




18 maja 2010 roku zmarł
Andrzej Pelczar
 matematyk i historyk matematyki
 były Rektor Uniwersytetu Jagiellońskiego
 były Prezes Polskiego Towarzystwa Matematycznego
Delta wiele Mu zawdzięcza

SPIS TREŚCI NUMERU 7 (434)


Techniki sztucznej inteligencji
 w programach grających
Jakub Pawlewicz str. 1

Sztuczna inteligencja w brydżu
Piotr Butryn str. 5

 **Zadania** str. 7


Gra o wielu obliczach
Tomasz Idziaszek str. 8

Informatyczny kącik olimpijski (32):
 Gra w kółko
Tomasz Idziaszek str.10


 **Sprawiedliwa czy niesprawiedliwa?**
Przemysław Nowicki str.12

Mafia, zdradziecka parzystość oraz π
Piotr Migdal str.14

Śliskie gry i zabawy
Piotr Zalewski str.16

Poznajemy właściwości tarcia.
 **Część III: Przyczyny i osobliwości tarcia**
Stanisław Bednarek str.18


Aktualności str.20

 **Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej** str.21

Klub 44 str.22

Patrz w niebo:
 Najmasywniejsza gwiazda str.24

Lipiec str.24

 **Gry II**
Joanna Jaszewska str.25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.
 Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:
 Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.
 Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 22-639-73-67)
 internet: www.amos.waw.pl e-mail: biuro@amos.waw.pl
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2010 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2010 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl infolinia 804-200-600

Cena prenumeraty w 2010 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

W następnym numerze:
 Słońce

Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

Techniki sztucznej inteligencji w programach grających

Jakub PAWLEWICZ*

1. Wprowadzenie

Sztuczna inteligencja w grach jest bardzo atrakcyjną dziedziną badań, gdyż opracowane metody można łatwo sprawdzać w praktyce, obserwując siłę programów grających w popularne gry, niejednokrotnie wprowadzających w zdumienie autora programu. Zostało wymyślonych wiele technik ułatwiających pisanie programów pozwalających komputerom „myśleć”.

W tym artykule przedstawiamy kilka takich technik. Dotyczą one głównie gier dwuosobowych z pełną informacją i o sumie zerowej. Pełna informacja oznacza, że cały stan gry jest znany wszystkim graczom w dowolnym momencie rozgrywki (co nie ma miejsca np. w brydżu). Gra o sumie zerowej oznacza mniej więcej tyle, że wygrana jednego gracza to przegrana drugiego i na odwrót. Dodatkowo zakłada się jeszcze, że gracze wykonują ruchy na przemian. Do tej klasy wpada wiele znanych gier dwuosobowych, takich jak szachy, warcaby czy kółko i krzyżyk.

Mamy nadzieję, że ten przegląd technik ułatwi Czytelnikowi napisanie własnego „inteligentnego” programu grającego w jego ulubioną grę. Dobór techniki zależy od rodzaju gry. Można je łączyć lub sięgnąć po najróżniejsze udoskonalenia, a może wymyślić na ich podstawie własną technikę?

2. Algorytmy przeszukiwania drzewa gry

Umiejętność grania w gry składa się z dwóch aspektów: *taktyki* i *strategii*.

Taktyka dotyczy celów krótkoterminowych w grze. Jest to umiejętność wyznajdywania takich kombinacji na kilka ruchów do przodu, które dają szybki zysk i widoczną przewagę według jakichś ustalonych kryteriów. Na ogół są to serie ruchów z groźbami, uniemożliwiające przeciwnikowi skuteczną odpowiedź. W szachach może to być seria szachów, po której bijemy cenną figurę. Innymi widowiskowymi zagraniami taktycznymi w szachach są poświęcenia. Czasami zdarza się, że gracz poświęca hetmana, aby w kilku posunięciach zbić kilka innych figur przeciwnikowi, zyskując przewagę materialną.

Strategia oznacza z kolei takie planowanie rozgrywki, że zysk uwidacznia się dopiero w dalszej perspektywie. Myślenie strategiczne wiąże się z głęboką wiedzą o grze. Przykładowo, w szachach w początkowej fazie warto zadbać między innymi o strukturę pionów. Bardzo często dopiero w samych końcówkach dobrze dobrane ustawienie pionów daje przewagę nad przeciwnikiem.

Komputer trudno nauczyć myślenia strategicznego bez wprowadzania dużej ilości heurystyk i wiedzy specyficznej dla danej gry. Niemniej istnieją uniwersalne techniki, które sprawdzają się w niektórych grach, np. bazujące na metodzie Monte Carlo; powiemy o nich trochę w punkcie 3. Natomiast programy w przypadku większości gier przeważają nad ludźmi w elementach taktycznych, gdyż stosowane są w nich algorytmy przeszukiwania drzewa gry.

2.1. Drzewo gry

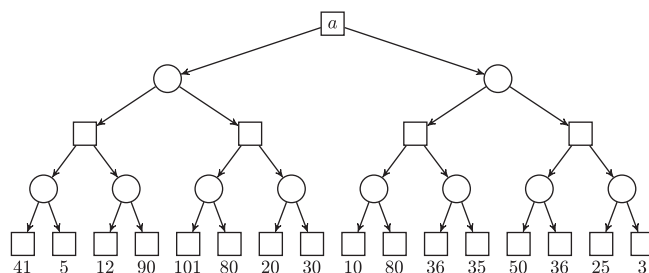
Żałujemy, że dla pewnej sytuacji chcemy znaleźć możliwie najlepszy ruch. W tym celu rozważymy wszystkie sytuacje,

jakie otrzymamy po wykonaniu przez nas jednego ruchu. W otrzymanych sytuacjach ruch ma teraz przeciwnik. Dla każdej z nich rozważamy wszystkie możliwe ruchy, jakie może z kolei on wykonać. Wtedy dochodzimy do sytuacji, w których my mamy ruch itd. W ten sposób budujemy drzewo, w którym wierzchołkami są sytuacje w grze, a krawędziami możliwe posunięcia. Proces ten wykonujemy tak długo, aż dojdziemy do sytuacji końcowych.

Powstałe drzewo w większości znanych gier jest jednak zbyt duże, by móc je całe odtworzyć. W tym celu drzewo obcinamy na pewnej głębokości w ten sposób, że liście niekoniecznie są stanami końcowymi. Dla liści drzewa musimy jakoś określić ich jakość, oznaczającą, jak bardzo w tych stanach jesteśmy blisko wygranej bądź przegranej. W tym celu należy utworzyć funkcję oceniającą, która dla danego stanu gry zwraca liczbę całkowitą. Dla sytuacji końcowych możemy zwracać jakieś duże wartości – dużą dodatnią liczbę całkowitą dla wygranej i dużą ujemną liczbę całkowitą dla przegranej.

Problem tworzenia funkcji oceny jest trudny i na ogół wymaga pomysłów specyficznych dla danej gry. Często używa się tu zaawansowanych metatechnik, takich jak programowanie genetyczne, sieci neuronowe czy regresja liniowa. Są to tematy zbyt obszerne, żeby je tutaj omówić. Przykładowo, w szachach funkcję oceny dzieli się na trzy aspekty: materiał, mobilność i strukturę pionów. Materiał to posiadane figury. Zwyczajowo piony mają wartość 100, skoczek i gонец 300, wieża 500, hetman 900, a król $+\infty$. W mobilność wchodzi liczba atakowanych pól, liczba możliwych ruchów każdej z figur itp. W strukturze pionów ważne jest, żeby wzajemnie się chroniły, czyli, na przykład, należy unikać dziur (kolumn niezawierających pionów) i zdublowanych pionów (pionów w jednej kolumnie). We współczesnych programach szachowych ocena jest znacznie bardziej skomplikowana, niemniej jednak zawiera wymienione wyżej pomysły.

Przykładowe drzewo gry przedstawione jest na rysunku 1. Przy liściach zaznaczyliśmy wartości funkcji oceny.



Rys. 1. Przykładowe drzewo gry.

2.2. Algorytm minimaks

Mając takie drzewo jak na rysunku 1, chcemy znaleźć najlepszy ruch z korzenia drzewa (a). Podczas rozgrywki na tym drzewie naszym celem jest zejście do liścia o największej wartości. Przeciwnik stara się nam w tym przeszkodzić, więc jego celem jest dojście do liścia o najmniejszej wartości. Wartość, do jakiej dojdziemy z danego wierzchołka, możemy obliczyć dynamicznie od dołu. W wierzchołku □ my mamy ruch, więc wybieramy

*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

syna z większą wartością, a w wierzchołku \bigcirc ruch wykonuje przeciwnik, więc wybieramy syna z mniejszą wartością. Innymi słowy, w \square maksymalizujemy wartość (taki wierzchołek nazywamy więc wierzchołkiem *max*), a w \bigcirc minimalizujemy wartość (wierzchołek *min*). Algorytm 1 przedstawia tę metodę w wersji rekurencyjnej.

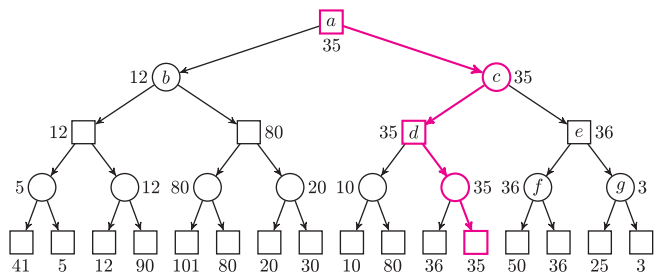
Algorytm 1 Minimax.

```

1: function MINIMAKS(v)
2:   if v jest liściem then return OCENA(v)
3:   if v jest max then
4:     return max{MINIMAKS(s) | s jest synem v}
5:   else ▷ v jest min
6:     return min{MINIMAKS(s) | s jest synem v}

```

Wartości, jakie otrzymamy dla przykładowego drzewa gry, przedstawione są na rysunku 2. Na rysunku została wyróżniona optymalna rozgrywka obu graczy. Widzimy, że w stanie *a* optymalny dla nas jest ruch do stanu *c*.



Rys. 2. Przykładowe drzewo gry z wartościami we wszystkich wierzchołkach.

2.3. Algorytm alfabeta

Można zauważyć, że przy obliczaniu wartości minimaks w celu wyznaczenia optymalnego ruchu ze stanu *a* nie potrzebujemy przeglądać niektórych wierzchołków drzewa. Przypuśćmy, że podczas obliczania wartości stanu *c* obliczyliśmy już, że wartość stanu *d* to 35. Przetwarzając stan *e*, obliczamy, że wartość stanu *f* wynosi 36. Teraz możemy zauważyć, że wartość stanu *g* nie jest nam potrzebna. Otóż znajomość wartości *g* pozwoli nam ewentualnie stwierdzić, że wartość *e* jest jednak większa niż 36. W każdym razie wiemy, że wartość stanu *e* będzie co najmniej 36, a co za tym idzie, będzie większa niż wartość stanu *d*. W związku z tym przeciwnik w stanie *c* wybierze ruch prowadzący do *d* niezależnie od tego, jaka jest wartość stanu *g*.

Istnieje ogólna metoda pozwalająca stwierdzać, których wierzchołków nie musimy już przeglądać. W tym celu modyfikujemy algorytm MINIMAKS tak, aby niekoniecznie zwracał dokładne wartości. Modyfikację tę nazwiemy ALFABETA. Funkcji ALFABETA, oprócz wierzchołka, przekazujemy dwa parametry α i β . Niech *w* oznacza wartość zwracaną przez wywołanie ALFABETA(*v*, α , β). Będziemy żądać następującego warunku:

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \text{jeśli } w \leq \alpha, & \text{to } \text{MINIMAKS}(v) \leq w, \\ \text{jeśli } \alpha < w < \beta, & \text{to } \text{MINIMAKS}(v) = w, \\ \text{jeśli } \beta \leq w, & \text{to } \text{MINIMAKS}(v) \geq w. \end{array}$$

Innymi słowy, ALFABETA(*v*, α , β) zwróci dokładną wartość, jeśli będzie ona w przedziale (α, β) , ograniczenie górne na wartość minimaks, jeśli zwrócona wartość będzie nie większa niż α , oraz ograniczenie dolne, jeśli wynik będzie nie mniejszy niż β . Przedział (α, β) nazywamy często *oknem wywołania* funkcji ALFABETA.

Dla korzenia chcemy uzyskać dokładną wartość, więc wystarczy przyjąć $\alpha = -\infty$ i $\beta = +\infty$. W wywołaniach dla synów parametry te możemy modyfikować. Przypuśćmy, że jesteśmy w wierzchołku *max*, i założymy, że znaleźliśmy już ruch dający wartość *x*. Wówczas dla wszystkich pozostałych ruchów z tej sytuacji, jeżeli któryś z nich będzie miał wartość nie większą niż *x*, to nie będzie nas już interesowała dokładna wartość. Zatem możemy parametr α powiększyć do *x* przy wywołaniach dla kolejnych synów. No dobrze, a kiedy będziemy mogli stwierdzić, że jakiegoś syna nie trzeba już odwiedzać? Przypuśćmy, że jesteśmy w wierzchołku *max*. Jeżeli znajdziemy ruch, którego wartość jest większa niż β , to możemy w tym momencie zakończyć przeszukiwanie i zwrócić znaną wartość, zachowując warunki dla funkcji ALFABETA. W ten sposób wykonujemy tzw. β -cięcie i nie przeszukujemy części drzewa. Analogicznie wprowadzamy α -cięcie w wierzchołku *min*. Całe rozumowanie podsumowane jest algorytmem 2. Pozostawiamy jako ćwiczenie uzasadnienie, że spełniony jest warunek (1).

Algorytm 2 Alfabeta.

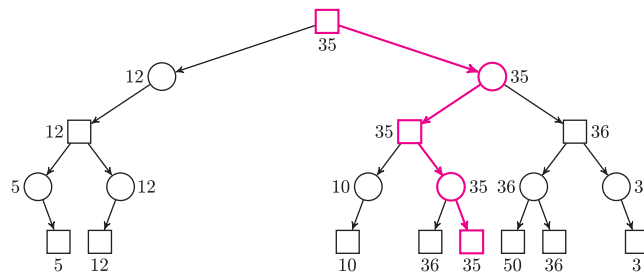
```

1: function ALFABETA(v, alpha, beta)
2:   if v jest liściem then return OCENA(v)
3:   if v jest max then
4:     r ← -∞
5:     for all s jest synem v do
6:       x ← ALFABETA(s, max(r, alpha), beta)
7:       if x ≥ beta then return x           ▷ β-cięcie
8:       r ← max(r, x)
9:   else ▷ v jest min
10:    r ← +∞
11:    for all s jest synem v do
12:      x ← ALFABETA(s, alpha, min(r, beta))
13:      if x ≤ alpha then return x         ▷ α-cięcie
14:      r ← min(r, x)
15:  return r

```

2.4. Ulepszenia alfabety

Aby algorytm alfabeta był możliwie najbardziej skuteczny, najważniejsze jest, by w wywołaniach rekurencyjnych jako pierwszy wybierać ruch, który jest najlepszy z punktu widzenia gracza zagrywającego. W ten sposób można dokonać największej liczby cięć. Rysunek 3 pokazuje, jaka część drzewa zostałaby przejrzana przez algorytm alfabeto przy optymalnym wyborze ruchów. Wierzchołki z przykładowego drzewa, które nie zostałyby przejrzone, zostały ukryte.



Rys. 3. Działanie alfabeto przy optymalnym wyborze ruchów.

Asymptotycznie, przy takim perfekcyjnym doborze ruchów, liczba przejranych wierzchołków drzewa jest pierwiastkiem kwadratowym z rozmiaru całego drzewa. Pozwoliłoby to nam przeglądać drzewo gry dwa razy głębiej niż przy zwykłym

minimaksie. Istnieje jednak cała gama różnych technik, które pomagają zwiększać liczbę cięć i w ogóle szybkość alfabetu. W poniższym paragrafie wymieniamy w skrócie kilka z nich.

Dotychczas rozważaliśmy tylko drzewo gry, a w praktyce gry mogą być dowolnymi grafami skierowanymi, także z cyklami. W takim przypadku korzystne jest eliminowanie powtórnych obliczeń, w czym pomaga użycie tzw. tablicy transpozycji. Z kolei w zakresie lepszej kontroli nad czasem i trafniejszego doboru ruchów podstawową techniką jest iteracyjne pogłębianie przeszukiwania. Te dwie metody łącznie nieznacznie przybliżają nas do możliwie największej liczby cięć, ale jest to jeszcze dalekie od ideału. Istnieje szereg technik, które zmniejszają sztucznie okno wywołania, aby wymusić większą liczbę cięć kosztem niedokładnego wyniku, co może powodować konieczność wykonywania alfabetu dla tego samego stanu więcej niż raz, z różnymi oknami wywołania. Najpowszechniej stosowana jest tu technika zwiadowcy. Czytelników zainteresowanych wspomnianymi usprawnieniami odsyłamy do rozszerzonej wersji artykułu na stronie internetowej *Delty*.

3. Metody Monte Carlo

Rozważmy następującą metodę oceniania pozycji, która nie wymaga żadnej wiedzy o grze poza implementacją zasad. Dla analizowanej pozycji wykonujemy losową rozgrywkę w następujący sposób. Pierwszy ruch wybieramy losowo z równym prawdopodobieństwem ze zbioru dostępnych ruchów, po czym go wykonujemy. Następnie dla otrzymanej pozycji ponownie losujemy ruch w analogiczny sposób i wykonujemy go. Kontynuujemy takie losowe wykonywanie ruchów, aż dojdziemy do sytuacji końcowej. Wtedy na podstawie zasad gry potrafimy podać wynik tej rozgrywki. Załóżmy, że możliwe wyniki to wygrana i przegrana. Aby ocenić daną pozycję, wykonujemy dużą liczbę losowych rozgrywek n , wśród których w rozgrywek zakończyło się naszą wygraną. Pozycję oceniamy wartością w/n . Taką ocenę nazywamy *oceną Monte Carlo*.

Ocenianie pozycji w powyższy sposób, zależnie od typu gry, daje mniej lub bardziej sensowne wyniki. Taką ocenę z powodzeniem stosuje się w grach takich jak go czy hex, biorąc na przykład $n = 10\,000$. Przeszukiwanie drzewa gry możemy stosować w tym przypadku do niedużych głębokości ze względu na czasochłonność funkcji oceniającej, a siła otrzymanego programu i tak zależy bardziej od specyfiki gry.

W związku z tym trzeba dobrze dobrać n . Intuicyjnie, im większe n weźmiemy, tym dokładniejsza będzie wartość oceny. Jednakże ocena Monte Carlo na ogół nie jest miarodajna, nawet gdybyśmy wzięli $n = +\infty$, w związku z tym n wcale nie musi być bardzo duże. Dobrze jest dobierać ten parametr drogą eksperymentów dla różnych gier.

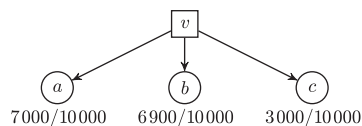
Ocena Monte Carlo daje jakąś liczbę – pytanie: jaką? Otóż jest to jakaś ocena wartości sytuacji ze strategicznego punktu widzenia, tzn. wartość danego zagrania może mieć znaczenie dopiero w końcowej fazie rozgrywki. Na pierwszy rzut oka wydaje się to niezbyt sensowne, jednak nieoczekiwanie dobrze sprawdza się w niektórych grach.

