


SPIS TREŚCI NUMERU 9 (436)

Bozon Higgsa pomostem do
ukrytych światów
James Wells

 Parzyste-nieparzyste-wszystkie
Wiktor Bartol

 Ściany, krawędzie, wierzchołki
Maria Donten-Bury

 Zadania

Więzienie Hilberta
Zofia Miechowicz

Kącik przestrzenny (4):
Metoda objętości
Michał Kieza


**Olimpiada astronomiczna, fizyczna
i matematyczna**

Informatyczny kącik olimpijski (34):
Inspektor po raz drugi
Tomasz Kulczyński

Urania w Delcie:

Dyski akrecyjne a ewolucja dżetów
Agnieszka Janiuk

Aktualności


 Stowarzyszenie na rzecz
Edukacji Matematycznej

Klub 44

Patrz w niebo:

Lód na równiku Marsa

Wrzesień

 Czywiste?
Joanna Jaszewska

W następnym numerze:
Jak otrzymać chaos?

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 22-639-73-67)

internet: www.amos.waw.pl e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2010 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2010 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl infolinia 804-200-600

Cena prenumeraty w 2010 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Bozon Higgsa pomostem do ukrytych światów

James WELLS*

Co najmniej od czasów Kopernika społeczność naukowa dopuszcza do siebie myśl, że ludzkość nie musi znajdować się w centrum wszechrzeczy. Mimo to staramy się przede wszystkim poznać siebie, by zrozumieć nasz los i poprawić warunki, w jakich żyjemy. To dlatego przedmiotem wielu dziedzin nauki jest znalezienie przyczyn ludzkiego działania i polepszenie warunków życia. Ekonomia, medycyna, historia, socjologia, a nawet nauki techniczne – wszystkie one są przecież wynikiem usilnego dążenia do opisanego powyżej celu.

Wydaje nam się często, że fizyka jest ponad tego typu blahostkami. Fizycy jawią się jako wyprani z uczuć obserwatorzy, postrzegający ludzkość jako jeden z niezliczonych członów wielkiego równania bytu. Aby poprawnie opisać Wszechświat, którego nie obchodzi nasze istnienie, nie można pozwalać sobie na antropocentryzm.

Wrażenie to jest jednak z całą pewnością błędne. Historia fizyki, jak każdej dziedziny nauki, jest nierozdzielnie związana z naszym człowieczeństwem. A najlepszego przykładu dostarcza fizyka cząstek elementarnych – pozornie najbardziej abstrakcyjna i najmniej związana z naszym codziennym doświadczeniem.

Pomyślmy najpierw o wszystkich znanych cząstkach elementarnych. Kwarki górne i dolne łączą się w protony i neutrony. Łącząc protony z neutronami i dorzucając do tej mieszanki jeszcze inne cząstki elementarne – elektrony – otrzymujemy atomy. Atomy te łączą się w cząsteczki wodoru, tlenu, związki węgla, które z kolei tworzą komórki, włosy, płuca i stopy. Krótko mówiąc, badanie cząstek elementarnych jest tak naprawdę badaniem nas samych!

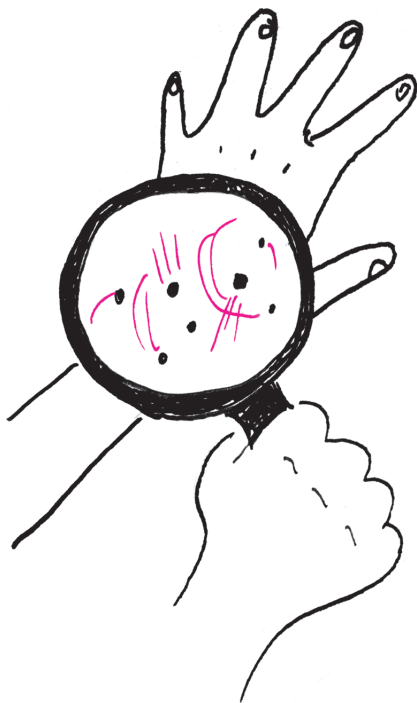
Można by tu protestować, że przecież znamy znacznie więcej cząstek elementarnych niż wymienione powyżej. No tak, mamy przecież fotony. Te nie są jednak niczym innym jak nośnikami sił pomiędzy naładowanymi cząstkami budującymi nasze ciała. A bozony W i Z? One także przenoszą oddziaływania – te powodujące sporadyczne przemiany promieniotwórcze w jądrach atomowych w naszych ciałach.

To nie wszystko! Istnieją jeszcze miony i taony. Są one jednak jedynie kopiami elektronu, różniącymi się od niego większą masą. Nic nowego pod słońcem. Podobnie kwarki: dziwny, powabny, bottom i top – też są kopiami, tylko cięższymi, kwarków dolnych i górnych, z których jesteśmy zbudowani.

Wydaje się, że, rozważając elementarne składniki materii, nie jesteśmy w stanie przekroczyć ciasnego horyzontu myślowego, określonego składem ludzkiego ciała. Nie chodzi tutaj o umniejszanie niezwykłych osiągnięć fizyki cząstek elementarnych, która w ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat odkryła wiele nowych, fundamentalnych, a dziś dobrze zrozumianych praw przyrody. Te prawa jednak ciągle odnoszą się do pytania, jak zbudowane jest i jak działa – na najbardziej podstawowym poziomie – ludzkie ciało. Jak wyjść z tego zakłętą kręgu?

Natychmiast nasuwają się dwa oczywiste pytania. Dlaczego właściwie mielibyśmy wierzyć, że wśród fundamentalnych składników materii są takie, które nie mają zupełnie nic wspólnego ze składem ludzkiego ciała? A jeśli nawet one istnieją, jak możemy się o tym przekonać?

Odpowiedź na pierwsze pytanie jest prosta: nie jesteśmy niczym specjalnym we Wszechświecie. Ot, bryłkami gliny, wirującymi na powierzchni małej niebieskiej kulki w obezwładniającym ogromie Wszechświata. Dlaczego właściwie mielibyśmy się uważać za całkowicie reprezentatywną jego część? I rzeczywiście, istnienie ciemnej materii, wywnioskowane pośrednio z badań astrofizycznych i argumentów kosmologicznych, pokazuje, że we Wszechświecie jest więcej rzeczy nieznanych (ciemna materia) niż znanych (składniki ludzkiego ciała).



*CERN i University of Michigan



Rozwiązanie zadania F 771.
 W punkcie A mamy $\varphi_A = \mathcal{E}/2$,
 w punkcie B zaś $\varphi_B = \mathcal{E}/3$ lub
 $\varphi_B = 2\mathcal{E}/3$, w zależności od położenia
 czwartego kondensatora. Stąd

$$\varphi_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \pm\mathcal{E}/3 = \pm 2 V.$$


Koniecznym elementem struktury Modelu Standardowego cząstek elementarnych jest występowanie tzw. spontanicznie naruszonej symetrii (zob. *Delta* 5/2000). Najpowszechniej przyjmowanym wyjaśnieniem tej własności jest istnienie tzw. pola Higgsa i związanej z nim cząstki, zwanej bozonem Higgsa. [Przyp. Red.]



Na drugie pytanie odpowiedź jest znacznie trudniej. Ciemną materię próbuje się wykryć bezpośrednio w wielu działających i dopiero projektowanych eksperymentach: poprzez jej zderzenia z jądrami atomowymi w detektorach ukrytych przed zakłóceniami światła zewnętrznego w kopalnianych szybach, czy też poprzez obserwację, w detektorach wyniesionych na okołozemskie orbity, znanych cząstek będących produktami anihilacji cząstek ciemnej materii. Na to odkrycie wciąż czekamy.

Cząstki ciemnej materii to tylko jedna z niezliczonej liczby możliwych rodzajów cząstek i oddziaływań, które nie mają nic wspólnego z naszymi ciałami. Niektóre cząstki mogą pojawiać się na nieuchwytnie krótki czas, kiedy w określonym miejscu przestrzeni zostanie skoncentrowane dostatecznie wiele energii. Inne mogą być stabilne i przemierzać bezkres Wszechświata, nie oddziałując z „ludzka” materią. Niektóre podejścia fizyki teoretycznej, usiłujące wyjaśnić własności oddziaływań fundamentalnych za pomocą teorii strun, przewidują tysiące takich nowych cząstek, z których tylko jedna (i oby aż jedna!) może zostać odkryta w detektorach ciemnej materii. Czy są zatem jeszcze jakieś inne drogi do odkrycia takich cząstek?

Wielki Zderzacz Hadronów (LHC) w CERN-ie jest jedną z latarii, którymi możemy oświetlić ciemności ukrytych światów, złożonych z cząstek niemających nic wspólnego z budową naszych ciał. W szczególności, czułym probierzem takich ukrytych światów może być bozon Higgsa. Sprawia to jego wyjątkowa prostota, jest on bowiem tzw. cząstką skalarną – całkowicie niewrażliwą na transformacje szczególnej teorii względności i wyglądającą dokładnie tak samo bez względu na to, czy układ odniesienia obrócimy albo wprawimy w szybki ruch jednostajny.

Bozon Higgsa cieszy się zasłużonym szacunkiem jako źródło masy wszystkich cząstek budujących nasze ciała. Jednak niezależnie od tej własności może on także oddziaływać z cząstkami skalarnymi ze światów ukrytych – będąc tym samym pomostem łączącym „nasz” świat z tymi ukrytymi. Fizyczna przestrzeń wypełniona jest bowiem przez pole związane z bozonem Higgsa – a ściślej jego tzw. wartość próżniową. Nawet w przestrzeni kosmicznej czy też pod najbardziej wydajnymi pompami próżniowymi wartość pola Higgsa będzie niezmienna.

Dlaczego taka wartość próżniowa pola Higgsa miałaby pomóc nam w dotarciu do ukrytych światów? Otóż nie ma żadnych przeszkód, aby także pola skalarne ukrytych światów miały swoje wartości próżniowe. Wartości próżniowe pól skalarnych działają zaś jak klej, wiążący te pola i powodujący ich mieszanie, tj. pole Higgsa staje się trochę polem świata ukrytego i *vice versa*. To właśnie jest pomost umożliwiający oddziaływanie cząstkom z różnych światów.

Skoro LHC będzie pierwszym w historii akceleratorem zdolnym wyprodukować bozon Higgsa i, tym samym, oświetlić ten pomost, przejście do ukrytych światów może być już na wyciągnięcie ręki. Cząstki ukrytych światów mogą, na przykład, spowodować, że eksperymenty przy LHC ujrzą rozpady cząstek Higgsa inne od tych, których spodziewać się należy w Modelu Standardowym.

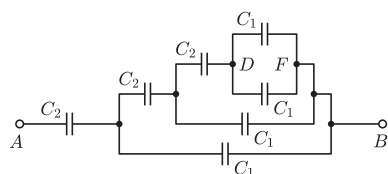
Przykładowo, bozon Higgsa może być produkowany zgodnie z oczekiwaniami, ale zamiast rozpadać się na dwa kwarki bottom lub bozony W, jak chciałby tego Model Standardowy, mógłby wybrać przejście do ukrytego świata i rozpadać się na coś innego. Jeżeli tym czymś byłyby wyłącznie cząstki ukrytych światów, mielibyśmy do czynienia z „niewidzialnym rozpadem”, który wyjdzie na jaw w szczegółowych analizach wyników doświadczalnych. Ukryte produkty rozpadu bozonu Higgsa mogłyby również wrócić do naszego świata tym samym bądź innym pomostem, rozpadając się na zwykłe cząstki znanej materii, na przykład na cztery elektrony. Tego normalny bozon Higgsa nigdy by nie zrobił, więc zarejestrowanie takiego procesu byłoby silnym argumentem na rzecz istnienia przejścia do ukrytych światów.

Okazuje się zatem, że rekordowe energie zderzeń zapewniane przez LHC oraz dokładne mierzenie rozpadów bozonu Higgsa mogą przełamać naszą wąską – antropocentryczną – wizję budowy materii i poprowadzić nas ku niezmiernym terytoriom nowych światów. A byłoby to zaledwie początkiem nowej fizyki cząstek elementarnych.

tłumaczył Krzysztof TURZYŃSKI



Rozwiązanie zadania F 772.
 Przerysowując obwód w inny sposób,



zauważamy, że pojawia się w nim ten sam element, obniżający napięcie dwukrotnie. Zatem różnica potencjałów między punktami D i F wynosi $U/2^3 = 2 V$.



mała delta

Parzyste-nieparzyste-wszystkie

Wybierz, drogi Czytelniku, dowolną liczbę naturalną. 182754? Proszę bardzo. Utwórzmy z niej nową liczbę w sposób następujący. Najpierw wypiszemy liczbę cyfr parzystych w zapisie dziesiętnym wybranej liczby, do niej dostawimy z prawej strony liczbę jej cyfr nieparzystych, na koniec dołączymy – też z prawej – łączną liczbę jej cyfr. W liczbie 182754 są 3 cyfry parzyste, 3 cyfry nieparzyste, a wszystkich cyfr jest 6, otrzymamy zatem liczbę 336. Powtórzmy to postępowanie dla tej nowej liczby: 1 cyfra parzysta, 2 nieparzyste, 3 cyfry – otrzymujemy liczbę 123 i na niej właściwie możemy zakończyć zabawę, bo następną liczbą będzie znowu 123.

Spróbujmy więc z inną liczbą, np. 99582731059. Cyfr parzystych 3 (bo przecież 0 jest cyfrą parzystą), cyfr nieparzystych 8, łącznie 11. Otrzymujemy zatem liczbę 3811, z niej liczbę 134, a dalej 123. Hmm... Może wybieramy za małe liczby? Zaczniemy jeszcze raz z dużą liczbą, na przykład $10^{100} + 235$. Jej zapis dziesiętny zaczyna się od jedynek, potem mamy 97 zer, a na końcu 235, zatem cyfr parzystych jest 98, nieparzystych 3, a wszystkich 101. Otrzymujemy liczbę 983101, z której powstaje liczba 246, z niej 303, a z niej... 123. Wygląda na to, że znikąd ratunku.



Oczywiście, metoda działa również dla liczb o mniejszej liczbie cyfr: na przykład 33 daje kolejno 22, 202, 303, 123.

Czy tak już będzie zawsze, dla dowolnej liczby naturalnej? Pomyślmy. Jeśli liczba naturalna n ma co najmniej 4 cyfry, to liczba otrzymana z n w opisany wyżej sposób ma mniej cyfr niż n (dlaczego?), zatem w kolejnych krokach otrzymujemy liczby o coraz mniejszej liczbie cyfr, aż dojdziemy do liczby co najwyżej 3-cyfrowej. Jeśli uznamy dla uproszczenia, że liczby 1- i 2-cyfrowe też są 3-cyfrowe (inaczej mówiąc, jeśli zgodzimy się dopisać do nich tyle zer na początku, żeby zapis zawierał 3 cyfry), to w pewnym momencie dojdziemy do liczby właśnie 3-cyfrowej. Jakie liczby 3-cyfrowe mogą się pojawić? Łatwo sporządzić listę takich możliwych liczb, pamiętając, że ich trzecia cyfra musi być równa 3, a jednocześnie musi być sumą pierwszych dwóch cyfr. A potem pozostaje już tylko sprawdzić, że z każdej takiej liczby dochodzi się – i to dość szybko – do liczby 123.

W podanych wyżej przykładach droga od wybranej liczby do liczby 123 nie była długa. Dla liczby 182754 musieliśmy wykonać dwa kroki, dla liczby 99582731059 potrzebowaliśmy trzech kroków, dla $10^{100} + 235$ czterech. Czy liczba kroków prowadzących do 123 jest zawsze mała? Czy w ogóle jest ograniczona? Czy dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba naturalna, że jej droga do 123 składa się z co najmniej k kroków?

I jeszcze jedno pytanie. Czy istnieje taki „punkt stały”, do którego zmierza każda liczba naturalna, jeśli rozpatrujemy nie podzielność przez 2 (parzyste-nieparzyste), lecz, na przykład, przez 3? Wtedy zapisywalibyśmy (od lewej) liczbę cyfr podzielnych przez 3, liczbę cyfr dających resztę 1 przy dzieleniu przez 3, liczbę cyfr dających resztę 2 przy dzieleniu przez 3, a na końcu liczbę wszystkich cyfr. A czy można uzyskać ten sam efekt, gdy zamiast podzielności przez 2 lub 3 będziemy zliczać cyfry ze względu na ich resztę z dzielenia przez dowolną (ustaloną) liczbę naturalną k ?

