



Ze smutkiem przyjęliśmy wiadomość, że
27 stycznia 2010 roku zginął w wypadku samochodowym
Marcin Hauzer
Redaktor działu matematyki w latach 2005–2008
i Autor *Delty*






Redakcja

Byłeś z nami przez kilka lat. Pozostało wspomnienie.

Bardzo nam Ciebie brakuje, Marcinie.
Żonie składamy wyrazy najgłębszego współczucia.

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej w Warszawie

SPIS TREŚCI NUMERU 3 (430)

2 ²¹⁴⁶⁴⁵⁰⁵ , czyli jeszcze raz o potęgach dwójki <i>Paweł Strzelecki</i>	str. 1
O rysowaniu zderzeń <i>Maciej Lisicki</i>	str. 4
Nierówność Schwarza a fizyka cząstek elementarnych <i>Tomasz Tkocz</i>	str. 6
Od nazwy do konkretnej maszyny <i>Marek Marczykowski</i>	str. 8
Reguła czy przypadek?	str.10
Informatyczny kącik olimpijski (28): Maszyna Fibonacciego <i>Tomasz Kulczyński</i>	str.11
 Jaki dzień tygodnia? <i>Maciej Bryński</i>	str.12
Olimpiada lingwistyczna  Zadania	str.14 str.15
Kącik przestrzenny (2): Najmocniejsze twierdzenie stereometrii <i>Michał Kieza</i>	str.16
 Badamy zdolność skupiającą soczewek <i>Stanisław Bednarek</i>	str.18
Aktualności	str.20
 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.21
Klub 44	str.22
Patrz w niebo: Gromada ruchoma Arktura	str.24
Marzec  Dobrze się składa <i>Joanna Jaszewska</i>	str.24 str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 22-639-73-67)

internet: www.amos.waw.pl , e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2010 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2010 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Cena prenumeraty w 2010 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Amatorskie pomiary meteorologiczne

$2^{21464505}$, czyli jeszcze raz o potęgach dwójki

Paweł STRZELECKI*

O potęgach dwójki i własnościach ich rozwinięć dziesiętnych można było w *Delcie* poczytać wielokrotnie, m.in. w artykułach Zbigniewa Marciniaka i wyżej podpisanego. Istnieją zapewne osoby, które nie czytały tych artykułów, dlatego że kilkanaście lat temu nie umiały jeszcze czytać, choć dziś *Deltę* czytują. Być może jest to dostatecznym usprawiedliwieniem, żeby napisać o całej sprawie jeszcze raz.

Mam także drugie usprawiedliwienie. $2^{21464505}$ ma w zapisie dziesiętnym blisko sześć i pół miliona cyfr; początkowe z nich to 7, 0, 3, 2, 0, 1 i 0. Ponieważ zaś 7 marca 2010 roku Marek Kordos obchodzi siedemdziesiąte urodziny, więc mogę mu tę potęgę dwójki ofiarować w prezencie, dorzucając do pary $2^{25224715}$ – ta z kolei zaczyna się od cyfr 7031940, czyli daty urodzin Redaktora.

Czytelnik, jeśli zechce, potraktuje powyższe dwa zdania jako dowód ostatecznego zdziwaczenia matematyków. Jednak przy okazji przyjdą mu może do głowy pytania: co to za zbieg okoliczności? Dlaczego na początku rozwinięć dziesiętnych potęg dwójki pojawia się data okrągłych urodzin Redaktora? Czy podobny prezent można byłoby zrobić komukolwiek innemu? A może to objaw paranoi? Może autor tekstu, z braku lepszych rozrywek i pomysłów, postanowił zająć się numerologią?

NA OKŁADCE prezentujemy wizualizację dwóch przypadków zderzeń proton-proton w LHC, uchwyconych przez eksperyment ATLAS. Podobne przypadki zostały zarejestrowane przez pozostałe główne eksperymenty LHC: CMS, LHCb i ALICE. Pokazane przypadki zawierają, między innymi, miony, które, jako jedyne cząstki naładowane, są w stanie opuścić detektor, zostawiając ślady we wszystkich poddetektorach. Wyświetlone są tylko te elementy, w których jakiegokolwiek sygnały zostały zarejestrowane (na dolnym rysunku pokazano również zarys struktury magnesów toroidalnych). Czerwone linie to interpolacja śladów mionów na podstawie odczytów elektronicznych.

Paranoję i numerologię chętnie zostawiam innym. To, że wśród początkowych fragmentów zapisu dziesiętnego liczb 2^n można znaleźć np. 7031940, nie jest wcale szczęśliwym trafem; data urodzin każdego z nas (z numerami PESEL i NIP dorzucenymi na dodatek) znajduje się na początku zapisu dziesiętnego nieskończenie wielu potęg dwójki. To samo można powiedzieć nie tylko o datach. Istnieją np. wykładniki n , dla których zapis dziesiętny 2^n zaczyna się od ciągu utworzonego z wypisanych po kolei wszystkich numerów z książki adresowej mojego telefonu komórkowego. Pisząc te słowa, nie potrafię wprawdzie podać żadnej takiej liczby n , ale mimo to mam uczucie niezachwianej pewności, które nie zawsze towarzyszy mi w życiu. Takie uczucie pewności daje matematykowi dowód – w tym przypadku dowód twierdzenia, które orzeka, że *każdy skończony ciąg cyfr pojawia się na początku rozwinięcia dziesiętnego nieskończenie wielu potęg dwójki*. (Jedną z pociech, których dostarcza obcowanie z matematyką, jest to, że dzięki dowodom można być pewnym różnych rzeczy nieoczywistych.)

Nawet dla ciągów jednocyfrowych teza owego twierdzenia nie jest oczywista. Gdy zaczniemy wypisywać początkowe cyfry liczb 2^n dla $n = 0, 1, 2, \dots$, to ujrzymy następujący wzór:

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5,
1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5,
1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5,
1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, ...

Siódemka i dziewiątek jakoś ani śladu, prawda? Co więcej, komuś niecierpliwemu i nieuważnemu może przyjść do głowy myśl, że ciąg początkowych cyfr potęg dwójki jest okresowy i wszystko w nim powtarza się regularnie, co 10 miejsc.

To jednak tylko złudzenie, którego przyczyną jest to, że $2^{10} = 1024$ jest niezłym przybliżeniem liczby 1000. Mnożenie liczby przez 1000 polega przecież na dopisywaniu trzech zer na końcu jej zapisu dziesiętnego i nie ma najmniejszego wpływu na początkowy fragment tego zapisu. Gdy wielokrotnie mnożymy przez 1024, drobne i początkowo niezbyt istotne dodatki z końcowych fragmentów zapisu dziesiętnego zaczynają kumulować się i wzbierać, rozlewając się stopniowo coraz dalej w lewo. Gdybym wypisał wyżej piąty wiersz początkowych cyfr potęg dwójki, to zamiast szóstki byłaby w nim siódemka.

*Instytut Matematyki,
Uniwersytet Warszawski

Aby wykazać, że siódemka jest początkową cyfrą nieskończenie wielu potęg dwójki, trzeba wyjść poza krąg najprostszych eksperymentów i *zrozumieć*, co to znaczy, że zapis dziesiętny liczby 2^n zaczyna się od siódemki. Otóż, jest tak wtedy, gdy 2^n znajduje się między dwiema liczbami: pierwszą z nich jest siódemka z pewną ilością zer, a drugą – ósemka z taką samą liczbą zer. Wszystkie liczby między tymi dwiema zaczynają się od siódemki. I na odwrót, każdą liczbę, która ma za pierwszą cyfrę siódemkę, można wstawić w jeden z przedziałów o końcach $70 \dots 0$ i $80 \dots 0$ (zer jest w obu liczbach tyle samo).

Teraz, żeby było poręczniej, użyjmy symboli: 7 jest pierwszą cyfrą liczby 2^n wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego naturalnego k mamy

$$7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k.$$

Aby dostać prostszy, równoważny zapis, logarytmujemy te nierówności stronami (przy podstawie 10); daje to najpierw $k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$, a ostatecznie

$$\log 7 < n \log 2 - [n \log 2] < \log 8.$$

Możemy tak napisać, gdyż $0 < \log 7 < \log 8 < 1$ i dlatego k (liczba cyfr 2^n zmniejszona o 1) jest częścią całkowitą liczby $n \log 2$.

Poszukiwanie potęg dwójki z pierwszą cyfrą 7 jest więc tym samym, co obserwowanie kolejnych wyrazów ciągu $a_n := nx - [nx]$, gdzie $x = \log 2$, a $n = 0, 1, 2, \dots$.

Gdyby np. wziąć $x = 41/137$, ciąg a_n części ułamkowych kolejnych wielokrotności x byłby okresowy: wyrazy o numerach różniących się o 137 byłyby równe. Podobnie byłoby dla każdej liczby wymiernej x . Jednak $\log 2$ nie jest liczbą wymierną: gdyby $\log 2$ był równy p/q , to wprost z definicji logarytmu mielibyśmy $10^{p/q} = 2$, czyli $10^p = 2^q$, co jest niemożliwe (lewa strona dzieli się przez 5, a prawa nie). Kluczową dla nas konsekwencją niewymierności $x = \log 2$ jest to, że wszystkie wyrazy ciągu a_n są różne. Gdyby bowiem było $a_n = a_m$ dla jakichś numerów $n \neq m$, to przekształcając równość $nx - [nx] = mx - [mx]$, zapisalibyśmy x jako ułamek o liczniku i mianowniku całkowitym,

$$x = \frac{[nx] - [mx]}{n - m},$$

a wiemy już, że $x = \log 2$ takim ułamkiem nie jest.

Te dwa spostrzeżenia pozwalają zrozumieć wszystko do końca. Podzielmy najpierw odcinek $[0, 1]$ na m równych przedziałów, wybierając m tak, żeby długość każdej części była mniejsza niż $\log 8 - \log 7$ (wystarczy w tym celu wziąć $m = 18$). Zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta któreś dwie spośród a_1, a_2, \dots, a_{m+1} – powiedzmy a_s i a_{s+k} – należą do tego samego przedziału długości $1/m$. Jak otrzymać a_{s+k} , gdy znamy a_s ? Nietrudno to wymyślić: a_n jest częścią ułamkową nx , więc jeśli staniemy na osi liczbowej w punkcie a_s , zrobimy k kroków długości x w prawo i zmierzmy odległość od ostatniej miniętej liczby całkowitej, to otrzymamy część ułamkową liczby $a_s + kx$, która jest równa części ułamkowej liczby $a_s + [sx] + kx = (k + s)x$, tzn. równa a_{s+k} . A to znaczy, że

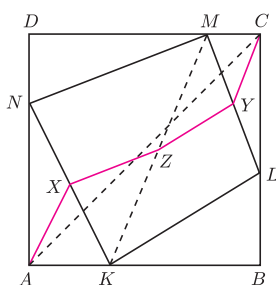
$$kx = (k + s)x - [sx] - a_s = [(k + s)x] - [sx] + a_{s+k} - a_s$$

jest sumą liczby całkowitej $l = [(k + s)x] - [sx]$ i ułamka $u = a_{s+k} - a_s$. Może zachodzi $u > 0$, a może $u < 0$. Tego nie wiemy i na szczęście jest to nieistotne. Na pewno jednak moduł u nie przekracza $1/m$, bo a_s i a_{s+k} wybraliśmy z tego samego krótkiego przedziału.

Dla wygody wyobraźmy sobie teraz, że oś liczbową została nawinięta na okrąg długości 1, jak nierozciągliwą nić na szpulkę. W wyniku tej operacji sklezione zostały końce odcinka $[0, 1]$, a także wszystkie liczby całkowite. Przesunięciu o x na nitce-osi-liczbowej odpowiada obrót szpulki-okręgu o kąt równy kątowi środkowemu opartemu na łuku długości x , czyli mówiąc po szkolnemu i nie bawiąc się w radiany, o kąt $360x$ stopni. Przesunięciu o kx , czyli k -krotnemu przesunięciu o x , odpowiada kolejne wykonanie k takich obrotów, czyli obrót o $360kx$ stopni. Wiemy już, że jest $kx = l + u$, tzn. $360kx = 360l + 360u$,



Rozwiązanie zadania M 1271.
Oznaczmy przez X, Y, Z odpowiednio środki odcinków KN, LM, KM .



Ponieważ trójkąty AKN oraz CLM są prostokątne, więc

$$AX = \frac{1}{2}KN \quad \text{oraz} \quad CY = \frac{1}{2}ML.$$

Ponadto, korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, otrzymujemy

$$XZ = \frac{1}{2}MN \quad \text{oraz} \quad ZY = \frac{1}{2}KL.$$

Wobec tego $KL + LM + MN + NK = 2(AX + XZ + ZY + YC) \geq 2AC = 2\sqrt{2}$. Wybierając punkty K, L, M, N jako środki odcinków AB, BC, CD, DA , otrzymujemy kwadrat $KLMN$ o obwodzie $2\sqrt{2}$.

