






SPIS TREŚCI NUMERU 10 (437)

Równania na słowach <i>Wojciech Plandowski</i>	str. 1
Egzamin ustny, kule i prawdopodobieństwo <i>Tomasz Tkocz</i>	str. 4
Funkcje odwrotne do siebie <i>Marek Kordos</i>	str. 5
Detektory fal grawitacyjnych <i>Izabela Kowalska</i>	str. 6
Jak otrzymać chaos? <i>Tomasz Malolepszy</i>	str. 8
O wieżach, permanencji i parzystości <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.11
 Zadania	str.11
Jak wyznaczyć liczbę π za pomocą zderzeń?  <i>Marcin Kotowski, Michał Kotowski</i>	str.12
Amatorskie pomiary meteorologiczne: prosty detektor wylądowań atmosferycznych <i>Krzysztof Markowicz</i>	str.14
O książkach	str.16
Informatyczny kącik olimpijski (35): Cukierki <i>Tomasz Kulczyński</i>	str.17
Konchoidograf na bis <i>Wojciech Gac</i>	str.18
 W poszukiwaniu przodka <i>Magdalena Fikus</i>	str.19
Starocie	str.20
 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.21
Klub 44	str.22
Patrz w niebo: Wymieniamy się gwiazdami	str.24
Październik	str.24
 O robaku i elipsach <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okladki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 22-639-73-67)

internet: www.amos.waw.pl e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2010 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2010 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl infolinia 804-200-600

Cena prenumeraty w 2010 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:
Lanie wody (niegroźne)

Równania na słowach

Wojciech PLANDOWSKI*

Aby mówić o równaniach na słowach, trzeba zacząć od definicji słowa. W języku potocznym słowem jest ciąg liter, któremu przypisane jest pewne znaczenie. Słowem jest więc „pociąg”, „wieża”, „samochód”. W matematyce słowem określa się *dowolny* ciąg liter, np. „abaab”. Równaniem na słowach nazywamy równanie, w którym po obu stronach występują słowa składające się z liter. Litery dzielą się na *stałe* i *niewiadome*. My będziemy oznaczać niewiadome wielkimi literami, stałe zaś małymi literami. Równaniem na słowach jest, na przykład, $XabY = YbaX$, w którym niewiadomymi są X i Y , stałymi zaś a i b . *Rozwiązaniem* równania jest takie podstawienie słów za niewiadome, aby po wstawieniu ich do równania po obu stronach otrzymać to samo słowo. Rozwiązaniem równania $XabY = YbaX$ jest, na przykład, $X = bab$, $Y = babab$, bo wtedy $XabY = bababbab = YbaX$.

W tym artykule powiemy, jak rozwiązywać najprostsze nietrywialne równania na słowach. Okazuje się, że nie jest to zadanie proste i wymaga udowodnienia kilku lematów dotyczących własności słów. Równania najprostsze to, jak można się spodziewać, równania z jedną niewiadomą. Do tej pory jednak nie wszystko wiadomo o takich równaniach. Na przykład nie wiadomo, ile rozwiązań może mieć takie równanie. Są przykłady równań mających 0, 1, 2 lub nieskończenie wiele rozwiązań. Nie wiadomo, czy równanie takie może mieć dokładnie trzy rozwiązania. Musimy więc jeszcze bardziej uprościć zadanie: ograniczymy liczbę wystąpień niewiadomej w równaniu.

Jeśli niewiadoma występuje dokładnie raz, to sprawa jest prosta. Wtedy równanie jest postaci $uXv = w$, przy czym u, v, w to słowa niezawierające niewiadomej. Równanie takie może mieć zero rozwiązań lub jedno rozwiązanie. Równanie $aXa = a$ ma zero rozwiązań, ponieważ bez względu na to, co podstawimy pod X , po lewej stronie będzie słowo dłuższe niż po prawej. Równanie $X = a$ ma jedno rozwiązanie. Równanie $uXv = w$ nie może mieć więcej niż jedno rozwiązanie, bo jeśli ma jakiegokolwiek, to w musi się zaczynać od u i kończyć na v , a zatem $w = uxv$ dla pewnego x . Wtedy $X = x$ jest jedynym rozwiązaniem.

Przyjrzyjmy się teraz równaniom z dwoma wystąpieniami niewiadomej X . Są one albo postaci $uXvXw = z$, albo $uXv = u'Xv'$, gdzie u, v, w, z, u', v' są słowami niezawierającymi niewiadomej. Rozważmy najpierw pierwsze z równań. Aby miało ono rozwiązanie, z musi się zaczynać od u i kończyć na w . Wtedy $z = uz'w$, a więc $XvX = z'$. Przypuśćmy, że $X = x$ jest rozwiązaniem tego równania. Wtedy $xvx = z'$. Długość słowa po lewej stronie musi być taka sama jak długość słowa po prawej stronie. Jeśli długość słowa u oznaczmy przez $|u|$, to $2 \cdot |x| + |v| = |xvx| = |z'|$. Stąd $|x| = (|z'| - |v|)/2$. Długość rozwiązania x jest więc jednoznacznie wyznaczona przez długości z' i v . Ale z' musi się zaczynać od x . Jest tylko jedno słowo określonej długości, które zaczyna ustalone słowo, np. słowem długości 2 zaczynającym słowo $abaab$ jest ab . Stąd jest tylko jeden kandydat na rozwiązanie. Albo ten kandydat jest rozwiązaniem, albo nie. Stąd równanie $uXvXw = z$ ma albo zero rozwiązań, albo jedno rozwiązanie.

Rozważmy teraz drugie równanie, tj. $uXv = u'Xv'$. Załóżmy najpierw, że $u = u'$. Wtedy albo $v = v'$ i każde słowo jest rozwiązaniem równania, albo $v \neq v'$ i wtedy równanie nie ma rozwiązań. Załóżmy teraz, że $u \neq u'$. Wtedy, jeśli równanie ma rozwiązanie, to albo u' jest początkiem u , albo u jest początkiem u' . Podobnie albo v' jest końcem v , albo v jest końcem v' . Usuając wspólny początek i koniec obu stron równania, otrzymamy albo równanie $zXy = X$, albo równanie $zX = Xy$. Analizując długości lewej i prawej strony pierwszego równania, dojdziemy do wniosku, że nie może mieć ono rozwiązań.



*Instytut Informatyki,
Uniwersytet Warszawski

Pozostaje do rozwiązania równanie $zX = XY$. I tu się zaczyna prawdziwa matematyka: definicje, lematy, twierdzenia. Najpierw zdefiniujemy *słowa pierwotne*. Są to słowa, które nie są postaci $uu \dots u$, przy czym u powtarza się co najmniej dwa razy. Słowem pierwotnym jest więc *ababa*, ale nie *abab*.



Przez u^k , dla $k \geq 1$, będziemy rozumieli słowo $uu \dots u$, przy czym u powtarza się dokładnie k razy. Przez u^0 rozumiemy specjalne słowo – słowo puste (będziemy oznaczać je 1), które składa się z zerowej liczby liter. Zauważmy, że $(u^k)^l = u^{kl}$ oraz $u^k u^l = u^{k+l}$, dla $k, l \geq 0$.

Lemat 1. Zbiorem rozwiązań równania $XY = YX$ jest $\{X = u^k, Y = u^l$ dla $k, l \geq 0\}$.

Dowód. Niech $X = x, Y = y$ będzie rozwiązaniem równania. Jeśli $|x| = 0$, to $x = 1$, a więc $X = y^0$ i $Y = y^1$. Podobnie rozważamy przypadek $|y| = 0$.

Załóżmy teraz, że x i y są niepustymi słowami. Stosujemy indukcję względem $|x| + |y|$. Jeśli $|x| + |y| = 2$, to $|x| = |y| = 1$. Mamy $xy = yx$, a zatem x jest początkiem y lub odwrotnie. Skoro x i y są tej samej długości, więc $x = y$. Stąd $X = x^1, Y = x^1$.

Załóżmy wreszcie, że $|x| + |y| > 2$. Wtedy albo $x = y$, albo x jest początkiem y , albo y jest początkiem x . W pierwszym przypadku nie ma czego dowodzić. Trzeci przypadek dowodzi się symetrycznie do drugiego. Pozostaje drugi. Mamy $y = xy'$. Stąd $xyy' = xy = yx = xy'x$. Skracając początkowe x po obu stronach równania, mamy $xy' = y'x$. Ponieważ x i y' są niepustymi słowami, więc $|x| + |y'| < |x| + |y|$. Można więc zastosować hipotezę indukcyjną do równania $xy' = y'x$. Mamy $y' = u^k$ i $x = u^l$. Wtedy $y = xy' = u^l u^k = u^{l+k}$. To kończy dowód. \triangle

Lemat 2. Każde niepuste słowo w można jednoznacznie przedstawić jako u^k dla pewnego pierwotnego słowa u i $k \geq 1$.

Dowód. Najpierw udowodnimy, że w można przedstawić w postaci u^k , gdzie u jest słowem pierwotnym i $k \geq 1$. Jeśli w jest pierwotne, to $u = w$ i $k = 1$. Jeśli nie jest pierwotne, to dowód jest indukcyjny względem $|w|$. Wtedy w jest postaci v^k , przy czym $k \geq 2$, a więc $|v| < |w|$. Zgodnie z hipotezą indukcyjną v da się przedstawić w postaci u^l dla pewnego słowa pierwotnego u i $l \geq 1$. A zatem $w = (u^l)^k = u^{kl}$, gdzie u jest słowem pierwotnym i $kl \geq 2$.

Przypuśćmy teraz, że w da się przedstawić na dwa sposoby w postaci u^k i v^l , gdzie u i v są pierwotne. Gdyby było $k = 1$ lub $l = 1$, to w byłoby słowem pierwotnym, a więc musiałoby być $k = l = 1$ i w konsekwencji $u = v$. A zatem $k, l \geq 2$. Mamy $w = u^k = v^l$ i $k, l \geq 2$. Stąd $|w| = |u^k| = |v^l| \geq \max\{2 \cdot |v|, 2 \cdot |u|\} \geq |u| + |v|$. A zatem $|u| \leq (l-1) \cdot |v|$ oraz $|v| \leq (k-1) \cdot |u|$. Skoro u jest początkiem v^l , więc u jest na tyle krótkie, że jest początkiem v^{l-1} . Podobnie v jest początkiem u^{k-1} . Stąd uv jest początkiem $uu^{k-1} = w$ i vu jest początkiem $vv^{l-1} = w$. Ponieważ uv i vu są tej samej długości, więc $uv = vu$. Z Lematu 1 mamy $u = p^i$ i $v = p^j$. Ponieważ u i v są pierwotne, więc $i = j = 1$ i w konsekwencji $u = v$ i $k = l$. \triangle

Niech x będzie niepustym słowem. Przez $c(x)$ oznaczamy słowo powstałe z x przez przestawienie pierwszej litery x na koniec. Na przykład, $c(aba) = baa$, $c(baa) = aab$. Zauważmy, że jeśli $i < |x|$, to i -krotne zastosowanie funkcji c do słowa x polega na przestawieniu pierwszych i liter x na jego koniec.

Słowo y nazwiemy *obrotem cyklicznym* słowa x , jeśli y można otrzymać z x poprzez zero-, jedno- lub więcej-krotne zastosowanie funkcji c do x . Jeśli y jest obrotem cyklicznym x , to y powstaje z x przez przestawienie jakiegoś początku słowa x na jego koniec, a zatem istnieją takie słowa p i q , że $y = pq$ i $x = qp$ (przestawiamy q). Z drugiej strony, jeśli istnieją takie słowa p i q , że $y = pq$ i $x = qp$, to y jest obrotem cyklicznym słowa x , bo powstało przez przestawienie q z początku x na jego koniec. Zachodzi zatem następujący fakt.

Obserwacja. Słowo y jest obrotem cyklicznym słowa x wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie słowa p i q , że $y = pq$ i $x = qp$.



Rozwiązanie zadania M 1291.

Dla każdego i zaznaczymy wspólny bok tych dwóch pól, na których znajdują się liczby i oraz $i + 1$. Teza zadania będzie spełniona, jeśli wykazemy, że istnieje wierzchołek (punkt kratowy szachownicy), z którego wychodzą trzy odcinki.

Przyjmijmy wbrew tezie, że taki wierzchołek nie istnieje. Wówczas w każdym wierzchołku wewnątrz szachownicy spotykają się co najwyżej dwa zaznaczone odcinki. Ponadto do każdego wierzchołka na brzegu szachownicy może dochodzić tylko jeden odcinek, przy czym żaden odcinek nie dochodzi do rogów szachownicy. Stąd wynika, że liczba zaznaczonych odcinków nie może przekraczać

$$\frac{1}{2}(2(m-1)(n-1) + 2(n-1) + 2(m-1)) = mn - 1.$$

Tymczasem wszystkich zaznaczonych odcinków jest dokładnie $mn - 1$. Stąd w szczególności wynika, że każdy wierzchołek znajdujący się na brzegu szachownicy, z wyjątkiem jej rogów, musi być końcem jednego z zaznaczonych odcinków. Wobec tego, jeśli w któreś pole brzegowe szachownicy wpisano liczbę i , to liczby $i + 1$ oraz $i - 1$ też musiały zostać wpisane w brzegowe pola szachownicy. Wynika z tego, że wszystkie liczby są na brzegu – to jednak nie jest możliwe.

Teraz udowodnimy następujący lemat.

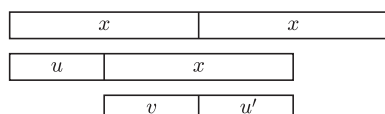
Lemat 3. *Obrót cykliczny słowa pierwotnego jest słowem pierwotnym.*

Dowód. Wystarczy dowieść, że funkcja c przekształca słowo pierwotne na słowo pierwotne. Przypuśćmy, że tak nie jest, to znaczy funkcja c przekształca słowo pierwotne x na słowo niepierwotne u^k , gdzie $k \geq 2$. Wtedy x powstaje z u^k przez przestawienie ostatniej litery u^k na początek. Litera ta jest ostatnią literą u . Jeśli oznaczymy $u' = c^{-1}(u)$, to $x = u'^k$ (sprawdź!), a zatem x nie jest pierwotne. Sprzeczność. \triangle

I jeszcze jeden lemat.

Lemat 4. *Niech y będzie obrotem cyklicznym słowa x . Jeśli x jest pierwotne, to istnieje dokładnie jedna para słów (p, q) , gdzie $q \neq 1$, spełniająca $y = pq, x = qp$.*

Dowód. To, że taka para słów istnieje, wynika z Obserwacji. Przypuśćmy, że są dwie takie pary: (p, q) i (p', q') . Niech $0 \leq |p| < |p'| < |y| = |x|$. Wtedy słowo $x^2 = qpqp$ występuje w $y^3 = pqpqpq = px^2q$ od pozycji $|p| + 1$. Podobnie słowo x występuje w y^3 od pozycji $|p'| + 1$. To oznacza, że x występuje w x^2 od pozycji $1 < |p'| - |p| + 1 < |x|$, czyli x występuje w środku xx . To jest niemożliwe. Oznaczmy przez u początek xx , na prawo od którego występuje x (rysunek). Wtedy $x = uv$ i $x = vu'$, gdzie u' jest prefiksem x o długości $|x| - |v| = |uv| - |v| = |u|$. Ale u też jest prefiksem x o tej długości. A zatem $u' = u$ i mamy $x = uv = vu$ oraz u i v są niepuste. Z Lematu 1 wynika, że $u = r^k$ i $v = r^l$, a zatem $x = uv = r^{k+l}$. Ponieważ u i v są niepuste, więc $k, l \geq 1$, skąd $k + l \geq 2$. Uzyskaliśmy sprzeczność z założeniem o pierwotności x . \triangle



Słowo x występuje wewnątrz xx .

Teraz wróćmy do naszego równania $zX = Xy$. Niech $X = x$ będzie jego rozwiązaniem. Obliczając długości obu stron równania po podstawieniu $X = x$, otrzymamy $|z| = |y|$. Warunek $|z| = |y|$ jest więc warunkiem koniecznym do tego, aby rozwiązanie istniało. Nie jest to jednak warunek wystarczający.

Twierdzenie. *Niech $z = u^k, y = v^l$, gdzie u i v są pierwotne i $k, l \geq 1$.*

- (i) *Równanie $zX = Xy$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $k = l$ i v jest obrotem cyklicznym u .*
- (ii) *Jeśli $u = qp$ i $v = pq$, gdzie $p \neq 1$, i $k = l$, to zbiorem rozwiązań równania $zX = Xy$ jest $\{(qp)^i q : i \geq 0\}$.*

Dowód. (i) (\Leftarrow) Jeśli v jest obrotem cyklicznym u , to $v = pq$ i $u = qp$, dla pewnych p, q . Wtedy, dla każdego $i \geq 0$, $z(qp)^i q = (qp)^{k+i} q = (qp)^i q (pq)^k = (qp)^i qy$. A zatem równanie $zX = Xy$ ma rozwiązanie. Ma ich nawet nieskończenie wiele.

(\Rightarrow) Indukcja względem długości rozwiązania $X = x$. Jeśli $|x| < |u|$, to x jest prefiksem u , a zatem $u = xp$ dla pewnego niepustego p . Wtedy $xy = zx = (xp)^k x = x(px)^k$. Stąd $y = (px)^k$. Ponieważ xp jest pierwotne, więc px też jest pierwotne. Mamy $v^l = (px)^k$. Z Lematu 2, $k = l$ i $v = px$. Zauważmy, że ponieważ v i u są pierwotne, więc para (p, x) spełniająca $p \neq 1, u = xp$ i $v = px$ jest dokładnie jedna. Tak więc jedynym rozwiązaniem równania krótszym niż $|u|$ jest $X = x$.

Jeśli $|x| \geq |u|$, to u jest początkiem x . Stąd $x = ux'$ dla pewnego x' . Wtedy $uzx' = uu^k x' = u^k u x' = zx = xy = ux' y$. Usuwaając wspólny początek obu stron równania, otrzymujemy $zx' = x' y$, a więc $X = x'$ jest rozwiązaniem równania $zX = Xy$. Skoro $|x'| < |x|$, więc można zastosować hipotezę indukcyjną, która mówi, że v jest obrotem cyklicznym u .

(ii) Załóżmy, że $u = qp$ i $v = pq$. Udowodnimy teraz, że każde rozwiązanie równania $zX = Xy$ jest postaci $(qp)^i q$, przy czym $i \geq 0$. W punkcie (\Leftarrow) udowodniliśmy, że każde słowo postaci $(qp)^i q$ jest rozwiązaniem równania. Pokażemy, że nie ma innych rozwiązań. Dowód jest indukcyjny względem długości rozwiązania. Załóżmy, że $X = x$ jest rozwiązaniem równania. W punkcie (\Rightarrow) udowodniliśmy, że jedynym rozwiązaniem równania krótszym niż $|u|$ jest $X = q$ oraz że każde rozwiązanie nie krótsze niż $|u|$ jest postaci ux' , przy czym x' też jest rozwiązaniem równania. Z hipotezy indukcyjnej $x' = (qp)^i q$, gdzie $u = qp$ i $v = pq$. Wtedy $x = ux' = qp(qp)^i q = (qp)^{i+1} q$. To kończy dowód. \triangle



Rozwiązanie zadania M 1292.