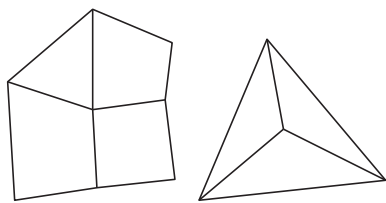
Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL



mała delta

Ściany, krawędzie, wierzchołki

– A cóż to za obrazki? Projektujesz witraże? – złośliwość starszych braci nie ma granic, jeśli chodzi o rozpoczęcie rozmowy z siostrą.



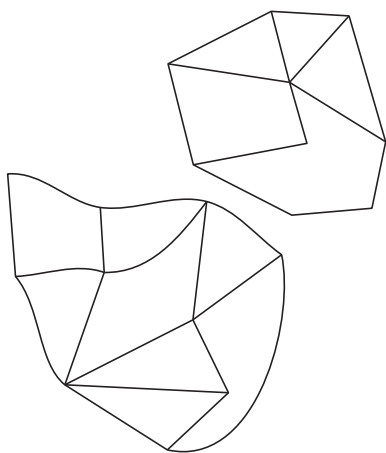
Rys. 1

– Skądże, zajmuję się matematyką. – odpowiedziała poważnie Asia, nie podnosząc oczu znad kartki, która wyglądała mniej więcej tak, jak na rysunku 1. Zgadła: zamiast śmiać się z jej obrazków Maciek usiadł obok i zaczął wpatrywać się w kartkę.

– To już nie bądź taka tajemnicza i powiedz, o co chodzi. . .

– Zobacz, jeśli na którymś z tych rysunków policzysz liczbę wielokątów, odejmiesz liczbę odcinków i dodasz liczbę punktów, to dostaniesz 1! Czy to nie jest ciekawe?

Maciek powiedział tylko, że pewnie zaraz znajdą obrazek, dla którego to już nie będzie prawda. I stworzyli wspólnie jeszcze kilka „projektów witraży”, ale wzór cały czas uparcie był prawdziwy. Również wtedy, gdy przestali dbać o wypukłość wielokątów, a nawet kiedy w szybko tworzonych rysunkach odcinki zaczęły być trochę krzywe (rys. 2).



Rys. 2

– Tylko pamiętaj, żeby nie przecinać odcinków w nieoznaczonych punktach, bo wtedy nie działa, już sprawdziłam. – Asia szybko zniszczyła bratu pomysł na rysunek, dla którego wzór daje błędny wynik.

– Może jednak coś w tym jest. . . – mruknął po chwili rysowania zamyślony Maciek, a siostra-matematyk z wielką powagą oznajmiła:

– Musimy to udowodnić!

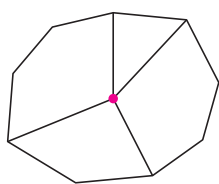
– To jak się za to zabierzesz? Przykładowe obrazki to chyba trochę za mało, nie?

– Pewnie, ale moglibyśmy najpierw zbadać obrazki o prostym kształcie, na przykład wielokąty, i sprawdzić dla nich wzór. A przecież każdy obrazek na pewno możemy otrzymać, zaczynając z jakiegoś wielokąta i dodając nowe punkty i krawędzie, więc wystarczy zobaczyć, ile nowych obszarów (niektóre z tych na rysunku 2 trudno nazwać wielokątami) tworzy się przy takim rozszerzaniu rysunku. . .

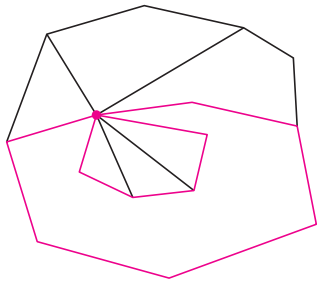
– Jesteś pewna, że to takie oczywiste? Chyba trzeba by sprawdzić mnóstwo przypadków. . . A co powiesz na taką zmianę: weźmiemy dowolny obrazek i popatrzymy, czy skasowanie jednego punktu i wychodzących z niego krawędzi zmienia twój wzór. . .

– Świetnie! – przerwała Maćkowi siostra – W ten sposób wyrzucając kolejne punkty, doprowadzimy początkowy obrazek do jakiegoś prostego i wystarczy sprawdzić, czy dla tego prostego obrazka wzór będzie działał.

– To zobaczymy, co się dzieje, gdy wyrzucamy punkt, z którego wychodzi k krawędzi. Najlepiej, dopóki możemy, wyrzucamy punkty wewnętrzne, czyli te, które nie leżą na brzegu obrazka. Wyrzucenie ich chyba więcej upraszcza. . . – żeby pomóc sobie w obliczeniach, Maciek narysował przykład, który widzimy na rysunku 3.



Rys. 3



Rys. 4

– Policzmy: wyrzucamy jeden punkt, k krawędzi, a jak wyrzucimy te krawędzie, to znika też k obszarów... Ale za to dostajemy jeden duży obszar w miejsce tych wyrzuconych. Czyli lewa strona wzoru zmienia się o -1 punkt $+k$ krawędzi $-k + 1$ obszarów, czyli... nie zmienia się wcale! Jeśli wzór jest prawdziwy dla obrazka z wyrzuconym punktem, to jest też prawdziwy dla początkowego.

Rodzeństwo przeoczyło co prawda pewien szczególny przypadek: może się zdarzyć tak, że brzeg pewnego obszaru przechodzi kilka razy przez wyrzucany punkt (jak kolorowa lamana na rysunku 4). Ale poza tym ich pomysł jest dobry, a może Czytelnik zechce uzupełnić szczegóły dowodu.

Maciek przeszedł obliczenie siostry i dołożył końcowy krok:

– A jak już wyrzucimy wszystkie punkty wewnętrzne, to zostanie nam tylko ciąg krawędzi ograniczający jeden obszar. Sprawdzamy dla niego nasz wzór: jeden obszar minus ileś krawędzi plus tyle samo wierzchołków co krawędzi, czyli wyszło 1. Niesamowite, ten wzór naprawdę działa...

Trochę później Maciek przypomniał sobie, że już widział podobny wzór. Jeśli weźmiemy dowolny wypukły wielościan, dodamy liczbę jego ścian i liczbę wierzchołków, a potem odejmiemy liczbę krawędzi, to dostaniemy w wyniku 2 – to jest przecież wzór Eulera! Opowiedział o tym siostrze, kończąc słowami:

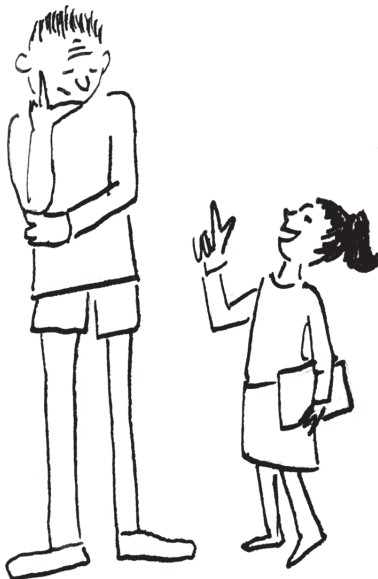
– Tylko tam na pewno było 2, a nie 1, jak dla naszych obrazków. Może coś jednak jest źle...

Asia myślała nad tym do wieczora, a w końcu oznajmiła bratu:

– Przecież to oczywiste! Każdy wypukły wielościan można przerobić na nasz obrazek, stawiając go na kartce, wyrzucając ścianę, na której stoi, i wciskając wszystkie punkty i wierzchołki na kartkę w miejsce wyrzuconej ściany.

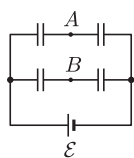
Zrozumienie tego pomysłu i jego wpływu na badany przez nich wzór zajęło Maćkowi chwilę, ale szybko uznał, że siostra ma naprawdę niezłą wyobraźnię.

Małą Deltę przygotowała Maria DONTEN-BURY



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY



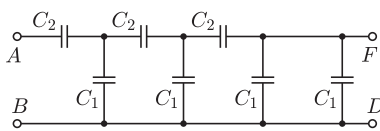
Rys. 1

F 771. Mamy obwód składający się ze źródła napięcia oraz czterech kondensatorów: trzech o jednakowej pojemności oraz czwartego o pojemności dwa razy większej niż pozostałe (rys. 1). Znaleźć różnicę potencjałów między punktami A i B , przyjmując, że $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$.

Rozwiązanie na str. 2

F 772. Kondensatory o pojemności $C_1 = 5 \mu\text{F}$ oraz $C_2 = 10 \mu\text{F}$ połączone są w układ pokazany na rysunku 2. Do punktów A i B podłączone jest napięcie $U = 16 \text{ V}$. Znaleźć różnicę potencjałów między punktami D i F .

Rozwiązanie na str. 2



Rys. 2

Redaguje Waldemar POMPE

M 1288. Każdy punkt prostej pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wykazać, że istnieją trzy różne punkty jednego koloru, z których jeden jest środkiem odcinka o końcach w dwóch pozostałych punktach.

Rozwiązanie na str. 7

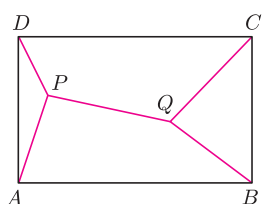
M 1289. Punkty P i Q leżą wewnątrz prostokąta $ABCD$ o bokach $a > b$ (rys. 3). Wykazać, że

$$AP + DP + PQ + BQ + CQ \geq a + b\sqrt{3}.$$

Rozwiązanie na str. 6

M 1290. Wyznaczyć wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych spełniające równanie $p^2 - 2q^2 = 1$.

Rozwiązanie na str. 24



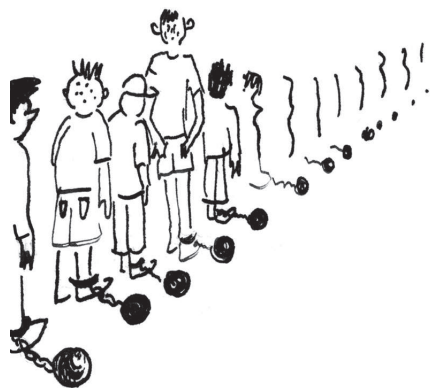
Rys. 3

Więzienie Hilberta

Zofia MIECHOWICZ*

To jest kraj dla mądrych ludzi

Jest gdzieś w świecie abstrakcji taki kraj, w którym największą zbrodnią, jaką człowiek może popełnić, jest zbrodnia przeciwko rozumowi, a najbardziej rygorystycznie przestrzegany prawami są prawa logiki. Służby porządkowe bardzo dbają o poprawność myślenia, więc wszelkie osobniki, których myśli nie biegną prawidłowymi torami, są natychmiast umieszczane w zakładach karnych. Oczywiście, każda zbrodnia może zostać odkupiona, a najważniejsza jest resocjalizacja. Naczelnicy i strażnicy więzienni starają się, żeby jak największa liczba więźniów wróciła do swoich domów, jednak dopiero po wtłoczeniu wystarczającej ilości rozumu do głowy. Jedyną szansą na odzyskanie wolności dla tych nieszczęśników jest wykazanie się błyskotliwością i matematycznym sprytem. Szanse takie dostają oni często, jednak tylko nielicznym udaje się sprostać wysokim wymaganiom systemu. Pewnego razu rezydenci jednego z zakładów stanęli przed niezwykle ciekawym zadaniem.



Prosta droga do pewności

Paweł i Gaweł, odsiadujący karę za domową awanturę, dzielili ciasną celę w więzieniu przeznaczonym dla n osób. Był piękny, słoneczny poranek, kiedy wszyscy więźniowie, jak co dzień, spotkali się na spacerniaku. Naczelnik zarządził zbiórkę w szeregu i odezwał się w te słowa.

– Stoicie przed ogromną szansą. Możecie już dziś wszyscy opuścić więzienie. Wieczorem każdemu z was zostanie na czole odcisnięty numer: liczba całkowita z zakresu od 0 do $n - 1$. Liczby te będą mogły powtarzać się. Opuście więzienie, gdy co najmniej jeden z was odgadnie, jaki numer ma odcisnięty na czole. Możecie ustalić wspólną strategię, ale jedynymi informacjami, z jakich możecie korzystać, są liczby widoczne na czołach współwięźniów. Jeżeli którykolwiek z was udzieli innemu nielegalnej informacji, to szansa przepadnie. Odpowiedzi udzielać będziecie równocześnie, pisząc liczbę na kartce, więc żadna strategia, która wykorzystuje odpowiedzi innych, nie wchodzi w grę. Nie zawiedzcie mnie. Jeżeli wam się nie uda, to wszyscy zostajecie tutaj.

Gdy tylko więźniowie zyskali chwilę dla siebie, rozpoczęły się ożywione dyskusje. Ktoś bardziej obeznany z rachunkiem prawdopodobieństwa zauważył, że jeżeli będą stosowali strategię losową, to szansa każdego z nich na odgadnięcie wynosi $\frac{1}{n}$, więc szansa na to, że nie trafi, to aż $\frac{n-1}{n}$. Prawdopodobieństwo tego, że nie trafi żaden, wynosi $(\frac{n-1}{n})^n$. Udało im się ustalić, że grając losowo, wyjdą na wolność z prawdopodobieństwem $1 - (\frac{n-1}{n})^n$, czyli co najmniej $1 - \frac{1}{e}$. Szansa duża, około 0,63. Więźniowie wiedzieli jednak, że musi tkwić w tym coś więcej. W końcu stosowanie losowej strategii nie wymaga zbytniego polotu. Z ciężkimi od myślenia głowami i przeświadczeniem, że istnieje strategia, która da im pewność zwycięstwa, wrócili przed obiadem do swoich cel.

Paweł i Gaweł nie lubili dużych liczb. Woleli, aby zadanie dotyczyło tylko ich dwójki. O ile prostsze byłoby wtedy.

– Pomyśl – powiedział Paweł – gdyby chodziło tylko o nas dwóch, to liczby, jakie moglibyśmy mieć na czołach, to byłyby tylko jedynka i zero. Nie dość, że w grę wchodziłyby tylko dwie liczby, to jeszcze możliwe byłyby tylko dwie sytuacje. Albo mielibyśmy na czołach te same liczby, albo różne.

– To prawda – przytaknął mu Gaweł – moglibyśmy wtedy wyjść na wolność z całą pewnością. Wystarczyłoby, żebym ja przyjął, że zachodzi ta pierwsza sytuacja i obstał taką samą liczbę, jak twoja, a ty powiedziałbyś, że masz na czole liczbę, która jest różna od mojej. Który z nas na pewno by trafił.

– Ale to tylko taki mały przypadek. Myślisz, że dałoby się tę strategię jakoś przenieść na większą liczbę osób?

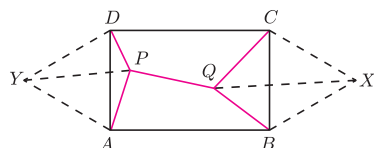
Z iskierką nadziei podzielili się swoimi przemyśleniami z innymi podczas obiadu. Długo panowała cisza, aż wreszcie głos zabrał najstarszy, doświadczony już wieloma porażkami rezydent.

– To świetny pomysł! Tylko musicie zauważyć, co tak naprawdę zrobiliście. Jeżeli liczby na waszych czołach były takie same, to w sumie dawały liczbę parzystą. Jeżeli były różne, to ich suma dawała resztę jeden z dzielenia przez 2. Każdy z was obstał po prostu inną resztę z dzielenia przez 2 sumy numerów na czołach. Możemy zrobić dokładnie to samo dla dowolnego n .



Rozwiązanie zadania M 1289.

Niech $a = AB$ oraz $b = BC$. Na bokach BC i DA zbudujmy, po zewnętrznej stronie prostokąta, trójkąty równoboczne $BXCQ$ oraz DAY .



Wówczas wykorzystując nierówność Ptolemeusza dla czworokątów $DYAP$ oraz $BXCQ$, uzyskujemy

$$AP \cdot b + DP \cdot b \geq YP \cdot b$$

$$BQ \cdot b + CQ \cdot b \geq QX \cdot b.$$

Stąd otrzymujemy

$$AP + DP + PQ + BQ + CQ \geq$$

$$\geq YP + PQ + QX \geq XY = a + b\sqrt{3}.$$

*Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski

– Jak to, to samo? – zachnął się ktoś – Przecież jest nas tak dużo.

– Wystarczy, że ustalimy teraz, którą resztę z dzielenia przez n każdy z nas będzie obstawiał. Potem każdy zsumuje liczby widoczne na czołach towarzyszy i sam dobrać taką, żeby po dodaniu jej do uzyskanej sumy otrzymać liczbę, która z dzielenia przez n daje resztę mu przypisaną. Dysponujemy liczbami z zakresu od 0 do $n - 1$, więc ta liczba jest określona jednoznacznie. Zastanówcie się chwilę, w taki sposób któryś z nas trafi na pewno. Jest nas dokładnie tyle, ile reszt, które trzeba obstawić. Mamy więc pewność! Towarzysze, jeszcze dziś wszyscy będziemy wolni!