Zatem najmniejszą możliwą wartością, jaką może przyjąć obwód czworokąta $KLMN$, jest $2\sqrt{2}$.

a obrót o $360l$ stopni dla całkowitego l nic przecież nie zmienia. Na naszej zwiniętej osi liczbowej przejście od a_s do a_{s+k} , a także od jakiegokolwiek a_j do a_{j+k} , polega więc na obrocie o kąt $360u$ stopni. Może w lewo, a może w prawo; tego nie wiemy. Dowcip polega jednak na tym, że liczba u ma niewielki moduł i dlatego k wyjściowych obrotów daje obrót o niewielki kąt. Zauważmy: dobierając wcześniej odpowiednio dużą liczbę m , moglibyśmy sprawić, że byłby to obrót o kąt mniejszy od dowolnie ustalonego.

Na szpulce-zwiniętej-osi jest lutek-przedział $(\log 7, \log 8)$. Dla dowolnego j liczby a_j, a_{j+k}, a_{j+2k} itd. przedzielone są lukami okręgu długości $|u| \leq 1/m$. Ponadto, wszystkie te liczby są różne; stwierdziliśmy to już dawno. Moglibyśmy je zaznaczyć ołówkiem, stawiając na okręgu kropki w regularnych odstępach, tak, jak podziałki na zegarku – tzn. prawie tak, bo wszak zatoczywszy ołówkiem koło, nie trafilibyśmy ponownie w to samo miejsce. Przedział $(\log 7, \log 8)$ jest dłuższy niż odstęp między sąsiednimi kropkami. Zatem któraś kropka weń wpadnie. Jeśli będziemy zaznaczać kropki bez końca, to za każdym pełnym obiegiem co najmniej jedna z nich znajdzie się na łuku między $\log 7$ a $\log 8$. Zatem do przedziału $(\log 7, \log 8)$ należy nieskończenie wiele wyrazów ciągu a_n . Nieskończenie wiele potęg dwójki zaczyna się od siódemki.

Identyczne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnego przedziału (α, β) , gdzie $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Wystarczy tak dobrać liczbę m , żeby „chodzić w kółko odpowiednio drobnymi kroczkami”. Nietrudno stąd wywnioskować, że każdy skończony ciąg cyfr pojawia się na początku zapisu dziesiętnego nieskończenie wielu potęg dwójki. Kto zechce, dopracuje szczegóły.

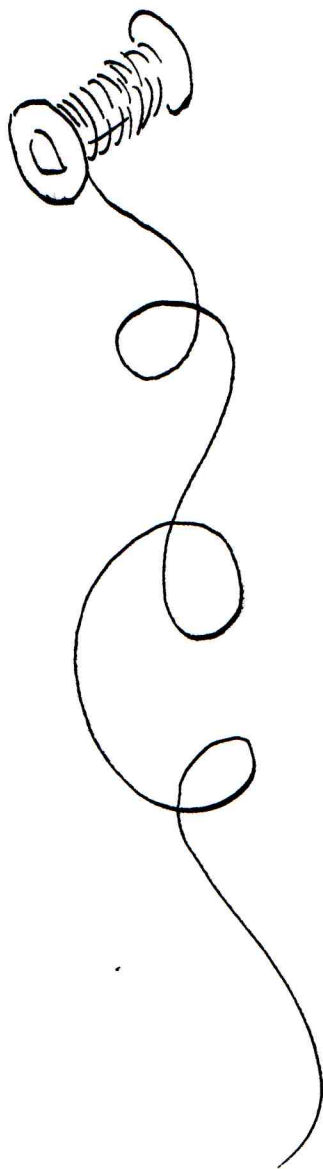
Czytelnik spostrzegł zapewne, że im przedział (α, β) krótszy, tym więcej potrzeba w powyższym rozumowaniu wyrazów ciągu a_n , żeby któryś z nich do tego przedziału trafił. Po chwili namysłu można wysunąć przypuszczenie, że liczby a_n powinny trafiać do przedziału (α, β) z grubszą proporcjonalnie często do długości tego przedziału. Tego już nie udowodnimy, ale prawdą jest, że ciąg

$$\frac{\#\{a_n : 1 \leq n \leq N, a_n \in (\alpha, \beta)\}}{N}$$

ma dla $N \rightarrow \infty$ granicę równą $\beta - \alpha$, czyli owo naturalne przypuszczenie jest jak najbardziej słuszne. Jest to twierdzenie Bôla, Sierpińskiego i Weyla o równomiernym rozkładzie. Wynika zeń, że częstości początkowych cyfr liczb 2^n są następujące: 30,1% jedynek, 17,6% dwójek, 12,5% trójek, 9,7% czwórek, 7,9% piątek, 6,7% szóstek, 5,8% siódemek, 5,1% ósemek i żaloszne 4,5% dziewiątek (proszę nie dodawać, bo błędy zaokrągleń wyjdą na jaw).

Takie same są częstości, z jakimi $1, 2, \dots, 9$ występują na początku k^n , gdy $\log k$ jest niewymierny, a więc gdy k nie jest potęgą dziesiątki. Na trop tego zjawiska wpadł w 1881 roku Simon Newcomb, astronom i matematyk, zauważywszy, że tablice logarytmiczne są bardziej wytarte na początkowych stronach. To samo wykrył pół wieku później Paul Benford, fizyk zatrudniony w firmie General Electric. Tak zwane prawo Benforda orzeka, że w różnych pochodzących z życia zestawach danych częstości początkowych cyfr są właśnie takie. W USA urzędy skarbowe i inni tropiciele oszustw finansowych z powodzeniem używają prawa Benforda w walce z tymi, którzy zamiast czytać *Deltę*, wolą np. seryjnie fałszować czeki i zbyt często wpisują na nich kwoty z dziewiątką na początku (bo w ich banku – począwszy od 10 000 – potrzebny jest przy wypłacie dodatkowy podpis kontrolera).

Kto lubi wygodę, płynącą ze stosowania odpowiedniej maszyneryi, a roczny wykład analizy matematycznej ma za sobą, niech zajrzy do książki Fomina, Kornfelda i Sinaja o teorii ergodycznej (polski przekład ukazał się w 1987 r.), odszuka podrozdział poświęcony równomiernemu rozkładowi, a następnie sam udowodni twierdzenie Bôla, Sierpińskiego i Weyla w paru linijkach (dużo treściwszych niż mój rozgadany tekst). To dzięki temu twierdzeniu wiedziałem, że wystarczy obejrzeć ledwie kilkadziesiąt milionów potęg dwójki, żeby na początku jednej z nich znaleźć właściwą datę. Gdyby Redaktor urodził się np. 17 marca, zadanie byłoby trudniejsze, a ja musiałbym dłużej nie używać laptopa do pracy.



Rozwiązanie zadania F 759.

Prędkość piłeczki jest największa w chwili zderzenia ze ścianką. Prędkość ta jest prostopadła do ścianki, z którą piłeczka się zderza. Z symetrii problemu mamy, że:

$$v_{\max} = \frac{gt}{2 \sin \alpha} \approx 7 \text{ m/s.}$$

Prędkość piłeczki będzie najmniejsza w chwili, gdy osiągnie ona największą wysokość, tzn. gdy będzie ona miała kierunek poziomy:

$$v_{\min} = v_{\max} \cos \alpha \approx 5 \text{ m/s.}$$

O rysowaniu zderzeń

Maciej LISICKI*

Zderzenia ciał są jednym z częściej poruszanych tematów na szkolnych lekcjach fizyki, ponieważ są świetnym polem wykorzystania rozmaitych postaci zasad zachowania energii i pędu. Co więcej, można stopniowo komplikować rozpatrywane zagadnienia – przejść od elastycznych zderzeń cząstek punktowych, poprzez niesprężyste zderzenia brył sztywnych, aż po skomplikowane problemy teorii sprężystości, obejmujące szczegółową analizę momentu zderzenia i teorię rozpraszania.

Ograniczmy rozważania do geometrycznego spojrzenia na elastyczne zderzenie punktowych cząstek, wprowadzając zabawne i ciekawe narzędzie do analizy zderzeń. Sprowadzi się to do... rysowania kółek i strzałek.

Rozważmy spoczywającą cząstkę o masie M , która rozpada się samorzutnie na dwie nowe cząstki o równych masach m . Cząstki te poruszają się zatem z równymi prędkościami. Zajmijmy się jedną z nich – niech jej prędkość w układzie spoczywającej cząstki M wynosi \mathbf{v}_0 . Prędkość drugiej wynosi, oczywiście, $-\mathbf{v}_0$.

Czytelnik Wnikliwy zauważy zapewne, że w opisanej tu sytuacji nie jest zachowana całkowita energia, ani całkowita masa! Energia potencjalna wszystkich składników układu jest stale równa zero, energia kinetyczna cząstki przed rozpadem także równa się zero, a energia kinetyczna produktów rozpadu to mv_0^2 . Ten pozorny paradoks wynika z zaniedbania efektów relatywistycznych, tj. równoważności masy i energii.

Przejdźmy teraz do układu laboratoryjnego, w którym cząstka M porusza się z prędkością \mathbf{V} , pierwsza zaś z cząstek m z prędkością \mathbf{v} . Prędkość ta jest, oczywiście, wektorową sumą prędkości w układzie pierwotnej cząstki i prędkości tego układu odniesienia w laboratorium:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0.$$

Przepisując tę równość w postaci $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \mathbf{v}_0$ i stosując twierdzenie cosinusów, otrzymamy związek

$$v^2 + V^2 - 2vV \cos \theta = v_0^2,$$

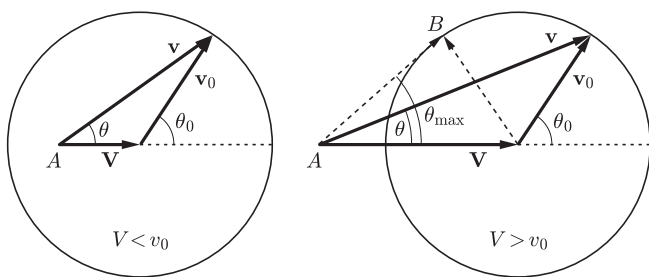
gdzie θ jest kątem między wektorami \mathbf{v} i \mathbf{V} . Możemy posłużyć się bardzo wygodnym rysunkiem 1 do zobrazowania tej sytuacji. Prędkość \mathbf{v} jest wektorem poprowadzonym do dowolnego punktu na obwodzie okręgu z punktu A , odległego od środka okręgu o wektor \mathbf{V} . Promień okręgu jest równy v_0 . Możemy przy tym rozróżnić dwa przypadki. Jeżeli $V < v_0$, czyli punkt A leży wewnątrz okręgu, to kąt θ , pod jakim cząstka opuści układ, jest dowolny. W przypadku $V > v_0$ cząstka może wylecieć tylko do przodu i pod kątem nieprzekraczającym θ_{\max} . Z konstrukcji przedstawionej na rysunku łatwo można przekonać się, że wartość kąta granicznego określa równość

$$\sin \theta_{\max} = \frac{v_0}{V}.$$

Kąt ten odpowiada bowiem stycznej do okręgu w punkcie B , poprowadzonej z A . Takie kąty mierzy, oczywiście, obserwator w układzie laboratoryjnym. Rysunki te mają jeszcze jedną zaletę – możemy łatwo powiązać kąty w układzie środka masy z kątami mierzonymi w układzie laboratoryjnym. Pozostawiając przekształcenia Czytelnikowi, podajemy wynik

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta_0 + V}.$$

Podobną konstrukcję można wykorzystać przy analizie sprężystego zderzenia dwóch cząstek. Dla uproszczenia założymy, że ich masy są jednakowe. Prędkości cząstek przed zderzeniem będziemy oznaczać przez $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$,



Rys. 1. Geometryczna interpretacja rozpadu cząstki.