Niech p_1, p_2, \dots, p_{100} będą różnymi liczbami pierwszymi.

Dla $n = 1, 2, \dots, 100$ przyjmijmy

$$a_n = p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1}^2 \dots p_{100}^2$$

Wówczas zbiór $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$ spełnia warunki zadania. Istotnie: jeśli $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}$ są elementami zbioru A , gdzie $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, to liczba $p_{n_k}^2$ dzieli każdą z liczb $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_{k-1}}$, lecz nie dzieli liczby a_{n_k} . Stąd wynika, że liczba $a_{n_1} + a_{n_2} + \dots + a_{n_k}$ nie może być potęgą liczby naturalnej o wykładniku większym lub równym 2.

Egzamin ustny, kule i prawdopodobieństwo

Tomasz TKOCZ*

Wyobraź sobie, Młody Czytelniku, że jesteś już studentem i czeka Cię bardzo trudny egzamin ustny (a może, tak jak piszący te słowa, doskonale z autopsji znasz to przyjemne wyzwanie?). Profesor przygotował zestaw dwudziestu pytań, ale Ty zdążyłeś nauczyć się odpowiedzi tylko na pewne dziesięć z nich; nazwijmy je *dobrymi* pytaniami, pozostałe, na które nie znasz odpowiedzi, niech nazywają się *złe*. Egzamin ustny u naszego Profesora odbywa się na bardzo prostych zasadach – losuje on jedno pytanie (każde z równym prawdopodobieństwem) i jeśli potrafisz na nie odpowiedzieć, to brawo – zdałeś, a jeśli nie, to nie (i czeka Cię egzamin w sesji poprawkowej). Sprawa jest zatem bardzo prosta.



W przedstawionej sytuacji szansa na to, że zdasz egzamin, jest równa $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. Nie wygląda to zbyt wesoło. Ale myślisz sobie: – *Nie jestem sam – mam czternastu kolegów, którzy też muszą iść na ten ustny. To są moi bardzo dobrzy koledzy, więc nie będę musiał zdać jako pierwszy. Profesor jest świetnie przygotowany – ułożył więcej pytań, niż jest zdających, ma zapas i dlatego zwykły raz użytego pytania nie zadawać ponownie. Może więc, aby zwiększyć szansę zdania egzaminu, oplaca mi się poczekać trochę, by zobaczyć, które z pytań zostały już wylosowane – bardzo miłośnicy powiedzą mi przecież, jakie pytania wylosowali – ja już ich nie wylosuję.*

I co Ty, Drogi Czytelniku, na to rozumowanie? Czy uda się w ten sposób ukryć własne nieprzygotowanie do egzaminu? Czy, na przykład, gdy wejdiesz jako siódmy, będziesz miał większe szanse zdania egzaminu niż $\frac{1}{2}$? Chyba nie sposób tak od razu odpowiedzieć na to pytanie. Spróbujmy zatem po kolei rachować.

Przypuśćmy, że wchodzisz jako drugi. Jeśli student, który zdawał przed Tobą, wylosował *dobrze* pytanie (z prawdopodobieństwem $\frac{10}{20}$), to zdasz z prawdopodobieństwem $\frac{9}{19}$, a jeśli – przeciwnie – wylosował *złe* pytanie (oczywiście też z prawdopodobieństwem $\frac{10}{20}$), to zdasz z prawdopodobieństwem $\frac{10}{19}$. Zatem szansa pomyślnego zdania egzaminu, gdy wchodzisz jako drugi, jest równa $\frac{9}{19} \cdot \frac{10}{20} + \frac{10}{19} \cdot \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. Znowu $\frac{1}{2}$!

Chcąc obliczyć tym sposobem szansę pomyślnego wyniku, gdy wejdziemy jako trzeci, widzimy, że trzeba będzie rozważyć cztery przypadki, a np. gdy wejdziemy jako siódmy – aż 2^7 .

A może nie warto liczyć, bo ta szansa zawsze będzie równa $\frac{1}{2}$, niezależnie od tego, kiedy wejdziemy? (Bo niby dlaczego miałby istnieć sposób na przechytrzenie Profesora?) Ale jak to sprawdzić?

Zauważmy, że zdarzenie *zdasz, wchodząc jako k-ty* to tak naprawdę zdarzenie *k-te pytanie wylosowane przez Profesora było dobre*. Profesor losuje bez zwracania, z czego wynika, że problem, przed którym stanęliśmy, może być równoważnie sformułowany następująco: *losujemy bez zwracania kule, każdą zawsze z jednakowym prawdopodobieństwem, z urny, która początkowo zawiera dziesięć dobrych kul i dziesięć złych; czy prawdopodobieństwo wylosowania kuli dobrej za k-tym razem wynosi $\frac{1}{2}$?*

Czasami tak bywa, że łatwiej udowodnić coś nieco bardziej ogólnego. W naszym przypadku, z powodu zmiany zawartości urny w czasie losowania, wygodniej będzie – jak się za chwilę okaże – wykazać, że jest prawdziwa równość

$$(*) \quad P(D_k^{d,z}) = \frac{d}{d+z}, \quad \text{dla } k = 1, \dots, d+z,$$

gdzie $D_k^{d,z}$ to zdarzenie polegające na wylosowaniu za k -tym razem *dobrej* kuli, jeśli początkowo urna zawierała d kul *dobrych* i z *złych*. Dalej przyda nam się jeszcze analogiczne oznaczenie $Z_k^{d,z}$ dla zdarzenia polegającego na wylosowaniu w tej samej sytuacji kuli *złej*.

Korzystamy tutaj z pojęcia *prawdopodobieństwa warunkowego* zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B . Oznaczamy je jako $P(A|B)$ i definiujemy tak

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

gdzie $A \cap B$ to zdarzenie *zaszło A i B*. Zgadza się to z intuicją – rozpatrzmy np. sytuację, gdy A to zdarzenie, że w rzucie kostką wypadła dwójka (czyli $P(A) = \frac{1}{6}$), a B – że wypadła parzysta liczba oczek (czyli $P(B) = \frac{1}{2}$): wiemy, iż prawdopodobieństwo wypadnięcia dwójki, pod warunkiem, że wyrzuciliśmy parzystą liczbę oczek, powinno wynosić $\frac{1}{3}$, a to właśnie zgadza się z podanym wzorem, bo $P(A|B) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$.

*student, Wydział Fizyki i Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Mamy oczywiście dla dowolnych d i z

$$P(D_1^{d,z}) = \frac{d}{d+z} \quad \text{i} \quad P(Z_1^{d,z}) = \frac{z}{d+z}.$$

Załóżmy (będziemy rozumować indukcyjnie, co tutaj jest bardzo naturalne), że (*) zachodzi dla pewnego $k < d+z$. Mamy

$$\begin{aligned} P(D_{k+1}^{d,z}) &= P(D_{k+1}^{d,z} | D_1^{d,z}) \cdot P(D_1^{d,z}) + P(D_{k+1}^{d,z} | Z_1^{d,z}) \cdot P(Z_1^{d,z}) = \\ &= P(D_k^{d-1,z}) \cdot \frac{d}{d+z} + P(D_k^{d,z-1}) \cdot \frac{z}{d+z} \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{d-1}{d-1+z} \cdot \frac{d}{d+z} + \frac{d}{d-1+z} \cdot \frac{z}{d+z} = \\ &= \frac{d}{d+z} \cdot \left(\frac{d-1}{d-1+z} + \frac{z}{d-1+z} \right) = \frac{d}{d+z}, \end{aligned}$$

Stosujemy tutaj tzw. wzór na prawdopodobieństwo całkowite: jeśli B_1, B_2 to takie dwa wykluczające się zdarzenia, że któreś z nich na pewno zachodzi, to dla dowolnego zdarzenia A jest

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap (B_1 \cup B_2)) = \\ &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2). \end{aligned}$$

U nas bierzemy $B_1 = D_1^{d,z}, B_2 = Z_1^{d,z}$.

co pokazuje prawdziwość (*) dla dowolnego k .

Zatem nawet gdy wejdziemy na egzamin jako ostatni, szansa jego zdania będzie równa $\frac{1}{2}$, bo $P(D_{15}^{10,10}) = \frac{10}{10+10}$. Być może kłóci się to troszkę z intuicją, ale dowodzi, że żadne chytne strategie nic tu nie pomogą – jaką część pytań opanowaliśmy, taką mamy szansę zdania egzaminu.

Może jednak strategie, jakie rozważaliśmy, były zbyt proste? Na przykład, student wchodził na egzamin w deterministycznej chwili k , czyli w ogóle nie wykorzystywał informacji – co prawda losowej, ale zawsze dodatkowej – którą przekazywali mu zdający do chwili k koledzy. Tzn. nie brał pod uwagę informacji, które pytania profesor już zużył. Okazuje się jednak, że nawet stosując jakąś niby bardziej przebiegłą strategię (np. student wchodzi tuż po tym, gdy zostanie zadane któreś ze *złych* pytań), w której wykorzystamy wszelkie informacje, jakich dostarczyli nam zdający wcześniej koledzy, zawsze uzyskamy prawdopodobieństwo zdania egzaminu równe $\frac{1}{2}$. Ale ścisły dowód tego faktu jest już mniej elementarny. Niemniej zachęcam Czytelników do sprawdzenia, czy tak jest w przypadku samodzielnie wymyślonych konkretnych strategii, albo do prób wykazania tego ogólnego faktu w przypadku mniejszych danych – na przykład dwóch *dobrych*, dwóch *złych* pytań i łącznie trzech studentów.



Funkcje odwrotne do siebie

Funkcja $f_1(x) := x$ zwraca (jak brzydko mówią informatycy) to, co się do niej włoży. Funkcja $f_2(x) := -x$ zwraca nie całkiem to samo, ale gdy ją wykonać dwukrotnie, znów wracamy do tego, z czego wyszliśmy: $f_2(f_2(x)) = f_2(-x) = x$. Takie funkcje to *inwolucje*. Spróbujmy znaleźć jeszcze inne inwolucje wśród *funkcji wymiernych*, to jest postaci $f(x) = V(x)/W(x)$, gdzie V i W są wielomianami.

Od razu przychodzi do głowy funkcja $f_3(x) := 1/x$. I od razu widać, że to inwolucja. Zaraz potem sprawdzamy $f_4(x) := -1/x$. Faktycznie – to też inwolucja:

$$f_4(f_4(x)) = \frac{-1}{f_4(x)} = \frac{-1}{\frac{-1}{x}} = x.$$

No, a dalej? Sprawdzamy $f_5(x) := 2/x$ – też się zgadza! No to już wiemy, że każda funkcja postaci $f_{(\alpha)}(x) := \alpha/x$ dla $\alpha \neq 0$ jest inwolucją.

Mamy więc już nieskończenie wiele inwolucji wśród funkcji wymiernych. Ale czy odnaleźliśmy już wszystkie?

Nie trzeba specjalnej wyobraźni, by stwierdzić, że nie – przecież inwolucją jest także $f_6(x) := 1 - x$.

No to spróbujmy całkiem fantazyjnie – może $f_7(x) := (x+1)/(x-1)$? Sprawdzamy:

$$f_7(f_7(x)) = f_7\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{2x}{2} = x,$$

czyli i ta funkcja okazała się inwolucją.

Wyraźnie widać, że poszukiwania inwolucji wśród funkcji wymiernych należałoby kontynuować. Nie sądzę jednak, że można łatwo wpaść na to, jakie jeszcze funkcje należą do tej rodziny. Ja po prostu zapytałem algebraików. Odpowiedź okazała się zaskakująca:

Wśród funkcji wymiernych inwolucje to $f_{(\alpha)}$ dla $\alpha \neq 0$, oraz $f_{(\alpha,\beta)}(x) := \frac{x+\alpha}{\beta \cdot x-1}$ dla $\alpha \cdot \beta \neq -1$ i tylko one.

Czytelnik Niedowiarek sprawdzi, że dla dozwolonych α i β faktycznie $f_{(\alpha,\beta)}(f_{(\alpha,\beta)}(x)) = x$; Czytelnik Ambitny poszuka dowodu, że żadnej innej inwolucji będącej funkcją wymierną nie ma. Natomiast Czytelnik Podchwytliwy zapyta: – *A gdzie funkcja f_2 albo f_6 ?*

Marek KORDOS

Detektory fal grawitacyjnych

Izabela KOWALSKA*

U progu trzeciego tysiąclecia astronomia rozwija się jak nigdy dotąd. Dynamiczny postęp technologiczny pozwala budować teleskopy, które widzą więcej i dalej. Ogromna moc obliczeniowa współczesnych komputerów pozwala na analizę gigantycznych ilości danych obserwacyjnych.

Równie szybkie postępy obserwujemy na polu astrofizyki teoretycznej. Za pomocą symulacji numerycznych jesteśmy w stanie odtworzyć cały szereg procesów zachodzących w warunkach astrofizycznych. Potrafimy obserwować Wszechświat w bardzo szerokim zakresie widma fal elektromagnetycznych. Ostatnie dekady przyniosły przełomowe odkrycia dzięki obserwacjom wysokoenergetycznych fotonów.

Choć dalsza eksploracja nieba poprzez rejestrowanie światła będzie przynosić jeszcze wiele ciekawych wyników, to warto szukać nowych „okien” na Wszechświat. Jednym z nich są fale grawitacyjne. Obserwacje w tym zakresie są czymś jakościowo innym od obserwacji fal elektromagnetycznych. Każda detekcja fal grawitacyjnych przyniesie nowe informacje o zjawiskach, które znamy, i, jak się spodziewamy, będzie źródłem lawiny nowych zjawisk, o których nie mamy pojęcia.

Falę grawitacyjną może wyprodukować każdy masywny obiekt, którego tzw. moment kwadrupolowy się zmienia. W praktyce oznacza to, że musimy mieć coś, co jest niesymetryczne i rotuje bądź zapada się. Człowiek z plecakiem kręcący się wokół własnej osi też jest źródłem fal grawitacyjnych, choć za słabych, by je wykryć. Gdzie szukać obiektów, które na tyle silnie promieniują, żeby była szansa to zobaczyć? Odpowiedź jest prosta – w kosmosie. Jest kilka klas obiektów, które dobrze nadają się na źródła fal grawitacyjnych. Najpoważniejszym kandydatem są układy podwójne obiektów zwartych (mogą to być gwiazdy neutronowe, czarne dziury bądź białe karły). Już samo obiegiwanie się dwóch ciał sprawia, że emitowana jest energia w postaci promieniowania grawitacyjnego (pośrednio pokazały to omówione dalej obserwacje Hulse’a i Taylora). W miarę zacieśniania się orbity wzrasta zarówno amplituda, jak i częstotliwość wysyłanych fal, osiągając maksimum, gdy dojdzie do połączenia się składników układu – to wtedy sygnał będzie najsilniejszy i najłatwiejszy do detekcji.

Potencjalnie dobrymi źródłami fal grawitacyjnych są też wybuchy supernowych, podczas których dochodzi do gwałtownego zapadnięcia się jądra masywnej gwiazdy. W tym przypadku mamy do czynienia z „błyskiem” w falach grawitacyjnych. Niestety, promieniowanie

grawitacyjne unosi bardzo mały procent energii uwalnianej w wybuchu, więc mamy szansę zaobserwować tylko stosunkowo bliskie supernowe.

Kolejnym źródłem, którego będziemy szukać, jest ciągła emisja z rotujących gwiazd neutronowych. Na pierwszy rzut oka wydaje się to dziwne, ponieważ gwiazdy neutronowe są najbardziej kulistymi obiektami, jakie znamy. Mają promień rzędu 10 km, a „góry” na ich powierzchni są rzędu centymetrów. Okazuje się jednak, że takie odchylenia od symetrii sferycznej są wystarczające do emisji grawitacyjnej. Znamy kilka tego typu obiektów, które powinny emitować fale grawitacyjne (np. pulsar w mgławicy Krab). Z obserwacji radiowych znamy dokładną częstotliwość obrotu, a zatem wiemy dokładnie, jakiego promieniowania grawitacyjnego musimy szukać (częstość fal grawitacyjnych jest dwa razy większa niż częstość obrotu gwiazdy).

Każda z klas źródeł charakteryzuje się innym typem sygnału i wymaga od nas innej metody poszukiwania. Ponadto mamy nadzieję, że są we Wszechświecie inne, jeszcze nieznanne źródła, które dopiero odkryjemy.

W 1974 roku Russell Alan Hulse i Joseph Hooton Taylor Jr. odkryli układ podwójny składający się z pulsara i zwykłej gwiazdy. Pulsar jest obiektem bardzo małym (średnica to około 10 km), gęstym (panują tam gęstości takie jak w jądrze atomowym) i szybko rotującym (jeden obrót zwykle zajmuje mniej niż sekundę). Dodatkowo wysyła on promieniowanie radiowe skoncentrowane w wiązce, która omiata przestrzeń przy każdym obrocie (tak jak latarnia morska). Pulsy, które możemy obserwować, są bardzo regularne – ich precyzja porównywana jest z dokładnością zegarów atomowych. Dokładny pomiar czasów nadejścia sygnałów i wszelkich odchyłek pozwala wyznaczyć orbitę układu podwójnego i śledzić jej zmiany. Układ odkryty przez Hulse’a i Taylora zmienia swoją orbitę. Składniki są coraz bliżej siebie. Okazało się, że tempo, w jakim orbita się kurczy, bardzo dobrze odpowiada przewidywaniom teoretycznym – tak powinno się to odbywać, jeśli układ emituje energię w postaci fal grawitacyjnych! Odkrycie to zostało uhonorowane Nagrodą Nobla w 1993 roku. Naukowcy wierzą, że jest to pośredni dowód na istnienie promieniowania grawitacyjnego.

Ze względu na swoje własności fale grawitacyjne pozwalają „zajrzeć” do miejsc, które nigdy nie będą dostępne falom elektromagnetycznym. Spodziewamy się, że w sposób bezpośredni zobaczymy czarne dziury, o których istnieniu wnioskujemy z wpływu, jaki wywierają na otoczenie. Dowiemy się czegoś więcej o zjawiskach zachodzących w supernowych, które są zasłonięte gęstym pyłem. Chcielibyśmy odkryć reliktywne promieniowanie grawitacyjne, które jest pozostałością

* Obserwatorium Astronomiczne, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

po Wielkim Wybuchu, i dzięki temu zobaczyć, jaki był Wszechświat w pierwszych chwilach istnienia. Oczekiwania są bardzo duże.

Budowa pierwszej lunety zapoczątkowała fantastyczny rozwój astronomii. Podobnie będzie, gdy detektory fal grawitacyjnych zaczną wykrywać źródła fal grawitacyjnych.

Od kilku lat na całym świecie działają anteny, które szukają promieniowania grawitacyjnego. Dlaczego nic nie zobaczyły do tej pory? Fale grawitacyjne to zaburzenia samej czasoprzestrzeni, których skutki są bardzo subtelne. Fala zmienia odległości między masywnymi obiektami. Zmiany są proporcjonalne do początkowej odległości oraz amplitudy fali, która jest wielkością niezwykle małą. Żeby uzmysłowić sobie rząd wielkości, o którym mówimy, wyobraźmy sobie wybuch supernowej w centrum naszej Galaktyki. Wtedy amplituda fali grawitacyjnej będzie rzędu 10^{-20} (to znaczy taki byłby stosunek zmian odległości do odległości tych obiektów)! W skali Wszechświata odległość do centrum naszej Galaktyki jest niewielka, więc w rzeczywistości będziemy szukać jeszcze słabszych sygnałów. Słabe oddziaływanie z materią ma swoje wady i zalety. Plusem jest to, że fala niesie niezmienną informację o źródle. Minusem – trudność detekcji.