Kara dla recydywistów

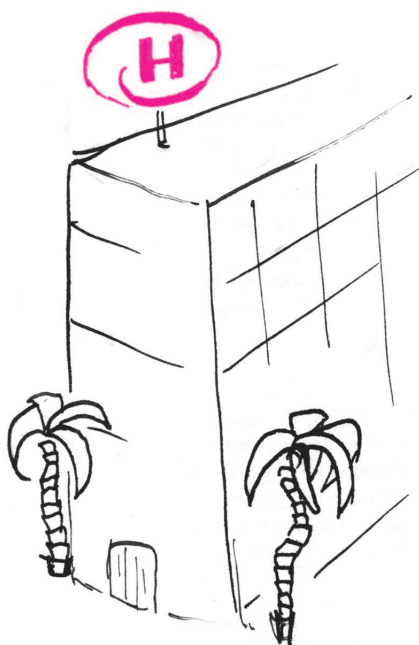
Paweł i Gawł niedługo cieszyli się wolnością. Szybko okazało się, że ta krótka wizyta w zakładzie karnym niczego ich nie nauczyła. Jako recydywiści trafili do więzienia o zaostrzonym rygorze, zwanego więzieniem Hilberta. Miejsce to w dobie swojej świetności było luksusowym hotelem. Niestety, w wyniku kryzysu na światowych rynkach hotel zbankrutował i został przejęty przez władze. Przerobiono go na zakład karny, a jedynym wspomnieniem po dawnych, dobrych czasach zostało nazwisko wcześniejszego właściciela wymieniane w jego nazwie. Kluczowym dla decyzji o uczynieniu z tego miejsca więzienia był fakt, że budynek mógł pomieścić nieskończenie wiele osób. Nawet jeżeli wszystkie cele były już zajęte, zawsze znalazło się miejsce dla nowego rezydenta. Wystarczyło, żeby każdego więźnia przeniesiono do celi o numerze o jeden większym. W efekcie początkowa cela zwalniała się, a każdy więzień nadal miał swoją pryczę. Znalazło się tam miejsce również dla Pawła i Gawła. Nasi bohaterowie mieli jednak niezwykle szczęście. Już po kilku dniach pobytu stanęli przed zadaniem, które do złudzenia przypominało to, dzięki któremu ostatnio odzyskali wolność.

Ponownie każdemu więźniowi wypisany został na czole numer – tym razem mogła to być dowolna liczba naturalna. I ponownie każdy miał za zadanie odgadnąć liczbę, która została mu przypisana. Sposób udzielania odpowiedzi był taki sam jak poprzednio. Więźniowie nie mogli słyszeć odpowiedzi towarzyszy. Niestety, tym razem zadanie było o wiele trudniejsze, gdyż w związku z nieskończoną liczbą możliwych prób odgadnąć musieli nie tylko jeden więzień. Wszyscy mieli odzyskać wolność pod warunkiem, że w zgadywaniu pomyli się co najwyżej skończona liczba więźniów.

Problem, mimo że podobny do poprzedniego, w którym istniała niezawodna strategia, na pierwszy rzut oka wyglądał beznadziejnie. Zgadywanie losowe nie dawało żadnych szans (pomijając problem losowego wyboru liczby naturalnej)! Na szczęście, co nieskończenie wiele głów, to nie jedna. Wyteżony wspólny wysiłek zaczął powoli prowadzić więźniów ku wolności. Najpierw udało im się zauważyć, że gdyby ustawili się w pewnym porządku, na przykład zgodnym z numerami cel, które zajmują, to liczby wypisane na czołach utworzą nieskończony ciąg o wyrazach naturalnych. Jeżeli przyjrzymy się dowolnym dwóm takim ciągom, to możemy określić, na ilu pozycjach się one różnią. Czasami jest to skończona liczba pozycji, a czasami różnic jest nieskończenie wiele.

Kierując się zupełnie naturalną w tym przypadku intuicją, postanowili podzielić wszystkie ciągi liczb naturalnych ze względu na to kryterium. Znaleźli w swoich celach nieskończenie wiele worków i do każdego z nich wrzucali wszystkie ciągi, które różnią się tylko na skończonej liczbie pozycji. Szybko zauważyli, że takie rozmieszczenie jest bardzo porządne. Jeżeli w pewnym worku znalazły się jakieś ciągi, to nowy ciąg, który różni się od jednego z nich tylko na skończonej liczbie pozycji, zachowuje się dokładnie tak samo w stosunku do pozostałych, więc można go do nich dorzucić. Brali więc kolejne ciągi i wrzucali do odpowiednich worków bądź do worka pustego, jeżeli nie istniał jeszcze taki z pasującymi ciągami. Po zakończeniu tej operacji każdy ciąg miał swój worek. Co więcej, każdy znalazł się w dokładnie jednym worku. I z tego miejsca droga na wolność okazała się już nadzwyczaj prosta. Przecież ciąg numerów, które mieli na czołach, również znajdował się w którymś worku. W dodatku, każdy z więźniów, nie widząc jedynie swojego numeru, mógł jednoznacznie określić, który to worek! A przecież ich zadanie polegało na wyciągnięciu wspólnie jednego z ciągów z tego właśnie worka. W końcu ich odpowiedź to po prostu pewien ciąg – taki, który różni się od wyrysowanego na ich czołach tylko na skończonej liczbie pozycji.

Pozostało ustalić, w jaki sposób wspólnie (nie słysząc odpowiedzi współwięźniów) mogą trafić w jeden z ciągów z tego worka. Ależ nic prostszego! Wystarczy, że wcześniej dla każdego worka wybiorą reprezentanta, a potem, jak już ustalą, w którym worku znajduje się ciąg z ich twarzy, będą obstawiać kolejne wyrazy odpowiedniego reprezentanta. W taki sposób wybiorą ciąg, który od rzeczywistego różni się na skończonej liczbie pozycji, więc tylko skończona liczba z nich nie trafi. Jednak mogą wyjść na wolność! I to z całą pewnością! A ile czasu zajmie im wrzucanie wszystkich ciągów na świecie do worków, to już zupełnie inna historia. . .



Rozwiązanie zadania M 1288.

Jeśli wszystkie punkty są jednakowego koloru, to taka trójka punktów istnieje.

Zalóżmy zatem, że istnieją punkty dwóch kolorów np. czarne i białe. Wśród nich istnieją dwa tego samego koloru. Oznaczmy je A_{-1} , A_1 i umieścimy na takiej osi liczbowej, że punkt A_{-1} odpowiada liczbie -1 , a punkt A_1 odpowiada liczbie 1 . Punkt odpowiadający liczbie całkowitej n oznaczamy będziemy A_n .

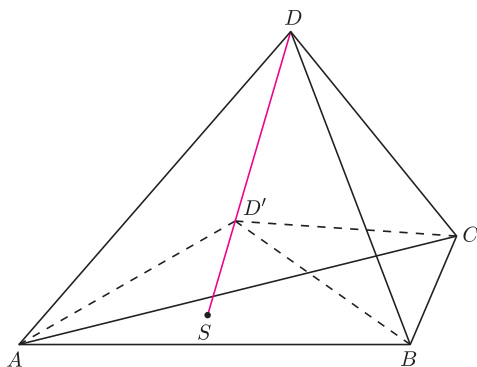
Możemy przyjąć, bez straty ogólności, że punkty A_{-1} i A_1 są czarne. Jeżeli punkt A_0 jest czarny, to mamy trójkę punktów spełniających warunki zadania. Jeżeli natomiast punkt A_0 jest biały, to bierzemy pod uwagę jeszcze punkty: A_{-3} , A_3 . Jeżeli jeden z punktów A_{-3} , A_3 jest czarny, to ten punkt wraz z punktami A_{-1} i A_1 tworzy trójkę punktów spełniającą warunki zadania. W przeciwnym razie każdy z punktów A_{-3} , A_0 , A_3 jest biały i tworzą one trójkę punktów spełniającą warunki zadania.

Kącik przestrzenny (4): Metoda objętości

Tym razem zajmiemy się dosyć prostą, a zarazem bardzo ważną metodą – metodą objętości. Jest to analog metody pól na płaszczyźnie. Przez $V(XYZT)$ będziemy oznaczać objętość czworościanu $XYZT$. Potrzebne będą dwa następujące fakty:

Fakt 1. Punkt D' , różny od D i nieleżący na płaszczyźnie ABC , leży wewnątrz lub na brzegu czworościanu $ABCD$. Prosta DD' przecina płaszczyznę ABC w punkcie S . Wtedy (rys. 1)

$$\frac{V(ABCD')}{V(ABCD)} = \frac{D'S}{DS}.$$



Rys. 1

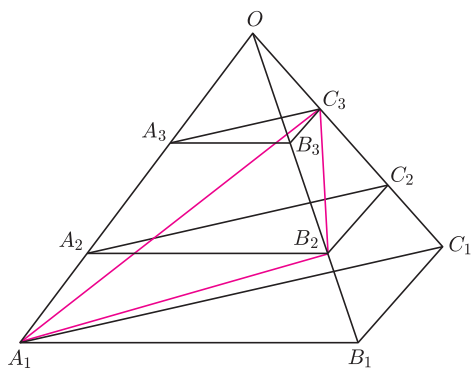
Fakt 2. Dany jest czworościan $ABCD$ oraz punkty A', B', C' leżące na półprostyach $DA^{\rightarrow}, DB^{\rightarrow}, DC^{\rightarrow}$. Wówczas

$$\frac{V(A'B'C'D)}{V(ABCD)} = \frac{A'D \cdot B'D \cdot C'D}{AD \cdot BD \cdot CD}.$$

Nietrudny dowód faktu 1 i wyprowadzenie z niego faktu 2 pozostawiamy Czytelnikowi. Te dwa proste fakty mają szereg różnych zastosowań – zobaczymy kilka przykładów.

1. (OM 44-II-3) Na krawędzi OA_1 czworościanu $OA_1B_1C_1$ wybrano punkty A_2, A_3 , takie że $OA_1 > OA_2 > OA_3 > 0$. Punkty B_2, B_3 leżą na krawędzi OB_1 , a punkty C_2, C_3 leżą na krawędzi OC_1 , przy czym płaszczyzny $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$ są równoległe. Niech V_i ($i = 1, 2, 3$) oznacza objętość czworościanu $OA_iB_iC_i$, a V objętość czworościanu $OA_1B_1C_1$. Wykazać, że

$$V_1 + V_2 + V_3 \geq 3V.$$



Rys. 2

Rozwiązanie. Niech $OA_1 = a_1, OA_2 = a_2, OA_3 = a_3$. Korzystając z faktu 2 i równoległości trzech danych płaszczyzn, otrzymamy

$$\frac{V_1}{V} = \frac{OB_1}{OB_2} \cdot \frac{OC_1}{OC_3} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_1}{a_3}.$$

Analogicznie dostaniemy, że

$$\frac{V_2}{V} = \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_2}{a_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{V_3}{V} = \frac{a_3}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2}.$$

Dodając stronami i korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, otrzymamy

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3}{V} = \frac{a_1^2}{a_2a_3} + \frac{a_2^2}{a_3a_1} + \frac{a_3^2}{a_1a_2} \geq 3.$$

Mimo iż pozornie wydaje się, że nie ma tu nic trudnego, to polecam Czytelnikom rozwiązanie kilku tego typu zadań ze strony internetowej *Delty* – czasem naprawdę trzeba sporo sprytu, by móc zastosować fakt 2.

Metodę objętości można stosować nie tylko w jedną stronę, ale także w drugą: zamienić stosunki długości odcinków na stosunki objętości pewnych brył. Ten pomysł pozwala na rozwiązanie wielu z pozoru niełatwych zadań.

2. (OM 14-I-11) Wewnątrz czworościanu $ABCD$ obrano punkt S . Proste AS, BS, CS, DS przecinają przeciwległe ściany czworościanu odpowiednio w punktach A', B', C', D' . Dowieść, że

$$\frac{SA'}{AA'} + \frac{SB'}{BB'} + \frac{SC'}{CC'} + \frac{SD'}{DD'} = 1.$$

Rozwiązanie. Korzystając z faktu 1, otrzymamy

$$\frac{SA'}{AA'} = \frac{V(BCDS)}{V(ABCD)}.$$

Wyrażając analogicznie pozostałe ułamki, otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{SA'}{AA'} + \frac{SB'}{BB'} + \frac{SC'}{CC'} + \frac{SD'}{DD'} &= \\ &= \frac{V(BCDS)}{V(ABCD)} + \frac{V(CDAS)}{V(ABCD)} + \\ &+ \frac{V(DABS)}{V(ABCD)} + \frac{V(ABCS)}{V(ABCD)} = 1. \end{aligned}$$

Gdybyśmy nie znali tej metody, zadanie to mogłoby nam sprawić dużo więcej problemów...

Zadania

3. (mOM 2001-III-3) W czworościanie $ABCD$ obrano na krawędziach AD, DB, BC odpowiednio takie punkty K, L, M , że

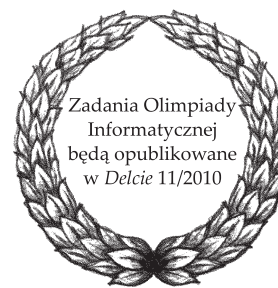
$$\frac{AK}{KD} = \frac{2}{3}, \quad \frac{DL}{LB} = \frac{3}{4}, \quad \frac{BM}{MC} = \frac{4}{5}.$$

Płaszczyzna KLM dzieli ten czworościan na dwa wielościany o objętościach V_1 i V_2 . Wyznaczyć $\frac{V_1}{V_2}$.

4. (OM 52-III-2) Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz czworościanu foremnego o krawędzi 1 od jego wierzchołków jest nie większa niż 3.

Więcej zadań na internetowej stronie *Delty*.

Michał KIEZA



Olimpiada

Zadania zawodów I stopnia Olimpiad: Astronomicznej, Fizycznej, Matematycznej oraz Matematycznej Gimnazjalistów 2010/2011

LIV Olimpiada Astronomiczna

Informacje regulaminowe

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.
2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne.
3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, **do 11 października 2010 r.**, rozwiązania 3 zadań dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.
4. Uczniowie, którzy przysłażą rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do końca października bieżącego roku tematy drugiej serii zadań. Zadania obydwu serii będą również umieszczane na stronie internetowej: <http://planetarium.edu.pl>
5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, **do 15 listopada 2010 r.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.
6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).
7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem:
**Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej
Planetarium Śląskie
41-500 Chorzów, skr. poczt. 10**
8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.
9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi). Dodatkowo, do rozwiązań pierwszej serii zadań należy dołączyć na osobnej kartce następujące informacje: imię i nazwisko, rok urodzenia, nazwa szkoły wraz z jej imieniem, adres szkoły (z kodem pocztowym i nazwą województwa), klasa, profil klasy, adres prywatny (z kodem pocztowym), e-mail, nazwisko nauczyciela fizyki i astronomii oraz ewentualnie opiekuna przygotowującego do olimpiady.
10. Zawody II stopnia odbędą się **17 stycznia 2011 r.** Zawody III stopnia odbędą się w dniach **od 10 do 13 marca 2011 r.**
11. Powiadomienia o zakwalifikowaniu do zawodów kolejnych stopni otrzymają jedynie uczniowie awansujący.
12. O uprawnieniach w przyjmowaniu na wyższe uczelnie laureatów i finalistów olimpiady decydują senaty uczelni. Informacje na ten temat są umieszczane na ich stronach internetowych.

Pierwsza seria zadań zawodów I stopnia

1. Gwiazda *Fomalhaut* (α PsA), wokół której dostrzeżono planety, należy do najjaśniejszych gwiazd południowej półkuli nieba. Określ dla Twojej miejscowości:

- 1) na jakiej maksymalnej wysokości może być obserwowana ta gwiazda;
- 2) kiedy są najkorzystniejsze terminy obserwacji tej gwiazdy w bieżącym roku.

Niezbędne dane wyszukaj samodzielnie.

2. Meteoroid o masie 100 kg spada na Ziemię z odległości 5 promieni Ziemi. Sporządź wykres zależności siły grawitacyjnej działającej na ten obiekt od jego odległości od środka Ziemi. Korzystając z wykresu, oceń wzrost energii kinetycznej meteoroidu podczas tej zmiany wysokości. Przyjmij masę Ziemi $M = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg i promień Ziemi $R = 6,4 \cdot 10^6$ m.

