








SPIS TREŚCI NUMERU 4 (431)

Paradoks dni urodzin i pokrewne, czyli o pewnych zagadnieniach związanych z rozmieszczeniem kul w komórkach <i>Tomasz Nikodem</i>	str. 1
Potrójne urodziny <i>Michał Adamaszek</i>	str. 3
 Zadania	str. 3
Amatorskie pomiary meteorologiczne: fotometr słoneczny <i>Krzysztof Markowicz</i>	str. 4
Zobaczyć chaos: potęga intelektu (nie moc obliczeniowa) <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 7
O pewnym zadaniu, czyli jak działa matematyka przenikają się <i>Michał Pilipczuk</i>	str.10
 Jeszcze jedno zadanie konstrukcyjne <i>Wojciech Guzicki</i>	str.12
Pokrycie wierzchołkowe kontratakuję <i>Marcin Pilipczuk</i>	str.14
Ta sama funkcja trzema sposobami	str.16
Informatyczny kącik olimpijski (29): Trening <i>Tomasz Kulczyński</i>	str.17
 Jakże obrazy są wytwarzane przez soczewki? <i>Stanisław Bednarek</i>	str.18
Aktualności	str.20
 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.21
Klub 44	str.22
Patrz w niebo: Woda na Księżycu	str.24
Kwiecień	str.24
 Kolorowe szachownice <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 22-55-44-402.

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 22-639-73-67)

internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2010 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2010 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Cena prenumeraty w 2010 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Jak skupiać światło
za pomocą drukarki i folii

Paradoks dni urodzin i pokrewne, czyli o pewnych zagadnieniach związanych z rozmieszczeniem kul w komórkach

Tomasz NIKODEM*

Motywacją do napisania artykułu o powyższym tytule było następujące zadanie, znane w literaturze jako paradoks dni urodzin: jak liczna powinna być grupa osób, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym od $1/2$ znalazły się w niej co najmniej dwie osoby obchodzące urodziny tego samego dnia. Zakłada się, że rozkład dni urodzin jest rozkładem jednostajnym na zbiorze $\{1, 2, \dots, 365\}$, co mało odbiega od rzeczywistości, natomiast lata przestępne pomijamy.

Jaki związek mogą mieć kule i komórki z ludźmi i ich datami urodzin? Otóż, układ ponumerowanych od 1 do 365 komórek można interpretować następująco: pierwsza komórka to pierwszy stycznia, druga – drugi stycznia, ostatnia – Sylwester. Fakt, że w szufladzie o numerze 31 jest kula, interpretujemy następująco: w grupie osób jest osoba urodzona 31 stycznia. Komórki są rozróżnialne, bowiem każda z nich ma inny numer. Podobne założenie dotyczy kul: każda z nich odpowiada dacie urodzenia innej osoby, naturalne zaś jest założenie, że osoby są rozróżnialne.

Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że w k -osobowej grupie znajdują się przynajmniej dwie osoby urodzone tego samego dnia. Chwilę później wyznaczmy minimalne k , dla którego obliczone prawdopodobieństwo jest nie mniejsze niż $1/2$. Odpowiedź, którą niebawem uzyskamy, jest zaskakująco niska: wystarczy zaledwie 23 osoby, by taka sytuacja miała miejsce.

Za Ianem Stewartem podaję, że na pytanie o minimalną liczbę osób, dla której z prawdopodobieństwem co najmniej $1/2$ znajdziemy dwie osoby urodzone tego samego dnia, które „stawiano studentom kierunków uniwersyteckich [w USA], średnia z odpowiedzi wynosiła 385”. Natomiast już dla 366 osób z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, iż z prawdopodobieństwem 1 znajdują się dwie osoby obchodzące urodziny tego samego dnia. Wyniki ankiety dobrze uzasadniają tytuł: paradoks dni urodzin.

Przystąpmy do rozwiązania zadania sformułowanego na początku artykułu. Zdarzeniami elementarnymi są ciągi długości k o wyrazach w zbiorze $\{1, 2, \dots, 365\}$. Wszystkich takich ciągów jest 365^k . Oznaczmy przez p_k prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do rozpatrywanego, czyli zdarzenia polegającego na tym, że k -elementowy ciąg będzie różnowartościowy. Wówczas:

$$(1) \quad p_k = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - k + 1)}{365^k} = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{365}\right) \quad \text{dla } k \leq 365$$

oraz

$$p_k = 0 \quad \text{dla } k > 365.$$

Teraz naszym zadaniem jest znalezienie minimalnego k , dla którego $p_k \leq 1/2$. W dalszym ciągu będziemy korzystać z oczywistej obserwacji, iż dla interesujących nas k , czyli $k \leq 365$, ciąg (p_k) jest malejący. Dla $k > 365$ omawiany ciąg jest stały.

Wykorzystując nierówność $1 + x \leq e^x$ (prawdziwą dla dowolnej liczby rzeczywistej x), można szacować prawą stronę wzoru (1):

$$(2) \quad p_k \leq e^{-\frac{1}{365}} \cdot \dots \cdot e^{-\frac{k-1}{365}} = e^{-\frac{1+2+\dots+(k-1)}{365}} = e^{-\frac{k(k-1)}{730}}.$$

Aby zachodziło $p_k \leq 1/2$, wystarczy wyznaczyć minimalne k (naturalne), dla którego zachodzi

$$(3) \quad k^2 - k - 730 \cdot \ln 2 \geq 0.$$

Pierwszym dodatnim rozwiązaniem nierówności (3) jest

$$(4) \quad \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 730 \cdot \ln 2}}{2} = 22,99994315 \dots,$$

czyli rozwiązanie naszego zadania to $k = 23$. Rezultat jest zgodny z wynikiem przytoczonym na początku artykułu; niemniej, aby to dokładnie sprawdzić, warto wykonać rachunki przy użyciu komputera.

Otrzymujemy: $p_{23} = 0,493 \dots$ oraz $p_{22} = 0,524 \dots$, czyli pomimo szacowania wykonanego w (2) otrzymujemy prawidłowy wynik.

Przeanalizujmy, jak się mają przybliżenia do poprawnej odpowiedzi, gdy zwiększymy bądź zmniejszymy liczbę szuflad (możliwości dni urodzin). Taka sytuacja będzie możliwa, gdy przeniesiemy się na chwilę, na przykład, na Marsa, gdzie jeden pełny obieg wokół Słońca trwa 687 ziemskich dni, a co za tym idzie, na Marsie mamy 687 różnych dat urodzin. Stawiamy pytanie analogiczne jak na Ziemi: jak liczna powinna być grupa Marsjan, by z prawdopodobieństwem co najmniej $1/2$ znalazło się wśród nich przynajmniej dwóch obchodzących urodziny tego samego dnia? Zakładamy, że rozkład narodzin na Marsie jest jednostajny na $\{1, 2, \dots, 687\}$, choć właściwie nie mamy do tego żadnych podstaw.

Ponieważ liczby 365 oraz 687 tak naprawdę nie są bardziej interesujące niż pozostałe, przeanalizujmy powyższy przykład w pełnej ogólności. Mamy n możliwych dni urodzin. Oznaczmy przez p_k^n prawdopodobieństwo, że k -elementowy ciąg o wyrazach w zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$ jest różnowartościowy. Aby znaleźć wzór na p_k^n , wystarczy we wzorze (1) każdorazowo w miejsce 365 wpisać n . Wykonując szacowanie analogiczne do (2), otrzymujemy, że warunkiem wystarczającym, by zachodziło $p_k^n \leq 1/2$, jest spełnienie nierówności $k^2 - k - 2 \cdot n \cdot \ln 2 \geq 0$, której pierwszym dodatnim rozwiązaniem jest

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot n \cdot \ln 2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot n \cdot \ln 2}}{2}.$$

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Aby wzór stał się przyjemniejszy (tracąc na dokładności, lecz co najwyżej o jeden), decydujemy się zapisać go w przybliżonej postaci: $k_0^n = \sqrt{2 \cdot \ln 2} \cdot \sqrt{n}$ – jako rozwiązanie wystarczy brać minimalną liczbę całkowitą nie mniejszą od k_0^n . W ogólnym przypadku odpowiedź jest rzędu \sqrt{n} razy stała $\sqrt{2 \cdot \ln 2} = 1,177410 \dots$. Żeby zobaczyć, jak dobrze przybliżone wyniki uzyskane dzięki wyznaczeniu k_0^n oddają faktyczne, prawidłowe wyniki uzyskane numerycznie dla pewnych przypadkowych, ale konkretnych n , warto spojrzeć na trzecią oraz czwartą kolumnę tabeli na dole strony.

Przystąpimy teraz do analizy nieco innego zagadnienia. Przypuśćmy, że dane jest 365 szuflad, co odpowiada 365 różnym datom urodzin. Załóżmy dalej, że mamy dostatecznie dużo kul, które będziemy umieszczać kolejno w losowo wybranej (zgodnie z rozkładem jednostajnym na $\{1, 2, \dots, 365\}$) szufladzie. Wyróżnijmy jedną z szuflad przed rozpoczęciem doświadczenia, powiedzmy o numerze jeden, czyli pierwszy stycznia. Standardowo kula w szufladzie oznacza, że w grupie jest osoba urodzona danego dnia. Zagadnienie wygląda następująco: jak liczna powinna być grupa osób, aby z prawdopodobieństwem co najmniej $1/2$ znalazła się wśród nich co najmniej jedna, która obchodzi urodziny właśnie pierwszego stycznia? Wybrana data nie jest żadnym magicznym dniem – chodzi jedynie o to, że została ona ustalona przed wykonaniem doświadczenia. Powyższe zagadnienie można zinterpretować następująco: jak liczna powinna być grupa osób, aby z prawdopodobieństwem co najmniej $1/2$ znalazła się wśród nich co najmniej jedna osoba urodzona tego samego dnia co ja?

Przechodząc znów do rozważania zdarzenia przeciwnego, szukamy prawdopodobieństwa tego, że przy losowym rozmieszczeniu k kul w 365 komórkach otrzymamy rozmieszczenie, w którym wyróżniona komórka jest pusta. Innymi słowy, interesuje nas zdarzenie, że k kul zostanie umieszczonych w komórkach o numerach $2, 3, \dots, 365$. Zdarzeniami elementarnymi są ciągi długości k o wyrazach w zbiorze $\{1, 2, \dots, 365\}$. Rozmieszczenia sprzyjające omawianemu zdarzeniu przeciwnemu to ciągi długości k o wyrazach w zbiorze $\{2, 3, \dots, 365\}$ – nie dopuszczamy możliwości, że jakakolwiek kula trafi do wyróżnionej szuflady numer jeden. Jest ich 364^k . Oznaczmy przez b_k szukane

prawdopodobieństwo z treści zadania. Otrzymujemy:

$$(5) \quad b_k = 1 - \frac{364^k}{365^k} = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^k.$$

W dalszym ciągu skorzystamy z tego, że ciąg (b_k) jest rosnący. Zwróćmy uwagę, że podczas gdy w grupie 366-osobowej z prawdopodobieństwem 1 znajdują się dwie osoby urodzone tego samego dnia, to dla dowolnie dużej grupy osób nie możemy mieć pewności, że znajdziemy w niej osobę urodzoną, na przykład, 1 stycznia.

Pytamy o to, kiedy b_k jest nie mniejsze niż $1/2$. Wyznamy nierówność, którą ma spełniać k :

$$(6) \quad 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^k \geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow k \geq -\frac{\ln 2}{\ln\left(1 - \frac{1}{365}\right)} = 252,651988 \dots,$$

czyli należy brać $k = 253$. Dokładne wyniki, uzyskane za pomocą komputera, są następujące: $b_{252} = 0,499105 \dots$ oraz $b_{253} = 0,500477 \dots$

W ogólnym przypadku zamiast rozważać 365 możliwości dni urodzin, możemy analogicznie obliczyć, kiedy b_k^n (czyli prawdopodobieństwo tego, że przy losowym rozmieszczeniu k kul w n komórkach wyróżniona przed rozpoczęciem doświadczenia komórka jest niepusta) jest nie mniejsze niż $1/2$. Okazuje się, że wystarcza, by

$$k \geq -\frac{\ln 2}{\ln(1 - 1/n)}.$$

Aby zyskać na estetyce powyższego wzoru (kosztem jego dokładności), można szacować prawą stronę, wykorzystując nierówność $\ln(1 + x) \leq x$ dla $x = -1/n$. Otrzymujemy w ten sposób oszacowanie $k \geq n \ln 2$. Oczywiście, interesuje nas najmniejsze $k \in \mathbb{N}$, które spełnia zadaną nierówność. By przekonać się, jak dobry jest „bardziej estetyczny wzór”, warto spojrzeć na ostatnie dwie kolumny poniższej tabeli.

Na zakończenie odnotujmy, że podczas gdy odpowiedź na pytanie będące uogólnieniem paradoksu dni urodzin zachowywała się jak \sqrt{n} ze stałą $1,177410 \dots$, odpowiedź na drugie pytanie rośnie liniowo wraz ze wzrostem n ze stałą $\ln 2 = 0,693147 \dots$

Literatura

Ian Stewart, *Co za traf!*, Świat Nauki 8/1998, ss. 74–75.

nazwa planety	n – czas obiegu wokół Słońca w dniach ziemskich (zaokrąglony do liczb całkowitych)	minimalne $k \in \mathbb{N}$ nie mniejsze od k_0^n (wynik przybliżony)	minimalne $k \in \mathbb{N}$, aby zachodziło $p_k^n \leq 1/2$ (wynik numeryczny)	minimalne $k \in \mathbb{N}$, aby zachodziła nierówność $k \geq \ln 2 \cdot n$ (wynik przybliżony)	minimalne $k \in \mathbb{N}$, aby zachodziła nierówność $k \geq -\frac{\ln 2}{\ln(1 - 1/n)}$ (wynik numeryczny)
Merkury	$n = 88$	12	12	61	61
Wenus	$n = 225$	18	18	156	156
Ziemia	$n = 365$	23	23	253	253
Mars	$n = 687$	31	32	477	476
Jowisz	$n = 4\,333$	78	78	3 004	3 004
Saturn	$n = 10\,756$	123	123	7 456	7 456
Uran	$n = 30\,708$	207	207	21 286	21 285
Neptun	$n = 60\,223$	289	290	41 744	41 744

Potrójne urodziny

Michał ADAMASZEK

Klasyyczna wersja tak zwanego paradoksu, o którym mowa w artykule Tomasza Nikodema, dotyczy sytuacji, w której szukamy w danej grupie k ludzi dwóch osób urodzonych tego samego dnia roku. Okazuje się, że wystarczy grupa 23-osobowa ($k = 23$), aby prawdopodobieństwo znalezienia takiej pary przekroczyło $1/2$ (zakładamy zawsze, że każda data urodzenia jest jednakowo prawdopodobna, co ponoć nie jest do końca zgodne z rzeczywistością). A jaka próbka jest potrzebna, abyśmy mieli równie dużą szansę na znalezienie trzech osób urodzonych tego samego dnia?

Oznaczmy liczbę dni w roku przez n , a licznosc naszej grupy przez k . Zdarzenie „istnieją trzy osoby urodzone tego samego dnia” jest dopełnieniem zdarzenia „każdego dnia urodziny obchodzą co najwyżej dwie z danych k osób”. Prawdopodobieństwo tego drugiego można obliczyć, na przykład, tak. Niech l będzie liczbą dni, w które wypadają podwójne urodziny jakiejś pary ($l = 0, 1, \dots$). Wtedy łączna liczba dni urodzinowych to $l + (k - 2l) = k - l$. Wybieramy te dni w roku (na $\binom{n}{k-l}$ sposobów), decydujemy, które z nich będą podwójne (na $\binom{k-l}{l}$ sposobów), ustawiamy całe towarzystwo w kolejkę (na $k!$ sposobów), po czym w tej kolejności przypisujemy osoby do kolejnych wybranych dni, na początku po dwie osoby do dni podwójnych (aż zużyjemy $2l$ osób), a potem po jednej osobie do dni pojedynczych. W ten sposób każdą konfigurację

liczymy 2^l razy (kolejność osób w każdej z pierwszych l par). Reasumując, szukanych konfiguracji jest

$$f_{n,k} = \sum_{l \geq 0} \binom{n}{k-l} \binom{k-l}{l} \frac{k!}{2^l}.$$

Składnik odpowiadający $l = 0$ to dokładnie liczba konfiguracji, w których każdy ma inną datę urodzin. Zatem poszukiwane prawdopodobieństwo, że istnieją trzy osoby świętujące wspólnie, to

$$p_{n,k} = 1 - \frac{f_{n,k}}{n^k}.$$

Aby rozwiązać nasze zadanie, kładziemy $n = 365$ i szukamy takiego k , żeby $p_{365,k} > 1/2$. (Jako ćwiczenie z manipulowania sumami polecam sprawdzenie, czy aby na pewno $p_{n,1} = p_{n,2} = 0$ oraz $p_{n,3} = 1/n^2$. Te rzeczy wiemy bez rachunków.) To dobre zadanie dla komputera, a odpowiedzią jest wartość:

$$p_{365,88} = 0,511\dots,$$

a zatem potrzeba 88 osób, aby mieć duże (co najmniej 50%) szanse na znalezienie trzech urodzonych w tym samym dniu.

Czytelnikowi Bardzo Wytrwałemu pozostawiamy analogiczne zadanie z wymogiem czterech, pięciu i więcej osób o wspólnej dacie urodzenia oraz następujący problem z nieco innej beczki: jak liczna musi być grupa, abyśmy mieli co najmniej 50% szans na to, że *codziennie* będziemy obchodzić czyjeś urodziny?



Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1273. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb całkowitych x, y, z spełniające równanie $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

Rozwiązanie na str. 17

M 1274. Każdy punkt koła domkniętego o promieniu 1 pomalowano na jeden z trzech kolorów. Dowieść, że istnieją dwa punkty tego samego koloru, których odległość wynosi 1. Rozwiązanie na str. 9

M 1275. Liczby x_1, x_2, \dots, x_{100} są dodatnie i ich suma wynosi 1. Udowodnić, że

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{99}x_{100} < \frac{1}{4}.$$

Rozwiązanie na str. 6

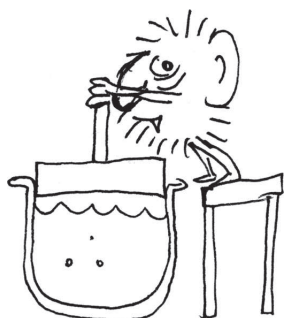
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 761. Skraplacz składa się z rury wypełnionej zimną wodą, przez którą przechodzi przewód z parą wodną. Do wnętrza skraplacza z jednej strony wpuszcza się strumień pary wodnej o temperaturze $t_1 = 100^\circ\text{C}$ w ilości $q_1 = 1$ kg/s, a z drugiej strony strumień wody o temperaturze $t_2 = 20^\circ\text{C}$ w ilości $q_2 = 20$ kg/s. Znaleźć temperaturę wody wychodzącej ze skraplacza. Ciepło parowania wody to $\lambda = 2,26 \cdot 10^6$ J/kg, a ciepło właściwe wody wynosi $c = 4,19 \cdot 10^3$ J/(kg · K). Założyć, że skraplacz jest skuteczny, tzn. temperatura skroplonej pary opuszczającej skraplacz jest równa początkowej temperaturze chłodzącej wody.

Rozwiązanie na str. 16

F 762. W naczyniu, nad powierzchnią wody, znajduje się powietrze, ściśnięte obciążonym tłokiem do ciśnienia $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Pa. Odległość tłoka od powierzchni wody jest taka sama, jak wysokość słupa wody $h = 2$ cm. Temperatura wody i powietrza wynosi $t_1 = 6^\circ\text{C}$. Na jakiej wysokości nad powierzchnią wody znajdzie się tłok, jeśli naczynie z wodą ogrzejemy do temperatury $t_2 = 100^\circ\text{C}$? Ciśnienie pary wodnej w temperaturze 6°C oraz tarcie zaniedbać.

Rozwiązanie na str. 24





Amatorskie pomiary meteorologiczne: fotometr słoneczny

Krzysztof MARKOWICZ*

W ostatnich latach powszechny dostęp do komputerów oraz czujników parametrów środowiskowych przyczynił się do rozwoju amatorskich pomiarów meteorologicznych. Na świecie istnieje obecnie wiele sieci zrzeszających ludzi w różnym wieku, którzy fascynują się zjawiskami meteorologicznymi. Prowadzą oni różne pomiary atmosferyczne, począwszy od prostych obserwacji stanu atmosfery, takich jak temperatura, wilgotność, wiatr lub opad, a skończywszy na systemach lokalizacji wyładowań atmosferycznych czy pomiarach zanieczyszczeń powietrza. Część z nich kupuje proste przyrządy meteorologiczne, a pozostali budują własne urządzenia pomiarowe. Celem tej serii artykułów będzie właśnie zachęcenie Czytelników do własnoręcznego wykonania kilku przyrządów umożliwiających interesujące pomiary meteorologiczne.

W pierwszym odcinku zajmiemy się budową i działaniem fotometru słonecznego. Jest on przyrządem służącym do pomiaru bezpośredniego promieniowania słonecznego, czyli promieniowania pochodzącego z obszaru tarczy słonecznej. Promieniowanie słoneczne, przechodzące przez atmosferę, jest stopniowo osłabiane wskutek procesów absorpcji i rozpraszania: na molekułach gazów atmosferycznych (głównie tlenu, azotu i pary wodnej), w chmurach oraz na zanieczyszczeniach powietrza zwanych aerozolami. Jeżeli w okolicach tarczy słonecznej nie ma chmur, to natężenie promieniowania bezpośredniego docierającego do powierzchni Ziemi jest tym większe, im mniej zanieczyszczeń zawiera pionowa kolumna atmosfery (inaczej: powietrze jest bardziej przezroczyste). Relacje te opisuje prawo Lamberta–Beera:

$$I(\lambda) = I_{\text{od}}(\lambda)e^{-m\tau(\lambda)},$$

gdzie $I(\lambda)$ jest natężeniem promieniowania słonecznego o długości fali λ dochodzącego do fotometru, $I_{\text{od}}(\lambda)$ jest natężeniem promieniowania słonecznego dochodzącego do górnych granic atmosfery (tzw. spektralna stała słoneczna), m oznacza tzw. masę optyczną atmosfery, τ zaś tzw. grubość optyczną atmosfery. Ponieważ stała słoneczna zależy od chwilowej odległości d między Ziemią a Słońcem, wprowadza się pojęcie stałej słonecznej $I_0(\lambda)$ dla średniej odległości d_0 Ziemia–Słońce. Zapisane przy użyciu tych wielkości prawo Lamberta–Beera przyjmuje postać

$$I(\lambda) = I_0(\lambda) \left(\frac{d_0}{d} \right)^2 e^{-m\tau(\lambda)}.$$

Stosunek kwadratów średniej i chwilowej odległości Ziemia–Słońce można wyrazić przybliżonym wzorem

$$\left(\frac{d_0}{d} \right)^2 = 1 + \left[0,034 \cos \left(2\pi \frac{D}{365} \right) \right]^2,$$

gdzie D oznacza numer kolejnego dnia w roku.

Masa optyczna atmosfery jest wielkością bezwymiarową, zdefiniowaną przez stosunek całkowitej masy kolumny powietrza (o jednostkowej powierzchni), nachylonej w kierunku Słońca, do masy pionowej kolumny powietrza. Uwzględnia ona fakt, że gdy Słońce znajduje się nisko nad horyzontem (mówimy: ma mały kąt elewacyjny), promieniowanie słoneczne pokonuje dłuższą drogę w atmosferze. W przypadku, gdy kąt elewacyjny Słońca jest większy od 30° , masa optyczna atmosfery może być wyznaczana z przybliżenia płaskorównoległego i wynosi

$$m = \frac{1}{\sin(\alpha)}.$$

Dla kątów elewacyjnych mniejszych od 30° efekt zakrzywienia powierzchni Ziemi staje się istotny i wówczas masa optyczna wyraża się wzorem

$$m = \frac{1}{\sin(\alpha) + a(\alpha \cdot 180/\pi + b)^{-c}},$$



*Instytut Geofizyki, Wydział Fizyki,
Uniwersytet Warszawski

gdzie α jest kątem elewacyjnym Słońca w radianach, stałe a , b i c zaś przyjmują wartości:

$$a = 0,50572, \quad b = 6,07995, \quad c = 1,6364.$$

Gdy Słońce znajduje się na horyzoncie, masa optyczna wynosi około 38, co oznacza, że promieniowanie przechodzi trzydziestoosmiokrotnie dłuższą drogę, niż gdyby Słońce było w zenicie.



Grubość optyczna atmosfery jest również wielkością bezwymiarową. Jest ona proporcjonalna – w pionowej kolumnie powietrza – do osłabienia bezpośredniego promieniowania słonecznego wskutek procesów absorpcji i rozpraszania (ekstynkcji). Całkowita grubość optyczna atmosfery może być wyrażona poprzez sumę grubości optycznej związanej z aerozolami τ_{AOT} , molekułami powietrza (rozpraszanie Rayleigha) τ_{RAY} , parą wodną τ_{H_2O} i innymi gazami śladowymi (np. ozonem) τ_g

$$\tau = \tau_{AOT} + \tau_{RAY} + \tau_{H_2O} + \tau_g.$$

Przekształcając powyższe wzory, widzimy, że grubość optyczna aerozolu może być wyznaczona na podstawie pomiarów promieniowania bezpośredniego z zależności

$$\tau_{AOT} = \frac{1}{m} \left[\ln \frac{I_0}{I} + 2 \ln \frac{d}{d_0} \right] - (\tau_{RAY} + \tau_{H_2O} + \tau_g).$$

W przypadku promieniowania słonecznego w zakresie widzialnym i bliskiej podczerwieni wpływ pary wodnej i ozonu jest na ogół zanedbywalnie mały (poza wąskimi pasmami absorpcyjnymi). Największy wkład do grubości optycznej wnoszą rozpraszanie i absorpcja aerozolu oraz rozpraszanie molekularne. Wyznaczenie grubości optycznej aerozolu wymaga zatem obliczenia grubości optycznej związanej z rozpraszaniem Rayleigha. Wielkość ta zmniejsza się z długością fali jak λ^{-4} (co, nawiasem mówiąc, sprawia, że nieboskłon pozbawiony chmur ma kolor niebieski). Molekularne grubości optyczne wynoszą 0,61, 0,14 oraz 0,008 dla długości fali odpowiednio 350, 500 oraz 1000 nm. W celu wyznaczenia grubości optycznej związanej z rozpraszaniem na molekułach powietrza stosuje się empiryczny wzór

$$\tau_{RAY} = \frac{p}{p_0} (A\lambda^{-4} + B\lambda^{-5} + C\lambda^{-6}),$$

gdzie p jest ciśnieniem atmosferycznym w hPa, λ długością fali w μm , a pozostałe stałe przyjmują wartości:

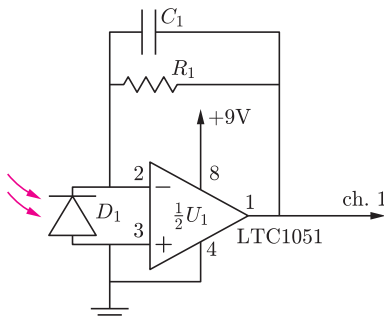
$$p_0 = 1013 \text{ hPa},$$

$$A = 8436 \cdot 10^{-6} \mu\text{m}^4, \quad B = -1225 \cdot 10^{-7} \mu\text{m}^5, \quad C = 14 \cdot 10^{-5} \mu\text{m}^6.$$

W przypadku aerozolu typowe wartości grubości optycznej mierzonej w Polsce zmieniają się w zakresie od 0,1 do 0,5 dla fali o długości 500 nm. Wyznaczenie grubości optycznej dla aerozoli, a tym samym zmierzenie ilości zanieczyszczeń w powietrzu, wymaga zmierzenia natężenia promieniowania bezpośrednio docierającego do powierzchni Ziemi. Jednymi z najprostszych detektorów promieniowania są fotodiody, jednak stosowanie ich w przypadku fotometru słonecznego wymaga użycia dość kosztownych filtrów interferencyjnych, pozwalających na pomiar promieniowania w wąskim zakresie długości fali. Znacznie prostszym i tańszym rozwiązaniem jest wykorzystanie zwykłych diod LED jako detektorów promieniowania. Diody te w porównaniu z fotodiodami mają znacznie węższy zakres czułości widmowej, wynoszący na ogół około 50–70 nm. Jest to wartość większa niż w przypadku komercyjnych fotometrów (około 10 nm), pozwala jednak na uzyskiwanie zadowalających wyników pomiarowych. Układ pomiarowy naszego fotometru będzie składał się z konwertera prąd-napięcie realizowanego przez układ operacyjny UTC1051. Pozwoli on na pomiar niewielkiego prądu płynącego przez złącze n-p diody LED. Układ pracuje w sprzężeniu zwrotnym za pośrednictwem rezystora o oporności kilku M Ω . Dokładna wartość oporu zależy od typu diody LED i ustala się ją podczas pomiarów testowych, tak aby wartość napięcia wyjściowego, mierzonego w godzinach południowych, nie przekraczała 2 V. Układ scalony UTC1051



Rys. 1. Zdjęcie fotometru słonecznego.



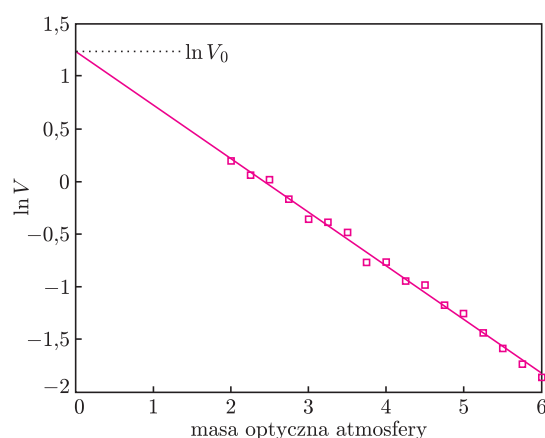
Rys. 2. Schemat elektroniczny podłączenia diody LED do wzmacniacza operacyjnego LTC1051. Oporność rezystora R_1 ustala się eksperymentalnie dla każdej diody. Najczęściej jest to wartość z zakresu 2–5 M Ω . Pojemność kondensatora C_1 wynosi 220 pF.

Pomiar grubości optycznej aerozolu dla co najmniej dwóch długości fali pozwala oszacować tzw. wykładnik Ångströma związany z rozmiarem cząstek.

ma dwa wzmacniacze operacyjne umożliwiające pomiar dla dwóch diod LED. Zasilamy go napięciem około 9 V z baterii 6LR61. Schemat całego układu elektronicznego pokazany został na rysunku 2. Detektor promieniowania umieszczony jest wewnątrz ciemnej obudowy. Oświetlany jest on przez promieniowanie słoneczne padające przez niewielki otwór w przedniej ścianie. Należy tak dostosować średnicę otworka i odległość diody od niego, aby kąt widzenia diody wynosił około 2–2,5°. Pozwoli to na pomiar promieniowania pochodzącego od tarczy słonecznej (0,5°) i jej najbliższej okolicy. W przyrządzie możemy zastosować kilka diod o różnej długości fali. Najczęściej w fotometrach wykorzystuje się jako detektory diody LED o średnicy 5 mm koloru żółtego, zielonego oraz czerwonego.

Napięcie V , mierzone za pomocą podłączonego do fotometru miernika uniwersalnego, jest proporcjonalne do natężenia promieniowania słonecznego I . Grubość optyczną aerozolu możemy zatem wyznaczyć ze wzoru

$$\tau_{\text{AOT}} = \frac{1}{m} \left[\ln \frac{V_0}{V} + 2 \ln \frac{d}{d_0} \right] - \tau_{\text{RAY}},$$



Rys. 3. Kalibracja metodą Langleya. Kwadraty reprezentują wyniki pomiarów, natomiast linia ciągła przedstawia dopasowanie do punktów pomiarowych. Przecięcie prostej z osią pionową odpowiada wartości kalibracyjnej $\ln V_0$.

gdzie V_0 oznacza wartość napięcia, jaką wskazywałby przyrząd wyniesiony poza granice atmosfery. Nie mogąc tego ostatniego zrobić w warunkach domowych, potrafimy jednak wyznaczyć V_0 podczas kalibracji przyrządu przy użyciu tzw. techniki Langleya, polegającej na wykonywaniu wielokrotnych pomiarów w odstępach 10–15 minut dla kątów elewacyjnych Słońca pomiędzy 10° a 30°. Najczęściej czas ten odpowiada 2–3 godzinom zaczynającym się około 30 minut po wschodzie lub kończącym się około 30 minut przed zachodem Słońca. Kalibracja wymaga bezchmurnego nieba i stabilnych warunków meteorologicznych, aby grubość optyczna atmosfery nie zmieniała się w czasie. Wówczas logarytm mierzonego napięcia (w dowolnych ustalonych jednostkach, np. w voltach) jest liniową funkcją masy optycznej atmosfery m

$$\ln V = \ln V_0 + 2 \ln \left(\frac{d_0}{d} \right) - m\tau.$$

Wykonana na podstawie pomiarów ekstrapolacja zależności liniowej do zerowej masy optycznej (zob. rys. 3) pozwala wyznaczyć poszukiwaną wartość $\ln V_0$ (w tych samych jednostkach).

Wyznaczenie grubości optycznej aerozolu wymaga jeszcze znajomości długości fali, dla której dioda LED wykazuje najwyższą czułość, oszacowania ciśnienia atmosferycznego oraz wyznaczenia położenia Słońca nad horyzontem.

W przypadku długości fali możemy posłużyć się informacjami technicznymi na temat danej diody LED. Producenci na ogół podają widmo lub długość fali odpowiadającą maksymalnej emisji promieniowania. Widma emisyjne i absorpcyjne diody LED na ogół nie pokrywają się dokładnie, jednak w naszym przypadku przyjęcie wartości dla widma emisyjnego nie prowadzi do dużych błędów. Aby wyznaczyć położenie Słońca, możemy wykorzystać dostępne w internecie programy, np. na stronie

<http://www.igf.fuw.edu.pl/meteo/stacja/kody.php>.

Pomiary fotometrem wykonuje się jedynie w dni słoneczne, kiedy tarczy słonecznej nie przesłaniają chmury. W atmosferze występują czasami cienkie chmury typu cirrus, które są słabo widoczne blisko tarczy słonecznej.

Mogą one jednak istotnie wpływać na wyniki pomiaru, dlatego podczas każdego pomiaru należy uważnie obserwować zachmurzenie. Sam pomiar powinien trwać około 20–30 sekund, w czasie których ustawiamy fotometr w kierunku tarczy Słońca i obserwujemy wskazania napięcia elektrycznego. Wybieramy wartość maksymalną, odpowiadającą najlepszemu ustawieniu fotometru.

