi, ponieważ znajdują się prawie na samym szczycie asymptotycznej gałęzi olbrzymów i bardzo szybko przemieszczają się na diagramie H–R w kierunku miejsca zajmowanego przez mgławicę planetarne. Faza ewolucji na tej gałęzi diagramu H–R trwa niezwykle krótko w porównaniu z poprzednimi fazami ewolucji gwiazdy, niewiele więc gwiazd możemy obserwować w tej fazie. Miry są idealnym laboratorium

do badania późnych stadiów ewolucji niezbyt masywnych gwiazd. Co ważniejsze, w łatwy sposób można określić przynależność tych gwiazd do którejś z populacji, a więc określić ich metaliczność. Miry o okresach krótszych niż 200 dni należą do starej populacji, takiej samej jak bogate w metale gromady kuliste, natomiast miry o dłuższych okresach są masywniejsze i mają jeszcze większą zawartość metali. Metaliczność gwiazdy jest niezwykle ważnym parametrem modeli ewolucyjnych gwiazd. Nie ma zgodności co do tego, czy miry w trakcie swego życia wydłużają okres zmienności. Istnieją poważne przesłanki, że w przypadku kilku obiektów (np. R Aql czy R Hya) okres rzeczywiście się zmienia, ale czy jest to regułą dla wszystkich przedstawicieli tej grupy, nie wiadomo. Inaczej jest w przypadku amplitudy zmian jasności, tu regułą jest, że zmienia się z cyklu na cykl, tak jak zmienia się jasność w maksimum blasku. Miry mogą być używane jako wskaźniki odległości ze względu na istnienie relacji jasność – okres, aczkolwiek nie jest to powszechnie wykorzystywana cecha tych gwiazd.

Mira B. Skatalogowana jako VZ Ceti jest towarzyszem Miry A w układzie podwójnym. W 1995 roku Kosmiczny Teleskop Hubble’a dokonał niezwykle interesującego odkrycia, a mianowicie wykonał zdjęcia, na których można było zobaczyć Mirę A i opadający spiralnie gaz w kierunku Miry B. Odkrycie to opublikowano dwa lata później. Oznacza to, że Mira AB jest układem symbiotycznym, a więc takim, w którym ma miejsce przepływ masy. W przypadku tego układu Mira B akreuje materię z wiatru gwiazdowego Miry A. Mira A ma bardzo silny wiatr gwiazdowy, ponieważ jest w fazie czerwonego olbrzyma. Milcząco zakładano, że ponieważ jest to układ symbiotyczny, więc towarzyszem powinien być biały karzeł. Tymczasem na początku XX wieku pojawiły się prace kwestionujące tę tezę. Pierwszą przesłanką stała się mała jasność towarzysza. Oszacowano, jaką jasność powinien mieć typowy dla układu symbiotycznego biały karzeł akreujący materię w tempie wynikającym z tempa utraty masy z wiatru gwiazdowego Miry A. Okazało się, że obserwowana jasność Miry B jest za mała, zarówno jeśli weźmiemy pod uwagę jasność w zakresie miękkiego promieniowania rentgenowskiego, jak i całkowitą jasność we wszystkich zakresach widma. Co ważniejsze, Mira AB jest jednym z nielicznych układów symbiotycznych, w których udało się rozdzielić składniki zarówno na fotografiach, jak i w przypadku wykonywanych widm. To ostatnie zwłaszcza daje niepowtarzalną okazję do szczegółowego badania zachowania się wszystkich składników układu, w tym również badanie samego przepływu akrecyjnego. Taka procedura obarczona jest zwykle sporym błędem wynikającym z założeń co do widma składników i ich wkładu do całkowitej jasności układu. Tu sytuacja jest zupełnie inna. Bez problemu możemy bezpośrednio zmierzyć widmo każdego składnika, a nawet dysku akrecyjnego. Takie właśnie obserwacje widma Miry B pozwoliły zebrać kolejne przesłanki wskazujące, że nie jest to biały karzeł, a gwiazda ciągu głównego. Jedną z cech charakterystycznych białych karłów są bardzo szerokie linie widmowe, a takich w tym przypadku nie zaobserwowano. Obserwowane widmo jest typowe dla karła typu KV o temperaturze rzędu 4000 K. Z rozważań teoretycznych dotyczących jasności, jaką miałyby gwiazda akreująca odpowiednią ilość materii, wywnioskowano, że najprawdopodobniej masa Miry B wynosi $0,7M_{\odot}$.



Rozwiązanie zadania M 1297.

Zauważmy, że $2^1 \equiv 2 \pmod{5}$,
 $2^2 \equiv 4 \pmod{5}$, $2^3 \equiv 3 \pmod{5}$
 oraz $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$. Zatem
 dla każdej liczby całkowitej
 nieujemnej k , $2^{4k+1} \equiv 2 \pmod{5}$,
 $2^{4k+2} \equiv 4 \pmod{5}$, $2^{4k+3} \equiv 3 \pmod{5}$
 oraz $2^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$. Wobec tego
 liczba $2^n - 3$ jest podzielna przez 5
 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest
 postaci $4k + 3$.

Analogicznie dowodzimy, że liczba $2^n - 3$
 jest podzielna przez 13 wtedy i tylko
 wtedy, gdy liczba n jest postaci $12l + 4$.

Stąd wynika, że w ciągu $2^n - 3$ występuję
 nieskończenie wiele liczb podzielnych
 przez 5 oraz nieskończenie wiele liczb
 podzielnych przez 13. Ponadto gdyby
 liczba $2^n - 3$ była jednocześnie podzielna
 przez 5 i 13, to liczba n musiałaby być
 zarówno postaci $4k + 3$, jak i postaci
 $12l + 4$, co jest niemożliwe (jedna z tych
 liczb jest nieparzysta, a druga parzysta).

Układ Mira AB dostarczył szeregu odpowiedzi na szalenie ważne pytania dotyczące procesów fizycznych zachodzących w układzie symbiotycznym, w którym ma miejsce akrecja z wiatru gwiazdowego. Jak się jednak okazuje, wciąż skrywa tajemnicę, a mianowicie źródło niezwyklego wyjaśnienia w dziedzinie miękkiego promieniowania rentgenowskiego w 2003 roku pochodzącego z Miry A, a także przyczynę postulowanej 14-letniej okresowości obserwowanej w zakresie optycznym związanym z Mirą B. 400 lat temu gwiazda ta zyskała miano „cudownej” i wciąż udowadnia, że w pełni na nie zasługuje i nadal będzie zasługiwać, zadziwiając astronomów coraz to nowymi, niezwyklejmi zjawiskami dziejącymi się w tym układzie.



Jedną z najistotniejszych wielkości w matematyce jest π , której poświęcono wiele ścisłych prac i filozoficznych rozważań od starożytności (jeszcze zanim została nazwana swoim obecnym imieniem) do czasów współczesnych. Co pewien czas można znaleźć informacje o kolejnych rekordach w wyznaczaniu coraz dłuższego jej rozwinięcia dziesiętnego. Przeglądając literaturę, portale o tematyce matematycznej bądź podręczniki szkolne, można także spotkać się z różnymi sposobami definiowania liczby π . Według encyklopedii szkolnej „Matematyka”: *liczba π , ludolfina, stała matematyczna określona jako stosunek długości okręgu koła do długości jego średnicy; $\pi = 3,14159 \dots$* . Mając przed sobą cytowaną definicję, spróbujmy zastanowić się, czy ów stosunek jest ten sam dla każdego okręgu i odpowiadającej mu średnicy w ogólnym przypadku.

Zacniemy od geometrii sferycznej. Okręgiem na sferze nazywamy miejsce geometryczne wszystkich jej punktów, których odległość od wybranego punktu S (na sferze) wynosi r , gdzie $r \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Odległości na sferze można wyrażać w mierze kątowej lub łukowej. Nie powinno więc budzić tu zdziwienia stwierdzenie, że, na przykład, długość promienia okręgu wynosi 60° czy $\frac{\pi}{3}$. Dalej będziemy używać miary łukowej. Punkt S nazywamy środkiem (sferycznym), a r – promieniem (sferycznym) okręgu. Okręgi sferyczne możemy podzielić na małe i wielkie. Okręgi małe powstają wskutek przecięcia sfery płaszczyzną nieprzechodzącą przez jej środek ($r < \frac{\pi}{2}$). Okręgi wielkie to zbiory punktów przecięcia sfery z pewną płaszczyzną przechodzącą przez jej środek.

Taki okrąg, na przykład równik kuli ziemskiej, ma promień $r = \frac{\pi}{2}$ i dwa środki będące punktami antypodycznymi (na Ziemi są to bieguny). Najkrótszym połączeniem, czyli linią geodezyjną lub ortodromą, dwóch punktów sfery jest właśnie krótszy łuk przechodzący przez ten okrąg wielkiego. Jeśli te łuki są równej długości, to oba są najkrótszymi połączeniami. Okrąg wielki jest więc odpowiednikiem prostej euklidesowej. Ta sferyczna prosta ma skończoną długość i jest zamknięta.

Ustalmy promień sfery $R > 0$. Długość równika wynosi $2\pi R$, a długość jego średnicy d , równa dwóm długościom sferycznego promienia równika, jest połową długości równika, czyli $d = \pi R$. Zatem stosunek długości okręgu wielkiego do długości jego średnicy w tej sytuacji jest równy 2. Długość i średnicę okręgu równoleżnikowego, leżącego na szerokości geograficznej $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, można wyrazić za pomocą wzorów

$$L = 2\pi R \cos x, \quad d = 2R\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

A każdy okrąg na sferze można przedstawić jako okrąg równoleżnikowy – trzeba zmienić położenie równika tak, żeby jego płaszczyzna była równoległa do płaszczyzny wyznaczonej przez wybrany okrąg. Względem nowego równika możemy obliczyć szerokość geograficzną wybranego okręgu.

Na przykład, dla szerokości geograficznej równej $\frac{\pi}{3}$ długość odpowiadającego jej okręgu małego równa jest połowie długości równika, czyli πR , a średnica ma długość $2R \cdot \frac{\pi}{6}$. Zatem w tym przypadku stosunek długości okręgu i jego średnicy jest równy 3.

Zobaczyliśmy kilka przykładów, a teraz warto zadać ogólne pytanie o zakres wartości stosunku długości dowolnego okręgu do jego średnicy na sferze. Żeby łatwiej opisać dalsze obliczenia, wprowadźmy funkcję $\tilde{\pi}$ wyrażającą stosunek długości okręgu do długości odpowiadającej mu średnicy. Ponieważ wszystkie okręgi na danej szerokości geograficznej są takie same, parametrem funkcji będzie właśnie szerokość geograficzna. Ogólny wzór, dla $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, to

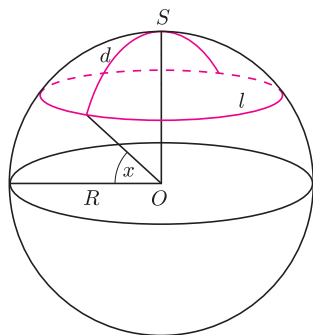
$$\tilde{\pi}(x) = \frac{L(x)}{d(x)},$$

a po podstawieniu otrzymujemy

$$\tilde{\pi}(x) = \frac{2\pi R \cos x}{2R\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{2\pi}{\pi - 2x} \cos x.$$

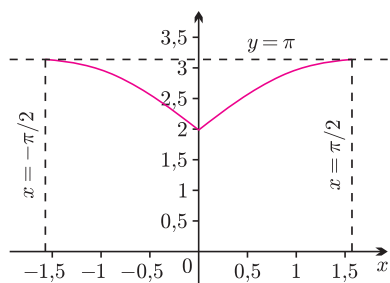
Średnica okręgu (co na płaszczyźnie euklidesowej wydaje się zbędnym wyjaśnieniem) to odcinek łączący jego przeciwległe punkty.

W celu łatwiejszego wyrażania odległości na powierzchni sfery można posłużyć się pojęciem szerokości geograficznej. Szerokość geograficzna danego punktu sfery to kąt zawarty między płaszczyzną równika a pionem tego punktu.



Rys. 1. Okrąg sferyczny i jego średnica. To, że ograniczone przez ten okrąg koło ma mniejsze pole niż płaskie koło o tym samym promieniu, wyraża fakt, iż to pole jest takie, jak pole płaskiego koła o promieniu będącym przestrzenną (!) odległością jego środka od brzegu.

*Wydział Nawigacyjny, Akademia Morska w Gdyni



Rys. 2. Wykres funkcji $\tilde{\pi}$ dla okregów sferycznych.

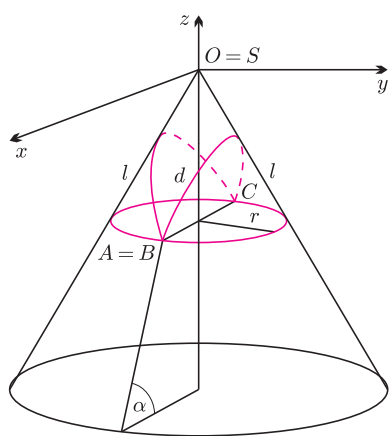
Funkcja $\tilde{\pi}$ jest więc rosnąca w rozpatrywanej dziedzinie, a zbiór jej wartości to odcinek $[2, \pi)$. Stosunek długości okręgu do długości jego średnicy na sferze nie tylko nie jest wielkością stałą, ale opisuje go całkiem nietrywialna funkcja.