3. Przemiana wodoru w hel, będąca przyczyną świecenia gwiazd, stanowi bardzo wydajne źródło energii. Wydajność tego źródła jest tak duża, że czasem powoduje pojawianie się różnych przesadnych porównań. Na przykład w jednym z popularnonaukowych czasopism znajdujemy zdanie: „Z litra bogatej w deuter wody można uzyskać tyle samo energii, co z supertankowca wypełnionego ropą”. Sprawdź zasadność tego zdania. Potrzebne dane wyszukaj samodzielnie.

4. Tabela podaje odległości od Słońca (w AU) oraz długości ekliptyczne λ pięciu planet i Słońca w chwili, gdy odległość Ziemi od Słońca wynosiła 1 AU. Oblicz, jakie są w tym momencie elongacje Ziemi z pozycji obserwatora znajdującego się na każdej z tych planet i określ z tych pozycji położenie Ziemi względem charakterystycznych konfiguracji ze Słońcem (koniunkcji, opozycji itp.).

obiekt	odległość	λ	obiekt	odległość	λ
Merkury	0,4	320°	Jowisz	5,0	78°
Wenus	0,7	36°	Saturn	9,5	168°
Mars	1,5	0°	Słońce	—	12°

Uwaga. Dla uproszczenia zakładamy, że orbity planet leżą w płaszczyźnie ekliptyki.

Zadania obserwacyjne

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. W przypadku zastosowania metody fotograficznej można dołączyć negatyw, fotografię, wydruk komputerowy zdjęcia lub plik na CD, DVD itp.

1. Korzystając z publikowanych efemeryd widoczności ISS – Międzynarodowej Stacji Kosmicznej (np. www.heavens-above.com), zaznacz na odpowiednich fragmentach mapy nieba dowolne dwa zaobserwowane tory przelotu stacji widoczne w Twojej miejscowości. Oszacuj współrzędne horyzontalne początku i końca obserwowanych przelotów. Podaj współrzędne miejsca obserwacji.

2. W dowolny sposób dokonaj pomiaru kątowej średnicy tarczy Księżyca i oblicz odległość Księżyca od miejsca obserwacji. Drugiego takiego pomiaru dokonaj w odstępie około tygodnia i porównaj otrzymane wyniki. Przyjmij, że średnica Księżyca wynosi 3476 km. Opisz metodę pomiaru.

3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji prowadzonych w ostatnim roku.

Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 15 listopada 2010 r.

Zalecana literatura

- Obowiązujące w szkołach podręczniki do przedmiotów ścisłych.
- H. Chrupała, M. T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych*.
- H. Chrupała, *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach).
- H. Chrupała, J. M. Kreiner, M. T. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami*.
- J. M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką*.
- J. M. Kreiner, *Ziemia i Wszechświat – astronomia nie tylko dla geografów*.
- D. H. Levy, *NIEBO – Poradnik użytkownika*.
- *Słownik szkolny – Astronomia* (praca zbiorowa).
- *Encyklopedia szkolna – fizyka z astronomią* (praca zbiorowa).
- Atlas nieba. Obrotowa mapa nieba.
- Czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Świat Nauki*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie*.



LX Olimpiada Fizyczna

Zadania zawodów I stopnia

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej w terminach:

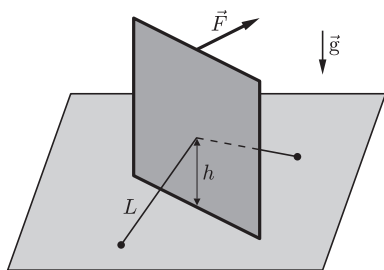
część I – do 15 października br., część II – do 15 listopada br.

O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II. Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej www.kgof.edu.pl

Część I

Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić: imię, nazwisko i adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę i adres szkoły, klasę oraz imię i nazwisko nauczyciela fizyki.

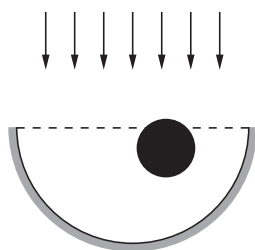
Podaj i krótko uzasadnij odpowiedź. Za każde z 15 zadań można otrzymać maksymalnie 4 punkty.



Rys. 1

1. Sztywna płyta stoi pionowo na podłożu. Aby unieruchomić ją w tej pozycji, postanowiono umocować ją za pomocą dwóch lin długości L każda (patrz rysunek 1). Niech F będzie prostopadłą do powierzchni płyty siłą przyłożoną do górnej krawędzi płyty, powodującą zerwanie jednej z lin. Na jakiej wysokości h liny powinny być przymocowane do płyty (dobierając przy tym odpowiednie miejsce zamocowania w podłożu), aby F było jak najmniejsze? Zakładamy, że liny są bardzo mało rozciągliwe i nie ulegają wyrwaniu ani z mocowania w podłożu, ani z mocowania w płycie. Wysokość płyty jest większa niż L , a jej dolna krawędź nie przesuwa się.

2. Mamy do dyspozycji idealne półsferyczne lustro o promieniu R (rysunek 2). Oś optyczna lustra jest ustawiona w kierunku Słońca. W którym miejscu należy umieścić czarną, metalową kulkę o promieniu $R/4$, aby jak najszybciej się ona nagrzała? Przyjmij, że promienie światła ze Słońca tworzą wiązkę równoległą.



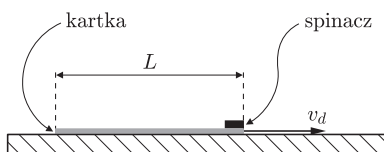
Rys. 2

3. Na poziomym, długim stole leży kartka papieru długości L , a na kartce, tuż przy jej krótszej krawędzi, leży spinacz biurowy. Współczynnik tarcia między kartką a spinaczem wynosi μ . W pewnym momencie kartce nadajemy (w przybliżeniu natychmiastowo) prędkość v_d (patrz rysunek 3). Ile powinno wynosić v_d , aby nadać spinaczowi jak największą prędkość względem stołu? Rozmiary spinacza są małe w porównaniu z L .

4. Wokół pewnej planety krąży wielki wąż w pozycji pionowej (wzdłuż promienia poprowadzonego do planety), na stałej wysokości nad planetą. W pewnej chwili wąż zwinął się w niewielki kłębek. Czy jego orbita będzie kołowa, czy zacznie się on oddalać od planety, czy zbliżać do niej?

5. Gdy na pewną płytkę płasko-równoległą z bezbarwnego szkła pada prostopadle wiązka światła o natężeniu I_0 , to natężenie wiązki przechodzącej wynosi $p \cdot I_0$, a wiązki odbitej $(1 - p) \cdot I_0$. Jakie będzie natężenie wiązki przechodzącej przez dwie takie płytki, umieszczone równolegle jedna za drugą? W rozważanym przypadku nie występuje interferencja (wiązka nie jest koherentna).

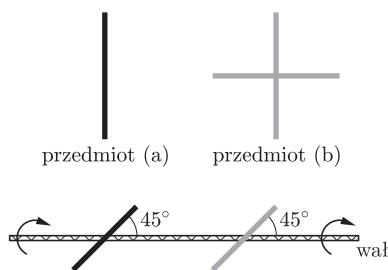
6. Czy skacząc na bungee można zwiększyć minimalną odległość, na jaką zbliżymy się do ziemi, jeśli nasza prędkość początkowa będzie niezerowa? Przyjmij, że guma bungee spełnia prawo Hooke'a i pomij opór powietrza.



Rys. 3

7. Są ludzie, którzy twierdzą, że Elvis Presley nadal żyje. Podaj przykład obserwatora (jego odległość i prędkość wraz z kierunkiem i zwrotem), dla którego w chwili (mierzonej przez ciebie), gdy piszesz rozwiązanie tego zadania, jest to prawda. Przyjmij w przybliżeniu, że Elvis zmarł w miejscu, w którym się znajdujesz. Potrzebne dane znajdź w dostępnych ci źródłach.

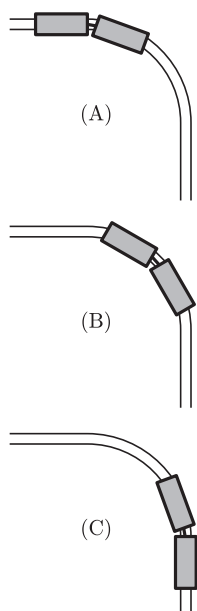
8. Działo elektromagnetyczne składa się z dwóch równoległych, odległych o d , poziomych, bardzo długich szyn, po których porusza się prostopadła do szyn, łącząca je metalowa belka o masie m . Szyny znajdują się w pionowym polu magnetycznym o natężeniu B . Jaka jest prędkość graniczna belki, jeśli do szyn podłączymy napięcie U ? Pomij opory ruchu belki.



Rys. 4

9. Rozważmy dwa przedmioty o takich samych masach (patrz rysunek 4): a) jednorodny pręt, b) tworzące krzyż dwa jednorodne pręty. Dla każdego z tych przedmiotów moment bezwładności względem osi przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do niego jest taki sam. Każdy z tych przedmiotów umocowano na cienkim wale, tworzącym z nim kąt 45° (patrz rysunek 4), a następnie zaczęto obracać wałem (i przedmiotami) ze stałą prędkością kątową. W przypadku którego przedmiotu moment siły, z jakim działa on na wał, jest większy?

10. Wszystkie linie kolejowe w Paflagonii są kręte. Koleje Paflagońskie korzystają z tego, stosując w swoich pociągach nowatorski system napędu: silniki zginają lub wyprostowują złącza międzywagonowe. W których momentach (patrz rysunek 5) silnik powinien działać w kierunku zgięcia, a w których – w kierunku wyprostowania złącza?



Rys. 5

11. Jaki jest maksymalny zasięg strzału na Księżycu pocisku wylatującego z działa z prędkością 1800 m/s ? Potrzebne dodatkowe dane wyszukaj w dostępnych ci źródłach.

12. W pewnej odległości od ładunku punktowego q znajduje się mała, dielektryczna kulka. Jak zmieni się (ile razy wzrośnie/zmaleje) wartość siły elektrostatycznej działającej na tę kulkę, jeśli dwukrotnie wzrośnie wartość ładunku punktowego?

13. Jednorodnemu walcowi nadano pewną prędkość kątową wokół jego osi, a następnie nadano mu prędkość \vec{v} wzdłuż podłogi (patrz rysunek 6). Zauważono, że jeśli wysokość walca nie jest mała w porównaniu z jego promieniem, to tor ruchu walca odchyła się w porównaniu z kierunkiem \vec{v} . W którą stronę i dlaczego? Podłoga jest pozioma, a walec styka się z nią podstawą. Pomiń wpływ powietrza, ale uwzględnij tarcie walca o podłogę.

14. Na małą kulkę metalową (średnicy np. 3 mm) skierowano wiązkę światła laserowego i obserwowano cień kulki na ekranie. Jeśli ktoś twierdzi, że widział jasny punkt w środku cienia, to dlatego, że: a) uległ złudzeniu optycznemu wynikającemu z kontrastu cienia z jasnym otoczeniem, b) w kulce musiał być niewielki otworek (kanalik), c) światło lasera jest tak silne, że wiązka przenika przez kulę, d) przyczyną zjawiska są zjawiska falowe – dyfrakcja i interferencja światła, e) przyczyną zjawiska jest poprzeczny charakter fali świetlnej i przejście polaryzacji liniowej w kołową.

15. W magazynie paliwa jądrowego znajdują się kule o identycznym promieniu i identycznej wadze, zawierające pluton pokryty pochłaniającą promieniowanie powłoką z ołowiu. Niektóre kule zawierają czysty izotop ^{238}Pu (okres połowicznego rozpadu $87,7 \text{ lat}$), a inne – czysty izotop ^{244}Pu (okres połowicznego rozpadu ponad 80 milionów lat). Niestety, oznaczenia na kulach się zagubiły. Jaka najprostsza metoda pozwoli na odróżnienie kul bez uszkodzenia ochronnej warstwy ołowiu?

Część II

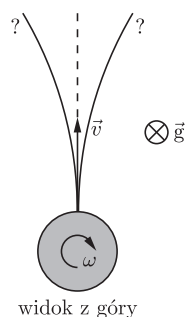
Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić: imię, nazwisko i adres autora pracy, nazwę i adres szkoły, klasę oraz imię i nazwisko nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

Zadania teoretyczne

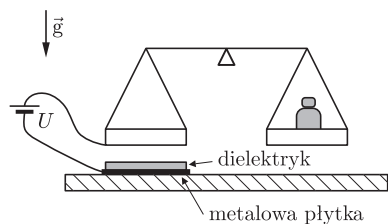
Przesłać należy rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

T1. Tomek posiada wagę laboratoryjną, ale zgubił do niej odważniki. Postanowił pod szalką umieścić metalową płytkę o promieniu r (równym promieniowi denka szalki) i podłączyć szalkę i płytkę do źródła o regulowanym napięciu (patrz rysunek 7). Aby nie dochodziło do zwarcia, Tomek przykleił do górnej powierzchni płytki warstwę dielektryka o grubości d_1 ($d_1 \ll r$) i stałej dielektrycznej ϵ_w . Gdy waga jest w położeniu równowagi, odległość między spodem szalki a dielektrykiem wynosi d_2 ($d_2 \ll r$). Jakie powinno być napięcie U , aby waga była w równowadze, gdy na drugiej szalce leży przedmiot o masie m ? Podaj liczbową wartość U dla $r = 5 \text{ cm}$, $d_1 = d_2 = 1 \text{ mm}$, $m = 1 \text{ g}$, $\epsilon_w = 3$.

Szalki są metalowe, a ich dno jest płaskie. Płytkę pod szalką jest przymocowana do podłoża. Przyspieszenie ziemskie $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, przenikalność elektryczna próżni $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.



Rys. 6

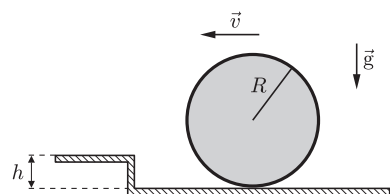


Rys. 7

T2. W maszynie parowej woda o temperaturze początkowej $t_0 = 20^\circ\text{C}$ jest podgrzewana do temperatury $t_1 = 120^\circ\text{C}$, przy czym jej ciśnienie wzrasta do wartości $p_1 = 2,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. W temperaturze t_1 i ciśnieniu p_1 zachodzi przemiana wody w parę. Powstała para przesuwają tłok, a następnie jest wypuszczana do otoczenia o ciśnieniu $p_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Oblicz maksymalną sprawność tej maszyny w dwóch przypadkach:

- para przesuwająca tłok ma stałe ciśnienie p_1 , a potem jest wypuszczana do atmosfery;
- maszyna pracuje dwuetapowo: najpierw para przesuwają tłok jak w pkt. a), a następnie przesuwając tłok (ten sam lub inny – zależnie od rozwiązań konstrukcyjnych), ulega adyabatycznemu rozprężeniu, aż osiągnie temperaturę $t_w = 100^\circ\text{C}$, po czym wylatuje do atmosfery.

Ciepło parowania wody w temperaturze t_1 (i pod ciśnieniem p_1) wynosi $q_1 = 2,2 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$, ciepło właściwe wody jest równe $c_w = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, ciepło właściwe pary wodnej przy stałym ciśnieniu $c_p = 2,0 \cdot 10^3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$. Parę wodną potraktuj jako gaz doskonały. Uniwersalna stała gazowa jest równa $R = 8,3 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$.



Rys. 8

T3. Kulka o promieniu R , poruszająca się z prędkością v po poziomej podłodze, uderza w krawędź progu o wysokości h (patrz rysunek 8). Zderzenie jest doskonale sprężyste i trwa bardzo krótko. Jaki warunek (lub warunki) powinno spełniać v , aby kulka po uderzeniu w próg „wskoczyła” na znajdującą się za nim część podłogi, nie zderzając się powtórnie z krawędzią progu? Pomiń tarcie i opór powietrza. Sprawdź, czy ten warunek jest spełniony dla następujących wartości parametrów:

- $R = 0,02 \text{ m}$, $h = R/2$, $v = 1 \text{ m/s}$;
- $R = 0,02 \text{ m}$, $h = R/4$, $v = 3 \text{ m/s}$;
- $R = 0,02 \text{ m}$, $h = R/8$, $v = 0,5 \text{ m/s}$;
- $R = 0,04 \text{ m}$, $h = R/16$, $v = 0,3 \text{ m/s}$.

Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Prędkość \vec{v} jest prostopadła do krawędzi progu.

Uwaga: Gdy $h < R$, wygodnie jest wprowadzić taki kąt α , że $h = R(1 - \cos \alpha)$.