Tyle dobrych rad. Teraz pozostaje tylko życzyć Czytelnikom wiele satysfakcji podczas budowy przyrządu oraz udanych pomiarów.



Rozwiązanie zadania M 1275.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{99}x_{100} &< \\ &< (x_1 + x_3 + \dots + x_{99}) \times \\ &\times (x_2 + x_4 + \dots + x_{100}) \leq \\ &\leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{100}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Zobaczyć chaos: potęga intelektu (nie moc obliczeniowa)

Jarosław GÓRNICKI*

Przypomnijmy definicję trzech przekształceń odcinka $[0, 1]$ w niego samego, którymi zajmowaliśmy się w pierwszej części artykułu (*Delta* 1/2010).

Wartość przesunięcia Bernoulliego liczby $x \in [0, 1]$ obliczamy, usuwając z rozwinięcia dwójkowego tej liczby pierwszą cyfrę po przecinku:

$$B((0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)_2) = (0, a_2 a_3 a_4 \dots)_2.$$

Przekształcenie pilokształtne P definiujemy następująco: na odcinku $[0, \frac{1}{2}]$ jest ono zadane wzorem $P(x) = 2x$, natomiast na odcinku $[\frac{1}{2}, 1]$ przyjmujemy $P(x) = 2x - 1$. Wykres przekształcenia P składa się z dwóch równoległych odcinków.

Przekształcenie namiotowe T zadajemy wzorem $T(x) = 1 - |1 - 2x|$. Na odcinkach $[0, \frac{1}{2}]$ i $[\frac{1}{2}, 1]$ jest ono liniowe – najpierw rosnące, a później malejące, więc wykres przypomina namiot.

Podzbiór odcinka $[0, 1]$ jest otwarty, jeśli jest sumą przedziałów otwartych (czyli odcinków bez końców), być może nieskończenie wielu, oraz ewentualnie przedziałów $[0, x)$ i $(y, 1]$ dla pewnych $x, y \in (0, 1)$.

Dobrym przykładem zbioru gęstego jest zbiór liczb wymiernych zawartych w odcinku $[0, 1]$.

Otoczenie punktu x to zbiór zawierający pewien zbiór otwarty, do którego należy x . Można powiedzieć, że to zbiór, który zawiera x , ale nie na brzegu.

W poprzedniej części artykułu (*Delta* 1/2010) omówiliśmy działanie dwóch różnych przekształceń $P, T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Używając dwójkowego systemu obliczeń (tu też będziemy z niego korzystać), wskazaliśmy podobieństwa między nimi. Wykażemy teraz, że przekształcenia te generują chaotyczne przemieszczanie się punktów w odcinku $(0, 1)$.

Chaotycznie – to znaczy jak?

Przeglądanie się zjawiskom, w których nie udaje się dostrzec jakiejś dominującej regularności, przewidywalności, skłania nas do mówienia o nich, że są chaotyczne. Z punktu widzenia matematyki potrzebna jest precyzyjna definicja zjawisk chaotycznych – na przykład lista własności, które muszą one spełniać. Jednak dotychczas nie wypracowano jednego poglądu w tej sprawie (zob. [1]). Jedni większą wagę przypisują własnościom lokalnym, a inni poszukują charakterystyki globalnych. Pokazuje to, jak trudny i nieuchwytny jest to problem.

Dość rozpowszechniona jest propozycja Roberta L. Devaneya (z 1986 r.), by za chaotyczne uznawać takie zjawiska, które:

- są *tranzytywne* (czyli mają tzw. *własność rozprzestrzeniania*),
- mają *gęsty* zbiór punktów okresowych,
- są wrażliwe na zmianę warunków początkowych.

Zdefiniujemy te pojęcia dla przekształcenia $S : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Własność tranzytywności (rozprzestrzeniania) oznacza, że dla dowolnej pary niepustych zbiorów otwartych $A, B \subset [0, 1]$ istnieje taka liczba naturalna n , że $S^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

Warunek ten oznacza, że trajektorie, czyli ciągi kolejnych obrazów danego punktu, rozpoczynające się w jakimkolwiek zbiorze otwartym A , są „rozsyłane” na cały zbiór $[0, 1]$ – do każdego zbioru otwartego $B \subset [0, 1]$ trafi jakaś trajektoria zapoczątkowana w zbiorze A .

Gęstość punktów okresowych odwzorowania S oznacza, że w dziedzinie $[0, 1]$ punkty okresowe tworzą zbiór gęsty, czyli każdy punkt $x \in [0, 1]$ jest granicą pewnego ciągu punktów okresowych. Przypomnijmy, że punkt $x \in [0, 1]$ nazywamy *okresowym* względem przekształcenia S , gdy istnieje taka liczba naturalna $k \geq 1$, że $S^k(x) = x$. Najmniejszą liczbę k o tej własności nazywamy *okresem podstawowym* punktu x . Orbyty punktów okresowych są zbiorami skończonymi.

Własność wrażliwości odwzorowania S oznacza, że istnieje taka stała $\delta > 0$, że dla każdego $x \in [0, 1]$ i każdego otoczenia \mathcal{O} punktu x istnieje punkt $y \in \mathcal{O}$ oraz istnieje taka liczba naturalna n , że

$$|S^n(x) - S^n(y)| \geq \delta$$

(stała δ bywa nazywana *stałą wrażliwości* przekształcenia S).

Innymi słowy, w każdym otwartym podzbiorze zbioru $[0, 1]$ istnieją dowolnie bliskie punkty x i y , których trajektorie po pewnym czasie znacznie się od siebie oddalają (być może tylko na chwilę). Przyszłość trajektorii przekształcenia wrażliwego zależy mocno od jej stanu początkowego. Wystarczy drobne zaburzenie, a historia (trajektoria) potoczy się zupełnie inaczej. . .

Podkreślmy, że własności charakteryzujące chaos w sensie Devaneya nie są do końca niezależne. W wyniku przeprowadzonych badań wiemy, że w pewnych sytuacjach, np. w przypadku jednowymiarowym, tranzytywność implikuje dwie pozostałe własności, a w dość ogólnym przypadku (dla przekształceń ciągłych na przestrzeniach metrycznych) tranzytywność wraz z istnieniem gęstego zbioru punktów okresowych gwarantuje wrażliwość na warunki początkowe (zostało to odkryte w 1992 r.).

Z „reklamowego” punktu widzenia fakt ten jest kłopotliwy: wrażliwość na warunki początkowe – najbardziej intuicyjna i najbardziej pogładowa własność – nie jest istotną charakterystyką chaosu!

*Katedra Matematyki,
Politechnika Rzeszowska

Najważniejsza jest tranzytywność – gwarancja, że z każdego otwartego podzbioru, idąc wzdłuż trajektorii jego punktów, można się dostać dowolnie blisko każdego punktu z całego zbioru.

Ponadto, ponieważ pierwsze dwie własności (tranzytywność, gęstość punktów okresowych) mają charakter topologiczny, a wrażliwość na warunki początkowe ma charakter metryczny, więc

chaos jest własnością topologiczną.

Przekształcenia P oraz T są chaotyczne.

Wykażemy teraz (bezpośrednimi rachunkami, bez użycia komputerów!), że przekształcenia P oraz T spełniają każdy z wymienionych warunków: mają własność tranzytywności, gęste zbiory punktów okresowych i są wrażliwe na warunki początkowe. Pokażemy w ten sposób, że ruch punktów na odcinku $[0, 1]$, generowany przez te przekształcenia, jest chaotyczny w sensie Devaney’a.

W poniższych uzasadnieniach wielokrotnie będziemy korzystać z następującej obserwacji:

(*) jeśli liczby x, y należą do odcinka jednostkowego i ich rozwinięcia binarne $x = (0, x_1 x_2 \dots)_2$, $y = (0, y_1 y_2 \dots)_2$ mają pierwsze k cyfr takie same, tzn. $x_i = y_i$ dla $i = 1, 2, \dots, k$, to wtedy $|x - y| \leq 2^{-k}$.

Tranzytywność

(P) Weźmy dwa dowolne przedziały otwarte $A, B \subset [0, 1]$. Wybierzmy $b \in B$ o reprezentacji binarnej $b = (0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots)_2$. Wybierzmy teraz liczbę wymierną $a \in A$ o skończonej reprezentacji binarnej $a = (0, a_1 a_2 a_3 \dots a_p)_2$ i taką, by liczba postaci

$$z = (0, a_1 a_2 a_3 \dots a_p 00 \dots 0 b_1 b_2 b_3 b_4 \dots)_2$$

należała do zbioru A – między a_p i b_1 wstawiamy tyle zer, by z obserwacji (*) można było wnioskować, że $z \in A$.

Pamiętając, że przekształcenie piłokształtne w zapisie binarnym jest identyczne z przesunięciem Bernoulliego, zauważamy, że $P^m(z) = b$ dla dostatecznie dużej liczby naturalnej m (czyli po obcięciu wszystkich cyfr rozwinięcia przed b_1). Przekształcenie P jest więc tranzytywne.

(T) Dla przedziałów otwartych $I, J \subset [0, 1]$ możemy znaleźć odpowiednio dużą liczbę naturalną n oraz ciągi a_1, a_2, \dots, a_n oraz b_1, b_2, \dots, b_n , gdzie $a_i, b_i \in \{0, 1\}$, takie że wszystkie liczby o reprezentacji binarnej rozpoczynającej się od $(0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots)_2$ należą do przedziału I , a liczby o reprezentacji binarnej zaczynającej się od $(0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots)_2$ należą do przedziału J . Możliwość takiego wyboru jest konsekwencją faktu, że rozwinięcia binarne liczb, które są identyczne na n pierwszych pozycjach, a potem są dowolne, wypełniają przedział postaci $[q \cdot 2^{-n}, (q+1) \cdot 2^{-n}]$ dla pewnego $0 \leq q < 2^n$. Długość tego przedziału wynosi $1/2^n$.

Wówczas, jeśli $a_n = 0$, to bierzemy $z_0 = (0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 0 b_1 b_2 \dots b_n)_2 \in I$. Wtedy

$$z_n = T^n(z_0) = T(P^{n-1}(z_0)) = (0, b_1 b_2 \dots b_n)_2 \in J.$$

Jeśli $a_n = 1$, to bierzemy $z_0 = (0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 1 b_1^* b_2^* \dots b_n^*)_2 \in I$. Wtedy

$$z_n = T^n(z_0) = T(P^{n-1}(z_0)) = (0, b_1 b_2 \dots b_n)_2 \in J.$$

T jest więc przekształceniem tranzytywnym.

Gęstość zbioru punktów okresowych

(P) Jeżeli $z = (0, a_1 a_2 a_3 \dots)_2$, to wybieramy $a = (0, \overline{a_1 a_2 \dots a_k})_2$ dla pewnego k . Zauważmy, że

$$\begin{aligned} P(a) &= (0, a_2 a_3 \dots a_k \overline{a_1 a_2 \dots a_k})_2, \\ P^2(a) &= (0, a_3 \dots a_k \overline{a_1 a_2 \dots a_k})_2, \\ &\dots\dots\dots \\ P^{k-1}(a) &= (0, a_k \overline{a_1 a_2 \dots a_k})_2, \\ P^k(a) &= (0, \overline{a_1 a_2 \dots a_k})_2 = a. \end{aligned}$$

Liczba a jest więc punktem okresowym przekształcenia P . Ponieważ liczby z i a różnią się o nie więcej niż 2^{-k} , więc z można dowolnie dobrze przybliżyć



Napis $0,\overline{abc}$ oznacza ułamek o okresie abc .

punktami okresowymi przekształcenia P , czyli zbiór punktów okresowych P jest zbiorem gęstym w przedziale $[0, 1]$.

(T) Pokażemy najpierw, że punkty k -okresowe przekształcenia P wyznaczają punkty k -okresowe przekształcenia T . Niech $w \in (0, 1)$ będzie punktem okresowym przekształcenia P o okresie k , tj. $w = P^k(w)$. Wtedy punkt $z = T(w)$ jest k -okresowym punktem przekształcenia T :

$$T^k(z) = T^k(T(w)) = T^{k+1}(w) = T(P^k(w)) = T(w) = z.$$

Aby wykazać gęstość zbioru punktów okresowych dla T , pokażemy, że możemy znaleźć punkty okresowe, których rozwinięcia binarne zaczynają się od dowolnej sekwencji a_1, a_2, \dots, a_n , gdzie $a_i \in \{0, 1\}$. Punkt $w = (0, \overline{0a_1a_2 \dots a_n})_2 < 1/2$ jest punktem okresowym dla P o okresie $n + 1$, zatem $z = T(w) = (0, a_1a_2 \dots a_n 0)_2$ jest punktem okresowym dla T o okresie $n + 1$.

Wrażliwość na warunki początkowe

(P) Weźmy liczby $x, y \in [0, 1]$, których rozwinięcia binarne

$$x = (0, x_1x_2x_3 \dots)_2, \quad y = (0, y_1y_2y_3 \dots)_2$$

różnią się tylko na jednej pozycji k (dostatecznie dalekiej), np. $x_k = 0$ i $y_k = 1$. Wówczas na mocy obserwacji (*) zachodzi $|x - y| < 1/2^{k-1}$. Ponadto

$$|P^{k-1}(x) - P^{k-1}(y)| = \frac{1}{2},$$

bo $P^{k-1}(y) = P^{k-1}(x) + 1/2$. Przekształcenie P jest więc wrażliwe na warunki początkowe (stała wrażliwości $\delta = 1/2$).

(T) Ustalmy n i weźmy reprezentacje binarne liczb różniące się jedynie na pozycji $n + 1$:

$$w_0 = (0, a_1a_2 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots)_2, \quad z_0 = (0, a_1a_2 \dots a_n a_{n+1}^* a_{n+2} \dots)_2.$$

Wtedy

$$|w_0 - z_0| < \frac{1}{2^n} \quad \text{oraz} \quad |T^n(w_0) - T^n(z_0)| = \frac{1}{2}.$$

Ostatnia równość wynika z następujących obserwacji. Jeśli $a_n = 0$, to

$$w_n = T^n(w_0) = T(P^{n-1}(w_0)) = T((0, 0a_{n+1}a_{n+2} \dots)_2) = (0, a_{n+1}a_{n+2} \dots)_2,$$

$$z_n = T^n(z_0) = T(P^{n-1}(z_0)) = T((0, 0a_{n+1}^*a_{n+2} \dots)_2) = (0, a_{n+1}^*a_{n+2} \dots)_2.$$

Gdy $a_{n+1} = 0$, to $w_n < 1/2$ i $z_n = w_n + 1/2$. Gdy $a_{n+1} = 1$, to $z_n < 1/2$ i $w_n = z_n + 1/2$.

Jeśli $a_n = 1$, to mamy sytuację analogiczną:

$$w_n = T^n(w_0) = T(P^{n-1}(w_0)) = T((0, 1a_{n+1}a_{n+2} \dots)_2) = (0, a_{n+1}^*a_{n+2} \dots)_2,$$

$$z_n = T^n(z_0) = T(P^{n-1}(z_0)) = T((0, 1a_{n+1}^*a_{n+2} \dots)_2) = (0, a_{n+1}a_{n+2} \dots)_2.$$

Przekształcenie T jest więc wrażliwe na warunki początkowe ze stałą wrażliwości $\delta = 1/2$.

Epilog

Zobaczyliśmy, że przekształcenie piłokształtne oraz przekształcenie namiotowe przemieszczają punkty w przedziale $(0, 1)$ w sposób chaotyczny według definicji Devaney'a. Okazuje się, że taka kombinacja „rozciągania i składania (nakładania)” prowadzi do ruchu chaotycznego dla ogólnych nieliniowych odwzorowań odcinka $[0, 1]$ w siebie.

W szczególności fakt, że przekształcenie T prowadzi do chaosu w zbiorze $(0, 1)$, pozwala wykazać, że to samo robi dla $c = 4$ tzw. funkcja logistyczna $f_c(x) = cx(1 - x)$, gdzie $x \in [0, 1]$, $c \in [0, 4]$ (jej wersja dyskretna: $y_{n+1} = cy_n(1 - y_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, zależna jest od wyboru y_0 i c). Na funkcję kwadratową f_c zwrócił uwagę P. R. Verhulst w 1838 r. Pojawiają się one np. w analizach demograficznych opisujących wzrost liczbowy populacji oraz w matematyce finansowej.

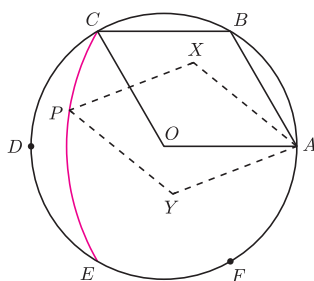
Równoważność iteracji przekształcenia namiotowego T i przekształcenia kwadratowego $4x(1 - x)$ na odcinku $[0, 1]$ dana jest za pomocą nieliniowej zamiany współrzędnych

$$h : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad h(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$



Rozwiązanie zadania M 1274.

Przypuśćmy, że istnieje kolorowanie niespełniające tezy zadania. Niech O oznacza środek koła oraz niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem foremnym o boku 1 wpisanym w dane koło.



Przyjmijmy, że punkt O jest zielony. Wówczas punkt A jest niebieski, a więc B musi być czerwony, C – niebieski, D – czerwony, E – niebieski, F – czerwony. Rozpatrzmy łuk ℓ o środku A i promieniu AC leżący wewnątrz danego koła. Ponieważ długość odcinka CE jest większa niż 1, więc na łuku ℓ musi istnieć punkt P , który nie jest niebieski.