*student, Wydział Fizyki,
Uniwersytet Warszawski

a po zderzeniu $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$. Zasady zachowania energii i pędu będą miały postać:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2, \quad |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}'_1|^2 + |\mathbf{v}'_2|^2.$$

Najwygodniej będzie wprowadzić nowe zmienne, określające prędkość środka masy układu i względną prędkość ciał

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

oraz analogiczne wielkości po zderzeniu \mathbf{V}' i \mathbf{u}' . Zasady zachowania przyjmą teraz niezwykle prostą postać

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}', \quad |\mathbf{u}| = |\mathbf{u}'|,$$

czyli wektor \mathbf{V} jest niezmiennikiem zderzenia, a wektor \mathbf{u} nie zmienia swojej długości (może jedynie zmienić kierunek), co jest zgodne z intuicją. Podobnie jak poprzednio, można to wygodnie zilustrować rysunkiem 2. W tym przypadku zderzenie sprowadza się wyłącznie do obrotu wektora \mathbf{u} wpisanego w okrąg o promieniu u . Rozumowanie to można uogólnić na przypadek, gdy masy cząstek są różne. Weźmy dwie cząstki poruszające się jak poprzednio, ale o masach m_1 i m_2 . Wprowadzając prędkość względną \mathbf{u} i prędkość środka masy

$$\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2},$$

znajdujemy prędkości cząstek w układzie środka masy:

$$\mathbf{v}_1^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_2^* = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{u}.$$

Z zasady zachowania pędu wiemy, że pędy cząstek w układzie środka masy po zderzeniu są równe i przeciwnie skierowane, z zasady zachowania energii wynika natomiast, że wartości bezwzględne prędkości nie zmieniają się, jedynie zmienia się kierunek (odpowiada to obrotowi na rysunku 2). Możemy w łatwy sposób przejść do układu laboratoryjnego, dodając do każdej z wyliczonych prędkości prędkość \mathbf{V} środka masy:

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{u}' + \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{u}' + \mathbf{V}.$$

Do geometrycznej interpretacji wygodnie jest posłużyć się pędami cząstek. Zdefiniujmy wektor jednostkowy \mathbf{n} w kierunku \mathbf{u}' . Łatwo można przekonać się, że

$$\mathbf{p}'_1 = \mu \mathbf{u} \mathbf{n} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}'_2 = -\mu \mathbf{u} \mathbf{n} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2),$$

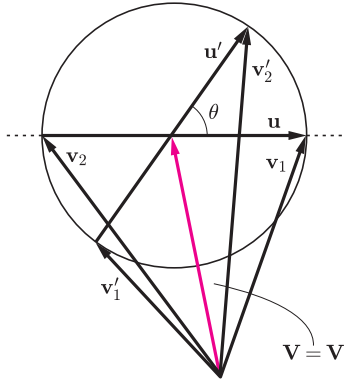
gdzie wprowadziliśmy masę zredukowaną

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

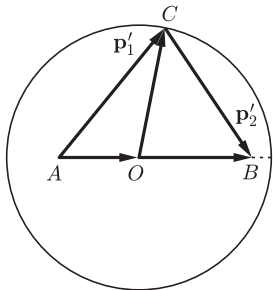
Rozważmy więc okrąg o promieniu μu (rysunek 3). Wektor \vec{OC} odpowiada wektorowi $\mu \mathbf{u}$, zatem powyższe równania można zinterpretować czysto geometrycznie jako dodawanie wektorów. Przy ustalonych początkowych pędach promień koła i położenia punktów A i B nie zmieniają się, natomiast punkt C może swobodnie wędrować po okręgu. Rozważmy szczegółowo przypadek, gdy jedna z cząstek spoczywa (np. ta o masie m_2). Zatem $|\vec{OB}| = \frac{m_2 p_1}{m_1 + m_2} = \mu u$ i odcinek OB pokrywa się z promieniem okręgu. Wektor \vec{AB} pokrywa się, oczywiście, z pędem cząstki o masie m_1 przed zderzeniem. W zależności od stosunku mas punkt A może leżeć wewnątrz lub na zewnątrz okręgu, jak na rysunku 4. Po zderzeniu obie cząstki doznają odchylenia od kierunku pierwotnego ruchu cząstki-pocisku, danego przez kąty θ_1 i θ_2 . W układzie środka masy kąt środkowy χ wyznacza kierunek, pod jakim zostaje rozpraszona nadlatująca cząstka. Ciekawym ćwiczeniem dla Czytelnika może być przekonanie się na podstawie tych rysunków, że kąty θ_1 i θ_2 mogą być wyrażone przez kąt χ :

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}.$$

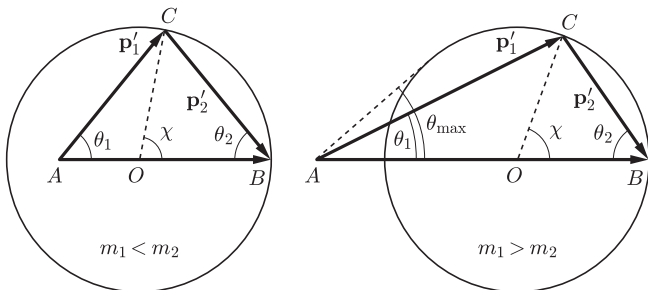
Ponadto zauważmy, że kąt rozrzutu cząstek $\theta_1 + \theta_2$ może być mniejszy lub większy od $\pi/2$, w zależności od stosunku mas. Rozpraszanie do tyłu odpowiada równości $\chi = \pi$.



Rys. 2. Sprężyste zderzenie dwóch cząstek w języku prędkości względnej i prędkości środka masy.



Rys. 3. Ta sama geometria, ale rysujemy pędy; $\vec{OC} = \mu \mathbf{u}'$,
 $\vec{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$,
 $\vec{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$.



Rys. 4. Zderzenie pocisku ze spoczywającą cząstką.

Pokazaliśmy, że zjawiska mechaniczne zderzeń ciał mogą mieć bardzo łatwą interpretację geometryczną, a tworzenie takich diagramów jest samo w sobie interesujące. Szczególnie prosto można za pomocą tego narzędzia ustalać pewne zależności między wielkościami mierzonymi w układzie środka masy a ich odpowiednikami w układzie laboratoryjnym.

Na deser zostawmy kilka pytań/propozycji do zabawy:

1. Dla jakiej wartości kąta χ cząstka pierwotnie spoczywająca będzie miała największą energię? Jaka będzie jej wartość, jeśli energia cząstki padającej wynosi E ?
2. Dla $m_1 < m_2$ prędkość pierwszej cząstki po zderzeniu może mieć dowolny kierunek. Jaka jest maksymalna wartość kąta θ_{\max} (wyrażona przez masy cząstek) w przypadku $m_1 > m_2$?

3. Pod jakim kątem rozbiegają się cząstki w przypadku równych mas? Jakie są wtedy θ_1 i θ_2 ?
4. Ambitniejsze zadanie: jak przetłumaczyć przedstawione schematy na przypadek zderzeń niesprężystych, gdy zderzenie charakteryzuje pewien współczynnik strat energii ($\mathbf{u}' = -\alpha\mathbf{u}$, $1 \geq \alpha \geq 0$)?
5. I jeszcze jedno zadanie dla odważnych. Jak zmieniają się wyniki omawiane w tym artykule, jeśli uwzględnić efekty relatywistyczne?

Nierówność Schwarza a fizyka cząstek elementarnych

Ogólniej,

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \stackrel{(S)}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Tomasz TKOCZ*

Czytelnik z pewnością zetknął się z tytułową nierównością Schwarza, która w najprostszym przypadku mówi, że dla liczb rzeczywistych x_1, x_2, y_1, y_2 zachodzi

$$(*) \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Interpretacja geometryczna jest jasna. Chodzi o to, że iloczyn skalarny dwóch wektorów $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2]$ na płaszczyźnie, który wynosi $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$, nie przekracza iloczynu ich długości, bowiem można wartość iloczynu skalarnego obliczyć także jako $|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Często twierdzenia matematyczne mają także przyjemną interpretację fizyczną (np. wiele twierdzeń z rachunku różniczkowego i całkowego). Okazuje się, że nierówność Schwarza (*) jest zaszyta, jak za chwilę zobaczymy, dosyć głęboko w elementarnych prawach mikroświata i relatywistycznych prędkości.

Rozważmy cząstkę elementarną c , która rozpada się na dwie cząstki a i b , poruszające się w przeciwne strony w ich układzie środka masy (np. kaon rozpadający się na parę pionów $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$). Wobec tego, że cząstka c spoczywa, jest intuicyjnie jasne, że masy cząstek spełniają nierówność

$$m_c \geq m_a + m_b.$$

Rzeczywiście, analizując bilans energii w układzie środka masy, stwierdzamy, że energia układu przed reakcją wynosiła $m_c c^2$, po reakcji zaś

$$E_a^* + E_b^* = \sqrt{(m_a c^2)^2 + (p_a^* c)^2} + \sqrt{(m_b c^2)^2 + (p_b^* c)^2} \geq m_a c^2 + m_b c^2,$$

skąd

$$(1) \quad m_c c^2 = E_a^* + E_b^* \geq m_a c^2 + m_b c^2.$$

Ale jak wygląda sytuacja z naszej perspektywy, czyli w układzie laboratorium (w skrócie LAB)? Z transformacji Lorentza mamy

$$(2) \quad \begin{aligned} E_a + E_b &= \gamma(E_a^* + \beta p_a^*) + \gamma(E_b^* + \beta p_b^*) = \\ &= \gamma(E_a^* + E_b^*) + \gamma\beta(p_a^* + p_b^*) = \gamma(E_a^* + E_b^*), \end{aligned}$$

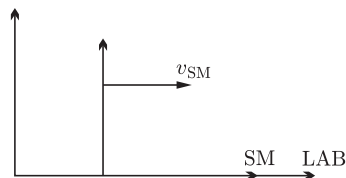
bowiem z definicji układu SM mamy $p_a^* + p_b^* = 0$, przy czym tradycyjnie oznacza się $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v_{SM}/c$. Patrząc na nierówność (1), widzimy, że jej prawa strona jest wyrażona wielkościami znanymi w LAB, lewą zaś możemy tak wyrazić, korzystając z powyższego rachunku (2). Dostajemy

$$(m_a + m_b)c^2 \leq E_a^* + E_b^* = \frac{1}{\gamma}(E_a + E_b) = \sqrt{1 - \left(\frac{v_{SM}}{c}\right)^2} (E_a + E_b),$$

więc pozostaje obliczyć v_{SM}/c . Znowu wystarczy skorzystać z relatywistycznej transformacji energii i pędu (tyle że teraz w drugą stronę, od wielkości z SM

Układ środka masy (w skrócie SM) to taki układ odniesienia, w którym całkowity pęd układu wynosi 0.

Całkowita energia cząstki o masie m i pędzie p wynosi $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$.



Gdy cząstka i układ poruszają się tylko wzdłuż osi x (tak jak w naszym przypadku), to transformacja Lorentza energii i pędu mówi, że

$$\begin{cases} E = \gamma(E^* + \beta p^*), \\ p = \gamma(p^* + \beta E^*/c), \end{cases}$$

gdzie wielkości z gwiazdką odnoszą się do układu środka masy, a bez gwiazdki do układu LAB.

*student, Wydział Fizyki oraz Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

do LAB)

$$0 = p_a^* + p_b^* = \gamma \left(p_a - \frac{v_{SM}}{c^2} E_a \right) + \gamma \left(p_b - \frac{v_{SM}}{c^2} E_b \right) = \\ = \gamma \left(p_a + p_b - \frac{v_{SM}}{c^2} (E_a + E_b) \right),$$

skąd

$$\frac{v_{SM}}{c} = c \frac{p_a + p_b}{E_a + E_b}.$$

Wracając, mamy nierówność

$$(m_a + m_b)c^2 \leq \sqrt{1 - \left(c \frac{p_a + p_b}{E_a + E_b} \right)^2} (E_a + E_b) = \\ = \sqrt{(E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2 c^2}.$$

Uwzględniając, że

$$E_a = \sqrt{(m_a c^2)^2 + (p_a c)^2}, \quad E_b = \sqrt{(m_b c^2)^2 + (p_b c)^2},$$

podnosząc ostatnią nierówność stronami do kwadratu, skracając obustronnie przez c^2 i upraszczając, dostajemy

$$(3) \quad (m_a c)(m_b c) + p_a p_b \leq \sqrt{(m_a c)^2 + p_a^2} \sqrt{(m_b c)^2 + p_b^2}.$$

Analizując proste zjawisko fizyczne, jakim było zderzenie dwóch cząstek, odtworzyliśmy tym samym nierówność Schwarza dla (dowolnych!) liczb nieujemnych $x_1 = m_a c$, $x_2 = p_a$, $y_1 = m_b c$, $y_2 = p_b$ (nieujemność liczb w nierówności Schwarza (*) oczywiście nie uszczupła jej ogólności).