Dziedzinę funkcji $\tilde{\pi}$ zawęziliśmy dotąd do przedziału $[0, \frac{\pi}{2})$, co odpowiada półsferze bez bieguna o dodatniej (północnej) szerokości geograficznej. Jednak w obliczeniach uwzględniliśmy wszystkie możliwe długości okregów na sferze, czyli właściwie znamy już wartości funkcji $\tilde{\pi}$ na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Następujący wzór jest uogólnieniem poprzedniego na ujemne szerokości geograficzne:

$$\tilde{\pi}(x) = \frac{2\pi}{\pi - 2|x|} \cos x.$$

Wykres parzystej funkcji $\tilde{\pi}$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ przedstawia rysunek 2.

W granicznym przypadku, gdy promień sferyczny r małego okręgu dąży do zera, okrąg sferyczny coraz bardziej „rozpłaszcza się” – wówczas $\tilde{\pi}(x)$ jest bliskie π . Jako model Ziemi najczęściej przyjmuje się sferę lub elipsoidę obrotową, których powierzchnię lokalnie aproksymuje się płaszczyzną euklidesową styczną w danym punkcie. Dla wielu zastosowań jest to zabieg dopuszczalny, ponieważ wystarcza do otrzymania wymaganej dokładności wyników. Ale nie zawsze – w geodezji, nawigacji, kartografii czy astronomii znamy wiele przykładów, gdzie przybliżenie płaszczyzną nie wystarcza, a na obserwowanym obszarze wartość funkcji $\tilde{\pi}$ istotnie różni się od π . W takich przypadkach granice aproksymacyjnego stosowania płaskiej geometrii euklidesowej należy wyraźnie określić.

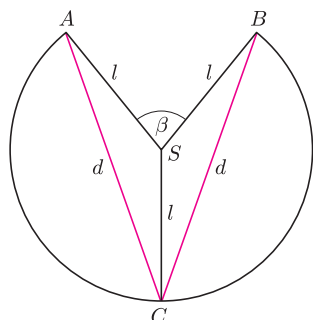


Rys. 3. Okrąg równoleżnikowy na stożku obrotowym i jego średnice.

Na przykład, w pomiarach terenowych – wykorzystywanych lokalnie w geodezji niższej – obszar powierzchni Ziemi można traktować jako płaski wtedy, gdy znajduje się on w kole o promieniu około 15,5 km (wówczas jego powierzchnia nie przekracza 760 km²). Odpowiada to w przybliżeniu polu koła o średnicy równej 17' łuku okręgu wielkiego. Wyniki bezpośrednich pomiarów, nieuwzględniających wpływu krzywizny powierzchni Ziemi, wykonanych w takim obszarze, można przedstawić na płaszczyźnie w odpowiedniej skali, pomijając odwzorowanie kartograficzne, i efekt będzie satysfakcjonujący.

Zobaczmy teraz, jak zachowują się okręgi na stożku obrotowym. Stożek obrotowy to powierzchnia powstała przez obrót prostej $z = ay$ ($a > 0$) nachylonej do osi y pod kątem $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ dokoła osi z w prostokątnym układzie współrzędnych $OXYZ$. Przyjmijmy, że $z \leq 0$, czyli patrzmy tylko na jedną część stożka, tę pod płaszczyzną $z = 0$ (rys. 3). Spróbujmy powiedzieć coś o zbiorze wartości funkcji $\tilde{\pi}$, określonej, jak poprzednio, jako stosunek długości okręgu do długości jego średnicy.

Rozważmy rodzinę okregów leżących na stożku, które powstają w wyniku przecięcia go płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny $z = 0$. Okręgi te nazywamy, analogicznie jak na sferze, równoleżnikami. Punkt S , wierzchołek stożka, jest zarazem środkiem wszystkich okregów równoleżnikowych. Intuicyjnie stwierdzamy, że powierzchnię boczną stożka obrotowego można otrzymać, zwijając kawałek papieru, czego z powierzchnią sfery zrobić się nie da. Spróbujmy więc spojrzeć na nasz problem, rozkładając powierzchnię boczną stożka na płaszczyźnie. Po tej operacji otrzymamy koło bez wycinka o kącie o mierze łukowej β , przedstawione na rysunku 4. Na tym samym rysunku widać okrąg na stożku, którego długość obliczymy. Niech l oznacza długość odcinka SA . Nasze obliczenia będą zależały od dwóch parametrów – odległości l okręgu od wierzchołka stożka oraz kąta β , charakteryzującego stożek.

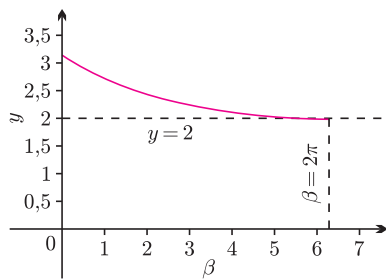


Rys. 4. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyźnie. Kolorem zaznaczone są średnice narysowanego okręgu.

Długość pełnego okręgu na płaszczyźnie to $2\pi l$. Od niej trzeba odjąć długość łuku poza rozłożoną powierzchnią stożka, czyli $l\beta$. Wobec tego długość równoleżnika leżącego w odległości l od wierzchołka S jest równa

$$L(l, \beta) = l(2\pi - \beta).$$

Trudniejsza sprawa jest ze średnicami. Mogłoby się wydawać, że średnica takiego okręgu równoleżnikowego przechodzi przez punkt S – otóż nie! Na rysunku 4 widać, jak wyglądają najkrótsze odcinki (AC i BC) łączące przeciwległe punkty równoleżnika. Ich długość $d(l, \beta)$ wyznaczmy, korzystając z twierdzenia cosinusów



Rys. 5. Wykres funkcji $\tilde{\pi}(\beta)$ dla okręgów równoleżnikowych stożka obrotowego.

dla trójkąta CSA :

$$d(l, \beta)^2 = AC^2 = AS^2 + CS^2 - 2AS \cdot CS \cdot \cos\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right) = 2l^2\left(1 + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right).$$

Teraz możemy obliczyć $\tilde{\pi}$:

$$\tilde{\pi}(l, \beta) = \frac{L(l, \beta)}{d(l, \beta)} = \frac{2\pi - \beta}{\sqrt{2(1 + \cos(\frac{\beta}{2}))}}.$$

Okazuje się, że wartość funkcji $\tilde{\pi}$ nie zależy od l , czyli na każdym stożku wszystkie równoleżniki mają ten sam stosunek długości okręgu do średnicy. Ale ta liczba jest różna dla różnych stożków – zależy od kąta β . Funkcja, którą możemy zapisywać teraz jako $\tilde{\pi}(\beta)$, przyjmuje wartości z przedziału $(2, \pi)$ dla $\beta \in (0, 2\pi)$.

Czytelnik Wnikliwy z pewnością zapyta, co się zmieni, jeśli uwzględnimy też okręgi, które nie są równoleżnikami. Czy nadal stosunek długości okręgu do średnicy będzie stały na każdym stożku? Można zacząć od takiego zadania: na powierzchni bocznej stożka obrotowego o ustalonym kącie β dany jest okrąg o promieniu $r' > 0$ i środku S' niebędącym wierzchołkiem stożka. Czy okrąg równoleżnikowy o takim samym promieniu ma taką samą długość? Lub ogólniej, czy jest prawdą, że na powierzchni bocznej stożka obrotowego dla dowolnej liczby $r > 0$ istnieje nieskończenie wiele okręgów o promieniu r , ale różnej długości?

Obliczyliśmy, że funkcja $\tilde{\pi}$ nie jest stała w ogólnym przypadku. Wobec tego nieostrożnie byłoby stwierdzić bez zastanowienia, że liczba π wyraża wartość stosunku długości okręgu do długości jego średnicy. Tak jest istotnie w geometrii euklidesowej na płaszczyźnie, do czego przyzwyczajają się nas niemal od początków nauki w szkole. Ale, jak widać, przenoszenie przyzwyczajajeń z jednej, „ulubionej” geometrii na inne nie zawsze jest dobrym pomysłem.

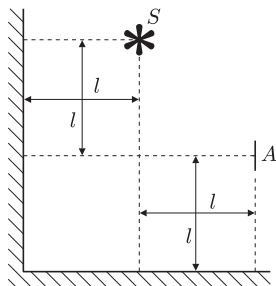
W przedstawionych w artykule przykładach otrzymaliśmy wyłącznie wartości funkcji $\tilde{\pi}$ nieprzekraczające π . Czy może się zdarzyć, że $\tilde{\pi} > \pi$? Odpowiedzi proszę spróbować poszukać w geometrii hiperbolicznej.



Zadania

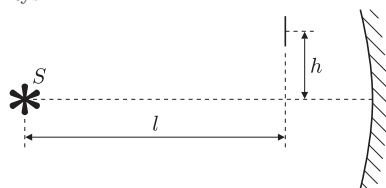
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 777. Dwa zwierciadła płaskie tworzą kąt dwusieczny równy 90° . Punktowe źródło światła S zostało umieszczone między zwierciadłami tak, że odległość od nich jest równa odpowiednio l i $2l$ (rys. 1). W odległości $2l$ od pionowego zwierciadła jest umieszczony ekran. Znaleźć natężenie oświetlenia w punkcie ekranu A odległym od poziomego zwierciadła o l . Światłość źródła S wynosi I .
Rozwiązanie na str. 24



Rys. 1

F 778. Przed zwierciadłem sferycznym o promieniu r , w którego ognisku znajduje się punktowe źródło światła S , w odległości l od ogniska znajduje się mała nieprzezroczysta płytka (rys. 2). Powierzchnia płytki jest prostopadła do osi optycznej zwierciadła, a płytka znajduje się na niewielkiej wysokości h nad tą osią. Znaleźć stosunek oświetlenia lewej i prawej strony płytki.
Rozwiązanie na str. 12



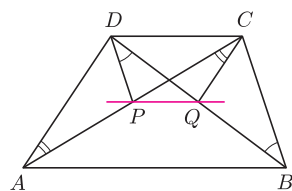
Rys. 2

Redaguje Waldemar POMPE

M 1297. Udowodnić, że w ciągu $2^n - 3$ występuje nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 5 oraz nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 13, lecz nie występuje w nim liczba podzielna przez $5 \cdot 13$.
Rozwiązanie na str. 7

M 1298. Dane są trzy liczby nieparzyste a, b, c . Wykazać, że istnieje taka liczba nieparzysta d , że liczba $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 3

M 1299. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD (rys. 3). Punkty P i Q leżą odpowiednio na przekątnych AC i BD , przy czym $\sphericalangle PDB = \sphericalangle CBD$ oraz $\sphericalangle QCA = \sphericalangle DAC$.



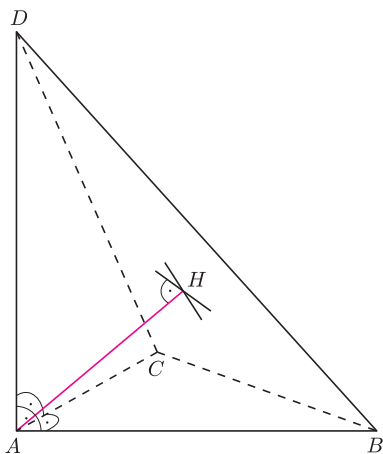
Rys. 3

Wykazać, że prosta PQ jest równoległa do podstaw trapezu $ABCD$.
Rozwiązanie na str. 6

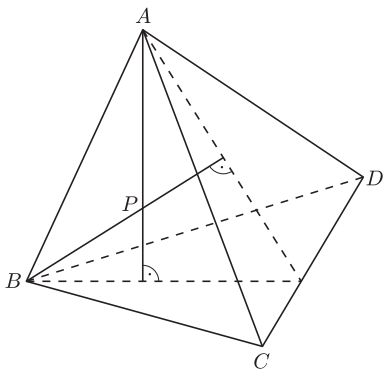
Kącik przestrzenny (5) Prostopadłość prostych i płaszczyzn

Z definicji prosta jest prostopadła do płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do każdej prostej leżącej w tej płaszczyźnie. Nietrudno jednak udowodnić, że na to, aby prosta była prostopadła do płaszczyzny, potrzeba i wystarcza, aby była prostopadła do dwóch przecinających się prostych leżących w tej płaszczyźnie.

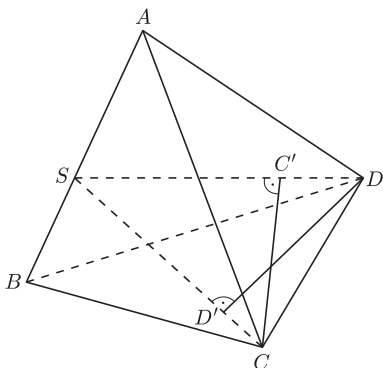
Notacja $XY \perp ABC$ oznacza, że prosta XY jest prostopadła do płaszczyzny ABC .



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Piąty kącik poświęcimy prostopadłości prostych i płaszczyzn. Przy rozwiązywaniu zadań dotyczących tego tematu należy jedynie pamiętać o tym, że

- jeśli dwie nierównoległe proste leżące w jednej płaszczyźnie są prostopadłe do trzeciej prostej, to cała płaszczyzna też jest prostopadła do niej;
- jeśli prosta jest prostopadła do pewnej płaszczyzny, to jest prostopadła do dowolnej prostej leżącej w tej płaszczyźnie.