Niech $AXPY$ będzie obrazem rombu $ABCO$ przy takim obrocie o środku A , który przeprowadza punkt C na punkt P . Ponieważ punkty A i P są różnych kolorów, więc punkty X i Y muszą być tego samego koloru. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż długość odcinka XY wynosi 1.

w tym sensie, że wyznaczenie orbity punktu x względem przekształcenia T jest identyczne z wyznaczeniem orbity punktu $y = h(x)$ względem funkcji f_4 :

$$f_4^n(h(x)) = h(T^n(x)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

dla wszystkich $x \in [0, 1]$ (szczegóły zobaczyć można w [2, 3]). Zdziwiająco jest, że dla $0 < c < 4$ funkcje kwadratowe f_c okazują się bardzo odporne na próby ich szczegółowego badania.

Zjawiska chaotyczne zdają się być nieodłącznym elementem otaczającej nas rzeczywistości i naszej kultury. Odkrywanie ich, zrozumienie ich istoty, to ważne i fascynujące wyzwanie. *Chaos* intryguje ludzi od Starożytności. Poeta Hezjod już w VII wieku p.n.e. głosił w *Theogonii*, że „na początku powstał Chaos (...) w Chaosie znajdują się źródła i krańce wszystkich rzeczy...”.

Literatura

- [1] D. Kwietniak, P. Oprocha, *Teoria chaosu w ujęciu matematycznym*, *Matematyka Stosowana* 9 (50) (2008), 1–45.
- [2] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Granice chaosu, fraktale*, t. II, WN PWN, Warszawa 1996.
- [3] T. M. Sękowski, *Zagadnienia matematycznej teorii chaosu*, Wyd. UMCS, Lublin 2007.

O pewnym zadaniu, czyli jak działy matematyki przenikają się

Michał PILIPCZUK*

Podczas drugiego etapu LIX Olimpiady Matematycznej uczestnicy zmierzili się z następującym zadaniem:

W każdym polu kwadratowej tablicy o rozmiarach $n \times n$ napisana jest liczba całkowita. Możemy wielokrotnie wykonywać następującą operację: wybieramy dowolne pole tabeli i zmniejszamy wpisaną w nim liczbę o liczbę pól sąsiednich (mających wspólny bok z wybranym polem), każdą zaś z liczb wpisanych w pola sąsiednie zwiększamy o 1. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ rozstrzygnąć, czy z dowolnej początkowej tabeli, w której suma wszystkich n^2 liczb jest równa zeru, można otrzymać tabelę składającą się z samych zer.

Przekładając treść na język intuicji, mamy do dyspozycji kwadratową tablicę liczb całkowitych, których suma jest zerowa, a w jednym ruchu można naraz „poprzesuwać jedynki” z pewnego pola na każde z pól sąsiednich. Zadanie sprowadza się zatem do stwierdzenia, czy za pomocą takich operacji można zawsze dojść do tablicy całkowicie wyzerowanej.

Wersję zaprezentowaną zawodnikom można rozwiązać, używając prostych metod niezmiennikowych. Czytelnik jednak z pewnością zauważy, że tę grę można na wiele sposobów uogólniać.

Naturalnym sposobem uogólnienia jest rozważenie dowolnego grafu nieskierowanego zamiast tablicy, na której rozpatrywaliśmy relację sąsiedztwa pól wzdłuż wspólnych boków. Mamy zatem graf, w którego wierzchołkach zostały umieszczone liczby całkowite tak, by ich suma była zerowa – taki sposób rozmieszczenia będziemy nazywać **stanem**. W jednym ruchu możemy poprzesuwać po jedynce z ustalonego wierzchołka do wszystkich wierzchołków sąsiednich. Łatwo sprawdzić, że wykonanie takiej operacji we wszystkich wierzchołkach oprócz jednego jest dokładnie operacją odwrotną do opisanej, zastosowaną na ominiętym wierzchołku. Powiemy, że dwa stany się komunikują, jeśli za pomocą tych operacji można przejść z jednego do drugiego. Wówczas zbiór stanów rozpada się na pewną liczbę klas parami komunikujących się stanów.

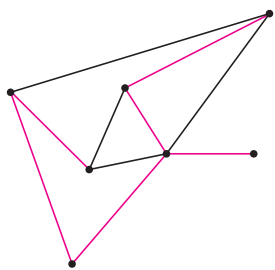
Tu dochodzimy do kolejnego, naturalnego pytania: *ile jest takich klas?* Czy zawsze jest ich skończenie wiele? Dla grafu niespójnego na pewno nie – tam niezmiennikiem jest suma liczb w każdej spójnej składowej, a istnieje nieskończenie wiele różnych sposobów określenia tych sum tak, żeby liczby z całego grafu sumowały się do zera.

A jak to jest dla grafów spójnych? Otóż okazuje się, że w przypadku grafów spójnych klas będzie zawsze skończenie wiele i dodatkowo dokładnie tyle, ile... drzew rozpinających grafu!



W tym miejscu warto zajrzeć do *deltoidu* w tym numerze i numerze 7/2009.

Drzewo rozpinające grafu G to drzewo, którego wierzchołki to wszystkie wierzchołki G , a krawędzie są wybrane spośród krawędzi G . Ponieważ musi zawierać wszystkie wierzchołki G , to można powiedzieć, że jest to największe drzewo, które mieści się w grafie G . Na rysunku 1 krawędzie przykładowego drzewa rozpinającego grafu są kolorowe.



Rys. 1

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Aby przeprowadzić szkic dowodu tego faktu, będziemy musieli powołać się na **twierdzenie Kirchhoffa**. Już samo jego sformułowanie brzmi jak połączenie przepisu kulinarnego z magiczną sztuczką.

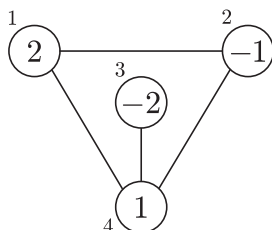
Niech G będzie n -wierzchołkowym grafem nieskierowanym. Jego wierzchołki oznaczmy przez v_1, v_2, \dots, v_n . Niech $A = (a_{ij})$ będzie macierzą $n \times n$, taką że:

- wyraz a_{ii} jest równy stopniowi wierzchołka v_i ,
- dla $i \neq j$ wyraz a_{ij} jest równy -1 , jeśli v_i i v_j są połączone krawędzią, oraz 0 w przeciwnym przypadku.

Niech \bar{A} będzie macierzą A z wyrzuconym dowolnym wierzchem i kolumną o tym samym numerze. Wówczas wyznacznik $\det \bar{A}$ jest równy liczbie drzew rozpinających grafu G .

Macierz A jest nazywana **laplasjanem** grafu. Dowód twierdzenia Kirchhoffa jest czysto algebraiczny – wyznacznik \bar{A} przedstawiamy jako sumę kwadratów wyznaczników pewnej liczby macierzy. Każda z tych macierzy odpowiada pewnemu wyborowi $n - 1$ krawędzi grafu. Okazuje się, że macierze te mają wyznacznik ± 1 , jeśli wybór zadaje drzewo rozpinające, 0 zaś w przeciwnym przypadku. Sumując kwadraty takich wyznaczników, otrzymujemy liczbę drzew rozpinających.

Spróbujmy teraz algebraicznie podejść do naszej gry w przesuwanie jedynek. Wierzchołki grafu numerujemy liczbami od 1 do n i oznaczamy dalej przez v_1, \dots, v_n . Stany będziemy kodować jako układy $n - 1$ liczb całkowitych, czyli elementy kraty \mathbb{Z}^{n-1} (najłatwiej o nich myśleć jako o punktach w przestrzeni \mathbb{R}^{n-1} o wszystkich współrzędnych całkowitych). Stan zakodujemy, zapisując na i -tej współrzędnej liczbę wpisaną w i -ty wierzchołek. Ponieważ suma liczb wpisanych jest zerowa, więc liczba umieszczona w ominiętym wierzchołku v_n jest wyznaczona jednoznacznie jako liczba przeciwna do sumy pozostałych. Teraz należy zastanowić się, jak po zakodowaniu wyglądać będą dozwolone operacje. Operacja (dla ustalenia uwagi, odwrotna do opisanej) w wierzchołku v_i dla $i \leq n - 1$ odpowiada przesunięciu się o wektor mający $\deg v_i$ na i -tej współrzędnej, -1 na wszystkich współrzędnych odpowiadających sąsiadom (oprócz v_n) oraz 0 na pozostałych współrzędnych. Brzmi znajomo. Opisane $n - 1$ operacji odpowiadających wierzchołkom v_i dla $1 \leq i \leq n - 1$ wyznacza nam $n - 1$ wektorów, o które możemy się poruszać do przodu lub do tyłu. Operację w wierzchołku v_n da się uzyskać poprzez użycie wszystkich innych. Zatem dwa stany komunikują się, jeśli można przejść pomiędzy odpowiadającymi im elementami w \mathbb{Z}^{n-1} , poruszając się wzdłuż tych $n - 1$ wektorów.



Rys. 2. Przykładowy stan w grafie o laplasjanie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

W kracie \mathbb{Z}^3 opisujemy go poprzez trójkę $(2, -1, -2)$. Operacje (odwrotne) w wierzchołkach $1, 2, 3$ odpowiadają dodawaniu wektorów $(2, -1, 0)$, $(-1, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Teraz trzeba sobie zadać pytanie, ile będzie szukanych klas. Chwila zastanowienia pozwala stwierdzić, że jest to bardzo proste. Nasze $n - 1$ wektorów rozpinają pewien równoległoscian w kracie \mathbb{Z}^{n-1} . Wówczas każdy punkt kratowy wewnątrz równoległoscianu zadaje inną klasę. Punktów kratowych wewnątrz jest zaś dokładnie tyle, ile wynosi objętość równoległoscianu. Fakty te niewątpliwie wymagają bardziej szczegółowego sprawdzenia, ale wykonanie odpowiednich obliczeń dla przykładu wektorów $(2, 0)$ i $(0, 2)$ w kracie \mathbb{Z}^2 powinno rozwiązać wszelkie wątpliwości co do ich prawdziwości.

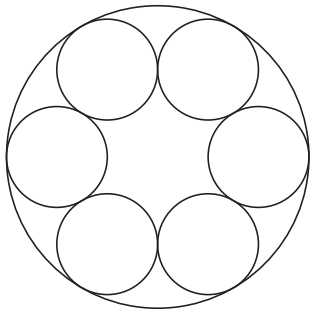
Objętość równoległoscianu jest równa wyznacznikowi macierzy utworzonej przez wpisanie w wiersze wektorów go rozpinających. Łatwo zauważyć, że macierz ta jest dokładnie macierzą \bar{A} z twierdzenia Kirchhoffa! Wobec tego jego zastosowanie kończy dowód – liczba klas jest równa objętości równoległoscianu, czyli wyznacznikowi, o którym wiemy, że jest równy liczbie drzew rozpinających.

Wydaje się, że zarówno sformułowanie gry, jak i pojęcie drzewa rozpinającego są czysto kombinatoryczne. Musieliśmy jednak przejść przez sporą dawkę algebry, aby pokazać wzajemne relacje między nimi. Pokazuje to dość często spotykane zjawisko w kombinatoryce – aby uchwycić pewną własność, musimy umieć spojrzeć na problem z dużo szerszej perspektywy i zastosować narzędzia pozornie zupełnie z innej półki.

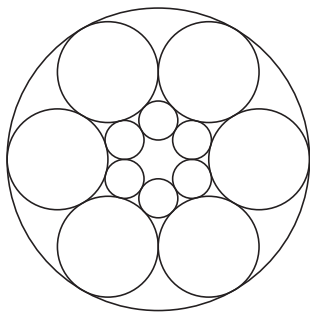


Jeszcze jedno zadanie konstrukcyjne

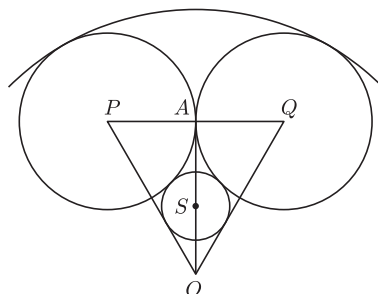
W pierwszym artykule o rozetach (*Delta* 12/2008) pokazaliśmy, w jaki sposób można skonstruować wewnątrz okręgu serię jednakowych okręgów stycznych do niego wewnątrz i kolejno do siebie zewnątrz (zob. rysunek 1). Teraz będziemy chcieli dodać do tych okręgów serię mniejszych okręgów stycznych zewnątrz zarówno do okręgów pierwszej serii, jak i kolejno do siebie (zob. rysunek 2). Dokładniej, chcemy tę nową serię okręgów skonstruować za pomocą cyrkla i linijki. Widzimy od razu, że środki nowych okręgów będą leżały na promieniach największego okręgu przechodzących przez punkty styczności okręgów pierwszej serii. Z drugiej strony, punkty styczności okręgów mniejszych leżą na promieniach prowadzących do środków okręgów większych. Te dwa warunki wystarczą do przeprowadzenia konstrukcji.



Rys. 1



Rys. 2

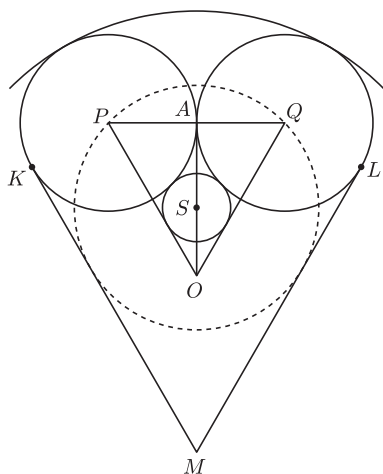


Rys. 3

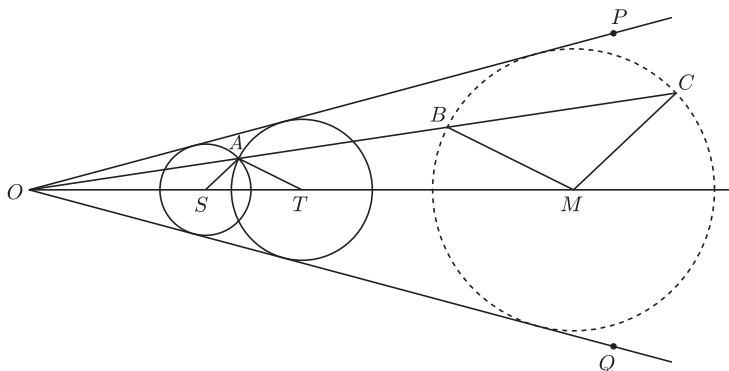
Popatrzymy dokładniej, jak jest położony jeden z tych mniejszych okręgów. Mamy dwa okręgi pierwszej serii o środkach w punktach P i Q . Okręgi te są styczne zewnątrz w punkcie A . Środek S poszukiwanego okręgu leży na odcinku OA (punkt O jest środkiem okręgu ograniczającego rozetę); ten poszukiwany okrąg jest zaś styczny do ramion kąta POQ (zob. rysunek 3). Pokażemy trzy różne konstrukcje tego okręgu (wystarczy oczywiście skonstruować jego środek S). Najpierw sprowadzimy nasze zadanie do bardzo znanego zadania, które rozwiążemy dwoma sposobami. Poprowadźmy odcinki KM i LM równoległe odpowiednio do PO i QO , styczne w punktach K i L do danych okręgów o środkach P i Q (zob. rysunek 4). Narysowany przerywaną linią okrąg o środku S i promieniu SP przechodzi przez punkty P i Q oraz jest styczny do ramion kąta KML . Nasze zadanie sprowadza się zatem do bardzo znanego zadania: przez dany punkt położony wewnątrz kąta poprowadzić okrąg styczny do ramion tego kąta.

Pierwszy sposób rozwiązania wykorzystuje podstawowe własności jednokładności. Mamy dany punkt A położony wewnątrz kąta POQ (zob. rysunek 5). Mamy skonstruować okrąg styczny do półprostych OP i OQ , przechodzący przez punkt A . Oczywiście, środek tego okręgu leży na dwusiecznej kąta POQ . Weźmy dowolny okrąg styczny do ramion kąta o środku M położonym na dwusiecznej. Niech półprosta OA przecina ten okrąg w punktach B i C .

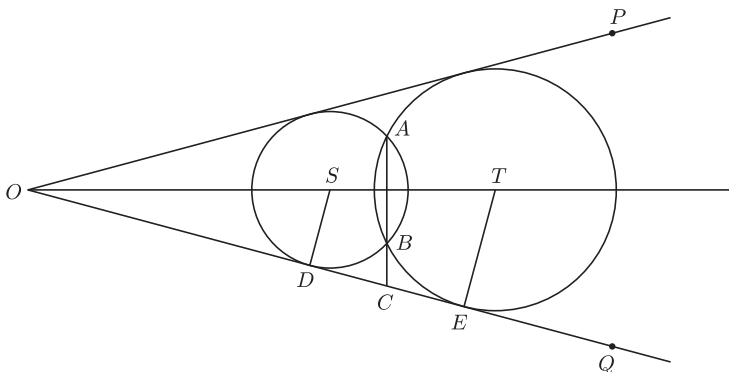
Znajdujemy na dwusiecznej kąta POQ takie punkty S i T , że $AS \parallel CM$ oraz $AT \parallel BM$. Znalezione punkty są środkami dwóch okręgów stycznych do ramion kąta i przechodzących przez punkt A . Nietrudny dowód tego stwierdzenia pozostawimy jako ćwiczenie.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Drugi sposób konstrukcji wykorzystuje twierdzenie o odcinkach stycznej i siecznej z poprzedniego artykułu (*Delta* 12/2009). Przypuśćmy znów, że punkt A leży wewnątrz kąta POQ (zob. rysunek 6). Okrąg styczny do ramion kąta i przechodzący przez punkt A przechodzi także przez punkt B symetryczny do A względem dwusiecznej kąta.