Jak więc zobaczyć falę grawitacyjną?

W tej chwili istnieje kilka metod wykrywania fal grawitacyjnych. Wszystkie one bazują na tym, że przechodząca fala nieznacznie zmienia odległości między masami próbnymi. Efekt ten jest bardzo mały, więc technologie stworzone do detekcji muszą być zaawansowane. Są dwie podstawowe klasy detektorów – rezonansowe i interferometryczne.

Pierwszą próbę wykrycia promieniowania grawitacyjnego podjął Joseph Weber. Jego detektorem był aluminiowy walec. Przejście fali grawitacyjnej wzbudziłoby drgania własne walca o tym większej amplitudzie, im ta częstość byłaby bliższa jego częstości rezonansowej. Według samego Webera doszło do pozytywnej detekcji, ale nie została ona potwierdzona przez niezależnych obserwatorów.

Współczesne detektory rezonansowe są większe i lepiej izolowane od otoczenia. Anteny działają w wielu ośrodkach naukowych: ALLEGRO (Nowy Orlean), AURIGA (Legnaro koło Padwy), Explorer (CERN), Nautilus (Frascati). Zaletą tego typu detektorów jest ich stosunkowo niska cena, ale niewątpliwą wadą jest czułość w bardzo wąskim zakresie częstości.

Detektory interferometryczne mierzą odległości pomiędzy masami próbnymi za pomocą laserów. Wiązki laserowe biegną w dwóch prostopadłych tunelach. Na końcach tuneli znajdują się zwierciadła odbijające wiązkę tak, aby jej faktyczna droga była wielokrotnie dłuższa od rozmiarów tuneli. Na przecięciu ramion dochodzi do interferencji

światła z obu tuneli. Nawet bardzo mała zmiana drogi optycznej światła laserowego (co odpowiada zmianie odległości między masami próbnymi po przejściu fali grawitacyjnej) powoduje zmianę wzoru interferencyjnego. Obecnie działające detektory tego typu to LIGO (dwie anteny w USA), VIRGO (Włochy), GEO600 (Niemcy), TAMA (Japonia).

Wszystkie te detektory mają dwa naturalne ograniczenia, które uniemożliwiają im obserwacje w całym zakresie częstości.

Granica niskich częstości związana jest z położeniem detektorów na Ziemi, która charakteryzuje się pewną aktywnością sejsmiczną oraz biosferą powodującą dodatkowe szумы. Nie możemy odizolować laboratorium od wpływu ziemskiego otoczenia. Z tego powodu planowana jest budowa detektora, który będzie działał w przestrzeni kosmicznej daleko od Ziemi. Antena LISA ma być złożona z trzech statków kosmicznych z masami próbnymi oddalonymi o 5 mln km.

Granica wysokich częstości związana jest z tym, że światło lasera nie jest ciągle, a składa się ze skończonej liczby fotonów. Zwiększenie mocy laserów mogłoby spowodować wzrost czułości w tym zakresie, bo liczba fotonów byłaby wówczas dużo większa i ich skończona ilość nie miałaby znaczenia. Takie rozwiązanie jest trudne technicznie, implikuje bowiem konieczność użycia luster o większej wytrzymałości oraz wydajniejszego chłodzenia.

Wyżej opisane typy detektorów dają możliwość bezpośredniego zaobserwowania przejścia fali grawitacyjnej. Należy podkreślić, że wielkością mierzoną będzie amplituda fali, która jest proporcjonalna do odwrotności odległości do źródła. W przypadku fal elektromagnetycznych mierzona jest energia, a więc kwadrat amplitudy. W konsekwencji nieznaczne poprawienie czułości anten grawitacyjnych wpływa na znaczący wzrost ich zasięgu.

Poza konwencjonalnymi metodami detekcji istnieją też metody pośrednie. Należy do nich tzw. chronometraż pulsarów. Obserwatoria radiowe na całym świecie śledzą równomiernie rozłożone pulsary. Gdyby przeszła fala grawitacyjna, to odległości między pulsarami i Ziemią nieznacznie zmieniłyby się, co zostałoby wykryte w postaci opóźnienia sygnałów radiowych. Ze względu na równomierne rozmieszczenie pulsarów możliwe będzie uśrednienie efektu. To, co pozostanie w danych, to ruch Ziemi wywołany przejściem fali grawitacyjnej. Planowane jest włączenie do współpracy większej liczby radioteleskopów, co poprawi czułość tej metody. W fazie przygotowań jest też projekt SKA, który będzie składał się z wielu radioteleskopów rozłożonych na powierzchni kilometra kwadratowego.

Wszystkie detektory są bezustannie ulepszane, co sprawia, że jesteśmy coraz bliżej pierwszej detekcji. Czekamy na nią z niecierpliwością.

Jak otrzymać chaos?

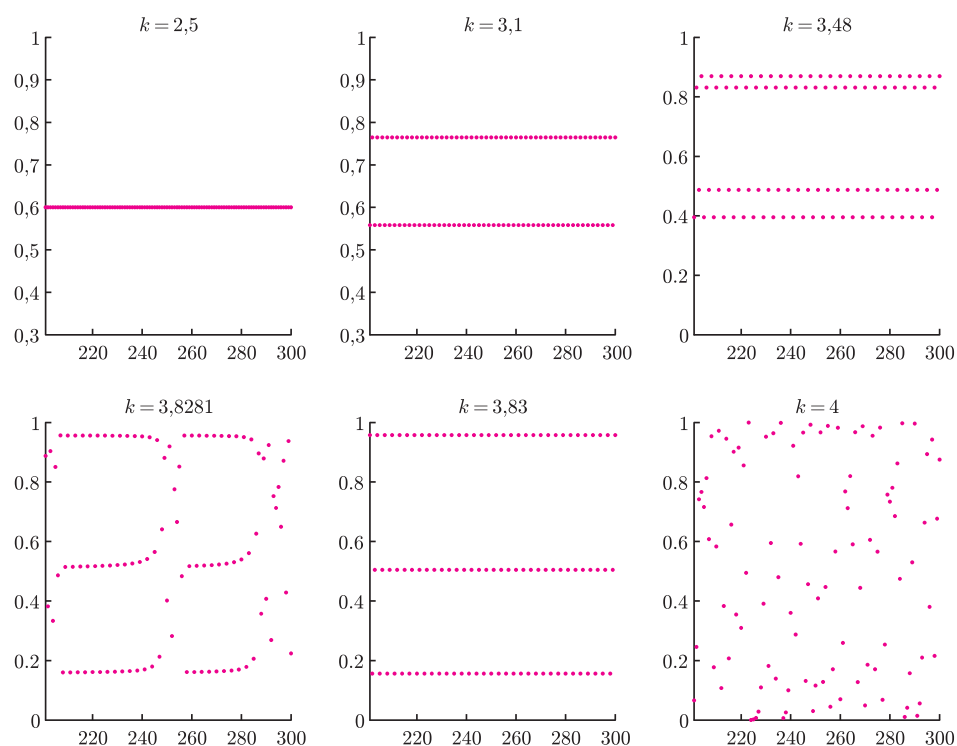
Tomasz MAŁOLEPSZY*

Istnieje wiele różnych sposobów na opisanie ciągu. Najwygodniejszym z nich jest bez wątpienia podanie jawnego wzoru na jego n -ty wyraz. Jednak często zdarza się, że jedyną informacją, jaką dysponujemy, jest równanie rekurencyjne, czyli równanie opisujące związek między wyrazami tego ciągu. Najprostszą z takich zależności rekurencyjnych, wiążącą n -ty wyraz wyłącznie z bezpośrednio go poprzedzającym, możemy ogólnie zapisać jako $x_n = f(x_{n-1})$, gdzie f jest pewną funkcją. Jeżeli chcemy znaleźć kolejne wyrazy tak opisanego ciągu, musimy znać na starcie przynajmniej jedną wartość, tę początkową, oznaczaną x_0 . Niestety, jeżeli f nie jest funkcją liniową, to zazwyczaj nie jesteśmy w stanie z takiej zależności wydobyć jawnego wzoru na wyrazy ciągu. Wówczas z pomocą mogą przyjść nam komputery, dzięki którym możemy obserwować zachowanie ciągów opisywanych zależnościami rekurencyjnymi. Okazuje się także, że takie ciągi mogą wykazywać skomplikowane zachowanie nawet w sytuacji, gdy funkcja f z pozoru nie wygląda „groźnie”. Aby się o tym przekonać, weźmy pod uwagę następujące równanie rekurencyjne:

$$(1) \quad x_n = kx_{n-1}(1 - x_{n-1})$$

z warunkiem początkowym $x_0 \in [0, 1]$ oraz z pewną stałą dodatnią k . O stałej k założymy dodatkowo, że jest nie większa od 4, dzięki czemu wyrazy tego ciągu nigdy nie przekroczą jedynki. Łatwo to sprawdzić, wiedząc, że funkcja $f(x) = kx(1 - x)$, zwana *odwzorowaniem logistycznym*, osiąga swoje maksimum dla $x = 0,5$. Równanie (1), mimo swojej pozornej prostoty, ma wiele intrygujących własności, z których lwia część została wykazana całkiem niedawno – po 1976 roku, kiedy uwagę na jego złożony charakter zwrócił matematyk, fizyk i biolog Robert May.

Aby prześledzić, jak zachowuje się ciąg opisywany równaniem (1) dla coraz większych wartości n (czyli zbadać jego asymptotykę), wykonamy najpierw eksperymenty komputerowe. Poniższe wykresy przedstawiają ciąg opisany badanym równaniem dla kilku wartości k , z tym samym warunkiem początkowym $x_0 = 0,6$, w zakresie od x_{200} do x_{300} .



Rys. 1. Ciągi (1) generowane przez odwzorowanie logistyczne.

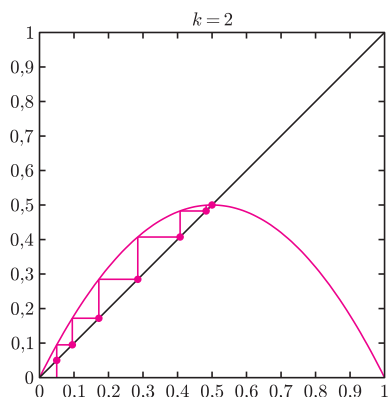
Równania rekurencyjne dla ciągów opisują *dyskretne układy dynamiczne*.

Rozwiązanie zadania F 774.
Prędkość bombki tuż przed zderzeniem z podłogą wynosi $v_0 = \sqrt{2gh}$. Załóżmy, że przed zderzeniem z drugą bombką prędkość pierwszej wynosi v . W układzie odniesienia środka masy bombek będą się one zbliżały z prędkością $v/2$ każda. Zatem, aby obie się stłukły, musi zachodzić $v/2 = v_0$ i stąd $v = 2\sqrt{2gh}$.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonomometrii, Uniwersytet Zielonogórski

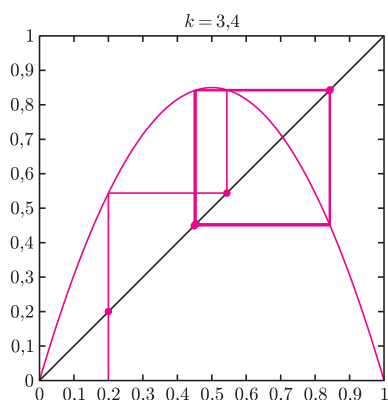
Sposób tworzenia wykresów pajęczynowych dla równania $x_n = f(x_{n-1})$ jest bardzo prosty. Można opisać go w pięciu punktach:

1. Narysuj na jednym układzie współrzędnych wykres funkcji $y = f(x)$ oraz funkcji $y = x$.
2. Zaznacz na osi OX dany punkt startowy x_0 i poprowadź z niego w kierunku wykresu $y = f(x)$ odcinek równoległy do osi OY , aż do punktu ich przecięcia.
3. Z punktu przecięcia poprowadź teraz w kierunku wykresu $y = x$ odcinek równoległy do osi OX , aż do punktu ich przecięcia.
4. Z otrzymanego punktu przecięcia poprowadź w kierunku wykresu $y = f(x)$ odcinek równoległy do osi OY , aż do punktu ich przecięcia.
5. Powtarzaj teraz kolejno punkty 3. i 4.



Rys. 2. Wykres pajęczynowy dla ciągu (1) z $k = 2$ i $x_0 = 0,05$.

Cykl długości p to zbiór parami różnych punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_{p-1}\}$, takich że $f(a_i) = a_{i+1}$ dla $i = 0, \dots, p-2$ oraz $f(a_{p-1}) = a_0$.



Rys. 3. Wykres pajęczynowy dla ciągu (1) z $k = 3,4$ i $x_0 = 0,2$.

Wyjaśnijmy wygląd tych wykresów. Zauważmy najpierw, że gdy $0 < k \leq 1$, to $x \geq kx(1-x)$ dla wszystkich $x \in [0, 1]$. Oznacza to, że dla dowolnego $x_0 \in [0, 1]$ wszystkie wyrazy ciągu spełniają nierówność $x_{n-1} \geq x_n$. Ciąg ten jest zatem nierosnący, a ponieważ jest również ograniczony z dołu przez 0, to klasyczne twierdzenie analizy matematycznej pozwala nam wywnioskować, że ma nieujemną granicę, którą oznaczmy przez g . Jak ją znaleźć? Z ciągłości odwzorowania logistycznego f wynika, że granica ta musi spełniać równanie $g = f(g)$, czyli – innymi słowy – jest punktem stałym funkcji f . Prosty rachunek prowadzi do spostrzeżenia, że przy rozważanych wartościach k odwzorowanie logistyczne ma tylko jeden nieujemny punkt stały: $g = 0$. Podsumowując, jeżeli tylko $0 < k \leq 1$, to niezależnie od tego, skąd wystartujemy, kolejne wyrazy ciągu będą zbliżać się coraz bardziej do zera.

Niestety, rozpatrzony właśnie przypadek był najprostszy. Już badanie sytuacji, gdy $k \in (1, 3]$, jest trudniejsze, choć nie wymaga jeszcze zaawansowanych narzędzi matematycznych. Zatem bez żadnych wyliczeń powiedzmy, że gdy $1 < k \leq 3$, to dla każdego $x_0 \in (0, 1)$ zależność rekurencyjna (1) daje ciąg, który zawsze jest zbieżny do $1 - \frac{1}{k}$ (gdy $x_0 = 0$ lub $x_0 = 1$, dąży on do zera). Łącząc otrzymane dotąd rezultaty, widzimy, że ciąg (1) jest zawsze zbieżny dla $0 < k \leq 3$. Dlaczego jednak granica tego ciągu zmienia się, gdy k przekracza 1? Odpowiedź na to pytanie kryje się w fakcie, że 0, czyli punkt stały odwzorowania logistycznego i zarazem granica ciągu dla $k \leq 1$, zmienia swój charakter, gdy k przekracza 1. Dla $0 < k \leq 1$ jest to bowiem *przyciągający punkt stały (atraktor)*, a dla $k > 1$ – *odpychający punkt stały (repeler)*. Dla $1 < k \leq 3$ granica ciągu odpowiada teraz drugiemu nieujemnemu punktowi stałemu odwzorowania logistycznego, równemu $1 - \frac{1}{k}$, który jest przyciągający. Charakter tego punktu stałego znakomicie tłumaczy tzw. *wykres pajęczynowy*.

Na rysunku 2 pokazano wykres pajęczynowy dla równania (1) przy $k = 2$ i $x_0 = 0,05$. Punkt stały 0 jest odpychający, a 0,5 przyciągający, dlatego nawet biorąc wartość startową x_0 , leżącą bardzo blisko 0, otrzymamy ciąg dążący do 0,5.

A co dzieje się, gdy k przekracza 3? Rysunek 1 sugeruje nam, że przynajmniej dla wartości k niewiele większych od 3 ciąg przestaje być zbieżny, a jego dalekie wyrazy zaczynają oscylować między dwiema wartościami: wyrazy o indeksach parzystych zbiegają do jednej z nich, natomiast wyrazy o indeksach nieparzystych do drugiej. Oznaczmy te wartości przez a i b . Zauważmy, że ponieważ $x_n = f(x_{n-1})$, wartości te muszą spełniać równości $f(a) = b$ i $f(b) = a$, skąd otrzymujemy, że $f(f(a)) = a$ oraz $f(f(b)) = b$. Aby więc wyznaczyć wartości a i b , wystarczy wyliczyć punkty stałe $f(f(x))$.

Dla odwzorowania logistycznego mamy $f(f(x)) = k^2x(1-x)(1-kx+kx^2)$, a więc szukane punkty stałe to pierwiastki równania $k^2x(1-x)(1-kx+kx^2) - x = 0$. Nietrudno je wyznaczyć – są to

$$0, \quad 1 - \frac{1}{k}, \quad \frac{k+1 + \sqrt{(k-3)(k+1)}}{2k} \quad \text{i} \quad \frac{k+1 - \sqrt{(k-3)(k+1)}}{2k}.$$

Pierwsze dwa nas nie interesują, gdyż są one także punktami stałymi odwzorowania logistycznego f . Szukanymi przez nas wartościami a i b są pozostałe dwa pierwiastki. Stanowią one *cykl* (lub *orbitę*) długości 2. Można wykazać, że cykl ten jest przyciągający dla $3 < k < 1 + \sqrt{6} = 3,449489\dots$ i, co więcej, dla wartości k z tego zakresu dalekie wyrazy ciągu (1) będą oscylowały wokół tego cyklu dla prawie wszystkich warunków początkowych x_0 . Rysunek 3 przedstawia wykres pajęczynowy dla ciągu (1) z $k = 3,4$ i $x_0 = 0,2$.

Jak widać, zwiększanie wartości parametru k nie tylko prowadzi do bardziej złożonych rachunków, ale i do coraz ciekawszych wyników. Najpierw ciąg opisany zależnością (1) jest zawsze zbieżny do zera, potem, gdy k przekracza 1, pozostaje zbieżny, ale do innej wartości, gdy zaś k mija 3, to z drobnymi wyjątkami ciąg zaczyna zbiegać do cyklu długości 2. Co więc może się dziać, gdy ten cykl przestanie być przyciągający (czyli dla $k > 1 + \sqrt{6}$)? Jak intuicja

Zjawisko podwajania długości cyklu nazywamy bifurkacją podwajania okresu, punkty zaś, w których następuje to podwojenie, nazywamy punktami bifurkacji.

wsparta rysunkiem 1 może nam sugerować, powstanie wówczas nowy cykl, tym razem długości 4, który dla pewnych wartości k (dokładniej, dla $1 + \sqrt{6} < k < 3,544\dots$) będzie przyciągający. Skoro tak, to pewnie po zmianie charakteru tego cyklu na odpychający powstanie przyciągający cykl długości 8? Otóż to, a potem powstaną kolejno cykle długości 16, 32, 64 i tak dalej. Poniższa tabelka opisuje, dla jakich zakresów k dane cykle długości 2^n będą przyciągające (liczby zostały tu zaokrąglone do 4 miejsc po przecinku).

n	kiedy cykl 2^n jest atraktorem
1	$3 < k < 1 + \sqrt{6} \approx 3,4495$
2	$1 + \sqrt{6} < k < 3,5441$
3	$3,5441 < k < 3,5644$
4	$3,5644 < k < 3,5688$
5	$3,5688 < k < 3,5697$
6	$3,5697 < k < 3,5699$

Z tabelki tej płynie ciekawa obserwacja, a mianowicie dla każdego kolejnego cyklu przedział wartości k , dla których cykl ten jest przyciągający, jest coraz krótszy. Nasuwa się więc pytanie, co się dzieje z tymi przedziałami, gdy n dąży do nieskończoności? Okazuje się, że zbiegają one do punktu $k^* \approx 3,569945672$.