I to jest cała filozofia – wszystkie zadania o prostopadłości rozwiązuje się, posługując się tym schematem. Czasem należy tylko umieć wybrać, czy wygodniej będzie wykazać, że, na przykład, rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę spełnia jakieś warunki, czy odwrotnie – wziąć punkt na tej płaszczyźnie spełniający dane warunki i pokazać, że prosta łącząca go z punktem A jest prostopadła do tej płaszczyzny. Przy odrobinie praktyki jednak szybko nabierzemy wyczucia. Zacznijmy od prostego, ale bardzo użytecznego zadania.

1. Wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku A czworościanu $ABCD$ są proste. Wykazać, że rzut prostokątny H punktu A na płaszczyznę BCD jest ortocentrum trójkąta BCD (rys. 1).

Rozwiązanie. Skoro $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD = 90^\circ$, to $BA \perp ADC$, a więc $BA \perp CD$. Ponadto $AH \perp BCD$, skąd $AH \perp CD$. Zatem płaszczyzna ABH jest prostopadła do prostej CD . W takim razie $BH \perp CD$. Analogicznie udowodnimy, że $CH \perp BD$. Zatem punkt H jest ortocentrum trójkąta BCD .

Warto ten fakt sobie zapamiętać, bo nie raz dane nam będzie z niego skorzystać. Przejdźmy teraz do nieco trudniejszego zadania, w którym zobaczymy, jak wykorzystać prostopadłość prostych skośnych.

2. (OM 1-III-3) Wykazać, że jeżeli w czworościanie $ABCD$ wysokości poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają się, to również wysokości poprowadzone z wierzchołków C i D przecinają się.

Rozwiązanie. Niech P będzie punktem przecięcia wysokości czworościanu poprowadzonych z wierzchołków A i B (rys. 2). Mamy $AP \perp BCD$, więc też $AP \perp CD$ i analogicznie $BP \perp CD$. W takim razie płaszczyzna ABP jest prostopadła do krawędzi CD , w szczególności $AB \perp CD$. Na prostej AB wybierzmy taki punkt S , że $DS \perp AB$. Zatem płaszczyzna CDS jest prostopadła do krawędzi AB . Niech CC' i DD' będą wysokościami trójkąta CDS (rys. 3). Prosta CC' jest prostopadła zarówno do DS , jak i do AB (bo leży w płaszczyźnie prostopadłej do tej krawędzi). Jest więc wysokością czworościanu $ABCD$ poprowadzoną z wierzchołka C . Analogicznie dowodzimy, że również DD' jest wysokością danego czworościanu. Te dwie proste mają punkt wspólny będący ortocentrum trójkąta CDS . Dowód jest więc zakończony.

Okazuje się w takim razie, że nie w każdym czworościanie istnieje punkt przecięcia wszystkich wysokości. Z naszego rozwiązania wynika bowiem, że wysokości poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy $AB \perp CD$ (z uwagi na symetrię dotyczy to również wysokości poprowadzonych z punktów C i D). Czwościany, w których wszystkie wysokości przecinają się w jednym punkcie, nazywamy *ortocentrycznymi*, ale o nich następnym razem.

Zadania

3. (OM 49-II-6) Dany jest czworościan $ABCD$. Dowieść, że krawędzie AB i CD są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w przestrzeni taki równoległobok $CDPQ$, że $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$.

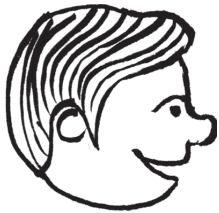
4. Krawędź AD czworościanu $ABCD$ jest prostopadła do płaszczyzny ABC . Wykazać, że rzut prostokątny ortocentrum trójkąta ABC na płaszczyznę BCD jest ortocentrum trójkąta BCD .

Więcej zadań na internetowej stronie *Delty*.

Michał KIEZA



mała delta



Ziomkowie i Wszechświat

Wyobraźmy sobie małe, senne miasteczko na rubieży kresów, zamieszkałe przez N osób. Wszystkie te osoby się znają, mieszkają tutaj przecież od zawsze. W niedzielne popołudnie wszyscy wychodzą na rynek i przechadzają się. Ludzie ci są nieskomplikowani, każdy może być w jednym z dwóch stanów psychicznych, tj. albo wesoły (takich będziemy oznaczać przez ☺, a ich liczbę przez $N_{\text{☺}}$), albo smutny (na tych dobrym oznaczeniem będą odpowiednio ☹ i $N_{\text{☹}}$). Prawa rządzące psychiką naszych bohaterów nie są nazbyt złożone, a każdy na pewno zna je z codziennych, chcianych czy nie, doświadczeń. Kiedy osobnik wesoły spotyka innego wesołego, w wyniku nagłej i niepowstrzymanej zazdrości smutnieje, zatem zachodzi proces, który schematycznie możemy zapisać jako:



Kiedy człowiek smutny spotyka innego smutnego, w wyniku reakcji określanej z niemiecka jako *Schadenfreude*, czyli radość z cudzego nieszczęścia, momentalnie weseleje:



Nikogo pewnie nie zdziwi wiadomość, że przy spotkaniu człowieka wesołego ze smutnym żaden z nich nie zmieni swego stanu. Dodajmy jeszcze, że kontakty społeczne są raczej powierzchowne, toteż nie zdarzają się spotkania aż trzech lub więcej osób naraz, a szlak spaceru po rynku wynika raczej z przypadkowych kaprysów niż jakichś konkretnych, ustalonych przed wyjściem z domu planów. Co można powiedzieć o zmianach liczby wesołych i smutnych obywateli?

Prawdopodobieństwo tego, że człowiek wesoły posmutnieje w wyniku napotkania innego wesołego w ciągu ustalonego przedziału czasowego Δt , jest proporcjonalne do liczby innych wesołych, zatem

$$P(\text{☺} \rightarrow \text{☹}) = \alpha(N_{\text{☺}} - 1)\Delta t,$$

gdzie α jest ustalonym współczynnikiem proporcjonalności. Podobnie, prawdopodobieństwo poweselenia smutnego możemy napisać jako $P(\text{☹} \rightarrow \text{☺}) = \alpha(N_{\text{☹}} - 1)\Delta t$. Jeżeli zaś całkowitym szczęściem społeczeństwa nazwiemy różnicę między liczbą obywateli wesołych i smutnych, to zmianę szczęścia możemy oszacować przez

$$\Delta S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (N_{\text{☹}}P(\text{☹} \rightarrow \text{☺}) - N_{\text{☺}}P(\text{☺} \rightarrow \text{☹})),$$

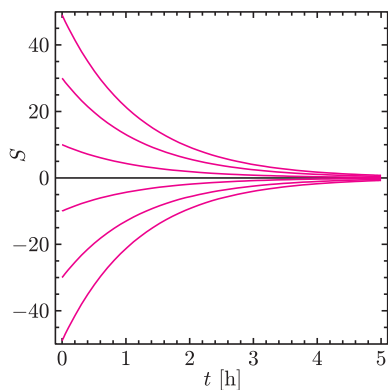


Rozwiązanie zadania F 778.

Ponieważ źródło światła znajduje się w ognisku zwierciadła, więc na prawą stronę płytki pada prostopadle strumień światła odbitego od takiej samej powierzchni zwierciadła co powierzchnia płytki. Ze względu na małe rozmiary płytki można zaniedbać zmianę kąta padania światła z lewej strony. Zatem szukany stosunek wynosi

$$\frac{2l(r^2/4 + h^2)^{3/2}}{r(l^2 + h^2)} \approx \frac{lr^2}{4(l^2 + h^2)^{3/2}}$$

dla $h \ll r$.



Rys. 1. Ewolucja czasowa szczęścia S opisywanego wzorem (1) dla różnych wartości S_0 przy stałej α równej $0,25/\text{min}$ oraz $N = 100$.

gdzie czynnik $\frac{1}{2}$ zapobiega policzeniu każdego spotkania dwóch osób dwukrotnie, natomiast czynnik 4 uwzględnia zmianę szczęścia o 4 jednostki przy spotkaniu zmieniającym stany psychiczne. Podstawiając obliczone uprzednio prawdopodobieństwa i zakładając, że liczba osób jest na tyle duża, że możemy zaniedbać odejmowanie jedynki w tych wynikach, otrzymujemy:

$$\Delta S = -2\alpha N S \Delta t.$$

Zatem zmiana wielkości S w jednostce czasu jest wprost proporcjonalna do tej wielkości, co oznacza, że całkowite szczęście jest opisywane funkcją wykładniczą:

$$(1) \quad S(t) = S_0 e^{-2\alpha N t},$$

gdzie S_0 jest wartością początkową szczęścia. Wykres takiej funkcji dla różnych warunków początkowych pokazany jest na rysunku 1. Niezależnie od początkowego szczęścia miasteczka po upływie niezbyt długiego czasu całkowite szczęście osiąga, niestety, wartość bliską zeru.

W sąsiednim miasteczku panują trochę inne zwyczaje. Procesy psychiczne u ludzi przebiegają, oczywiście, tak samo, ale w niedzielne popołudnia mieszkańcy nie spacerują po rynku, tylko wybierają się na długie wędrowki po okolicznych lasach i łąkach, tak że zajmowany przez nich teren powiększa się w miarę upływu czasu, aż do zapadnięcia zmierzchu, kiedy to wszyscy samotnie wracają do domu. Jak zmienia się całkowite szczęście owego miasteczka?

Zanim postaramy się to opisać mądrym wzorem, zastanówmy się, czym różni się dynamika spotkań międzyludzkich w obu miasteczkach. Nietrudno zauważyć, że w pierwszym obywatele zajmują stałą powierzchnię, podczas gdy w drugim powierzchnia ta się powiększa, a co za tym idzie, prawdopodobieństwo spotkania maleje. W pewnej chwili może ono osiągnąć wartość tak małą, że żadne dwie osoby nie spotkają się już przed wieczornym powrotem do domu – a wartość szczęścia przestanie się w praktyce zmieniać, osiągając pewną niezerową wartość. W naszym prostym modelu odpowiada to przyjęciu *malejącego* z czasem współczynnika α . Dla pewnego szczególnego wyboru

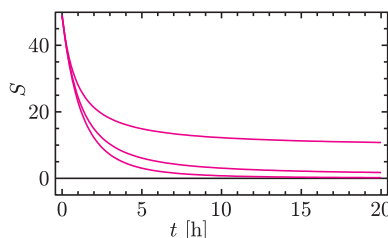
$$(2) \quad \alpha(t) = \frac{\alpha_0}{(t/t_0 - 1)^2}$$

otrzymujemy rozwiązania przedstawione na rysunku 2.

Gdzie szukać takich miasteczek, chciałby pewnie wiedzieć Czytelnik Lubiący Konkrety. Czas przyznać się, że opowiadanie tu przedstawione jest po prostu metaforą: drugim miasteczkiem jest wczesny Wszechświat, ludzie weseli i smutni to określony rodzaj cząstek i antycząstek, oddziaływania polegają zaś na zamianie par cząstek w pary antycząstek, natomiast ustalone szczęście odpowiada ustalonej liczbie cząstek i antycząstek w pewnym obszarze Wszechświata. Co prawda, znane cząstki nie mają aż tak prostych oddziaływań, ale nie jest trudno poprawić taki model, by uwzględniał np. procesy anihilacji danego rodzaju cząstek i antycząstek w jakieś inne cząstki, które z powodu zachowania energii nie będą już mogły wytworzyć wyjściowej pary...

Czemu rozmyślać o takich rzeczach? Według obecnej wiedzy istnienie materii, z której jesteśmy zbudowani, oraz ciemnej materii wypełniającej Wszechświat wiąże się z ustaniem oddziaływań zmieniających liczbę tych cząstek w pewnych momentach ewolucji Wszechświata. Nieznane pozostaje wszakże wiele konkretnych szczegółów...

Małą Deltę przygotował Krzysztof TURZYŃSKI



Rys. 2. Ewolucja czasowa szczęścia S z funkcją $\alpha(t)$ opisywaną wzorem (2) dla różnych wartości $t_0 = -2, -5, -10$ h (od góry do dołu) przy $\alpha_0 = 0,25/\text{min}$, $N = 100$ oraz $S_0 = 49$.

Amatorskie pomiary meteorologiczne: Kamera całego nieba

Krzysztof MARKOWICZ*

Informacje ogólne. Kamera całego nieba jest przyrządem służącym do monitoringu zachmurzenia atmosferycznego. Umożliwia ona ciągłe obserwacje stopnia pokrycia chmurami całego nieboskłonu oraz okolic tarczy słonecznej, co ma szczególne znaczenie w pomiarach fotometrycznych. Analiza zdjęć cyfrowych pozwala na identyfikację rodzajów chmur, sekwencja czasowa zaś kolejnych fotografii – na szacowanie prędkości i kierunku przemieszczania się chmur. Przyrząd ten wpisuje się w kanon standardowych narzędzi meteorologicznych i wypełnia lukę związaną z brakiem przyrządów do obserwacji zachmurzenia.