Niech C będzie punktem przecięcia prostych AB i OQ . Na prostej OQ znajdujemy takie punkty D i E , że

$$CD^2 = CE^2 = CA \cdot CB.$$

Wtedy punkty D i E są punktami styczności okręgów przechodzących przez A i B i stycznych do prostej OQ . Wyznaczenie środków tych okręgów jest już łatwe. Dowód poprawności tej konstrukcji pozostawimy jako ćwiczenie.

Pokażemy teraz trzeci sposób konstrukcji. Powróćmy do sytuacji zobrazowanej na rysunku 3. Poprowadźmy dwusieczną kąta AOQ ; niech przecina ona okrąg o środku Q w punkcie C . Niech S będzie punktem przecięcia prostych QC i OA . Niech wreszcie D będzie rzutem punktu S na prostą OQ . Z podobieństwa trójkątów ODS i OAQ wynika, że

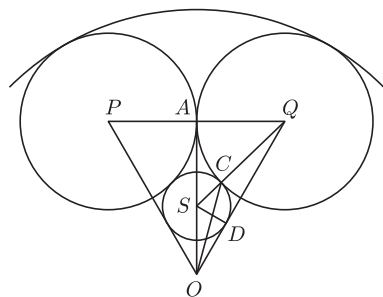
$$\frac{DS}{AQ} = \frac{OS}{OQ}.$$

Z twierdzenia o dwusiecznej (w trójkącie OSQ) dostajemy równość

$$\frac{CS}{CQ} = \frac{OS}{OQ}.$$

Ponieważ $AQ = CQ$, więc $CS = DS$, skąd wynika, że okrąg o środku S i promieniu CS (a więc styczny zewnętrznie do okręgu o środku Q) jest też styczny do prostej OQ . Jest to więc szukany okrąg. Z tej konstrukcji dowiadujemy się również, że punkt styczności C leży na dwusiecznej kąta AOQ .

Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI



Rys. 7

Pokrycie wierzchołkowe kontratakuje

Marcin PILIPCZUK*

W *Delcie* 7/2009 Marek Cygan opisał pewien sposób radzenia sobie z tym, że dla niektórych *trudnych* problemów nie potrafimy znaleźć szybkiego algorytmu. Autor rozważał klasę problemów NP-trudnych – czyli takich, których prawdopodobnie nie można rozwiązać w czasie wielomianowym – i pokazywał, że dla wielu z nich można w efektywny sposób skonstruować nie dokładne, lecz *przybliżone* rozwiązanie.

W tym artykule spróbujemy ugryźć trudne problemy z drugiej strony. Wciąż poruszamy się w świecie algorytmów działających w czasie wielomianowym – te uznajemy za *szybkie*. Ale zamiast poszukiwać dokładnego rozwiązania, użyjemy innej sztuczki: będziemy szukali algorytmów, które starają się jak najbardziej zmniejszyć rozmiar instancji (czyli egzemplarza problemu, np. zadanego grafu), zachowując przy tym odpowiedź. Wówczas, dla zredukowanej instancji, możemy odpalić nasz ulubiony algorytm dokładny, np. rozpatrujący wszystkie możliwości. A jako że rozmiar egzemplarza będzie dużo mniejszy od początkowego, algorytm dokładny być może zadziała całkiem szybko. Przejdźmy do przykładu.

Pokryciem wierzchołkowym w grafie G nazwiemy taki zbiór wierzchołków P , że każda krawędź G ma co najmniej jeden koniec w P . Problem znalezienia liczności najmniejszego pokrycia wierzchołkowego w danym grafie jest NP-trudny. Marek Cygan w swoim artykule pokazywał, jak szybko znaleźć pokrycie wierzchołkowe, które jest co najwyżej dwa razy liczniejsze od optymalnego (czyli tzw. 2-aproksymację).

My będziemy rozważać wersję problemu pokrycia wierzchołkowego, w której odpowiedź jest binarna („TAK” lub „NIE”). Mianowicie, mając dany graf G oraz liczbę naturalną k , pytamy, czy w grafie G istnieje pokrycie wierzchołkowe zawierające co najwyżej k wierzchołków. Oczywiście, z punktu widzenia algorytmów wielomianowych obie wersje są równoważne: mając dany algorytm rozwiązujący wersję decyzyjną, możemy wyszukać najmniejsze k , dla którego algorytm ten daje odpowiedź „TAK”, i w ten sposób otrzymać rozmiar najmniejszego pokrycia wierzchołkowego.

Mamy więc dany graf G i liczbę k . Co możemy teraz zrobić? Ustalmy wierzchołek v . Jeśli v nie należy do pewnego pokrycia wierzchołkowego P , to wszyscy sąsiedzi v muszą należeć do P . Poszukujemy P o mocy co najwyżej k , więc jeśli v ma co najmniej $k + 1$ sąsiadów, to musimy wziąć v do P . W ten sposób otrzymaliśmy następującą *regulę redukcyjną*: *jeśli w grafie G jest wierzchołek v , który ma co najmniej $k + 1$ sąsiadów, wyrzuc z G wierzchołek v oraz incydentne z nim krawędzie oraz zmniejsz k o jeden*. W wyniku zastosowania tej reguły otrzymaliśmy równorzędną instancję problemu pokrycia wierzchołkowego: w zredukowanym grafie istnieje pokrycie wierzchołkowe rozmiaru co najwyżej $k - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy w oryginalnym grafie istniało pokrycie wierzchołkowe rozmiaru co najwyżej k .

A co się dzieje, jeśli nie możemy zastosować powyższej reguły? Każdy wierzchołek jest incydentny z co najwyżej k krawędziami, więc pokrycie wierzchołkowe P *pokrywa* co najwyżej $|P| \cdot k$ krawędzi. Czyli, jeśli nie możemy zastosować naszej reguły, a zostało nam więcej niż k^2 krawędzi, możemy śmiało odpowiedzieć „NIE”.

Otrzymaliśmy właśnie coś, co informatycy nazywają *jądrem* (ang. *kernel*) problemu pokrycia wierzchołkowego: pokazaliśmy szybki algorytm, który albo rozwiązuje problem pokrycia wierzchołkowego, albo znajduje równoważną instancję problemu o co najwyżej k^2 krawędziach. Zwróćmy uwagę na to, że rozmiar zredukowanego grafu zależy tylko od parametru k , a nie od rozmiaru wyjściowego grafu: początkowy graf mógł być olbrzymi.

A może da się lepiej? Zredukowaliśmy graf do k^2 krawędzi, ale może da się jeszcze ograniczyć liczbę wierzchołków? Zacznijmy od prostej obserwacji: z grafu G możemy wyrzucić wszystkie wierzchołki izolowane. Zostanie nam

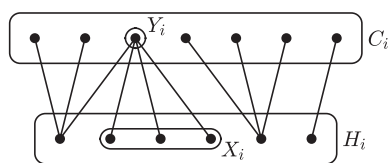
*Instytut Informatyki,
Uniwersytet Warszawski

co najwyżej $2k^2$ wierzchołków. Pokażemy teraz inną regułę redukcyjną – istotnie bardziej skomplikowaną od poprzedniej – która prowadzi do dużo mniejszego grafu: zredukujemy liczbę wierzchołków do $4k$. Założmy więc, że G ma więcej niż $4k$ wierzchołków.

Aproksymując pokrycie wierzchołkowe, Marek Cygan używał *skojarzeń*. My również ich użyjemy. Skojarzeniem w grafie nazywamy zbiór krawędzi, w którym żadne dwie nie mają wspólnego końca. Istnieje szybki algorytm znajdujący najliczniejsze skojarzenie w dowolnym grafie – założmy więc, że znamy M , najliczniejsze skojarzenie w grafie G . Zauważmy, iż w dowolnym pokryciu wierzchołkowym musi być co najmniej jeden koniec każdej krawędzi z M . Skoro te nie są incydentne, to jeśli $|M| > k$, możemy od razu odpowiedzieć „NIE”. Założmy więc dalej, że $|M| \leq k$.

Niech H_0 będzie zbiorem wierzchołków, które są końcami krawędzi w M , a C_0 niech będzie zbiorem pozostałych wierzchołków. Skoro $|M| \leq k$, to $|H_0| = 2 \cdot |M| \leq 2k$, czyli $|C_0| > 2k$. Co więcej, zauważmy, że w G nie ma żadnej krawędzi łączącej dwa wierzchołki w C_0 : gdyby była, moglibyśmy dodać ją do M , powiększając liczbę skojarzenia.

Uwaga, teraz będziemy robić coś skomplikowanego. Wyrzucmy z grafu G wszystkie krawędzie o obu końcach w H_0 . Otrzymamy wówczas graf dwudzielny G_0 , który z jednej strony będzie miał H_0 , a z drugiej C_0 . Sprawdźmy, czy w tym grafie istnieje skojarzenie rozmiaru $|H_0|$ (czyli największe możliwe). Jeśli nie istnieje, to, z twierdzenia Halla, istnieje zbiór $X_0 \subset H_0$ i zbiór jego sąsiadów $Y_0 \subset C_0$, taki że $|X_0| > |Y_0|$. Wyrzucmy z grafu X_0 i Y_0 , tj. weźmy $H_1 = H_0 \setminus X_0$ i $C_1 = C_0 \setminus Y_0$. Postępujemy tak do skutku, tj. mając dane H_i i C_i :



Rys. 1. Krok konstrukcyjny: wybór X_i oraz Y_i .

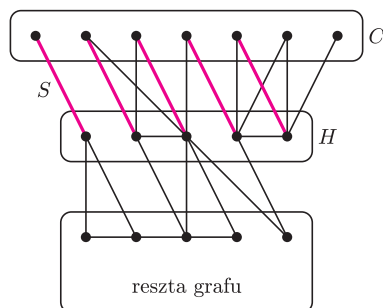
1. konstruujemy graf dwudzielny G_i , biorąc z grafu G tylko krawędzie łączące H_i z C_i ;
2. sprawdzamy, czy istnieje w tym grafie skojarzenie rozmiaru $|H_i|$ – jeśli tak, to koniec;
3. jeśli nie, to korzystając z twierdzenia Halla, znajdujemy zbiór $X_i \subset H_i$ i zbiór jego sąsiadów $Y_i \subset C_i$, taki że $|X_i| > |Y_i|$;
4. przypisujemy $H_{i+1} = H_i \setminus X_i$, $C_{i+1} = C_i \setminus Y_i$.

Pomińmy tutaj problem, jak znajdować zbiory X_i i Y_i : wystarczy nam informacja, że można to zrobić w czasie wielomianowym. Zauważmy, że postępując według powyższej procedury, utrzymujemy następujące niezmienniki:

1. w G nie ma krawędzi łączącej dwa wierzchołki ze zbioru C_i , gdyż $C_i \subset C_0$, a ten warunek był spełniony już dla C_0 ;
2. $|H_i| < |C_i|$, bo $|H_0| < |C_0|$ i w każdym kroku $|X_i| > |Y_i|$;
3. zawsze $X_i \neq H_i$, gdyż zbiorem sąsiadów H_i jest całe C_i – żaden z wierzchołków C_i nie jest izolowany, bo te usunęliśmy. A zatem H_i nigdy nie stanie się puste;
4. H_i jest zbiorem sąsiadów C_i , gdyż za każdym razem usuwając z H_i zbiór X_i , ze zbioru C_i usuwamy Y_i , czyli wszystkich sąsiadów X_i .

W związku z tym, gdy nasza procedura zakończy działanie, otrzymamy niepuste zbiory wierzchołków $H = H_i$ oraz $C = C_i$ o następujących własnościach:

1. w G nie ma krawędzi łączącej dwa wierzchołki z C ;
2. istnieje skojarzenie S rozmiaru $|H|$, w którym każda krawędź łączy wierzchołek z H z wierzchołkiem z C ;
3. H jest zbiorem sąsiadów C .



Rys. 2. Rozkład koronny grafu G .

To, co właśnie otrzymaliśmy, nazywamy *rozkładem koronnym* (ang. *crown decomposition*) grafu: mamy koronę C leżącą na głowie H . Zauważmy, że w dowolnym pokryciu wierzchołkowym w grafie G musimy wybrać co najmniej $|S| = |H|$ wierzchołków spośród $C \cup H$ – musimy wybrać po końcu każdej krawędzi z S . Ale, z drugiej strony, biorąc do pokrycia wierzchołkowego całe H , pokrywamy wszystkie krawędzie incydentne z $C \cup H$. Możemy więc zachłannie wziąć do pokrycia wierzchołkowego całe H i usunąć z grafu wierzchołki $C \cup H$ oraz incydentne z nimi krawędzie. Tym samym zmniejszyliśmy rozmiar grafu.

Zastanówmy się, co właśnie osiągnęliśmy. Wyszliśmy od takiej instancji problemu pokrycia wierzchołkowego (grafu G oraz parametru k), że graf G miał więcej niż $4k$ wierzchołków. Przeraził Uważny Czytelnik zauważy także, że w powyższej konstrukcji po kryjomu założyliśmy $k > 0$. Możemy, dla danego grafu G z parametrem k , powtarzać powyższą redukcję, dopóki jest to możliwe. Zauważmy, iż przy redukcji parametr k może się zmieniać – ale zawsze będzie malał. Mamy trzy możliwe zakończenia tej procedury:

1. pewna redukcja odpowie „NIE”, gdyż rozmiar skojarzenia M będzie za duży – wówczas wiemy, że w początkowym grafie odpowiedź też była „NIE”;
2. otrzymamy w wyniku redukcji parametr $k = 0$ – wówczas odpowiedź brzmi „TAK”, jeśli w grafie nie pozostała żadna krawędź, lub „NIE” w przeciwnym przypadku;
3. otrzymamy nowy zredukowany graf G z nowym parametrem k , taki że graf G ma co najwyżej $4k$ wierzchołków.



Rozwiązanie zadania F 761.
Bilans energii ma postać

$$q_1 \lambda + c q_1 (t_1 - t_2) = c q_2 (t_x - t_2).$$

Stąd

$$t_x = \frac{q_1 \lambda}{q_2 c} + t_2 \left(1 - \frac{q_1}{q_2}\right) + \frac{q_1}{q_2} t_1 = 72^\circ \text{C}.$$

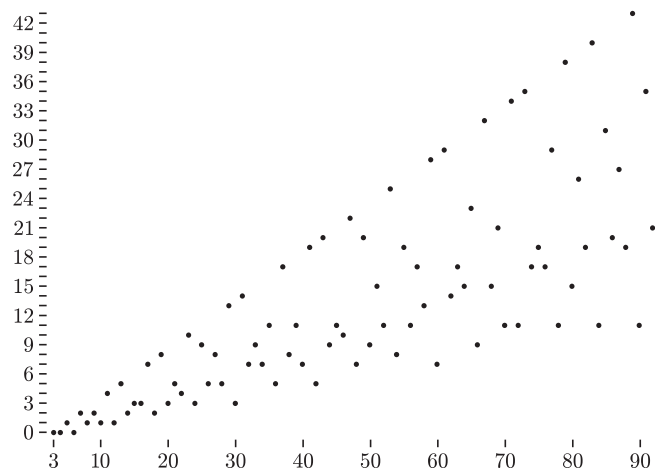
Pokazaliśmy właśnie, że algorytm polegający na aplikowaniu opisanej redukcji, dopóki jest to możliwe, prowadzi do zredukowania wyjściowego grafu do rozmiaru co najwyżej $4k$, gdzie k jest parametrem zredukowanej instancji, a więc jest nie większy od parametru oryginalnej instancji.

Wykonując powyższą konstrukcję trochę uważniej, można otrzymać jądro o $3k$ wierzchołkach, a komplikując dużo bardziej, da się dojść do algorytmu redukującego graf do $2k$ wierzchołków. Z drugiej strony, ostatnio udowodniono, że przy pewnych, rozsądnych założeniach z teorii złożoności nie istnieje jądro o k^γ krawędziach dla żadnego $\gamma < 2$.

Wiele NP-trudnych problemów ma niewielkie jądra. Bardzo często algorytmy redukujące są proste, opierają się na kombinatorycznych spostrzeżeniach, a nie na wielkiej teorii. Można by całą *Deltę* wypełnić opisami algorytmów jak ten powyżej, ale może jednak tego nie róbmy.

Ta sama funkcja trzema sposobami

Funkcję na ogół określa się za pomocą wykresu, tabelki lub wzoru. Oto ta sama funkcja $\#$ w tych trzech postaciach.



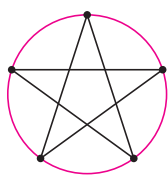
n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\#$	0	0	1	0	2	1	2	1	4	1	5	2	3	3	7	2	8	3
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
$\#$	5	4	10	3	9	5	8	5	13	3	14	7	9	7	11	5	17	8
n	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
$\#$	11	7	19	5	20	9	11	10	22	7	20	9	15	11	25	8	19	11
n	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
$\#$	17	13	28	7	29	14	17	15	23	9	32	15	21	11	34	11	35	17
n	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
$\#$	19	17	29	11	38	15	26	19	40	11	31	20	27	19	43	11	35	21

$$\#(n) = \left(\frac{n}{2} \prod_{p_i | n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \right) - 1,$$

gdzie p_i przebiegają wszystkie dzielniki pierwsze liczby n ; na przykład $\#(100) = 19$.