T4 (numeryczne). Statek piracki wystrzelił z armaty (falkonetu) w kierunku statku przeciwnika żelazną kulę o promieniu $r = 2,5 \text{ cm}$. Zaraz po opuszczeniu lufy kula miała prędkość $v = 300 \text{ m/s}$ skierowaną pod kątem α do poziomu. Następnie kula poruszała się w powietrzu, a jedynymi siłami na nią działającymi były: stała siła grawitacji oraz siła oporu powietrza skierowana w kierunku przeciwnym do kierunku poruszania się kuli, o wartości proporcjonalnej do kwadratu prędkości

$$\vec{F}_R = -\frac{1}{2} \kappa S \rho_p v^2 \frac{\vec{v}}{v},$$

gdzie \vec{v} jest prędkością kuli, a κ – stałym współczynnikiem oporu aerodynamicznego, który dla kuli w przybliżeniu jest równy 0,45. S jest powierzchnią rzutu obiektu (kuli) na płaszczyznę prostopadłą do kierunku ruchu, ρ_p – gęstością powietrza.

Posługując się komputerem (np. wykorzystując znany ci język programowania lub arkusz kalkulacyjny) lub programowalnym kalkulatorem, wyznacz kąt, przy którym zasięg strzału jest największy. Zastosuj poniższy schemat:

- Zaproponuj dla tego problemu i uzasadnij schemat różnicowy oparty na metodzie Eulera (patrz Przykład) lub innej metodzie numerycznej.
- Wykreśl tory dla $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, oraz $\alpha = 60^\circ$.
- Wykreśl zależność zasięgu od kąta i na tej podstawie oszacuj kąt α_{\max} , dla którego zasięg jest największy. Podaj ten zasięg.

Przyjmij gęstość żelaza $\rho_{\text{Fe}} = 7900 \text{ kg/m}^3$ i powietrza $\rho_p = 1,2 \text{ kg/m}^3$, przyspieszenie ziemskie $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Punkt upadku kuli znajduje się na tej samej wysokości, co punkt jej wystrzelenia. Pomiń krzywiznę Ziemi.

Przykład. Algorytm różnicowy wykorzystujący schemat Eulera dla jednowymiarowego problemu spadku swobodnego z warunkami początkowymi $y(0) = h$ oraz $v(0) = 0$ jest następujący:

Dla małego Δt równania ruchu przybliżamy przez

$$(1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = v,$$

$$(2) \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{F}{m} = -g.$$

Stąd algorytm ma następującą postać:

- Inicjalizacja: $y_0 = h$, $v_0 = 0$.
- Krok algorytmu: dopóki $y_n > 0$, powtarzaj

$$(3) \quad y_{n+1} = y_n + v_n \Delta t,$$

$$(4) \quad v_{n+1} = v_n - g \Delta t.$$

Powyższy schemat należy uogólnić na przypadek dwuwymiarowy i uwzględnić konkretną postać siły występującej w rozważanym zagadnieniu.

Teoretycznie dla odpowiednio małego Δt uzyskane w ten sposób rozwiązanie numeryczne dowolnie dokładnie przybliży rozwiązanie wyjściowego zagadnienia. Jednak komputer (lub kalkulator) przeprowadza obliczenia ze skończoną dokładnością i zbyt mała wartość Δt może być przyczyną dużych błędów. W praktyce długość kroku czasowego Δt można ustalić, np. żądając, by, po zmniejszeniu jej dwukrotnie, zmiany szukanych parametrów były w granicach z góry założonej dokładności (np. 1%). Poprawność schematu możesz sprawdzić na przykładzie rzutu ukośnego bez oporu.

Zadania doświadczalne

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) dowolnie wybranych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

D1. Siły oporów ruchu mogą mieć złożoną postać. Zbadaj, który związek najlepiej opisuje ruch roweru (z rowerzystą) jadącego po równej, twardej nawierzchni:

- a) siła oporu nie zależy od prędkości $F_{\text{op}}(v) = C$,
- b) siła oporu jest proporcjonalna do prędkości $F_{\text{op}}(v) = Av$,
- c) siła oporu jest proporcjonalna do kwadratu prędkości $F_{\text{op}}(v) = Bv^2$.

Wyznacz odpowiednią stałą dla zakresu prędkości 0–20 km/h. Możesz użyć:

- roweru z prędkościomierzem,
- kamery (np. w telefonie komórkowym),
- taśmy mierniczej,
- stopera.

Uwaga: Podczas pomiarów pamiętaj o bezpieczeństwie rowerzysty i innych osób.

D2. Woda jest przezroczysta w widzialnym zakresie widma, ale już w bliskiej podczerwieni silnie absorbuje promieniowanie elektromagnetyczne. Mając do dyspozycji:

- wysokie naczynie szklane (menzurkę, wazon) z wodą,
- linijkę,
- pilot od telewizora,
- aparat cyfrowy oraz program do obróbki zdjęć,

zbadaj zależność natężenia światła I_t , wysyłanego przez podczerwoną diodę pilota i przechodzącego przez wodę, od grubości warstwy wody L . Wyznacz współczynnik α we wzorze

$$I_t = I_0 e^{-\alpha L}.$$

Uwaga: W typowym aparacie cyfrowym stosuje się korekcję skali natężenia – można przyjąć, że rejestrowana do pliku wartość sygnału I_{PLIK} jest związana z natężeniem światła padającego na piksel matrycy I_{PIKSEL} formułą

$$I_{\text{PLIK}} = I_{\text{PIKSEL}}^{0,7}.$$

D3. Plastikowa rura może działać jak „dźwiękowod”. Zbadaj, jak wygląda transmisja takiego „dźwiękowodu” w funkcji częstości fali akustycznej. Transmisja T jest zdefiniowana jako stosunek natężenia dźwięku na wyjściu A_{out} do natężeniu dźwięku na wejściu A_{in} „dźwiękowodu”:

$$T(\omega) = \frac{A_{\text{out}}}{A_{\text{in}}}.$$

Masz do dyspozycji:

- komputer z kartą dźwiękową podłączoną do głośnika i mikrofonu,
- program komputerowy **Generator** pozwalający wysyłać na wyjście karty dźwiękowej dowolne przebiegi napięcia,
- program komputerowy **Oscyloskop** pozwalający odczytywać przebiegi napięcia na wejściu mikrofonowym karty dźwiękowej,
- plastikową rurę (np. kanalizacyjną) o średnicy ok. 5 cm i długości ok. 2 m.



LXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

4 października 2010 r. – I seria,

4 listopada 2010 r. – II seria,

6 grudnia 2010 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych oraz bieżące informacje, a także zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria 1. Wyznaczyć wszystkie takie pary (a, b) liczb wymiernych dodatnich, że

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{4 + \sqrt{7}}.$$

2. Dane są liczby całkowite dodatnie m, n oraz d . Udowodnić, że jeżeli liczby $m^2n + 1$ i $mn^2 + 1$ są podzielne przez d , to również liczby $m^3 + 1$ i $n^3 + 1$ są podzielne przez d .

3. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD , zaś przekątne przecinają się w punkcie E . Wykazać, że prosta zawierająca dwusieczną kąta BEC jest prostopadła do prostej MN wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BD$.

4. Dana jest liczba naturalna k . Dowieść, że z każdego zbioru liczb całkowitych, mającego więcej niż 3^k elementów, można wybrać $(k + 1)$ -elementowy podzbiór S o następującej własności:

Dla dowolnych dwóch różnych podzbiorów A, B zbioru S suma wszystkich elementów zbioru A jest różna od sumy wszystkich elementów zbioru B . (Przyjmujemy, że suma elementów zbioru pustego wynosi 0).

II seria 5. Krawędzie dwunastościanu foremego chcemy ponumerować liczbami $1, 2, \dots, 30$, używając każdej z nich dokładnie raz. Rozstrzygnąć, czy można to uczynić tak, aby suma numerów krawędzi wychodzących z dowolnego wierzchołka była:

- (a) parzysta;
- (b) podzielna przez 4.

6. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

Udowodnić, że

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4}} \geq \sqrt{3}.$$

7. Znaleźć wszystkie takie pary (a, b) różnych liczb całkowitych dodatnich, że liczba $b^2 + ab + 4$ jest podzielna przez liczbę $a^2 + ab + 4$.

8. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC . Punkt K leży na boku BC i spełnia warunek $\sphericalangle BAM = \sphericalangle KAC$. Na odcinku AK wybrano taki punkt E , że $\sphericalangle BEK = \sphericalangle BAC$. Dowieść, że

$$\sphericalangle KEC = \sphericalangle BAC.$$

III seria 9. Wykazać, że dowolny czworokąt wypukły można rozciąć na 7 deltoidów.

10. Dane są różne nieparzyste liczby pierwsze p i q . Dowieść, że liczba $2^{pq} - 1$ ma co najmniej 3 różne dzielniki pierwsze.

11. W czworokącie rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykazać, że jeżeli pewne dwie z tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są wzajemnie prostopadłe.

12. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego

1 września 2010 r. – 25 października 2010 r.

Rozwiązania poniższych zadań należy zapisywać **jednostronnie** na **oddzielnych** arkuszach formatu A4. Na każdej kartce z rozwiązaniem należy podać następujące informacje:

- w prawym górnym rogu numer zadania,
- w lewym górnym rogu dane uczestnika: imię i nazwisko, adres domowy, adres e-mail, nazwa i adres szkoły, klasa.

Rozwiązania zadań należy przesłać do Komitetu Okręgowego, właściwego terytorialnie dla szkoły najpóźniej dnia 25 października 2010 r. (decyduje data stempla pocztowego). Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, terminy kolejnych etapów OMG oraz inne bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem www.omg.edu.pl

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + x(y - 4) = -2, \\ y^2 + y(x - 4) = -2. \end{cases}$$

2. W pewnym czworoscianie każdy wierzchołek połączono odcinkiem ze środkiem okręgu opisanego na przeciwległej ścianie. Okazało się, że otrzymane odcinki są wysokościami czworoscianu. Wykaż, że czworoscian ten jest foremny.

3. Udowodnij, że dla każdych dodatnich liczb a, b, c spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} > \sqrt{a+b+c}.$$

4. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Punkt X leży wewnątrz tego sześciokąta. Punkty K, L, M, N, P, Q są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DE, EF, FA . Wykaż, że suma pól czworokątów $QAKX, LCMX, NEPX$ nie zależy od wyboru punktu X .

5. W każde pole kwadratowej tablicy 100×100 wpisano liczbę rzeczywistą. Okazało się, że suma liczb wpisanych w każde cztery pola, które można nakryć L -tetraminem, jest równa 0. Wyznacz sumę liczb wpisanych w pola, które znajdują się na obu przekątnych tablicy.

Uwaga. L -tetraminem nazywamy figurę składającą się z czterech kwadratów o boku 1, ułożonych jak na rysunku obok. L -tetramina można obracać i odbijać symetrycznie.



6. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Jego przekątne przecinają się w punkcie E , a kąt BEC jest rozwarty. Prosta przechodząca przez punkt C i prostopadła do prostej AC przecina prostą przechodzącą przez punkt B i prostopadłą do prostej BD w punkcie F . Wykaż, że proste EF i AD są prostopadłe.

7. Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby nieparzyste a i b spełniające równanie

$$a^2 - b^3 = 4.$$



Informatyczny kącik olimpijski (34): Inspektor po raz drugi

Na powierzchni pewnej planety rozmieszczonych jest N baz, pomiędzy którymi wybudowano $N - 1$ dwukierunkowych połączeń o danych całkowitych długościach w_i , tworzących drzewo (pomiędzy każdymi dwiema bazami istnieje dokładnie jedna ścieżka). Inspektor kontrolujący bazy wprowadził Q zarządzeń, z których j -te jest postaci (u_j, v_j, a_j, b_j) i nakazuje przebudować wszystkie połączenia o długościach z przedziału $[a_j, b_j]$, które znajdują się na ścieżce pomiędzy bazami u_j i v_j . Naszym zadaniem jest obliczyć, ile połączeń należy przebudować, aby spełnić wymagania inspektora. Zakładamy, że N i Q , a także W – górne ograniczenie na liczby w_i , a_j i b_j – są tego samego rzędu wielkości.



Po raz kolejny przypomnę, że o problemie znajdowania najniższego wspólnego przodka dwóch wierzchołków w drzewie, czyli LCA tych wierzchołków, można przeczytać w *Delcie* 9/2007, „O dwóch równoważnych problemach”, oraz w *IKO* w *Delcie* 7/2009.

W tym miejscu potrzebny jest jeszcze jeden pomysł: przed wykonaniem wszystkich opisanych obliczeń wykonamy pewien wstęp, który pozwoli nam na utworzenie wymarzonego drzewa przedziałowego. Będzie nim przeszukiwanie drzewa w głąb (DFS) startujące z korzenia drzewa, podczas którego zapamiętamy dla każdego wierzchołka v czas wejścia do niego A_v i czas wyjścia z niego B_v . Zauważmy, że za pomocą tych liczb możemy stwierdzać, czy jeden wierzchołek znajduje się w poddrzewie drugiego: w jest w poddrzewie v wtedy i tylko wtedy, gdy $[A_w, B_w] \subseteq [A_v, B_v]$. W takim razie, jeśli posortujemy wierzchołki według wartości A_i , otrzymamy taką kolejność, w której każde poddrzewo jest spójnym fragmentem (przedziałem) tak uporządkowanego ciągu wierzchołków.

Pozostaje już tylko standardowe zastosowanie struktury danych, jaką jest drzewo przedziałowe: liśćmi tego drzewa będą wierzchołki oryginalnego drzewa w ustalonej

W tym kąciku zajmiemy się zadaniem, o którym była już mowa poprzednio – *Inspector is coming*. Nie jest to pomyłka, zadanie ma bowiem drugie bardzo interesujące rozwiązanie. Treść zadania przypominamy na marginesie.

Tak jak poprzednio, ukorzeńmy drzewo w dowolnym wierzchołku. Tym razem spróbujmy pomyśleć o długościach krawędzi jak o chwilach, w których są aktywne – krawędź długości w_i jest aktywna w chwili w_i . Wówczas zarządzenie wymagające przebudowania krawędzi na ścieżce pomiędzy u_j i v_j o długościach z przedziału $[a_j, b_j]$ oznacza dokładnie tyle, że należy przebudować krawędzie z tej właśnie ścieżki, które są aktywne kiedykolwiek pomiędzy chwilami a_j i b_j . Rozbijmy takie zarządzenie na początek (w chwili a_j) oraz koniec (w chwili b_j). Zdarzeniami nazwijmy: początki zarządzeń, ich końce oraz momenty aktywności poszczególnych krawędzi. Posortujmy wszystkie zdarzenia względem czasu (sposób rozstrzygania remisów podczas sortowania pozostawiamy do przemyślenia Czytelnikowi) i spróbujmy je obsługiwać właśnie w tej kolejności.

Aktywne, czyli rozpoczęte i jeszcze niezakończone, zarządzenia będziemy zapisywać w pewnej strukturze danych. Dla każdego zdarzenia reprezentującego krawędź chcemy stwierdzić, czy trzeba tę krawędź przebudować, czy też nie. Jak już wspominaliśmy przy pierwszym rozwiązaniu, krawędź długości w prowadzącą z wierzchołka p do jego ojca q w drzewie należy przebudować dokładnie wtedy, gdy w poddrzewie wierzchołka p rozpoczyna się, ale nie kończy, jakaś ścieżka z zarządzeniem zawierającym w . Ponieważ zajmujemy się tylko aktywnymi w danej chwili zarządzeniami, więc wystarczy nam umieć stwierdzać, czy w naszej strukturze danych jest jakiegokolwiek zarządzenie wychodzące z poddrzewa p poza to poddrzewo.

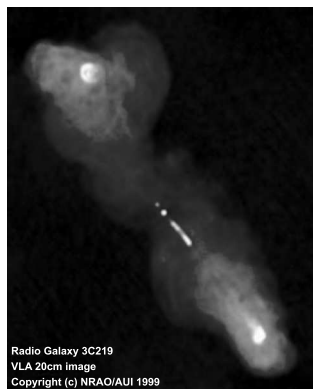
Jak zbudować strukturę danych umożliwiającą efektywne wykonywanie opisanych operacji? Nie pierwszy raz będziemy w takiej sytuacji korzystać z drzewa przedziałowego, wcześniej jednak musimy poczynić pewne obserwacje.