Fot. 1. Kamera całego nieba

Informacje techniczne. Kamery nieba umożliwiają obrazowanie niemal całego nieboskłonu za pomocą jednej z dwóch metod. Pierwsza z nich wykorzystuje szerokokątny obiektyw typu „rybie oko” skierowany do góry. Druga metoda (zastosowana w kamerze widocznej na fotografii 1) wykorzystuje wypukłe zwierciadło. Rozwiązanie takie pozwala na niemal 180° kąt widzenia matrycy aparatu cyfrowego umieszczonego centralnie nad zwierciadłem. Rolę zwierciadła na fotografii 1 spełnia kołpak od amerykańskiego samochodu ciężarowego, nabyty w USA w cenie kilku dolarów. Niezależnie od zastosowanej metody sporo problemów sprawi obecność Słońca. Natężenie promieniowania naszej gwiazdy jest o mniej więcej 5 rzędów wielkości większe niż natężenie promieniowania rozproszonego pochodzące od nieboskłonu. W przypadku kamery pokazanej na fotografii 1 zastosowano ruchomą przesłonę, której zadaniem jest blokowanie bezpośredniego promieniowania słonecznego. Przesłona ta porusza się w płaszczyźnie poziomej zgodnie z kierunkiem pozornego ruchu Słońca po nieboskłonie dzięki zastosowaniu silnika krokowego sterowanego przy użyciu mikrokontrolera. Szczegóły tego rozwiązania są dość skomplikowane i nie będzie ono tu opisywane.



Fot. 2. Przykładowe zdjęcia nieboskłonu wykonane kamerą całego nieba.

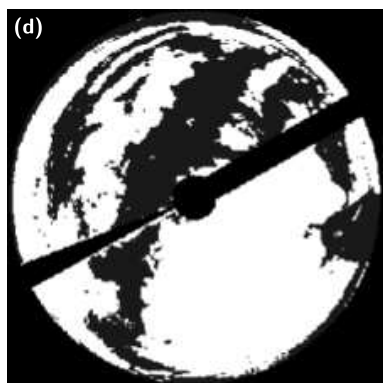
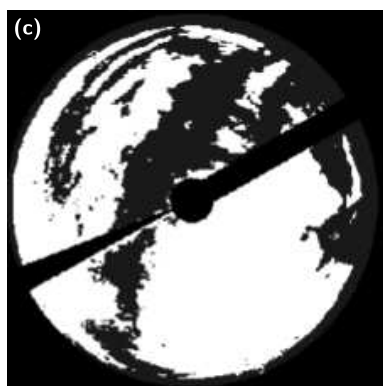
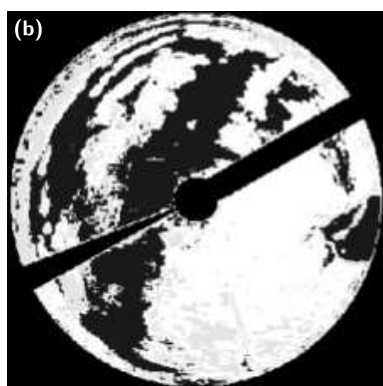
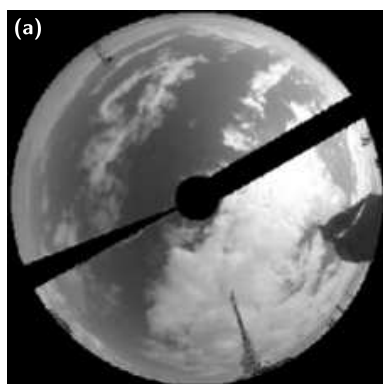
Zainteresowani mogą uzyskać więcej szczegółów na temat budowy i sterowania silnika krokowego, kontaktując się z autorem (kmark@igf.fuw.edu.pl).

Rezygnacja z przesłony ograniczającej oświetlenie matrycy aparatu cyfrowego może być częściowo skompensowana zmniejszeniem czasu naświetlania oraz wykonywaniem kilku zdjęć z różnym czasem naświetlania. Technika ta, zwana w skrócie HDR (*high dynamic range imaging*), pozwala efektywnie wydobywać szczegóły na obrazach. Jednak nawet wykonywanie zdjęć tylko przy jednym czasie otwarcia migawki pozwala w zdecydowanej większości przypadków zdobyć interesujące informacje na temat rozkładu zachmurzenia. Podczas wyboru rodzaju aparatu cyfrowego należy kierować się możliwością sterowania urządzeniem za pośrednictwem komputera. Ma to na celu wykonywanie zdjęć w trybie automatycznym z zadanym interwałem czasowym. Innym parametrem jest rozdzielczość matrycy CCD. Stosowanie matrycy z wysoką rozdzielczością nie jest wskazane, gdyż znacząco spowalnia przetwarzanie danych, a zysk w postaci dodatkowych informacji jest niewielki. W przedstawionej kamerze wykorzystano aparat cyfrowy CANON CyberShot A75 o matrycy 3,2 mln pikseli. Aparat ten jest obsługiwany przez komercyjny program *PSRemote*, dostępne są jednak także nieodpłatne programy, które mogą być wykorzystane na potrzeby kamery nieba. W przypadku profesjonalnych kamer nieba stosuje się aparaty z możliwością zapisu danych w trybie RAW, w odróżnieniu od standardowego zapisu w postaci skompresowanych plików JPEG.

Przetwarzanie danych. Analiza zdjęć z kamery nieba może być wykonana przy użyciu oprogramowania pozwalającego na czytanie formatu danych JPEG oraz przetwarzanie macierzy RGB. Przykładem może być tu bezpłatny program *OCTAVE* kompatybilny z komercyjnym programem *MATLAB*. Głównym celem przetwarzania danych uzyskanych z przyrządu jest oszacowanie zachmurzenia, określenie rodzaju chmur (konwekcyjne, warstwowe i pierzaste). Zbudowanie

*Instytut Geofizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

odpowiedniego algorytmu pozwalającego w sposób obiektywny rozróżniać chmury na tle nieboskłonu nie jest zadaniem prostym, dlatego ciągle niezastąpione w detekcji chmur jest oko doświadczzonego meteorologa.



Fot. 3. Przykład działania 3 algorytmów detekcji chmur. Zdjęcie z kamery nieba (a) oraz rozkład zachmurzenia uzyskany na podstawie sieci neuronowych (b), stosunku sygnału w kanale R i B (c) oraz rozkładu promieniowania słonecznego na podstawie modelu (d).

Najczęściej stosowane techniki opierają się na detekcji chmur na podstawie stosunku sygnału w kanale czerwonym (R) do sygnału w kanale niebieskim (B) lub indeksów opartych na np. wariancji oświetlenia w sąsiadujących pikselach. Chmury, zbudowane z kropelek wody lub kryształków lodu o rozmiarach znacznie większych od długości fali promieniowania, rozpraszają promieniowanie niemal niezależnie od długości fali, podczas gdy rozpraszanie na molekułach czystego powietrza (rozpraszanie Rayleigha) słabnie z długością fali jak $1/\lambda^4$. Tym samym stosunek promieniowania w kanale czerwonym i niebieskim jest znacznie mniejszy dla obszarów nieboskłonu, gdzie występują chmury.

Sytuację komplikuje jednak aerozol atmosferyczny, który podobnie jak chmury zmienia barwę nieboskłonu. W przypadku wysokiej grubości optycznej aerozoli nawet doświadczony meteorolog ma kłopoty z raportowaniem cienkich chmur typu pierzastego. Na dodatek barwa nieboskłonu zależy od położenia Słońca, co utrudnia stosowanie jednego kryterium do detekcji obszarów pokrytych chmurami. Znaczną komplikację stanowią również obszary tzw. aureoli słonecznej (obszar naokoło Słońca) oraz tzw. pojaśnienia horyzontalnego. W obszarach tych wartości R, G, B mogą nasycać się, a to uniemożliwia stosowanie jakichkolwiek algorytmów do detekcji chmur. Innym podejściem stosowanym do detekcji chmur są sieci neuronowe. Stosowanie sieci neuronowych do zdjęć nieboskłonu pozwala na identyfikację rodzajów zachmurzenia, choć wymaga uprzedniego wytrenowania sieci, co jest rzeczą dość pracochłonną i opartą na subiektywnej ocenie osoby budującej sieć neuronową, co gorsza, optymalny wybór serii treningowej zdjęć nie jest rzeczą prostą.

Do analizy zmienności spektralnej promieniowania wygodnie użyć jest wykładnika Ångströma. Definiujemy go na podstawie sygnału mierzonego w kanale czerwonym R i niebieskim B zgodnie ze wzorem

$$\alpha = -\frac{\log(R/B)}{\log(\lambda_R/\lambda_B)},$$

gdzie λ_R i λ_B odpowiada długości fali kanału spektralnego R i B. Informacje o długościach tych fal można uzyskać u producentów aparatów cyfrowych. Współczynnik Ångströma jest najwyższy dla błękitnego nieba i maleje wraz ze wzrostem grubości optycznej chmur oraz aerozoli atmosferycznych. Ustawienie progowej wartości α pozwala na konstrukcję prostego algorytmu do detekcji chmur. Wartość tę należy ustawiać na podstawie analizy co najmniej kilku zdjęć testowych. Należy jednak podkreślić, że najprostsze aparaty cyfrowe nie pozwalają na rejestrację wartości bezwzględnych promieniowania w trzech zakresach spektralnych RGB. Relacja pomiędzy kanałami (kalibracja względna) ustalana jest w trakcie tzw. balansu bieli. Dzięki temu biała kartka papieru niezależnie od oświetlenia (temperatury barowej oświetlenia) jest zawsze biała na fotografii. Realizowane jest to na etapie przetwarzania zdjęcia w samym aparacie, np. gdy używamy automatycznego balansu bieli. Zmiana względnej kalibracji kanałów RGB jest z punktu widzenia metod detekcji zachmurzenia rzeczą niepożądaną. Najlepszym rozwiązaniem jest ustalenie stałego balansu bieli niezależnie od warunków oświetleniowych. Jednak, jak pokazują wyniki analiz zdjęć z kamery nieba, największe problemy z detekcją chmur występują przy niewielkim oświetleniu, na przykład podczas dużego zachmurzenia lub w godzinach wschodu czy zachodu Słońca. W pozostałych przypadkach nawet automatyczny balans bieli nie prowadzi do dużych błędów w interpretacji zdjęć.

Na koniec warto zwrócić uwagę na aspekt korekcji geometrycznej. Zastosowanie w kamerze nieba zwierciadła czy szerokokątnego obiektywu prowadzi do powstania aberracji optycznej. Tym samym obraz rejestrowany przez matrycę CCD jest zniekształcony w kierunku radialnym od środka zdjęcia. Wymaga to skorygowania obrazu, tak aby odległość radialna na zdjęciu była proporcjonalna do odległości na nieboskłonie. Jest to istotne, gdy wyznaczamy stopień pokrycia chmurami (zachmurzenie).

Protokół posiedzenia Jury XXXII Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie: Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Agnieszka Bojarska-Sokołowska, Maria Donten-Bury, Marek Kordos, Agnieszka Wojciechowska-Waszkiewicz na posiedzeniu 1 lipca 2010 roku w Olsztynie po wysłuchaniu prezentacji prac dopuszczonych do finału, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść prac i sposób ich przedstawienia, postanowiło, że

- **złoty medal** i nagrodę w wysokości 1300 zł otrzymuje
Michał Miśkiewicz z XIV LO im. S. Staszica w Warszawie za pracę
Urok zbioru μ ,
- **2 srebrne medale** i nagrody w wysokości 900 zł otrzymują
Tomasz Pełka z V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie za pracę
Jak zabrać się za potężną potęgę i znaleźć Grupę Trzymającą Rozwiązanie,
oraz **Mateusz Wróbel** z I PLO im. M. Kopernika w Opolu za pracę
Nieprawdopodobieństwo – czyli o tym, jak matematyk rzuca igłą,
- **brązowy medal** i nagrodę w wysokości 600 zł otrzymuje
Bartosz Górecki z IX LO im. C.K. Norwida w Częstochowie za pracę
Średnie ułamkowe, nierówności pomiędzy średnimi. Nierówność Muirheada,
- **wyróżnienie** i nagrodę w wysokości 300 zł otrzymuje
Kamil Piszczek z V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie za pracę
Parabole i ich własności.

Opiekunowie prac: Włodzimierz Bąk, Jerzy Bednarczuk, Jacek Dymel, Zbigniew Górecki, Bogusław Kraszewski, otrzymują dyplomy honorowe.

Wszyscy finaliści i opiekunowie prac otrzymali również nagrody książkowe ufundowane przez Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe oraz Wydawnictwo Naukowe PWN.

(—) podpisy Członków Jury



Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki, zwany dalej Konkursem, jest organizowany corocznie przez Uniwersytet Warszawski i Polskie Towarzystwo Matematyczne. Szczegółowe warunki współpracy ustala umowa między UW a PTM.

2. W Konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół ponadpodstawowych.

3. 1) Kolejna edycja Konkursu ogłaszana jest do 31 grudnia każdego roku na stronie internetowej PTM oraz na łamach i stronie internetowej miesięcznika *Delta* z terminem nadsyłania prac do 1 kwietnia roku następnego.

2) Konkurs składa się z dwóch etapów: Eliminacji i Finału.

4. 1) W Eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do **1 kwietnia** prześle drogą elektroniczną do redakcji *Delty* na adres delta@mimuw.edu.pl egzemplarz swojej pracy matematycznej (plik w formacie PDF).

2) Do pracy należy dołączyć następujące informacje:

a) adres zamieszkania autora, klasa, nazwa i dokładny adres szkoły, do której autor uczęszcza oraz adresy elektroniczne autora i szkoły;

b) imię, nazwisko i dokładny adres zamieszkania opiekuna pracy oraz adres elektroniczny opiekuna pracy;

5. Praca zgłoszona do Konkursu powinna być samodzielnie przygotowanym przez ucznia opracowaniem, zawierającym nowe wyniki lub nowe twórcze ujęcie tematu. Wymagane jest podanie pełnej informacji o źródłach, z których korzystał autor pracy. Prace wyłącznie kompilacyjne nie będą dopuszczone do Finału konkursu.