Zamiast losowych rozgrywek można przeprowadzać bardziej inteligentne partie. Na przykład program szachowy *Rybka* ma funkcję, która z zadanej sytuacji przeprowadza setki wysokiej jakości nieco losowych partii. W ten sposób dla każdego zagrania jesteśmy w stanie wyznaczyć procent

wygranych partii, który stanowi znacznie bardziej kompleksową ocenę zagrania. Może się wszakże zdarzyć, że dane zagranie daje zysk dopiero w dalszej fazie rozgrywki, co jest daleko poza zasięgiem zwykłego przeszukiwania drzewa i normalnej funkcji oceniającej. W ten sposób analizuje się dzisiaj trudne, strategiczne zagrania w grach arcymistrzów.

3.1. Granica ufności

Stosowanie zwykłego przeszukiwania drzewa wraz z oceną Monte Carlo nie jest zbyt efektywne. Rozważmy sytuację z rysunku 4. Ze stanu v mamy trzy możliwe ruchy. Dla każdego z nich przeprowadziliśmy 10 000 losowych rozgrywek. Wyraźnie ruch c jest gorszy niż ruchy a i b . Z kolei różnica między ruchami a i b jest niewielka i do końca nie wiemy, który z nich jest lepszy. Otóż może by wystarczyło dla ruchu c przeprowadzić tylko 1 000 rozgrywek, aby z dużym prawdopodobieństwem stwierdzić, że ten ruch jest jednak znacznie gorszy, a pozostałe 9 000 przeznaczyć na rozstrzygnięcie, który z ruchów a i b jest lepszy. W ten sposób, z użyciem tej samej łącznej liczby losowych rozgrywek, byłibyśmy w stanie z większą pewnością wybrać lepszy ruch.



Rys. 4. Przykładowe oceny synów metodą Monte Carlo.

Stajemy przed problemem, jak rozdzielać rozgrywki pomiędzy synów, aby z jak największym prawdopodobieństwem wybrać optymalny ruch. Nie wchodząc w szczegóły, opiszemy powszechnie stosowaną metodę.

Założmy, że dla pewnej sytuacji v przeprowadziliśmy n_v losowych rozgrywek, wśród których było w_v wygranych. Wartość oczekiwana oceny sytuacji wynosi

$$E_v = \frac{w_v}{n_v}.$$

Założmy, że rzeczywista ocena stanu wynosi x (tzn. jakbyśmy przeprowadzili nieskończenie wiele rozgrywek). Interesuje nas taki przedział, iż prawdopodobieństwo tego, że x należy do niego, jest dosyć duże (np. 95%). Rachunek prawdopodobieństwa mówi, że dla pewnego ustalonego ε zachodzi

$$(2) \quad P(x \in [E_v - c\sigma_v, E_v + c\sigma_v]) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{dla } \sigma_v^2 = \frac{1}{n_v},$$

gdzie c jest pewną stałą zależną od ε . Przedział $[E_v - c\sigma_v, E_v + c\sigma_v]$ nazywamy *przedziałem ufności*.

Stosując przedziały ufności, można lepiej zaplanować rozdzielanie losowych rozgrywek pomiędzy synów. Rozważmy stan v typu max. Dla każdego z jego synów s wykonaliśmy n_s losowych rozgrywek, wśród których w_s było wygranych. Zakładamy, że wartość syna s wpada do przedziału $[E_s - c\sigma_s, E_s + c\sigma_s]$, po cichu ignorując fakt, iż istnieje małe prawdopodobieństwo tego, że może ona być poza przedziałem ufności. Którego syna teraz wybrać do przeprowadzenia kolejnej losowej rozgrywki? Ponieważ szukamy ruchu dającego największą wartość, więc wybieramy taki stan, który oferuje największą możliwą dostępną wartość, a mianowicie górną granicę przedziału ufności: $E_s + c\sigma_s$.

Należy rozwiązać jeszcze dwa problemy. Po pierwsze, synowie s , którzy nie mieli jeszcze przydzielonych żadnych losowych rozgrywek, powinni być wybierani jako pierwsi.

Symbolicznie można to zrobić, przypisując im $\sigma_s = +\infty$. Po drugie, może zdarzyć się taka sytuacja, że jeden z synów, s , po małej liczbie losowych rozgrywek nieszczęśliwie będzie mieć małą średnią i małą górną granicę ufności. Istnieje niewielkie prawdopodobieństwo, że jednak ten ruch jest najlepszy. Problem ten obchodzi się przez przemnożenie wartości σ_s^2 , zdefiniowanej we wzorze (2), przez pewną wolno rosnącą funkcję h od łącznej liczby losowych rozgrywek n_v przeprowadzonych dla wszystkich synów, czyli $n_v = \sum_{t \text{ syn } v} n_t$. Najczęściej przyjmuje się $h(n_v) = \log n_v$, ale może być to dowolna inna funkcja – czasami lepiej sprawdza się $h(n_v) = \sqrt{n_v}$. Dobór optymalnej funkcji zależy między innymi od konkretnej gry i dokonuje się go na podstawie eksperymentów. Dodajmy, że w przypadku użycia funkcji h dobór stałej c jest nieistotny, więc odtąd zakładamy, że $c = 1$.

W przypadku wierzchołka typu min wybieramy syna z najmniejszą dolną granicą ufności. Funkcja wyboru syna przedstawiona jest w algorytmie 3.

Algorytm 3 Wybór syna metodą granicy ufności.

```

1: function GRANICAUFNOCI( $v, s$ )
2:    $E_s \leftarrow \frac{w_s}{n_s}, \sigma_s \leftarrow \sqrt{\frac{\log n_v}{n_s}}$ 
3:   if  $v$  jest max then
4:     return  $E_s + \sigma_s$ 
5:   else  $\triangleright v$  jest min
6:     return  $E_s - \sigma_s$ 
7: function WYBIERZSYNA( $v$ )
8:   return syn  $s$  stanu  $v$  optymalizujący
      wartość GRANICAUFNOCI( $v, s$ )

```

3.2. Przeszukiwanie drzewa Monte Carlo

Metoda granicy ufności stosuje się do jednego stanu, gdy chcemy wybrać najlepszy ruch na podstawie wartości synów. Odpowiada to przeszukiwaniu drzewa gry do głębokości 1. Jak przydzielać losowe rozgrywki w drzewie gry w przypadku, gdy chcemy ocenę pozycji obliczyć znacznie głębiej?

Istnieje prosty i niezwykle skuteczny algorytm, który potrafi budować drzewo gry przyrostowo, przydzielając losowe rozgrywki najbardziej obiecującym gałęziom drzewa. W danym momencie algorytm przechowuje pewne drzewo gry. Na początku jest to korzeń i jego synowie. W każdym wierzchołku v trzymane są dwie wartości, n_v i w_v . Wartość n_v reprezentuje liczbę przeprowadzonych rozgrywek, w których pierwsze ruchy pokrywają się z ruchami, jakie trzeba wykonać z korzenia drzewa do wierzchołka v . Natomiast w_v oznacza liczbę zwycięstw wśród tych rozgrywek.

Kolejną rozgrywkę tworzymy w następujący sposób. Pierwsze ruchy rozgrywki wybieramy, stosując metodę granicy ufności, wędrując od korzenia drzewa do liścia. Po osiągnięciu liścia dalszą część rozgrywki przeprowadzamy zupełnie losowo. Po utworzeniu rozgrywki aktualizujemy statystyki n_v i w_v we wszystkich wierzchołkach na ścieżce od korzenia do liścia, gdyż ta rozgrywka dotyczy właśnie tych wierzchołków. Ewentualnie wcześniej rozwijamy osiągnięty liść drzewa, dodając do drzewa wszystkich synów reprezentujących stany, które można osiągnąć przez wykonanie jednego ruchu.

Są różne heurystyki mówiące, kiedy rozwijać liść. Nie można tego robić za często, po pierwsze dlatego, żeby drzewo mieściło się cały czas w pamięci, a po drugie, żeby zbyt szybko wybory nie były determinowane granicą ufności. Z drugiej strony ma być to na tyle często, aby rzeczywiście drzewo przypominało drzewo minimaksowe. Standardowo liść v rozwijamy wtedy, gdy liczba rozgrywek z tego wierzchołka n_v przekroczy pewien ustalony próg N_0 . Dobór wartości N_0 zależy od gry i na ogół najlepiej się sprawdza, gdy ustawi się ją na średnią liczbę możliwych ruchów, jakie można wykonać w losowej sytuacji (tzw. stopień rozgałęzienia gry). Dla szachów wartość N_0 wynosi mniej więcej 30 w początkowej fazie gry.

Całe powyższe rozumowanie przedstawione jest w postaci pseudokodu algorytmu 4. Algorytm ten w literaturze występuje pod skrótami UCT lub MCTS. W praktyce stosuje się dodatkowe modyfikacje, aby zwiększyć jego siłę. Na przykład, zamiast losowych rozgrywek zwiększa się ich jakość, stosując bardzo proste metody, jednocześnie wciąż dbając o losowość. Algorytm ten został stosunkowo niedawno odkryty (w tym wieku) i okazuje się niezwykle skuteczny. Sprawdzał się on w wielu grach, takich jak wspomniane już go i hex, wypierając wcześniej używane metody.

Jego siła wynika z tego, że łączy on w sobie elementy taktyczne ze strategicznymi. Teoria mówi, że drzewo tworzone przez ten algorytm zbiega do pełnego drzewa minimaksowego. Oznacza to, że przy bardzo dużej liczbie losowych rozgrywek metoda ta powinna taktycznie zachowywać się tak, jak zwykłe algorytmy przeglądania drzewa.

Zastosowania przeszukiwania drzewa Monte Carlo są dużo szersze. Dobrze się sprawdza w grach wieloosobowych z elementami losowości (np. w *Osadnikach z Catanu!*), a nawet w grach z niepełną informacją czy też grach jednoosobowych (czyli łamigłówkach). W Internetowym Turnieju Programów Walczących 2009 wszystkie najlepsze programy grające w grę karcianą *Planowanie* zostały napisane z użyciem technik Monte Carlo.

Algorytm 4 Przeszukiwanie drzewa gry Monte Carlo.

```

1: function ROZGRYWKA( $v$ )
2:   if  $v$  jest liściem then
3:     if  $n_v \geq N_0$  then
4:       rozwiń  $v$ 
5:        $W \leftarrow \text{ROZGRYWKA}(\text{WYBIERZSYNA}(v))$ 
6:     else
7:       Przeprowadź rozgrywkę do końca, losowo wybierając ruchy
8:       return 1 dla wygranej bądź 0 dla przegranej
9:   else
10:     $W \leftarrow \text{ROZGRYWKA}(\text{WYBIERZSYNA}(v))$ 
11:   $n_v \leftarrow n_v + 1, w_v \leftarrow w_v + W$ 
12:  return  $W$ 
13: function ZNAJDZNAJLEPSZYRUCH( $v$ )
14:  utwórz korzeń drzewa ze stanem  $v$ 
15:  rozwiń  $v$   $\triangleright$  korzeń wyjątkowo rozwijamy od razu
16:  while nie skończył się nam czas na ruch do
17:    ROZGRYWKA( $v$ )
18:  if  $v$  jest max then
19:    return syn  $s$  stanu  $v$  maksymalizujący  $E_s = \frac{w_s}{n_s}$ 
20:  else  $\triangleright v$  jest min
21:    return syn  $s$  stanu  $v$  minimalizujący  $E_s = \frac{w_s}{n_s}$ 

```

Sztuczna inteligencja w brydżu

Piotr BUTRYN*

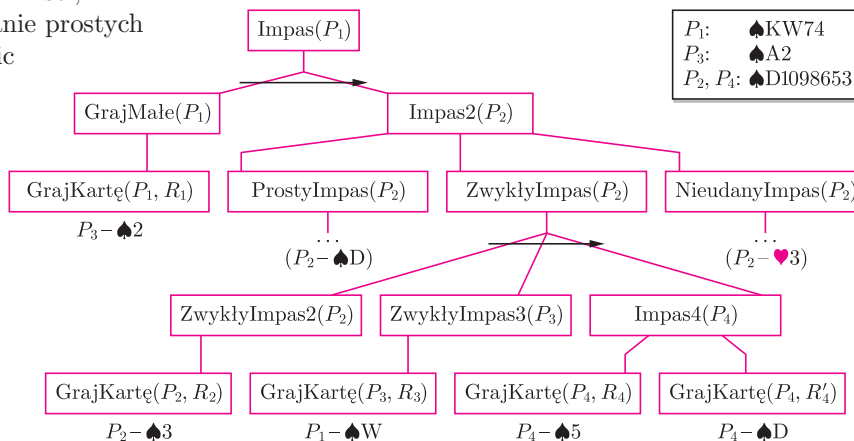
Komputery wyśmienicie grają w warcaby, szachy, backgammona (tryktrak), othello (reversi) – potrafią przeanalizować możliwe dalsze scenariusze gry i zabezpieczyć się przed dobrymi ruchami przeciwnika, dysponują także większą niż człowiek pamięcią. Istnieją jednak gry, np. go, w których jeszcze niedawno komputery nie miały żadnych szans w konfrontacji z najlepszymi zawodnikami, a i z przeciętnymi nie radziły sobie za dobrze.

Z podobną sytuacją mamy do czynienia w przypadku programów grających w brydża. Przeszukanie całego drzewa gry jest niemożliwe ze względu na jego wielkość. W średnim przypadku ma ono około $2 \cdot 10^{24}$ liści, a pesymistycznie nawet $6 \cdot 10^{44}$. Zastosowanie prostych algorytmów, jak alfabeta czy dodanie tablic transpozycji, oczywiście pomaga, ale nie na tyle, aby znaleźć najlepszy ruch w rozsądnym czasie (około minuty). Ograniczenie przeszukiwania do pewnego poziomu jest natomiast trudne do zrealizowania ze względu na brak prostych funkcji, które choć w przybliżeniu mogłyby określić liczbę lew możliwych do wzięcia przez obie strony. Zaczęto więc poszukiwać innych technik mających na celu ograniczenie rozgałęzienia drzewa gry, a co za tym idzie, zmniejszenie liczby możliwych stanów.

Pierwszym przykładem takiego algorytmu jest *planowanie* (ang. *Hierarchical Task Network Planning, HTN*), zastosowane w brydżu po raz pierwszy w 1997 roku w programie *Bridge Baron*. Polega ono na podziale głównego problemu na proste zadania, które potrafimy wykonać. W przypadku brydża zadaniem do zaplanowania jest wzięcie określonej liczby lew. Aby to osiągnąć, stosujemy konkretne metody, takie jak ściągnięcie atutów, przebicie karty w dziadku, zaimpasowanie czy zagranie z góry. Z kolei te metody dzielimy na pojedyncze akcje, jakimi są zagrania konkretnych kart. W każdym węźle drzewa gry zamiast zagrania wszystkich możliwych kart sprawdzamy wszystkie metody, jakie możemy w nim zastosować. W zależności od karty ujawnionej przez przeciwnika (a zatem także pewnej nowej informacji o układzie zakrytych kart) wybieramy odpowiednie podmetody mające zastosowanie w danym przypadku. Każda z nich prowadzi nas do innego stanu gry (i innej informacji o układzie kart), w którym to znów próbujemy wszystkich dostępnych metod rozgrywki.

Jedną z najprostszych metod jest impas, czyli zagranie polegające na wzięciu lewy na kartę niższą, dzięki temu, że karta wyższa jest w ręce konkretnego przeciwnika.

Rozważmy kolor, w którym w ręce mamy A2 (asa i dwójkę), a w dziadku (kartach partnera wyłożonych na stole) KW74. Zagranie dwójki i dołożenie waleta to właśnie impas, który pozwoli na wzięcie lewy, jeśli damę ma przeciwnik zagrywający jako drugi. Należy jednak zauważyć, że czasami karta dołożona jako druga może nas odwieść od dołożenia waleta. Stanie się tak wtedy, gdy przeciwnik dołoży damę lub kartę innego koloru. W pierwszym przypadku dołożymy, oczywiście, króla, w drugim wiemy natomiast, że damę ma gracz zagrywający jako czwarty, i w związku z tym nasz plan także może ulec modyfikacji. Opisaną sytuację przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Część drzewa gry odpowiadająca metodzie „Impas” (parametr metody oznacza zagrywającego gracza). W zależności od karty zagranej przez przeciwnika (gracz P_2) przechodzimy do odpowiedniej podmetody. Najczęściej (tzn. gdy przeciwnik dołoży pika, ale nie damę) będzie to „ZwykłyImpas”, polegający na zagraniu waleta i wzięciu na niego lewy lub nie, w zależności od zagrania (R_4, R_4) drugiego przeciwnika (P_4).

To, jaką decyzję podejmiemy, zależy od wartości oczekiwanej danych zagrań. Tę wartość obliczamy bardzo prosto – jeśli to my zagrywamy kartę, to wartością stanu gry jest maksimum z wartości poszczególnych metod, natomiast jeśli jest ruch przeciwnika, to jest to średnia ważona wartości synów tego węzła, gdzie wagami są prawdopodobieństwa zaistnienia danych sytuacji.

Załóżmy, że w opisanym przykładzie (A2 do KW74) zagranie asa prowadzi do wyniku +600 (3BA, 9 lew), natomiast zagranie na impas do +630 (3BA, 10 lew), jeżeli impas się uda, lub -100 (3BA, 8 lew) w przeciwnym przypadku. Jeśli drugi gracz dołoży małą kartę (prawdopodobieństwo tego to 0,9854), to impas uda się w połowie przypadków, więc wartość oczekiwana tego zagrania to $\frac{1}{2} \cdot 630 + \frac{1}{2} \cdot (-100) = 265$. Gdy jednak nasz przeciwnik dołoży damę lub kartę innego koloru (każda z tych sytuacji wydarzy się z prawdopodobieństwem 0,0078), położymy króla i nasz wynik to odpowiednio +630 i +600. Zatem użycie metody „Impas” ma wartość $0,9854 \cdot 265 + 0,0078 \cdot 630 + 0,0078 \cdot 600 = 270,73$. Porównując oba wyniki, wybieramy zagranie asa zamiast impasu.

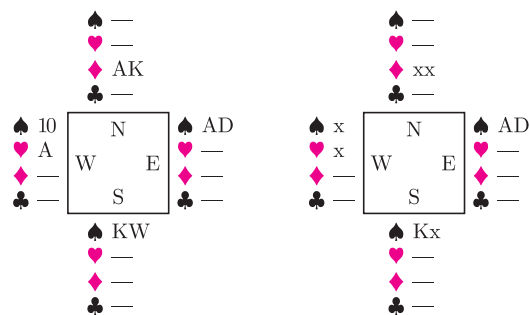
*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Okazuje się, że takie podejście pozwala na istotne zmniejszenie drzewa gry. Faktycznie, w naszym przypadku drugi gracz może zagrać na trzy różne sposoby (mała karta, dama, karta nie do koloru). Jeśli natomiast rozpatrywalibyśmy wszystkie możliwe przypadki, to mógłby on zagrać jedną z 26 kart znajdujących się w zakrytych rękach przeciwników. Algorytm zastosowany w programie *Bridge Baron 8* korzystał z 91 metod i około 400 podmetod. Mimo dużej liczby możliwych strategii drzewo gry średnio zawierało teraz tylko 26 000 liści, a pesymistycznie 305 000, czyli 10^{39} razy mniej niż w przypadku pełnego drzewa gry. Dzięki temu *Bridge Baron* stał się najlepszym programem grającym w brydża, co potwierdziły rozegrane w 1997 roku Mistrzostwa Świata Programów Komputerowych w Brydżu.