Proszę sprawdzić, że funkcja ta oblicza, ile jest różnych wielokątów foremnych gwiazdzistych o n wierzchołkach.

Wielokąt foremny gwiazdzisty o n wierzchołkach to łamana zamknięta wpisana w okrąg, mająca wszystkie odcinki równej długości, większej od boku zwykłego n -kąta foremnego. Wynika z tego, że łamana taka ma samoprzecięcia. Najbardziej znanym przykładem jest, mający 5 wierzchołków, pitagorejski pentagram.



M. K.



Rozwiązanie zadania M 1273.

Z danego równania wynika, że liczba x jest parzysta. Niech więc $x = 2a$.

Po podstawieniu dane równanie przybiera postać: $4a^3 + y^3 = 2z^3$.

Stąd wynika, że liczba y jest parzysta.

Przyjmijmy zatem $y = 2b$. Wobec tego $2a^3 + 4b^3 = z^3$. Z zależności tej wynika z kolei, że również liczba z jest parzysta.

Podstawmy więc $z = 2c$ do ostatniego równania: $a^3 + 2b^3 = 4c^3$.

Wykazaliśmy zatem, że jeśli trójka liczb całkowitych (x, y, z) spełnia dane równanie, to każda z liczb x, y, z jest parzysta i trójka $(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z)$ także spełnia dane równanie.

Kontynuując to rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że jeśli trójka liczb całkowitych (x, y, z) spełnia dane równanie, to każda z liczb x, y, z musi być podzielna przez dowolną potęgę dwójki. To jednak jest możliwe jedynie wtedy, gdy $x = y = z = 0$.

Trójka $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ jest zatem jedynym rozwiązaniem w liczbach całkowitych danego równania.

Informatyczny kącik olimpijski (29): Trening

Tym razem przyjrzymy się zadaniu *Training* z Międzynarodowej Olimpiady Informatycznej 2007.

Mamy dany spójny graf nieskierowany o n wierzchołkach z wyróżnionym drzewem rozpinającym (tzn. wyróżnione jest $n - 1$ krawędzi, które tworzą drzewo). Krawędzie spoza tego drzewa mają przypisane koszty. Należy przeciąć krawędzie o najmniejszej sumie kosztów, tak aby w grafie nie pozostał żaden cykl prosty (tzn. taki, w którym nie powtarzają się wierzchołki) długości parzystej. Krawędzi drzewowych nie wolno przecinać. Dodatkowo wiadomo, że stopień żadnego z wierzchołków grafu nie przekracza (niedużego) k .

Krawędzie spoza drzewa będą nazywał *poprzecznymi*. Każda poprzeczna krawędź tworzy z naszym drzewem dokładnie jeden cykl (nazwijmy go *cyklem poprzecznym*). Jeśli cykl ten jest długości parzystej, musimy tę krawędź przeciąć, robimy więc to czym prędzej i nie zajmujemy się więcej taką krawędzią. Zauważmy, że w poprawnym rozwiązaniu możemy pozostawić cykle poprzeczne długości nieparzystej, ale tylko pod warunkiem, że żadne dwa z nich nie mają wspólnej krawędzi. Gdyby bowiem miały, to przez ich złączenie i usunięcie części wspólnej uzyskalibyśmy cykl prosty długości $(2a + 1) + (2b + 1) - 2d = 2(a + b + 1 - d)$, przy czym $2a + 1$ i $2b + 1$ są długościami tych cykli, a d – długością części wspólnej. Cykli poprzecznych bez wspólnych krawędzi nie da się w żaden sposób połączyć w cykl prosty. Zadanie sprowadza się więc do wybrania poprzecznych krawędzi, które możemy pozostawić, tak aby odpowiadające im cykle poprzeczne nie miały wspólnych krawędzi.

Do rozwiązania tak uproszczonego problemu użyjemy programowania dynamicznego. Ukorzeńmy nasze drzewo rozpinające. Dla każdego wierzchołka x i dla każdego podzbioru S synów x w naszym drzewie obliczymy $t(x, S)$ – największą możliwą sumę kosztów poprzecznych krawędzi, które możemy pozostawić, a których cykle są rozłączne krawędziowo i zawierają się całkowicie w podgrafie złożonym z krawędzi łączących x z wierzchołkami z S , poddrzew wierzchołków z S oraz poprzecznych krawędzi.

Aby obliczyć $t(x, S)$, musimy zastanowić się nad cyklami poprzecznymi, które przechodzą przez x , ale nie przechodzą przez ojca x . Jeśli S jest pusty, to $t(x, S) = 0$. W przeciwnym przypadku ustalmy pierwszego syna $s \in S$. Załóżmy, że istnieje cykl poprzeczny, który zawiera x i s , ale nie zawiera ojca x . Niech e będzie krawędzią poprzeczną tegoż cyklu, a C – zbiorem jego wierzchołków. Wtedy przy obliczaniu $t(x, S)$ należy uwzględnić wyrażenie:

$$(1) \quad t(x, S \setminus C) + \sum_{r \in C \setminus \{x\}} t(r, A(r) \setminus C),$$

przy czym $A(v)$ oznacza zbiór wszystkich synów wierzchołka v . Możemy też nie zdecydować się wziąć żadnego takiego cyklu, czemu odpowiada wyrażenie:

$$(2) \quad t(s, A(s)) + t(x, S \setminus \{s\}).$$

Ostatecznie jako $t(x, S)$ weźmiemy maksimum z wartości (1) po odpowiednich parach (e, C) oraz (2).

Odpowiedzią w naszym zadaniu będzie

$$W - t(q, A(q)),$$

przy czym W jest sumą kosztów wszystkich krawędzi poprzecznych, a q – korzeniem drzewa.

Zastanówmy się nad złożonością czasową tego rozwiązania. Graf ma $O(n \cdot k)$ krawędzi. Dla każde

krawędzi poprzecznej musimy znaleźć jej cykl w czasie $O(n)$, co daje łączny koszt $O(n^2 \cdot k)$. Każda krawędź poprzeczna e jest rozważana podczas programowania dynamicznego tylko dla wierzchołka x będącego najwyższym wierzchołkiem w drzewie, do którego sięga cykl poprzeczny zawierający e . Stąd sumę po wierzchołkach tego cyklu, występującą w wyrażeniu (1), wystarczy obliczyć raz. Dla każdej pary (x, S) wybieramy albo brak krawędzi poprzecznych, albo też jedną z krawędzi, których cykle przechodzą przez x oraz pierwszego syna x w S , ale nie przez ojca x . Niech takich właśnie krawędzi poprzecznych będzie $E(x, S)$, a wszystkich krawędzi, których cykle przechodzą przez x , ale nie przechodzą przez jego ojca – $E(x)$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V} \sum_{S \subseteq A(x)} E(x, S) &\leq 2^k \cdot \sum_{x \in V} E(x) = \\ &= O(n \cdot k \cdot 2^k). \end{aligned}$$

Programowanie dynamiczne zajmuje więc czas $O(n \cdot k \cdot 2^k)$ plus obliczanie sum po wstawianych cyklach, którego koszt czasowy jest taki sam jak koszt szukania tych cykli. Stąd łączna złożoność czasowa to $O(n \cdot k \cdot (n + 2^k))$ przy zużyciu pamięci rzędu $O(n \cdot 2^k)$.

Tomasz KULCZYŃSKI

Jakie obrazy są wytwarzane przez soczewki?



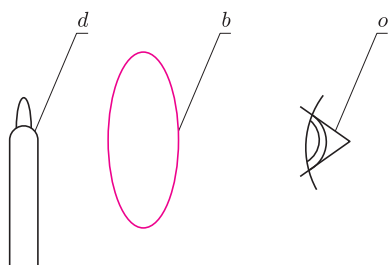
Stanisław BEDNAREK

W doświadczeniach opisanych w poprzednim odcinku badaliśmy, od czego zależy zdolność skupiająca soczewek. Dziś spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, jakie obrazy powstają za ich pomocą.

Odległość ta nazywa się odległością dobrego widzenia, czyli taką, przy której człowiek o normalnym wzroku prawidłowo i bez wysiłku widzi przedmioty.

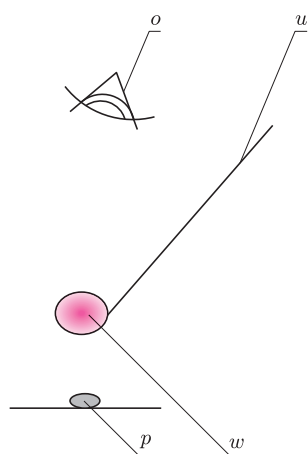
Najprostsze doświadczenie, wyjaśniające nieco ten problem, możemy wykonać, posługując się spłaszczoną, przezroczystą butelką od szamponu do włosów napełnioną wodą i szczelnie zamkniętą. Tak przygotowana butelka stanowi dwuwypukłą, skupiającą soczewkę walcową. Butelkę chwytemy jedną ręką za korek i ustawiamy w odległości około 25 cm na wprost oczu. Do drugiej ręki bierzemy jakiś niewielki przedmiot, np. długopis, i umieszczamy go w odległości kilku centymetrów za butelką (rys. 1). Patrząc na butelkę, widzimy powiększony obraz tego przedmiotu. Obraz ten jest tak samo skierowany jak przedmiot – nazywamy go obrazem prostym. Ponadto widziany obraz jest pozorny.

Oglądamy go za butelką w miejscu, w którym naprawdę się nie znajduje. W tym przypadku butelka z wodą działa jak lupa, czyli soczewka skupiająca o krótkiej ogniskowej, przeznaczona do oglądania w powiększeniu niewielkich przedmiotów.



Rys. 1. Spłaszczona butelka jako lupa; b – butelka, d – długopis, o – oko.

Interesującą lupę możemy też łatwo wykonać z kropli wody. W tym celu z kawałka drutu o średnicy około 1 mm, uzyskanego np. z rozprostowanego spinacza biurowego, wyginamy kombinerkami oczko o średnicy kilku milimetrów z kilkucentymetrową, odgiętą ukośnie rączką (rys. 2). Oczko zanurzamy w wodzie i wyjmujemy, tak żeby osadziła się na nim duża, spłaszczona kropla wody. Właśnie ta kropla będzie spełniała rolę soczewki. Jeżeli tę soczewkę umieścimy w niewielkiej odległości nad jakimś małym obiektem, np. nad skrawkiem papieru, to patrząc na nią, zobaczymy powiększony, pozorny i prosty obraz tego obiektu.

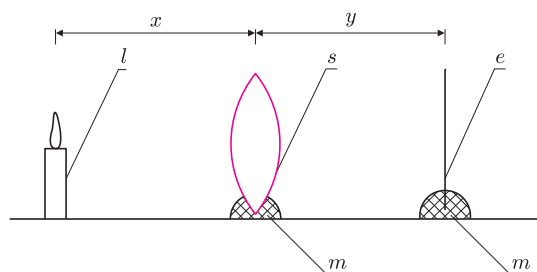


Rys. 2. Kropla wody jako lupa; u – uchwyt, w – woda, p – przedmiot, o – oko.

Żeby przeprowadzić systematyczne badania obrazów, wytwarzanych przez soczewki skupiające, najlepiej będzie, jeżeli postaramy się o lupę szklaną lub plastikową o średnicy 5–6 cm. Taką lupę można najtaniej, bo już za kilka złotych, kupić na bazarach lub w sklepie z artykułami papierniczymi. Nieco droższe lupy znaleźć można w sklepach fotooptycznych. Możemy również wykorzystać soczewkę ze starych okularów używanych przez dalekowidza. Oprócz lupy potrzebna będzie jeszcze latarka, wytwarzająca równoległą wiązkę światła, cienka świeczka o długości 2–3 cm, kwadratowy kawałek białego kartonu o boku kilku centymetrów, linijka i trochę plasteliny. Żeby ułatwić obserwację obrazów, nasze doświadczenia powinniśmy wykonać w zaciemnionym pomieszczeniu.

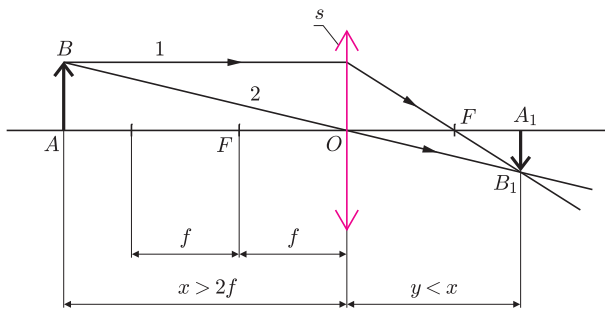
Na początek, podobnie jak w doświadczeniach opisanych w poprzednim odcinku, wyznaczymy ogniskową posiadanej soczewki. Skierujemy na soczewkę równoległą wiązkę światła, wychodzącą z latarki, i, przesuwając biały kawałek kartonu ustawiony za soczewką, znajdziemy taką jego odległość od soczewki, przy której świecąca plamka ma najmniejsze rozmiary. Zmierzymy tę odległość za pomocą linijki. Jest to ogniskowa f naszej soczewki.

Następnie zbudujemy nasz układ doświadczalny, który przedstawia rysunek 3. Świeczkę ustawiamy na powierzchni stołu. Przed świeczką w odległości x , większej niż dwukrotność ogniskowej ($x > 2f$), ustawiamy soczewkę, wciskając ją w grudkę plasteliny. Z kolei za soczewką ustawiamy kawałek białego kartonu, również wciskając go w odrobinę plasteliny. Karton ten posłuży nam za ekran, na którym będziemy oglądali obrazy świeczki.

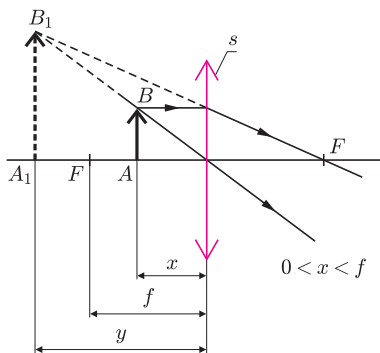


Rys. 3. Schemat układu do badania obrazów wytwarzanych przez soczewkę skupiającą; l – świeczka, s – soczewka, e – ekran, m – plastelina.

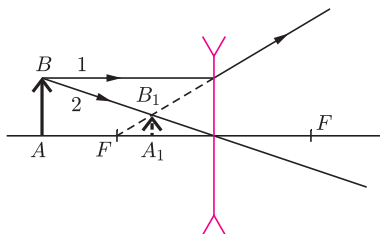
Mając przygotowany układ doświadczalny, przystępujemy do badania obrazów. Zapalamy świeczkę, zaciemniamy pokój i przesuwamy ekran tak, żeby zobaczyć na nim najwyraźniejszy, czyli ostry, obraz świeczki. Jakie właściwości ma ten obraz? Jak daleko od soczewki znajduje się ekran? Okazuje się, że w tym przypadku obraz jest mniejszy niż świeczka, czyli przedmiot. Ponadto obraz jest odwrócony, a ponieważ widzimy go na ekranie, to nazywamy obrazem rzeczywistym. Odległość y ekranu od soczewki jest mniejsza niż odległość x przedmiotu od niej.



Rys. 4. Graficzna metoda otrzymywania obrazu rzeczywistego, wytwarzanego przez soczewkę skupiającą.



Rys. 5. Graficzna metoda otrzymywania obrazu pozornego, wytwarzanego przez soczewkę skupiającą.



Rys. 6. Graficzna metoda otrzymywania obrazu wytwarzanego przez soczewkę rozpraszającą.

Jeżeli udało się nam zdobyć soczewkę rozpraszającą (najłatwiej chyba można ją uzyskać ze starych okularów używanych przez krótkowidza), to stosując układ doświadczalny, jak na rysunku 3, i metodę graficzną, moglibyśmy zbadać obrazy wytwarzane przez tę soczewkę. Rysując obrazy, należy w tym przypadku pamiętać, że promień 1, równoległy do głównej osi optycznej, załamuje się w ten sposób, iż jego przedłużenie przechodzi przez ognisko pozorne (rys. 6). Promień 2, padający na środek optyczny soczewki, przechodzi, jak poprzednio, bez zmiany kierunku. Obrazy tworzą się w punkcie przecięcia przedłużenia promienia 1 z promieniem 2. Są to więc obrazy pozorne i możemy je oglądać, patrząc w soczewkę od strony promieni wychodzących. Jako problem doświadczalny do samodzielnego rozwiązania proponujemy zbadanie, czy dla tej soczewki właściwości obrazu zależą od odległości przedmiotu od soczewki.

Właściwości otrzymanego obrazu możemy też zbadać teoretycznie, używając ogólnej metody graficznej, pokazanej na rysunku 4. Rysujemy soczewkę s i po obu stronach w równych odległościach zaznaczamy jej ogniska F . W odległości $x > 2f$ zaznaczamy przedmiot AB w postaci strzałki. Z wierzchołka B tej strzałki rysujemy dwa promienie świetlne 1 i 2, z których pierwszy biegnie równoległe do głównej osi optycznej soczewki, czyli prostej przechodzącej przez oba ogniska F i środek optyczny soczewki O , a drugi przechodzi przez ten środek. Promień 1 po załamaniu się w soczewce przechodzi przez jej ognisko, a promień 2 biegnie prosto bez zmiany kierunku. Oba promienie przecinają się

w punkcie B_1 , który jest obrazem punktu B . W ten sam sposób możemy wykreślić obrazy dowolnych punktów oglądanego przedmiotu. Zauważymy wówczas, że obraz jest zmniejszony, odwrócony i rzeczywisty, oraz że tworzy się w odległości y od soczewki spełniającej warunek $y < x$.