6. Nadesłane prace zostaną ocenione przez Jury na podstawie opinii recenzentów. Nie więcej niż pięć najlepszych prac zostanie zakwalifikowanych do finału. Jury wyłoni finalistów

nie później niż do 15 maja i bezzwłocznie zawiadomi o tym Zarząd Główny PTM, podając dane uczniów i ich opiekunów. Finał odbędzie się podczas Forum Matematyków Polskich na przełomie czerwca i lipca każdego roku.

7. Finaliści i opiekunowie ich prac (nie więcej niż jeden opiekun dla ucznia) zostaną zaproszeni przez PTM do udziału w Forum. Koszty udziału w Forum finansują organizatorzy Konkursu.

8. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnej sesji Forum, trwającego nie dłużej niż 15 minut, referatu omawiającego wyniki pracy oraz wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.

9. Rezultaty Finału ocenia Jury Konkursu w ciągu 24 godzin od zakończenia sesji. Jury bierze pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody ufundowane przez organizatorów i sponsorów.

10. Ogłoszenie wyników Finału następuje podczas Forum Matematyków Polskich, a medale i dyplomy wręcza Prezes PTM lub upoważniona przez niego osoba. Wszyscy uczestnicy Finału otrzymują dyplomy uczestnictwa.

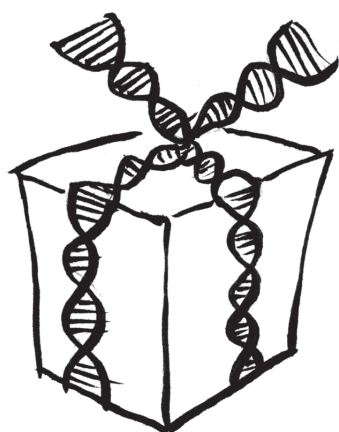
11. Wyniki Konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane na łamach miesięcznika *Delta* oraz na stronie internetowej czasopisma.

12. Jury Konkursu jest powoływane, na wniosek Komitetu Redakcyjnego miesięcznika *Delta*, przez Zarząd Główny PTM, w terminie do końca pierwszego kwartału roku następującego po wyborach władz PTM. Kadencja Jury trwa trzy lata. Liczba członków Jury wynosi od 5 do 7 osób. Decyzje Jury podejmowane są zwykłą większością głosów w głosowaniu jawnym.

Ile genów, ile genomów w człowieku?

Chyba jest już powszechną wiedzą, że ludzki genom został dość dokładnie poznany jako zbiór cząsteczek DNA obecnych w każdej ludzkiej komórce, odziedziczonych po przeszłych pokoleniach w ogóle, a po mamie i tacie w szczególności (oni też go dziedziczyli).

Ponieważ wszystkie organizmy (w tym ludzie od jakichś 6 milionów lat) podlegają różnorodnym wpływom środowiska, także tym, które zmieniają ich genom, to te zmiany, o ile nie były szkodliwe, utrwały się, przechodząc przez kolejne pokolenia. Łatwo zatem zrozumieć, że nasze genomy wszystkie są ludzkie, ale trochę różnią się między sobą (choć są to różnice poniżej 1%).



Mało kto zdaje sobie sprawę z faktu, że nosimy w sobie jeszcze jeden genom, który można opisać jako wspólny meta-genom mikroorganizmów, które z nami pokojowo współżyją. Między mikroorganizmami, jak dziś wiemy, dochodzi często do gry w dawanie i otrzymywanie prezentów, w tzw. horyzontalną wymianę genów, w odróżnieniu od dziedziczenia, czyli pionowego przekazywania genomów. W naszych jelitach znajduje się około 1,5 kg bakterii z ponad 1000 gatunków, inne znajdują się w innych naszych narządach, płynach ustrojowych, na powierzchni ciała. Ocenia się, że ludzkie komórki stanowią jedynie 10% liczby komórek ciała człowieka (ludzkich jest mniej więcej 10^{13} na około 10^{14} komórek, składających się na nasze ciało). Substancje wytwarzane przez symbiotyczne mikroorganizmy przewodu pokarmowego mogą przenikać do krwiobiegu. Wśród nich pożyteczne to m.in. niektóre witaminy, antyoksydanty, czynniki zmniejszające ból i czynniki przeciwzapalne. Z kolei szkodliwe bakterie mogą rozregulowywać przemianę materii, wytwarzać toksyny, wpływać na funkcje immunologiczne.

Badaczy zainteresowały bliżej genomy symbiontów, ponieważ wymieniają one substancje (a więc informacje) z komórkami gospodarza, nie szkodząc jego życiu. Można by je nazwać zbiorczym, dodatkowym narządem człowieka z odrębnym, zbiorczym genomem, który w przybliżeniu niesie co najmniej 100 razy więcej genów niż genom ludzki.



Naukowcy sporządzili zatem mapę tego drugiego genomu na podstawie szczegółowej wiedzy o genomach wybranych 178 gatunków bakterii wchodzących w skład flory bakteryjnej człowieka, pochodzących z przewodu pokarmowego, jamy ustnej, przewodów moczowych, oddechowych. Z tych danych wynika, że genomy nawet blisko spokrewnionych mikroorganizmów: różnice sięgają kilkudziesięciu procent, podczas gdy, na przykład, z myszami różni nas tylko 10% genów.

To dopiero początek zbierania danych – najbliższymi celami są: zwiększenie liczby poszczególnych analizowanych genomów bakteryjnych, zbadanie, jak takie dane różnicują się w zależności od geograficznego położenia populacji, a może nawet pochodzenia etnicznego i, oczywiście, u danego człowieka w zależności od jego płci, wieku, stanu fizjologicznego i tak dalej.

Im lepiej poznajemy genomy poszczególnych gatunków bakterii towarzyszących ludziom, tym łatwiej będzie także ocenić wpływ różnorodnych czynników na skład flory bakteryjnej, takich jak dieta czy zażywane leki. Można sobie także wyobrazić, że w przyszłości, wpływając na ten skład, będzie można leczyć różne choroby. Mógłby on być nawet analitycznym znacznikiem zdrowia i choroby.

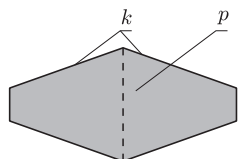
I pomyśleć, że opis pierwszego genomu bakteryjnego był gazetowym „newsem” na pierwszych stronach zaledwie 14 lat temu...

Magdalena FIKUS

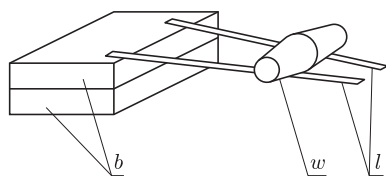
Ruch obrotowy bryły sztywnej, część II

Stanisław BEDNAREK

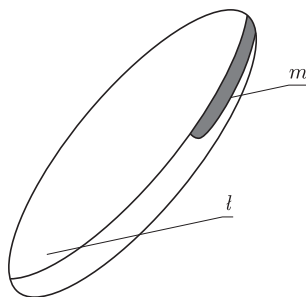
Dzisiaj będziemy kontynuowali doświadczenia dotyczące ruchu obrotowego bryły sztywnej. Do wykonania tych doświadczeń powinniśmy przygotować następujące przedmioty i materiały: plastelinę, dwie cienkie listewki o długości około 70 cm, kilka książek lub klocków, dwa plastikowe, zwężające się kubki do napojów, piasek, klej szybkowiązący, trzy podłużne kawałki miękkiego drewna o rozmiarach $12 \times 3 \times 1,5$ cm, nóż, pilnik do drewna, poxilinę, trochę farby emaliowej, dwa małe gwoźdźdiki, młotek i dwa kawałeczki cienkiej listewki o długości około 1,5 cm.



Rys. 1. Podwójny stożek do doświadczeń z dynamiki bryły sztywnej; k – kubek do napojów, p – piasek.



Rys. 2. Układ do badania ruchu podwójnego stożka; w – podwójny stożek, l – listewka, b – książka lub klocek.



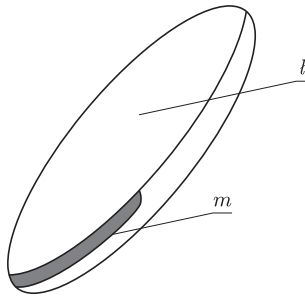
Rys. 3. Bryła sztywna, preferująca prawy kierunek obrotu; l – listewka wystrugana w kształcie łódeczki, m – nakładka z poxiliny.

Proponowane doświadczenia zapoznają nas z niezwykłymi przypadkami ruchu bryły sztywnej. Żeby przeprowadzić pierwsze z nich, skleimy brzegami dwa plastikowe kubki do napojów wypełnione uprzednio piaskiem dla zwiększenia masy (rysunek 1). Otrzymany w ten sposób podwójny stożek ścięty kładziemy na równi pochyłej o małym kącie nachylenia, zrobionej z dwóch listewek opartych o jedną książkę lub klocek (rysunek 2). Listewki ustawimy rozbieżnie ku górze, a największa odległość między nimi powinna być mniejsza od wysokości podwójnego stożka. Kładziemy stożek na listewkach w dolnej części równi, tak żeby nie dotykał stołu. Co zauważamy? Okazuje się, że bryła wtacza się na górę równi. Dlaczego tak się dzieje? W tym przypadku moment składowej ciężaru bryły równoległej do równi skierowany jest w stronę rozbieżności listewek i właśnie w tym kierunku toczy się bryła. Warto przy tym zauważyć, że położenie środka masy podwójnego stożka obniża się w tym ruchu, a jego energia potencjalna ciężkości maleje, ulegając zamianie na energię kinetyczną ruchu złożonego. Toczenie się pod górę jest więc tylko pozorne, a złudzenie pochodzi stąd, że na wyżej położone części równi wtaczają się fragmenty bryły o mniejszej średnicy.

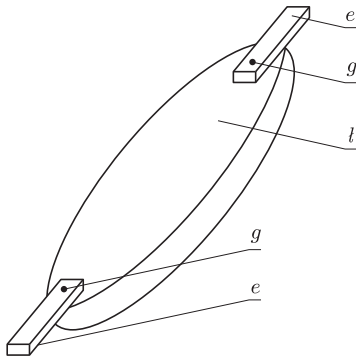
Ostatnią serię doświadczeń możemy wykonać na kilka sposobów. Jeżeli lubimy majsterkowanie, możemy z dwóch kawałków drewna wystrugać nożem i wygładzić pilnikiem dwie identyczne, wydłużone łódeczki o zaokrąglonych kształtach, przedstawionych na rysunku 3. Wymiary łódeczek powinny być zbliżone do początkowych wymiarów kawałków drewna. Wygodnie jest najpierw sporządzić szablon i z jego pomocą narysować ołówkiem kształty na drewnie, a później przystąpić do obróbki. Łódeczki kładziemy po kolei na płaskiej powierzchni wypukłością do dołu i wprawiamy w ruch obrotowy wokół pionowej osi przez pokręcenie palcami, najpierw w jedną stronę, a po zatrzymaniu się łódeczki w przeciwną. Stwierdzamy, że łódeczki w obie strony obracają się tak samo.

Następnie na boczną powierzchnię jednej z łódeczek w pobliżu jej końca nakładamy (zgodnie z rysunkiem 3) niewielką ilość ugniecionej poxiliny. Odczekujemy kilkanaście minut, aż poxilina stwardnieje. Po tym wprawiamy łódeczkę w ruch obrotowy, tak jak poprzednio – najpierw w prawo, a potem w lewo. Zauważamy, że w prawo łódeczka obraca się dość długo, jak wcześniej, aż do zatrzymania. Po zakręceniu w lewo łódeczka szybko przystaje, po czym zaczyna kołysać się względem podłużnej osi. Nieoczekiwanie, bez naszego działania, kołysania te zmieniają się na obrót w prawo, który już bez niespodzianek ulega powolnemu wyhamowaniu. Jak wyjaśnić to niezwykle zachowanie się łódeczki?

Dokładne, ilościowe wytłumaczenie ruchu łódeczki jest trudne, gdyż wymaga rozwiązania układu równań różniczkowych. Dlatego też poprzestaniemy na opisie jakościowym zachodzących tu przemian energii. Asymetryczny rozkład masy łódeczki sprawia, że – wbrew temu, co podpowiadają nam nasze oczy – dwie osie, wokół których możliwe są regularnie powtarzalne oscylacje, nie leżą w płaszczyznach symetrycznych łódeczki, natomiast wokół prostej prostopadłej do płaszczyzny, na której kładziemy łódeczkę, nie jest możliwy jednostałny ruch obrotowy. Oznacza to, że w ogólności ruch łódeczki będzie bardzo złożony, a w szczególności jej obracanie w jedną stronę będzie napędzało oscylacje przód-tył, a w drugą – wahania na boki. Energia tych oscylacji pomniejsza energię ruchu obrotowego w płaszczyźnie stołu, co powoduje widowiskowe odwrócenie kierunku rotacji łódeczki, poprzedzone silnym kołysaniem się na boki.



Rys. 4. Bryła sztywna, preferująca lewy kierunek obrotu; *l* – listewka wystrugana w kształcie łódeczki, *m* – nakładka z poxiliny.