Jak wieść niesie, wspomniany już Robert May zapisał równanie (1) na tablicy w korytarzu jako zadanie dla swoich studentów i dopisał pytanie *Co, na Boga, dzieje się dla $k > k^*$?* No cóż, w tym przypadku dzieje się naprawdę wiele. Przede wszystkim pojawia się chaos – ciąg opisywany zależnością (1) zaczyna przejawiać zachowania chaotyczne! Innymi słowy, dla odpowiednich k równanie (1) to wówczas nic innego, jak swego rodzaju przepis na chaos.

Jednak nie jest tak, że dla każdego $k^* < k \leq 4$ będziemy otrzymywać już tylko i wyłącznie ciągi chaotyczne. Okazuje się bowiem, że dla pewnych zakresów k z tego przedziału ponownie pojawiają się przyciągające cykle i to dowolnej długości różnej od 2^n . Jako ostatni zaznaczy swoją obecność cykl długości 3, przyciągający dla $1 + 2\sqrt{2} = 3,828427\dots < k < 3,841499\dots$ (piąty wykres na rysunku 1). Warto w tym miejscu wspomnieć, że odwzorowanie logistyczne ze stałą $k \in [1 + 2\sqrt{2}, 4]$ ma bardzo ciekawą własność: ma cykle dowolnej długości, z których zawsze tylko co najwyżej jeden będzie przyciągający (wynika to z dwóch słynnych twierdzeń teorii układów dynamicznych: Szarkowskiego i Fatou).

Chcąc w pełni opisać i wytłumaczyć zachowanie badanego ciągu przy wzroście parametru k od k^* do 4, musielibyśmy użyć dość zaawansowanej matematyki. Możemy jednak pokrótce streścić jego zachowanie jako naprzemienne pojawianie się chaosu (wówczas wykresy dalekich wyrazów ciągu nie wykazują żadnych widocznych wzorców) i cykli przyciągających (wtedy wykresy dalekich wyrazów ciągu będą oscylować między pewną liczbą wartości). Dodajmy jeszcze, że gdy k jest równe 4, otrzymamy ciąg w pewnym sensie „najbardziej” chaotyczny.

Dotarliśmy zatem do końca naszej wędrówki z parametrem k . Z tej perspektywy widać, że odwzorowanie logistyczne jest doskonałym przykładem na to, że chaos nie musi pojawiać się tylko i wyłącznie w bardzo złożonych układach. Istotne jest to, aby były one nieliniowe. Jak pisał bowiem o chaosie profesor Leon Ong Chua, wybitny autorytet m.in. w zakresie dynamiki nieliniowej: „Opoką tych terenów lokalnych i globalnych bifurkacji jest wszechobecna nieliniowość, niegdyś bezmyślnie linearyzowana przez inżynierów i innych adeptów nauk ścisłych, którzy tym samym trwonili swą jedyną szansę zmierzenia się z rzeczywistością” (podają za książką *Granice chaosu. Fraktale*). Niewątpliwie dużo w tych słowach racji. Chaos jest praktycznie wszechobecny w otaczającym nas świecie. Modele opisujące dość wiernie takie zjawiska z życia wzięte to zazwyczaj układy wielu skomplikowanych równań nieliniowych. Ale pamiętajmy, że czasami do ich opisu wystarczy jedna, prosta funkcja nieliniowa, czego najlepszym przykładem jest właśnie odwzorowanie logistyczne.

Świetną i zarazem bardzo prostą ilustracją zachowań chaotycznych w otaczającym nas świecie jest sposób, w jaki woda kapie z kranu w zależności od siły jej przepływu. W sprzyjających warunkach można tu nawet dostrzec bifurkację podwajania okresu, związaną ze stopniowym odkręcaniem kranu, czyli ze zwiększaniem natężenia przepływu wody.



O wieżach, permanencie i parzystości

Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ zakryto część pól i zapytano nas, na ile sposobów można ustawić na niej n wież tak, by żadna z wież nie stała na zakrytym polu i nie groziła innej (tzn. w każdym wierszu i w każdej kolumnie musi stać dokładnie jedna wieża).

Jeśli przedstawimy szachownicę jako zero-jedynkową macierz $A = (a_{i,j})$ wymiaru $n \times n$, w której $a_{i,j} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy pole leżące na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny jest zakryte, to nietrudno będzie się przekonać, że odpowiedzią jest wartość wyrażenia

$$\sum_{\pi} a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)},$$

w którym sumowanie rozciąga się na wszystkie permutacje π zbioru $\{1, \dots, n\}$. To wyrażenie fachowo nazywa się *permanentem* macierzy A i jego wyznaczenie jest problemem na tyle trudnym obliczeniowo, że nie znamy żadnego algorytmu, który robiłby to szybciej niż w czasie wykładniczym.

Dostaliśmy jednak szansę na rehabilitację, gdyż postawiono drugie pytanie: czy liczba poprawnych ustawień wież jest parzysta? Okazuje się, że w istocie takie pytanie jest prostsze.

Definicja permanentu może wydać się znajoma tym, którzy znają permutacyjną definicję wyznacznika macierzy. W istocie, wygląda ona bardzo podobnie:

$$\det(A) := \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)},$$

gdzie funkcja $\operatorname{sgn}(\pi)$ jest tzw. znakiem permutacji; dla nas będzie istotne, że przyjmuje ona wartości ± 1 . Kluczową obserwacją jest, że $-1 \equiv 1 \pmod{2}$, zatem wyznacznik i permanent tej samej całkowitoliczbowej macierzy są zawsze tej samej parzystości!

To pozwala nam sprowadzić problem do obliczenia wartości wyznacznika modulo 2, co możemy zrobić chociażby w czasie $O(n^3)$, korzystając z metody eliminacji Gaussa.

Tomasz IDZIASZEK



Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1291. W pola szachownicy $m \times n$, gdzie m i n są większe od 1, wpisano liczby $1, 2, \dots, mn$. Pola, w których znajdują się liczby i oraz $i + 1$, mają wspólny bok dla każdego i . Wykazać, że istnieje liczba k oraz dwa pola mające wspólny bok, w których znajdują się liczby k oraz $k + 3$.

Rozwiązanie na str. 2

M 1292. Wykazać, że istnieje zbiór złożony ze 100 różnych liczb całkowitych dodatnich o tej własności, że suma dowolnych elementów tego zbioru nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku większym lub równym 2.

Rozwiązanie na str. 3

M 1293. Dany jest staw w kształcie koła oraz trzy ustalone proste k, l, m . Z punktu A znajdującego się na brzegu stawu wypływa ryba i płynie w kierunku równoległym do prostej k . Po dotarciu do brzegu ryba zakreca i płynie dalej w kierunku wyznaczonym przez prostą l . Po ponownym dotarciu do brzegu stawu ryba kontynuuje swoją podróż w analogiczny sposób, obierając kolejno kierunki m, k, l oraz m . Wykazać, że po zakończeniu tej wędrówki ryba znajduje się w wyjściowym punkcie A .

Rozwiązanie na str. 14

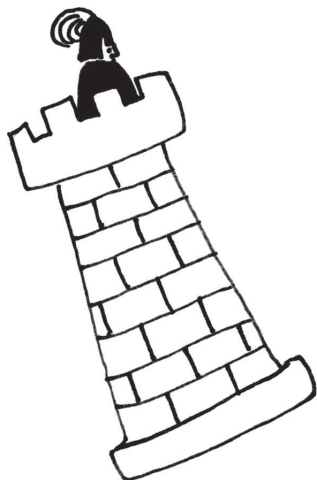
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 773. Okrągły, płaski lep na muchy zbliża się z prędkością \mathbf{v} , skierowaną wzdłuż prostopadłej do płaszczyzny lepu, do roju much poruszającego się z prędkością \mathbf{u} , prostopadłą do \mathbf{v} . Muchy lecą w obszarze ograniczonym dwiema płaszczyznami prostopadłymi do kierunku ruchu lepu, płaszczyzny te są odległe o d . W jednostce objętości znajduje się n much, promień lepu wynosi R . Ile much złapie lep?

Rozwiązanie na str. 24

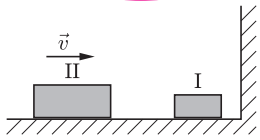
F 774. Bombka choinkowa tłucze się przy zderzeniu z podłogą po upadku z wysokości równej co najmniej h . Z jaką minimalną prędkością musi się poruszać taka bombka, żeby po zderzeniu z taką samą, spoczywającą, obie się rozbiły? Zakładamy, że druga bombka jest zawieszona w powietrzu, prędkość zaś pierwszej bombki skierowana jest wzdłuż prostej łączącej środki bombek.

Rozwiązanie na str. 8



5

mała delta



Jak wyznaczyć liczbę π za pomocą zderzeń?

Rozpatrzmy dwa ciała położone na powierzchni ograniczonej z prawej strony ścianą (rysunek). Pierwsze ciało o masie 1 początkowo spoczywa, a drugie ciało o masie k^2 razy większej porusza się w prawo z pewną prędkością v . Tarcie pomijamy. W którymś momencie ciała zderzają się, po czym pierwsze ciało zaczyna poruszać się w kierunku ściany, odbija się od niej, znów uderza w drugie ciało, zderza się ze ścianą i tak dalej. Ciała będą zderzać się w ten sposób do chwili, gdy drugie ciało zacznie uciekać w lewo szybciej niż pierwsze. Ile będzie wszystkich stuknięć ciało-ciało i ciało-ściana w zależności od stosunku mas k^2 ?

Czytelnik może wykonać symulację na komputerze albo sprawdzić to doświadczalnie (jeśli ma dostatecznie gładki stół i dużo cierpliwości...). Dla $k = 10^m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, pierwszych kilka wyników wygląda następująco:

k^2	liczba zderzeń
1	3
100	31
10000	313
1000000	3141



Czytelnik domyśla się na pewno dalszego ciągu – dla $k^2 = 100000000$ otrzymamy pewnie 31415 itd. Istotnie tak jest! Czyżbyśmy znaleźli nową metodę doświadczalnego wyznaczania liczby π ?

Przyjrzyjmy się sytuacji nieco dokładniej. Niech v_{2n} oznacza prędkość drugiego ciała po n -tym zderzeniu z pierwszym ciałem i analogicznie u_{2n} – prędkość pierwszego ciała po n -tym zderzeniu (dodatnia wartość prędkości oznacza, że ciało oddala się od ściany). Przy odbiciu od ściany pierwsze ciało zmienia prędkość na $u_{2n+1} = -u_{2n}$, a prędkość drugiego ciała, oczywiście, się nie zmienia, $v_{2n+1} = v_{2n}$. Początkowo mamy $u_1 = 0$, $v_1 = -v$. Niech całkowita energia kinetyczna ciał wynosi E_{kin} – energia jest zachowana, więc w każdej chwili $\frac{1}{2}k^2v_n^2 + \frac{1}{2}u_n^2 = E_{\text{kin}}$. Wprowadzając przeskalowane zmienne $V_n = \sqrt{\frac{k^2}{2E_{\text{kin}}}}v_n$, $U_n = \sqrt{\frac{1}{2E_{\text{kin}}}}u_n$, widzimy, że $V_n^2 + U_n^2 = 1$, a więc możliwe prędkości ciał leżą na okręgu jednostkowym płaszczyzny (U, V) .

Jak powiązać prędkości ciał przed i po ich zderzeniu? Początkowo $U_1 = 0$, $V_1 = -1$. Z zasady zachowania pędu wynika:

$$(1) \quad kV_{2n} + U_{2n} = kV_{2n-1} + U_{2n-1}.$$

Z kolei z zasady zachowania energii mamy:

$$(2) \quad V_{2n}^2 + U_{2n}^2 = V_{2n-1}^2 + U_{2n-1}^2.$$

Z pierwszego równania $V_{2n} - V_{2n-1} = \frac{1}{k}(U_{2n-1} - U_{2n})$, z drugiego zaś $(V_{2n} - V_{2n-1})(V_{2n} + V_{2n-1}) = (U_{2n-1} - U_{2n})(U_{2n-1} + U_{2n})$, co po podstawieniu i prostych rachunkach daje:

$$(3) \quad U_{2n} = \frac{2k}{k^2 + 1}V_{2n-1} - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}U_{2n-1},$$

$$(4) \quad V_{2n} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}V_{2n-1} + \frac{2k}{k^2 + 1}U_{2n-1}.$$

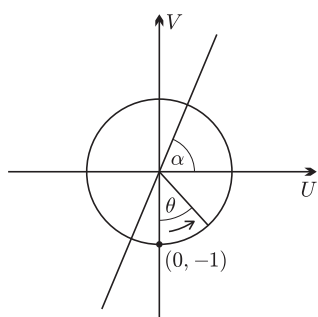
Po uwzględnieniu związku $V_{2n+1} = V_{2n}$ i $U_{2n+1} = -U_{2n}$ otrzymujemy:

$$(5) \quad U_{2n+1} = -\frac{2k}{k^2+1}V_{2n-1} + \frac{k^2-1}{k^2+1}U_{2n-1},$$

$$(6) \quad V_{2n+1} = \frac{k^2-1}{k^2+1}V_{2n-1} + \frac{2k}{k^2+1}U_{2n-1}.$$

Aby wyznaczyć liczbę wszystkich zderzeń ciał, trzeba znaleźć takie największe N (w zależności od k , czyli N_k), że $u_{2N_k-1} > v_{2N_k-1}$, ale $u_{2N_k+1} \leq v_{2N_k+1}$ (jeśli po N_k -tym zderzeniu i odbiciu się od ściany pierwsze ciało będzie miało mniejszą prędkość niż drugie, to nigdy już go nie dogoni). Liczba wszystkich zderzeń ciało-ciało i ciało-ściana będzie równa $2N_k$, z wyjątkiem sytuacji $u_{2N_k+1} = 0$, kiedy ostatnim zderzeniem byłoby zderzenie ciało-ciało i wszystkich zderzeń byłoby $2N_k + 1$. Jak obliczyć N_k ?

Można spróbować zamienić rekurencję na jawny wzór na u_{2n} i v_{2n} – ambitnego Czytelnika zachęcamy do prób. Istnieje jednak prostsza metoda znalezienia warunku na N_k , niewymagająca rozwiązywania układu równań rekurencyjnych.



Popatrzmy na współczynniki w równaniach (5) i (6) – ponieważ $(\frac{k^2-1}{k^2+1})^2 + (\frac{2k}{k^2+1})^2 = 1$, możemy dla pewnego kąta θ położyć $\cos \theta = \frac{k^2-1}{k^2+1}$, $\sin \theta = \frac{2k}{k^2+1}$. Widać więc geometryczną interpretację zderzeń – po zderzeniu ciało-ciało i ciało-ściana punkt (U_{2n}, V_{2n}) , reprezentujący prędkości obu ciał, podlega na okręgu obrotowi o kąt θ ! Stąd po n takich odbiciach punkt początkowy $(0, -1)$ zostanie obrócony o kąt $n\theta$.

Co geometrycznie oznacza warunek $u_{2n} > v_{2n}$? W naszych współrzędnych oznacza to, że $U_{2n} > \frac{1}{k}V_{2n}$, a więc że punkt (U_{2n}, V_{2n}) leży poniżej prostej o kącie nachylenia α , gdzie $\tan \alpha = k$. A więc szukane N_k to takie, dla którego jeszcze $-\frac{\pi}{2} + N_k\theta < \alpha$, ale już $-\frac{\pi}{2} + (N_k + 1)\theta \geq \alpha$ (pamiętajmy, że zaczynamy z punktu $(0, -1)$ o kącie $-\frac{\pi}{2}$).

Chcemy przekonać się, czy faktycznie $\frac{2N_k+1}{k}$ zbiega do π , gdy $k \rightarrow \infty$ (granica $\frac{2N_k}{k}$ będzie taka sama). Wystarczy wykazać, że $\frac{N_k}{k}$ zbiega do $\frac{\pi}{2}$. W tym celu przepiszmy powyższe nierówności jako

$$(7) \quad \alpha - \theta \leq -\frac{\pi}{2} + N_k\theta < \alpha,$$

co po podzieleniu stronami przez $k\theta$ i uporządkowaniu daje

$$(8) \quad \frac{\alpha + \frac{\pi}{2}}{k\theta} - \frac{1}{k} \leq \frac{N_k}{k} < \frac{\alpha + \frac{\pi}{2}}{k\theta}.$$

Mamy $\tan \alpha = k$, $\sin \theta = \frac{2k}{k^2+1}$, zatem $\alpha = \arctg k$, $\theta = \arctg \frac{2k}{k^2-1}$. Widzimy od razu, że przy $k \rightarrow \infty$ kąt α zbiega do $\frac{\pi}{2}$. Obliczenie granicy $k\theta = k \arctg \frac{2k}{k^2-1}$ wymaga odrobinę więcej rachunków (można wykorzystać $\arctg r/r \approx 1$ dla r bardzo bliskich zeru), ale nie jest trudne i daje w wyniku $k\theta \rightarrow 2$.

Podstawmy to do nierówności (8): $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ przy $k \rightarrow \infty$, zatem granica lewej i prawej strony wynosi $\frac{\pi}{2}$. Stąd wynika, że faktycznie $\frac{N_k}{k} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, czyli łączna liczba zderzeń ciał oraz ciała ze ścianą po podzieleniu przez k zbiega do π !

Czytelnik może zastanowić się, jakie jest tempo zbieżności, a więc dlaczego zwiększając stosunek mas ciał 100 razy, rzeczywiście dostajemy (z dokładnością do parzystości na ostatnim miejscu) kolejną cyfrę rozwinięcia dziesiętnego π . Przy okazji, jeśli będziemy zwiększać stosunek mas ciał nie 100, ale, na przykład, 49 albo 169 razy, też dostaniemy kolejne cyfry rozwinięcia π , tylko w systemie siódemkowym albo trzynastkowym.

Małą Deltę przygotowali Marcin KOTOWSKI i Michał KOTOWSKI

Amatorskie pomiary meteorologiczne: Prosty detektor wyładowań atmosferycznych

Krzysztof MARKOWICZ*



W każdej sekundzie na Ziemi zdarza się około 100 wyładowań atmosferycznych związanych z około 1800 występującymi równocześnie burzami. Mogłoby się wydawać, że wyładowania te prowadzą do rozładowania olbrzymiego kondensatora, którego jedną z okładek jest warstwa atmosfery zwana jonosferą, a drugą – powierzchnia Ziemi. Tymczasem jest zupełnie na odwrót: globalny kondensator jest rozładowywany słabymi prądami jonowymi płynącymi w powietrzu, a ładowany właśnie podczas wyładowań atmosferycznych. Jak to się dzieje?