Po pierwsze, zauważmy, że ścieżkę pomiędzy u i v możemy rozłożyć na dwie części idące w drzewie w górę: z u do $LCA(u, v)$ oraz z v do $LCA(u, v)$. Będziemy więc zapisywać dla zarządzenia (u_j, v_j, a_j, b_j) , w momencie jego rozpoczęcia, liczbę $+1$ w wierzchołkach u_j i v_j oraz -2 w wierzchołku $LCA(u_j, v_j)$, a przy zakończeniu tego zarządzenia będziemy usuwać te zapisy. Zauważmy, że wystawianie pewnej ścieżki z poddrzewa p jest w takim razie równoważne temu, że suma liczb zapisanych w poddrzewie p jest dodatnia. Cały problem sprowadza się więc do następującego: w jaki sposób szybko obliczać sumę liczb zapisanych w wierzchołkach dowolnego poddrzewa.

przed chwilą kolejności. Potrzebne nam operacje to dodanie liczby do wartości zapisanej w liści symbolizującym odpowiedni wierzchołek oraz sprawdzenie, czy suma wartości w spójnym fragmencie zbioru liści, odpowiadającym odpowiedniemu poddrzewu drzewa z treści zadania, jest dodatnia. Są to dokładnie operacje udostępniane przez drzewo przedziałowe (w razie wątpliwości Czytelników odsyłamy na stronę <http://was.zaa.mimuw.edu.pl/>).

Podsumujmy wykonywane operacje: $O(N \log N)$ – wstępne przetworzenie drzewa, przeszukiwanie DFS oraz sortowanie wierzchołków według wartości A_i , plus $O(Q \log N)$ – znalezienie najniższych wspólnych przodków dla wszystkich par wierzchołków z zarządzeń, plus $N + 2Q$ operacji na drzewie przedziałowym, każda w czasie $O(\log N)$. Łącznie daje to $O((N + Q) \log N)$ operacji przy zużyciu pamięci rzędu $O(N \log N)$.

Tomasz KULCZYŃSKI



Dyski akrecyjne a ewolucja dżetów

Agnieszka JANIUK

Dżety – spolszczona wersja tego słowa wydaje się już być zadomowiona w naszym języku (a w każdym razie w codziennym żargonie astronomów) – są wąskimi strugami plazmy, jakie z okolic biegunowych wyrzucają gwiazdy albo jądra galaktyk. Najczęściej dżety badane są w związku z tzw. obiektami zwartymi (w których stosunek masy do rozmiaru jest bardzo duży), czyli gwiazdami neutronowymi bądź czarnymi dziurami – choć nie tylko. W tym tekście będzie mowa – w skali od mikro do makro – o dżetach w mikrokwazarach, błyskach gamma oraz aktywnych galaktykach.

Te pierwsze to jak gdyby kwazary w miniaturze. Są to układy podwójne, w których następuje przepływ materii z gwiazdy towarzyszącej (jest to na ogół gwiazda ciągu głównego lub olbrzym) na składnik zwarty – czarną dziurę lub gwiazdę neutronową. Spływająca materia rotuje, tworząc dysk akrecyjny wokół zasysającej ją gwiazdy, dżet zaś wyrzucany jest wzdłuż osi symetrii dysku.

Kolejny typ źródeł z dżetami, również w skali raczej mikro, to błyski gamma. Obserwowane wysokoenergetyczne promieniowanie gamma pojawia się na niebie w postaci jednorazowych, bardzo silnych pojaśnień, trwających od ułamka sekundy do kilkuset sekund – i wszystko wskazuje na to, że źródłem fotonów gamma jest krótkotrwały, wyrzucany z relatywistyczną prędkością dżet. Same błyski zostały po raz pierwszy zaobserwowane już ponad 40 lat temu, jednak ich pochodzenie i budowa są przedmiotem badań i intensywnej obserwacji dopiero od niedawna. W skali makro natomiast dżety znane są od dawna – są to ogromne, nieraz o rozmiarach rzędu kilku kiloparseków, strugi plazmy wyrzucane z jąder kwazarów, odkrytych na początku lat sześćdziesiątych XX wieku.

Zdjęcia dżetów wykonane teleskopem stanowią bezpośredni, obserwacyjny dowód na ich istnienie w skali makro. Wielkoskalowe dżety widoczne są na mapach radiowych, optycznych bądź rentgenowskich. Często przedstawiają one – położone po obu stronach jądra – okazałych rozmiarów obłoki, w których kierunku wystrzelują dwie wąskie strugi gazu. W miejscu, gdzie zderzają się one z gęstymi obłokami, powstają jasne plamy, wzbudzone do świecenia na koszt energii kinetycznej hamującego dżetu – na przykład widoczna na górze strony galaktyka 3C 219. Przykładem może być też galaktyka aktywna M87 oraz kwazar 3C 273, gdzie widać wąskie jasne strugi wyrzucane z centrum galaktyki – w tym akurat przypadku pojedyncze, ponieważ kąt widzenia ziemskiego obserwatora jest taki, że przeciwną struga jest praktycznie niewidoczna.

Czasami dżet może mieć niejednorodną strukturę, gdy sąsiadują na przemian obszary jaśniejsze i ciemniejsze (w obrazie rentgenowskim, optycznym bądź radiowym), podobne do zgęszczeń i rozrzedzeń.

Tego typu obserwacje wskazują na niejednostajną aktywność źródeł centralnych. Z kolei na mapach kwazarów można wyodrębnić kolejne obszary radiowo aktywne, pobudzone do świecenia przez uderzający w nie dżet – często są to grupy kilku sąsiadujących struktur o różnym natężeniu emisji, przedstawiające jakby historię życia i aktywności galaktyki.

O obecności dżetu świadczyć mogą, oprócz fotografii w rozmaitych długościach fal, również inne obserwacje.

Na przykład, analizując promieniowanie kwazarów, można stwierdzić, że składnik widma o kształcie nietermicznym (potęgowym) jest produkowany w wyniku emisji synchrotronowej przez elektrony poruszające się wzdłuż linii pola magnetycznego. Takie elektrony znajdują się w plazmie dżetu. Z kolei w przypadku błysków gamma przesłanką wskazującą na to, że promieniowanie pochodzi z wąskiego stożka dżetu, są, między innymi, rozważania dotyczące energii w tym zjawisku. Gdyby obserwowany strumień promieniowania był produkowany izotropowo, to wymagana jasność absolutna źródła (na ogół znamy odległość, która wyznaczana jest na podstawie przesunięcia ku czerwieni w widmie poświaty optycznej błysku) byłaby zbyt wielka – wybuch musiałby mieć energię rzędu nawet 10^{54} ergów! Jeśli jednak promieniowanie to jest skolimowane w stożku o niewielkim kącie rozwarcia, to wówczas rzeczywista energia całkowita wybuchu może być nawet o kilka rzędów wielkości mniejsza. Przy relatywistycznym ruchu plazmy w dżecie jego kąt rozwarcia (mierzony w radianach) jest odwrotnością czynnika Lorentza określającego prędkość ekspansji dżetu. Ten czynnik w błyskach gamma może typowo mieć wartość 100, co oznacza, że dżet porusza się z prędkością stanowiącą 99,99995% prędkości światła.

Dżety są nieodłącznie związane z występowaniem dysków akrecyjnych, aczkolwiek to, w jaki dokładnie sposób powstają, jest wciąż pewną zagadką dla astronomów. Jest to więc raczej nadal fakt obserwacyjny niż prawo fizyki, że obecności dżetów bez towarzystwa dysku się nie stwierdza – choć na odwrót jest to możliwe. Jak już wspomniałam wyżej, rozmaite obserwacje mówią nam o tym, że dżety nie muszą być jednorodne i świecić cały czas tak samo. Złożona struktura radiowogłośnych kwazarów, oprócz tego, że może być śladem dawnych i obecnych epizodów aktywności jądra, często bywa również „poobrączana”, tak jakby dżet w trakcie swojej ewolucji zmieniał kierunek. Z kolei w niektórych stanach mikrokwazara GRS 1915+105 dżet jest produkowany jednostajnie, a w innych w postaci epizodycznych wyrzutów, o czym świadczą obserwacje radiowe. Ponadto, większość błysków gamma (około 80%) wykazuje podstrukturę – ich krzywe blasku nie są pojedynczymi pulsami, lecz składają się z szeregu pików, których czas trwania jest nawet tysiącrotnie krótszy od długości całego błysku.

Te wszystkie przykłady świadczą o silnej zmienności dżetów, w bardzo różnych skalach. Ponieważ w każdym przypadku z produkcją dżetu związany jest dysk akrecyjny, więc naturalne wydaje się podejrzenie, że struktura i ewolucja tego dysku w jakiś sposób musi odpowiadać za obserwowaną zmienność dżetów.

W przypadku mikrokwazarów bardzo dobrze sprawdza się model niestabilności dysku akrecyjnego wywołanej ciśnieniem promieniowania. W gorącej materii dysku, podobnie jak we wnętrzu gwiazdy, ciśnienie całkowite składa się z sumy ciśnienia gazu i ciśnienia promieniowania. To ostatnie jest proporcjonalne do temperatury w potęgę czwartej, podczas gdy ciśnienie gazu zmienia się liniowo z jego temperaturą i gęstością. W pewnym zakresie temperatur i gęstości powierzchniowych, które odpowiadają określonemu zakresowi odległości od centrum (a dokładniej, od wewnętrznego brzegu dysku), ciśnienie promieniowania jest większe od ciśnienia gazu. Ma to decydujące znaczenie dla bilansu energetycznego. W bilansie tym ciepło, wytwarzane dzięki grawitacyjnej energii potencjalnej wskutek działania sił lepkich (lepkość jest proporcjonalna do ciśnienia całkowitego), musi zostać zrównoważone przez chłodzenie promieniste. Gwałtowna, lokalna zmiana bilansu grzania i chłodzenia sprawia, że obszar (pierścień) dysku staje się niestabilny.

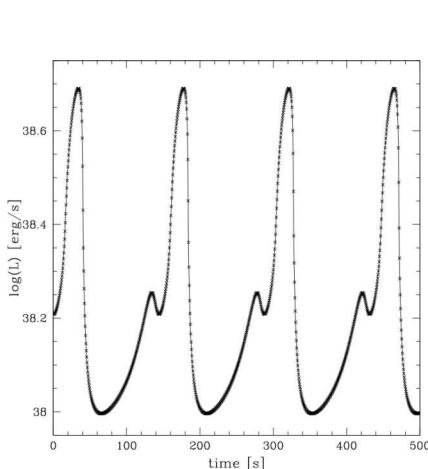
Usiłuje on dostosować się do warunków, lecz wówczas wzrost temperatury pociąga za sobą konieczność obniżenia gęstości i dany pierścień dysku akreuje szybciej, opróżniając się. Z kolei wzrost tempa akrecji oznacza dalszy wzrost temperatury – nie ma zatem samoregulacji. Stabilizacja warunków może nastąpić jedynie wtedy, gdy dołączy się dodatkowe chłodzenie. Taką możliwość zapewnia adwekcja, czyli pobranie nadmiaru energii gazu bezpośrednio przez połykającą go czarną dziurę, bez wyświecania jej. Dysk stabilizuje się zatem w fazie gorącej dzięki adwekcji, natomiast w fazie chłodnej dzięki dominacji ciśnienia gazu. W warunkach pośrednich, gdy dominuje ciśnienie promieniowania, dysk jest niestabilny.

Opisany powyżej w skrócie mechanizm powoduje, że dyski akrecyjne w pewnych warunkach (zdefiniowanych przede wszystkim przez średnie tempo akrecji) oscylują między stanem gorącym i chłodnym. Oscylacje takie skutkują cyklicznymi rozbłyskami i pociemnieniami. Inaczej mówiąc, kwazary, podobnie jak mikrokwazary, będą przechodziły fazy „aktywne” i „spokojne”. Przepuszczalnie, jeśli jądro kwazara będzie w stanie aktywnym, może produkować dżet. Jeśli okresowo „wygaśnie”, produkcja dżetu zostanie zahamowana. Skale czasowe będą różne dla kwazarów i mikrokwazarów, ponieważ są związane z masą centralnej czarnej dziury.

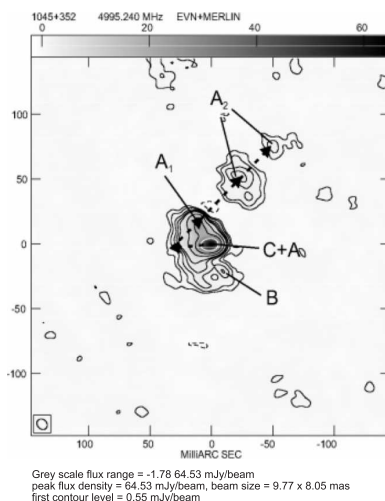
A co z błyskami gamma? U podstawy dżetu emitującego promieniowanie gamma musi również znajdować się dysk akrecyjny – tak wskazuje nasza aktualna wiedza, wedle której akrecja materii na czarną dziurę jest najbardziej wydajnym energetycznie ze znanych procesów fizycznych. Samego dysku jednak nie widzimy. Jest on tak gęsty i gruby, że fotony uwięzione wewnątrz niego nie mają szans na wydostanie się i razem z materią są połykane przez czarną dziurę. Sam proces trwa bowiem bardzo krótko, średnio kilkadziesiąt sekund, materii zaś do „skonsumowania” jest ogromna ilość – na przykład spora część otoczki masywnej gwiazdy, hipernowej.

Tak wielkie tempo akrecji, rzędu masy Słońca na sekundę, jest właśnie odpowiedzialne za ogromną temperaturę dysku. Aby go chłodzić, emitowane są neutrino, powstające w wyniku reakcji jądrowych w niezwykle gęstej i gorącej materii. Te neutrino, anihilując z antyneutrinoami ponad powierzchnią dysku, mogą stanowić częściowe zasilanie energetyczne wyrzucanego dżetu (jednak większość energii do dżetu jest przekazywana najprawdopodobniej za pośrednictwem pola magnetycznego na koszt rotacji samej czarnej dziury). Jak się okazuje, dysk w pewnym obszarze jest aż tak gęsty i gorący, że robi się nieprzezroczysty nawet dla neutrino. Co ciekawe, może wystąpić tam niestabilność o charakterze termicznym. Pojawiający się wówczas dodatkowy wkład do ciśnienia pochodzący od neutrino ma podobny charakter do ciśnienia promieniowania w „zwykłych” dyskach mikrokwazarów. Jego nagłemu wzrostowi towarzyszy przejście fazowe, zmieniające skład chemiczny plazmy poprzez fotodezintegrację jąder helu – ma to wyrównywać zmiany ciśnienia. Ten efekt stanowi o wystąpieniu niestabilności i fluktuacji jasności neutrinowej dysku, co może w konsekwencji prowadzić do zmienności produkowanego dżetu, obserwowanej przez detektory jako kolejne piki w krzywej blasku docierającego do nas błysku.

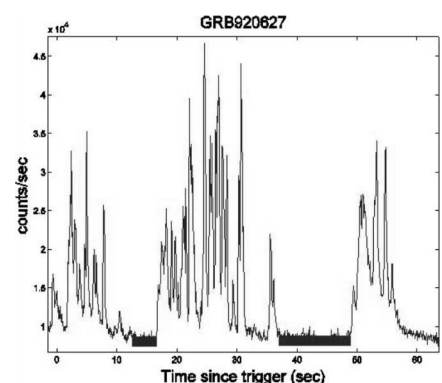
Jak się zatem okazuje, całkiem podobne mechanizmy odgrywają, być może, kluczową rolę w ewolucji i obserwowanej zmienności obiektów tak różnych, jak radiogalaktyki, mikrokwazary i błyski gamma. Czy jest w tym coś zagadkowego? Chyba nie, o ile pamiętamy, że w sercach wszystkich tych kosmicznych „bestii” czai się jedno i to samo: połykające materię czarne dziury. One same w sobie są, oczywiście, nie lada zagadką.



Cykl aktywności dysku akrecyjnego w modelu niestabilności wywołanej ciśnieniem promieniowania (parametry dla mikrokwazara – skala czasowa zmienności rzędu sekund).



Mapka radiowa kwazara 1045+352. Widoczna jest wielokrotna struktura.



Przykładowy profil czasowy błysku gamma, pokazujący wielokrotne piki jasności.

Świetlny nano-wiatraczek

Pierwszy świetlny wiatraczek zbudował Sir William Crookes. Skrzydełka wiatraczka były z jednej strony pocernione, z drugiej posrebrzone, a całość zamknięta w bańce szklanej. Po oświetleniu (lub zbliżeniu do źródła ciepła, czyli wstawieniu w strumień podczerwieni) wiatraczek obracał się, uciekając czarną stroną od promieniowania, tym szybciej, im większa była intensywność strumienia energii.