Dominacja *Bridge Barona* nie trwała jednak długo, gdyż zaledwie rok później zdeponizował go oparty na zupełnie nowym pomysle program Matthew Ginsberga *GIB* (*Ginsberg's Intelligent Bridgeplayer*, zwany także *Goren In Box* od nazwiska znanego amerykańskiego brydżysty). W celu znalezienia optymalnego zagrania losuje on wiele (około 100) możliwych układów rąk przeciwników i dla każdego z nich sprawdza, jaki jest najlepszy ruch, analizując rozdanie w widne karty (tzn. widząc karty przeciwników). Następnie wybiera to zagranie, które średnio okazywało się najkorzystniejsze. O ile sama idea jest prosta, to problemem, przed którym stanął Ginsberg, była analiza w widne karty w czasie pozwalającym na jej stokrotne powtórzenie. I tu właśnie z pomocą przychodzi algorytm *Partition Search*.

W rozmowach o rozdaniach brydżysty, mówiąc o swoich kartach, pomijają wysokości niektórych kart (blotek). Karta $\spadesuit AD732 \heartsuit K92 \diamondsuit D98 \clubsuit 72$ to dla nich „piąty as dama, trzeci król, trzecia dama i dwie blotki”, czyli $\spadesuit ADxxx \heartsuit Kxx \diamondsuit Dxx \clubsuit xx$. To podejście jest uzasadnione, gdyż rzeczywiście to, czy w kolorze mamy asa czy króla, jest dużo ważniejsze niż to, czy mamy dwójkę czy czwórkę. Właśnie ten pomysł jest wykorzystywany przez algorytm *Partition Search*. Podobne przypadki są w nim utożsamiane i analizowane jednocześnie, a nie rozpatrywane pojedynczo.

Rozważmy rozkład kart widoczny na rysunku 2, odpowiadający sytuacji, w której do końca rozdania pozostały dwie lewy. Zauważmy, że jedyne kara w rozdaniu posiada zawodnik N, więc nie ma znaczenia, że są to as i król, gdyż nawet gdyby to były dwójka i trójka, to żaden z przeciwników nie posiadałby wyższej karty w tym kolorze. Z podobną sytuacją mamy do czynienia w przypadku kierów gracza W. Jeśli chodzi o kolor pikowy, to sytuacja jest trochę bardziej skomplikowana, ale tutaj także wysokości niektórych kart nie są istotne. Zauważmy bowiem, że E w każdej z dwóch pozostałych lew zagra „co najmniej” damę pik, a więc ani 10, ani walet nie mogą wziąć żadnej lewy. W ten sposób uzyskaliśmy rozkład widoczny po prawej stronie rysunku 2. Ponieważ ikсы w kierach i karach możemy zastąpić dowolnymi kartami, a w pikach kartami niższymi od damy, więc tak naprawdę ten rozkład odpowiada $13 \cdot \binom{13}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 91\,260$ różnym rozkładom.



Rys. 2. Oryginalne rozdanie i jego „uproszczona” wersja.

Aby wyjaśnić zasadę działania algorytmu *Partition Search*, wprowadźmy dwie nowe definicje. Rozważmy pewien zbiór pozycji (układów kart) S . Jeśli z danej pozycji p możemy przejść do pewnej pozycji ze zbioru S , wtedy p nazwiemy pozycją *osiągającą* S . Natomiast jeśli z pozycji p możemy przejść tylko do pozycji należących do zbioru S , to p nazwiemy pozycją *przechodzącą* do S . Idea algorytmu *Partition Search* polega nie tylko na obliczaniu wartości danej pozycji, ale także na znalezieniu pewnego zbioru pozycji R , które mają taką samą wartość. Dzięki temu, gdy kiedyś znowu trafimy na pozycję ze zbioru R , to nie będziemy musieli dla niej obliczać wartości od nowa, lecz skorzystamy z wartości wyznaczonej poprzednio. Załóżmy teraz, że celem jest znalezienie tych dwóch niewiadomych (tzn. wartości i zbioru pozycji o tej samej wartości) dla pewnej pozycji p . Jeśli ruch wykonuje gracz maksymalizujący wynik (rozgrywający), to po prostu sprawdzana jest wartość we wszystkich pozycjach, do których może on teraz przejść, i wybierana jest najkorzystniejsza. Pozostaje pytanie, jak znaleźć zbiór R . Ponieważ dla każdego z rozpatrywanych następników p oprócz jego wartości dostaliśmy także odpowiedni zbiór pozycji R , to możemy wyznaczyć dwa nowe zbiory: S_{all} i S_{max} – pierwszy zawiera wszystkie otrzymane pozycje, a drugi te, które odpowiadają wartości maksymalnej. Kiedy jakaś inna pozycja będzie miała taką samą wartość jak p ? Stanie się tak na pewno, gdy będzie ona osiągała zbiór S_{max} (aby otrzymać co najmniej taką samą wartość) oraz przechodziła do zbioru S_{all} (aby nie uzyskać wartości lepszej). Zatem szukanym zbiorem jest przecięcie zbioru pozycji osiągających S_{max} ze zbiorem pozycji przechodzących do zbioru S_{all} . W przypadku gdy w danej pozycji ruch wykonuje gracz minimalizujący wynik, postępujemy analogicznie, tylko wybieramy ten z następników, który ma wartość najmniejszą. Oczywiście, sam problem znajdowania pozycji osiągających dany zbiór i przechodzących do danego zbioru może być trudny, lecz akurat w przypadku brydża znalezienie funkcji dobrze je przybliżających nie jest zbyt skomplikowane.

Skuteczność opisanej metody zależy od tego, jak duże są średnio rozmiary przecięć pozycji osiągających S_{max} z przechodzącymi do S_{all} . W wyniku analizy rozdań brydżowych okazało się, że zastosowanie algorytmu *Partition Search* (połączonego z alfabetą) zmniejsza średnie rozgałęzienie przeszukiwanego drzewa z r do $r^{3/4}$, gdzie r to średnie rozgałęzienie w przypadku użycia

samej alfabetu (jest to zmiana podobna do tej, jaką powoduje użycie alfabetu w stosunku do samego minimaksa).

Jakkolwiek *Partition Search* sprawdził się bardzo dobrze, okazało się, niestety, że sama idea losowania rozdań i analizowania ich w widne karty ma pewne wady. Po pierwsze, w brydżu istnieją rozgrywki wywiadowcze, polegające na ściągnięciu kilku swoich lew w celu zdobycia pewnych informacji o zakrytych rękach przeciwników, które ułatwią nam podjęcie decyzji kluczowych dla losów rozdania. *GIB* oczywiście tak nie zagra, jako że on w każdej symulacji te układy zna. Po drugie, problemem jest wyrzucanie wysokich kart – *GIB* zakłada, że przeciwnik trafi wszystkie decyzje (w końcu przecież gra w widne karty) i pozbywa się kart, których położenie wcale nie musi być oczywiste. Po trzecie, *GIB* nie zawsze rozróżnia rozgrywkę lepszą od gorszej. Załóżmy, że grając metodą A, wygramy zawsze, natomiast w metodzie B będziemy musieli zdecydować, na który układ kart przeciwników gramy, lecz decyzję tę odłożymy do następnej lewy. Dla *GIB*-a obie te rozgrywki są skuteczne w stu procentach (znając układ rąk przeciwników, będzie wiedział, na co zagrać), natomiast w rzeczywistości rozgrzywka B może mieć tylko 50% szans. Aby radzić sobie z tymi problemami, w kolejnych wersjach *GIB*-a wprowadzono modyfikacje polegające na rozpatrywaniu nie pojedynczych pozycji, lecz par (pozycja, możliwe układy kart przeciwników),

i przypisywaniu każdej z możliwych rozgrywek zbioru układów kart, przy których jest ona skuteczna. Szczegółowe informacje na ten temat można znaleźć w artykule [1]. Można tam także poczytać o ciekawym podejściu do licytacji, które wykorzystuje *GIB*, gdy znaczenie poszczególnych odzywek w danej sytuacji nie jest opisane w jego bazie. Generuje on wtedy zbiór rąk swoich i partnera zgodnych z dotychczasową licytacją i na ich podstawie poszczególnym odzywkom przyporządkowuje takie znaczenie, które niesie jak najwięcej informacji przydatnych do znalezienia optymalnego kontraktu.

Mimo tych wszystkich technik i specjalnych algorytmów komputerom nadal trochę brakuje, by wygrywać z ludźmi. Zia Mahmood – jeden z najlepszych brydżystów na świecie – był gotów kilkanaście lat temu założyć się o milion funtów (!), że żadna drużyna złożona z czterech komputerów nie wygra długiego meczu z drużyną złożoną z czterech graczy wybranych przez Zię. Chętny się nie znalazł, a sam Zia w 1997 r. wycofał się z zakładu. Czyżby zaczął się obawiać, że taki program komputerowy zostanie kiedyś napisany? Komputery są w istocie coraz lepsze – ale czy mogą być aż *tak* dobre?

Literatura

- [1] M. Ginsberg, *GIB: Imperfect information in a computationally challenging game*, J. Artificial Intelligence Res. 14 (2001).
- [2] S. J. J. Smith, D. Nau, T. Throop, *Journal of Artificial Intelligence Research* 14 (2001), *AI Magazine* 19 (2/2008), 93–105.



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 767. Jednorodna nić o masie m wisi swobodnie, zaczepiona dwoma końcami na tej samej wysokości. Siła napięcia nici w jej najniższym punkcie wynosi N_0 . Znaleźć siły napięcia nici w punktach jej zaczepienia.

Rozwiązanie na str. 17

F 768. Trzy nierozciągliwe nici jednakowej długości są przymocowane w jednakowych odstępach do obręczy A oraz do obręczy C i przechodzą przez wnętrza obręczy B (rys. 1). Promienie obręczy A i B są jednakowe i wynoszą r , a promień obręczy C jest równy $2r$. Wszystkie obręcze wykonane są z takiego samego drutu, układ wisi na obręczy A , utrzymywanej w płaszczyźnie poziomej. Znaleźć odległość między środkami obręczy B i C .

Rozwiązanie na str. 17

Redaguje Waldemar POMPE

M 1282. Punkt P leży na boku AB trójkąta ABC . Za pomocą cyrkla i linijki poprowadzić przez punkt P prostą dzielącą trójkąt ABC na dwie figury o równych polach (rys. 2).

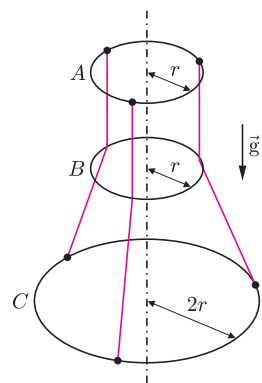
Rozwiązanie na str. 17

M 1283. Rozpatrujemy ciąg $101, 10101, 1010101, \dots$ zapisany w systemie o podstawie $b \geq 2$. Udowodnić, że ciąg ten zawiera co najmniej jeden wyraz będący liczbą złożoną.

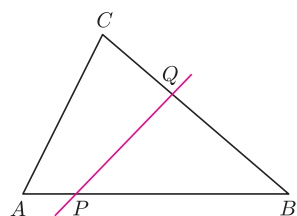
Rozwiązanie na str. 24

M 1284. Niech A będzie $(3n + 1)$ -elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, 4n - 1, 4n\}$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią. Wykazać, że zbiór A zawiera takie trzy elementy $a < b < c$, że $a | b$ oraz $b | c$.

Rozwiązanie na str. 17



Rys. 1



Rys. 2

Gra o wielu obliczach

Tomasz IDZIASZEK*

- Nie mamy już w co grać! – powiedział Bartek, rzucając plecak w kąt przedpokoju.
- Słucham? – zapytał Tato, podnosząc głowę znad gazety.
- Marcin się wygadał i teraz wszyscy w klasie wiedzą, jak grać w kółko i krzyżyk i nie przegrać – kontynuował narzekanie Bartek.
- Ach, tak...

Od tygodnia gra w kółko i krzyżyk stanowiła główny punkt programu na przerwach w klasie Bartka. A dokładnie od czasu, gdy Bartek z kolegą wspólnymi siłami obmyślili, w jaki sposób, zaczynając rozgrywkę, zagwarantować sobie co najmniej remis. Najwyraźniej jego kolega zdradził, dotychczas pilnie strzeżoną, tajemnicę.

- Dlaczego więc nie zagrać w coś innego? – zapytał Tato. – Na przykład w warcaby lub szachy?
- Odpada! – odpowiedział Bartek. – Te gry są za długie na przerwę. A poza tym mają podstawowy feler: nie bardzo wiadomo, jak w nie grać, aby wygrać.
- Rozumiem zatem, że potrzebujesz prostej gry, dla której będziesz znał sposób na wygraną, ale twoi koledzy już niekoniecznie?
- Właśnie! – Bartek wyraźnie się ożywił. – Znasz taką, Tato?

– Chyba będę umiał Ci pomóc – powiedział tajemniczo Tato, złożył gazetę i sięgnął po pudełko zapalek, które leżało na kuchence. Zaciekawiony Bartek patrzył, jak Tato opróżnia na stół zawartość pudełka. Gdy usiadł naprzeciw niego, na stole leżały trzy stosy zapalek (rys. 1). Osiem, pięć i jedenaście zapalek, policzył szybko Bartek.

- Zasady są bardzo proste – zaczął objaśniać Tato. – Dwóch graczy wykonuje na przemian ruchy. Ruch polega na zabraniu z dowolnego stosu jednej lub większej liczby zapalek.
- A kiedy gra się kończy?

– Ten z graczy, który nie może wykonać ruchu, przegrywa. Czyli gdy na stole nie ma już zapalek. Spróbujemy? Możesz wykonać pierwszy ruch.

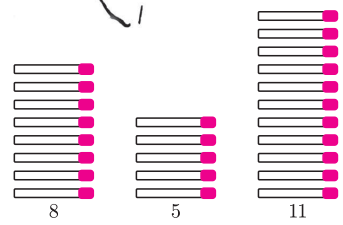
Bartek po chwili namysłu zabrał 3 zapalki z pierwszego stosu. Następnie Tato zabrał wszystkie zapalki z trzeciego stosu. Na stole zostały dwa stosy po 5 zapalek; ruch należał do Bartka.

- Czyżbym przegrał? – zaczął niepewnie chłopiec.
- Dlaczego tak sądzisz?
- Wydaje mi się, że cokolwiek zrobię, możesz to skontrolować... Tak, teraz jestem tego pewien! Jeśli wykonam ruch na jednym ze stosów, będziesz mógł go powtórzyć na drugim.

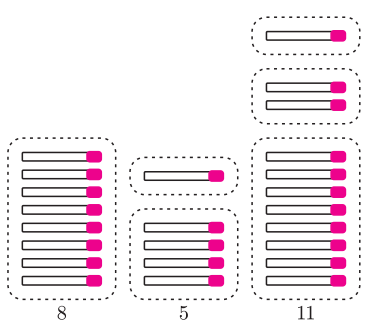
– Masz całkowitą rację – uśmiechnął się Tato. – Każda sytuacja, w której na stole znajdują się dwa stosy o równej liczbie zapalek, jest przegrywająca dla gracza, który robi następny ruch. To znaczy, że jeśli przeciwnik nie popełni błędu, to gracz ten musi przegrać.

- Czy to znaczy, że od początku gry musiałem przegrać? – zapytał z wyrzutem Bartek.
- No cóż, tak jak w kółko i krzyżyk żaden z graczy nie może wygrać, jeśli przeciwnik gra bezbłędnie, tak samo w tej grze, w zależności od początkowego podziału zapalek, jeden z graczy, jeśli będzie grał bezbłędnie, na pewno wygra. Jednak tym razem to ty byłeś tym szczęśliwcem. Niestety, już w pierwszym ruchu popełniłeś błąd.

- Dlaczego?
- Już Ci tłumaczę. – Tato jeszcze raz ułożył na stole początkowe ustawienie zapalek. – Każda sytuacja na stole jest albo wygrywająca, albo przegrywająca dla gracza, który ma zamiar się ruszyć. Podam Ci teraz przepis, który pozwala



Rys. 1. Przykładowa sytuacja w grze Nim.

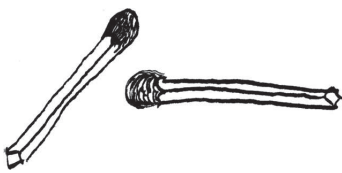


Rys. 2. Zauważmy, że operacja, którą Bartek wykonuje na stosach, to nic innego, jak zapis liczby zapalek na stosie w systemie binarnym. Na przykład 11 to w systemie binarnym 1011₂, gdyż $11 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

$$\begin{array}{r} 8 = 1000_2 \\ 5 = 101_2 \\ 11 = 1011_2 \\ \hline 110_2 = 6 \end{array}$$

Liczność stosów zapisujemy jeden pod drugim w systemie binarnym i dodajemy bez uwzględniania przeniesienia do następnej kolumny. Takie dodawanie oznaczać będziemy symbolem \oplus , a wynik nazywać *nim-sumą* liczb. Sytuacja jest wygrywająca wtedy i tylko wtedy, gdy nim-suma jest dodatnia. Tak jest na rysunku 1, gdyż $8 \oplus 5 \oplus 11 = 6$.



Stwierdzenie Bartka staje się jasne, jeśli zauważymy, że różne liczby mają różne zapisy w systemie binarnym.

Uważny Czytelnik zauważy, że w dowodzie Taty brakuje uzasadnienia, dlaczego Bartek zawsze znajdzie wygrywający ruch. Załóżmy, że nim-suma wynosi s , czyli

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = s,$$

i chcemy usunąć x zapalek ze stosu a_1 . Powinniśmy osiągnąć sytuację, w której

$$(a_1 - x) \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0.$$

Nim-suma tych dwóch równań (korzystamy z faktu, że $a \oplus a = 0$) to:

$$a_1 \oplus (a_1 - x) = s,$$

co po przekształceniach daje

$$x = a_1 - (a_1 \oplus s).$$

Zauważmy wreszcie, że ta wartość jest poprawna, o ile $a_1 > a_1 \oplus s$ (a to jest prawdą, jeżeli stos ma kupkę licznosci k).

stwierdzić, z jaką sytuacją mamy do czynienia. Podziel każdy ze stosów na kupki, które zawierają 1, 2, 4 lub 8 zapalek, ale tak, żeby żadne dwie kupki, które powstały z tego samego stosu, nie zawierały takiej samej liczby zapalek.

Nie było to wcale proste zadanie, ale po chwili Bartek się z nim uporał (rys. 2).

– A teraz policz liczbę kupek, które zawierają po jednej zapalce, liczbę kupek, które zawierają po dwie zapalce itd., i powiedz, czy któraś z tych liczb jest nieparzysta.

– Mamy tylko jedną kupkę z dwiema zapalcami i jedną kupkę z czterema, a 1 jest liczbą nieparzystą!