Jonosfera jest warstwą atmosfery rozciągającą się na wysokości od około 50 do 1000 km nad powierzchnią Ziemi. Charakteryzuje się ona występowaniem swobodnych jonów, które powstają wskutek jonizacji cząsteczek gazów atmosferycznych pod wpływem promieniowania słonecznego (głównie ultrafioletowego) oraz promieniowania kosmicznego. Jonosfera jest naładowana dodatnio względem powierzchni Ziemi, a różnica potencjałów wynosi około 400 kV. Układ Ziemia-jonosfera stanowi kulisty kondensator o pojemności około 2,5 F, a więc naładowany ładunkiem około 1 mln C. Powietrze, wypełniające ten kondensator, jest dobrym izolatorem i przewodzi prąd tylko w szczególnych warunkach. W słabo przewodzących dolnych warstwach atmosfery ziemskiej występują różnoimiennie naładowane molekuly gazów, spełniające rolę nośników prądu elektrycznego. Powstają one wskutek oddziaływania promieniowania kosmicznego, promieniowania jonizującego płaszczka Ziemi oraz gazów promieniotwórczych (np. radonu). Obecność niezerowego pola elektrycznego w dolnej atmosferze oraz istnienie swobodnych nośników elektrycznych powodują przepływ prądu. Prąd ten nosi nazwę prądu „ładnej pogody”, a jego gęstość wynosi około 2–3 pA/m². Gradient potencjału pola elektrycznego przy powierzchni Ziemi podczas bezchmurnej i bezwietrznej pogody wynosi około 150 V/m i maleje szybko z wysokością. Pomimo że gęstość prądu „ładnej pogody” jest niewielka, prąd ten mógłby doprowadzić w krótkim czasie do zaniku napięcia pomiędzy jonosferą a powierzchnią Ziemi. Istnieje jednak mechanizm ładowania Ziemi ładunkiem ujemnym ze średnim prądem 1800 A. Są nim burze atmosferyczne, występujące głównie w rejonach tropikalnych. Główną przyczyną wyładowań atmosferycznych jest głęboka konwekcja w dolnej atmosferze (poniżej 20 km), podczas której dochodzi do separacji ładunków elektrycznych. Mechanizm elektryzacji chmur burzowych nie jest do końca poznany. Istnieje kilka hipotez próbujących wyjaśnić ten proces, nie będą jednak one tu omawiane. Pomiary prowadzone w chmurach burzowych wykazały, że w górnych ich częściach powstaje nadmiarowy ładunek dodatni, a w dolnych – nadmiarowy ładunek ujemny. W większości wyładowań typu chmura-Ziemia dochodzi do przepływu ładunku ujemnego zgromadzonego w dolnej części chmury do powierzchni Ziemi.

W atmosferze ziemskiej poza wyładowaniami chmura-Ziemia i chmura-chmura występują także wyładowania chmura-jonosfera. Wyróżniamy trzy rodzaje zjawisk optycznych towarzyszących wyładowaniom tego typu. Są to: „czerwone krasnoludki”, występujące w postaci czerwonego błysku, „elfy”, obserwowane w postaci kręgów światła rozszerzających się promieniście w dolnej jonosferze, oraz „błękitne fontanny”, widziane w postaci niebieskich struktur przypominających odwrócony stożek. Zjawiska te na ogół nie są widoczne z powierzchni Ziemi.

Podczas wyładowania atmosferycznego emitowane są fale elektromagnetyczne oraz akustyczne. Te pierwsze widoczne są na ogół jako jasna błyskawica, ale ich zakres widmowy jest znacznie szerszy niż pasmo widzialne i obejmuje również np. fale radiowe. Można się o tym łatwo przekonać, włączając podczas burzy radio ustawione na odbiór fal długich.

Rozwiązanie zadania M 1293.

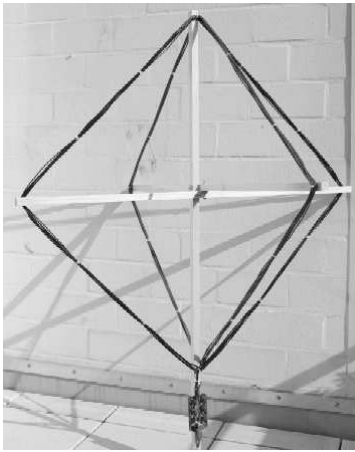
Oznaczmy przez A_0, A_1, \dots, A_6 punkty brzegu stawu, w których kolejno znajduje się ryba. Należy wykazać, że $A_6 = A_0$.

Niech k', l', m' będą prostymi prostopadłymi odpowiednio do prostych k, l, m przechodzącymi przez środek stawu. Wówczas punkt A_1 jest obrazem symetrycznym punktu A_0 w symetrii $S_{k'}$ względem prostej k' . I ogólnie, punkt A_{i+1} jest obrazem punktu A_i w symetrii względem jednej z prostych k', l', m' . Wobec tego

$$A_6 = (S_{m'} \circ S_{l'} \circ S_{k'} \circ S_{m'} \circ S_{l'} \circ S_{k'})(A_0).$$

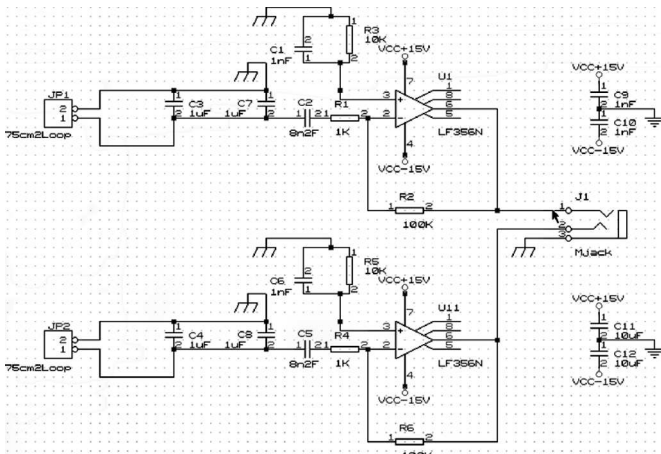
Ponieważ proste k', l', m' mają punkt wspólny, więc złożenie $S_{m'} \circ S_{l'} \circ S_{k'}$ jest symetrią S_p względem pewnej prostej p . Stąd $A_6 = (S_p \circ S_p)(A_0) = A_0$.

*Instytut Geofizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego



Rys. 1. Wygląd anteny detektora wylądowań atmosferycznych.

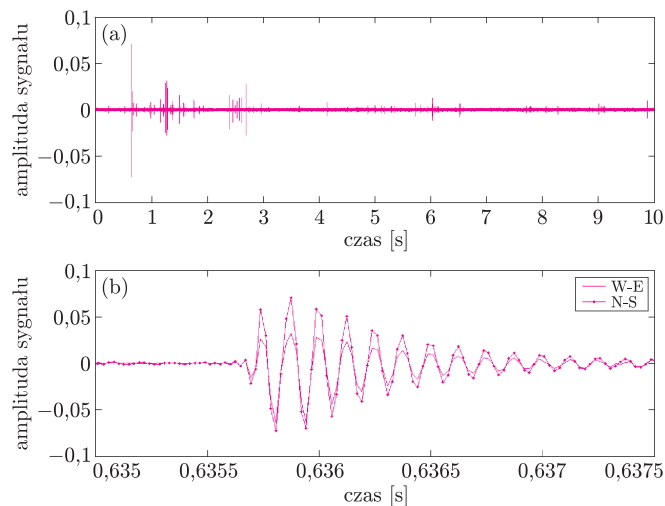
Fakt, że wylądowania atmosferyczne można wykryć na radiowych falach długich, stał się podstawą systemów lokalizacji wylądowań. Wykorzystuje to również opisany poniżej prosty przyrząd, umożliwiający rejestrację przebiegów czasowych wylądowań atmosferycznych. Głównym elementem detektora są dwie anteny leżące w prostopadłych płaszczyznach (rys. 1). Każda z anten składa się z 8 zwojów przewodu o średnicy około 1,5 mm, połączonych równoległe z kondensatorem o pojemności 1 μF (C3 i C4 na rysunku 2). Anteny mają kształt kwadratu o boku około 75 cm. Pojawiający się na końcach anten sygnał elektryczny jest wzmacniany przez prosty układ elektroniczny (rys. 2), składający się z dwóch identycznych wzmacniaczy operacyjnych LF356N, których zadaniem jest wzmocnienie prądów płynących w układach rezonansowych anten. Sygnały wyjściowe z obu wzmacniaczy podawane są bezpośrednio na wejście karty dźwiękowej komputera. Układ ten jest na tyle prosty, że może być wykonany przez osoby niemające dużego doświadczenia elektronicznego. Jego koszt waha się od 50 do 100 zł, w zależności od użytych elementów lub ich zamienników.



Rys. 2. Schemat elektroniczny wzmacniacza autorstwa Franka Kooimana.

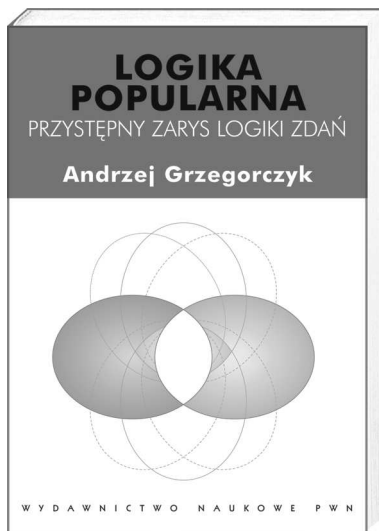
Taki detektor wylądowań atmosferycznych pracuje na długości fali około 11 kHz, co pozwala na detekcję wylądowań w odległości nawet setek kilometrów od anteny. Dostępne jest bezpłatne oprogramowanie służące do rejestracji oraz analizowania wyników pomiaru. Dokładny opis detektora wraz z oprogramowaniem znajduje się na stronie <http://members.home.nl/fkooiman/lightning/>. Zbudowany w ten sposób przyrząd może stać się jedną ze stacji amatorskiej sieci obserwacyjnej w Europie.

Zastosowanie dwóch anten w detektorze pozwala wyznaczyć azymut wylądowania. Trzeba jednak pamiętać, że sygnały przychodzące z przeciwnych kierunków widziane są tak samo przez nasz detektor, nie będziemy zatem nigdy mieć pewności, czy wylądowanie zdarzyło się np. na północ czy na południe od detektora. Na podstawie amplitudy sygnału możemy wnioskować o odległości, w jakiej nastąpiło wylądowanie atmosferyczne (rys. 3b). Jest to jednak bardzo zgrubne oszacowanie, gdyż wylądowania mogą znacznie się różnić, np. wylądowania dodatnie są z reguły dziesięciokrotnie bardziej energetyczne niż ujemne, stanowiąc jedynie 10% wylądowań chmura-Ziemia. Gdy mamy do dyspozycji kilka stacji detekcyjnych, możemy dokonać bardziej precyzyjnej lokalizacji wylądowania przy użyciu prostych metod geometrycznych. Wymaga to jednak precyzyjnej synchronizacji czasu rejestracji wylądowania pomiędzy wszystkimi komputerami sieci pomiarowej. Innym rozwiązaniem jest wykorzystanie odbiorników GPS, które są obecnie najlepszym z powszechnie dostępnych wzorców czasu. Rozwiązanie to wykorzystuje jedną z europejskich sieci obserwacji wylądowań atmosferycznych TOA (ang. *time of arrival*), <http://www.blitzortung.org/Webpages/index.php>. Amatorskie urządzenia pracujące w tej sieci są bardziej skomplikowane, a koszt zestawu do samodzielnego montażu wynosi około 200 euro.



Rys. 3. Przykład 10-sekundowej rejestracji sygnałów z detektora wylądowań atmosferycznych przy użyciu karty dźwiękowej z częstotliwością próbkowania 44100 Hz (a) oraz charakterystyka pojedynczego wylądowania (b). Na podstawie stosunku amplitud sygnałów z anten ustawionych w kierunku W-E i N-S określamy azymut wylądowania.

Niezależnie od szczegółów technicznych, przy odpowiedniej liczbie stacji pomiarowych można określić lokalizację wylądowań atmosferycznych z typową dokładnością od kilku do kilkudziesięciu kilometrów. Umożliwia to obserwację przesuwania się systemów burzowych, jak również badanie ich rozwoju oraz zaniku.



Wydawnictwo Naukowe PWN,
Warszawa 2010

Logika popularna. Przystępny zarys logiki zdań Andrzej Grzegorzcyk

Wiele lat temu podczas egzaminu wstępnego na studia matematyczne zostałem zapytany o kwadrat logiczny. Rok wcześniej ukazało się trzecie już wydanie *Logiki popularnej* Andrzeja Grzegorzcyka. Rzeczywiście, w owych czasach logika stanowiła element wykształcenia matematycznego już na poziomie nauki szkolnej.

Logikę przedstawia się często w sposób formalny, pokazuje się tabelki spójników logicznych, operuje się zerami i jedynkami (fałszem i prawdą). Ot, zabawa w symbole. Andrzej Grzegorzcyk wyprowadza logikę z naszych działań codziennych: przeprowadzamy rozumowania, żeby powiększyć naszą wiedzę, wnioskujemy ze znanych nam przesłanek, by podejmować skuteczne działania. Ten sposób poszerzania zakresu wiedzy jest skuteczny jedynie wtedy, gdy w rozumowaniu nie popełniamy błędów. Dlatego ważna jest znajomość podstawowych reguł logicznych, ale także umiejętność budowania poprawnych zdań, niezbędna do tego, by można było precyzyjnie analizować ich wartości logiczne. Tą drogą dochodzimy do rozważań o spójnikach zdaniowych i o relacjach między wartością logiczną zdania złożonego a wartościami logicznymi jego składowych zdań prostych, poznajemy prawa logiczne oraz podstawową regułę wnioskowania, jaką jest reguła odrywania – stosowana przecież bezwiednie już w szkole, kiedykolwiek korzystamy ze znanych twierdzeń. Pierwszy element formalny – symbol implikacji – pojawia się dopiero na stronie 61, kiedy czytelnik jest dobrze przygotowany do symbolicznego zapisu wnioskowań, omawianych szeroko na wcześniejszych stronach.

Na końcu książki autor przytacza przykłady zastosowań logiki (mówi także o jej zastosowaniach w naukach humanistycznych) i omawia błędy popełniane często we wnioskowaniach, w tym i te, które wynikają z nieprecyzyjności wypowiedzi.

Kwintesencją książki może być następujący cytat: „Aby więc sprawnie rozumować, warto wykrywać prawa logiki, których nieświadomie używamy, i stosować je świadomie w różnych wnioskowaniach”.

W. B.



Orzeł czy reszka? Hugo Steinhaus

Czy można zacząć elementarne wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa od prawa wielkich liczb? Można – i co więcej, można to zrobić tak, by czytelnik poczuł się aktywnym uczestnikiem rozważań nad grą w orła i reszkę, bo to na tym przykładzie buduje Steinhaus wprowadzenie w probabilistykę.

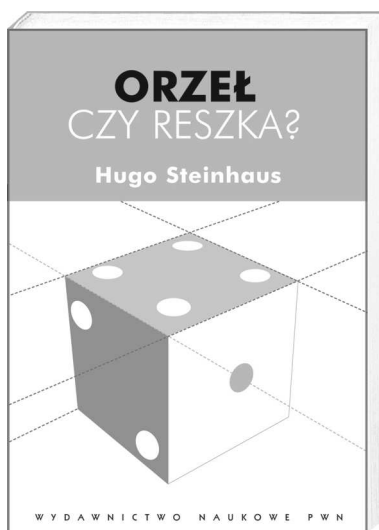
Czy prawdopodobieństwo musi być pojęciem wprowadzanym aksjomatycznie? Nie musi. Autor wyprowadza prawdopodobieństwo jako pojęcie wtórne wobec częstości, jako idealizację częstości, co pozwala dobrze uchwycić istotę tego pojęcia.

Steinhaus nie przeprowadza wykładu z rachunku prawdopodobieństwa. Prowadzi czytelnika przez liczne sytuacje, w których myślenie probabilistyczne wydaje się naturalnym sposobem na ich ogarnięcie umysłem, podobnie jak naturalne wydają się rozumowania opisywane w książce, a także naturalne jest wyłanianie się kolejnych tematów.

Kiedy mówimy o rzucie monetą, zakładamy, że moneta jest symetryczna, a więc prawdopodobieństwo wyrzucenia orła jest równe prawdopodobieństwu wyrzucenia reszki. A jeśli moneta symetryczna nie jest? Wtedy można dokonać jej *symetryzacji*, co bynajmniej nie oznacza ingerencji w jej strukturę, lecz szczególnie sposób zapisywania wyników rzutów. Po co stosować symetryzację? Na przykład po to, by wygenerować ciąg przypadkowy liczb. Do czego może służyć ciąg przypadkowy liczb? Na przykład, do wyceny towarów. Jak zbudować prawdziwie losowy ciąg przypadkowy bez losowania? Steinhaus proponuje własną metodę, czyli tablicę *żelazną*. Z rozważań nad kwadratem średniej i większą od niego średnią kwadratów zestawu liczb dochodzimy do pojęcia nadwyżki, czyli wariancji, a potem dyspersji, zwanej dziś częściej odchyleniem standardowym (autor wyjaśnia na przykładzie, dlaczego jest ono obliczane jako pierwiastek kwadratowy), a przy okazji dowiadujemy się, jak znalezienie tej ostatniej wartości może pomóc w ustaleniu, która obsługa tramwaju zasługuje na premię za staranną pracę.

Hugo Steinhaus zostawił w matematyce bardzo wyraźny ślad także w tych obszarach, gdzie matematyka pomaga opanować rzeczywistość. *Orzeł czy reszka* jest świetną ilustracją takiego podejścia do matematyki, ale przede wszystkim jest świetną lekturą. A przy okazji, niemal niezauważalnie, można zrozumieć, o co chodzi w rachunku prawdopodobieństwa.

W. B.



Wydawnictwo Naukowe PWN,
Warszawa 2010

Informatyczny kącik olimpijski (35): Cukierki

W tym kąciku spróbujemy rozwiązać zadanie z Olimpiady Informatycznej Środkowej Europy z roku 2004, które to zawody odbyły się w Rzeszowie. Tytuł zadania to *Sweets*, co można przetłumaczyć na polskie *Cukierki*.

Zgodnie z treścią zadania Jaś ma $n \leq 10$ słojów z cukierkami, zawierających kolejno m_1, m_2, \dots, m_n sztuk tychże. Chłopiec chce zjeść co najmniej a , a co najwyżej b cukierków, ale nie wie, ile dokładnie i ile którego rodzaju. Naszym zadaniem jest obliczyć, na ile sposobów może on podjąć decyzję, i podać resztę z dzielenia wyniku przez 2004.

Najprostszym podejściem jest zdecydować osobno, ile wziąć cukierków z każdego ze słojów, a następnie sprawdzić, czy w sumie wzięło się ich między a a b sztuk. W ten sposób uzyskuje się złożoność czasową $O(m_1 m_2 \dots m_n)$.