Wynalazcy wydawało się początkowo, że urządzenie dowodzi realności pędu niesionego przez falę elektromagnetyczną, efektu wynikającego z równań Maxwella. Sam James Clerk Maxwell, który referował pracę Crookesa, zaakceptował to błędne wyjaśnienie. Nie może ono być prawdziwe, bo choć pocerniona strona pochłania światło, to posrebrzona go odbija, więc zmiana pędu powinna być dla niej jeszcze większa, a więc wiatraczek powinien obracać się w przeciwną stronę. Prawidłowe wyjaśnienie podał sześć lat później Osborne Reynolds [1]. W przedłożonej, ponad stustronicowej pracy, przekonywał, że jest to, jak sam je nazwał, zjawisko *transpiracji cieplnej*. Powoduje ono przedostawanie się cząsteczek gazu poprzez porowatą nieruchomą membranę (lub dokoła brzegu skrzydełka w przypadku młynka Crookesa) ze strony o niższej temperaturze na stronę o temperaturze wyższej. W przypadku skrzydełka powoduje to jego obrót w kierunku strony chłodniejszej. Reynolds zamieścił w swojej pracy bogaty materiał doświadczalny oraz model teoretyczny oparty na kinetycznej teorii gazu, twierdząc (i słusznie), że zjawisko to jest dowodem na słuszność atomowej budowy materii. W pracy jest również opisany poglądowy model (z zastrzeżeniem, że nie stanowi on części dowodu). W modelu tym (w jednym z jego aspektów) wzajemnie ostrzeliwiają się dwie baterie ziemne umieszczone na jednej, mogącej się poruszać, platformie. Jedna z baterii strzela pociskami o większym pędzie, ale, dopóki wszystkie pociski grzęzną w przeciwległym wale ziemnym, platforma nie doznaje żadnej zmiany pędu. Ta zmiana pojawia się dopiero wtedy, gdy część pocisków nie trafia w przeciwległy wał ziemny, czyli po uwzględnieniu skończonych rozmiarów baterii. Wtedy platforma doznaje średniego odrzutu tak, że strzelająca mocniej strona się cofa. Kluczowym w rachunkach Reynoldsa jest pojęcie średniego zasięgu (którego nie należy mylić ze średnią drogą swobodną), pozwalające na prawidłowe uwzględnienie efektów na styku gaz-ciało stałe.

Co ciekawe, pracę tę również recenzował Maxwell i jeszcze przed jej ukazaniem się opublikował własną [2], wraz z dodatkiem, w którym, co prawda, uznał pierwszeństwo Reynoldsa, ale argumentował równocześnie, że opracowana przez niego sama metoda jest lepsza.

Jak widać, wykazanie bezpośredniego wpływu pędu fali elektromagnetycznej na makroskopowe objekty, nie mówiąc już o jego wykorzystaniu, nie jest takie proste. A chciałoby się użyć nie tylko samego pędu, lecz i momentu pędu, zwłaszcza do manipulowania DNA, czy w urządzeniach nanoelektromechanicznych, gdyż właśnie w tak małej skali problemy zasilania i sterowania blokują rozwój nanotechnologii.

Podstawową trudnością jest słabe sprzężenie między światłem a materią, które wymagało do tej pory użycia co najmniej mikrometrowych lub nawet milimetrycznych rozmiarów mikromotorków w celu uzyskania użytecznej wartości momentu siły.

Sytuacja zmieniła się wraz z opublikowaniem pracy [3]. Autorzy opisują w niej efekt obracania mikrometrowych rozmiarów płytki za pomocą nanometrowych rozmiarów wiatraczka zasilanego i sterowanego liniowo spolaryzowanym światłem w zakresie widzialnym i w bliskiej podczerwieni. Sekret polega na wykorzystaniu plazmonowego rezonansu, który wielokrotnie wzmacnia siłę oddziaływania światła z materią. Plazmony to kwazicząstki, które można interpretować jako skwantowane kolektywne wzbudzenia plazmy, w tym przypadku praktycznie dwuwymiarowego gazu elektronowego.

Wiatraczek ma kształt tetra-gammadionu (zwanego przez Prasłowian swargą, ale najbardziej zohydzonego jako swastyka, która to nazwa stała się kulturowym oksymoronem – wywodzi się przecież od sanskryckiego „przynoszący szczęście”). We wszystkich używających go starożytnych kulturach znak ten był jednym z symboli Słońca.

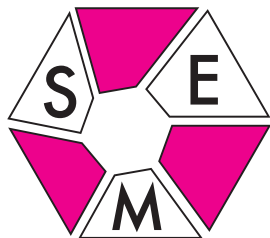
Symetryczny lewoskrętny tetra-gammadion o grubości 30 nm i rozmiarze 100 nm został wytworzony ze złota między dwiema krzemowymi, kwadratowymi płytkami o grubości 300 nm i boku 2200 nm. Cały obiekt został umieszczony w wodzie, a następnie był oświetlany z góry. Użycie dużej (jak na nanotechnologię) płytki pozwalało na pominięcie efektów związanych z ruchami Browna.

Układ ma dwie częstości rezonansowe. Światło o długości około 810 nm generuje plazmony prawoskrętne, co, ze względu na zasadę zachowania momentu pędu, powoduje obracanie się płytki w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, natomiast światło o długości fali około 1700 nm wywołuje obracanie się płytki w kierunku przeciwnym. Umieszczenie kilku gammadionów w jednej płytce krzemowej powoduje prawie proporcjonalny wzrost prędkości obrotu. Prędkość ta jest jednocześnie proporcjonalna do intensywności oświetlenia.

Właśnie zmiana kierunku obrotu ze zmianą długości fali jest traktowana jako niezaprzeczalny dowód napędzania płytki światłem. Przy okazji warto zwrócić uwagę, że światło padające nie niesie niezerowego momentu pędu (światło reemitowane już tak), więc jest to nie tylko zamiana energii świetlnej na mechaniczną, lecz jednocześnie zamiana ruchu postępowego na obrotowy, czyli rodzaj przekładni. A sam wiatraczek, o ponad rząd wielkości mniejszy od długości fali światła, obraca płytkę większą trzy rzędy wielkości.

Piotr ZALEWSKI

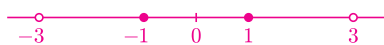
- [1] Osborne Reynolds, *On certain Dimensional Properties of Matter in the Gaseous State*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **170** (1879) 727–845.
- [2] James Clerk Maxwell, *On Stresses in Rarefied Gases Arising from Inequalities of Temperature*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **170** (1879) 231–256.
- [3] M. Liu, T. Zentgraf, Y. Liu, G. Bartal i X. Zhang, *Light-driven Nanoscale Plasmonic Motors*, Nature Nanotechnology, 4 lipca 2010, publikacja elektroniczna: [nnano.2010.128](https://doi.org/10.1038/nnano.2010.128).



W roku 2008 Uniwersytet Warszawski we współpracy ze Stowarzyszeniem na rzecz Edukacji Matematycznej zorganizował w Sulejowie konferencję *Konkursy matematyczne w Polsce*. Po konferencji przy V LO w Bielsku-Białej zawiązała się grupa nauczycieli i uczniów, którzy pracowali nad wyborem materiałów przydatnych w pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie, zarówno w gimnazjum, jak i w szkole ponadgimnazjalnej. Efektem ich pracy jest zbiór zadań *Przed konkursem matematycznym*, który stał się pierwszym tomem serii wydawniczej *Biblioteczka Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej*. W ramach tej serii SEM planuje publikowanie różnych materiałów przydatnych zarówno nauczycielom, jak i uczniom zainteresowanym poszerzeniem swojej wiedzy i sprawności matematycznej.

Przyjrzyjmy się rozwiązaniom dwóch zadań wybranych ze zbioru *Przed konkursem matematycznym*.

1. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów. Rozstrzygnąć, czy zawsze istnieją trzy parami różne punkty jednego koloru, z których jeden jest środkiem odcinka, którego końcami są dwa pozostałe.



Jeżeli wszystkie punkty płaszczyzny są jednego koloru, to końce dowolnego odcinka i jego środek spełniają warunki zadania. Załóżmy więc, że istnieją punkty dwóch kolorów, np. czarne i białe. Pewne dwa punkty muszą być tego samego koloru, na przykład czarnego. Niech będą to punkty pewnej osi liczbowej odpowiadające liczbom 1 oraz -1 . Gdyby liczba 3 była czarna, to liczby -1 , 1, 3 spełniałyby warunki zadania. Analogicznie byłoby dla liczby -3 . Pomalujmy więc liczby -3 oraz 3 kolorem białym. Teraz liczba 0 jest środkiem odcinka o czarnych końcach -1 i 1 oraz środkiem odcinka o białych końcach -3 i 3. Zatem w każdym przypadku można wybrać punkty spełniające warunki zadania.

2. Ile różnych liczb występuje w ciągu

$$\left[\frac{1^2}{2009} \right], \left[\frac{2^2}{2009} \right], \left[\frac{3^2}{2009} \right], \dots, \left[\frac{2009^2}{2009} \right],$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbą całkowitą nie większą niż x ?

Zauważmy, że jeżeli liczby rzeczywiste x i y ($x < y$) różnią się o mniej niż 1, to $[x] = [y]$ lub $[y] = [x] + 1$; jeśli natomiast różnią się o co najmniej 1, to $[x] < [y]$.

Wyznamy największą liczbę naturalną n , dla której różnica między liczbami $\frac{(n+1)^2}{2009}$ i $\frac{n^2}{2009}$ jest mniejsza od 1, czyli

$$\frac{(n+1)^2}{2009} - \frac{n^2}{2009} < 1.$$

Stąd $n < 1004$, więc $n = 1003$. Oznacza to, że wśród liczb

$$\left[\frac{1^2}{2009} \right], \left[\frac{2^2}{2009} \right], \dots, \left[\frac{1003^2}{2009} \right]$$

występują wszystkie liczby całkowite od 0 do

$$\left[\frac{1003^2}{2009} \right] = 500,$$

których jest 501.

Jeżeli natomiast różnica między liczbami $\frac{(n+1)^2}{2009}$ i $\frac{n^2}{2009}$ jest równa co najmniej 1, to liczby $\left[\frac{n^2}{2009} \right]$ i $\left[\frac{(n+1)^2}{2009} \right]$ są różne. Zachodzi to dla $n \geq 1004$.

Zatem wszystkich różnych liczb w danym ciągu jest

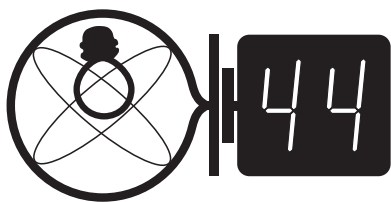
$$501 + (2009 - 1003) = 501 + 1006 = 1507.$$

W omawianym zbiorze autorzy zaproponowali 128 niestandardowych zadań, które zostały pogrupowane tematycznie. Znalazły się tu m.in. rozdziały: równania diofantyczne, kongruencje, część całkowita i ułamkowa liczby rzeczywistej, trójkąt równoboczny.

Więcej o broszurze *Przed konkursem matematycznym* można przeczytać na stronie internetowej www.sem.edu.pl/omg/

Zarząd Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej

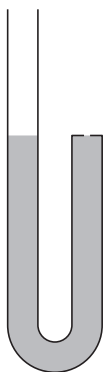
Klub 44



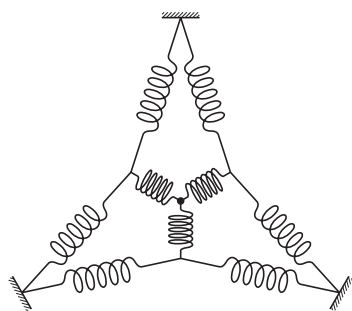
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
494 ($WT = 2,05$) i 495 ($WT = 2,58$)
z numeru 3/2010

Michał Koźlik	Gliwice	40,72
Marian Łupieżowiec	Gliwice	36,55
Jacek Piotrowski	Rzeszów	31,84
Tomasz Rudny	Warszawa	31,68
Jerzy Witkowski	Radlin	30,54
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	29,57
Andrzej Idzik	Bolesławiec	17,94



Rys. 1



Rys. 2

498. Oznaczmy ładunek wewnętrznej sfery przez q (oczywiście ładunek zewnętrznej musi być równy $-q$). Ponieważ natężenie pola wytworzonego przez daną sferę jest wewnątrz niej równe zeru, a na zewnątrz jest takie, jak pole ładunku punktowego, więc w obszarze między r_1 a r_2 „rządzi” ładunek q , a różnica potencjałów (pomijając stałą $1/4\pi\epsilon_0$) jest równa $q(1/r_1 - 1/r_2)$. W obszarze między r_2 a r_3 analogiczną rolę pełni suma ładunków q i Q , a różnica potencjałów wynosi $(q + Q)(1/r_2 - 1/r_3)$. Skoro zewnętrzna i wewnętrzna sfera są ze sobą zwarte, to suma tych wyrażeni musi być równa zeru. Stąd

$$q = -Q \frac{r_1(r_3 - r_2)}{r_2(r_3 - r_1)}.$$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>

Zadania z fizyki nr 502, 503

Redaguje Jerzy B. BROJAN

502. Stożkowe naczynie ma niewielki otwór w wierzchołku stożka i taki sam otwór w jego podstawie. Jeśli po nalaniu do pełna wody czas opróżnienia naczynia w pozycji wierzchołkiem do dołu jest równy t_1 , to ile wynosi t_2 – czas opróżnienia w pozycji wierzchołkiem do góry?

503. Rurka U-kształtna ma pole przekroju poprzecznego $S_1 = 5 \text{ cm}^2$, a jedno z jej ramion (o wysokości $l = 20 \text{ cm}$) jest zamknięte, z otworkiem o powierzchni $S_2 = 3 \text{ mm}^2$. Rurkę napełniono wodą do poziomu zamknięcia (rys. 1), następnie wprowadzono przez otworek powietrze, tak że poziom w otwartym ramieniu podniósł się o $h = 5 \text{ cm}$, po czym pozwolono wodzie opaść.

- Na jaką wysokość H wytrysnęła woda przez otworek? Pominąć ściśliwość i lepkość wody, a także gęstość i lepkość powietrza.
- Orientacyjnie oszacować wpływ czynników pominiętych w punkcie a) na wynik. Współczynnik ściśliwości wody jest równy $5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$, lepkość wody wynosi $0,001 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$, lepkość powietrza – $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$.

Współczynnikiem ściśliwości nazywamy wartość wyrażenia $-\Delta V/V\Delta p$, a lepkością – współczynnik η we wzorze

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z},$$

gdzie ΔF jest siłą styczną działającą na jednostkę powierzchni ΔS cieczy, gdy wzdłuż osi prostopadłej do tej powierzchni prędkość cieczy zmienia się o Δv na odcinku Δz .

Rozwiązania zadań z numeru 5/2010

Przypominamy treść zadań:

498. Trzy cienkie, początkowo nienaladowane, przewodzące sfery o promieniach r_1 , r_2 i r_3 ($r_1 < r_2 < r_3$) są współśrodkowe, przy czym wewnętrzna i zewnętrzna są połączone przewodem przechodzącym przez otworek w środkowej sferze. Jakie ładunki wystąpią na tych dwóch sferach, jeśli na środkową wprowadzimy ładunek Q ?

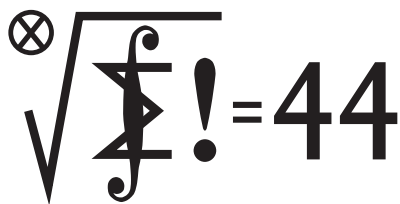
499. Zestaw 9 nieważkich sprężynek o stałej sprężystości k i długości swobodnej zero (tzn. przyjmujących długość l pod wpływem siły $F = kl$) jest rozpięty na trzech punktach leżących na tej samej wysokości i tworzących trójkąt równoboczny o boku a (rys. 2). O ile obniży się środkowy punkt zestawu po jego obciążeniu ciężarem P ?

499. W przypadku zerowej długości swobodnej sprężynek równania wiążące wektory ich długości z siłami naprężenia

$$\vec{F}_i = k\Delta\vec{r}_i$$

rozpadają się na niezależne układy równań dla składowych poziomych i pionowych. Zatem obciążenie nie przesuwają żadnego z węzłów w płaszczyźnie poziomej, a z drugiej strony przesunięcia węzłów w pionie można rozpatrywać tak, jakby trzy punkty zawieszenia zestawu się pokryły ($a = 0$). Ciężar P wisi na trzech sprężynkach, których rzut na oś pionową jest równy $P/3k$, a te z kolei na sześciu, dla których ten rzut wynosi $P/6k$. Łącznie szukane obniżenie jest więc równe $P/2k$.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2010



Zadania z matematyki nr 605, 606

Redaguje Marcin E. KUCZMA

605. Rozwiązać równanie $x^3 + x^2 = 16 + 2^y$ w liczbach całkowitych x, y .

606. Dany jest trójkąt ABC . Rozważamy punkt D , zmieniający swoje położenie na boku AB . Prosta styczna do okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD , rozłączna z odcinkiem AB , przecina odcinek CD w punkcie X . Udowodnić, że wszystkie uzyskane w ten sposób punkty X leżą na pewnym okręgu.