Rys. 5. Przykład wykonania kamienia celtyckiego; *l* – listewka wystrugana w kształcie łódeczki, *e* – kawałek listewki, *g* – gwoździć.

Wykonana przez nas łódeczka nazywana jest kamieniem celtyckim (po angielsku określanym także nazwą *rattleback* lub *celt*). Nazwa pochodzi stąd, że zrobiony z kamienia przedmiot o podobnym kształcie wykopalili archeologowie, którzy badali pozostałości po kulturze Celtów. Długo zastanawiali się, do czego mógł on służyć. Jeden z badaczy zaczął się nim bawić, wprawiając go w ruch obrotowy raz w prawo, a raz w lewo. W ten sposób przypadkowo odkrył niezwykle właściwości tego kamienia. Poprawny opis dynamiki tego przedmiotu został sformułowany przez fizyków zaledwie ćwierć wieku temu. Do dziś dokładnie nie wiadomo, czy Celtowie używali tego kamienia do celów kultowych lub magicznych. Kamień celtycki może być wykonany z dowolnego materiału, ważny jest odpowiedni, asymetryczny rozkład masy. Jeżeli nie lubimy majsterkować, kamień celtycki możemy kupić w niektórych sklepach internetowych albo wykonać własnoręcznie, zginając trzonek niepotrzebnej aluminiowej łyżki lub ucinając trzonek łyżki plastikowej.

Jeżeli jednak sporządziliśmy kamienie celtyckie z drewna, drugiej łódeczki możemy użyć do wykonania kamienia preferującego lewy kierunek obrotów. W tym celu nałożymy na nią niewielką ilość poxiliny w miejscu zaznaczonym na rysunku 4. Trzecią łódeczkę możemy wykorzystać do pogłównego wytłumaczenia przyczyny niezwykłych właściwości kamienia celtyckiego. W tym celu w pobliżu jej końców przybijemy małymi gwoździkami dwa kawałeczki listewki, które posłużą nam do łatwego uzyskania asymetrycznego rozkładu masy (rys. 5). Gwoździków nie należy wbijać do końca, żeby kawałeczki listewki można było obracać. Ustawiając obie listewki równoległe do podłużnej osi symetrii łódeczki, spowodujemy, że w obu kierunkach będzie ona obracała się tak samo. Skręcając natomiast jedną z listewek w bok, spowodujemy, że łódeczka będzie preferowała kierunek obrotów taki, jak kierunek skręcenia. Jeżeli oba kamienie celtyckie z nałożoną poxiliną pomalujemy równomiernie farbą, to miejsca nałożenia poxiliny będą trudne do zauważenia. Otrzymamy dwa identyczne na pierwszy rzut oka przedmioty, które będą się różnić zachowaniem podczas ruchu obrotowego. Możemy je wykorzystać do zademonstrowania zadziwiającej sztuczki, sugerującej nasze magiczne umiejętności. Warto tu dodać, że wiele popisów wykonywanych przez cyrkowców, magików i iluzjonistów polega właśnie na umiejętnym wykorzystaniu praw fizyki.

Wyniki XXVII Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Bystra, 10–13 VI 2010

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych przez Jury (wraz z bibliografią) lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim, publicznym zreferowaniu tego opracowania.

W roku 2010/11 zaproponowane przez Jury tematy to:

grafy Eulera,
kolorowanie wierzchołków wielościanu,
równania diofantyczne,
liczby zespolone w geometrii,
o czym mówi statystyka,
nierówności między średnimi,
liczba *e*,
algorytmy grafowe.

Jury w składzie: prof. dr hab. Maciej Sablik – przewodniczący, dr Marian Podhorodyński – zastępca przewodniczącego, dr Lech Bartłomiejczyk, dr Tomasz Bielaczyc, dr Adrian Brückner, dr Włodzimierz Fechner, dr Żywilla Fechner, dr Erwin Kasperek, mgr Renata Kawa, mgr Tomasz Kochanek, dr Michał Machura, dr hab. Janusz Morawiec, dr Barbara Przebieracz, dr Małgorzata Serwecińska, dr Anna Szczerba-Zubek, **postanowiło przyznać następujące wyróżnienia:**

I miejsce: Mateusz Wróbel z Publicznego LO nr 1 w Opolu za pracę *Nieprawdopodobieństwo – czyli o tym, jak matematyk rzuca igłą;*

II miejsce: Sebastian Lisiewski z VIII LO w Katowicach za pracę *Ku chwale nierówności;*

III miejsca: Piotr Miska z IV LO w Sosnowcu za pracę *O średnich inaczej;*

oraz

Tomasz Pawelec z Zespołu Szkół Ponadgimnazjalnych w Praszcze za pracę *Enigma oraz inne maszyny szyfrujące.*

W głosowaniu publiczności na najlepszą prezentację **nauczyciele nagrodzili**

Marzenę Iskierkę z VIII LO w Katowicach za przedstawienie pracy *Klasyczna kryptologia*

oraz

Piotra Miskę,
a uczniowie

Filipa Kosiora z III LO w Chorzowie za przedstawienie pracy *Słowa, słowa, liczby.*

Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach we współpracy z Uniwersytetem Śląskim; www.spinor.edu.pl

Co robić w piątkowe wieczory?

To dobry moment na odprężenie po tygodniu pracy. Pomysłów może być wiele. Na dość ciekawy wpadł kilkanaście lat temu Andre Geim (rosyjski fizyk z holenderskim obywatelstwem, pracujący obecnie w Wielkiej Brytanii). Zachęcił grupę współpracowników do doświadczalnego sprawdzania szalonych pomysłów. Tylko niektóre przedsięwzięcia okazały się realizowalne. Opublikowanie wyników jednego z takich eksperymentów przyniosło mu w 2000 roku nagrodę... Ig Nobla za demonstrację lewitacji żywej żaby w silnym polu magnetycznym. Żaba doświadczenie przeżyła, unaoczniając jednocześnie diamagnetyzm wody, z której się głównie składała.

Cztery lata później, wraz z młodszym kolegą, Konstantinem Novoselovem, również Rosjaninem, udało mu się uzyskać pojedynczą warstwę grafitu. Konkurenci, którzy uważali, że uzyskanie takiej stabilnej warstwy, chociażby o mikroskopowych (obserwowalnych pod mikroskopem optycznym) rozmiarach, jest niewykonalne, łapali się za głowy, gdy dotarło do nich, w jak prosty sposób taką pojedynczą warstwę, czyli grafen, udało się uzyskać w „piątkowy wieczór” [1]. Teoretycznie wiadomo było dość dużo o tym, czego po grafenie można się spodziewać, ale podawano w wątpliwość jego stabilność, wobec istnienia fulerenów i nanorurek węglowych, czyli takich właśnie warstw, ale tworzących wielościany lub ruloniki zamiast płaskich skrawków. Wiele nieudanych prób wykorzystujących różne wyrafinowane metody skutecznie osłabiło wiarę w możliwość uzyskania grafenu.

Okazało się, że wystarczyło wielokrotne przyklejanie i odrywanie taśmy klejącej (eksfoliacja) od wysepek grafitu zatopionych w emulsji fotograficznej (używanej w fotoligrafii), a następnie jej rozpuszczenie. Skrawki cienkich warstewek grafitu zostały później wychwycone z rozpuszczalnika na płytkę krzemową i oczyszczone, a ich grubość zmierzona za pomocą metod optycznych i mikroskopu skaningowego. Jak widać, doświadczenia tego nie dałoby się wykonać w przeciętnie wyposażonej kuchni, ale w większości instytutów zajmujących się fizyką fazy skondensowanej – jak najbardziej. W dodatku pomysł z eksfoliacją nie był wcale oryginalny, tylko nikomu nie udało się wcześniej go wykorzystać we właściwy sposób.

Początkowo Geim i Novoselov mieli nad konkurentami przewagę i wykonali szereg pionierskich doświadczeń z grafenem. Prace te zostały docenione w tym roku poprzez przyznanie autorom Nagrody Nobla z fizyki za „przełomowe doświadczenia dotyczące dwuwymiarowego materiału – grafenu”.

W wywiadzie, udzielonym redaktorowi naczelnemu portalu nobelprize.org, Geim powiedział, że nie jest typem naukowca pracującego przez lata nad jednym tematem. Wprost przeciwnie, zawsze zastanawia się, co jeszcze można by było zrobić za pomocą dostępnego wyposażenia i z wykorzystaniem własnych kompetencji. Następnie stwierdził, że najważniejsza jest odwaga podjęcia się czegoś, co w dziewięćdziesięciu dziewięciu

przypadkach na sto zakończy się fiaskiem. Pierwsze trzy lata pracy nad grafenem porównał do sytuacji poszukiwaczy złota z powieści Londona, którzy po przebyciu łańcucha gór na Alasce starają się zaznaczyć jak najwięcej miejsc swoimi chorągiewkami.

Novoselov, który jest jednym z najmłodszych laureatów, w analogicznym wywiadzie wypowiedział się podobnie. Pytany o intensywność konkurencji w tej dziedzinie stwierdził, że już planuje zająć się czymś innym niż grafen i ma nawet kilka pomysłów, czym.

Ten „złotonośny teren” rzeczywiście staje się coraz bardziej zatłoczony, ale trudno się temu dziwić. Własności grafenu są naprawdę niesamowite. Jest najlepszym znanym przewodnikiem elektryczności, z nośnikami prądu poruszającymi się z prędkościami relatywistycznymi, oraz najlepszym przewodnikiem ciepła. Jest on najbardziej wytrzymały. W hamaku z grafenu można by było umieścić śpiącego kota. A sam hamak ważyłby tyle, co jeden wąż tego kota. Nie jest to wyłącznie doświadczenie myślowe, bo największa płachta grafenu miała około połowy metra kwadratowego. Jednocześnie grafen jest nieprawdopodobnie lekki (liczba Avogadro to duuuuża liczba), przezroczysty, a jednocześnie nieprzepuszczalny nawet dla helu. W zeszłym roku w grafenie udało się wreszcie wykazać występowanie ułamkowego efektu Halla (który można rozumieć jako przepływ ułamkowych ładunków) i to do rekordowo wysokiej temperatury 20 K (poprzednio efekt ten, związany z dwuwymiarowością badanego systemu, obserwowano w bardzo niskich temperaturach w powierzchniach styku dwóch ciał stałych).

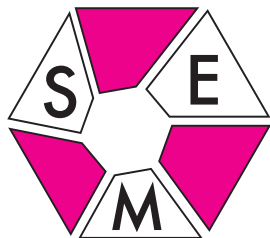
Liczba zastosowań grafenu do badań podstawowych oraz potencjalnych zastosowań praktycznych jest bardzo długa i na pewno nadal niepełna. Materiał ten jest ekstremalnie cienki, przy tym ekstremalnie mocny i rozciągliwy. Jest wspaniałym laboratorium podstaw mechaniki kwantowej i nadzieją elektroniki, materiałoznawstwa, chemii itd. Wykazano już, że z grafenu można zrobić tranzystor. Jeżeli uda się elektronikę przenieść z krzemu w grafen, to będziemy mieli kolejną fazę miniaturyzacji. Grafen może posłużyć do budowy giętkich wyświetlaczy, superlekkich superwytrzymałych materiałów, fotoogni, detektorów zdolnych reagować na pojedyncze cząsteczki i wielu innych urządzeń, o których zarówno mamy, jak i nie mamy jeszcze pojęcia.

Andre Geim jest jedynym laureatem obu nagród: Ig i Nobla. Warto przypomnieć dewizę prześmiewczego wyróżnienia przyznawanego za „nieprawdopodobne badania”, które „najpierw śmieszą, a później zmuszają do myślenia”.

A tak przy okazji: co Ty planujesz na piątek wieczór?

Piotr ZALEWSKI

[1] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S.V. Dubonos, I.V. Grigorieva, A.A. Firsov, *Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films*, *Science* **306** (2004) 666–669, wraz z materiałami dodatkowymi: <http://www.sciencemag.org/cgi/data/306/5696/666/DC1/1>

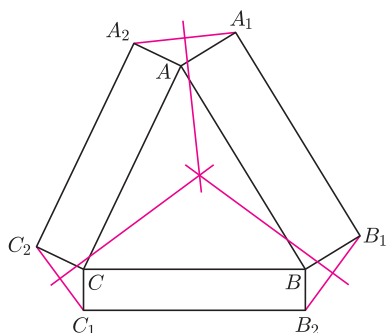


Od początku istnienia Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej jego członkowie aktywnie angażują się w różne projekty, których celem jest rozwijanie zainteresowań naukami ścisłymi wśród młodzieży. Jednym z takich działań był program *Mazowieckie Talenty* prowadzony w latach 2008-2010 przez Mazowieckie Samorządowe Centrum Doskonalenia Nauczycieli, skierowany do uzdolnionej matematycznie młodzieży szkół pozawarszawskich. Ideą tej inicjatywy było wyszukiwanie uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką, następnie wspomaganie ich rozwoju i promowanie osiągnięć.

W ramach współpracy z programem *Mazowieckie Talenty* nauczyciele akademicy, między innymi z Wydziału Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej oraz Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, prowadzili zajęcia popularyzujące matematykę w sześciu ośrodkach województwa mazowieckiego: w Mińsku Mazowieckim, Radomiu, Ciechanowie, Ostrołęce, Siedlcach i Płocku. Wśród wykładowców zaangażowanych w projekt dużą grupę stanowili członkowie Stowarzyszenia.