– Świetnie, w takim razie to oznacza, że ta sytuacja jest wygrywająca.

Bartek nie czuł się przekonany. Widząc zwątpienie w jego oczach, Tato rzekł:

– Spróbujemy to uzasadnić, a przy okazji pokażę Ci, w jaki sposób znajdować właściwe ruchy w sytuacji wygrywającej. Zwróć uwagę na to, że jeżeli sytuacja jest wygrywająca, to musi istnieć taki ruch, który prowadzi do sytuacji przegrywającej.

– To jasne! Jeżeli ja mam wygrać, to muszę wykonać ruch, po którym przeciwnik na pewno przegra.

– Właśnie – potwierdził Tato. – Natomiast wszystkie ruchy z sytuacji przegrywającej prowadzą do sytuacji wygrywających. Sytuacją przegrywającą jest także sytuacja, w której nie ma żadnych zapalek. Teraz wystarczy pokazać, że nasz przepis na sprawdzanie sytuacji zachowuje te trzy warunki.

– Najprostsze jest sprawdzenie sytuacji z zerową liczbą zapalek. Nie mamy żadnych stosów, więc wszystkie liczby kupek są parzyste. Zatem jest to sytuacja przegrywająca – zauważył Bartek.

– Otóż to! Weźmy teraz dowolną sytuację, o której podejrzewamy, że jest przegrywająca, czyli taką, w której wszystkie liczby kupek są parzyste. Jeśli teraz wykonamy ruch, usuwając kilka zapalek z pierwszego stosu, to czy kupki z tego stosu mogą pozostać takie same?

– Oczywiście nie!

– Zatem po zabraniu zapalek będzie istniał taki rodzaj kupek, w którym albo przybędzie, albo ubędzie jedna kupka. Wobec tego kupek tego rodzaju będzie teraz nieparzyste wiele, czyli ruch prowadzi do sytuacji, którą zaliczymy do wygrywających – podsumował Tato. – Inaczej ma się sprawa, gdy jesteśmy właśnie w sytuacji wygrywającej. Teraz musimy pokazać ruch, który prowadzi do sytuacji przegrywającej. Załóżmy, że najliczniejsza nieparzysta grupa kupek zawiera po k zapalek. Zapalce należy zabrać z takiego stosu, który ma kupkę licznosci k .

– Tutaj k jest równe 4, czyli zapalce należy zabrać z drugiego stosu.

– Racja! Spróbuj zabierać po jednej zapalce, aż doprowadzisz do sytuacji, w której wszystkie grupy kupek są parzyste – poradził Tato.

– Gdy zabiorę jedną zapalce, nadal mamy jedną kupkę rozmiaru 4. Ale zabranie dwóch zapalek powoduje, że powstałe grupy kupek o licznosciach 1, 2 i 8 są parzyste! – ucieszył się Bartek.

– To prawda, zatem aby wygrać, powinieneś być zacząć grę od zabrania dwóch zapalek z drugiego stosu.

* * *

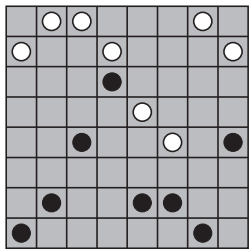
Przez następne dwa tygodnie Bartek nie posiadał się z radości. Gra spodobała się jego kolegom, a on był w niej niekwestionowanym mistrzem. Co więcej, nawet Marcin nie znał jej sekretu. Do czasu gdy...

– Starszy brat Marcina, który studiuje matematykę, powiedział, że to znana gra, i objaśnił ją Marciniowi – dąsał się Bartek.

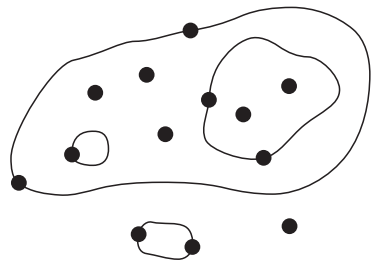
– Jeśli chcesz, mogę nauczyć Cię innej gry – zaproponował Tato.

– Żeby znowu musiał uczyć się nowej strategii? – Bartek nie chciał, by czas, który poświęcił na opanowanie sprawnego pamięciowego dzielenia stosów na kupki, poszedł na marne.

– Na to też możemy coś poradzić.



Rys. 3. Przykładowa sytuacja w grze Northcotta. Jest to sytuacja wygrywająca, gdyż $5 \oplus 5 \oplus 3 \oplus 0 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 6 \oplus 2 = 4$.



Rys. 4. Przykładowa sytuacja w grze Rims. Jest to sytuacja przegrywająca, gdyż $3 \oplus 2 \oplus 1 = 0$.

Pokażemy, że dodatkowe ruchy w grze Rims nie pozwalają przejść z jednej sytuacji przegrywającej bezpośrednio do innej. Gdyby tak było, to moglibyśmy podzielić stos a_1 na dwa stosy x, y spełniające $x + y < a_1$ oraz

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0,$$

$$x \oplus y \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0.$$

Nim-sumując stronami, dostajemy

$$a_1 \oplus x \oplus y = 0,$$

czyli $a_1 = x \oplus y$. Korzystając z faktu, że $x \oplus y \leq x + y$ (bo ignorujemy przeniesienia), dochodzimy do sprzeczności:

$$a_1 = x \oplus y \leq x + y < a_1.$$

Tato wyjął planszę do warcabów i rozstawił na niej po osiem pionków, tak by w każdej kolumnie planszy znajdowało się dokładnie po jednym pionku każdego koloru (rys. 3).

– Ty ruszasz się białymi, ja czarnymi. Można ruszyć się do przodu lub do tyłu o dowolną liczbę pól, ale nie można przeskoczyć pionka przeciwnika. Znów przegrywa ten, kto nie ma ruchu. Spróbuj znaleźć strategię!

Po rozegraniu kilku partii Bartek nieśmiało zaczął:

– Wydaje mi się, że wpadłem na pomysł. To, co jest ważne na planszy, to odległości między przeciwległymi pionkami. Jeśli wszystkie są równe zeru, to gracz, który wykonuje następny ruch, przegra. Każdy ruch do przodu zmniejsza jedną z tych odległości. Jeśli zatem potraktujemy każdą z odległości jak stos, to będziemy mieli naszą poprzednią grę! Nie bardzo jednak wiem, co zrobić z ruchami do tyłu.

– Nic, one w niczym nie zmieniają sytuacji. Zauważ, że jeśli jestem w sytuacji wygrywającej, to nie potrzebuję ich używać. Natomiast gdy w sytuacji przegrywającej cofnę się o kilka pól, to przeciwnik, wykonując ruch w przód o tyle samo pól, przywróci poprzednią sytuację. I, oczywiście, nie mogą cofać się tak w nieskończoność.

– Racja! – ucieszył się Bartek. – Zatem moja strategia będzie z powodzeniem działać i w tej grze. A znasz jeszcze inne takie gry, Tato? Na wypadek, gdyby bratu Marcina i tę grę udało się rozgryźć?

– Niech pomyślę – odparł Tato i wyjąwszy długopis i kartkę, narysował na niej kilka kropek i krzywych (rys. 4). – Teraz ruch polega na narysowaniu zamkniętej krzywej, która przechodzi przez co najmniej jeden punkt i nie przecina innych krzywych.

– To proste – zawołał Bartek. – Jeśli potraktujemy wszystkie punkty, które leżą w tej samej części kartki, jako stos, to wykonując ruch, zabieram ze stosu te punkty, przez które przechodzi krzywa.

– Prawie dobrze – pochwalił Tato. – Zauważ jednak, że zamykając krzywą, dzielisz tę część kartki na dwa kawałki i część kropek możesz zamknąć w krzywej, a część pozostawić na zewnątrz. Odpowiadałoby to zabraniu zapalek ze stosu i ewentualnemu podzieleniu go na dwa mniejsze stosy.

– Rzeczywiście – zamyślił się Bartek.

– Ale trop był dobry. Okazuje się, że tak jak w poprzedniej grze, te dodatkowe ruchy nie mają znaczenia.

* * *

– Tato! Ten brat Marcina naprawdę zaczyna mnie denerwować. Znowu wpadł na strategię. Czy nie miałbyś czegoś naprawdę trudnego?

– Myślę, że miałbym. Ale to temat na osobną historię.

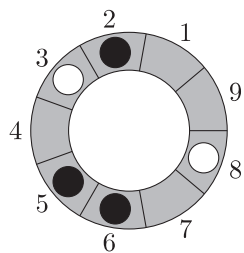
Opisana w artykule gra nosi nazwę Nim, a jej dwa warianty to gra Northcotta i Rims. Zachęcamy Czytelników do samodzielnego tworzenia nowych wariantów, natomiast zainteresowanych odpowiedzią Taty Bartka zapraszamy do lektury informatycznego kącika olimpijskiego.

Informatyczny kącik olimpijski (32): Gra w kółko

Tym razem w kąciku omówimy jedno z zadań z Potyczek Algorytmicznych 2009.

Plansza do gry „w kółko” składa się z pewnej liczby pól umieszczonych na okręgu. Na planszy rozmieszczone są białe i czarne pionki, na każdym polu co najwyżej jeden. Począwszy od grającego pionkami białymi, gracze na przemian wykonują ruchy na planszy. Ruch polega na przesunięciu wybranego pionka swojego koloru o dowolną liczbę niezajętych pól. Przykładowo, na zaprezentowanej na rysunku planszy grający białymi może wykonać ruch pionkiem z pola 3 na pole 4 lub pionkiem z pola 8 na jedno z pól 7, 9, 1.

Jeśli w swojej turze gracz nie może wykonać żadnego ruchu, przegrywa. Naszym zadaniem jest sprawdzić, przy założeniu, że gracze grają optymalnie, który z nich wygra. Może się zdarzyć i tak, że gra będzie toczyła się w nieskończoność – uznajemy wtedy, że nastąpił remis.



Przykładowa sytuacja w grze w kółko.

Okazuje się, że gra „w kółko” ma wiele wspólnego z grą Nim, w związku z czym będziemy u Czytelników zakładali jej znajomość (o grze Nim piszemy też w artykule *Gra o wielu obliczach* na stronach 8–10 tego numeru *Delty*). Poniżej przedstawiamy szkic rozwiązania, zachęcając Czytelników do uzupełnienia szczegółów dowodu.

Obszarem nazwiemy spójny łuk planszy, którego pola końcowe są zajęte przez pionki, i w którym wszystkie pionki należą do jednego gracza. *Blokiem* nazwiemy obszar, którego nie można powiększyć. Liczbę pionków w bloku nazwiemy jego *licznością*, a liczbę pól w bloku jego *długością*. *Dziurę* nazwiemy przestrzeń między blokami, jej długość to liczba pól. Poniższy blok czarnych pionków ma licznosc 3, długość 4, a za nim znajduje się dziura długości 2.



Jeśli plansza zawiera N bloków, to jej zapisem blokowym nazwiemy N trójek (p_i, n_i, l_i) , gdzie p_i, n_i oznaczają licznosc i długość i -tego bloku, natomiast l_i oznacza długość dziury po i -tym bloku. Powyższy blok to $(3, 4, 2)$. Zapisem blokowym planszy z przykładu (gdy zaczniemy od pola 2 i będziemy poruszać się w kierunku wzrastających numerów pól) jest $(1, 1, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 1), (1, 1, 2)$.

Założmy, że każdy z graczy ma co najmniej jeden pionek. Łatwo zauważyć, że jeśli nie ma wolnych pól na planszy, to czarny wygrywa. Ponadto, jeśli wszystkie bloki mają licznosc 1, to jest remis, a gdy jeden z graczy ma tylko bloki licznosci 1, to przegrywa. Dalej będziemy zakładać, że każdy z graczy ma co najmniej jeden blok o licznosci większej niż 1.

Założmy wpraw, że wszystkie bloki mają licznosc 2, i niech s będzie, zdefiniowaną na stronie 9, nim-sumą z wszystkich długości dziur, tzn.

$$s = l_1 \oplus l_2 \oplus \dots \oplus l_N.$$

Kluczową obserwacją, która pozwoli nam rozgrywać gry na bardzo dużych planszach, jest zauważenie, że jeśli $s = 0$, to wygrywa czarny, w przeciwnym przypadku wygrywa biały. Istotnie, nasza gra to po prostu Nim: każda dziura odpowiada stosowi, tak jak to było w przypadku gry Northcotta.

Sprawa komplikuje się, gdy dopuścimy bloki o licznosciach różnych od 2. Założmy teraz, że licznosci bloków są większe od 1. *Silnym blokiem* nazwiemy blok o licznosci co najmniej 3 i długości większej niż jego licznosc ($3 \leq p_i < n_i$). Blok z rysunku powyżej jest silny. Zauważmy, że gracz mający silny blok ma zawsze możliwość ruchu pionkiem wewnątrz tego bloku; wynika z tego, że nie może przegrać (zatem jeśli obaj gracze mają silne bloki, to jest remis). Tak więc jeśli chcemy mieć szansę na wygraną, nie możemy dopuścić, by przeciwnik, który nie ma silnego bloku, uformował go.

Założmy, że rozważamy pierwszy ruch białych. Niech i_B oznacza liczbę białych pionków, dla których istnieje ruch formujący silny blok (analogicznie definiujemy i_C). Rozważmy trzy przypadki.

1) Czarny ma silny blok lub $i_C > 1$, zatem biały nie jest go w stanie zablokować. Jeśli biały ma silny blok lub $i_B > 0$, to jest remis, w przeciwnym przypadku czarny wygra.

2) $i_C = 0$, zatem biały wygrywa, jeśli ma silny blok lub $i_B > 0$. W przeciwnym przypadku wygrywa czarny lub biały w zależności od wartości s .

3) $i_C = 1$, zatem aby wygrać, biały musi wykonać ruch blokujący. Rekurencyjnie sprawdzamy (rozważając odpowiedź gracza czarnego, powtarzamy całe rozumowanie dla odwrotnego pokolorowania pionków), czy po tym ruchu gra kończy się zwycięstwem białych. Jeśli nie, to zamiast tego ruchu próbujemy utworzyć silny blok (to da białemu remis). Jeśli się nie uda, to wygrywa czarny. Zauważmy, że zawsze będą co najwyżej dwa dodatkowe wywołania rekurencyjne powyższej procedury.

Pozostało uwzględnić bloki o licznosci 1. *Superblokiem* nazwiemy grupę sąsiednich bloków

$$(p_i, n_i, l_i), \dots, (p_{i+k}, n_{i+k}, l_{i+k}),$$

z których wszystkie są licznosci 1, oprócz skrajnych bloków $i, i+k$, które są licznosci co najmniej 2.

Poniższe obserwacje pozwolą nam sprowadzić grę do przypadku, w którym nie ma bloków licznosci 1:

1) Superblok dla parzystego k jest równoważny pojedynczemu blokowi (p, n, l_{i+k}) , gdzie

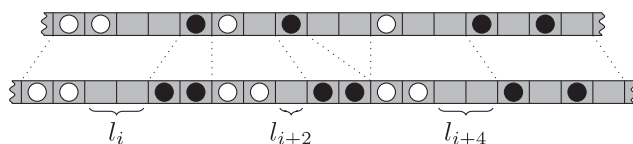
$$p = \sum_{j=i}^{k+i} p_j, \quad n = \sum_{j=i}^{k+i} n_j + \sum_{j=i}^{k+i-1} l_j.$$

Innymi słowy, możemy zastąpić wszystkie pionki superbloku pionkami koloru bloków i oraz $i+k$. Wynika to z faktu, że gracz kontrolujący oba końce superbloku jest w stanie zdusić pojedyncze pionki przeciwnika, które są w środku.

2) Superblok dla nieparzystego k można przekształcić równoważnie, przyjmując

$$\begin{cases} p_{i+j} = 2 & \text{dla } 1 \leq j < k, \\ l_{i+2j-1} = 0 & \text{dla } 1 \leq j \leq k/2. \end{cases}$$

Wynika to z faktu, że graczowi kontrolującemu lewy koniec superbloku opłaca się przesuwać pionki tylko w prawo (analogicznie drugiemu graczowi opłaca się przesuwać pionki jedynie w lewo). Zatem tę sytuację znów możemy sprowadzić do gry Nim, tym razem jednak stosami będą co drugie dziury:



Uważna implementacja powyższego rozwiązania daje algorytm działający w czasie liniowym ze względu na liczbę pionków na planszy.

Tomasz IDZIASZEK



mała delta

Sprawiedliwa czy niesprawiedliwa?

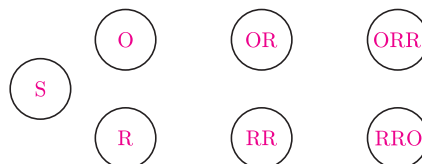
Rzucamy monetą. Jeśli wypadnie orzeł – wygrywam, jeśli reszka – wygrywa mój przeciwnik. Czy jest to gra sprawiedliwa? Uważam, że tak. A oto inna gra. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie szóstka – wygrywa mój przeciwnik, jeśli co innego – wygrywam ja. W moim odczuciu ta gra jest niesprawiedliwa, niekorzystna dla mojego przeciwnika. Czy zgadzacie się ze mną? Jeśli tak, to w porządku, rozumiemy się doskonale.

Zaproponuję teraz inną grę. Rzucamy monetą wielokrotnie – aż do momentu, kiedy w kolejnych trzech rzutach wypadną trzy orły albo trzy reszki. W tym pierwszym przypadku wygrywam ja, w drugim mój przeciwnik. Zasady gry proste, choć na rozstrzygnięcie trzeba czasem czekać dość długo. Oto przykład rozgrywki rozstrzygniętej dopiero po dwunastu rzutach: **OROORRRORRR** – wygrał mój przeciwnik.

Czy jest to gra sprawiedliwa? Niewątpliwie tak. Spróbujmy jednak zmienić nieco jej przepisy. Ja będę czekał na taki ciąg kolejnych wyników: orzeł, reszka, reszka; mój przeciwnik natomiast wyczeka na rezultat: reszka, reszka, orzeł. Rzucamy aż do skutku. Gra jest bardzo podobna do poprzedniej – radziłbym jednak dobrze się zastanowić, nim odpowiecie na pytanie, czy jest ona sprawiedliwa. A najlepiej wykonajcie eksperyment. Poszukajcie sobie cierpliwego partnera i rozegrajcie 40 partii, ostatecznie można nawet grać z samym sobą. Jeśli około 30 z nich przyniesie wygraną graczowi, który obstawił wynik **ORR**, to – uchylę Wam rąbka tajemnicy – nie będzie to przypadkiem. W tej grze szanse nie są równe. Spróbujmy jednak wydedukować: dlaczego?

Dla porównania szans obydwu graczy przywołamy na pomoc interesującą i bardzo skuteczną metodę – przełożymy reguły naszej gry na język grafów.

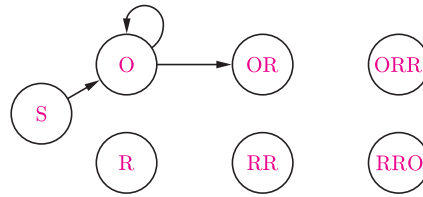
Sądzę, że potrafię wyjaśnić Wam, o co chodzi. Wypiszmy kolejne rezultaty po drodze do sukcesu jednego z graczy: **O**, **OR**, **ORR** i drugiego: **R**, **RR**, **RRO**. Dorzucmy do tego sytuację przed wykonaniem pierwszego rzutu i oznaczmy ją **S** – jak start. Otrzymamy w ten sposób 7 stanów: **O**, **OR**, **ORR**, **R**, **RR**, **RRO**, **S**.