Spróbujmy jeszcze spojrzeć na końcowy wynik (3) nieco ogólniej. W szczególnej teorii względności bardzo wygodnym pojęciem jest tzw. *czterowektor energii-pędu*. Formalnie, dla poruszającej się cząstki o masie m z pędem $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ i całkowitej energii E , jej czterowektor energii-pędu definiujemy jako uporządkowaną czwórkę $(E/c, p_x, p_y, p_z)$ i w skrócie piszemy $(E/c, \mathbf{p})$. Jest to pojęcie analogiczne do pojęcia *czterowektora położenia* cząstki $(ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})$. Takie czterowektory można mnożyć skalarnie. Żeby jednak iloczyn skalarny miał sensowne własności, nie powinien zmieniać się przy przekształceniach niezmiennych fizycznego sensu teorii, tzw. przekształceniach symetrii. W naszym przypadku przekształceniem symetrii jest transformacja Lorentza, a niezmienniczy iloczyn skalarny definiuje się następująco:

$$(E_a/c, \mathbf{p}_a) \cdot (E_b/c, \mathbf{p}_b) := (E_a/c)(E_b/c) - \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b,$$

gdzie $\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b = p_{a,x} p_{b,x} + p_{a,y} p_{b,y} + p_{a,z} p_{b,z}$ oznacza już *zwykły* iloczyn skalarny w przestrzeni trójwymiarowej. Zauważmy, że wówczas długość czterowektora to po prostu

$$|(E/c, \mathbf{p})| = \sqrt{(E/c, \mathbf{p}) \cdot (E/c, \mathbf{p})} = \sqrt{(E/c)^2 - p^2} = \\ = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - (pc)^2} = mc.$$

Zobaczmy, że (3) jest równoważna nierówności

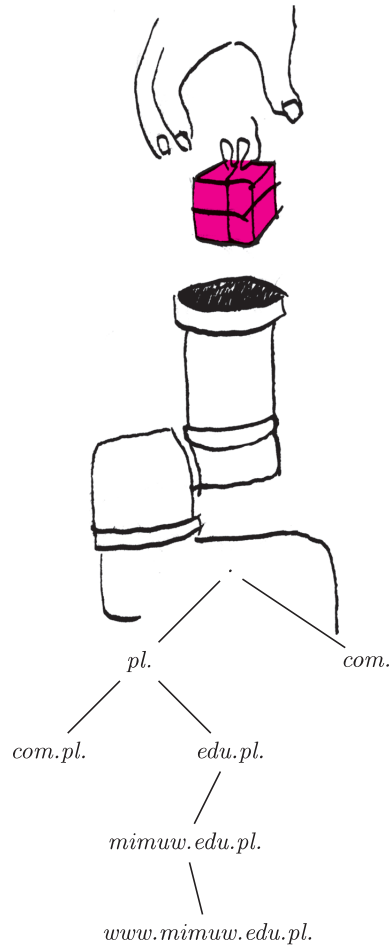
$$(m_a c)(m_b c) \leq (E_a/c)(E_b/c) - p_a p_b,$$

a w języku czterowektorów i ich iloczynów skalarnych – nierówności

$$(4) \quad |(E_a/c, \mathbf{p}_a)| |(E_b/c, \mathbf{p}_b)| \leq (E_a/c, \mathbf{p}_a) \cdot (E_b/c, \mathbf{p}_b).$$

Zatem uzyskany główny wynik (3) jest niczym innym jak nierównością Schwarza dla czterowektorów energii-pędu cząstek a i b ! Tyle że zwrot tej nierówności jest w przeciwną stronę w stosunku do klasycznej nierówności Schwarza, co wynika ze szczególnej postaci iloczynu skalarnego. Stwierdzenie, że zachodzi (3), można więc wyprowadzić bez żadnych, czynionych przez nas pracowicie, rozważań kinematycznych dla cząstek a, b, c , po prostu powołując się na (4). Nierówność Schwarza (4) jest z kolei, jak widzieliśmy, naturalną konsekwencją tego, że iloczyn skalarny czterowektorów ma dobry sens fizyczny.

Dla autora przedstawione powyżej odkrycie nierówności w prawach fizyki było wstrząsającym i jednocześnie bardzo radosnym przeżyciem. Może Czytelnik zna fizyczny dowód jakiejś innej klasycznej nierówności?



Od nazwy do konkretnej maszyny

Marek MARCZYKOWSKI*

1. Wprowadzenie

Od wpisania adresu w przeglądarce internetowej do wyświetlenia strony musi być wykonany szereg mniej lub bardziej skomplikowanych czynności. W tym artykule omówię najważniejsze z nich: tłumaczenie nazwy na adres IP oraz lokalizację, na podstawie adresu IP, fizycznej maszyny, do której on należy (routing). To ostatnie jest szczególnie interesujące w tak rozległej sieci, jaką jest internet.

2. DNS

DNS (*Domain Name System*) jest rozproszonym systemem służącym do tłumaczenia nazw na adresy IP. Wbrew temu, co normalnie widzimy, każda nazwa jest zakończona kropką. System ten ma budowę hierarchiczną (struktura drzewa). Na samym szczycie znajduje się najkrótsza możliwa domena – kropka, obsługiwana przez tzw. root servery. Znają one adresy serwerów obsługujących domeny najwyższego poziomu (ang. *Top Level Domain*, TLD), czyli np. *com.*, *pl.*. Te z kolei znają servery obsługujące domeny pod nimi, np. *com.pl.*, *edu.pl.* i tak dalej (patrz rysunek). Każda taka domena składa się (jako węzeł drzewa) z ciągu rekordów zawierających różne dane powiązane z daną nazwą, np. adres IP, opis, alternatywna nazwa, serwer pocztowy obsługujący daną domenę.

Z punktu widzenia użytkownika końcowego całą tę operację odpytywania po kolei *.*, *pl.*, *edu.pl.*, *mimuw.edu.pl.*, *www.mimuw.edu.pl.* wykonuje serwer dostawcy internetowego, który przy okazji zapamiętuje ostatnio używane nazwy. Dlatego w konfiguracji sieci wystarczy wpisać (lub samo się konfiguruje przez DHCP) tylko pojedyncze adresy serwerów DNS.

3. Routing

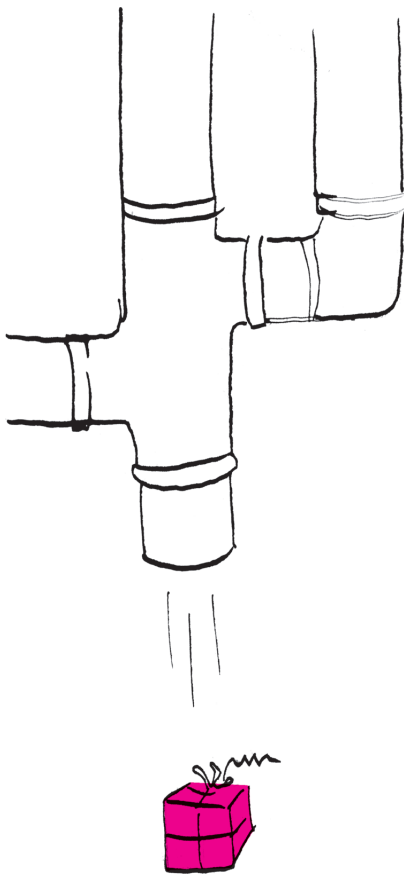
3.1. Podstawowy routing. Wiemy już, jak uzyskać adres IP na podstawie nazwy, ale co dalej? Z punktu widzenia końcowego użytkownika sytuacja jest prosta: ma jedną domyślną bramę (do dostawcy internetowego), do której wysyła wszystkie pakiety, a dostawca już jakoś sobie z tym dalej radzi. W dalszej części omówię właśnie radzenie sobie dostawcy z tym problemem. Wprowadźmy najpierw kilka pojęć, które będą przydatne przy dalszym opisie:

- Prefiks – zakres adresów IP w formie: adres i maska. Do takiego zakresu należą te adresy, w których zapisie binarnym bity wskazane przez maskę są takie same jak w adresie wyznaczonym przez prefiks. Maska zazwyczaj składa się z pewnej liczby jedynek, po których następują już same zera. Np. prefiks 192.168.0.0/24 oznacza wszystkie adresy, w których pierwsze 24 bity (czyli 3 oktety) są równe 192.168.0.
- System autonomiczny (ang. *autonomous system*, AS) – sieć należąca do jednego podmiotu, mająca wspólną politykę zarządzania, np. sieć Telekomunikacji Polskiej.
- Tablica routingu – tablica, na podstawie której system operacyjny routera podejmuje decyzję, dokąd wysłać dany pakiet.

Kierowaniem pakietów odpowiednim łączem i do odpowiedniego operatora zajmują się routery. Każdy router ma tablicę routingu. Taka tablica składa się z ciągu prefiksów i powiązanych z nimi akcji (np. kolejny router, do którego ma zostać wysłany pakiet). Prefiksy są przeglądane w kolejności od najdłuższego (najbardziej szczegółowego) do najkrótszego (najogólniejszego) aż do napotkania pasującego do pakietu, co do którego jest podejmowana decyzja. Np. dla pakietu przesyłanego do 192.168.2.24 i tablicy routingu:

```
127.0.0.0/8 via 127.0.0.1 dev lo
192.168.0.0/16 via 192.168.1.10 dev eth0
192.168.2.0/24 via 192.168.1.11 dev eth0
192.168.1.0/24 dev eth0
```

*student i administrator,
Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania F 760.

Kawalki balonika wyrzucone pod kątem α do poziomu spadną w odległości

$$l = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha$$

od balonika. Znajdą się one na zewnątrz koła o promieniu R , jeśli

$$\frac{1}{2} \arcsin \frac{Rg}{v^2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{Rg}{v^2}.$$

Stosunek masy strzępków wylatujących na odległość większą niż R do masy całkowitej balonika jest równy stosunkowi powierzchni S pasa na powierzchni wybuchającego balonika, leżącego między kątami

$$\frac{1}{2} \arcsin \frac{Rg}{v^2} \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{Rg}{v^2} \right),$$

do całkowitej powierzchni balonika S_0 . Oznaczając przez r promień balonika, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{S}{S_0} &= \frac{2\pi r}{4\pi r^2} (h_2 - h_1) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{Rg}{v^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{1}{2} \arcsin \frac{Rg}{v^2} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{Rg}{v^2} \right). \end{aligned}$$

Zatem

$$m = \frac{M}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{Rg}{v^2} \right).$$

pakiet zostanie przesłany do routera 192.168.1.11 przez interfejs (kartę sieciową) *eth0*, natomiast skierowany do 192.168.1.32 będzie wysłany bezpośrednio do celu przez interfejs *eth0*.

3.2. Routing dynamiczny. W praktyce tablica routingu każdego większego routera jest generowana dynamicznie w zależności od tego, które łącza działają, którądy będzie najkrótsza trasa itp. W internecie służy do tego protokół **BGP** (*Border Gateway Protocol*). Podstawowa koncepcja polega na podziale całej sieci (internetu) na systemy autonomiczne. Każdy z takich systemów ma jakieś adresy IP w postaci zbioru prefiksów i ogłasza ten fakt systemom, z którymi jest bezpośrednio połączony. Te systemy z kolei ogłaszają swoim „sąsiadom”, że przez nie można dostać się do określonych prefiksów należących do konkretnego AS-u, i tak dalej. Wszystko wydaje się proste, gdyby nie fakt, że wielokrotnie dany prefiks jest osiągalny na więcej niż jeden sposób. Tu właśnie objawia się potęga protokołu BGP.

Każdy router BGP ma tablicę, w której dla każdego prefiksu są przechowywane trasy, którymi jest on osiągalny (trasa to ciąg systemów autonomicznych). Od każdego sąsiada może on otrzymać jedną taką trasę (najkorzystniejszą dla niego) i powiązać z nią pewne dodatkowe informacje (o tym dalej). Podstawowe kryteria, na podstawie których jest wybierana najlepsza trasa, to:

1. waga trasy (ustawienie lokalne dla routera),
2. lokalna preferencja (*localpref*) – wspólne dla całego AS-u,
3. pochodzenie trasy (z wewnętrznego systemu, zewnętrznego itp.),
4. długość ścieżki,
5. sugerowana metryka.

Pierwsze dwa kryteria zależą bezpośrednio od administratora i są wewnętrzne dla danego AS (nie są przekazywane na zewnątrz) – są one nadawane na podstawie reguł zdefiniowanych w routerze (najczęściej na podstawie tego, od którego routera trasa przyszła oraz którym łączem). W ten sposób w przypadku prefiksów dostępnych przez AS A oraz AS B można wymusić wysyłanie pakietów do tego pierwszego (gdyż np. mamy z nim lepsze połączenie). Tak można decydować, którądy wysyłać pakiety, a co z pakietami powrotnymi? Tu też można manipulować. Załóżmy, że jesteśmy w AS-ie X i spośród dwóch AS-ów pośrednich A i B chcielibyśmy zawsze dostawać pakiety tylko za pośrednictwem A . Wystarczy wówczas operatorowi B ogłaszać trasy mniej korzystne – konkretnie przez wydłużenie ścieżki, dodając siebie (tj. X) wielokrotnie na końcu. W ten sposób zdalny router, mając zdecydować, której trasy użyć, użyje krótszej (czyli przez AS A) – oczywiście, o ile nie zmieni tego ważniejszymi kryteriami.