Takie rozwiązanie nas nie satysfakcjonuje, możemy więc spróbować je przyspieszyć. Podstawowym pomysłem jest zastosowanie programowania dynamicznego. Niech $t_k[x]$ oznacza liczbę sposobów wzięcia x cukierków z pierwszych k słojów. Wiemy, że $t_0[0] = 1$ i $t_0[x] = 0$ dla $x > 0$. Dla $k > 0$ mamy natomiast zależność rekurencyjną

$$t_k[x] = \sum_{i=0}^{\min(m_k, x)} t_{k-1}[x-i].$$

Zauważmy, że wynikiem jest reszta z dzielenia liczby $\sum_{i=a}^b t_n[i]$ przez 2004. Zakładając, że wszystkie działania po drodze będziemy wykonywać modulo 2004, otrzymamy rozwiązanie o złożoności czasowej do $O(b \cdot (m_1 + m_2 + \dots + m_n))$.

Możemy to jeszcze poprawić, jeśli zauważymy, że sumy potrzebne do obliczenia $t_k[x]$ mają konkretną postać. Chodzi o to, że sumujemy kolejne pola tablicy $t_{k-1}[*]$. W takim razie możemy zastosować tzw. sumy prefiksowe, tzn. po obliczeniu tablicy $t_{k-1}[*]$ obliczyć dodatkowo tablicę $s_{k-1}[*]$ określoną następująco:

$$s_{k-1}[x] = \sum_{i=0}^x t_{k-1}[i].$$

Aby to zrobić szybko, korzystamy ze wzorów: $s_{k-1}[-1] = 0$ oraz

$$s_{k-1}[x] = s_{k-1}[x-1] + t_{k-1}[x] \quad \text{dla } x \geq 0.$$

Używając takiej tablicy pomocniczej, otrzymujemy wzór

$$t_k[x] = s_{k-1}[x] - s_{k-1}[x - \min(m_k, x) - 1],$$

który pozwala na zmniejszenie złożoności czasowej do $O(bn)$.

Wciąż nie jesteśmy zadowoleni – chcielibyśmy lepiej wykorzystać fakt, że n jest bardzo małe. Po pierwsze, zauważmy, że $\{a, a+1, \dots, b\} = \{0, 1, \dots, b\} \setminus \{0, 1, \dots, a-1\}$, a zatem wystarczy umieć obliczać wynik, gdy chcemy wybrać co najwyżej r cukierków, i dwukrotnie skorzystać z tej metody, dla $r = b$ oraz $r = a - 1$. Przypuścimy w dalszych rozważaniach, że chcemy wybrać z n słojów łącznie co najwyżej r cukierków i dopuszczamy przy tym wybieranie liczb cukierków przekraczających ograniczenia (m_i) . Niech A_i oznacza zbiór tych wyborów cukierków, które łamią ograniczenie m_i na liczbę cukierków wyciągniętych z i -tego słoja. Interesującą nas wartością jest liczba wyborów, które *nie* należą do zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Zgodnie z zasadą włączeń i wyłączeń jest to dokładnie:

$$|A| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|,$$

gdzie A jest zbiorem wszystkich wyborów co najwyżej r cukierków. Powyższa suma zawiera 2^n składników; zastanówmy się teraz, jak je wszystkie powyznaczać.

Weźmy najpierw zbiór A . Chcemy wybrać co najwyżej r cukierków z n słojów, nie uwzględniając ograniczeń (m_i) . Można zauważyć, że jest to równoważne ustawieniu w rzędzie $n + r$ obiektów, z których n jest nierozróżnialnymi ścianami, a r – nierozróżnialnymi kropkami. Mając takie konkretne ustawienie, wybieramy tyle cukierków z pierwszego słoja, ile jest kropek przed pierwszą ścianą, tyle z drugiego, ile kropek między pierwszą a drugą ścianą, itd. Kropki za ostatnią, n -tą ścianą symbolizują cukierki, których nie wybraliśmy z żadnego słoja (jeśli wybieramy mniej niż r). Ustawień ścian i kropek jest $\binom{n+r}{n}$, więc taka jest też moc zbioru A .

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla pozostałych przecięć zbiorów. Jeśli chcemy obliczyć $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$, chodzi nam o wybory r cukierków z n słojów, które łamią ograniczenia dla słojów o numerach $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Musimy więc ze słoja i_1 wziąć co najmniej $m_{i_1} + 1$ cukierków, ze słoja i_2 co najmniej $m_{i_2} + 1$, itd. Pozostałe cukierki wybieramy dowolnie, a więc jak wyżej dla A . W ten sposób otrzymujemy wzór

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \binom{r+n - \sum_{j=1}^k (m_{i_j} + 1)}{n},$$

przy czym trzeba zauważyć, że gdy $\sum_{j=1}^k (m_{i_j} + 1) > r$, to zarówno lewa, jak i prawa strona równania są zerami, a zatem równość zachodzi także w takim patologicznym przypadku.

Ostatecznie sprowadziliśmy problem do obliczenia 2^n symboli Newtona, z których każdy jest postaci $\binom{m}{n}$, przy czym m może być duże. Pozostaje pytanie, jak obliczać takie symbole, a konkretnie ich reszty z dzielenia przez 2004.

Mamy dwie możliwości. Możemy wykonywać operacje na dużych liczbach (co wymaga w językach używanych na zawodach własnej implementacji arytmetyki na takich liczbach) i skorzystać z zależności

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}.$$

Zauważmy, że w tym przypadku nie wystarczy pamiętać reszty z dzielenia licznika i mianownika przez 2004 – nie są one wystarczające do obliczenia reszty z dzielenia ilorazu przez 2004. (Inaczej byłoby, gdyby zawody odbywały się w roku 2003 – dlaczego?) Zakładając, że koszt czasowy operacji na liczbach rzędu b jest stały, uzyskujemy rozwiązanie o złożoności czasowej $O(2^n n^2)$.

Nie chcąc wykonywać tak żmudnych prac jak implementacja własnej arytmetyki, możemy zamiast tego spostrzec, że

$$\binom{2k}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \binom{k}{n-i},$$

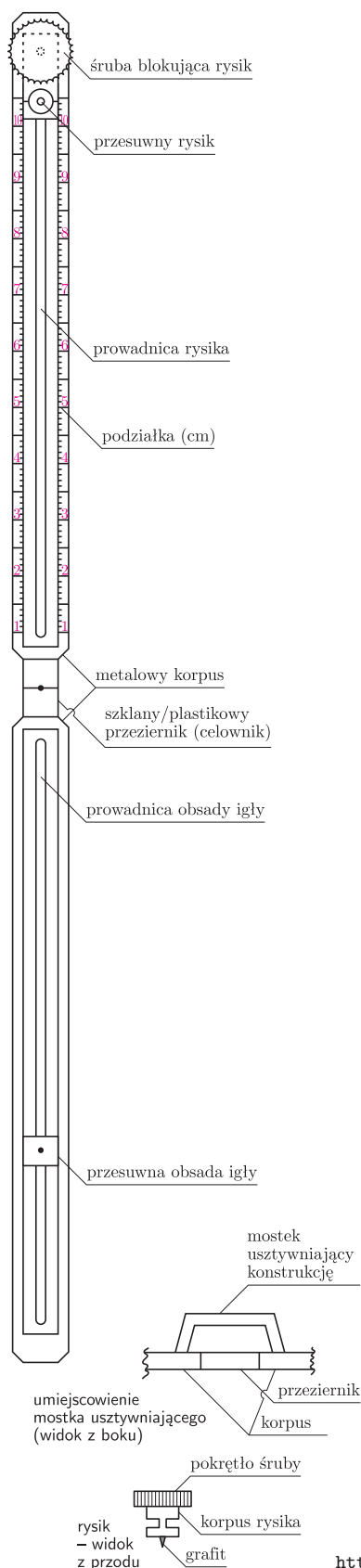
co ma łatwe uzasadnienie kombinatoryczne: chcąc wybrać n obiektów spośród $2k$, musimy, dla pewnego i , wybrać i z nich z pierwszej połowy, a $n-i$ z drugiej. Dokładając do tego znaną tożsamość $\binom{2k+1}{n} = \binom{2k}{n} + \binom{2k}{n-1}$, uzyskujemy sposób obliczania wszystkich wartości $\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \dots, \binom{m}{m}$ w czasie $O(n^2 \log m)$, przy czym operujemy tutaj na samych resztach z dzielenia przez 2004, dzięki czemu nie potrzeba własnej arytmetyki. Daje to ostatecznie rozwiązanie o złożoności czasowej $O(2^n n^2 \log b)$.

Tomasz KULCZYŃSKI

Konchoidograf na bis

Wojciech GAC*

*student, Wydział Fizyki,
Uniwersytet Warszawski



Co łączy starożytny problem trysekcji kąta z *entasis* – grecką metodą przeciwdziałania optycznemu złudzeniu „chudych” kolumn? Łączy je krzywa z rodziny cisoid, znana jako konchoida Nikomedesa. Po raz pierwszy wprowadzona przez tego greckiego matematyka w III w. p.n.e., swoją nazwę wzięła od podobieństwa (nie zawsze od razu dostrzegalnego) do muszli (łac. *concha*, gr. *κοιχη*). Z matematycznego punktu widzenia jest bardzo prosta: potrzebujemy dowolnej krzywej oraz punktu odniesienia, krzywą przedstawiamy w biegunowym układzie współrzędnych względem tego punktu, a następnie dodajemy stały parametr do promienia r :

$$r(\theta) = \alpha(\theta) + d,$$

gdzie $\alpha(\theta)$ to pierwotna krzywa, d zaś to nasz parametr przesunięcia. W czasach antycznych do wykreślania konchoidy używano niezastąpionego narzędzia wszystkich matematyków (począwszy od czasów prehistorycznych), a mianowicie patyka. Umieszczając na nim dwa nacięcia odległe o d i opierając o inny patyk wbity w punkcie odniesienia, można było wykreślić konchoidę. Postęp technologiczny nie ominął jednak tej gałęzi myśli ludzkiej. W XIX wieku społeczność architektów (zmęczona zapewne używaniem prymitywnych metod) coraz wyraźniej domagała się przyrządu kreślarskiego z prawdziwego zdarzenia. Pierwszym bodaj, który na to zapotrzebowanie odpowiedział, był William Ford Stanley (niezwiązany ze znaną firmą produkującą narzędzia). Rysunki urządzenia można znaleźć w książce jego autorstwa pt. *A Descriptive Treatise on Mathematical Instruments* począwszy od strony 82 (skan książki jest dostępny za pośrednictwem Google Books). Fotografii bardzo zbliżonego rozwiązania, wprowadzonego w roku 1880 przez Canadian Centre for Architecture, można znaleźć na stronach CCA (<http://www.cca.qc.ca/en/collection/545-drawing-instruments-conchoidograph>).

Jeśli przyjrzeć się zdjęciu konchoidografu CCA, widać, iż jest on zaprojektowany bardzo oszczędnie i rzeczowo. Pojawia się pytanie, czy nie można tego rozwiązać jeszcze prościej. W dalszej części artykułu zaproponuję rozwiązanie, które, moim zdaniem, upraszcza konstrukcję konchoidografu, redukując przy tym koszty wykonania i miejsce zajmowane przez instrument (ci, którzy rzucą okiem na zdjęcie instrumentu CCA, zauważą, iż „mieszka” on w pokaźnych rozmiarów kasetce).

Rysunek przedstawia konchoidograf mojego pomysłu. Tłumaczy on w zasadzie sam siebie, pozwolę sobie jednak na omówienie szczegółów konstrukcyjnych. Podstawą urządzenia jest metalowy korpus (aluminium zdaje się dobrym kompromisem pomiędzy wagą i wytrzymałością). W swej środkowej części korpus ma wstawkę z przezroczystego materiału (szkła lub plastiku), która służy za przeziernik do „śledzenia” pierwotnej krzywej. Przeziernik jest wyposażony w krzyżyk do łatwiejszego „celowania” w krzywą. Aby wzmocnić konstrukcję, konieczne wydaje się umieszczenie metalowego „mostka” łączącego obie części korpusu, przechodzącego ponad przeziernikiem, tak by nie blokować widoku (obrazuje to „widok z boku”). Jedna z części korpusu ma wyżłobioną szynę/prowadnicę, w której osadzony jest swobodnie poruszający się element z zamontowaną wymienną igłą (będzie ona umieszczona w punkcie odniesienia). Długość wystawiającej igły nie może być duża, gdyż konchoidograf musi „leżeć” na kartce papieru po jej wbiciu (proponuję 1,5 mm). Druga część korpusu ma podobną szynę, tyle że element w niej osadzony ma tym razem śrubę blokującą go na wybranej pozycji. Element ten ma wymienny grafitowy rysik o regulowanej długości wystawiania (analogicznie do rysików stosowanych w cyrklach). Na boku widać wyciętą podziałkę wyskalowaną w centymetrach, mierzącą odległość rysika od środka przeziernika (czyli nasz parametr d). Powyższy pomysł jest właściwie bezpośrednim przedłużeniem idei „patyka z nacięciami”, tyle że z wykorzystaniem nieco wygodniejszych i trwalszych materiałów.

Dla zainteresowanych kwestiami architektonicznymi dodam jeszcze, iż *entasis* polegało na wykreśleniu konchoidy względem linii prostej, a następnie obróceniu takiego konturu o π . W efekcie otrzymywano kolumnę „pogrubioną w tali”, co przy obserwowaniu jej z pewnej odległości niwelowało wrażenie wklęsłości. Na zakończenie odnośnik dla miłośników konchoid, trysekcji i geometrii:

http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/ConchoidOfNicomedes_dir/conchoidOfNicomedes.html

życie na ży 1

W poszukiwaniu przodka

Poszukiwanie korzeni rodowych stało się popularne. Sprzyja temu łatwość dostępu do różnorodnych źródeł archiwalnych, szybka korespondencja międzykontynentalna.

Jeżeli myślimy o konkretnych przodkach, to zwykle o urodzonych w XX wieku: rodzicach, dziadkach. W mojej rodzinie, w albumie fotograficznym ocalonym z wojny, są zdjęcia: na jednym mój tata skręca wspaniałym narciarskim telemarkiem, na drugim babcia, starsza, szczupła elegancka kobieta w czarnej sukni i kapeluszu, idzie deptakiem w Krynicy.

A przodek bezimienny? Zgodnie z Karolem Darwinem wyobrażamy sobie jakiegoś małpoluda.

A jeszcze wcześniej? Pojęcie wspólnego przodka domaga się precyzyjnej definicji. Naszymi odległymi przodkami nie są znane z ZOO goryl lub szimpans. Z nimi mamy wspólnego przodka. Około 6,5 miliona lat temu żyło na świecie stworzenie, które było wspólnym przodkiem dzisiejszych człowieka i szimpansa. Nie wiemy, jak wyglądało; od tego czasu i my, i szimpansy przeszliśmy odrębne ewolucyjne drogi. Jedna z nich kończy się dziś gatunkiem *Homo sapiens*, druga – *Pan troglodytes*. My nie pochodzimy od szimpansa, szimpans nie pochodzi od człowieka. Jeśli tak, to czy mamy wspólnego przodka z żabą? Z nicieniem? Z drożdżami? Z rzodkiewnikiem?

Odpowiedź na te pytania o tak różne dziś istoty jest zawsze odpowiedzią: TAK. Współczesne metody badań z zakresu paleontologii, genetyki, a także ewolucjonizmu molekularnego, pozwalają nawet na ostrożne określenie, jak dawno żył wspólny przodek wszystkich form organizmów. Intuicyjnie wyczuwamy, że im głębiej sięgamy w historię życia, tym mniej różnorodna jest paleta hipotetycznych przodków. Aż wreszcie, cofając się w czasie, powinniśmy dojść do JEDNEGO WSPÓLNEGO PRZODKA, także wymarłych już ssaków czy dinozaurów.

Zastanówmy się, kim (czym) mógłby być taki jeden przodek?

Najprostsze dzisiejsze formy życia są jednokomórkowe. W jednej komórce zmieścić się mogą wszystkie atrybuty definicji „życia”. Komórka niesie w sobie zapis informacji, przekształca materię, pobierając ją i wydzielając do otoczenia oraz przekształcając w energię konieczną do życia, rozmnaża się do sobie podobnych. Ta pierwsza, o ile istniała, musiała jeszcze co pewien czas ulegać dziedzicznym zmianom – mutować – co skutkowało ewolucyjnymi zmianami. Gdyby ich nie było, nie byłoby także Czytelników *Delty*...

Życie zaczęło się chyba od pojedynczych komórek, które po angielsku nazwano *Last Universal Common Ancestor*, *LUCA*.

Powstały zapewne w wielu miejscach na Ziemi, może różniąc się jakimiś szczegółami, a może nawet istotnie. Prawdopodobnie, uważa się obecnie, powstały w wodzie, w temperaturze 60–70°C, otaczająca atmosfera nie niosła jeszcze tlenu. Wokół musiały także gromadzić się różne

cząsteczki organiczne (związki węgla), które stały się składnikami prakomórek. Z hipotetycznych różnych form *LUCA* tylko jedna okazała się najsprawniejsza, najdzielniejsza. Potomstwo innych, jeżeli były, wymarło po jakiejś liczbie pokoleń. Ten proces mógł także stawać się wielokrotnie, ale prawdopodobnie tylko jedna forma *LUCA* dała początek jednokomórkowym najstarszym przodkom. Działo się to mniej więcej 3,5 miliarda lat temu.

Nie znamy szczegółów tych procesów. Jak długo trwały? Jak duży był *LUCA*? Jak często się rozmnażał? Jak uzyskiwał energię? Nie wiemy i nigdy nie będziemy wiedzieć, ponieważ nie zostawił po sobie materialnych śladów, ponieważ nie jesteśmy w stanie powtórzyć w laboratorium tego zjawiska, zbyt wielu jego parametrów nie znamy.

Czy na pewno *LUCA* nie zostawił materialnych śladów? Żaden paleontolog nie wykopie takiej skamieniałości, ale zostały po nim do dziś żywe wykopaliska, są to liczne i ważne procesy i cząsteczki znajdujące się we współczesnych organizmach.

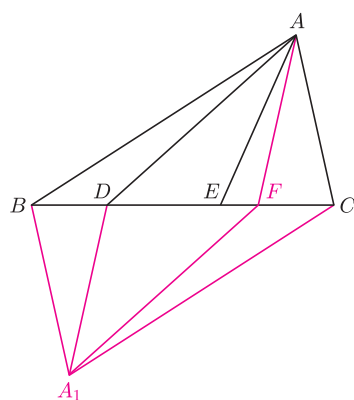
Jest takim śladem uniwersalny kod genetyczny, nieomal bez wyjątków używany przez wszystkie organizmy. Jeżeli były inne próby zakodowania informacji komórkowej, to nie przeżyły wraz ze swoimi nosicielami. Innym śladem są pozostałości tzw. świata RNA, pozwalające na sformułowanie hipotezy o prostszym – niż obserwowany obecnie – sposobie kodowania informacji i zamieniania jej na cząsteczki-wykonawców. Dziś informacja zakodowana jest w DNA, wykonawcy to białka, pośredniczące cząsteczki to RNA. Ale według jednej z hipotez w zamierzchłej przeszłości RNA spełniał obie te funkcje, zapewne *LUCA* tak właśnie dawał sobie radę z nośnikiem informacji i jej ekspresją.