Teraz będziemy rysować między nimi strzałki. Zaczniemy od pierwszego wypisanego stanu, **O**. Wczujmy się dobrze w sytuację i wyobraźmy sobie, że gra dopiero się rozpoczęła, rzuciliśmy monetą raz i wypadł orzeł. Co może zdarzyć się dalej?

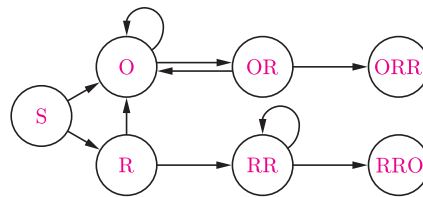


W drugim z kolei rzucie wypadnie orzeł lub reszka. Jeśli reszka, przejdziemy ze stanu **O** do stanu **OR**, natomiast jeśli wypadnie orzeł, powinniśmy przejść do stanu **OO**. Takiego stanu wprowadzić nie ma na naszej liście, ale też wcale nie jest on nam potrzebny. Z punktu widzenia dalszej rozgrywki sytuacja **OO** jest dokładnie taka sama, jak sytuacja **O**. Dlatego narysujemy dwie strzałki: pierwszą od stanu **O** do stanu **OR** i drugą od stanu **O** do tego samego stanu **O**



– nasz rysunek zaczyna przekształcać się w graf.

Ostatecznie, po narysowaniu wszystkiego, co może się zdarzyć, graf przybierze taką postać:



– sprawdźcie, czy wszystkie strzałki narysowane są poprawnie!

Mając do pomocy graf, nietrudno zorientować się w szansach obydwu graczy. Okazuje się, że wynik gry jest przesądzony po drugim, jeśli już nie po pierwszym rzucie. Dojść po strzałkach do stanu **RRO** – co odpowiada wygranej drugiego gracza – można tylko wtedy, gdy zarówno w pierwszym, jak i w drugim rzucie wypadnie reszka. Inne możliwości, a konkretnie: **OO**, **OR** i **RO**, nieuchronnie prowadzą do stanu **ORR**, a więc do wygranej gracza pierwszego. Można więc domyślać się, że szanse graczy będą w stosunku 3 : 1 na korzyść pierwszego z nich.

Że tak jest w rzeczywistości – przekonajcie się, przeprowadzając doświadczenie, które Wam zaproponowałem.

A na zakończenie mam dla Was kilka zadań.

Zadanie 1. Narysujcie odpowiedni graf i porównajcie szanse graczy w takiej grze: jeden z graczy obstawia wynik **ROO**, drugi **RRO**. Tak jak w poprzedniej grze, rzuca się monetą aż do skutku.

Zadanie 2. Jeden z graczy wybiera dowolny ciąg trzech kolejnych wyników rzutu monetą. Drugi z graczy wybiera dowolny inny. Tak jak poprzednio, rzuca się monetą aż do skutku. Czy wolelibyście wybierać swój ciąg jako pierwszy czy jako drugi?

Zadanie 3. Spróbujcie narysować graf i porównać szanse graczy w takiej grze: rzuca się kostką do gry dopóty, dopóki nie wypadnie parzysta liczba oczek lub też 1 i 3 (obojętnie w jakiej kolejności i niekoniecznie pod rząd). Gdy najpierw zostanie wyrzucona liczba parzysta (przed wyrzuceniem 1 i 3), wygrywa gracz pierwszy, w przeciwnym przypadku – gracz drugi. Dla uniknięcia nieporozumień podam dwa przykłady rozstrzygniętych rozgrywek:

1, 1, 5, 4 – wygrał gracz pierwszy;

3, 5, 3, 1 – wygrał gracz drugi.



Mafia, zdradziecka parzystość oraz π

Piotr MIGDAŁ*

Mafia to jedna z towarzyskich gier psychologicznych. Jej osiã jest wzajemne zwalczanie siê dwóch grup – mafii i miastowych. Członkowie mafii znają siê wzajemnie i mają dodatkowe możliwości działania, za to miastowi stanowią liczniejszã grupę.

Na poczãtku gry ka¿dy uczestnik ciãgnie los, czy zostanie miastowym, czy członkiem mafii. Rozgrywka jest podzielona na naprzemiennie fazy dnia i nocy, koñczy siê zaã, gdy przy ¿yciu pozostanie tylko jedna grupa. Podstawowe działania w trakcie dnia to jawna dyskusja i linczowanie uczestników wybranych w drodze wiêkszoñciowego g³osowania, w nocy zaã – tajne naradzanie siê mafii i zabijanie przez niã miastowego.

Mo¿na bawić siê, grając w mafiã lub... zabawić siê w jej matematyczne modelowanie.

Skupimy siê na najprostszej wersji gry w mafiã, w której mamy jednego członka mafii oraz c miastowych, bez ¿adnych dodatkowych postaci (czyli sumarycznie $c + 1$ uczestników). Pominiemy czëść psychologicznã. W szczególnoñci za³o¿ymy, ¿e mafiozo nie ujawni w czasie gry swojej to¿samoñci na drodze prze¿yczenia, przybrania koloru buraka ani jakiegokolwiek innej. Tym samym ¿aden miastowy nie ma przes³anek wnosic, kto mo¿e byc w mafii, i g³osuje za linczowaniem kogokolwiek oprócz siebie. Oczywiñcie, mafiozo g³osuje na dowolnego miastowego. W tym przypadku opis gry znacznie siê upraszcza, gdy¿ w ciãgu dnia zostaje zlinczowana losowa osoba. W trakcie nocy zawsze ginie jeden miastowy.

Gdy mamy do czynienia z jednoosobowã mafiã, prawdopodobieñstwo jej wygrania to nic innego, jak iloczyn prawdopodobieñstw tego, ¿e ka¿dego dnia zostanie zlinczowany miastowy. Dla ustalenia uwagi, zaczynamy grã od fazy dnia. Otrzymujemy wzór na prawdopodobieñstwo w wygrania mafii w zale¿noñci od poczãtkowej liczby miastowych c :

$$w(c) = \frac{c}{c+1} \cdot \frac{c-2}{c-1} \cdot \frac{c-4}{c-3} \cdot \dots = \frac{c!!}{(c+1)!!}.$$

Zdradziecka parzystość

Powy¿szy wzór ma pewne, zale¿ne od parzystoñci c , w³asnoñci, niejako zamaskowane w dwusilniach. O ile dodanie dwóch miastowych ewidentnie zmniejsza szansã wygrania mafii, czyli $w(c+2) < w(c)$, tak ju¿ byc nie musi w przypadku dodania tylko jednego miastowego. Jak siê okazuje, dodajãc parzystego miastowego, zwiêkszamy szansã wygrania mafii! Dla ilustracji tego zjawiska pos³u¿my siê prostym przyk³adem.

Rozwa¿my sytuacjã, w której na starcie mamy jednego mafiozo i jednego miastowego. Mafia wygrywa tylko wtedy, gdy zostanie zlinczowany miastowy. Z uwagi na oczywisty remis wybór ofiary jest dokonywany np. na podstawie rzutu monetã, co daje $w(1) = \frac{1}{2}$. Gdy na starcie jest jeden mafiozo i dwóch miastowych, równie¿ mafia wygrywa tylko wtedy, gdy zostanie zlinczowany miastowy (drugiego dobieje w nocy). Tym razem trudniej jã upolowaç i $w(2) = \frac{2}{3}$.

Mo¿na podejrzewaç, ¿e natknãliñmy siê na zjawisko wynikajãce z doboru konkretnych warunków brzegowych (tj. ustalenia, ¿e w przypadku remisu ginie losowa osoba, a nie np. miastowy) lub rozwa¿ania zbyt ma³ej liczby miastowych. Pierwszã z mo¿liwoñci z łatwoñciã rozpatrzy Czytelnik Dociekliwy, drugã opisze poni¿ej.

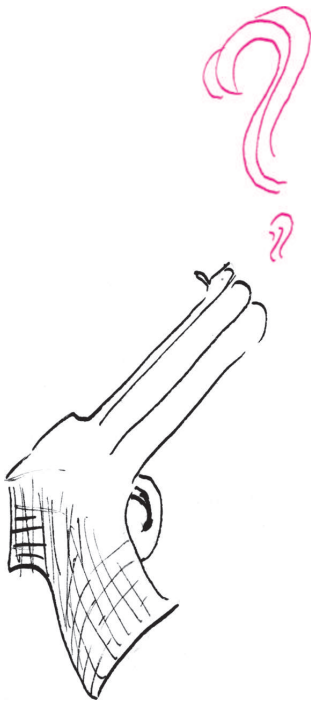
Udowodnimy, ¿e zawsze dodanie parzystego mieszkańca zwiêksza szansã wygrania mafii. Przy szacowaniu ró¿nicy $w(2k) - w(2k-1)$ bãdziemy korzystaç z niezbyt skomplikowanej nierównoñci

$$\sqrt{(n+1)(n-1)} < n.$$

Mo¿emy przyjaç, ¿e zaczynamy grã od dnia, nie tracãc ogólnoñci – równie dobrze mogliñmy zaczãc grã w nocy i dodaç jednego miastowego, który zostanie w trakcie niej zabity.

$n!!$ to n dwusilnia, czyli iloczyn co drugiej liczby ca³kowitej dodatniej, koñczãcy siã na n . Np. $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$, $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

*student, Kolegium Miãdzywydzia³owych Indywidualnych Studiów Matematyczno-Przyrodniczych, Uniwersytet Warszawski



W ten sposób otrzymujemy

$$\begin{aligned} w(2k) - w(2k-1) &= \\ &= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} > \\ &> \frac{\sqrt{(2k+1)(2k-1)}}{2k+1} \cdot \frac{\sqrt{(2k-1)(2k-3)}}{2k-1} \cdot \dots \cdot \frac{\sqrt{5 \cdot 3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3 \cdot 1}}{3} - \\ &\quad - \frac{2k-1}{\sqrt{(2k+1)(2k-1)}} \cdot \frac{2k-3}{\sqrt{(2k-1)(2k-3)}} \cdot \dots \cdot \frac{3}{\sqrt{5 \cdot 3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k+1}} - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} = 0, \end{aligned}$$

zatem w istocie $w(2k) > w(2k-1)$.

Jak widać, ten prosty model gry w mafię daje wyniki, które mogą być nieintuicyjne. Jako przykład rozważmy taką sytuację: jest nas czterech i chcemy zagrać z jednym mafiozo. Ma on szansę wygrania $w(3) = \frac{3}{8} = 0,375$. Jeśliby zaprosić dodatkowe pięć osób i grać w dziewiątkę, wciąż z jednym mafiozo, szanse wygrania mafii wzrosną do $w(8) = \frac{128}{315} \approx 0,406$.

Kolejny sposób na wyznaczenie liczby π

W sytuacjach praktycznych często cenniejszy jest przybliżony wzór, który ma prostą postać, niż dokładny, lecz skomplikowany. Rozważmy uśrednienie $w(c)$ dla sąsiedniej parzystej i nieparzystej wartości. Średnia geometryczna doskonale nadaje się do tego celu, gdyż zastosowanie jej znacznie uprości wynik:

$$\sqrt{w(c-1)w(c)} = \sqrt{\frac{(c-1)!!}{c!!} \frac{c!!}{(c+1)!!}} = \frac{1}{\sqrt{c+1}}.$$

Cóż, wynik rzeczywiście prosty, jednak przez uśrednienie otrzymaliśmy funkcję monotoniczną, pozbawioną „ząbków”. W celu zbadania, na ile dodanie parzystego miastowego zwiększa szansę wygrania mafii, obliczmy stosunek

$$\frac{w(2k)}{w(2k-1)} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \bigg/ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k+1}.$$

Powyższe wyrażenie na pierwszy rzut oka nie wygląda zachęcająco. Czyżbyśmy dotarli do martwego punktu? Nie! Natrafiliśmy na wyrażenie, które jest zbieżne przy k dążącym do nieskończoności. Jest ono znane w matematyce jako wzór Wallisa:

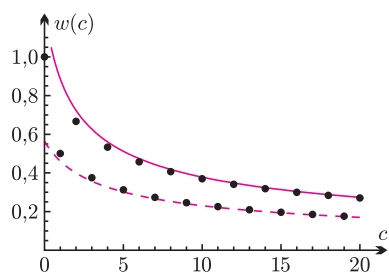
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Czyli przy liczbie mieszkańców dążącej do nieskończoności dodanie parzystego miastowego zwiększa szanse wygrania mafii o czynnik $\pi/2$. Tym samym otrzymujemy sposób na doświadczalne wyznaczenie liczby π . Jeden z wielu, dość niepraktyczny, ale za to jaskże oryginalny!

Co więcej, możemy pokusić się o wypisanie przybliżonych wzorów na szanse wygrania mafii w zależności od parzystości liczby mieszkańców. W tym celu przybliżymy odpowiedni stosunek przez jego granicę

$$\begin{aligned} w(2k-1) &= \left(\frac{w(2k)}{w(2k-1)} \right)^{-1/2} \sqrt{w(2k-1)w(2k)} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}, \\ w(2k) &= \left(\frac{w(2k)}{w(2k-1)} \right)^{1/2} \sqrt{w(2k-1)w(2k)} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}. \end{aligned}$$

No dobrze, ale czy takie rozważania mają praktyczne zastosowanie? Prawdopodobnie można zrobić eksperyment psychologiczny, porównujący rzeczywiste wyniki z wyidealizowaną teorią. Na pewno zaś – napisać pracę licencjacką o grze w mafię.



Wykres szans wygrania jednoosobowej mafii. Punkty reprezentują ścisłe wyniki $w(c)$, linie zaś są ich przybliżeniami – ciągła dla parzystej liczby mieszkańców c i przerywana dla nieparzystych c .

„Matematyczny model gry w mafię” – praca licencjacka na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, napisana pod opieką prof. Jacka Mięgisza, dostępna na stronie <http://migdal.wikidot.com/mafia>

Śliskie gry i zabawy

Piotr ZALEWSKI

Alchemia smarów

Smarowanie ma za zadanie zminimalizować trzy główne rodzaje sił tarcia: tarcie suche, płynne oraz elektrostatyczne. Wzajemny stosunek tych sił zależy od temperatury śniegu, jego rodzaju (mieszkańcy dalekiej północy wyróżniają kilkadziesiąt rodzajów śniegu, wśród których nie ma jednak najpowszechniej używanego w czasie ostatnich igrzysk: śniegu wytwarzanego przez armatki śnieżne) oraz wilgotności powietrza. Wbrew opinii, które nadal można jeszcze znaleźć w wielu opracowaniach, płynna woda nie pojawia się w wyniku topnienia lodu pod wpływem nacisku, tylko albo już jest w śniegu, albo powstaje w wyniku suchego tarcia. Śnieg przestaje być mokry (przy małej wilgotności powietrza) kilka stopni poniżej zera. Przy temperaturach rzędu 20 stopni poniżej zera świeży śnieg zaczyna przypominać piasek.

Podstawowymi smarami są węglowodory. Ich twardość zależy od długości łańcuchów węglowych. Im łańcuchy dłuższe, tym smary twardsze, a więc odpowiednie dla niższych temperatur. Obecnie niezbędnym dodatkiem są perfluorowęglowodory (znane jako fluorocarbony), czyli węglowodory, w których atomy wodoru są zastąpione atomami fluoru. Związki te są silnie hydrofobowe, co jest szczególnie ważne dla temperatur bliskich zera i/lub dużej wilgotności powietrza z padającym deszczem włącznie. Dodatkowo perfluorowęglowodory nie łączą się z zanieczyszczeniami, np. z pyłkami drzew iglastych rosnących obok tras.

Ostatnim aspektem jest użycie dodatków niwelujących kumulację ładunku elektrostatycznego. Używa się w tym celu głównie grafitu, ale nie zawsze jego stosowanie jest wskazane.

Profesjonalny zestaw smarów jednego producenta zawiera kilkadziesiąt składników.

Jak smaruje się narty?

W dużym uproszczeniu smarowanie nart polega na doborze odpowiedniej struktury ślizgu, wtopieniu odpowiednich warstw smaru bazowego (węglowodory), dodaniu warstw smaru właściwego (zazwyczaj węglowodory z dodatkiem perfluorowęglowodórów) oraz warstw wykończeniowych (np. proszki perfluorowęglowodorowe i/lub grafitowe). Każdą warstwę należy nałożyć, następnie zdjąć nadmiar i wyszczotkować lub wetrzeć w ślizg (w przypadku proszków i tzw. mydelek, które aplikuje się na zimno). W narciarstwie biegowym można pokusić się o nałożenie kilku warstw, które będą się ścierać w trakcie zawodów w miarę zmieniających się warunków.

Choć w tym roku śnieg, a raczej to, co z niego zostało, trzymał się na ulicach bardzo długo, to ślad już po nim zaginął. Idę jednak o zakład, że w którymś z kilkuset tysięcy polskich miast jakiś bałwan przetrwał przynajmniej do matury.

Wydarzeniem ostatniej zimy były igrzyska w Vancouver. Zimowe dyscypliny olimpijskie są bardzo proste. Wszystkie wykorzystują śliskość nie do końca zamrożonej wody. Prawda, że sposoby tego wykorzystywania są dość wymyślne. Nie wystarczy się poślizgnąć, żeby zdobyć medal. W większości przypadków ślizganie jest tylko wstępem do wykonania zapierającej dech w piersiach ewolucji (jeżeli komuś nie zapiera, to znaczy, że go już nic nie dziwi). Są jednak dyscypliny, w których chodzi o coś innego.

Jedną z nich jest nasz wschodzący sport narodowy, czyli biegi narciarskie, który, być może, znów zacznie być uprawiany masowo, dzięki Justynie Kowalczyk oraz zimom takim, jak w tym roku. Nadzieja nie jest jednak duża, bo do uprawiania narciarstwa (w dowolnej formie) oprócz śniegu potrzebna jest odrobina kultury. W Polsce jest zaledwie kilka tras, więc trzeba sobie ślad zakładać samemu. Zawsze znajdzie się jakiś bałwan, który w założony ślad wejdzie buciorami. . .

W dodatku, przyszłych adeptów narciarstwa biegowego zmroziła informacja, że do jego uprawiania potrzeba kilkudziesięciu par nart (tyle przynajmniej miała w Kanadzie Justyna Kowalczyk).

Dlaczego, w przypadku wyczynu na światowym poziomie, jest to tyle, ile trzeba, można przeczytać na marginesie następnej strony. Chodzi, przede wszystkim, o smarowanie nart. Już dawno minęły czasy, kiedy można było stosować radę Józefa Oppenheima: *O alchemji smarów wolimy nie wspominać. Dodamy tylko z własnego doświadczenia, że przy smarach jak w życiu, prostota najbardziej popłaca. (...) często nawet zasada: goła narta do gołego śniegu, okazywała się najlepszą.* (Szlaki narciarskie Tatr polskich, PZN 1936). Odnosiła się ona do nart w całości drewnianych. Współczesne narty biegowe, nawet jeżeli są w części zrobione z drewna, to powierzchnię ślizgową mają ze specjalnego tworzywa sztucznego, o odpowiednio dobranej teksturze, którą nasącza się na gorąco wieloma warstwami smaru o właściwie dobranych składnikach.