Najlepsi młodzi uczestnicy projektu zostali objęci opieką *on-line* przez nauczycieli akademickich. Uczniowie ci rozwiązywali zadania i różnego rodzaju problemy matematyczne wysyłane drogą elektroniczną przez opiekunów, korzystając z możliwości zadawania pytań i uzyskiwania wskazówek. Niektórzy z uczestników przygotowywali prezentacje interesujących zagadnień matematycznych, które były następnie przedstawiane podczas spotkań inauguracyjnych kolejnych semestrów programu czy też na Kongresie Młodych Matematyków w Krakowie.

Rozwiązania ciekawych i często nietrywialnych zadań opracowane przez uczestników *Mazowieckich Talentów* były niejednokrotnie bardzo pomysłowe. Oto przykład takiego zadania z pięknym rozwiązaniem zaproponowanym przez jednego z uczestników programu.

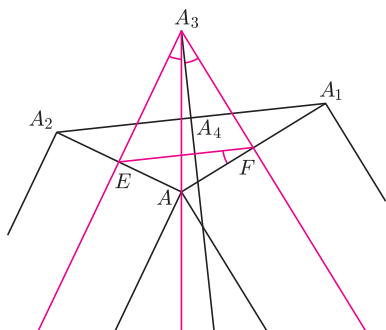


Zadanie. Na bokach trójkąta ABC zbudowano prostokąty ABB_1A_1 , BCC_1B_2 oraz CAA_2C_2 (rys. 1). Wykazać, że symetralne odcinków A_1A_2 , B_1B_2 i C_1C_2 przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie to pochodzi z drugiego etapu konkursu *Bundeswettbewerb Mathematik* z roku 1996. Idea poniższego rozwiązania bazuje na następującym wniosku z trygonometrycznej wersji **Twierdzenia Cevy**.

Fakt. Punkt A_1 leży na boku BC trójkąta ABC , punkt B_1 na AC i punkt C_1 na AB , przy czym żaden z tych punktów nie jest wierzchołkiem tego trójkąta. Prosta k jest obrazem prostej AA_1 w symetrii względem dwusiecznej kąta A , prosta l jest obrazem prostej BB_1 w symetrii względem dwusiecznej kąta B oraz prosta m jest obrazem prostej CC_1 względem dwusiecznej kąta C .

Proste AA_1 , BB_1 i CC_1 przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy proste k , l , m przecinają się w jednym punkcie.



Rozwiązanie zadania. Niech A_3 będzie punktem przecięcia symetralnych odcinków AA_1 i AA_2 . Analogicznie definiujemy punkty B_3 i C_3 . Zauważmy, że trójkąty ABC i $A_3B_3C_3$ są jednokładne, co oznacza, że proste AA_3 , BB_3 i CC_3 przecinają się w jednym punkcie. Ponadto punkty A_3 , B_3 i C_3 leżą odpowiednio na symetralnych odcinków A_1A_2 , B_1B_2 i C_1C_2 . Oznaczmy przez E środek odcinka AA_2 , przez F środek odcinka AA_1 oraz przez A_4 środek odcinka A_1A_2 (rys. 2). Pokażemy, że symetralna odcinka A_1A_2 jest obrazem prostej AA_3 w symetrii względem dwusiecznej kąta A_3 . W tym celu wystarczy wykazać, że $\sphericalangle EA_3A = \sphericalangle FA_3A_4$. Widzimy, że $\sphericalangle FA_3A_4 = \sphericalangle EFA$ oraz $\sphericalangle EFA = \sphericalangle EA_3A$, gdyż na czworokącie $AF A_3 E$ można opisać okrąg. Analogicznie pokazujemy, że symetralna odcinka B_1B_2 jest obrazem prostej BB_3 w symetrii względem dwusiecznej kąta B_3 oraz że symetralna odcinka C_1C_2 jest obrazem prostej CC_3 w symetrii względem dwusiecznej kąta B_3 . Stosując **Fakt**, kończymy rozwiązanie tego zadania.

Krzysztof CHEŁMIŃSKI

Informatyczny kącik olimpijski (36): Zagadka

W tym kąciku przyjrzymy się zadaniu *Zagadka*, które pojawiło się na tegorocznych Potyczkach Algorytmicznych.

Rozważamy pewne państwo podzielone na k województw i zawierające n miast. W tym państwie jest m dróg, z których każda łączy jakąś parę miast. Naszym zadaniem jest tak wybrać stolice województw, aby każde województwo miało dokładnie jedną stolicę (będącą jednym z miast tegoż województwa), a każda z dróg miała jakąś stolicę na co najmniej jednym swym końcu. Wiadomo, że każda droga łączy dwa różne miasta, każde województwo zawiera co najmniej jedno miasto, a każde miasto należy do dokładnie jednego województwa.

Przede wszystkim zauważmy, że powyższe wymagania ograniczające możliwości wyboru stolic możemy zamienić na zestaw zdań logicznych. Dla każdego miasta i wprowadźmy zmienną logiczną S_i oznaczającą, czy dane miasto jest stolicą swojego województwa. Wówczas drogę łączącą miasta a i b możemy rozumieć jako alternatywę $S_a \vee S_b$. Województwo interpretujemy natomiast jako zbiór alternatyw postaci $\neg S_a \vee \neg S_b$ dla każdej pary różnych miast a, b z tego województwa.



W ten sposób sprowadziliśmy zadanie do wybrania dla każdego miasta i wartości zmiennej logicznej S_i , tak aby zachodziły wszystkie wymienione wyżej alternatywy. (Jeżeli znajdziemy rozwiązanie, w którym pewne województwo nie ma żadnej stolicy, to w takim przypadku możemy dowolne jego miasto uznać za jego stolicę i nie zepsuje to znalezionego rozwiązania.) Jest to klasyczny problem 2-SAT, dla którego znany jest liniowy (dokładniej: liniowo zależny od liczby zmiennych i liczby alternatyw) algorytm. W przypadku naszego zadania oznacza to rozwiązanie w czasie $O(n^2 + m)$. Nie jest to jeszcze wynik satysfakcjonujący. Aby go poprawić, zagłębimy się w działanie algorytmu rozwiązującego problem 2-SAT, po czym spróbujemy go przyspieszyć dla tego konkretnego zadania.

Zauważmy, że każdą alternatywę $x \vee y$ możemy zamienić na dwie implikacje: $\neg x \rightarrow y$ oraz $\neg y \rightarrow x$. Zbudujemy zatem graf, którego wierzchołkami są S_i oraz $\neg S_i$ dla wszystkich i , a krawędziami – implikacje powstałe ze wszystkich naszych alternatyw. Chcemy dla każdego miasta i wybrać dokładnie jeden z dwóch odpowiadających mu wierzchołków i uznać za prawdziwy, pamiętając przy tym o implikacjach. Nietrudno spostrzec, że w każdej silnie spójnej składowej takiego grafu wszystkie wierzchołki mają taką samą wartość logiczną. Jeśli utożsamimy wierzchołki należące do tych samych silnie spójnych składowych, otrzymujemy tzw. graf silnie spójnych składowych, w którym nie ma już cykli. Ten graf sortujemy topologicznie. Rozpatrujemy kolejno te silnie spójne składowe, z których wychodzą krawędzie tylko do już rozpatrzonych. Zauważmy, że jeśli x i y są w tej samej silnie spójnej składowej, to $\neg x$ i $\neg y$ także, gdyż jeśli z x można dojść krawędziami do y , to z $\neg y$ można analogicznie dojść do $\neg x$, podobnie jeśli można dojść z y do x , to można z $\neg x$ do $\neg y$ (wynika to ze sposobu konstrukcji krawędzi z alternatyw). W takim razie, podczas rozpatrywania kolejnych składowych, jeśli napotykamy taką, której komplementarna nie została jeszcze rozpatrzona, ustalamy, że wszystkie wierzchołki tej składowej będą prawdziwe, a komplementarnej – fałszywe. W ten sposób dla każdej pary literałów $x, \neg x$

zdecydujemy, który z nich jest prawdziwy, a wszystkie implikacje, a więc także alternatywy, będą spełnione (dlaczego?). Jedynym przypadkiem, gdy ta metoda nie działa, jest sytuacja, gdy dla pewnego x , x i $\neg x$ leżą w jednej silnie spójnej składowej. W takim przypadku w ogóle nie istnieje żadne rozwiązanie, gdyż implikacje są sprzeczne.

Widzimy, że główny koszt czasowy algorytmu jest generowany przez znajdowanie silnie spójnych składowych i grafu tychże oraz przez sortowanie topologiczne tego grafu. Wszystkie te operacje w standardowy sposób wykonujemy za pomocą dwóch przeszukiwań w głąb (DFS). Koszt jednego takiego przeszukiwania to $O(V + E)$, gdzie V to liczba wierzchołków, a E – liczba krawędzi grafu. V jest w naszym przypadku równe $2n$, a więc akceptowalne. Problemem jest $E = O(n^2 + m)$. Krawędzie odpowiadające niewygodnemu składnikowi $O(n^2)$ są jednak rozmieszczone regularnie wewnątrz poszczególnych województw. Możemy zatem pamiętać dla każdego wierzchołka jedynie jego „normalnych” sąsiadów, natomiast krawędzie wynikające z przynależności do województwa wyznaczać na bieżąco, w razie potrzeby. Będąc w dowolnym wierzchołku, możemy pójść w przeszukiwaniu grafu dowolną krawędzią z jego listy krawędzi lub też krawędzią z listy krawędzi województwa. Co do tych ostatnich, to jeśli zużywamy krawędź „województzką” z S_a do $\neg S_b$, możemy spokojnie założyć, że krawędzie „wojewódzkie” z S_c do $\neg S_b$ dla wszystkich c są już niepotrzebne, i o nich zapomnieć. Jest tak, gdyż wierzchołek $\neg S_b$ odwiedzamy raz, idąc z S_a , a wszystkie pozostałe krawędzie do niego prowadzące już nam nie posłużą w przeszukiwaniu. Jeśli rozmiar województwa to w , to zamiast $O(w^2)$ krawędzi dla tego województwa pamiętamy tylko $O(w)$ końców tych krawędzi i każdy koniec wykorzystujemy dokładnie raz, przy pierwszej nadarzącej się okazji.

W ten sposób wykonujemy przeszukiwanie DFS w rozważanym grafie w czasie $O(n + m)$. Całe rozwiązanie ma złożoność czasową i pamięciową $O(n + m + k)$.

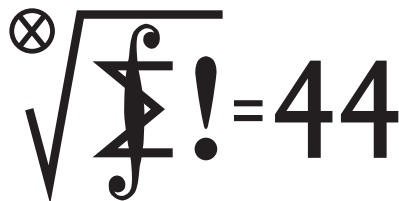
Tomasz KULCZYŃSKI

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>



Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 599 ($WT = 1,09$) i 600 ($WT = 2,83$) z numeru 4/2010

Marek Spychała	Wolczyn	45,14
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	42,35
Piotr Kumor	Olsztyn	40,19
Janusz Olszewski	Warszawa	38,19
Michał Kieza	Warszawa	36,46
Bartłomiej Dyda	Wrocław	35,77

Po rocznym przestoju – wreszcie nowa postać w matematycznym Klubie 44 (nr 112): **Marek Spychała**. Witamy!



Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 498 ($WT = 1,77$) i 499 ($WT = 1,86$) z numeru 5/2010

Michał Koźlik	Gliwice	44,97
Jacek Piotrowski	Rzeszów	35,92
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	30,57
Jerzy Witkowski	Radlin	30,54
Dariusz Wilk	Rzeszów	26,57
Andrzej Idzik	Bolesławiec	24,35
Tomasz Wietecha	Tarnów	23,18

Numerem Pana Koźlika w Klubie 44 F będzie 2³.

Zadania z matematyki nr 611, 612

Redaguje Marcin E. KUCZMA

611. Diagram przedstawia początkowe wiersze nieskończonej tabeli trójkątnej.

		0		
		1	1	
		2	4	2
	3	7	7	3
4	10	12	10	4
.....

Skrajnymi elementami kolejnych wierszy są kolejne liczby naturalne. Ponadto obowiązuje reguła: jeśli liczby b, c są sąsiednimi elementami dowolnego wiersza, nad nimi znajduje się liczba a , pod nimi zaś liczba d , to $a + d = b + c + 2$.

Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $k \geq 2$ istnieje nieskończenie wiele liczb, z których każda występuje w tej tabeli dokładnie k razy.

612. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dana wzorem

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 ax$$

(dla pewnej stałej rzeczywistej a). Dowieść, że jeżeli f jest funkcją okresową, to a jest liczbą wymierną.

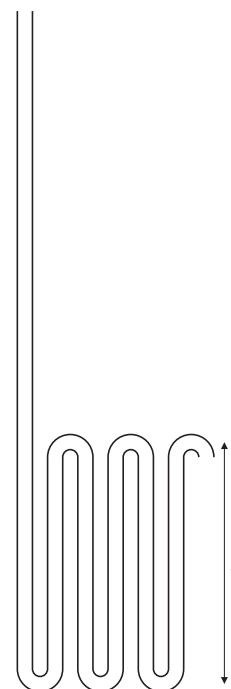
Zadanie 612 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Zadania z fizyki nr 508, 509

Redaguje Jerzy B. BROJAN

508. Rurka składa się z pięciu pionowych segmentów wysokości $h = 1$ m i jednego segmentu dłuższego (rysunek). Jeśli początkowo rurka nie zawierała wody, to do jakiej wysokości należy jej nalać do dłuższego segmentu, żeby zaczęła wyciekać drugim końcem? Średnica rurki jest znacznie mniejsza od h , ale na tyle duża, że przepływ wody i przepływ powietrza mogą w niej zachodzić niezależnie. Temperatura powietrza w rurce się nie zmienia, a ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_0 = 10^5$ Pa.