Wreszcie uniwersalny plan budowy jednostki żyjącej, komórki, też świadczy o wspólnym pochodzeniu. Wszystkie komórki są otoczone błoną, strukturą, która – jak w dziecięcej wylizance – niektóre substancje przepuszcza, a niektóre zatrzymuje. Dzięki błonie komórkowej to, co w środku, to świat zamknięty, lecz komunikujący się z otoczeniem.

Ale może zaczynaliśmy się trochę (a może zupełnie) inaczej. Ten obszar biologii, jak mało który, nadaje się do przemyślenia i tworzenia hipotez. Myśląc o nim, znajdujemy się w najlepszym naukowym towarzystwie.

Magdalena FIKUS

Chodzi mi o to, aby język giętki powiedział wszystko, co pomyśli głowa



Rys. 1

Na stronie Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej w *Delcie* 7/2010 omówione były najtrudniejsze dwa zadania finału XLI Olimpiady Matematycznej. Spójrzmy teraz na bodaj najłatwiejsze zadanie tego bardzo trudnego finału – rozwiązało je 39 finalistów, z tego 29 bezbłędnie.

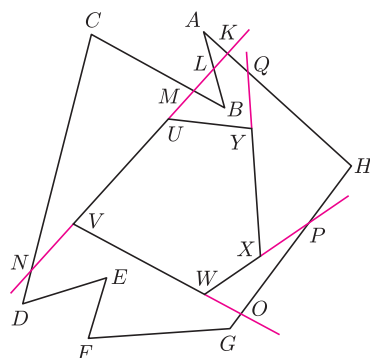
Zadanie 4. Wewnątrz boku BC trójkąta ABC leżą różne punkty D i E , przy czym $BD < BE$. Niech p_1 i p_2 oznaczają obwody trójkątów ABC i ADE . Udowodnić, że $p_1 > p_2 + 2 \cdot \min(BD, EC)$.

Rozwiązanie. Dla ustalenia uwagi założmy, że $BD \leq EC$. Niech F będzie takim punktem odcinka EC , że $BD = FC$. Oczywiście, $\min(BD, EC) = BD = \min(BD, FC)$. Obwód trójkąta ADF nie jest mniejszy od obwodu trójkąta ADE (równy tylko, gdy $F = E$, tzn. $BD = EC$), bo $AF + FE \geq AE$. Wystarczy więc dowieść, że

$$AB + BC + CA > AD + DF + FA + 2BD = AD + BC + FA,$$

czyli $AB + CA > AD + FA$. Niech A_1 będzie punktem symetrycznym do A względem środka odcinka BC . Figury ABA_1C i ADA_1F są równoległobokami, przy czym pierwszy zawiera drugi, więc obwód pierwszego, czyli $2AB + 2AC$, jest większy od obwodu drugiego, tj. od $2AD + 2AF$.

To wyróżnione zdanie bardzo speszyło wielu zawodników: bo niby z czego to wynika? Przyjrzyjmy się czemuś ogólniejszemu – *jeśli wielokąt wypukły w zawarty jest wewnątrz wielokąta v* (już niekoniecznie wypukłego), *to obwód w jest mniejszy od obwodu v* . Prawda, ale jak to uzasadnić? Właściwie od razu widać, że argumenty decydujące są dwa: łamana łącząca końce odcinka jest od niego dłuższa i wielokąt wypukły jest przecięciem półpłaszczyzn o brzegach zawierających jego boki.

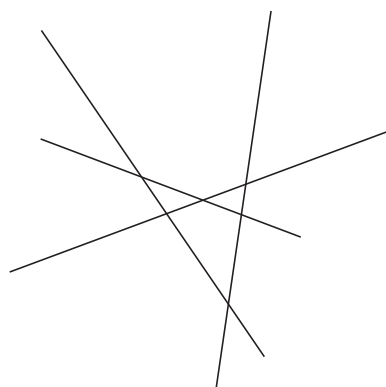


Rys. 2

Posługując się tymi argumentami, z łatwością stwierdzamy, że obwód wielokąta $w = UVWXY$ z rysunku 2 jest mniejszy od obwodu wielokąta $v = ABCDEFGH$ nie tylko dlatego, że to widać na oko. Odetnijmy od v wszystko, co nie leży w tej półpłaszczyźnie zawierającej w , której brzegiem jest prosta UV – zostanie wielokąt $KLBMNDEFGH$, który ma obwód mniejszy od v , bo łamana KAL jest dłuższa od KL , a $M-CN$ dłuższa od MN . Tnijmy dalej: teraz odrzucamy to, co nie leży w tej półpłaszczyźnie zawierającej v , której brzegiem jest prosta VW – zostanie $KLBMVOH$ i tnijmy dalej... Będziemy otrzymywali w ten sposób ciąg wielokątów o coraz mniejszych obwodach, ale ciągle zawierających w : $v = ABCDEFGH$, $KLBMNDEFGH$, $KLBMVOH$, $KLBMVWPH$, $KLBMVWXQ$, $UVWXY = w$.

No dobrze, to był przykład, ale jak to zapisać ogólnie? I tak okazuje się, że największa trudność leży w umiejętności zapisania – nawet prostej, w gruncie rzeczy – myśli.

Czy umiesz to sobie wyobrazić? A czy umiesz dowiedzieć, że tak jest?



Cztery proste leżą na płaszczyźnie w ten sposób, że każde trzy z nich wyznaczają trójkąt – tak jak na rysunku obok.

Czy potrafisz ujrzeć oczyma wyobraźni parabolę styczną do każdej z tych prostych? A czy umiesz udowodnić, że dla każdych czterech takich prostych istnieje dokładnie jedna taka parabola?

SPRÓBUJ!

A może potrafisz wyobrazić sobie okręgi opisane na każdym z czterech trójkątów wyznaczonych przez te proste i widzisz, że mają one wspólny punkt? Jak tego dowiedzieć?

SPRÓBUJ!

A teraz wyobraź sobie równocześnie jedno i drugie. Zapewne przyszło Ci do głowy, że wspólny punkt tych czterech okręgów to ognisko tej paraboli.

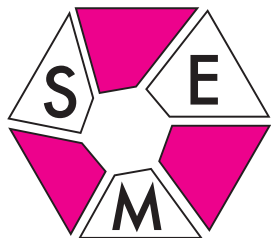
UDOWODNIJ TO!

Warto pamiętać, iż ognisko paraboli to taki punkt, że promienie światła, wychodzące z niego, po odbiciu od tej paraboli wszystkie mają jeden kierunek – są równoległe (a więc – wbrew zapowiedzi – znalazła się tu i fizyka).

M. K.

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

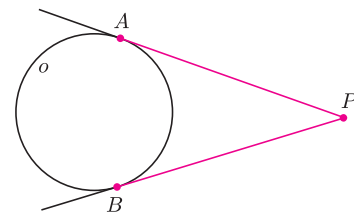
www.sem.edu.pl



Kolejny plakat SEM to dwanaście rysunków. Każdy z nich to zadanie, w którym należy udowodnić, że pewne odcinki są równe.

Pierwszy rysunek w pierwszym wierszu ilustruje tak zwane

Najmocniejsze twierdzenie geometrii: $PA = PB$, gdzie proste PA i PB to styczne do okręgu o .

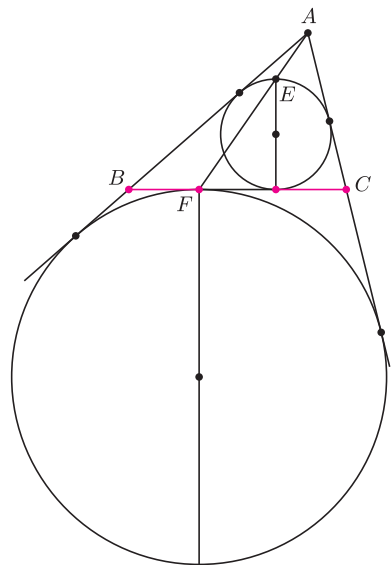
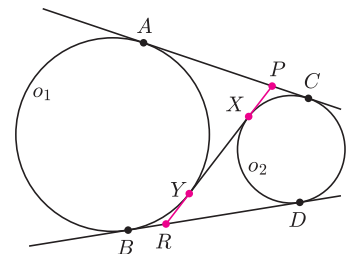


Dowód tego faktu jest prosty, więc nie będziemy go tu przytaczać.

Wprowadźmy oznaczenie: $Po = PA = PB$.

W zadaniu na drugim rysunku mamy udowodnić, że $Po_2 = Ro_1$.

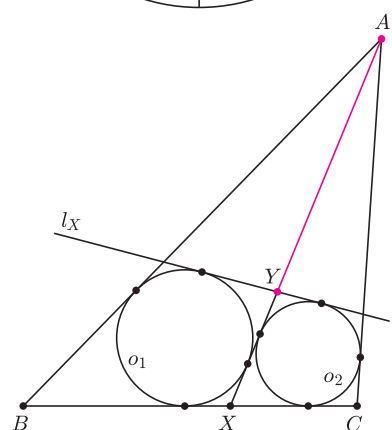
Prostą konsekwencją twierdzenia pierwszego jest równość $AC = BD$, czyli $Po_1 + Po_2 = Ro_1 + Ro_2$, czyli $(Po_2 + |XY|) + Po_2 = Ro_1 + (Ro_1 + |XY|)$. A stąd otrzymujemy tezę.



Spójrzmy teraz na środkowy rysunek w dolnym rzędzie. Dorysujmy okrąg dopisany do trójkąta ABC – tak jak obok. Zauważmy, że jednokładność o środku A , która przekształca mały okrąg na duży, jednocześnie przekształca punkt E na punkt F . Daje to współliniowość punktów A, E, F . Równość, którą mamy tu udowodnić, wynika z poprzedniego zadania.

Rozwiążmy teraz zadanie, którego nie ma na plakacie, ale w jego rozwiązaniu powołamy się na tezę zadania drugiego:

Dany jest trójkąt ABC . Punkt X należy do boku BC tego trójkąta. W trójkąty ABX i ACX wpisane są okręgi o_1 i o_2 . Prosta l_X , różna od prostej BC , jest styczna zewnętrznie do okręgów o_1 i o_2 . Proste l_X i AX przecinają się w punkcie Y . Wykazać, że długość odcinka AY nie zależy od wyboru punktu X .



Zauważmy, że z zadania drugiego wynika, że $Xo_1 = Yo_2$ oraz $Xo_2 = Yo_1$ (patrz rysunek obok).

Obliczmy sumę $AB + AC - BC$. Po prostych rachunkach otrzymujemy:

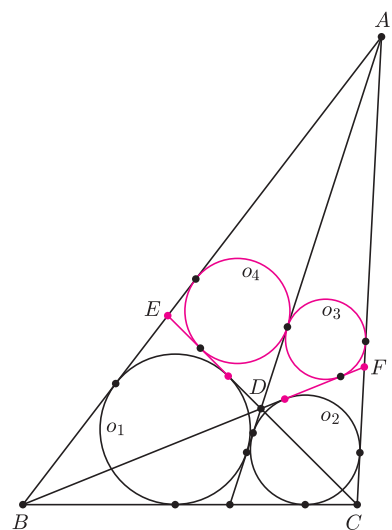
$$\begin{aligned} AB + AC - BC &= \\ &= (Ao_1 + Bo_1) + (Ao_2 + Co_2) - (Bo_1 + Co_2 + Xo_1 + Xo_2) = \\ &= AY + Yo_1 + AY + Yo_2 - Xo_1 - Xo_2 = 2 \cdot AY. \end{aligned}$$

Przed omówieniem kolejnego rysunku z plakatu polecamy Czytelnikowi następujące zadanie: *Wykazać, że w czworokąt wypukły $AEDF$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi wpisane w trójkąty AED i AFD są styczne.*

W zadaniu na trzecim plakatowym rysunku mamy udowodnić, że (patrz rysunek obok) $Eo_1 = Fo_2$.

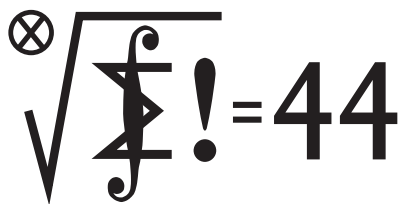
Skorzystamy z tego, że istnienie okręgu wpisanego w czworokąt wklęsły $ABCD$ jest równoważne temu, że $AB + CD = BC + DA$. Analogicznie dla czworokąta wklęsłego $ACBD$ otrzymujemy równość $AC + BD = BC + DA$. Z tych dwóch równości wynika, że $AB + CD = AC + BD$. To zaś jest równoważne temu, że istnieje okrąg wpisany w czworokąt wklęsły $ABDC$. Ten okrąg jest jednocześnie wpisany w czworokąt wypukły $AEDF$. Wobec tego okręgi o_3 i o_4 są styczne.

Pozostaje jeszcze zauważyć, że $Eo_1 = Do_4 = Do_3 = Fo_2$.



Joanna BEDNARCZUK i Jerzy BEDNARCZUK

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
595 ($WT = 2,58$) i 596 ($WT = 1,38$)
z numeru 2/2010

Marek Prauza	Poraj	45,14
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	42,35
Marek Spychała	Warszawa	41,22
Piotr Kumor	Olsztyn	40,19

Marek Prauza przekracza „44” już po raz
czwarty.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>

Zadania z matematyki nr 607, 608

Redaguje Marcin E. KUCZMA

607. Niech X będzie zbiorem n -elementowym ($n > 3$). Wyznaczyć największą liczbę m , dla której w zbiorze X istnieje m podzbiorów, z których żaden nie zawiera się w innym oraz żaden nie jest równoliczny z innym.

608. Znaleźć wszystkie funkcje określone na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające nierówność

$$f(x) - f(y) \geq f(xy)(y - x) \quad \text{dla } x, y > 0.$$

Zadanie 608 zaproponował pan Tomasz Tkocz z Rybnika.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2010

Przypominamy treść zadań:

603. Na niektórych polach kwadratowej planszy o parzystych wymiarach $n \times n$ stoją pionki. Co sekundę jeden z pionków przechodzi na wolne pole sąsiednie (tj. mające wspólny bok z polem, na którym ten pionek stał). Po pewnym czasie wszystkie pionki znalazły się na swoich wyjściowych pozycjach. Okazało się ponadto, że każdy pionek wykonał n^2 ruchów i odwiedził wszystkie pola planszy. Dowieść, że był moment, w którym żaden pionek nie stał na swoim polu wyjściowym. Czy mogło się zdarzyć, że był dokładnie jeden taki moment?

604. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Znaleźć wszystkie układy liczb rzeczywistych x_1, \dots, x_n , spełniające układ równań

$$x_1 + \dots + x_n = n, \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 = n^2$$

oraz nierówności $x_i \leq 2$ dla $i = 1, \dots, n$.

603. Niech p będzie tym pionkiem, który najpóźniej opuścił swoje „domowe” pole P i niech q będzie tym pionkiem, który najwcześniej powrócił na swoje pole Q . Jest jasne, że start pionka p musiał poprzedzić powrót pionka q , skoro ten ostatni mógł odwiedzić pole P .

W trakcie swojej wędrówki pionek p wszedł na pole Q i zszedł z tego pola; zaś pionek q wszedł na pole P i zszedł z tego pola. Te cztery ruchy musiały mieć miejsce pomiędzy startem p z pola P i powrotem q na pole Q . Przez ten czas wszystkie pozostałe pionki były w podróży, skoro każdy z nich wyruszył w drogę wcześniej niż p , a powrócił później niż q (każdy z nich wykonał n^2 ruchów – ten warunek gwarantuje, że w trakcie wędrówki nie wpadł na chwilę do domu).

Tak więc czas, przez który wszystkie pionki były w drodze, trwał co najmniej cztery sekundy. Były zatem co najmniej trzy momenty (rozdzielające ruchy), w których żaden pionek nie stał na swoim polu.

[A czy musiały być cztery takie momenty – czyli czy od chwili startu pionka p do chwili powrotu pionka q musiało upłynąć co najmniej pięć sekund? Zostawiamy Czytelnika z tym nietrudnym pytaniem.]

604. Niech (x_1, \dots, x_n) będzie rozwiązaniem tego układu równań i nierówności. Liczby nieujemne $y_i = 2 - x_i$ ($i = 1, \dots, n$) spełniają równania

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (2 - x_i) = 2n - n = n$$

oraz

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n (4 - 4x_i + x_i^2) = 4n - 4n + n^2 = n^2.$$

A ponieważ

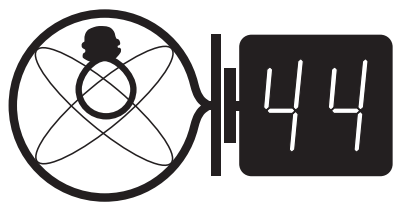
$$\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i < j} y_i y_j,$$

z uzyskanych zależności wynika, że

$$\sum_{i < j} y_i y_j = 0.$$

To oznacza, że liczby y_1, \dots, y_n są wszystkie z wyjątkiem jednej równe zero; zaś ta jedna jest równa n (skoro $\sum y_i = n$). Równoważnie: liczby x_1, \dots, x_n są wszystkie z wyjątkiem jednej równe 2; zaś ta jedna jest równa $2 - n$. Nietrudno sprawdzić, że każdy taki układ (x_1, \dots, x_n) spełnia oba zadane równania.

Klub 44

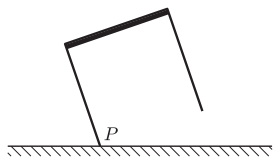


Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
496 ($WT = 1,00$) i 497 ($WT = 3,28$)
z numeru 4/2010

Michał Kozlik	Gliwice	43,69
Marian Łupieżowicz	Gliwice	36,55
Jacek Piotrowski	Rzeszów	34,15
Tomasz Rudny	Warszawa	31,68
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	30,57
Jerzy Witkowski	Radlin	30,54
Dariusz Wilk	Rzeszów	26,57

Pan Wilk uaktywnił się po 18-letniej przerwie! Proszę się nie niepokoić, niczyje stare konto w Klubie nie zaginie (no, chyba że powódź, pożar czy inna katastrofa – odpuka!).



500. Oznaczmy szukane prędkości jako v_N i v_F , prędkość dźwięku jako v_d , a odległość między graczami jako s . Czas lotu piłki Fedala wynosi s/v_F , a czas przejścia sygnału dźwiękowego na tej samej drodze jest równy s/v_d , więc stoper kibica Naderera zarejestruje odstęp między uderzeniami równy $s/v_F - s/v_d$, natomiast przy locie piłki w stronę przeciwną – odstęp $s/v_N + s/v_d$. Zatem

$$\frac{1}{v_F} - \frac{1}{v_d} = 0,8 \left(\frac{1}{v_N} + \frac{1}{v_d} \right).$$

Z pomiarów kibica Fedala wynika równanie

$$\frac{1}{v_N} - \frac{1}{v_d} = 0,85 \left(\frac{1}{v_F} + \frac{1}{v_d} \right).$$

Stąd wynika $v_N = 0,0947v_d$, $v_F = 0,0976v_d$, a po podstawieniu $v_d = 340$ m/s otrzymujemy $v_N = 32,2$ m/s, $v_F = 33,2$ m/s. (Oczywistym uproszczeniem jest uznanie ruchu piłki za jednostajny i prostoliniowy.)