Czy (po przeczytaniu marginesów) słowa Oppenheima nie wydają się prorocze? Smarowanie nart, zwłaszcza nart biegowych, to prawdziwa alchemia. Ściganie się na nieodpowiednio posmarowanych nartach to wyścig z zaciągniętym hamulcem. Prawdopodobnie to właśnie było głównym powodem wycofania się Justyny w czasie jednego z biegów na poprzedniej olimpiadzie.

Drugą dyscypliną, dla której poślizg jest kluczowy, są zimowe szachy, czyli curling. Sport ten wzbudza duże emocje. Jedni uważają, że to w ogóle nie jest sport, a w każdym razie nie ma niczego bardziej nudnego, drudzy przeciwnie, uważają go za niezwykle pasjonujący i ubolewają, że oglądają go tylko raz na cztery lata. Rzeczywiście nie są to zawody gladiatorów, trudno sobie zrobić jakąś większą krzywdę, ale na zimowej olimpiadzie *morituri te salutant* jest już w tle wystarczającej liczby dyscyplin (wypadnięcie Petry Majdić, rywalki Justyny Kowalczyk, z zakrętu do potoku dowodzi, że jest wśród nich nawet narciarstwo biegowe).

Puszczanie granitowych „czajników” po lodzie ma w sobie majestatyczny urok. Może jest to spowodowane niezwykle precyzyjną połączoną z nieuchronnością konsekwencji wprawienia kolejnego kamienia w ruch. Wszystko odbywa się jakby w zwolnionym tempie. No, może oprócz zjawiskowego szczotkowania lodu przed sunącym głazem, które wydaje się odbywać w tempie przyspieszonym.

W grze chodzi o umieszczenie swoich kamieni jak najbliżej celu, przy czym dozwolone (pod pewnymi warunkami) jest ich wybijanie.

Drużyny wypuszczają kamienie na przemian. W pojedynczej rozgrywce przewagę ma drużyna zagrywająca jako ostatnia (kamień-młot). Kolejność zmienia się,

Dobór i przygotowanie wyczynowych nart biegowych

Dobór rodzaju nart na zawody zależy od typu biegu (technika klasyczna czy łyżwowa), może zależeć od dystansu lub profilu trasy oraz od warunków, w których bieg będzie się odbywał.

Jest to podwójnie istotne w biegach techniką klasyczną, w których nartę na odcinku pod wiązaniem smaruje się tak, żeby trzymała, czyli odwrotnie niż pozostałą część, która ma się jak najlepiej ślizgać.

Wybiera się identyczne pary nart, bo testuje się kilka rodzajów smarowania, a do długich dystansów potrzebne są jeszcze narty na zmianę w trakcie biegu. Można również testować różne rodzaje tekstury lub narty, które mają wbudowany antypoślizgowy fragment ślizgu.

Smar odbiciowy zawsze trochę hamuje, więc sztab zawodnika musi zdecydować, czy narta ma bardziej trzymać na podbiegach, czy bardziej jechać na zjazdach. Zdobywając złoto, Justyna Kowalczyk wybrała to drugie. Możliwe, że właśnie to przeważało.



Rozwiązanie zadania M 1284.

Niech X będzie takim podzbiorem zbioru $S = \{1, 2, \dots, 4n\}$, który nie zawiera trzech elementów $a < b < c$ spełniających podzielności dane w treści zadania. Wykażemy, że $|X| \leq 3n$, gdzie $|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X , skąd natychmiast wynika teza zadania.

Dla $m = 1, 3, 5, \dots, 4n - 1$ oznaczmy

$$S_m = \{2^k m : k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{oraz } 2^k m \leq 4n\}.$$

Wówczas zbiory S_1, S_2, \dots stanowią podział zbioru S na rozłączne podzbiory. Ponadto dla każdego z trzech elementów $a < b < c$ podzbioru S_m spełnione są podzielności $a | b$ oraz $b | c$. Stąd wynika, że $|X \cap S_m| \leq 2$.

Ponadto dla $m > 2n$ zbiór S_m ma tylko jeden element. Wobec tego

$$\begin{aligned} |X| &= \sum_m |X \cap S_m| = \\ &= \sum_{m < 2n} |X \cap S_m| + \sum_{m > 2n} |X \cap S_m| \leq \\ &\leq 2n + n = 3n. \end{aligned}$$

jeżeli drużyna z młotem zdobędzie punkty, które przyznawane są za liczbę kamieni znajdujących się w celu (domu) bliżej jego środka niż jakikolwiek kamień przeciwnika. Dlatego drużyny walczą o uzyskanie wyniku lepszego niż, dość trywialne, jeden, często decydując się na wynik zerowy, aby pozostać w uprzywilejowanej sytuacji w następnej rozgrywce (endzie).

Taktyka wykorzystuje krzywoliniowość trajektorii kamienia spowodowaną jego rotacją. Dlatego ustawia się tzw. strażników, których należy następnie wymijać (lub wybijać). Kamień obracający się zgodnie ze wskazówkami zegara zbacza w prawo i odwrotnie, rotujący przeciwnie – w lewo. Wydaje się, że nie ma w tym nic dziwnego, bo tak samo zachowuje się np. kopnięta piłka. A jednak. Wystarczy wykonać doświadczenie ze szklanką puszczoną po gładkim stole, żeby zobaczyć, że szklanka zachowuje się dokładnie odwrotnie, co zresztą łatwo wytłumaczyć. Sunąca, a więc jednocześnie hamująca, szklanka ma bardziej docięniętą krawędź nacierającą, więc tam tarcie jest większe. Dlatego krawędź przeciwna zbacza w tę stronę, w którą skierowana jest jej prędkość liniowa (której wypadkowa uwzględnia ruch obrotowy).

Widocznie dla kamienia używanego w curlingu jest odwrotnie. Tam, gdzie nacisk jest większy, tarcie musi być mniejsze (albo: tarcie jest odwrotnie proporcjonalne do prędkości liniowej). W literaturze można znaleźć wyjaśnienia tego efektu. Niestety, wyjaśnienia te są sprzeczne, a – choć wydaje się to dziwne – nikt chyba jeszcze nie zrobił wystarczająco przekonujących badań empirycznych, a przynajmniej ich nie opublikował. Dodatkowym czynnikiem, który trzeba uwzględnić, jest obecność napyłanych na lód (przed rozgrywką) kropelek wody.

Charakterystyczną cechą curlingu jest szcztokowanie lodu. Podnosząc w ten sposób nieznacznie jego temperaturę, można wydłużyć drogę kamienia, prostując jednocześnie tor jego ruchu (kamień zbacza bardziej wtedy, gdy zwalnia). Szcztokowanie pod koniec ruchu, gdy kamień już zdążył istotnie zmienić kierunek, pozwala na uzyskanie większego całkowitego zakrzywienia jego trajektorii.

Szkoda, że curling jest tak mało popularny w naszym kraju. Może to ma jakiś związek z liczbą sztucznych lodowisk? Może brak zawodników w konkurencjach alpejskich (nie oszukujemy się, to narciarstwo oraz hokej są kwintesencją sportów zimowych) również ma jakiś związek z infrastrukturą czy organizacją sportu? Na szczęście, gdy tylko znowu spadnie śnieg, będziemy mogli przynajmniej lepić bałwany.



Rozwiązanie zadania F 767.

Rozważmy lewą połowę nici. Siła ciężkości $mg/2$ skierowana jest pionowo w dół. Siła napięcia nici w najniższym punkcie skierowana jest poziomo. Zatem siła napięcia w punkcie zawieszenia nici jest równa

$$N = \sqrt{(mg/2)^2 + N_0^2}.$$

Siła ta jest skierowana pod kątem $\alpha = \arctg(mg/(2N_0))$ do pionu.



Rozwiązanie zadania F 768.

Z warunku równowagi obręczy C mamy

$$2mg = 3N \cos \alpha,$$

gdzie N to siła napięcia nici, α to kąt odchylenia nici od pionu. Z warunku równowagi obręczy B otrzymujemy

$$3N - 3N \cos \alpha - mg = 0,$$

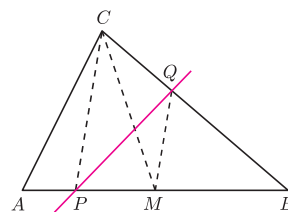
stąd $\cos \alpha = 2/3$, przy czym $\tg \alpha = r/H$, gdzie H jest szukaną odległością. Ostatecznie:

$$H = r \ctg \alpha = 2r\sqrt{5}/5.$$



Rozwiązanie zadania M 1282.

Najpierw znajdujemy środek M boku AB , a następnie prowadzimy przez punkt M prostą równoległą do prostej CP , która przecina obwód trójkąta ABC w punktach M i Q .



Wówczas prosta PQ dzieli trójkąt ABC na dwie figury o równych polach.

Dla dowodu przyjmijmy, bez straty ogólności, że punkt Q leży na boku BC . Ponieważ proste PC i MQ są równoległe, więc pola trójkątów PMQ oraz CMQ są równe. A zatem równe są także pola trójkątów BPQ i BCM . Z kolei pole trójkąta BCM jest równe połowie pola trójkąta ABC , co kończy dowód poprawności konstrukcji.

Poznajemy właściwości tarcia. Część III: Przyczyny i osobliwości tarcia

Stanisław BEDNAREK

W poprzednich dwóch kącikach eksperymentatora przedstawiony został szereg doświadczeń dających odpowiedź na pytanie, od czego zależy wartość siły tarcia oraz jak wyznaczyć jego współczynniki. Teraz spróbujemy krótko wyjaśnić, co jest przyczyną tarcia, oraz poznać jego niezwykle właściwości. Do dzisiejszych doświadczeń potrzebne nam będą dwie płytki szklane o rozmiarach kilku centymetrów, kij od szczotki lub stalowy pręt o długości 1–1,5 m i średnicy ok. 10 mm, dwie dość grube książki, najlepiej o zbliżonym formacie i liczbie kartek, gumka aptekarska, grzebień lub listewka, klamka w drzwiach oraz dostęp do załadowanej taczki ogrodowej.

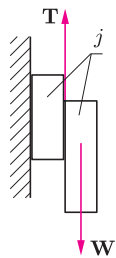
Tarcie bywa szkodliwe i powoduje niszczenie stykających się ze sobą ruchomych powierzchni. Z powodu tarcia pojawia się większość dziur w naszych ubraniach, zużywają się opony samochodowe, części maszyn i inne trące się elementy. Tarcie bywa również pożyteczne. Gdyby nie było tarcia, to m.in., zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki Newtona, trudno byłoby zatrzymać poruszające się ciało.

Dział nauki zajmujący się teoretycznymi i doświadczalnymi badaniami tarcia nazywa się *trybologią*. Jest to dziedzina interdyscyplinarna, korzystająca z osiągnięć fizyki, chemii oraz nauk technicznych. Badacze zajmujący się trybologią budują modele teoretyczne i weryfikują je eksperymentalnie w celu ilościowego wyjaśnienia prawidłowości rządzących tarcie w różnych sytuacjach. Mimo że początki trybologii sięgają okresu odrodzenia, to dziedzina ta, mająca cały czas ogromne znaczenie praktyczne, nadal się intensywnie rozwija.

Przekonaliśmy się już doświadczalnie, że w przypadku powierzchni chropowatych siła tarcia ma, przy tym samym nacisku, większą wartość niż w przypadku powierzchni gładkich. Można by więc przypuszczać, że jeżeli bardzo dokładnie wygładzimy stykające się powierzchnie ciała, to tarcie będzie minimalne lub zniknie zupełnie. Okazuje się jednak, że jest inaczej. W miarę wygładzania stykających się powierzchni tarcie rzeczywiście początkowo maleje, ale później wzrasta. Dlaczego tak się dzieje? Przyczyną tego są siły międzycząsteczkowe, nazywane w tym przypadku siłami przylegania lub inaczej adhezji, które zaczynają mieć istotne znaczenie przy bardzo bliskim kontakcie między powierzchniami ciała. Powodują one przyciąganie się tych ciał. Żeby pokonać to przyciąganie, potrzeba podczas ruchu dodatkowej siły, co przejawia się jako wzrost tarcia. Niekiedy jest to wzrost wielokrotny. Do dokładnych pomiarów warsztatowych używane są bardzo gładkie płytki stalowe, nazywane płytkami wzorcowymi lub płytkami Johanssona. Po ich złożeniu trudno jest przesunąć jedną płytkę względem drugiej, a siły przylegania między nimi są tak duże, że jedna płytka nie odpada od drugiej pod własnym ciężarem. Ważne jest przy tym, żeby powierzchnie płytek były suche i czyste.

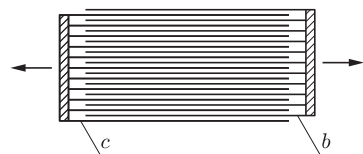
Zapewne nie będziemy mieli dostępu do płytek Johanssona, ale możemy spróbować sprawdzić te efekty przy użyciu dwóch płytek szklanych, składając je gładkimi powierzchniami i dociskając (rys. 1). Jako ciekawostkę warto też dodać, że w przypadku przesuwania po sobie dwóch bardzo gładkich i czystych płytek stalowych umieszczonych w próżni, współczynnik tarcia może dochodzić nawet do 100! W ten sposób wyjaśniliśmy przyczynę niewiarygodnie dużej wartości współczynnika tarcia wspomnianej w poprzednim odcinku. Siła tarcia między starannie wygładzonymi powierzchniami wzrośnie jeszcze bardziej, gdy posmarujemy je cieczą zwilżającą te powierzchnie – w przypadku płytek szklanych lub metalowych może to być woda. Pojawia się wówczas dodatkowe siły przylegania, zwiększające tarcie. Warto sprawdzić to doświadczalnie. Zamiast płytek szklanych można użyć łatwiej dostępnych gładkich płytek z tworzywa sztucznego, także zwilżonych wodą.

Jak duża może być wartość siły tarcia przy bardzo niewielkiej wartości siły nacisku, możemy przekonać się, używając dwóch książek. W tym celu książki umieszczamy tuż obok siebie na stole i wkładamy kartki jednej z nich pomiędzy kartki drugiej w sposób pokazany na rysunku 2. Jeżeli brak nam cierpliwości, to nie musimy przekładać pojedynczych kartek – możemy wkładać je, na przykład, po pięć. Po przełożeniu kartek każdą z książek chwytamy jedną ręką w pobliżu grzbietu i, ciągnąc je w przeciwną stronę wzdłuż tej samej prostej, próbujemy wysunąć jedną książkę z drugiej. Okazuje się to niemożliwe. Do wysunięcia książek możemy nawet zaangażować dwie osoby (fot. 1) – również sobie z tym nie poradzą. To efektowne doświadczenie udaje się także



Rys. 1. Siła tarcia T między dwiema gładkimi płytkami szklanymi j może być tak duża, że nie opadają one pod własnym ciężarem W .

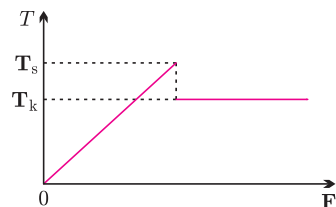
Więcej na temat trybologii można przeczytać w artykule Przemysława Borysa *Skąd się bierze tarcie?*, Foton 106/2009, s. 4–26.



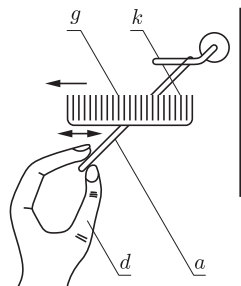
Rys. 2. Sposób przełożenia kartek dwóch książek w celu badania siły tarcia; b , c – książki.



Fot. 1. Siły tarcia między kartkami dwóch książek okazują się tak duże, iż dwie dorosłe osoby nie są w stanie wyciągnąć jednej książki z drugiej.



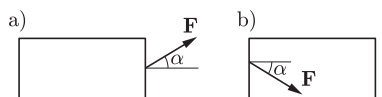
Rys. 3. Zależność wartości siły tarcia T od przyłożonej siły zewnętrznej F ; T_s – siła tarcia statycznego, T_k – siła tarcia kinetycznego.



Rys. 4. Prosty sposób zbadania wpływu różnic wartości siły tarcia statycznego i kinetycznego na wytwarzanie drgań relaksacyjnych i dźwięków; *k* – klamka, *g* – grzebień, *a* – gumka aptekarska, *d* – dłoń.



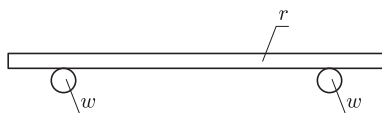
Fot. 2. Przykład wykonania doświadczenia przedstawionego schematycznie na rys. 4.



Rys. 5. Różne sposoby wprowadzenia w ruch ciężkiego ciała: a) przez ciągnięcie, b) przez pchanie; *F* – przyłożona siła, α – kąt nachylenia kierunku siły do poziomu.



Fot. 3. Wprawianie w ruch ciężkiej skrzyni do badania tarcia w Ogrodzie Doświadczeń im. Stanisława Lema w Krakowie.



Rys. 6. Sposób przeprowadzenia intrygującego doświadczenia, wykazującego wpływ siły nacisku na siłę tarcia; *r* – pręt, *w* – palec wskazujący.

z książkami o różnych formatach i grubościach. Warto także zbadać wpływ liczby przekładanych jednorazowo kartek (np. zwiększając ją do 10 czy 20) oraz ich formatu na wartość siły potrzebnej do wysunięcia książek. To doświadczenie pokazuje, jak duża może być wartość siły tarcia spowodowana przyleganiem oraz że decydujący wpływ na tę wartość ma powierzchnia styku ciał.

Doświadczenia przeprowadzone przed miesiącem, polegające na wprawianiu w ruch kartoników ciągniętych siłomierzem lub leżących na równi pochyłej, prowadzą do wniosku, że siła tarcia statycznego wzrasta od zera do pewnej wartości maksymalnej, charakterystycznej dla danych dwóch powierzchni. Wzrost ten zachodzi liniowo wraz ze zwiększeniem wartości siły zewnętrznej, która chce wprawić ciało w ruch (rys. 3). Po przekroczeniu tej maksymalnej wartości ciało zaczyna się poruszać, a tarcie przechodzi skokowo ze statycznego w słabsze, kinetyczne. Dlatego też podczas ruszania pojazdów, np. pociągu, odczuwamy niewielkie szarpnięcia. Podobna sytuacja ma miejsce tuż przed zatrzymaniem pojazdu.

Przystąpimy teraz do doświadczenia pozwalającego zbadać opisaną prawidłowość. Jeden koniec gumki aptekarskiej zaczepiamy za jakiś stały uchwyt. Najłatwiej wykorzystać do tego klamkę zamkniętych drzwi (rys. 4). Swobodny koniec gumki chwytnymi palcami i lekko ją naprężamy w pozycji poziomej. Do drugiej ręki bierzemy grzebień, naciskamy lekko jego grzbietem na gumkę i powoli przesuujemy w kierunku do niej prostopałym (fot. 2). Widzimy, że przy przesuwaniu grzebienia gumka lekko się rozciąga w kierunku jego ruchu, a następnie szybko wraca do prostoliniowego kształtu i zmiany te powtarzają się. Możemy również usłyszeć towarzyszący tym zmianom cichy dźwięk. Zamiast grzebienia można użyć listewki. Warto również sprawdzić, czy siła nacisku na gumkę, jej naprężenie i szybkość przesuwania grzebienia lub listewki mają wpływ na wielkość odchyżeń gumki i częstotliwość wydawanego dźwięku.