Następnie dwukrotnie powtarzamy, z drobnymi modyfikacjami, poprzednie doświadczenie. Za pierwszym razem zmniejszamy odległość przedmiotu od soczewki do $x = 2f$, a za drugim zmniejszamy jeszcze bardziej, tak żeby spełniony był warunek: $2f > x > f$. Jakie obrazy otrzymamy za pierwszym i drugim razem? Spróbujmy je narysować poznaną metodą graficzną. Okazuje się, iż w obu przypadkach obrazy są rzeczywiste i odwrócone, ale w pierwszym przypadku wielkość obrazu jest taka sama jak przedmiotu, a w drugim obraz jest powiększony.

Umieśćmy teraz przedmiot w ognisku soczewki ($x = f$) i przesuwając ekran, spróbujmy znaleźć obraz. Czy jest to możliwe? Dla wyjaśnienia sprawy zastosujemy do tej sytuacji metodę graficzną. Widzimy, że w tym przypadku nie możemy znaleźć obrazu, a metoda graficzna pokazuje, iż promienie wychodzące z dowolnego punktu przedmiotu po przejściu przez soczewkę są równoległe. Nie mogą więc przeciąć się i utworzyć obrazu. Czasem mówi się, że obraz znajduje się w nieskończoności, ale nasza skończona natura nie pozwala na jego wykrycie.

Zmniejszmy jeszcze bardziej odległość przedmiotu od soczewki, umieszczając go między ogniskiem F i soczewką ($0 < x < f$). Przesuniemy ekran i poszukajmy obrazu. Dla sprawdzenia naszych poczynań zastosujemy metodę graficzną. Co z tego wynika? Okazuje się, że na ekranie nie możemy znaleźć obrazu, a w metodzie graficznej promienie wychodzące z soczewki są rozbieżne i nie przecinają się (rys. 5). Nie mogą więc dać obrazu rzeczywistego, który byłby widoczny na ekranie. Możemy jednak przedłużyć promienie wychodzące z soczewki w kierunku przedmiotu i wówczas ich przedłużenia przetną się w punkcie B_1 , który jest obrazem pozornym punktu B . Obraz ten zobaczymy, patrząc w soczewkę od strony wychodzących promieni. Jest on powiększony i prosty. Właśnie takie obrazy widzieliśmy za pomocą lupy w pierwszych dwóch doświadczeniach.

Na koniec warto dodać, że poznanie obrazów wytwarzanych przez soczewki pozwala zrozumieć działanie wielu przyrządów optycznych, np. lornetki, lunety, teleskopu, mikroskopu, aparatu fotograficznego, a także naszego oka. Warto też wspomnieć o bardzo interesującej soczewce, którą można czasem kupić w sklepach fotooptycznych. Jest to duży, przezroczysty arkusz giętkiej folii, mający wszystkie właściwości soczewki skupiającej. Dokładne oględziny pokazują, że jego powierzchnia nie jest gładka, lecz ma wiele współśrodkowych rowków w kształcie okręgu, na których światło ulega dyfrakcji. Jest to soczewka Fresnela.

Od Redakcji:

Badanie soczewki Fresnela i jej prostych uogólnień można, przy większym nakładzie pracy, przeprowadzić w domowych warunkach. Zagadnieniu temu poświęcony będzie artykuł Aleksandra Kubicy i Wiktora Pilewskiego w następnym numerze.

Krople na pajęczynie

Ledwo zaczęła się kalendarzowa wiosna, a już zaczynamy myśleć o długich letnich dniach. Gdy znajdziemy się na łonie natury, wystarczy wstać skoro świt po pogodnej nocy, żeby na łące czy w młodniku zobaczyć wspaniały widok tysięcy pajęczyn pokrytych rosą. Będą wśród nich misternie utkane sieci krzyżaków i ich pobratymców, ale większość uwidocznionych przez rosę sieci będzie utkana bezładnie. Właśnie te bezładne sieci, widziane z większej odległości, strojące młodniki jakby bożonarodzeniowymi włosami anielskimi, są tak efektowne. Ten wspaniały widok jest jednak niedostępny dla śpiochów. Słońce wysuszy rosę, nim wstaną.

Pająki zasadniczo stosują dwie genetycznie uwarunkowane strategie zakładania swoich powietrznych pułapek.

Użyteczność misternie utkanych sieci jest związana z pokrywającymi je kropelkami lepkiej cieczy, które skutecznie więżą ofiary, a pająki dopadają je, poruszając się po (skierowanych radialnie) niciach niepokrytych tym klejem.

Natomiast sieci bezładne nie są pokryte żadną lepką substancją. Zamiast tego mają strukturę wełny. Nici nie są gładkie. Rozdzielają się na kłębki nanowłókien, które powodują, że ofiara płącze się. Pająki tkają taką sieć za pomocą sitka przedniego, narządu przypominającego przetak lub grzebień (łac. *cribellum*).

Jednym z takich pajaków jest *Uloborus walckenaerius*, nazwany od nazwiska francuskiego wyższego urzędnika państwowego i naukowca przez innego francuskiego entomologa w 1806 roku. Ten niepozorny pająk występuje w strefie palearktycznej (czyli Eurazji i północnej Afryce).

Nici pajęcze to jeden z najbardziej niezwykłych materiałów. Są, chociażby, bardzo wytrzymałe. Lina z nich upleciona byłaby wielokrotnie bardziej wytrzymała od liny stalowej.

Nić tkana przez opisywanego pająka ma inną ciekawą własność. Mikroskopijne kropelki rosy migrują po niej, tworząc większe kropelki. Sprawę postanowili wyjaśnić autorzy pracy [1], a ich wyniki okazały się wystarczająco interesujące, żeby praca ukazała się w *Nature*.

Pod odpowiednio dużym powiększeniem widać, że sucha nić składa się z naprzemiennie ułożonych kłębków z bezładnie ułożonymi nanowłóknami oraz cienkich połączeń z nanowłóknami ułożonymi równolegle. Te kłębki wyglądają jak odpustowe obwarzanki na sznurku.

Gdy takie włókno znajdzie się w atmosferze kondensującej pary wodnej, najpierw utworzą się mikrokropelki w kłębkach, które, zwilżając je, spowodują wielokrotne zmniejszenie objętości kłębków, w wyniku czego staną się one wrzecionowatymi zgrubieniami.

Kolejne kropelki tworzą się głównie na wrzecionowatych zgrubieniach, a następnie migrują w kierunku środków tych zgrubień, łącząc się w większe kropelki.

Autorów pracy [1] najbardziej interesowało wyjaśnienie mechanizmu powodującego migrację kropelek. Okazuje się, że można to zjawisko wyjaśnić, ale odwołując się aż do dwóch niezależnych sił ciągnących kropelki w tę samą stronę. Jedna jest związana ze zwiększoną zwilżalnością bardziej porowatych obszarów nici. Źródłem drugiej siły jest sam wrzecionowaty kształt węzła, który powoduje, że dla kropli, której jedna krawędź styku z nicią jest w węźle, a druga obejmuje rozszerzające się wrzeciono, pojawia się różnica nachylenia płaszczyzny stycznej do powierzchni wody w punkcie styku z nicią do osi nici, wywołując wypadkową siłę, ściągającą kropelkę do środka wrzeciona.

Autorzy potwierdzili swoje ustalenia, modyfikując nić pajęczą w sposób likwidujący powstawanie omówionych sił oraz tworząc sztuczną nić o opisanych własnościach, dla której zaobserwowali to samo zjawisko.

Możliwość wytwarzania takich sztucznych nici pozwala mieć nadzieję na praktyczne zastosowania do wychwytywania wody z pary wodnej lub do oddzielania aerozoli z powietrza.

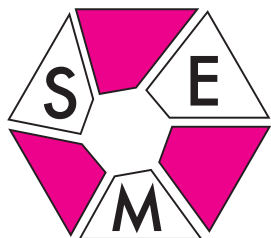
Jak widać, natura ma jeszcze mnóstwo pomysłów do zaoferowania wnikliwym obserwatorom.

Piotr ZALEWSKI

[1] Yongmei Zheng, Hao Bai, Zhongbing Huang, Xuelin Tian, Fu-Qiang Nie, Yong Zhao, Jin Zhai i Lei Jiang, *Directional water collection on wetted spider silk*, *Nature* **463** (4/02/2010) 640.



źródło: U.S. Fish and Wildlife Service



9 stycznia 2010 roku odbyły się zawody drugiego stopnia V Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. W ciągu trzech godzin uczniowie rozwiązywali pięć zadań. Szkice rozwiązań wszystkich zadań z zawodów OMG można znaleźć pod adresem www.omg.edu.pl

Zadania z geometrii przestrzennej zawsze sprawiały uczestnikom trudności. W tym roku na drugim etapie OMG liczba poprawnych rozwiązań zadania „przestrzennego” była niższa niż liczba rozwiązań każdego innego zadania.

Oto sformułowanie tego zadania:

(1) Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy? Odpowiedź uzasadnij.

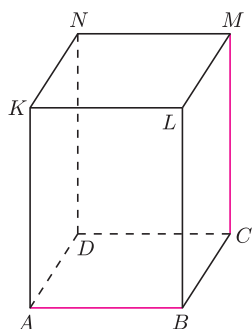
Uwaga: w przestrzeni proste prostopadłe nie muszą się przecinać.

Podobne zadanie było na finale II OMG:

(2) Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym? Odpowiedź uzasadnij.

W obu zadaniach pytamy o istnienie ostrosłupa czworokątnego, w którym pewne krawędzie są prostopadłe. W zadaniu (2) chodzi o prostopadłość krawędzi sąsiednich, a w zadaniu (1) sąsiednich bądź niesąsiednich.

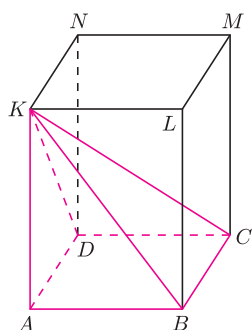
W pierwszym przypadku proste zawierające te krawędzie przecinają się, w drugim nie muszą (na co dodatkowo zwrócono uwagę w treści zadania). W obu zadaniach odpowiedź jest twierdząca. Dalej podamy przykłady odpowiednich ostrosłupów.



Przypomnijmy, że dwie proste w przestrzeni nazywamy prostopadłymi, gdy istnieje trzecia prosta, która jest równoległa do jednej z nich i przecina drugą pod kątem prostym.

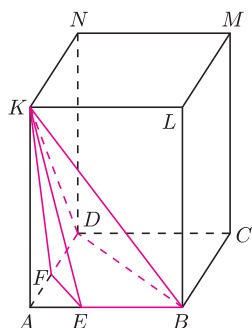
W prostopadłościanie na rysunku obok skośne proste AB i CM są prostopadłe – tą trzecią prostą może być, na przykład, prosta CD .

Prostopadłość w przestrzeni ma ważną własność: jeśli prosta k jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych l i m , to prosta k jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie prostych l i m .



Spójrzmy jeszcze raz na nasz prostopadłościan: ponieważ prosta CB jest prostopadła do prostych BA i BL , więc jest prostopadła do płaszczyzny ABL , a w szczególności jest prostopadła do prostych BK i AL .

Widzimy więc, że wszystkie ściany boczne ostrosłupa o podstawie $ABCD$ oraz wierzchołku K są trójkątami prostokątnymi. Ostrosłup ten daje rozwiązanie zadania (2). Ponieważ jego krawędź boczna CK nie jest prostopadła do żadnej krawędzi podstawy, więc jednak nie jest on rozwiązaniem zadania (1).



Zmodyfikujmy nieco ten ostrosłup: podstawą będzie czworokąt $EBDF$, a wierzchołkiem pozostanie punkt K . Krawędzie boczne KE i KB są prostopadłe do krawędzi podstawy FD , a krawędzie boczne KF i KD są prostopadłe do krawędzi EB . Jest to więc przykład rozwiązania zadania (1).

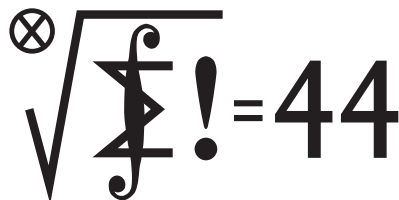
Zachęcamy do rozwiązania jeszcze dwóch zadań:

(3) Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy, a podstawa jest czworokątem wklęsłym?

(4) Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy i każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym?

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.



Zadania z matematyki nr 599, 600

Redaguje Marcin E. KUCZMA

599. W każde pole kwadratowej tabeli o wymiarach $n \times n$, gdzie $n \geq 4$, została wpisana liczba $+1$ lub -1 . Każdemu zbiorowi n pól, zawierającemu po jednym polu z każdego wiersza i z każdej kolumny, przyporządkowujemy iloczyn liczb wpisanych w te pola. Dowieść, że suma uzyskanych iloczynów dzieli się przez 4.

600. Dwieścienne kątów wewnętrznych A, B, C trójkąta ABC przecinają okrąg na nim opisany odpowiednio w punktach D, E, F . Punkty D', E', F' są symetryczne do punktów D, E, F odpowiednio względem prostych BC, CA, AB . Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie H . Dowieść, że punkty D', E', F', H leżą na jednym okręgu.

Zadanie 600 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2010

Rozwiązania zadań z numeru 12/2009

Przypominamy treść zadań:

591. Liczby naturalne a, b, c są związane zależnością

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem tych liczb. Dowieść, że iloczyn $abcd$ jest kwadratem liczby naturalnej.

592. Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Proste AP, BP, CP, DP przecinają sfery opisane na czworościanach $PBCD, PCDA, PDAB, PABC$ odpowiednio w punktach K, L, M, N (różnych od P). Udowodnić, że

$$\frac{|AP|}{|AK|} \cdot \frac{|BP|}{|BL|} \cdot \frac{|CP|}{|CM|} \cdot \frac{|DP|}{|DN|} \leq \frac{1}{256}.$$

591. Pisząc $a = xd, b = yd, c = zd$, widzimy, że liczby naturalne x, y, z także spełniają równanie $1/x + 1/y = 1/z$, a ich największy wspólny dzielnik jest równy 1; przy tym $x > z, y > z$. Przekształcamy to równanie do postaci $xz + yz = xy$, czyli

$$(x - z)(y - z) = z^2.$$

Gdyby różnice w nawiasach miały wspólny dzielnik pierwszy, musiałby on być zarazem dzielnikiem liczby z , a to jest niemożliwe. Różnice te są więc dodatnimi liczbami względnie pierwszymi. Ich iloczyn jest równy z^2 , zatem każda z nich jest kwadratem liczby naturalnej.

Mnożymy równość $yz = xy - xz$ stronami przez xd^4 i otrzymujemy

$$abcd = x^2 d^4 (y - z).$$

Stąd już wynika teza, bo $y - z$ jest kwadratem liczby naturalnej.

592. Zastosujmy przestrzenną inwersję o środku P (i dowolnym promieniu). Niech A^*, B^*, C^*, D^* będą obrazami punktów A, B, C, D . Leżą one na półprostych $PA^{\rightarrow}, PB^{\rightarrow}, PC^{\rightarrow}, PD^{\rightarrow}$, więc punkt P leży wewnątrz czworościanu $A^*B^*C^*D^*$.

Objętości czworościanów $PB^*C^*D^*, PC^*D^*A^*, PD^*A^*B^*, PA^*B^*C^*$ oznaczmy odpowiednio przez V_a, V_b, V_c, V_d ; ich suma jest równa objętości V czworościanu $A^*B^*C^*D^*$.

Obrazem sfery przechodzącej przez punkty P, B, C, D jest płaszczyzna $B^*C^*D^*$. Ta sfera przechodzi także przez punkt K , więc jego obraz K^* leży na płaszczyźnie $B^*C^*D^*$. Punkt P leży na odcinku AK ; leży zatem również na odcinku A^*K^* . Punkty P oraz A^* są wierzchołkami ostrosłupów o wspólnej podstawie $B^*C^*D^*$. Zachodzi więc proporcja $|K^*P| : |K^*A^*| = V_a : V$. W takim razie

$$\frac{|PA^*|}{|PK^*|} = \frac{|K^*A^*| - |K^*P|}{|K^*P|} = \frac{|K^*A^*|}{|K^*P|} - 1 = \frac{V}{V_a} - 1.$$

Z własności inwersji wynika, że $|PK| \cdot |PK^*| = |PA| \cdot |PA^*|$. Wobec tego

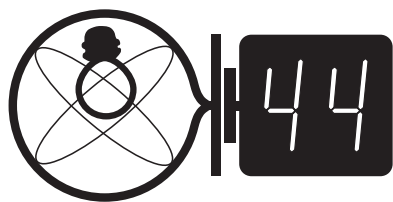
$$\frac{|AK|}{|AP|} = \frac{|AP| + |PK|}{|AP|} = 1 + \frac{|PK|}{|PA|} = 1 + \frac{|PA^*|}{|PK^*|} = \frac{V}{V_a}.$$

Analogicznie wyrażają się stosunki $|BL| : |BP|, |CM| : |CP|, |DN| : |DP|$. W rezultacie

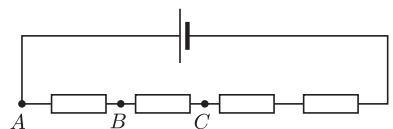
$$\frac{|AP|}{|AK|} + \frac{|BP|}{|BL|} + \frac{|CP|}{|CM|} + \frac{|DP|}{|DN|} = \frac{V_a}{V} + \frac{V_b}{V} + \frac{V_c}{V} + \frac{V_d}{V} = 1.$$

Zastosowanie nierówności między średnimi daje tezę zadania.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2010



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 484 ($WT = 1,23$) i 485 ($WT = 3,93$) z numeru 10/2009

Krzysztof Magiera	Łosiów	36,89
Michał Kozlik	Gliwice	29,72
Jerzy Witkowski	Radlin	18,88

Zadania z fizyki nr 496, 497

Redaguje Jerzy B. BROJAN

496. Do źródła stałego napięcia dołączono 4 jednakowe oporniki połączone szeregowo. Gdy następnie dołączono pewien woltomierz do punktów A i B (rys. 1), wskazał on napięcie 3 V , a pomiar napięcia między A i C tym samym woltomierzem dał wynik 5 V . Ile wynosi napięcie źródła?