Zadanie 606 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2010

Przypominamy treść zadań:

601. Znaleźć wszystkie pary (n, p) dodatnich liczb całkowitych, w których p jest liczbą pierwszą, spełniające równanie $n^8 = p^5 + p^2 + n^2$.

602. Liczby dodatnie a, b, c są związane zależnością $bc + ca + ab = 1$. Dowiedź, że

$$\frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{bc}} + \frac{b\sqrt{ca}}{\sqrt{1+b^2} + \sqrt{ca}} + \frac{c\sqrt{ab}}{\sqrt{1+c^2} + \sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a+b+c}.$$

601. Zadane równanie

$$n^8 - n^2 = p^5 + p^2$$

może być spełnione tylko przez liczby $p > n > 1$. Z postaci iloczynowej

$$n^2(n^3 - 1)(n^3 + 1) = p^2(p^3 + 1)$$

widać, że p^2 (kwadrat liczby pierwszej większej od 2) musi dzielić któryś z czynników lewej strony; zatem

$$p^2 \leq n^3 + 1.$$

Dostajemy oszacowanie

$$n^2(n^3 - 1) = \frac{p^2(p^3 + 1)}{n^3 + 1} \leq p^3 + 1 \leq (n^3 + 1)^{3/2} + 1;$$

wszelako dla $n \geq 3$ zachodzi nierówność przeciwna:

$$\begin{aligned} \frac{n^2(n^3 - 1)}{(n^3 + 1)^{3/2} + 1} &= \frac{n^{1/2}(1 - n^{-3})}{(1 + n^{-3})^{3/2} + n^{-9/2}} \geq \\ &\geq \frac{3^{1/2}(1 - 3^{-3})}{(1 + 3^{-3})^{3/2} + 3^{-9/2}} > 1. \end{aligned}$$

Pozostaje wartość $n = 2$, która wraz z $p = 3$ daje jedyne rozwiązanie równania.

602. Oznaczmy trzy składniki wyrażenia po lewej stronie kolejno przez A, B, C oraz przyjmijmy $a + b + c = S$. Należy wykazać, że $S \cdot (A + B + C) \leq 1$.

Z danej w założeniu zależności wynika, że

$$S \cdot a = a^2 + ab + ac = a^2 + 1 - bc,$$

i wobec tego

$$\begin{aligned} S \cdot A &= \frac{a^2 + 1 - bc}{\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{bc}} \cdot \sqrt{bc} = (\sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{bc})\sqrt{bc} = \\ &= \sqrt{(a^2 + 1)bc} - bc. \end{aligned}$$

Analogicznie wyrażają się iloczyny $S \cdot B, S \cdot C$. Dodajemy te trzy równości i szacujemy uzyskane wyrażenie, korzystając z nierówności Cauchy'ego-Schwarza:

$$\begin{aligned} S \cdot (A + B + C) &= \sqrt{(a^2 + 1)bc} + \sqrt{(b^2 + 1)ca} + \sqrt{(c^2 + 1)ab} - 1 \leq \\ &\leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{(a^2 + 1)bc + (b^2 + 1)ca + (c^2 + 1)ab} - 1 = \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{abcS + 1} - 1. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz dowiedzieć, że ta ostatnia liczba nie przekracza 1. Jest to równoważne nierówności $3abcS \leq 1$, którą uzasadnimy, na przykład, tak:

$$\begin{aligned} 1 &= (bc + ca + ab)^2 = (bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2 + 2abcS \geq \\ &\geq bc \cdot ca + ca \cdot ab + ab \cdot bc + 2abcS = 3abcS. \end{aligned}$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 593 ($WT = 1,71$) i 594 ($WT = 1,71$) z numeru 1/2010

Adam Woryna	Ruda Śl.	47,14
Tomasz Wietecha	Tarnów	46,66
Marek Prauza	Poraj	43,76
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	42,35
Piotr Kumor	Olsztyn	36,74

Dwaj panowie na W: Adam Woryna właśnie wszedł do grona Weteranów; zaś Weteran Wielokrotny Tomasz Wietecha wykonał już osiem rund!

Patrz w niebo: Lód na równiku Marsa

Dzięki licznym sondom, które odwiedziły Marsa w ostatnich trzech dziesięcioleciach, przynajmniej topografia tej planety jest dość dobrze znana. W szczególności już 35 lat temu orbiterzy Vikingów wykryły, że od czterech wielkich równikowych wulkanów Marsa (Olympus Mons i trzech w górach Tharsis) ku północnemu zachodowi rozpościerają się obszary przypominające ziemskie osady lodowcowe – tak w każdym razie twierdzą geolodzy. Powstał problem: skąd na równiku planety lodowce? Dlaczego kiedykolwiek mogły tam panować temperatury dostatecznie niskie i długotrwałe, aby zaistniały tam lodowce?

Globalny klimat każdej planety zależy przede wszystkim od usytuowania jej osi obrotu, a tym samym równika. Nachylenie płaszczyzny równika Marsa do płaszczyzny jego orbity wynosi obecnie $25^{\circ}2'$, czyli jest bardzo zbliżone do takiego nachylenia u Ziemi. Badacze twierdzą jednak, że zmiana nachylenia już do 35° zapewne spowodowałaby takie ogrzanie biegunów i ochłodzenie dzisiejszej strefy równikowej, że w okolicach Olympus Mons mogłyby powstać lodowce. Zauważmy, że za zmianę nachylenia osi planety odpowiedzialne jest inne zjawisko niż precesja, gdyż ta odbywa się przy (prawie) niezmiennym nachyleniu. Natomiast jako przyczynę koziółkowania osi planety podaje się brak (masywnego) satelity. To zaskakujące zjawisko jest przejawem tzw. ruchu chaotycznego, opisują je skomplikowane (jak na mechanikę) równania, które nie u wszystkich astronomów budzą zaufanie, z powodu braku ścisłych założeń przy ich wyprowadzaniu (co uwzględnić, a czego już nie trzeba uwzględnić). Zjawisko objawia się jednak, gdy modelujemy ruch obrotowy planety w długich przedziałach czasu. Obliczenia sugerują, że prawdopodobieństwo tego, iż np. nachylenie równika Marsa przekroczyło 60° w ciągu ostatniego miliarda lat, wynosi 63%, a w ciągu trzech miliardów lat 89%. Badacze oceniają średnie nachylenie równika w ostatnich 4 mld lat na 46° . Mają więc teraz za zadanie tak połączyć modele klimatu, chaotyczne koziółkowanie osi obrotu i pomiary zawartości wody w gruncie planety ze zdjęciami jej powierzchni, by powstał spójny obraz tego, co się na powierzchni Marsa dzieje i działo się w przeszłości. Czy da się tego dokonać bez wysyłania ludzi na Marsa? Nie wiadomo, ale wcześniej czy później ludzie i tak tam dotrą.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania M 1290.

Zauważmy, że $p = 2$ nie spełnia warunków zadania, bo wtedy lewa strona równania byłaby liczbą parzystą. Zatem p jest liczbą nieparzystą. Dane równanie możemy zapisać w postaci

$$(p-1)(p+1) = 2q^2.$$

Lewa strona jest iloczynem dwóch kolejnych liczb parzystych. Wtedy jedna na pewno dzieli się przez 4, więc lewa strona, a zatem i prawa dzieli się przez 8. Stąd q jest liczbą parzystą i ponieważ jest liczbą pierwszą, musi być $q = 2$. Stąd wyznaczamy $p = 3$.

Wrzesień

Wieczorami we wrześniu widzimy dość nisko na południu Koziorożca. Jest to gwiazdozbiór południowej półkuli i w dodatku zodiakalny. Przez tzw. punkt Koziorożca, czyli przez punkt przesilenia zimowego, Słońce przechodzi 21 XII, ale punkt ten bynajmniej nie leży w gwiazdozbiore Koziorożca, lecz w Strzelcu. Natomiast we wrześniu Słońce przechodzi przez punkt równonocy jesiennej, tzw. punkt Wagi, który – jak już łatwo zgadnąć – nie leży w gwiazdozbiore Wagi, lecz w Pannie. Całe to zamieszanie spowodowała precesja, przesunąwszy w ciągu 2000 lat charakterystyczne punkty ekliptyki o jeden gwiazdozbiór. A nazwy tych ważnych punktów, ustanowione w starożytności, pozostały. Koziorożec zasłynął też z tego, że w nim 25 IX 1846 roku niemiecki astronom Johann Galle zaobserwował Neptuna, którego położenie obliczył Urbain Le Verrier na podstawie zakłóceń w ruchu Urana. W Koziorożcu przez lornetkę można dostrzec gromadę kulistą M30. Jej jasność wynosi 7,5 mag, a odległość 7,4 kpc.

Merkury najdalej od Słońca znajdzie się 19 IX i można go szukać na niebie o wschodzie. Wenus, Mars i Saturn są w Pannie i dość wcześnie wieczorem zachodzą, przy czym Wenus 1 IX zbliży się do Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, na nieco ponad stopień, a Mars 4 IX na dwa stopnie. Jowisz jest w Rybach i widać go przez całą noc; 21 IX znajdzie się w opozycji. Nów Księżyca wypada 8 IX, a pełnia 23 IX. Księżyc zakryje Wenus 11 IX – zobaczą to mieszkańcy Brazylii, południowo-zachodniej Afryki i podróżujący po południowym Atlantyku i po Oceanie Indyjskim. Zakryć jasnych gwiazd nie będzie, nie będzie też przewidywalnych rojów meteorów. Za to na pewno 23 IX nastąpi równonoc jesienna (Słońce przechodzi przez punkt Wagi, o czym było wyżej), czyli żegnamy lato i zaczyna się jesień. Najbardziej chyba dotkliwym tego przejawem jest dzień krótszy od nocy. Trudno.

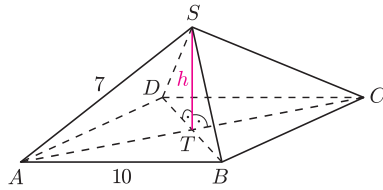
T. K.

Oczywiste?

„Łatwo zauważyć, że pole koła nie może być liczbą całkowitą, bo π jest niewymierne.”
 „O godzinie 3:15 wskazówki zegara, oczywiście, pokrywają się.”

Na sugestywnie brzmiące bzdury można dać się nabrać, zwłaszcza gdy wypowiedane są z dużym przekonaniem. Warto zawsze czujnie weryfikować, czy takie pozornie „oczywiste” lub „łatwo widoczne” stwierdzenia w ogóle są prawdziwe.

Nieprawdziwe „oczywiste” rozumowania

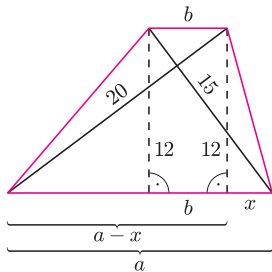


Rys. 1

1. Jeśli czworościan G znajduje się wewnątrz czworościanu F , to suma długości krawędzi czworościanu G nie przekracza sumy długości krawędzi czworościanu F .

2. We wsi A mieszka 100 dzieci, zaś we wsi B – 50 dzieci. W którym miejscu na drodze z A do B należy wybudować szkołę, aby dzieci, idąc do szkoły, pokonywały w sumie jak najmniejszą liczbę kilometrów?

R. Ponieważ w A mieszka dwukrotnie więcej dzieci niż w B , szkołę należy, oczywiście, wybudować w odległości dwukrotnie mniejszej od A niż od B .



Rys. 2

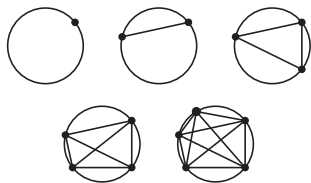
3. Oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego z rysunku 1.

R. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, wystarczy więc wyznaczyć długość połowy jego przekątnej i skorzystać z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SAT .

4. Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCD S$ są trójkątami równobocznymi. Na ścianach SAD i SBC zbudowano, na zewnątrz, czworościany foremne $SADT$ i $SBCU$. Otrzymana w ten sposób bryła ma, oczywiście, 9 ścian.

5. W porcie zacumowano łódkę. Z jej burty zwisa drabinka, której piąty od dołu szczebel jest dokładnie pod powierzchnią wody. Przyływ podwyższa poziom wody w tempie 30 cm/h. Każdy szczebel drabinki ma 2 cm grubości, odległość między kolejnymi szczeblami to 20 cm. Ile szczebli będzie pod wodą po 3 godzinach?

R. Łatwo policzyć: 3 godziny po 30 cm to 90 cm, każde 22 cm to kolejny przykryty szczebel, $90 = 4 \cdot 22 + 2$, więc po 3 godzinach pod wodą będzie łącznie 9 szczebli.



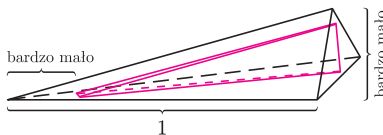
Rys. 3. L_n – liczba obszarów przy n punktach. $L_1 = 1, L_2 = 2, L_3 = 4, L_4 = 8, L_5 = 16$.

6. Oblicz pole trapezu o wysokości 12 i przekątnych o długościach 15 i 20.

R. Z twierdzenia Pitagorasa (rys. 2) mamy $a - x = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ oraz $b + x = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Stąd $a + b = 16 + 9 = 25$, więc $P = \frac{25}{2} \cdot 12 = 150$.

7. Na okręgu narysowano n punktów i wszystkie odcinki pomiędzy nimi. Jak widać (rys. 3), maksymalna liczba obszarów, na jaką mogą one dzielić koło, to 2^{n-1} .

8. Wiadomo, że jeśli środek okręgu opisanego jest na zewnątrz trójkąta, to jest on rozwartokątny. Oczywiście analogicznie, jeśli środek sfery opisaney jest na zewnątrz czworościanu, to któryś kąt dwuścienny jest rozwarty.



Rys. 4

Wyjaśnienia i poprawne rozwiązania

R1. Jeśli oba czworościany z rysunku 4 są bardzo długie i chude, to suma długości krawędzi dla zewnętrznego jest około 3, zaś dla wewnętrznego – około 4. \square

R2. Suma pokonywanych przez dzieci odległości to $100a + 50(AB - a) = 50(a + AB)$, gdzie a to odległość szkoły od wsi A . Suma ta jest minimalna dla $a = 0$, czyli szkołę należy wybudować we wsi A . \square

R3. Taki ostrosłup nie istnieje, bo w trójkącie ACS zachodzi $AS + SC = 14 < 10\sqrt{2} = AC$. Proponowane obliczenia prowadzą do sprzeczności: $h^2 < 0$. \square

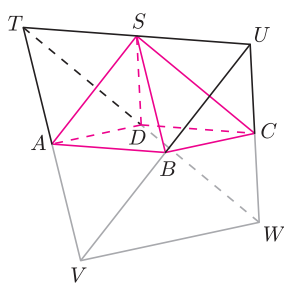
R4. Otrzymana bryła ma 5 ścian. Punkty S, T, U są współliniowe; trójkąty STA, SAB i SBU leżą w jednej płaszczyźnie i sklejają się w jedną czworokątną ścianę $TABU$ (rys. 5), podobnie trójkąty SDT, SCD i SUC dają ścianę $UCDT$. Tę samą bryłę można też otrzymać, rozcinając czworościan foremny $TUVW$ płaszczyzną $ABCD$ przechodzącą przez środki czterech z jego krawędzi. \square

R5. Pięć, tak jak było, bo poziom wody nie zmienia się względem łódki. \square

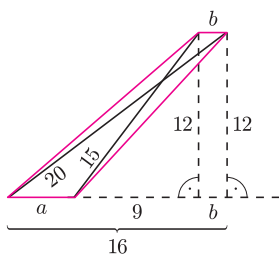
R6. Trapez z rysunku 6 też spełnia warunki zadania, jego pole jest równe 42. \square

R7. Dla $n = 6$ jest najwyżej 31 obszarów (co można policzyć na odpowiednim rysunku). Poprawny wzór na maksymalną liczbę obszarów to $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$. \square

R8. Czworoscian $ABDA'$ w sześcianie o podstawie $ABCD$ i krawędzi AA' nie ma rozwartego kąta dwuściennego, a środkiem sfery opisaney jest środek sześcianu. \square



Rys. 5



Rys. 6