Kolejnym mechanizmem pozwalającym kształtować przepływ ruchu są etykiety (*community*), którymi można dodatkowo oznaczać trasy. Mają one dwa zastosowania:

- dodanie dodatkowych informacji dla kolejnych routerów (np. skąd daną trasę otrzymano),
- zmianę traktowania danej trasy (np. ustawienie innych lokalnych preferencji, przekazywanie wydłużonej trasy do jednego z sąsiadów lub nieprzekazywanie trasy dalej).

Mając do dyspozycji tak potężne narzędzie, można bardzo precyzyjnie modelować, którądy jakie pakiety będą przepływać. Mówi się, że BGP służy do zarządzania w warstwie ósmej sieci – politycznej. Jest w tym sporo prawdy, ponieważ większość ustawień i nietypowych zachowań jest tutaj skutkiem umów między operatorami (gdzie taniej, gdzie lepsze warunki i gwarancja jakości łącza, oraz, oczywiście, gdzie większa przepływność czy przepustowość). Zdarza się, że np. ruch z Uniwersytetu Warszawskiego do polskich adresów jest kierowany przez jednych sąsiadów, do zagranicznych przez innych, a ruch do Telekomunikacji Polskiej (TPNET) przez jeszcze innych (tak – to nie żart).



Rozwiązanie zadania M 1270.

Zauważmy,

$$\text{że } 1 + p^2 = pq + qr + rp + p^2 = \\ = (p+q)(p+r) \text{ oraz analogicznie}$$

$$1 + q^2 = (q+p)(q+r),$$

$$1 + r^2 = (r+p)(r+q).$$

Wobec tego $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2) = \\ = ((p+q)(q+r)(r+p))^2$, skąd bezpośrednio wynika teza.

Przy tak istotnym dla działania całego internetu mechanizmie istotne jest również dbanie o bezpieczeństwo, niezawodność oraz wydajność.

To pierwsze w większości sprowadza się do stosowania filtrów, kto może, a kto nie, rozgłaszać trasy do konkretnych prefiksów (na podstawie danych urzędów przyznających adresy, np. RIPE). Niedopatrzenie w tej dziedzinie jakiś czas temu spowodowało, że pewien pakistański operator, chcąc zablokować dostęp do serwisu YouTube dla swoich klientów, zablokował go dla sporej części świata na kilka godzin (artykuł na ten temat: <http://www.ripe.net/news/study-youtube-hijacking.html>). W kwestii niezawodności i wydajności istnieje szereg mechanizmów. Oto kilka z nich:

BGP Route Flap Damping. Polega on na tym, że gdy jakiś router wysyła zbyt często informacje o zmianie konkretnej trasy, to sąsiad je otrzymujący przestaje na nie na pewien czas reagować, aby nie generować ciągłych zmian w tablicach routingu na wielu routerach w całej sieci, co mogłoby prowadzić do istotnego zwiększenia ich obciążenia oraz, w dużym stopniu, do utraty pakietów i ciągłej zmiany ich kolejności.

Agregacja prefiksów. Ponieważ pełna tablica routingu BGP wymaga coraz więcej zasobów (pamięci, procesora), stosuje się łączenie kilku wpisów w jeden. Np. jeśli jakiś AS rozgłasza adresy 193.0.96.0/24, 193.0.97.0/24, 193.0.98.0/24 oraz 193.0.99.0/24, to można to zwinąć do 193.0.96.0/22 obejmującego wszystkie te adresy. W takiej sytuacji cała podsieć jest rozgłaszana, jeśli przynajmniej jeden z jej elementów jest osiągalny. Dzięki temu redukuje się wielokrotne wpisy z taką samą trasą i zastępuje jednym.

„Miękka” rekonfiguracja. Przy zmianie konfiguracji (np. ustawianiu parametrów *localpref*) istnieje konieczność ponownego przetworzenia tras, których ta zmiana dotyczy. Najprościej by było zrestartować proces, co spowodowałoby wyczyszczenie tablicy oraz zerwanie sesji BGP z sąsiednimi routerami, a następnie zestawienie ich z powrotem i pobranie aktualnych informacji. Taka operacja powoduje w praktyce, że router na kilka minut znika z internetu oraz wszystkie routery, do których był podłączony, mają dodatkową pracę w postaci ponownego przetworzenia tras, które przez niego przechodziły. Aby temu zapobiec, wprowadzono mechanizm umożliwiający tylko częściowe odświeżenie tablicy, np. ponowne przesłanie tras przechodzących przez dany AS (nie ruszając pozostałych).

4. Podsumowanie

Większość użytkowników internetu nie ma bezpośredniej styczności z głównym tematem tego artykułu, ale wydaje mi się, że warto wiedzieć, jak to działa, że to nie jest jakieś magiczne pudełko, które robi cuda, tylko efekt wieloletniej pracy inżynierów sieciowych, która teraz pozwala funkcjonować sieci na tak olbrzymią skalę, jaką jest cała Ziemia.

Reguła czy przypadek?

Gdy do wielomianu $x^2 + x + 11$ podstawiać będziemy kolejno liczby $0, 1, 2, \dots, 9$, otrzymamy 11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 83, 101 – same liczby pierwsze. Dla 10 już tak nie będzie: wartość wielomianu dla $x = 10$ dzieli się przez 11.

To akurat dziwić nie powinno – każdy wielomian $x^2 + x + a$ dla $x = a - 1$ dzieli się przez a , ponieważ $(a - 1)^2 + (a - 1) + a = a^2$.

Ale Czytelnik Dociekliwy zauważy, że różnice kolejnych wartości to kolejne liczby parzyste: 2, 4, 6, \dots , 18. Czy to też reguła? I to okazuje się także prawidłowością, bowiem $k^2 + k = k(k + 1) = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + (k - 1) + k)$, a więc wartości każdego wielomianu $x^2 + x + a$ przy

podstawieniu kolejnych liczb naturalnych m i $m + 1$ różnić się będą o $2(m + 1)$.

No to może wreszcie i fakt, że podstawiając kolejne liczby naturalne $0, 1, \dots, (p - 2)$ do wielomianu $x^2 + x + p$, gdzie p jest – jak 11 – liczbą pierwszą, otrzymujemy same liczby pierwsze, też jest prawidłowością? Np. dla 3 czy 5 się zgadza!

Okazuje się, że nie: poza wymienionymi trzema liczbami pierwszymi jest tak jeszcze tylko dla 17 i 41. Tyle że nie jest to, oczywiście, przypadek. Ale dowód tego faktu nie jest prosty, choć – zapewne – może sprawić Czytelnikowi Studiującemu wiele satysfakcji.

M. K.

Informatyczny kącik olimpijski (28): Maszyna Fibonacciego

W tym kąciku zajmujemy się zadaniem z finału Potyczek Algorytmicznych 2009.

Weźmy funkcję F zwracającą liczby Fibonacciego, tzn. $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ oraz $F(m) = F(m-1) + F(m-2)$ dla $m \geq 2$. Mamy ciąg rejestrów (i_1, i_2, \dots, i_n) , początkowo ustawionych na zera. W zadaniu chodzi o zaimplementowanie dwóch operacji:

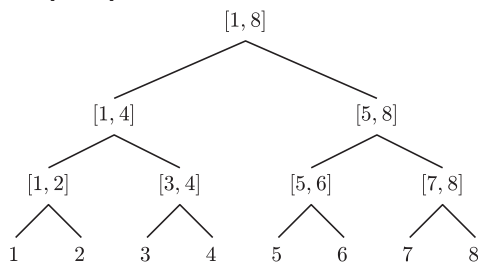
- dla podanych a i b dodanie jedynki do każdego z rejestrów $i_a, i_{a+1}, \dots, i_{b-1}, i_b$,
- dla podanych a i b wypisanie reszty z dzielenia wartości $F(i_a) + F(i_{a+1}) + \dots + F(i_{b-1}) + F(i_b)$ przez $P = 10^9 + 7$.

Wykonamy łącznie k operacji tych dwóch typów.

Zacznijmy od jakiegokolwiek poprawnego rozwiązania. Naturalnie, łatwo w czasie $O(n)$ wykonać pierwszą operację poprzez dodanie odpowiednich jedynek. Druga operacja zajmuje w takim razie czas $O(i_a + i_{a+1} + \dots + i_b)$, gdyż $F(x) \bmod P$ obliczamy łatwo w czasie $O(x)$, a ponieważ $i_y \leq k$, więc daje to złożoność $O(n \cdot k)$. Łączny koszt takiego algorytmu to $O(n \cdot k^2)$.

Mądrzej jednak będzie pamiętać od razu wartości $F(i_y) \bmod P$ zamiast samych i_y . Aby móc zwiększać i_y o jeden, potrzebne nam są tak naprawdę dwie kolejne wartości F , np. $A_y = F(i_y) \bmod P$ oraz $B_y = F(i_y + 1) \bmod P$. Zacznijmy więc od $A_y = 0$, $B_y = 1$ dla $y = 1, 2, \dots, n$. W ten sposób zarówno pierwszą (podstawiając, dla $a \leq y \leq b$, $(A_y, B_y) = (B_y, (A_y + B_y) \bmod P)$), jak i drugą (zwracając $(A_a + \dots + A_b) \bmod P$) operację wykonujemy w czasie $O(n)$ i dostajemy sumaryczną złożoność $O(n \cdot k)$.

Aby jeszcze przyspieszyć rozwiązanie, kluczowe jest spostrzeżenie, że przekształcenie $(x, y) \rightarrow (y, x + y)$ jest liniowe, a więc ma swoją macierz L (rozmiaru 2×2), tzn. taką macierz, że $L \cdot (x, y) = (y, x + y)$. Ponadto, k -krotne złożenie takiego przekształcenia też jest liniowe i ma macierz L^k (oczywiście też rozmiaru 2×2). Dodatkowo, możemy bezkarnie przyjąć, że $n = 2^m$ dla m naturalnego. W przeciwnym bowiem razie zwiększamy n do najbliższej potęgi dwójki, co nie zmienia złożoności (bo n wzrasta co najwyżej dwukrotnie), i później po prostu nie używamy w ogóle części rejestrów. Wyobraźmy sobie teraz pełne drzewo binarne o $2^{m+1} - 1$ wierzchołkach (patrz rysunek), w którego liściach mamy wartości A_y i B_y dla kolejnych y z przedziału $[1, 2^m]$.



W każdym węźle v zapamiętamy informację o:

- synach tego wierzchołka w drzewie: $lewy_v$ i $prawy_v$ (dla liści nieokreślone),
- przedziale rejestrów będących jego potomkami w drzewie, tj. $[l_v, p_v]$,
- sumach wartości A_y i B_y po tych rejestrach, odpowiednio: A'_v i B'_v ,

- macierzy przekształcenia L_v , które zostało wykonane na całym przedziale rejestrów $[l_v, p_v]$.