501. Środek masy taboretu S leży w odległości $\frac{1}{4}a$ od blatu (gdzie a – długość nóg i boku blatu) i jest odległy od punktu podparcia P o $l = \frac{\sqrt{13}}{4}a$, natomiast moment bezwładności okazuje się równy $I_c = \frac{13}{48}ma^2$ względem środka masy oraz $I = \frac{13}{12}ma^2$ względem punktu podparcia (m – masa całego taboretu). Prędkość kątową taboretu ω tuż przed uderzeniem o podłogę znajdujemy z zasady zachowania energii:

$$mgl(1 - \cos \beta) = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

gdzie β jest kątem między nogą a odcinkiem SP , równym $\arctg(2/3) = 33,7^\circ$. Otrzymujemy $\omega = 0,529\sqrt{g/a}$.

Zbadamy teraz uderzenie o podłogę – ponieważ trwa ono bardzo krótko, więc siłę ciężkości możemy zaniedbać. Na taboret działa w punkcie uderzenia pionowa siła reakcji podłoża o popędzie Δp_y oraz pozioma siła tarcia, której popęd Δp_x jest równy $f \cdot \Delta p_y$. W efekcie działania obu sił prędkość kątową osiągnie wartość ω_1 , a pionowa składowa prędkości środka masy – wartość v_{y1} (ze zwrotem do góry), przy czym brak odbicia uderzających o podłogę nóg

Zadania z fizyki nr 504, 505

Redaguje Jerzy B. BROJAN

504. Lokomotywa jadąca po prostym torze ze stałą prędkością 180 km/h gwizdże, wydając ton o częstotliwości 1000 Hz. W odległości 300 m od toru stoi krowa. Ile wyniesie częstotliwość tonu słyszanego przez krowę w momencie, gdy lokomotywa zbliży się do niej na odległość 500 m? Prędkość dźwięku w powietrzu ma wartość 340 m/s.

505. Profesor wykonał przyrząd zawierający kołową pętlę o promieniu 10 cm, która miała być naładowana dużym ładunkiem. Studentowi zlecił zadanie:

– Oblicz no, kochaneńki, siłę rozciągającą ten drut. Przewiduję ładunek około 10 μC . Student rażno zabrał się do pracy, ale po kwadransie podniósł głowę i powiedział zmieszany:

– Panie Profesorze, tego zadania... nie da się rozwiązać.

– Bzdura! – brzmiała odpowiedź. – Widzisz tę pętlę? Czy nie można jej naładować? Przecież będzie ona rozciągana wskutek odpychania się ładunków, czyż nie? Nie widzę powodu, dla którego nie można by wyznaczyć tej siły!

– Czy nie brakuje jakiejś danej? – zapytał Student niepewnie.

– A czegoż może brakować? – zdenerwował się Profesor. – Rób, co chcesz, ale masz mi wyliczyć tę siłę! Jeśli mi tego nie rozwiążesz, to poszukaj sobie innego promotora!

Czytelnicy *Delty*, pomóżcie Studentowi!

Rozwiązania zadań z numeru 6/2010

Przypominamy treść zadań:

500. Naderer i Fedal grają w tenisa, a za ich plecami kibice mierzą odstępy czasu między uderzeniami, posługując się mikrofonami podłączonymi do zegarów elektronicznych. Kibic Naderera twierdzi, że czas lotu piłki po uderzeniu Fedala jest o 20% krótszy od lotu po uderzeniu Naderera, natomiast kibic Fedala – że po uderzeniu Naderera czas lotu piłki jest o 15% krótszy. Ile wynosi prędkość piłki po uderzeniu jednego i drugiego gracza?

501. Obrys taboretu jest sześcianiem o boku 60 cm, blat jest jednorodnym kwadratem, łączna masa nóg jest równa masie blatu, a współczynnik tarcia o podłogę wynosi $f = 0,4$. Odchylono taboret na dwóch nogach od pionu prawie do punktu równowagi nietrwałej i puszczono, po czym opadł do normalnej pozycji. Reakcja podłogi w pionie jest niesprężysta. Czy nastąpi oderwanie się od podłogi tych nóg, które dotychczas jej dotykały? O ile przesunął się taboret po opadnięciu?

(niesprężystość) narzuca związek $\omega_1 l \sin \beta = v_{y1}$. Tuż przed uderzeniem pionowa składowa prędkości środka masy wynosiła $v_y = \omega l \sin \beta$ (ze zwrotem do dołu), zatem

$$\Delta p_y = m(v_y + v_{y1}) = ml \sin \beta (\omega + \omega_1).$$

Momenty sił względem środka masy są równe $\Delta p_x \cdot 3a/4$ (ze zwrotem zwiększającym moment pędu) oraz $\Delta p_y \cdot a/2$ (ze zwrotem przeciwnym), a więc

$$I_c \Delta \omega = I_c (\omega_1 - \omega) = \frac{a}{4} (3 \Delta p_x - 2 \Delta p_y) = \\ = \frac{a}{4} ml \sin \beta (\omega + \omega_1) (3f - 2).$$

Po podstawieniu danych znajdujemy $\omega_1 = 0,461\omega$. Dodatnia wartość ω_1 oznacza, że odpowiedź na pierwsze pytanie jest pozytywna. Dalej najważniejsza jest wielkość Δp_x , która wychodzi równa $0,292m\omega a$, czyli pozioma składowa prędkości środka masy ulega zmniejszeniu od wartości $v_x = 0,75\omega a$ tuż przed uderzeniem do $v_{x1} = 0,458\omega a$ tuż po nim.

Pozostało nam obliczenie przesunięcia s taboretu po uderzeniu. Gdyby nacisk taboretu na podłogę był stale równy ciężarowi, wynikiem byłoby

$$s_1 = \frac{v_{x1}^2}{2fg} = 0,073a = 4,4 \text{ cm}.$$

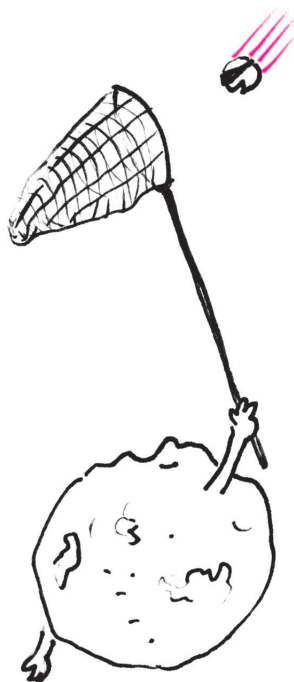
Wartość ta jest zanizowana, ponieważ odbicie taboretu w górę zmniejsza nacisk i siłę tarcia. Alternatywną metodą rozwiązania byłoby podstawienie do powyższego wzoru takiej prędkości v_{x2} , którą środek masy taboretu osiąga w trakcie odbicia, w momencie zatrzymania ruchu wzdłuż osi pionowej. Odtąd aż do zatrzymania taboretu jego średni nacisk na podłogę jest równy ciężarowi – jednakże jeśli początkowo (w końcowej fazie odbicia) jest on większy, a potem mniejszy, to zastąpienie zmiennej siły tarcia przez średnią spowoduje zawyżenie rezultatu. Obliczamy to górne ograniczenie analogicznie do powyższego:

$$s_2 = 0,106a = 6,3 \text{ cm}.$$

Ostatecznie $s = 5,4 \pm 1,0$ cm.

Patrz w niebo: Wymieniamy się gwiazdami

Chyba słabo na co dzień pamiętamy o tym, że wśród satelitów wielkich planet istnieje kilka obiektów obiegających swoje planety w kierunku tzw. wstecznym, czyli przeciwnym do kierunku ruchu większości satelitów. Mówi się, że widocznie satelity te powstały daleko od planet, a z czasem zostały pochwycone przez planety, przy czym nie zdajemy sobie sprawy, jak skomplikowane jest owo zjawisko pochwylenia. Prawa mechaniki mówią, że dwa punkty materialne, spotykając się w wędrówce po orbitach otwartych, nie mogą schwytać się, czyli przejść na orbity zamknięte – żeby to się stało, część ich energii musi zostać jakoś stracona, a do tego potrzeba albo działania sił pływowych, albo udziału ciała „trzeciego”, które mogłyby ów nadmiar energii unieść. Oczywiście, może też być odwrotnie, tzn. trzecie ciało może związanemu układowi dwóch ciał dostarczyć tyle energii, że przestanie on być związany i dwa ciała rozejdą się po orbitach otwartych.



Mechanika ciasnego układu kilku ciał może być jeszcze bardziej zawiła. Od kilkudziesięciu lat wiadomo, że gwiazdy AE Woźnicy i mi Gołębia robią wrażenie, że wyleciały (z prędkością ponad 100 km/s) z Wielkiej Mgławicy Oriona. Zwróćmy uwagę, że teraz znajdują się już w innych gwiazdozbiorach! W mgławicy tej jest m.in. gwiazda podwójna jota Oriona, a drobiazgową analizę ruchu tych trzech gwiazd doprowadziła do wniosku, że 2,5 mln lat temu wzięły one udział w niezwykłym spotkaniu. Badaczom wyszło, że jeden składnik joty Oriona tworzył przed spotkaniem parę z mi Gołębia, drugi zaś był towarzyszem AE Woźnicy. W wyniku spotkania oba układy zostały rozerwane, jedna gwiazda z pierwszej pary i jedna z drugiej utworzyły jotę Oriona, obecną do dziś w Mgławicy, a oba osamotnione składniki poprzednich par rozbiegły się z dużymi prędkościami, docierając dziś do Gołębia i Woźnicy.

Na ogół w Galaktyce gwiazdę od gwiazdy dzieli odległość ogromna w porównaniu z rozmiarami samych gwiazd, dlatego ich bliskie spotkania są niezmiernie rzadkie. Mieszkać w gromadzie gwiazdowej byłoby na pewno ciekawie, ale może jednak dobrze, że Słońce jest gwiazdą samotną.

Tomasz KWAST

Październik

Nisko na południu można zobaczyć wieczorem gwiazdozbiór Ryby Południowej, niepozorny i zawierający praktycznie tylko jedną jasną gwiazdę, Fomalhaut. Za to gwiazda ta jest jedną z czterech tzw. gwiazd królewskich, mających kiedyś astrologiczne znaczenie – ich pojawienie się na wieczornym niebie oznaczało zmianę pory roku (w bardzo grubym przybliżeniu). Oprócz niej gwiazdami królewskimi były Regulus we Lwie, Aldebaran w Byku i Antares w Skorpionie. Oczywiście, już w epoce, gdy istniało pojęcie gwiazd królewskich, astronomowie umieli dokładniej określać początki pór roku. Wszystkie cztery gwiazdy królewskie widać w Polsce. Najtrudniej zobaczyć właśnie Fomalhaut, gdyż zanieczyszczona atmosfera może uniemożliwić dostrzeżenie tej gwiazdy nisko nad horyzontem. Na wszelki wypadek podpowiadamy, że góruje ona w połowie października około godz. 21:30.

Mało planet widać w październiku. Wenus i Mars są w Wadze, a więc zbyt blisko Słońca, a Saturn nawet w tym samym gwiazdozbiórze (w Pannie) co Słońce. Jedynie Jowisz jest w Rybach, czyli w gwiazdozbiórze przeciwnym Pannie, zatem widać go przez całą noc. Nów Księżycy wypada 7 X, a pełnia 23 X. Żadnych zaćmień ani zakryć jasnych gwiazd w październiku nie będzie. Z przewidywalnych rojów meteorów można próbować zobaczyć bardzo słaby rój Giacobinidów (pochodzący z komety Giacobiniego) około 9 X oraz trochę obfitszy rój Orionidów około 20 X. Czyli mamy miesiąc bardzo ubogi w okazałe zjawiska.

T. K.



Rozwiązanie zadania F 773.
W układzie odniesienia much lep zbliża się do nich pod takim kątem α , że $\cos \alpha = v/\sqrt{v^2 + u^2}$. Wewnątrz roju pokona on więc drogę

$$\frac{d}{\cos \alpha} = d\sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}}.$$

Zatem lep złapie N much, gdzie:

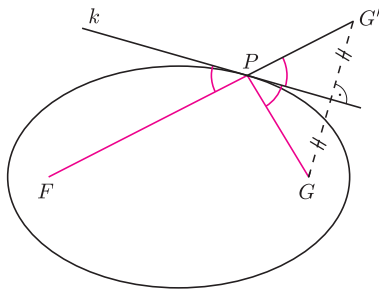
$$N = n \frac{\pi d R^2}{\cos \alpha} = n \pi d R^2 \sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}}.$$



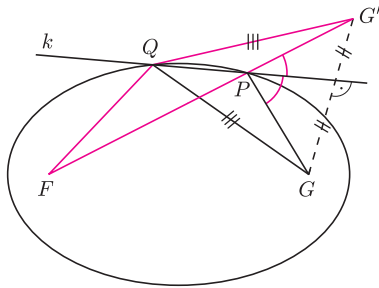
O robaku i elipsach

Joanna JASZUŃSKA

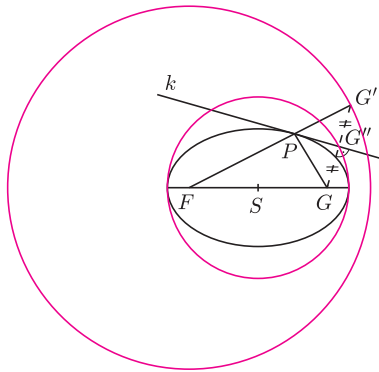
Na ziemi leży podłużny, cienki robak (powyginany odcinek) o długości 1. Niezależnie od sposobu jego ułożenia można go, oczywiście, w całości przykryć kołem o środku w końcu robaka i o promieniu 1. Można też sprytniej – kołem o środku w środku długości robaka i o promieniu $\frac{1}{2}$. Pokażemy więcej: do przykrycia robaka wystarczy półkoło o promieniu $\frac{1}{2}$. W dowodzie wykorzystamy elipsy.



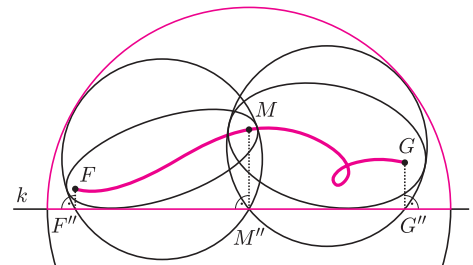
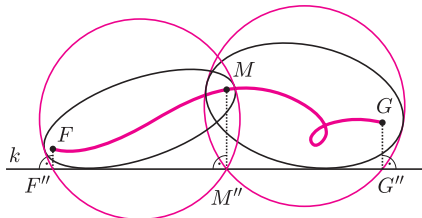
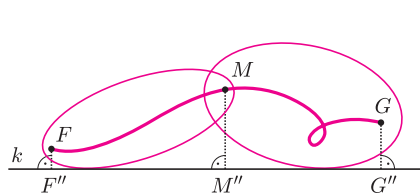
Rys. 1. Na stole bilardowym w kształcie elipsy kula tocząca się z jednego ogniska po odbiciu od brzegu zawsze trafia w drugie ognisko.



Rys. 2



Rys. 3. Rzuty ogniska F dają ten sam okrąg opisany. Jest on styczny do elipsy w punktach jej przecięcia z prostą FG , jego średnica równa jest stałej $2a$.



Rys. 4 (a)–(c). Kolejne etapy przykrywania robaka.

Elipsa o ogniskach w punktach F, G i o stałej $2a > FG$ to zbiór takich punktów P płaszczyzny, że $PF + PG = 2a$ (rys. 1). Można ją narysować, mocując końce sznurka o długości $2a$ w ogniskach i naciągając ten sznurek ołówkiem.

Fakt 1. Styczną w punkcie P do elipsy o ogniskach F, G jest dwusieczna k kąta zewnętrznego w trójkącie PFG (rys. 1). Jeśli punkt G' jest obrazem G w symetrii względem k , to punkty F, P, G' leżą na jednej prostej i $FG' = 2a$.

Dowód. Załóżmy, że dwusieczna k przecina elipsę w drugim punkcie Q , różnym od P (rys. 2). Z symetrii mamy $QG = QG'$, a więc $QF + QG' = QF + QG = 2a$.

Punkt G' trafia na prostą FP , bo oś symetrii k jest dwusieczną. Stąd $FG' = PF + PG' = PF + PG = 2a$. W trójkącie QFG' mamy więc $QF + QG' = FG'$, co jest sprzeczne z nierównością trójkąta. \square

Fakt 2. Zbiór obrazów G' ogniska G elipsy, w symetriach względem prostych stycznych do tej elipsy, to okrąg o środku F i promieniu $2a$ (rys. 3).

Dowód. Na mocy faktu 1 wszystkie obrazy G' spełniają warunek $FG' = 2a$ (rys. 1), zatem leżą na takim okręgu.

Dla dowolnego punktu G' z tego okręgu odcinek FG' przecina elipsę w pewnym punkcie P . Z faktu 1 styczną do elipsy w tym punkcie jest dwusieczna k kąta GPG' . Ponieważ $FP + PG' = 2a = FP + PG$, czyli $PG' = PG$, więc G' jest obrazem G w symetrii względem k . Stąd zbiorem obrazów G' jest cały okrąg $\mathcal{O}(F, 2a)$. \square

Fakt 3. Zbiór rzutów prostokątnych ogniska G elipsy na proste styczne do tej elipsy to okrąg opisany na elipsie (rys. 3).

Dowód. Jednokładność o środku G i skali $\frac{1}{2}$ przekształca punkt G' – obraz G w symetrii względem stycznej na punkt G'' – rzut G na tę styczną. Z faktu 2 wiemy, że zbiorem obrazów symetrycznych jest okrąg $\mathcal{O}(F, 2a)$, stąd zbiorem rzutów jest okrąg $\mathcal{J}_G^{1/2}(\mathcal{O}(F, 2a)) = \mathcal{O}(S, a)$, gdzie S jest środkiem odcinka FG (rys. 3). \square

Przykrycie robaka. Oznaczmy przez F, G końce robaka i przez M jego środek. Półkę robaka od F do M można otoczyć elipsą \mathcal{E}_F o ogniskach F, M i stałej $\frac{1}{2}$, półkę od G do M – analogiczną elipsą \mathcal{E}_G (rys. 4(a)).

Niech F'', G'', M'' będą rzutami punktów F, G, M na prostą k , styczną do obu elips. Na mocy faktu 3 punkty F'', M'' leżą na okręgu opisanym na elipsie \mathcal{E}_F , a punkty G'', M'' na okręgu opisanym na elipsie \mathcal{E}_G (rys. 4(b)). Średnica każdego z tych okręgów jest równa $\frac{1}{2}$. Rozważmy koło o środku M'' i promieniu $\frac{1}{2}$ (rys. 4(c)). Zawiera ono obydwa okręgi opisane na elipsach, czyli też obie elipsy, zatem także całego robaka. Jednocześnie elipsy, więc też robak, leżą po jednej stronie prostej k . Stąd do przykrycia robaka wystarczy półka rozważanego koła o środku M'' , co kończy dowód. \square

Pole naszego półkoła to $\pi/8 \approx 0,39$. Nie wiadomo, jakie pole P ma najmniejsza figura, którą można przykryć dowolnego robaka. Na pewno $P < 0,260437$. Zagadnienie to znane jest, od nazwiska autora, jako *Leo Moser's Worm Problem*.