497. Zbiornik o objętości V łączymy z cylindrem o początkowej objętości $2V$ na trzy sposoby:

- ścianką przewodzącą ciepło (rys. 2),
- ruką tak wąską, że ciśnienie po obu stronach po pewnym czasie się wyrównuje, natomiast temperatura – nie (rys. 3),
- przegrodą, która po otwarciu pozwala na wyrównanie się zarówno ciśnień, jak i temperatur.

Poza ścianką z przypadku (a) inne ścianki naczyń nie wymieniają ciepła z wypełniającym wnętrze gazem doskonałym, którego początkowe ciśnienie p_0 i temperatura T_0 były jednakowe. Sprężono gaz w cylindrach do objętości V :

- tak szybko, że ciepło nie zdążyło przepłynąć przez ściankę (ale tak wolno, że przemiana była odwracalna – opisana wzorem $pV^\gamma = \text{const}$), a następnie zaczekano na wyrównanie się temperatur,
- tak szybko, że gaz nie zdążył przepłynąć rurką (ale... jak wyżej), a następnie zaczekano na wyrównanie się ciśnienia.
- po czym otwarto przegrodę, a następnie ją zamknięto.

Następnie cofnięto w opisany sposób tłoki do poprzedniego położenia i doprowadzono do wyrównania temperatury (w przypadku (a)) lub ciśnienia (b), lub obu (c). Jaką temperaturę osiągnął w każdym z tych przypadków gaz, jeśli $T_0 = 300\text{ K}$, wykładnik $\gamma = c_p/c_v$ ma wartość $1,4$, a przedstawiony cykl powtórzono 10 razy?

Rozwiązania zadań z numeru 12/2009

Przypominamy treść zadań:

488. Ciężarek o masie m wisi na nici, która owija się wokół dwóch nieważkich bloków ruchomych. Oś bloków są napięte sprężynkami o stałych sprężystości k_1 i k_2 (rys. 4). Obliczyć okres pionowych drgań ciężarka wokół położenia równowagi.

489. Chemiczne oczyszczanie wzbogaconego uranu (tzn. zawierającego podwyższony procent rozszczepialnego izotopu ^{235}U , stosowanego w reaktorach jądrowych) może być przeprowadzane w zbiorniku z cieczą, w którym oczyszczony tlenek uranu opada na dno. Ciepło wytwarzane przez reakcję chemiczną jest odprowadzane przez wodę otaczającą zbiornik. W pewnym zakładzie stosującym tę technologię doszło do dość poważnego wypadku, gdy oczyszczano uran wzbogacony nie – jak zwykle – do 3% , ale do 19% (tak wysoko wzbogacony uran jest stosowany w reaktorach wysokotemperaturowych). Przyczyną wypadku było zaniedbanie polegające na przetwarzaniu tej samej ilości materiału, co zwykle, mimo wyższej zawartości izotopu rozszczepialnego. Uran osadzający się na dnie zbiornika przekroczył wskutek tego masę krytyczną i rozpoczęła się reakcja łańcuchowa, która trwała w sposób samoczynnie kontrolowany przez 17 godzin. Jakie zjawiska fizyczne lub chemiczne mogły być odpowiedzialne za kontrolowany przebieg reakcji, która nie rozwinęła się do skali wybuchu?

488. Załóżmy, że oś dolnego bloku przesunie się w górę o x_1 , a oś górnego – w dół o x_2 . Z niezmienniczej łącznej długości nitki wynika wtedy wartość przesunięcia ciężarka w dół

$$x = 2x_1 + 2x_2.$$

Jeśli oznaczymy siłę napięcia nici przez F , to sprężynki napięte są jednakową siłą $2F$, czyli

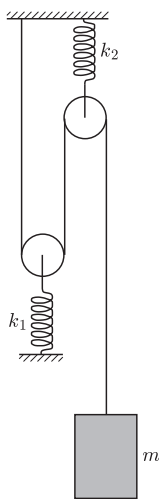
$$2F = k_1x_1 = k_2x_2.$$

Eliminując x_1 i x_2 , wyznaczamy związek między F a x :

$$F = \frac{k_1k_2}{4(k_1 + k_2)}x.$$

Współczynnik przed x po prawej stronie jest efektywną stałą sprężystości układu, tzn. ciężarek drga tak, jakby wisił na sprężynie o stałej sprężystości

$$k = \frac{k_1k_2}{4(k_1 + k_2)}.$$



Rys. 4

Okres drgań jest równy $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

(Dość podobne było przed 7 laty zadanie 348.)

489. Jednym z tych zjawisk mogło być to, że powstające ciepło wywołało konwekcję w cieczy wypełniającej zbiornik, mieszanie się osadu i zmniejszenie gęstości uranu. Drugim – wrzenie wody chłodzącej i zmniejszenie wskutek tego jej gęstości. Ponieważ woda ta faktycznie zaczęła pełnić rolę moderatora (spowalniacza neutronów), więc to również przyczyniało się do zahamowania reakcji jądrowej.

Opisywany wypadek miał miejsce w zakładzie Tokai-Mura w Japonii w 1999 roku i pociągnął za sobą 2 ofiary śmiertelne, wskutek napromieniowania.

Patrz w niebo: Woda na Księżycu

O wodzie poza Ziemią czytaliśmy w *Delcie* zaledwie trzy miesiące temu. Informacja o wodzie gdzieś tam w Kosmosie jest, owszem, ciekawa, ale abstrakcyjna. Natomiast co innego, jeżeli chodzi o wodę na Księżycu. Księżyc jest bowiem obiektem wyjątkowym choćby dlatego, że jest najbliżej Ziemi i można mieć nadzieję, że wkrótce znowu wylądują na nim ludzie i że nie będzie to wyprawa tak krótkotrwała, jak dotychczasowe. A w tej sytuacji problem wody z przyczyn całkiem praktycznych staje się bardzo istotny. Nikt nigdy poważnie nie twierdził, że na Księżycu są warunki sprzyjające życiu. Już pierwsze obserwacje teleskopowe (początek XVII w.) ukazywały ogromne kontrasty jasności i żadnych kolorów, co musiało sugerować, że panujące tam warunki są co najmniej „surowe”. Trudno dziś orzec, czy ciemne obszary na Księżycu nazwano morzami w dobrej wierze czy tylko symbolicznie. W każdym razie coraz lepsze obserwacje jedynie potwierdzały, że Księżyc jest globem martwym.

Posiadanie takiej opinii o gościnności Księżyca nie przeszkadza szukaniu obecności tam wody. Otóż skoro na obszarach oświetlonych przez Słońce temperatura gruntu osiąga $+120^{\circ}\text{C}$, wyklucza to szansę utrzymywania się tam wody przez dłuższy czas. Jedynymi miejscami, gdzie woda (oczywiście w postaci lodu) mogłaby się zachować, pozostają wnętrza nielicznych kraterów biegunowych, gdzie światło Słońca nigdy nie dociera, a temperatura jest rzędu -160°C . Przewiduje się nawet, że miejsca te mogłyby chwytać cząsteczki wody z rozbijających się meteoroidów, a nawet powstające z oddziaływania wodoru wiatru słonecznego z tlenem zawartym w skałach. Radarowe sondowania tych biegunowych kraterów (z sond okołoksiężycowych lub za pomocą radioteleskopu w Arecibo) wykazały, że i w nich zasoby wody są jednak skromne. Wygląda na to, że warstwy lodu na powierzchni nigdzie nie ma (wbrew entuzjastycznym oczekiwaniom z lat 90.). Jedynie pod powierzchnią Księżyca prawdopodobnie znajdują się gdzieś cienkie warstwy lodu wymieszanego z pyłem czy z lokalnym piaskiem, nie wiadomo jednak, czy lód ten będzie łatwo dostępny. Tak więc, nie jest świetnie i przyszłe wyprawy księżycowe muszą, niestety, liczyć się z tym, że zapasy wody trzeba będzie przywozić z Ziemi. Oczywiście, każda taka wyprawa będzie przez to mniej swobodna i odpowiednio droższa.

Tomasz KWAST

Kwiecień

Na kwietniowym niebie wieczorem dominuje Lew. Wyznaczają go jasne gwiazdy, z których najjaśniejsze trzy są podwójne. Można się o tym przekonać za pomocą niewielkiej lunety. Sam Regulus, najjaśniejsza (1,34 mag) gwiazda Lwa, ma towarzysza, który sam jest podwójny. Kto chciałby jednak tę informację potwierdzić osobiście, musiałby dysponować lepszą lunetą, bowiem składniki dzieli odległość $4''$. Cały układ znajduje się w odległości 20 pc. Regulus jest jedną z tzw. przed wiekami Gwiazd Królewskich, które leżą niemal na ekliptyce i dzielą ją na cztery części odpowiadające porom roku. Przejście Słońca w pobliżu Regulusa następowało w Starożytności około przesilenia letniego (obecnie Słońce mija Regulusa 23 sierpnia). Może więc słusznie Kopernik zdegradował tę gwiazdę, nadając jej obecną nazwę, tj. Małego Króla, w miejsce dawnej Rex, co – jak wiadomo – oznacza króla. Ale, mówiąc poważnie, nie wiem, dlaczego Kopernik to zrobił.

Merkury znajdzie się 8 IV najdalej od Słońca i można go szukać wieczorem nad zachodnim horyzontem. Wenus jest w Baranie i zachodzi wczesnym wieczorem. Mars jest w Raku i widać go w pierwszej połowie nocy. Jowisz jest na granicy Wodnika i Ryb, czyli blisko Słońca, więc go nie widać. Saturn jest w Pannie i wieczorem wschodzi. Nów Księżyca wypada 14 IV, a pełnia 28 IV. Żadnych zaćmień i zakryć jasných obiektów w kwietniu nie będzie. Około 21 IV będzie maksimum aktywności niezbyt obfitego roju Lirydów.

T. K.



Rozwiązanie zadania F 762.

W temperaturze $t_2 = 100^{\circ}\text{C}$ parcjalne ciśnienie pary wodnej wynosi

$p_2 = 10^5 \text{ Pa} = p_1/3$, bo woda wrze przy takim ciśnieniu w tej temperaturze.

Zatem parcjalne ciśnienie powietrza będzie równe $(1 - 1/3)p_1 = (2/3)p_1$.

Z równania Clapeyrona znajdziemy nową odległość tłka od powierzchni wody:

$$\frac{p_1 h}{T_1} = \frac{2p_1 x}{3T_2},$$

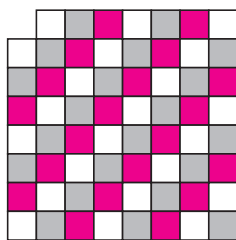
gdzie $T_1 = 279 \text{ K}$, a $T_2 = 373 \text{ K}$. Stąd otrzymujemy:

$$x \approx \frac{3}{2} \frac{T_2}{T_1} h \approx 4 \text{ cm}.$$



O szachownicach była mowa również w *deltoide* 7/2009.

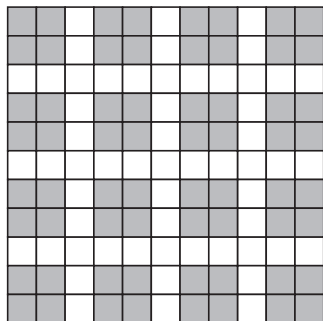
Wszystkie klocki lub kostki układamy zawsze zgodnie z liniami podziału na pola, tak by żaden klocek nie wystawał poza rozważany obszar i by żadne dwa na siebie nie nachodziły.



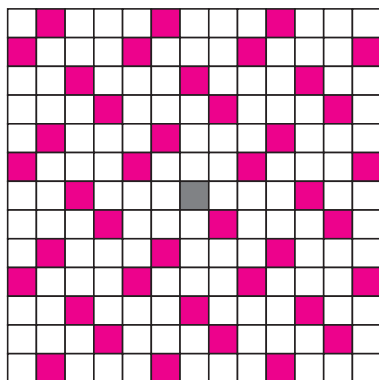
Rys. 1

1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1

Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Kolorowe szachownice Joanna JASZUŃSKA

Szachownicę często warto pokolorować. Prócz „tradycyjnej” czarno-białej kratki, czasem przydaje się wzorek bardziej wyrafinowany. Oto przykłady zadań.

1. Czy szachownicę 8×8 , z której usunięto dwa przeciwległe narożne pola, można pokryć kostkami domina 2×1 ?

R. Nie, bo każda kostka przykrywa jedno pole białe i jedno czarne. Skoro usunięto dwa pola tego samego koloru, zostało mniej pól jednego koloru niż drugiego. \square

2. Na każdym polu szachownicy 7×7 siedzi żaba. Nagle wszystkie żaby skaczą, każda na pole sąsiadujące bokiem ze swoim dotychczasowym. Udowodnij, że w rezultacie na któreś pole trafią przynajmniej dwie żaby.

R. Jest więcej pól w jednym z kolorów, powiedzmy czarnym. Żaby z tych pól muszą po skoku zmieścić się na mniejszej liczbie pól białych, bo każda żaba, skacząc, zmienia kolor pola. Stąd na któreś białe pole trafią przynajmniej dwie żaby. \square

3. Wykaż, że szachownicy 10×10 nie można pokryć 25 klockami w kształcie $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$.

R. Jest tyle samo pól białych i czarnych. Każdy klocek pokrywa trzy pola jednego koloru i jedno drugiego, więc do pokrycia potrzeba parzystej liczby klocków. \square

4. W środkowym z 27 sześcianików kostki $3 \times 3 \times 3$ siedzi kornik. Czy może on odwiedzić każdy sześcianik dokładnie raz, przechodząc zawsze przez ściankę?

R. Pokolorujmy kostkę w „trójwymiarową szachownicę”. Wtedy kornik przy każdym przejściu przez ściankę zmienia kolor pola. Startuje z pola w tym kolorze, którego jest mniej, więc nie zdoła odwiedzić wszystkich. \square

5. Z szachownicy 8×8 wycięto narożne pole. Czy da się ją pokryć klockami 3×1 ?

R. Nie. Na szachownicy z rysunku 1 jest inna liczba pól w każdym z 3 kolorów, tymczasem każdy klocek przykrywa po jednym polu każdego koloru. \square

6. Na szachownicy 8×8 ułożono 21 klocków 3×1 . Które pole zostało puste?

R. Wpiszmy w pola szachownicy liczby, jak na rysunku 2. Każdy klocek pokrywa pola o łącznej sumie liczb 2, zatem 21 klocków razem pokrywa pola o sumie 42. Suma wszystkich wpisanych liczb jest równa 44, więc puste musi zostać któreś pole z 2. Pozostawiam Czytelnikom łatwe sprawdzenie, że taki układ jest możliwy. \square

7. Czy szachownicę 8×9 można pokryć klockami 2×2 ?

R. Nie. Pokolorujmy pola o obu współrzędnych nieparzystych. Każdy klocek 2×2 pokrywa dokładnie jedno z nich, więc do pokrycia całej szachownicy potrzeba co najmniej 20 klocków. Nie zmieszczą się, bo $20 \cdot 2 \cdot 2 > 8 \cdot 9$. \square

8. Na szachownicy o wymiarach 11×11 ułożono 15 klocków 2×2 . Wykaż, że można zmieścić jeszcze jeden taki klocek.

R. Każdy klocek ma wspólne pola z dokładnie jednym z 16 szarych kwadratów 2×2 z rysunku 3. Któryś kwadrat zostaje zatem wolny i można na nim umieścić szesnasty klocek. \square

9. (Zawody *Baltic Way 98*). Z szachownicy 13×13 wycięto środkowe pole. Czy otrzymaną figurę da się pokryć 42 klockami 4×1 ?

R. Nie. Pokolorujmy szachownicę jak na rysunku 4. Każdy klocek pokrywa jedno pole kolorowe i trzy białe. Kolorowych pól jest tylko 41. \square

Zadania domowe:

10. Czy szachownicę 10×10 da się pokryć klockami 4×1 ?

11. Czy szachownicę 8×8 , z której usunięto dwa pola różnych kolorów, można pokryć kostkami domina 2×1 ?

12. (XLVI OM). Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , dla których szachownicę $n \times n$ można pokryć klockami, z których każdy ma wymiary 2×2 lub 3×3 .

Wskazówka. Rozważ pokolorowanie w „zebrę” (wiersze na przemian czarne i białe).