Początkowo, dla wszystkich v , L_v jest macierzą identyczności. W momencie dodawania jedynki do rejestrów z przedziału $[a, b]$, zmieniamy A'_v , B'_v i L_v dla pewnych wierzchołków, a konkretnie dla takich, żeby ich przedziały potomków sumowały się w sposób rozłączny (biorąc pod uwagę tylko zawarte w przedziale liczby całkowite) do przedziału $[a, b]$, np. $[2, 7] = [2, 2] \cup [3, 4] \cup [5, 6] \cup [7, 7]$. Tych przedziałów wybierzemy $O(m)$, wywołując $\text{PODZIEL}(a, b, \text{korzeń})$ – w poniższym pseudokodzie zakładamy wykonywanie działań modulo P :

```

PRZYŁÓŻ( $v, X$ )
( $A'_v, B'_v$ ) :=  $X \cdot (A'_v, B'_v)$ 
 $L_v := L_v \cdot X$ 

PODZIEL( $a, b, v$ )
1  if ( $a = l_v$ ) and ( $b = p_v$ ) then
2    PRZYŁÓŻ( $v, L$ )
3  else
4    PRZYŁÓŻ( $lewy_v, L_v$ )
5    PRZYŁÓŻ( $prawy_v, L_v$ )
6     $L_v := id_2$ 
7    if  $a \leq p_{lewy_v}$  then
8      PODZIEL( $a, \min(b, p_{lewy_v}), lewy_v$ )
9    if  $b \geq l_{prawy_v}$  then
10     PODZIEL( $\max(a, l_{prawy_v}), b, prawy_v$ )
11      $A'_v := A'_{lewy_v} + A'_{prawy_v}$ 
12      $B'_v := B'_{lewy_v} + B'_{prawy_v}$ 
  
```

Dlaczego to działa? Po pierwsze, kończy się, bo w każdym wywołaniu PODZIEL zachodzi: $[a, b] \subset [l_v, p_v]$, a dla liści mamy $l_v = p_v$, więc zachodzi warunek z linii pierwszej i funkcja nie wywołuje się więcej rekurencyjnie. Po drugie, rzeczywiście rozkłada przedział $[a, b]$ na sumę przedziałów, ponieważ $p_{lewy_v} + 1 = l_{prawy_v}$, więc przedziały $[a, \min(b, p_{lewy_v})]$ i $[\max(a, l_{prawy_v}), b]$ (lub jeden z nich, gdy nie zachodzi któryś z warunków z linii 7 i 9) pokrywają cały przedział $[a, b]$. Po trzecie wreszcie, po pierwszym takim wywołaniu, które powoduje rozgałęzienie rekurencyjne (tzn. wykonują się obie linie 8 i 10), w każdym kolejnym zachodzi co najmniej jeden z warunków: $a = l_v$ lub $b = p_v$. W takim razie każde kolejne rozgałęzienie rekurencyjne powoduje, że w co najmniej jednym z dwóch wywołań rekurencyjnych zachodzi zarówno $a = l_v$, jak i $b = p_v$, a więc ta gałąź natychmiast się kończy. Stąd, wywołań funkcji PODZIEL może być co najwyżej $4m + 1$ (jedno w korzeniu oraz w każdym z dwóch poddrzew po $2m$: m takich, które od razu się kończą, i m kontynuowanych), a więc $O(m)$. To kończy uzasadnienie, że potrafimy za pomocą takiej struktury w czasie $O(\log n)$ wykonać pierwszy typ operacji. Typ drugi obsługujemy analogicznie, z tą różnicą, że odpowiednia funkcja PODZIEL2 zwraca żadaną sumę. W tym celu linia druga zostaje zmieniona na **return** A'_v , a suma wyników z podwywołań PODZIEL2 z linii 8 i 10 zostaje zwrócona w dodatkowej linii 13 jako wynik wywołania tejże funkcji. Dowód poprawności i złożoności czasowej jest analogiczny. Stąd łączny czas wykonania wynosi $O(n + k \log n)$ przy zużyciu pamięci rzędu $O(n)$, gdyż drzewo ma co najwyżej $4n$ wierzchołków i w każdym przechowujemy stałą ilość informacji.

Tomasz KULCZYŃSKI



mała delta

Jaki dzień tygodnia?

Często zastanawiamy się, jakiego dnia tygodnia miało miejsce pewne wydarzenie. Jeśli to było w tym roku, to wystarczy zajrzeć do kalendarza. Ale co zrobić, gdy było to kilka, kilkanaście albo kilkadziesiąt lat temu? Dni tygodnia powtarzają się cyklicznie: jeśli dziś jest wtorek, to siedem dni temu też był wtorek i czternaście dni temu też wtorek, i siedemdziesiąt dni temu także wtorek. Możemy domyślać się, że pomocne w dalszych rozważaniach będą kongruencje modulo 7. Przypomnijmy to pojęcie.

Określenie. Ustalona jest pewna liczba naturalna $m > 1$. Liczby całkowite a i b przystają modulo m (pozostają w kongruencji modulo m), co zapisujemy symbolicznie $a \equiv b \pmod{m}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $m \mid (a - b)$ (liczba $a - b$ jest podzielna przez m).

To jest relacja równoważności w zbiorze liczb całkowitych \mathbb{Z} . Dwie liczby przystają modulo m , jeśli dają równe reszty z dzielenia przez m .

Kongruencje o tym samym module można dodawać stronami, odejmować stronami i mnożyć stronami: jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, to $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $a - c \equiv b - d \pmod{m}$, $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

Dowód jest prosty. Z założenia wynika, że liczby $a - b$ i $c - d$ są podzielne przez m , więc $a - b = k \cdot m$, $c - d = l \cdot m$. Dodając te równości stronami, stwierdzamy, że $(a + c) - (b + d)$ jest liczbą podzielną przez m , ma więc miejsce kongruencja $a + c \equiv b + d \pmod{m}$. Podobnie postępujemy przy dowodzie tego, że kongruencje można odejmować i mnożyć.

Wróćmy do pytania, w jakim dniu tygodnia miało miejsce pewne wydarzenie.

Ponumerujemy dni tygodnia:

1 – poniedziałek,	2 – wtorek,	3 – środa,
4 – czwartek,	5 – piątek,	6 – sobota,
	0 \equiv 7 – niedziela.	

Po upływie n dni od danej daty d wypada dzień tygodnia, którego numer przystaje do $d + n$ modulo 7. Wynikają stąd następujące wnioski.

Wniosek 1. Jeśli od ustalonego dnia tygodnia o numerze d upłynie 365 dni (rok zwykły), będzie to dzień tygodnia o numerze $d + 1$, natomiast 365 dni wcześniej był dzień tygodnia o numerze $d - 1$.

Dowód. Numer dnia tygodnia za rok od dnia d przystaje modulo 7 do liczby $d + 365 = d + 350 + 14 + 1 \equiv d + 1 \pmod{7}$.



Na przykład, zajrzyjmy do kalendarza: 1 stycznia 2010 r. był w piątek, więc rok 2011 zacznie się w sobotę, natomiast rok 2009 zaczynał się w czwartek.

Analogicznie można uzasadnić

Wniosek 2. *Jeśli od ustalonego dnia tygodnia o numerze d upływie 366 dni (rok przestępny), będzie to dzień tygodnia o numerze $d + 2 \pmod{7}$, natomiast 366 dni wcześniej był dzień tygodnia o numerze $d - 2 \pmod{7}$.*

Przykład 1. Trzecie tysiąclecie rozpoczęło się 1 stycznia 2001 r. Jaki to był dzień tygodnia? Ponieważ od dnia 1 stycznia 2001 r. do piątku 1 stycznia 2010 roku upłynęło 9 lat, w tym dwa lata przestępne (2004 i 2008), więc numer d dnia tygodnia 1 I 2001 spełnia kongruencję

$$d \equiv 5 - 9 - 2 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Zatem obecne, trzecie tysiąclecie rozpoczęło się w poniedziałek.

Przykład 2. We wtorek, 1 września ub.r. przypadała 70. rocznica rozpoczęcia drugiej wojny światowej. W jakim dniu tygodnia miało miejsce to tragiczne wydarzenie?

Od daty 1 września 1939 roku do wtorku 1 września 2009 r. minęło 70 lat, w tym 18 lat przestępnych (przed dziesięcioma laty była 60. rocznica, $60 : 4 = 15$, więc do 1999 roku minęło 15 lat przestępnych, a potem jeszcze były lata przestępne 2000, 2004, 2008). Zatem numer n interesującego nas dnia spełnia kongruencję

$$n \equiv 2 - 70 - 18 \pmod{7}.$$

Stąd

$$n \equiv -16 \equiv 5 \pmod{7}.$$

Druga wojna światowa rozpoczęła się w piątek.

Przy sięganiu do dat znacznie wcześniejszych trzeba uwzględnić fakt, że w roku 1582 obowiązujący wcześniej kalendarz juliański został zastąpiony przez papieża Grzegorza XIII kalendarzem, który od jego imienia nosi nazwę gregoriańskiego. W kalendarzu juliańskim każdy rok o numerze podzielny przez 4 był przestępny i miał 366 dni, pozostałe lata były zwykle i miały po 365 dni. Kalendarz gregoriański wprowadził następujące wyjątki od tej zasady: rok o numerze podzielny przez 100, ale nie przez 400, jest rokiem zwykłym. Dotychczas spośród lat o numerach podzielnych przez 4 latami zwykłymi były następujące trzy: 1700, 1800, 1900. Ponadto pominięto w kalendarzu 10 dat od 5 do 14 października 1582 r.

Przykład 3. W jakim dniu tygodnia odbyła się bitwa pod Grunwaldem? Było to 15 lipca 1410 r.

Można sprawdzić w kalendarzu, że 15 lipca 2010 r. wypadnie w czwartek i będzie to okrągła 600. rocznica bitwy. Gdyby nie poprawki gregoriańskie, moglibyśmy napisać kongruencję

$$n \equiv 4 - 600 - 150 \pmod{7}.$$

Po uwzględnieniu 10 usuniętych dat i lat 1700, 1800, 1900, które nie są przestępne, mamy jednak

$$n \equiv 4 - 600 - 150 + 10 + 3 \pmod{7},$$

tj. $n \equiv -733 \pmod{7}$. Ponieważ

$$-733 = -700 - 35 + 2,$$

więc $n \equiv 2 \pmod{7}$, a zatem bitwa pod Grunwaldem rozpoczęła się we wtorek.

Przykład 4. W każdym roku 13. dzień pewnego miesiąca (co najmniej jednego) wypada w piątek (dzień feralny). Oczywiście to, w jakim dniu tygodnia wypadnie 13. dzień miesiąca, zależy od tego, w jakim dniu był początek tego miesiąca. Wystarczy więc stwierdzić, że numery dni tygodnia pierwszych dni kolejnych miesięcy wyczerpują wszystkie liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Przyjmijmy dla uproszczenia, że 1 stycznia wypadł w poniedziałek. Jeśli rozważamy rok zwykły, to:

$1 + 31 \equiv 4 \pmod{7}$, więc 1 lutego jest w czwartek,
 $4 + 28 \equiv 4 \pmod{7}$, więc 1 marca jest w czwartek,
 $4 + 31 \equiv 7 \pmod{7}$, więc 1 kwietnia jest w niedzielę,
 $7 + 30 \equiv 2 \pmod{7}$, więc 1 maja jest we wtorek,
 $2 + 31 \equiv 5 \pmod{7}$, więc 1 czerwca jest w piątek,
 $5 + 30 \equiv 7 \pmod{7}$, więc 1 lipca jest w niedzielę,
 $7 + 31 \equiv 3 \pmod{7}$, więc 1 sierpnia jest w środę,
 $3 + 31 \equiv 6 \pmod{7}$, więc 1 września jest w sobotę,

i w ten sposób każdy z dni tygodnia przypada na początek jakiegoś miesiąca.

Jeśli natomiast rok jest przestępny, to przyjmując, że 1 stycznia jest w poniedziałek, mamy podobnie:

$1 + 31 \equiv 4 \pmod{7}$, więc 1 lutego jest w czwartek,
 $4 + 29 \equiv 5 \pmod{7}$, więc 1 marca jest w piątek,
 $5 + 31 \equiv 1 \pmod{7}$, więc 1 kwietnia jest

w poniedziałek,

$1 + 30 \equiv 3 \pmod{7}$, więc 1 maja jest w środę,
 $3 + 31 \equiv 6 \pmod{7}$, więc 1 czerwca jest w sobotę,
 $6 + 30 \equiv 1 \pmod{7}$, więc 1 lipca jest w poniedziałek,
 $1 + 31 \equiv 4 \pmod{7}$, więc 1 sierpnia jest w czwartek,
 $4 + 31 \equiv 7 \pmod{7}$, więc 1 września jest w niedzielę,
 $7 + 30 \equiv 2 \pmod{7}$, więc 1 października jest

we wtorek

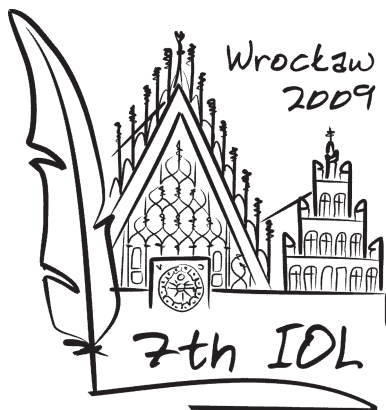
i znów otrzymaliśmy wszystkie dni tygodnia.

Tak więc rzeczywiście w każdym roku jest (co najmniej jeden) piątek trzynastego.

Małą Deltę przygotował Maciej BRYŃSKI

VII Międzynarodowa Olimpiada Lingwistyki Teoretycznej, Matematycznej i Stosowanej

Wrocław, 26–31 lipca 2009



W lipcu 2009 roku we Wrocławiu odbyła się VII Międzynarodowa Olimpiada Lingwistyki Teoretycznej, Matematycznej i Stosowanej (to 13. z międzynarodowych olimpiad naukowych, jakie odbywały się w Polsce; pierwszą była, również we Wrocławiu, w 1963 roku V Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna).

W zawodach brało udział 86 zawodników z czterech kontynentów. I tym razem Polacy wypadli znakomicie, zdobywając pięć medali – najwięcej spośród reprezentacji 17 uczestniczących krajów. Jeden z dwóch przyznanych złotych medali przypadł Łukaszowi Cegiele z XIV LO we Wrocławiu, który uplasował się tuż za zwyciężczynią – Dianą Sofroniewą z Bułgarii. Dwa z ośmiu przyznanych srebrnych medali zdobyli Łukasz Kalinowski (ZSO 1 Bydgoszcz) i Witold Małecki (XIV LO Wrocław), a dwa z jedenastu brązowych – Szymon Musioł (ILO Katowice) i Tomasz Dobrzycki (II LO Leszno). Adam Polak (V LO Kraków) i Maciej Jaromin (ZS 2 Rybnik) otrzymali wzmianki zaszczytne.