Zaobserwowany efekt wykorzystywany jest w czasie gry na instrumentach smyczkowych. Muzyk przesuwający smyczek po strunach powoduje ich niewielkie rozciągnięcie w wyniku tarcia smyczka o struny. Wartość siły potrzebnej do rozciągnięcia struny jest wprost proporcjonalna do jej odkształcenia i może wzrastać prawie liniowo, aż do zerwania struny. Siła tarcia może wzrosnąć tylko do maksymalnej wartości, która jednak w pewnym momencie okazuje się za małą do dalszego rozciągania struny. Wtedy struna wraca do położenia równowagi, wykonując przy tym pewną liczbę drgań, które słyszymy jako dźwięki. Dla zwiększenia tarcia i poprawy brzmienia dźwięków smyczki naciera się kalafonią.

Z życia codziennego wiemy, że w celu przesunięcia ciała możemy je pchać lub ciągnąć. Dysponujemy przy tym ograniczoną siłą i zwykle przykładamy ją pod pewnym kątem do poziomu (rys. 5). Między przesuwanym ciałem a podłożem występuje tarcie. W takiej sytuacji spróbujmy przewidzieć, którym sposobem – pchaniem czy ciągnięciem – łatwiej będzie nam wprawić w ruch ciężkie ciało? Pouczające doświadczenie, polegające na przesuwananiu ciężkiej skrzyni przy dużym tarcu drewnianego dna skrzyni i granitowej kostki, można wykonać w Ogrodzie Doświadczeń im. Stanisława Lema w Krakowie (fot. 3), gdzie zwiedzający mają możliwość przeprowadzić kilkadziesiąt interesujących doświadczeń prawie ze wszystkich działów fizyki (www.ogroddoswiadczen.pl). Jeżeli ktoś na razie nie wybiera się do Krakowa, to dobrym sprawdzianem naszych przewidywań, czy skuteczniejsze jest ciągnięcie czy pchanie, będzie użycie załadowanej taczki ogrodowej.

Na zakończenie warto przeprowadzić jeszcze jedno intrygujące doświadczenie, w którym tarcie odgrywa dyskretną, ale decydującą rolę. Weźmy kij od szczotki lub inny pręt o długości ok. 1–1,5 m. Ważne, żeby pręt był prosty i dość ciężki. Wyciągnijmy poziomo przed siebie lekko rozchylone obie ręce i wyprostujmy palce wskazujące (rys. 6). Palce te powinny być odległe o ok. 0,8–1 m. Pozostałe palce należy zgiąć do wnętrza dłoni. Skorzystajmy z pomocy innej osoby, która położy nam pręt na palcach wskazujących tak, żeby jego końce wystawały tyle samo na boki. Przesuńmy teraz powoli jedną rękę o kilka centymetrów w kierunku drugiej. Co zauważamy? Jak zachował się pręt? Przesuńmy następnie drugą rękę. Co w tym przypadku dzieje się z prętem? Jakie położenie zajmie pręt po kilkakrotnym wykonaniu opisanych czynności? Dlaczego tak się dzieje? Żeby ułatwić wyjaśnienie tych efektów, podpowiemy, że trzeba tu zwrócić uwagę na zależność siły tarcia od siły nacisku. Należy też zastanowić się, jak zmieniają się siły nacisku pręta na palce podczas zbliżania rąk. W celu określenia sił nacisku na palce pręt można traktować jako dźwignię jednostronną.

Za miesiąc również zajmijmy się tarciem, ale będzie to tarcie podczas ruchu w płynach, czyli w cieczech i gazach.

Czy można biegać po wodzie?

Jedną z ulubionych zabaw dzieci jest bieganie po kałużach. Rozbryzgiwanie wody i błota w ciepły letni dzień może sprawić niemało frajdy [1]. Polecam jako wspaniały sposób na odreagowanie napięć. Niestety, nie nadaje się on dla tych, którzy nadmiernie dbają o swoją prezencję.

W bieganiu chodzi jednak o wykonanie przynajmniej kilku kroków po wodzie przed wpadnięciem do niej. Na wiosnę dużą popularnością cieszył się filmik [2] demonstrujący właśnie taki bieg po wodzie. Adepti tej sztuki nazwali ją *liquid mountaineering*. Jednocześnie rozgorzała dyskusja, czy przypadkiem nie jest to żart albo nawet zwykłe oszustwo, a w dodatku kryptoreklama firmy produkującej buty używane przez praktykujących tę formę spędzania wolnego czasu.

Przed lekturą dalszej części artykułu proponuję obejrzenie materiału [2].

Na filmie wygląda to naprawdę niezłe. Niestety, to, co na filmie widzimy, jest równie prawdziwe jak pokaz iluzjonisty. W taki sposób na pewno nie da się biegać po wodzie, co postaram się wykazać.

W celu udzielenia odpowiedzi powołałyśmy eksperta równie magicznego jak sam problem. Bedzie nim bazyliszek zwyczajny *Basiliscus basiliscus*. Jaszczurka ta, jak większość innych bazyliszków, występuje w Ameryce Południowej i jest największym stworzeniem, o którym wiadomo, że biegać po wodzie potrafi [3]. Robi to głównie wtedy, gdy zostanie spłoszona.

Bieg po wodzie różni się od biegu po lądzie między innymi tym, że środek masy zwierzęcia znajduje się praktycznie cały czas na tej samej wysokości. W takim razie przebieganie nogami musi wytwarzać prawie stałą siłę równoważącą grawitację. Jest ona sumą siły reakcji F_R na rozpędzanie wody przez na przemian wciskane w wodę nogi jaszczurki, siły parcia F_P wody na stopę oraz siły F_{NP} związanej z napięciem powierzchniowym odkształconej powierzchni wody. Bilans ten zakłada, że jaszczurka wyciąga nogę, zanim zamknie się bąbel powietrza tworzony w fazie wciskania kończyny w wodę. Jest tak w przypadku biegu bazyliszka. Gdyby bąbel się zamknął, to siły F_P i F_{NP} zostałyby zastąpione siłą oporu o przeciwnym znaku, związaną z koniecznością wyciągnięcia uwiecznionej w wodzie nogi.

Siła F_{NP} jest proporcjonalna do obwodu stopy, czyli rozmiaru zwierzęcia w pierwszej potęgze, więc jej wkład do kompensowania ciężaru (proporcjonalnego do sześcienu rozmiaru) pominiemy (jest on zauważalny tylko dla najmniejszych bazyliszatek [4]).

Siła parcia F_P jest proporcjonalna do objętości bąbla, a jej znaczenie w bilansie sił zależy od efektywnej powierzchni stopy. Nawet dla obdarzonego pod tym względem szczerze przez naturę bazyliszka wkład jest niewielki. Dlatego najistotniejsza jest siła F_R .

Średnią siłę reakcji można oszacować, wykorzystując równość między zmianą pędu (masy wody) a popędem siły:

$$F_R \cdot \Delta t = \Delta p.$$

Z analizy wymiarowej wynika, że zmiana pędu jest proporcjonalna do iloczynu masy bąbla ρV i średniej prędkości nogi u , natomiast czas jest stosunkiem głębokości zanurzenia nogi (w przypadku bazyliszka maksymalnie jest ona równa długości nogi, proporcjonalnej do rozmiaru zwierzęcia r) do prędkości u . Ostatecznie uzyskujemy

$$F_R \propto \rho V \cdot u \cdot \frac{u}{r} \propto \rho \cdot r^2 \cdot u^2.$$

Prędkość u okazuje się słabo zależeć od rozmiaru zwierzęcia [4]. Powoduje to, że o ile młode, ważące kilka gramów, osobniki mogą generować siłę przekraczającą ich ciężar ponaddwukrotnie, to największe jaszczurki (o masie około 200 g) generują siłę ledwie pozwalającą na bieganie po wodzie [4]. Z tego względu młode mogą uciekać kilkanaście i więcej metrów, a najstarszym (jaszczurki rosną całe życie) udaje się przebiec zaledwie kilka metrów [4].

Zajmijmy się teraz ludźmi. Żeby móc biegać po wodzie, trzeba by mieć stopy w proporcji do wzrostu jak bazyliszek, zwinność i długość nóg jak bazyliszek oraz przebiegać nimi tak szybko, żeby kwadrat prędkości był tyle razy większy, ile razy jesteśmy od bazyliszka więksi, przy czym ważna jest tylko średnia pionowej składowej prędkości zanurzonej nogi.

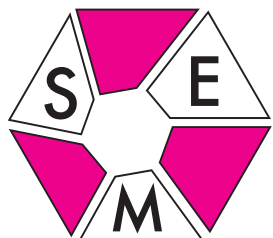
Na filmie [2] objętość bąbla jest zaledwie rzędu objętości buta, nacisk na wodę trwa nie więcej niż jedną piątą czasu, więc prędkość pionowa powinna być rzędu prędkości dźwięku!

W komentarzu do tego filmu sugeruje się, że istotnym czynnikiem jest prędkość pozioma. Niestety, nie jest to prawda, bo nie jest to sytuacja, w której zewnętrzna siła (motorówka, wiatr) powoduje ruch, a siła wyporu dynamicznego (taka jak przy jeździe na nartach wodnych) równoważy siłę ciężkości.

Krótko mówiąc, w taki sposób biegać po wodzie się nie da. A co by się stało, gdyby założyć płetwy? Nic nie stoi na przeszkodzie, żeby spróbować. Jeden krok na pewno da się zrobić. Gdyby się nie udało, to trzeba będzie poczekać do zimy. Po dobrze zamarzniętej wodzie na pewno da się przejść, a przy odrobinie wprawy pobiegać też można.

Piotr ZALEWSKI

- [1] *Singin' in the Rain*, Metro-Goldwyn-Mayer, 1952.
- [2] *Men Running on Water – Liquid Mountaineering*, <http://youtube.com/watch?v=3Y0BsnTa5RA>
- [3] *Water walker*, National Geographic <http://www.youtube.com/watch?v=45yabrnrYXk>
- [4] J.W. Glasheen i T.A. McMahon, *Size-dependence of water-running ability in basilisk lizards (*Basiliscus basiliscus*)*, *The Journal of Experimental Biology* **199**(1996)2611–2618.



20 i 21 maja finaliści LXI Olimpiady Matematycznej zmagali się z ostatnimi sześcioma zadaniami tych zawodów. W sobotę, 24 maja zostały ogłoszone wyniki. Bezapelacyjnym zwycięzcą został Damian Orlef z Zabrze, który rozwiązał wszystkie zadania, uzyskując 36 punktów na 36 możliwych. Następni dwaj zawodnicy rozwiązyli po cztery zadania bezbłędnie, a czterech następnych też po cztery, ale tracąc po jednym punkcie. Finał Olimpiady okazał się więc trudny.

Z zadaniami finału oraz szkicami ich rozwiązań można zapoznać się na stronie olimpiady pod adresem: www.om.edu.pl

Zwykle w trakcie zawodów lub w trakcie sprawdzania prac znajdowane są bardziej pomysłowe lub prostsze rozwiązania niektórych zadań niż te zaproponowane przez organizatorów. Tak było i tym razem. Niżej przedstawimy inne niż podane w szkicach rozwiązania dwóch zadań: dość trudnego – trzeciego i najtrudniejszego – szóstego. Z 12 osób, które rozwiązały zadanie trzecie, tylko pięć zrobiło to bezbłędnie,

w pozostałych sześciu pracach nie rozważono wszystkich możliwych położań różnych punktów, czyli przesadnie sugerowano się rysunkiem, który mógł wyglądać nieco inaczej, a w jednej powołano się na niestandardowe, prawdziwe twierdzenie, ale niewystępujące w znanych książkach.

Zadanie szóste rozwiązał jedynie zwycięzca.

Zadanie 3. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt DAB jest ostry. Punkty A, P, B, D leżą w tej kolejności na jednym okręgu. Proste AP i CD przecinają się w punkcie Q . Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CPQ . Wykazać, że jeśli $D \neq O$, to proste AD i DO są prostopadłe.

Oto rozwiązanie bez rozważania przypadków, które podał Michał Kieza, upraszczając pracę Łukasza Rajkowskiego, za której redakcję autor otrzymał nagrodę im. Andrzeja Mąkowskiego.

Ponieważ $DC \parallel AB$, więc kąt QDA jest równy kątowi DAB , a ten kątowi DPB opartemu na tym samym łuku. Kąty QAD i PBD są równe, bo każdy z nich dopełnia kąt DAP do 180° . Wobec tego trójkąty QAD i DBP są podobne. Stąd $\frac{DB}{QA} = \frac{PB}{DA} = \frac{PD}{QD} =: \lambda$. Z twierdzenia Ptolemeusza zastosowanego do czworokąta $APBD$ wynika, że $AP \cdot BD + BP \cdot AD = DP \cdot AB$.

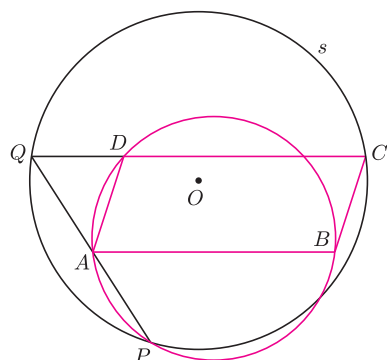
Stąd $AP \cdot \lambda QA + \lambda AD \cdot AD = \lambda QD \cdot AB$, zatem $AP \cdot QA + AD \cdot AD = QD \cdot AB = QD \cdot CD$ (przeciwległe boki równoległoboku są równe). Niech R będzie promieniem okręgu s opisanego na trójkącie CPQ . Iloczyn $AP \cdot QA$ to potęga punktu A względem okręgu s , więc $AP \cdot QA = R^2 - AO^2$. Analogicznie $QD \cdot DC = R^2 - DO^2$, więc $R^2 - AO^2 + AD^2 = R^2 - DO^2$, zatem $AD^2 + DO^2 = AO^2$. Z twierdzenia Pitagorasa wnioskujemy, że kąt ADO jest prosty, a to należało wykazać.

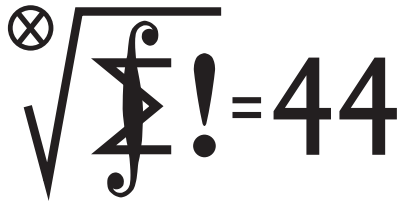
Zadanie 6. Dana jest liczba rzeczywista $C > 1$. Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, \dots , w którym $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$, spełnia warunki $a_{mn} = a_m a_n$ oraz $a_{m+n} \leq C(a_m + a_n)$ dla $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Dowieść, że $a_n = n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Mamy $a_{2n} = a_2 a_n = 2a_n$. Stąd indukcyjnie otrzymujemy $a_{2^n} = 2^n$. Dalej $a_3^2 = a_9 \leq C(a_1 + a_8) = 9C$, więc $a_3 \leq 3\sqrt{C}$. Dla dowolnych m, n mamy $a_{m+n}^3 = a_{(m+n)^3} = a_{m^3+3m^2n+3mn^2+n^3} \leq C(a_{m^3+3m^2n} + a_{3mn^2+n^3}) \leq C(C(a_{m^3} + a_{3m^2n}) + C(a_{3mn^2} + a_{n^3})) = C^2(a_m^3 + a_3 a_m^2 a_n + a_3 a_m a_n^2 + a_n^3) \leq C^2(a_m^3 + 3\sqrt{C} a_m^2 a_n + 3\sqrt{C} a_m a_n^2 + a_n^3) < C^{5/2}(a_m^3 + 3a_m^2 a_n + 3a_m a_n^2 + a_n^3) = C^{5/2}(a_m + a_n)^3$ — ostatnia nierówność wynika z tego, że $C > 1$. Wykazaliśmy, że jeśli dla wszystkich par liczb naturalnych m, n zachodzi nierówność $a_{m+n} \leq C(a_m + a_n)$, to zachodzi też nierówność $a_{m+n} \leq C^{5/6}(a_m + a_n)$. Proste rozumowanie indukcyjne prowadzi do wniosku, że dla wszystkich trójek liczb naturalnych k, m, n zachodzi nierówność $a_{m+n} \leq C^{(5/6)^k}(a_m + a_n)$. Wobec tego $a_{m+n} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} C^{(5/6)^k}(a_m + a_n) = C^0(a_m + a_n) = a_m + a_n$. Stąd $a_{n+1} \leq a_n + a_1 = a_n + 1$, więc $a_n \leq n$ dla każdego n . Zatem $2^n = a_{2^n} \leq a_n + a_{2^n-n} \leq n + (2^n - n) = 2^n$, a więc $a_n + a_{2^n-n} = 2^n$ dla każdego n . Ponieważ mamy $a_n \leq n$ dla każdego n , a więc także $a_{2^n-n} \leq 2^n - n$, wynika stąd, że $a_n = n$.

W rozwiązaniu tym nieco prościej niż w firmowym zmniejszana była stała C .

Użyliśmy też pojęcia granicy ciągu nieobecnego w programach szkolnych, które w rozwiązaniu firmowym **jawnie** używane nie było.





Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
589 ($WT = 2,29$) i 590 ($WT = 2,66$)
z numeru 11/2009

Tomasz Wietecha	Tarnów	43,75
Witold Bednarek	Łódź	43,02
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,10
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,58

Redaguje **Marcin E. KUCZMA**

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2010

Przypominamy treść zadań:

597. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

598. Niech $M = \{1, 2, \dots, m^2\}$ (m jest ustaloną liczbą naturalną).

- (a) Ile jest w zbiorze M podzbiorów niezawierających pary liczb, których różnica dzieli się przez m ?
(b) Ile jest w zbiorze M podzbiorów niezawierających pary liczb, których różnica jest równa m ?

597. Niech f będzie funkcją spełniającą zadane równanie. Biorąc $x = 0$, dostajemy zależność

$$f(f(y)) = y + c^2,$$

gdzie $c = f(0)$. Zatem

$$f(f(-c^2)) = 0.$$

Podstawiając w równaniu $x = f(-c^2)$, stwierdzamy, że

$$f(f(y)) = y$$

dla wszystkich $y \in \mathbb{R}$.

Teraz zastępujemy w równaniu x przez $f(x)$:

$$f(f(x)f(f(x)) + f(y)) = f(f(x))^2 + y \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Skoro zaś $f(f(x)) = x$, mamy równanie

$$f(xf(x) + f(y)) = x^2 + y \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Odejmujemy je stronami od równania wyjściowego i otrzymujemy

$$(1) \quad f(x)^2 = x^2 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Oznaczmy $b = f(1)$; oczywiście $b = \pm 1$. Podstawiając w wyjściowym równaniu $x = 1$, uzyskujemy dla wszystkich $y \in \mathbb{R}$ związek

$$f(b + f(y)) = 1 + y,$$

który po podniesieniu stronami do kwadratu i uwzględnieniu wzoru (1) daje równość

$$(b + f(y))^2 = (1 + y)^2,$$

czyli

$$1 + 2bf(y) + f(y)^2 = 1 + 2y + y^2.$$

Ponownie korzystając z (1), dostajemy równość

$bf(y) = y$; stała b jest równa 1 lub -1 . Ostatecznie więc

$$f(y) = y \quad \text{dla } y \in \mathbb{R}$$

lub

$$f(y) = -y \quad \text{dla } y \in \mathbb{R}.$$

Każda z tych dwóch funkcji spełnia badane równanie.