509. W zjawisku Comptona obserwuje się promieniowanie rentgenowskie rozproszone na swobodnych elektronach, przy czym zwykle zakłada się, że początkowo elektrony były nieruchome. Przyjmijmy, że rozproszenie następuje na elektronach w atomach wodoru, będących początkowo w stanie podstawowym. Ile wynosi poszerzenie zakresu długości fali promieniowania rozproszonego wstecz ($\theta = 180^\circ$), wynikające z ruchu elektronów? Wystarczy wynik przybliżony oparty na modelu Bohra, dla długości fali promieniowania padającego równej $\lambda_0 = 0,1$ nm.



Patrz w niebo: Jeszcze o wodzie na Marsie

Właściwie chyba nikt już nie ma wątpliwości, że woda na Marsie jest, ponieważ od lat widzi się ślady jej tam bytności, a nie ma jedynie pełnej zgody co do tego, gdzie ona teraz się znajduje. Zadziwiające jest przy tym, ile można dowiedzieć się o tej wodzie na podstawie zdalnych obserwacji za pomocą bezałogowych urządzeń. Szczególnie zasłużyły się tu dwa bliźniacze łaziki: Opportunity i Spirit, znajdując w pobliżu krateru Endurance przedziwne formacje geologiczne. Na przykład, na łagodnie pochyłonych zboczach krateru widzimy liczne płyty (niektóre w przybliżeniu prostokątne), a struktura i barwa tworzących je warstw (widocznych na krawędziach) świadczą wprawdzie o różnym składzie chemicznym, ale o wspólnym powstawaniu w wodzie – tak twierdzą eksperci. Niestety, nikt nie dysponuje jeszcze pomiarem absolutnego wieku tych płyt, przez co wszelkie jego oceny mogą być, jak dotąd, jedynie spekulacją. W innym miejscu, przeciwnie, ostre skały sterczą pionowymi rzędami, tworząc jakby odporne na erozję brzegi dla płynącej kiedyś między nimi rzeki.

Obserwacje spektroskopowe wykazały jeszcze gdzieś indziej (w kraterze Gusiewa) obecność hematytu, minerału bogatego w żelazo. Wiadomo, że na Ziemi bryłki hematytu często spotyka się w rzekach, a co do hematytu marsyjskiego, to nie wiadomo, jak te bryłki powstały, jednak ich wygląd z bliska wykazuje wyraźne ślady erozji wodnej. Może w przeszłości krater Gusiewa był jeziorem?

Zwróćmy uwagę, że pierwsze argumenty za obecnością wody na Marsie pojawiły się, gdy nad Marsem zaczęły krążyć sondy badawcze. Wtedy na powierzchni planety zarejestrowano wielkie obiekty podobne do ziemskich rozlewisk, wyschniętych koryt rzecznych, warstw osadów naniesionych przez płynącą wodę itp. Łaziki, które pojawiły się na Marsie, mają, oczywiście, możliwość obserwacji mniejszych obszarów terenu, za to o wiele bardziej szczegółowo, są bowiem tam „na miejscu”. Jeszcze bardziej szczegółowo (bo „elastycznie”) będzie mógł badać grunt Marsa człowiek, jeżeli tylko dostanie się do marsyjskich zasobów wody. Bez tego niewiele będzie w stanie tam zdziałać. Dlatego wszelkie informacje o rozkładzie wody w skorupie Marsa są ciągle cenne.

Tomasz KWAST

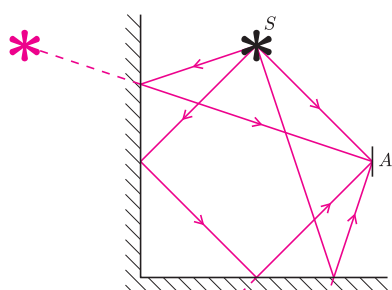


Rozwiązanie zadania F 777.

Wkład w oświetlenie ekranu wnosi samo źródło światła i jego trzy obrazy pozorne:

$$E = J \left(\frac{\cos \alpha_1}{l_1^2} + \frac{\cos \alpha_2}{l_2^2} + \frac{\cos \alpha_3}{l_3^2} + \frac{\cos \alpha_4}{l_4^2} \right),$$

gdzie l_1, l_2, l_3, l_4 to odległości źródła światła S i jego obrazów do punktu A ekranu, a wartości kątów padania $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ wynikają z konstrukcji obrazów.



Zatem

$$E = \frac{J}{l^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{10\sqrt{10}} + \frac{1}{10\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{2}}{36} \right) = \frac{J}{l^2} \frac{25\sqrt{5} + 18}{45\sqrt{10}}.$$

Grudzień

W grudniowe wieczory widzimy w całej okazałości Pegaza z Andromedą, dwa gwiazdozbiory powiązane zarówno w greckiej mitologii, jak i na niebie, i to tak ściśle, że jedna z gwiazd Kwadratu Pegaza jest formalnie alfą Andromedy. Droga Mleczna wieczorem ciągnie się od wschodu do zachodu, a w jej połowie widzimy Kasjopeję. Nie wypada oglądać grudniowego nieba, nie spojrzawszy na najdalszy obiekt widoczny nieuzbrojonym okiem, galaktykę M31 w Andromedzie.

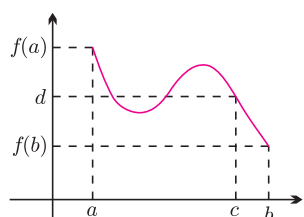
Prawdę mówiąc, przez lornetkę nie zobaczymy w M31 nic okazałego, a jedynie zobaczymy ją wyraźniej – tak jest z galaktykami. Do oglądania ich budowy, nieraz bardzo wymyślnej, potrzebny jest astrograf. Za to w Drodze Mlecznej można zawsze dostrzec przez lornetkę dużo obecnych w niej skupisk gwiazd, tj. gromad otwartych. Nie przeszkadza to, że poza Drogą Mleczną, na wschodzie w Byku, można już obserwować okazałą gromadę Hiad.

Merkury 1 XII znajdzie się najdalej od Słońca i można próbować zobaczyć go zaraz po zachodzie Słońca. Wenus widoczna przed wschodem Słońca (w Wadze) 4 XII osiąga największą jasność. Mars jest w Strzelcu, czyli za blisko Słońca i go nie widać. Jowisz jest w Rybach i widać go w pierwszej połowie nocy, a Saturn jest w Pannie i wschodzi dopiero po północy. Nów Księżyca wypada 5 XII, a pełnia 21 XII – wtedy nastąpi całkowite zaćmienie Księżyca, ale maksymalna faza będzie już za dnia. Z przewidywalnych rojów meteorów można oczekiwać dwóch dość obfitych: Geminidów około 12 XII i Ursydów około 22 XII. Wreszcie 22 XII nastąpi przesilenie zimowe, czyli zacznie się astronomiczna zima; oby nie tak ostra jak rok temu. Szczęśliwego Nowego Roku!

T. K.

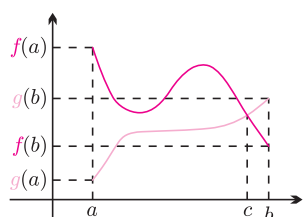


Nie definiujemy formalnie ciągłości i nie uzasadniamy jej dla rozważanych funkcji, pozostajemy przy intuicjach.



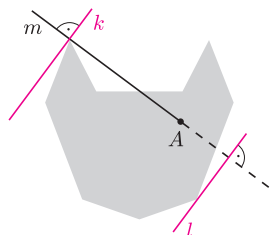
Rys. 1.

Różnica funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

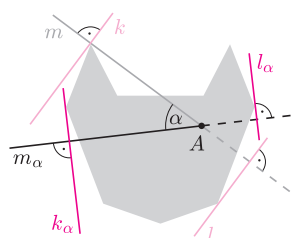


Rys. 2. Wykresy funkcji ciągłych f i g o takich końcach muszą się przeciąć.

f przyjmuje tylko wartości całkowite, więc nie jest funkcją ciągłą!



Rys. 3. Jeśli $Ak = Al$, to zadanie jest rozwiązane.



Rys. 4

Funkcja f , określona na pewnym przedziale i przyjmująca wartości rzeczywiste, jest *ciągła*, jeśli jej wykres można narysować bez odrywania ołówka od kartki.

Własność Darboux orzeka, że jeśli wartości funkcji ciągłej na końcach pewnego przedziału są różne, to funkcja ta musi przyjmować w rozważanym przedziale wszystkie wartości pośrednie. Ściślej, jeśli dla funkcji ciągłej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi, na przykład, $f(a) > f(b)$ (rys. 1), to dla dowolnej liczby rzeczywistej d , takiej że $f(a) \geq d \geq f(b)$, istnieje taki argument $c \in [a, b]$, że $f(c) = d$.

Zobaczymy kilka zastosowań własności Darboux w problemach geometrycznych.

1. Dane są funkcje ciągłe $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, przy czym $f(a) > g(a)$ oraz $f(b) < g(b)$. Uzasadnij, że w przedziale $[a, b]$ istnieje taki punkt c , że $f(c) = g(c)$ (rys. 2).
2. Czy dla każdego n istnieje ostrosłup prawidłowy n -kątny o polu P podstawy równym polu P' ściany bocznej?
3. W oazach na pustyni (płaszczyźnie) jest tysiąc studni (punktów). Czy istnieje taka prosta, że 500 studni jest po jednej jej stronie, a pozostałe po drugiej?
4. Wewnątrz wielokąta znajduje się punkt A . Wykaż, że można znaleźć dwie proste równoległe, styczne do wielokąta (tzn. mające punkty wspólne z brzegiem wielokąta, ale nie z jego wnętrzem), które są jednakowo odległe od punktu A .

Rozwiązania

R1. Zdefiniujemy funkcję $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $h = f - g$. Wtedy $h(a) > 0 > h(b)$, więc z własności Darboux istnieje takie $c \in [a, b]$, że $h(c) = 0$, czyli $f(c) = g(c)$. \square

R2. Tak. Dla ustalonej podstawy rozważmy ostrosłup o tak małej wysokości h_1 , by ściany boczne niemalże leżały na podstawie. Wtedy $P' \simeq \frac{P}{n} < P$. Gdy rośnie wysokość h ostrosłupa, rosną też wysokości ścian bocznych, a co za tym idzie – ich pola, pole P' jest wtedy ciągłą funkcją zmiennej h . Dla odpowiednio dużej wysokości h_2 mamy $P' > P$, więc z własności Darboux dla pewnej wysokości ostrosłupa pomiędzy h_1 a h_2 zachodzi $P' = P$. \square

R3. Tak. Rozważmy wszystkie proste przechodzące przez co najmniej dwie studnie. Weźmy prostą m , która nie jest równoległa do żadnej z nich i wszystkie studnie są po jednej jej stronie (jest nieskończenie wiele takich m). Przesuwajmy m równoległe, niech m_x oznacza jej położenie po przesunięciu o x . Istnieje tak duże u , że wszystkie studnie są pomiędzy równoległymi prostymi m i m_u .

Niech $f(x)$ oznacza liczbę studni po ustalonej stronie prostej m_x , tak by $f(0) = 0$ i $f(u) = 1000$. Na żadnej prostej m_x nie leży więcej niż jedna studnia, bo tak wybrano kierunek m . Zatem wraz ze zmianą x od 0 do u prosta m_x „przekracza” studnie pojedynczo, czyli $f(x)$ przyjmuje kolejno wszystkie wartości od 0 do 1000. Istnieje więc takie c , że $f(c) = 500$ i na prostej m_c nie leży żadna studnia. \square

R4. Wybierzmy pewną półprostą m o początku w A i poprowadźmy dwie prostopadłe do niej styczne do danego wielokąta, k (przecinającą m) oraz l (rys. 3). Niech As oznacza odległość punktu A od prostej s . Załóżmy, że $Ak > Al$.

Obracajmy półprostą m i dla każdego jej położenia m_α (po obrocie o kąt α) rozważmy parę odpowiadających jej stycznych do wielokąta, k_α i l_α (rys. 4). Funkcje Ak_α i Al_α zmiennej α są ciągłe, $k_{180^\circ} = l$, $l_{180^\circ} = k$ i z założenia $Ak_{180^\circ} < Al_{180^\circ}$. Skoro $Ak > Al$ oraz $Ak_{180^\circ} < Al_{180^\circ}$, to z zadania 1 istnieje taki kąt $\varphi \in [0^\circ, 180^\circ]$, dla którego $Ak_\varphi = Al_\varphi$, co kończy dowód. \square

Zadania domowe

5. Czy dwie krawędzie boczne ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego mogą być prostopadłe?
6. Udowodnij, że dla dowolnej figury ograniczonej o polu 1 istnieje nieskończenie wiele prostych, które dzielą ją na dwie części o równych polach.
7. Wykaż, że dla dowolnego wielokąta istnieją cztery styczne, tworzące kwadrat.

Więcej o własności Darboux można przeczytać w artykule Witolda Bednarka w *Delcie* 10/2009.