598. (a) Liczby od 1 do m^2 ustawiamy w tabelę $m \times m$ (kolejno wierszami):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ m+1 & m+2 & \dots & 2m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m^2 - m + 1 & m^2 - m + 2 & \dots & m^2 \end{bmatrix}$$

Podzbiór zbioru M spełnia żądany warunek (nie zawiera pary liczb o różnicy podzielnej przez m) wtedy i tylko wtedy, gdy jego przecięcie z każdą kolumną tej macierzy jest puste lub jednoelementowe. To daje $m + 1$ możliwości dla każdej kolumny i w efekcie wynik: $(m + 1)^m$.

(b) Podzbiór zbioru M spełnia wymagany w tym przypadku warunek (nie zawiera pary liczb różniących się dokładnie o m), gdy jego przecięcie z każdą kolumną wyznacza jej podciąg bez pary wyrazów kolejnych. Wiadomo (patrz niżej), że liczba takich podciągów wynosi F_{m+2} , gdzie (F_k) jest ciągiem Fibonacciego:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_k = F_{k-1} + F_{k-2};$$

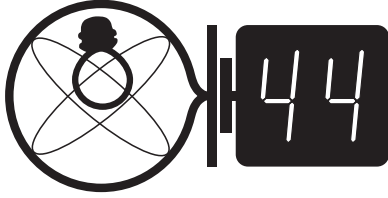
wzór jawny

$$F_k = \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k \cdot \sqrt{5}}.$$

Stąd wynik w przypadku (b): F_{m+2}^m .

[Dla kompletności pokażemy uzasadnienie faktu, na który powołaliśmy się. Niech E_m będzie liczbą podciągów ciągu $(1, \dots, m)$ bez pary wyrazów kolejnych. Dla $m \geq 2$ każdy taki podciąg albo jest jednym z E_{m-1} „dobrych” podciągów ciągu $(1, \dots, m-1)$, albo powstaje przez dołączenie pojedynczego wyrazu m do jednego z E_{m-2} „dobrych” podciągów ciągu $(1, \dots, m-2)$. Stąd rekurencja $E_m = E_{m-1} + E_{m-2}$, która wraz z wartościami początkowymi $E_0 = 1 = F_2$, $E_1 = 2 = F_3$ daje tezę $E_m = F_{m+2}$.]

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2010



Przypominamy treść zadań:

494. Elektrony w metalu można – jak wiadomo – uważać za cząstki swobodne. Załóżmy, że w kawałku metalu poruszającym się z przyspieszeniem elektrony osiągają to samo przyspieszenie wskutek działania pola elektrycznego wytworzonego przez odpowiednie ładunki powierzchniowe. Obliczyć moc promieniowania kwadratowej płytki metalowej o boku $l = 5$ cm i grubości $d = 0,5$ cm, drgającej z amplitudą $A = 1$ cm i częstotliwością $f = 1$ kHz wzdłuż osi prostopadłej do płytki.

Wskazówka: Zgodnie z prawami elektrodynamiki w tzw. przybliżeniu dipolowym moc promieniowania dipola elektrycznego o momencie p jest równa

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{d^2 p}{dt^2} \right)^2.$$

Momentem dipolowym układu dwóch ładunków $+q$ i $-q$ odległych o d nazywamy iloczyn qd .

495. Dwie półproste tworzą kąt 2α , którego dwusieczna jest pionowa. Wzdłuż tych półprostych mogą ślizgać się bez tarcia końce jednorodnego pręta o długości l . W którym przypadku poziome położenie pręta jest położeniem równowagi trwałej – gdy wierzchołek kąta jest na górze, czy gdy jest na dole? Dla przypadku równowagi trwałej podać wzór na częstotliwość małych drgań pręta wokół tego położenia.

494. Natężenie pola, które nadaje elektronom przyspieszenie a , wynosi

$$E = ma/e,$$

gdzie m – masa elektronu, e – ładunek elementarny. Na ściankach płytki powstają więc ładunki

$$\pm q = \pm \epsilon_0 l^2 E = \pm \epsilon_0 l^2 ma/e.$$

Moment dipolowy płytki wynosi

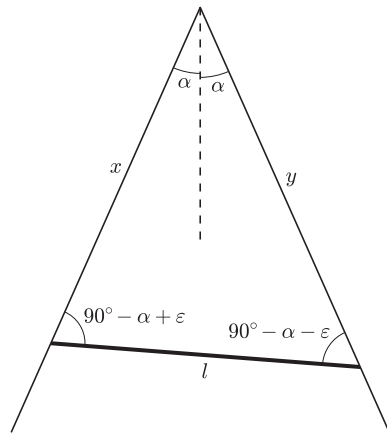
$$p = qd = \epsilon_0 l^2 dma/e,$$

a przyspieszenie jest opisane wzorem $a = \omega^2 A \sin \omega t$, gdzie $\omega = 2\pi f$. Wyrażenia te należy podstawić do podanego wzoru na moc i uśrednić względem czasu.

Ponieważ średnią wartością $\sin^2 \omega t$ jest $1/2$, więc

$$\bar{P} = \frac{\epsilon_0}{12\pi c^3} \left(\frac{l^2 d m \omega^4 A}{e} \right)^2 = 1,1 \cdot 10^{-44} \text{ W}.$$

Jak można było oczekiwać, jest to wielkość o wiele rzędów wielkości za mała, aby efekt dało się zaobserwować.



495. Przyjmijmy, że wierzchołek kąta jest na górze i oznaczmy kąt odchylenia pręta od poziomu jako ϵ (rysunek). Z twierdzenia sinusów możemy wyznaczyć odległości końców pręta od wierzchołka:

$$x = \frac{l}{\sin 2\alpha} \cos(\alpha + \epsilon),$$

$$y = \frac{l}{\sin 2\alpha} \cos(\alpha - \epsilon).$$

Zmiana tych wielkości w porównaniu z położeniem równowagi jest równa

$$\Delta x = x_0 - x = \frac{2l}{\sin 2\alpha} \sin \frac{\epsilon}{2} \sin \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2} \right),$$

$$\Delta y = y - y_0 = \frac{2l}{\sin 2\alpha} \sin \frac{\epsilon}{2} \sin \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2} \right).$$

Środek pręta przesunie się w pionie o

$$\Delta h = \frac{1}{2} (\Delta x - \Delta y) \cos \alpha = l \operatorname{ctg} \alpha \sin^2 \frac{\epsilon}{2}$$

ze zwrotem w stronę wierzchołka, zatem ustawienie wierzchołkiem do góry odpowiada równowadze trwałej.

Dla małych ϵ mamy

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg \Delta h = mgl \frac{\epsilon^2}{4} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Energia kinetyczna jest – z dokładnością do wyrazów proporcjonalnych do ϵ^2 – sumą energii ruchu środka masy wzdłuż osi poziomej i energii kinetycznej ruchu obrotowego wokół środka masy

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_{\text{poz}}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\epsilon}^2,$$

gdzie I jest momentem bezwładności. Obliczamy przesunięcie poziome środka masy

$$\frac{1}{2} (y - x) \sin \alpha = \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \alpha \sin \epsilon,$$

czyli w przybliżeniu liniowym

$$v_{\text{poz}} = \frac{1}{2} l \dot{\epsilon} \operatorname{tg} \alpha,$$

i po podstawieniu $I = \frac{1}{12} m l^2$ dochodzimy do

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{8} m l^2 \left(\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{3} \right) \dot{\epsilon}^2.$$

Z warunku $E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const}$ wynika szukany wzór na częstotliwość

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g \operatorname{ctg} \alpha}{l(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1/3)}}.$$

Patrz w niebo: Najmasywniejsza gwiazda

Masa gwiazdy (i skład chemiczny) określa cechy gwiazdy i jej całą ewolucję. Tymczasem jest to zarazem parametr najtrudniejszy do wyznaczenia z obserwacji. Nie ma problemu, gdy gwiazda jest składnikiem układu podwójnego, gdyż obserwując ruch takiej pary gwiazd, ich sumaryczną masę można wyznaczyć na podstawie uogólnionego trzeciego prawa Keplera. Mianowicie mamy

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M + m)}{4\pi^2},$$

gdzie a to średnia odległość gwiazd, T – okres pełnego obiegu, G – stała grawitacji, a M i m to ich masy.

Ale z gwiazdami pojedynczymi jest trudna sprawa. Obecnie wiemy już, jak fotometryczne cechy gwiazd (jasność absolutna, barwa i inne cechy widmowe) skorelowane są z ich masami, dlatego też masy gwiazd można oceniać (często nie ma innej możliwości) na podstawie widm – niestety, na ogół ze sporymi błędami. Dlatego informacje o rekordowych masach należy przyjmować z rezerwą. Bowiem zawsze może się zdarzyć, że rekordową masę wkrótce inny badacz oceni inaczej.

Teoria budowy gwiazd przewiduje, że najmniejsza masa gwiazdy to taka, poniżej której nie będzie ona w stanie zainicjować w jądrze reakcji termojądrowych (jest to 0,085 masy Słońca), a największa to taka,

powyżej której jej własne promieniowanie rozproszy jej warstwy zewnętrzne (ta graniczna masa nazywana jest granicą Eddingtona i wynosi w przybliżeniu 150 mas Słońca). Różne gwiazdy były w historii uznawane za najmasywniejsze. Była nią m.in. eta Carinae o masie może właśnie 150 Słońc lub Gwiazda Pistolet o masie zbliżonej, a obie uznane za kandydatki na supernowe. W roku 2004 znaleziono inną rekordzistkę, o numerze katalogowym LBV 1806-20, położoną w północnej części Strzelca. Znajduje się ona w odległości niemal 14 kpc. Jej masę oceniono również na zbliżoną do granicy Eddingtona, temperaturę na ponad 30 000 K, średnicę na 200 średnic Słońca, a jasność na może nawet 5 mln jasności Słońca. W świetle widzialnym słabo ją widać wskutek obecności w jej kierunku dużej ilości materii międzygwiazdowej. Dopiero w podczerwieni widać ją i całą „gromadkę” towarzyszących jej supermasywnych gwiazd, która w przeszłości była prawdopodobnie uważana za jeden supermasywny obiekt. Jak widać, „bycie najmasywniejszą gwiazdą” zależy nie tylko od liczbowej wartości wyznaczonej masy, lecz i od możliwości zaobserwowania jej jako konkretnego pojedynczego obiektu. A to zależy od sprawności obserwacyjnej badacza i jego sprzętu – przyszłość więc może rychło przynieść kolejne niespodzianki.

Tomasz KWAST



Lipiec

Droga Mleczna w lipcowe wieczory ciągnie się z północy na południe, nie przez zenit, lecz po jego wschodniej stronie. Biegun Galaktyki jest już znacznie ku zachodowi, a w pobliżu zenitu widzimy wieczorem gwiazdozbiór Herkulesa. Nie ma w nim jasnych galaktyk, tak więc możemy jedynie przyjąć na wiarę, że jest tam gromada galaktyk o wyjątkowej gęstości. W pobliżu jej centrum na kwadratową minutę łuku wypada tam w przybliżeniu 70 galaktyk. Łatwo więc domyśleć się, że musi ona być gromadą bardzo odległą – rzeczywistość jej odległość oceniono na około 100 Mpc. W tej skali niemal o krok, bo w odległości 6,3 kpc, leży gromada kulista gwiazd M13, bez trudności widoczna gołym okiem najjaśniejsza z gromad kulistych na północnej półkuli nieba. Jej jasność to 5,7 mag, średnica 45 pc; liczy ona w przybliżeniu pół miliona gwiazd. Może warto przypomnieć, że w Herkulesie leży tzw. apeks Słońca, czyli punkt, ku któremu biegnie Słońce (oczywiście ze wszystkimi planetami) w ruchu względem okolicznych gwiazd. Prędkość tego ruchu wynosi 20 km/s.

Merkury na początku sierpnia znajdzie się najdalej od Słońca, więc już teraz w lipcu można próbować prześledzić 27 VII jego zbliżenie na 0,3 stopnia do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Wenus i Mars są również we Lwie i zachodzą dość szybko po zachodzie Słońca. Wenus także zbliży się do Regulusa 10 VII na około stopnia. Jowisz jest w Rybach i przed północą wschodzi. Saturn jest w Pannie i widać go krótko na zachodzie po zachodzie Słońca. Nów Księżyca wypada 11 VII, a pełnia 26 VII. Podczas nowiu nastąpi całkowite zaćmienie Słońca, ale widoczne na Pacyfiku (m.in. na Wyspie Wielkanocnej) i na południowym skraju Ameryki Południowej. Żadnych zakryć jasnych gwiazd nie będzie. Z przewidywalnych rojów meteorów można około 28 VII spodziewać się dość obfitego roju Delta Akwarydów, a 29 VII bardzo słabego roju Piscydów.

T. K.



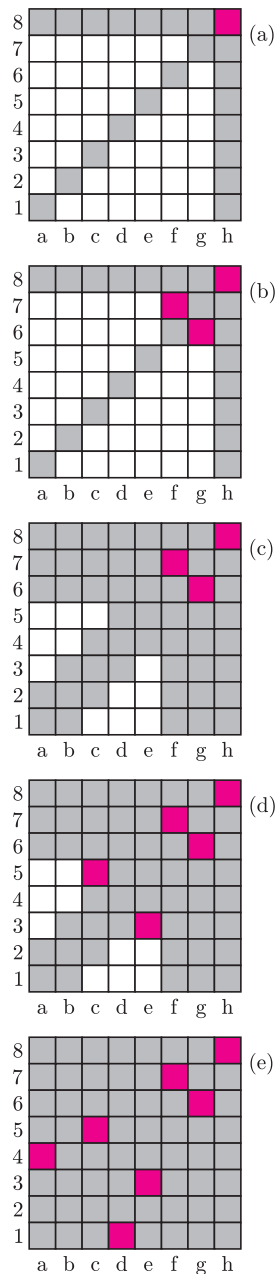
Rozwiązanie zadania M 1283.

Zauważmy, że liczba

$$\begin{aligned} 101010101010101 &= \\ &= 1 + b^2 + b^4 + \dots + b^{16} = \\ &= (1 + b^2 + b^4)(1 + b^6 + b^{12}) \end{aligned}$$

jest złożona.

O grach była także mowa w *deltoidzie* w październiku 2009 r.



Rys. 1

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Rys. 2

Strategia wygrywająca w grze to taki „przepis” na nią, który pozwala zawsze wygrać, niezależnie od ruchów przeciwnika. Wiadomo, że w wielu grach któryś z graczy (rozpoczynający lub drugi) ma taką strategię, często nawet można ją konkretnie wskazać. W niektórych przypadkach jest ona właściwie w zasięgu ręki, trzeba tylko ją dostrzec, co nie zawsze jest łatwe.

1. Na polu c1 szachownicy 8×8 stoi królowa. Gracze na przemian przesuwać ją o dowolną liczbę pól w prawo, do góry albo po przekątnej w prawo i do góry. Wygrywa ten, kto postawi królową na polu h8. Który gracz ma strategię wygrywającą i jaką?

2. Na stole stoją dwa talerze owoców: na jednym jest 5 jabłek, na drugim 7 pomarańczy. Pojedynczy ruch w grze polega na zabraniu dowolnej liczby owoców z jednego z talerzy lub po tyle samo owoców z każdego z talerzy. Gracze wykonują ruchy na przemian; wygrywa ten, kto zabierze ostatni owoc ze stołu. Który gracz ma strategię wygrywającą i jaką?

3. Liczby 1, 2, ..., 9 napisano na osobnych kartkach. Gracze na przemian zabierają sobie po jednej z nich. Wygrywa ten, kto jako pierwszy skompletuje trzy kartki o sumie liczb równej 15. Gracz rozpoczynający wybrał kartkę z „2”. Jak powinien postąpić drugi gracz?

Rozwiązania

R1. Pokolorujmy pola szachownicy, zaznaczając tzw. *pozycje wygrywające* kolorem, a *przegrywające* na szaro. Pole h8 jest wygrywające – gracz, który na nim stanie, wygrywa. Wobec tego wszystkie pozostałe pola w górnym wierszu, w prawej kolumnie i na przekątnej łączącej a1 z h8 są przegrywające (rys. 1a) – jeśli gracz na nich stanie, przeciwnik może przejść na h8 i wygrać. Stąd pola g6 i f7 są wygrywające (rys. 1b) – jeśli gracz na którymś z nich stanie, przeciwnik może iść tylko na pola przegrywające. Można więc wskazać kolejne pozycje przegrywające (rys. 1c) i wygrywające (rys. 1d). Ostatecznie otrzymujemy pokolorowanie całej szachownicy (rys. 1e).

Pole c1 jest szare. Istnieje zatem strategia wygrywająca dla gracza rozpoczynającego: w kolejnych swoich ruchach stawia królową zawsze na kolorowych polach (wygrywających). Wówczas przeciwnik musi za każdym razem postawić królową na polu szarym (przegrywającym), a z takiego pola można znów przejść na pole kolorowe. Pole h8 jest kolorowe, więc przy tej strategii faktycznie stanie na nim (czyli wygra) gracz rozpoczynający. □

R2. Zaznaczmy na poziomej osi układu współrzędnych, ile jabłek zjedzono, a na pionowej, ile pomarańczy. Pojedynczy ruch to przesunięcie o ileś jednostek do góry, w prawo albo na ukos do góry i w prawo, czyli dokładnie ruchy królowej z zadania 1. Pozycja rozpoczynająca grę, czyli (0, 0) (nic jeszcze nie zjedzono) odpowiada początkowemu polu c1. Wygrywa ten, kto zje ostatni owoc, czyli zajmie pozycję (5, 7), odpowiadającą polu h8. Po takim „przetłumaczeniu” problemu można natychmiast wywnioskować z zadania 1, że strategię wygrywającą ma gracz rozpoczynający (i nawet wiemy, jaką!). □

R3. Pierwszą przydatną w rozwiązaniu informacją jest to, które trójki spośród danych liczb mają sumę 15. Pozostawiam Czytelnikowi łatwe sprawdzenie, że są to dokładnie te trójki, które znajdują się w jednym wierszu, jednej kolumnie lub na przekątnej kwadratu z rysunku 2. Jest to więc tzw. kwadrat magiczny.

Gracz wygrywa, jeśli skompletuje wiersz, kolumnę lub przekątną. Tę grę niemal każdy chyba zna od dzieciństwa, nazywa się ona kółko i krzyżyk. Jeśli gracz rozpoczynający wybierze liczbę 2, czyli zajmie pole narożne, zawsze może wygrać, chyba że drugi gracz natychmiast zajmie pole środkowe (czyli weźmie liczbę 5). Nieprzekonanych zachęcam do sprawdzenia tego. □

Gry 2 i 3 mogą wydawać się bardzo proste, gdy już się wie, że są to „zakamuflowane” postaci, odpowiednio, gry 1 i gry w kółko i krzyżyk. Polecam jednak rozegranie kilku partii z niewtajemniczonym przeciwnikiem. . .