Zadania z lingwistyki matematycznej nie wymagają znajomości języków obcych ani specjalistycznej wiedzy językoznawczej. Dotyczą ciekawych aspektów rozmaitych języków egzotycznych lub nawet nieistniejących, a ich rozwiązanie polega na precyzyjnym wydedukowaniu i uzasadnieniu wniosków z podanych przesłanek. W tym roku międzynarodowe jury przygotowało na zawody indywidualne zadania

dotyczące liczebników w języku **sulka** (z Nowej Gwinei), transkrypcji zapisu **n'ko** afrykańskich dialektów **bamana** i **maninka**, tradycyjnych imion w języku **birmańskim**, akcentowania w **staroindyjskim** oraz związków między gramatyką i morfologią w **nahuatl** – jednym z dialektów **azteckich**. Podczas zawodów drużynowych uczniowie musieli rozszyfrować teksty w języku **wietnamskim**.

Przykłady zadań turnieju indywidualnego

Rozwiązania w numerze

Zadanie nr 1 (*Jewgienia KOROWINA, Iwan DERŻANSKI*). Podane są wyrażenia w języku polskim oraz ich przekłady na język **sulka**:

1 orzech betelu	a vhoi a tgiang
1 pochrzyn	a tu a tgiang
2 orzechy betelu	a lo vhoi a lomin
2 kokosy	a lo ksie a lomin
3 orzechy betelu	o vuo a korlotge
3 owoce chlebowca	a moulang hori orom a tgiang
4 pochrzyny	o sngu a korlolo
6 pochrzynów	o sngu a ktiëk hori orom a tgiang
7 orzechów betelu	o vuo a ktiëk hori orom a lomin
10 owoców chlebowca	a lo ngaitegaap hori orom a moulang
10 kokosów	a lo ngausmia hori orom a lomin
10 pochrzynów	o sngu a lo ktiëk
15 kokosów	o ngausmia a korlotge hori orom a korlotge
16 kokosów	o ngausmia a korlolo
18 owoców chlebowca	o ngaitegaap a korlolo hori orom a moulang
18 pochrzynów	o sngu a lo ktiëk hori orom a ktiëk hori orom a korlotge
19 orzechów betelu	o vuo a lo ktiëk hori orom a ktiëk hori orom a korlolo
20 pochrzynów	o sngu a mhelom

(a) Przetłumacz na język polski:

a ksie a tgiang
o ngaitegaap a korlotge
o ngausmia a ktiëk
o vuo a lo ktiëk hori orom a tgiang

(b) Przetłumacz na język **sulka**:

2 pochrzyny
14 pochrzynów
15 owoców chlebowca
20 orzechów betelu

Uwagi: Język **sulka** zaliczany jest czasem do wschodniopapuaskiej rodziny języków. Mówi nim około 3500 osób w prowincji Nowa Brytania Wschodnia państwa Papua–Nowa Gwinea. Orzeszki betelu są w rzeczywistości nasionami pewnego rodzaju palmy. Pochrzyn jest jadalnym korzeniem rośliny o tej samej nazwie.

Zadanie nr 5 (Bożydar BOŻANOW, Todor CZERWENKOW). Podane są zdania w języku **nahuatl** oraz ich przekłady na język polski:

- | | |
|--|---|
| 1. nimitztlazohtla | kocham cię |
| 2. tikmaka in āmoxtli | dajesz mu książkę |
| 3. nitlahtoa | mówię coś |
| 4. kātlītia in kuauhxīnki in pochtekatl | kupiec powoduje, że cieśla pije;
cieśla powoduje, że kupiec pije |
| 5. titzāhtzi | krzyczysz |
| 6. niki in ātōlli | piję atole |
| 7. tikuika | śpiewasz |
| 8. tinēchtlakāhuilia | zostawiasz coś dla mnie |
| 9. kochi in tīzītl | znachor śpi |
| 10. niknekiltia in kuauhxīnki in āmoxtli | powoduję, że cieśla chce książkę |
| 11. mitztēhuītekilia | on cię bije dla kogoś;
on bije kogoś dla ciebie |
| 12. kēhua in kikatl | śpiewa pieśń |
| 13. niktlalhuia in zihuātl | mówię coś kobiecie |
| 14. tiktēkāhualtia in oktlī | powodujesz, że ktoś zostawia wino |
| 15. ātli | on pije |
| 16. tlachīhua in pochtekatl | kupiec robi coś |
| 17. tēhuetzītia in zihuātl | kobieta powoduje, że ktoś się przewraca |
| (a) Przetłumacz na język polski
na wszystkie możliwe sposoby: | (b) Przetłumacz na nahuatl : |
| 18. tiktłazohtlaltia in zihuātl in kuauhxīnki | 24. on powoduje, że robię atole |
| 19. nēchtzāhtzītia | 25. robisz wino dla kogoś |
| 20. tikhuīteki | 26. znachor powoduje, że śpisz |
| 21. nikēhuilia in kikatl in tīzītl | 27. śpiewam coś |
| 22. nikneki in ātōlli | 28. przewracam się |
| 23. mitztlakāhualtia | |



Uwagi: Klasyczny **nahuatl** był językiem imperium azteckiego w Meksyku. Zdania w **nahuatl** są podane w uproszczonej pisowni. **ch, hu, ku, tl, tz, uh** są spółgłoskami. Znak $\bar{\quad}$ oznacza długość samogłoski. Atole jest gorącym napojem z mąki kukurydzianej.



Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

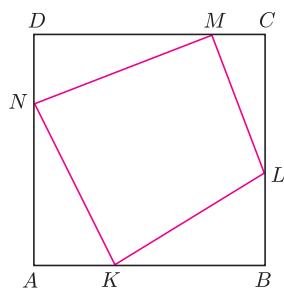
M 1270. Dane są takie liczby wymierne p, q, r , dla których $pq + qr + rp = 1$. Wykazać, że liczba

$$\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)}$$

jest wymierna.

Rozwiązanie na str. 10

M 1271. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA kwadratu $ABCD$ o boku 1 (rys. 1). Wyznaczyć najmniejszy możliwy obwód czworokąta $KLMN$.
Rozwiązanie na str. 2

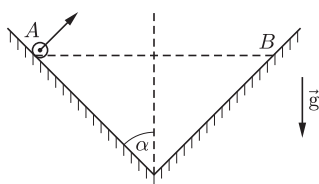


Rys. 1

M 1272. Dane są liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wykonujemy operację polegającą na dodaniu liczby 1 do pewnych dwóch spośród tych liczb. Postępowanie to kontynuujemy. Czy możemy w ten sposób otrzymać ciąg składający się z sześciu równych liczb?
Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 759. Dana jest rynienka, której przekrój jest trójkątem o kącie rozwarcia $2\alpha = 90^\circ$ i pionowej osi symetrii (rys. 2). Znajdująca się w rynience piłeczka co $t = 1$ s odbija się od ścianki rynienki, na przemian w punktach A i B znajdujących się na tej samej wysokości. Znaleźć najmniejszą i największą prędkość piłeczki w czasie tego ruchu.
Rozwiązanie na str. 3



Rys. 2

F 760. Znajdujący się na powierzchni Ziemi mały balonik rozerwał się na drobne kawałki, które zostały wyrzucone równomiernie we wszystkich kierunkach z taką samą, co do wartości, prędkością v . Jaka masa strzępków balonika znajduje się na zewnątrz koła o promieniu R i środku w punkcie, w którym znajdował się balonik? Masa balonika była równa M .
Rozwiązanie na str. 9

Kącik przestrzenny (2) Najmocniejsze twierdzenie stereometrii

Rozpocznijmy od sformułowania tytułowego twierdzenia (łatwy dowód pozostawiamy Czytelnikowi).

Twierdzenie 1. Dana jest sfera o oraz takie punkty A i B , że prosta AB jest rozłączna ze sferą o . Prowadzimy dwie płaszczyzny przechodzące przez punkty A i B styczne do sfery o w punktach P i Q (rys. 1). Wówczas

- $AP = AQ$,
- trójkąty APB i AQB są przystające.

Z części a) otrzymujemy, że jeśli do dwóch danych sfer poprowadzimy dwie wspólne styczne zewnętrzne, to odcinki łączące punkty styczności zawarte w tych stycznych będą równej długości (dlaczego?).

Okazuje się, że te proste fakty mogą prowadzić do bardzo ciekawych i niebanalnych wniosków. Przyjrzyjmy się kilku przykładom.

1. (IMO LONGLIST '85) Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABC i BCD odpowiednio w punktach P i Q . Dowieść, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD$.

Rozwiązanie. Niech R i S będą punktami styczności sfery wpisanej odpowiednio ze ścianami ACD i ABD . Trójkąty utworzone przez pewną krawędź i punkty styczności sfery wpisanej z dwoma ścianami zawierającymi tę krawędź są przystające. Wygodnie jest teraz wszystko rysować na siatce (rys. 2). Oznaczmy:

$$\begin{aligned} \sphericalangle APB = \sphericalangle ASB = \alpha, & \quad \sphericalangle BPC = \sphericalangle BQC = \beta, & \quad \sphericalangle APC = \sphericalangle ARC = \gamma, \\ \sphericalangle CQD = \sphericalangle CRD = \alpha', & \quad \sphericalangle ARD = \sphericalangle ASD = \beta', & \quad \sphericalangle BQD = \sphericalangle BSD = \gamma'. \end{aligned}$$

Otrzymujemy

$$\beta + \gamma' + \alpha' = 360^\circ, \quad \gamma + \alpha' + \beta' = 360^\circ, \quad \alpha + \beta' + \gamma' = 360^\circ, \quad \alpha + \beta + \gamma = 360^\circ.$$

Dodając stronami pierwsze trzy równości i uwzględniając czwartą, dostajemy

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ.$$

Stąd i z trzeciej równości dostajemy $\alpha = \alpha'$. Zatem $\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD$.

Warto zapamiętać ten fakt, bo na pierwszy rzut oka jest dość zaskakujący (i, niestety, mało znany), a przydaje się w wielu miejscach. Czytelnikom pozostawiamy dowód, że analogiczna własność zachodzi również dla sfery dopisanej, jak i w przypadkach, gdy jeden lub dwa wierzchołki uciekną do nieskończoności.

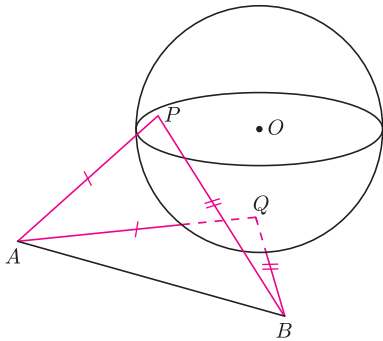
2. (OM 54-III-5) Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H , a sfera dopisana do tego czworościanu jest styczna do ściany ABC w punkcie O . Dowieść, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

Sięgając do broszurki z tej olimpiady, widzimy, że zadanie to rozwiązały zaledwie 3 osoby, jedna w połowie, a aż 122 prace zostały ocenione na 0 punktów! Jednakże zadanie to, jak za chwilę zobaczymy, jest bardzo łatwe – wystarczy zauważyć kilka par trójkątów przystających i porachować troszkę na kątach.

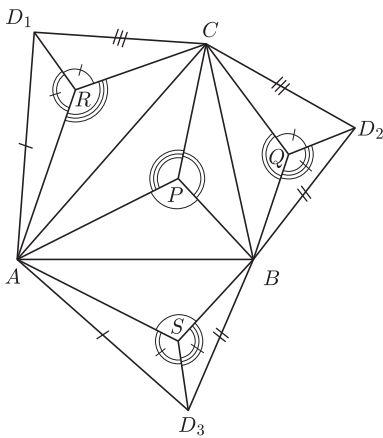
Rozwiązanie. Niech K i L będą punktami styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ odpowiednio ze ścianami ACD i BCD , a P i Q punktami styczności sfery dopisanej odpowiednio z płaszczyznami ACD i BCD . Wówczas trójkąty KCP i LCQ są przystające (rys. 3). Oznaczmy miary kątów trójkąta ABC przy wierzchołkach A, B, C odpowiednio przez α, β, γ . Trójkąty BQC i BOC są przystające, skąd wynika, że $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle BCO = 90^\circ - \alpha$ (rys. 4). Analogicznie $\sphericalangle ACP = 90^\circ - \beta$. Niech $\sphericalangle BCL = \varphi$. Wtedy $\sphericalangle ACK = \varphi + \beta - \alpha$ (bo $\sphericalangle PCK = \sphericalangle QCL$). Jednakże $\triangle BCH \equiv \triangle BCL$ i $\triangle ACH \equiv \triangle ACK$, więc

$$\gamma = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BCH} + \sphericalangle ACH} = \sphericalangle BCL} + \sphericalangle ACK} = 2\varphi + \beta - \alpha$$

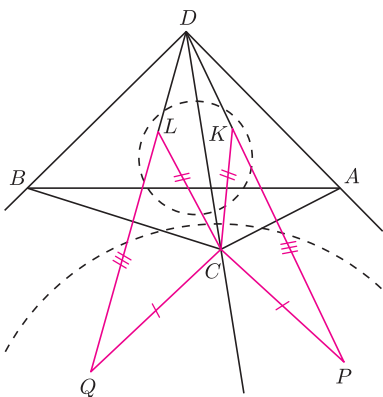
(rys. 5), skąd $\varphi = 90^\circ - \beta$. Zatem $CH \perp AB$. Analogicznie dowodzimy, że $BH \perp AC$, a to oznacza, że H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC .



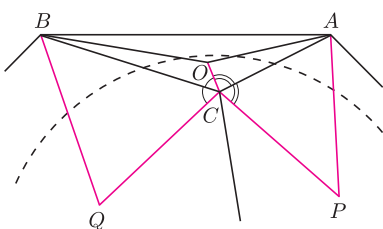
Rys. 1



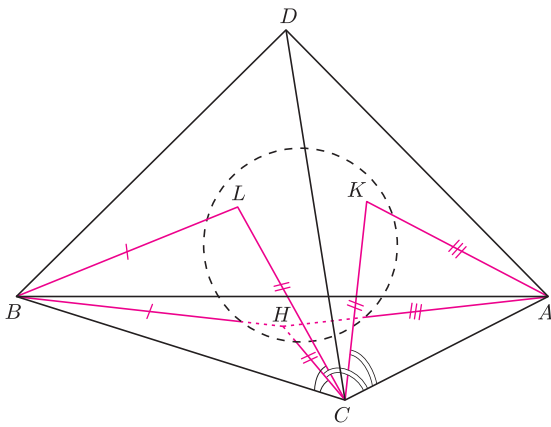
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Dlaczego więc tak proste zadanie sieje takie spustoszenie na finale? Częstym błędem wielu olimpijczyków jest rysowanie wszystkich rzeczy na jednym rysunku. Na powyższym przykładzie przekonaliśmy się, jak dużo może dać zrobienie kilku rysunków i zaznaczenie na każdym z nich jedynie pewnych elementów! Być może brakuje też wiary, że do tego typu zadań wystarczają jedynie te prościutkie fakty przytoczone na początku. Pamiętajcie: wiara czyni cuda!

Zadania

3. (RUS 1986) Czworoscian $ABXY$ jest opisany na sferze. Punkty A i B są ustalone, a punkty X i Y poruszają się. Udowodnić, że suma

$$\sphericalangle AXB + \sphericalangle XBY + \sphericalangle BYA + \sphericalangle YAX$$

jest stała.

4. (OM 57-III-5) Dany jest czworoscian $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworoscian jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L . Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD , to czworoscian $ABCD$ jest foremny.

Więcej zadań i objaśnienie skrótów na internetowej stronie *Delty*.

Michał KIEZA

Rozwiązania zadań lingwistycznych

Zadanie nr 1. Oto wyrazy, z których tworzy się liczebniki w języku *sulka*:

- *tgiang* 1, *lomin* 2, *korlotge* 3, *korlolo* 4, *ktiëk* 5, *mhelom* 20;
- *hori orom* – oznacza dodawanie, *lo* – podwojenie;
- *a* – l. pojedyncza lub podwójna, *o* – l. mnoga (od 3).

Rzeczowniki mają te same formy w liczbie pojedynczej i podwójnej, natomiast inne w liczbie mnogiej (*tu*, *sngu*; *vhoi*, *vuo*). Istnieją osobne wyrazy dla czwórki kokosów oraz dla pary i czwórki owoców chlebowca (*ngausmia*, *moulang*, *ngaitegaap*).

Odpowiedzi:

- (a) *a ksie a tgiang*: 1 kokos
o ngaitegaap a korlotge: 12 owoców chlebowca
o ngausmia a ktiëk: 20 kokosów
o vuo a lo ktiëk hori orom a tgiang: 11 orzechów betelu
- (b) 2 pochrzyny: *a lo tu a lomin*
 14 pochrzynów: *o sngu a lo ktiëk hori orom a korlolo*
 15 owoców chlebowca: *o ngaitegaap a korlotge hori orom a moulang hori orom a tgiang*
 20 orzechów betelu: *o vuo a mhelom*

Zadanie nr 5. Zdania w *nahuatl* zaczynają się od orzeczenia. Podmiot i dopełnienie (dopełnienia) niebędące zaimkami występują za nim w dowolnej kolejności, poprzedzone wyrazem *in* (rodzajnik określony). Czasownik otrzymuje kolejno następujące przedrostki:

- podmiot: *ni-* 1. os. l.p., *ti-* 2. os. l.p., — 3. os. l.p.;
- dopełnienie: *nëch-* 1. os. l.p., *mitz-* 2. os. l.p., *k-* 3. os. l.p.;
- kolejne dopełnienie: *të-* ‘kogoś, komuś’, *tla-* ‘coś’,

przy czym w zdaniach złożonych postaci „*A* powoduje, że *B* robi *C*.”, *B* traktowane jest jako dopełnienie (por. ang. konstrukcje jak „He makes them do ...”), oraz następujące przyrostki:

- ‘powodować, że ...’:
 – przy czasowniku nieprzechodnim (niedopuszczającym dopełnienia): *-tia* (z wydłużeniem poprzedzającego *i*),
 – przy czasowniku przechodnim: *-ltia*;
- ‘robić dla’: *-lia* (ze zmianą poprzedzającego *a* w *i*).

Ta sama czynność z dopełnieniem i bez często jest wyrażana za pomocą różnych czasowników.

Odpowiedzi:

- (a) 18. *tiktlazohtlaltia in zihuätl in kuauxhënk*:
 powodujesz, że kobieta kocha cieśnię;
 powodujesz, że cieśnię kocha kobietę
19. *nëchtzähtzitia*: on powoduje, że krzyczą
20. *tikhuütëki*: bijesz go
21. *nikëhuilia in kikatl in tizitl*:
 śpiewam pieśń dla znachora
22. *nikneki in ätölli*: chcę atole
23. *mitztlakähualtia*: on powoduje, że coś zostawiasz
- (b) 24. on powoduje, że robię atole:
nëchchihualtia in ätölli
25. robisz wino dla kogoś: *tiktëchihuilia in oktli*
26. znachor powoduje, że śpisz: *mitzkochitia in tizitl*
27. śpiewam coś: *nitlaëhua*
28. przewracam się: *nihuetzi*

Badamy zdolność skupiającą soczewek

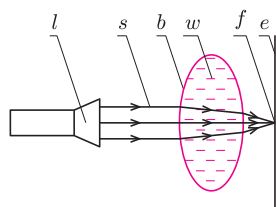
Stanisław BEDNAREK

Z soczewkami spotykamy się na co dzień. Są one podstawowymi elementami wielu przyrządów optycznych, na przykład okularów, lornetki, lunety, teleskopu czy mikroskopu. Soczewka to ciało przezroczyste, ograniczone dwiema zakrzywionymi powierzchniami. Najczęściej są to powierzchnie kuliste, chociaż mogą być również powierzchnie cylindryczne, paraboliczne, hiperboliczne lub elipsoidalne. Zwykle soczewka wykonana jest z ciała stałego, np. szkła lub tworzywa sztucznego, ale rolę soczewki może spełniać także, o czym się sami przekonamy, żel, ciecz lub nawet gaz. Spróbujemy dzisiaj poznać nieco dokładniej jedną z właściwości soczewek, którą jest ich zdolność skupiająca.

Wśród różnych rodzajów soczewek wyróżnia się soczewki skupiające i rozpraszające. Soczewki skupiające mają tę właściwość, że równoległa wiązka światła po przejściu przez nie staje się wiązką zbieżną i zostaje skupiona w niewielkim obszarze, który nazywa się ogniskiem soczewki. Odległość środka tego obszaru od soczewki nazywana jest jej ogniskową. Z kolei odwrotność ogniskowej określa się jako zdolność skupiającą. Jeżeli ogniskową wyrazimy w metrach, to zdolność skupiającą otrzymamy w dioptriach (D). Na przykład, soczewka, której ogniskowa wynosi 0,5 m, ma zdolność skupiającą 2 D.

Przybliżone rozważania teoretyczne dla cienkich soczewek kulistych i wąskich wiązek światła prowadzą do wniosku, iż ognisko powinno być punktem, w praktyce jednak wiązka światła zostaje skupiona w obszarze o skończonych rozmiarach. W przypadku szerokich wiązek i grubych soczewek ognisko staje się rozmytym obszarem i jest to wada soczewek. Wada ta nazywa się aberracją sferyczną i można ją usunąć, stosując soczewki o innych kształtach niż kulisty. Inna wada soczewek przejawia się może tym, że ognisko tej samej soczewki oświetlonej wiązkami promieni o różnych barwach wypada w nieco innych miejscach dla różnych barw. Tę wadę soczewek nazywa się aberracją chromatyczną i usuwa przez stosowanie układów soczewek wykonanych z odpowiednio dobranych materiałów.

Soczewkę skupiającą możemy wykonać w bardzo prosty sposób, używając do tego celu przezroczystej, spłaszczonej butelki, np. po szamponie do włosów. Butelkę taką napełniamy wodą, zamykamy korkiem i soczewka jest gotowa! Na soczewkę kierujemy równoległą wiązkę światła z latarki, a za soczewką umieszczamy ekran zrobiony z kartki białego papieru (rys. 1). Zauważymy wówczas, że przy pewnej odległości ekranu od soczewki tworzy się na nim wąska, podłużna plama światła. Przesuwając kartkę, znajdujemy taką odległość, przy której rozmiary plamy są najmniejsze – kartka znajduje się wtedy w ognisku soczewki. Soczewka sporządzona z butelki jest przykładem soczewki dwuwypukłej walcowej, a jej ognisko ma kształt zbliżony do odcinka. Zamiast spłaszczonej butelki możemy użyć łatwo dostępnej butelki o przekroju kołowym, ale wtedy będziemy mieli soczewkę grubą, charakteryzującą się dużymi wadami optycznymi, i ognisko będzie trudniejsze do zlokalizowania.

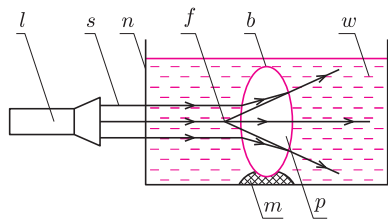


Rys. 1. Układ do badania zdolności skupiającej soczewki; *l* – latarka, *s* – równoległa wiązka światła, *b* – butelka, *w* – woda, *f* – ognisko, *e* – ekran.

Mając różne rodzaje spłaszczonych, przezroczystych butelek o różnych promieniach krzywizny, możemy sprawdzić, że zdolność skupiająca soczewki zależy od tych promieni. Im promienie krzywizny są mniejsze, tym zdolność skupiająca jest większa. Zdolność skupiająca soczewki zależy również od rodzaju materiału, z którego została wykonana soczewka, i od rodzaju ośrodka, w którym się ona znajduje. Możemy się o tym łatwo przekonać, wykonując kolejne doświadczenia.

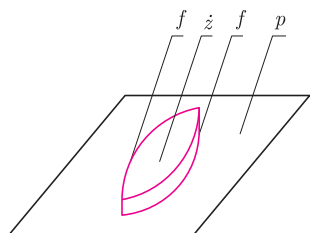
Powtórzmy jeszcze raz doświadczenie ze skupianiem równoległej wiązki światła przez butelkę wypełnioną wodą, ale zmierzmy przy tym linijką odległość ogniska od butelki, czyli ogniskową. Następnie wypełnijmy butelkę inną przezroczystą cieczą. Na początek weźmy nasycony roztwór soli kuchennej, czyli roztwór o maksymalnym stężeniu, który poznajemy po tym, że już więcej soli się w nim nie rozpuszcza. Wypełnijmy nim butelkę i zmierzmy ogniskową uzyskanej soczewki. Powtórzmy jeszcze pomiary ogniskowej dla butelki wypełnionej gliceryną i alkoholem etylowym (np. denaturatem). Za każdym razem zmierzmy ogniskową soczewki i porównajmy wyniki. Dla której cieczy ogniskowa soczewki jest najkrótsza?



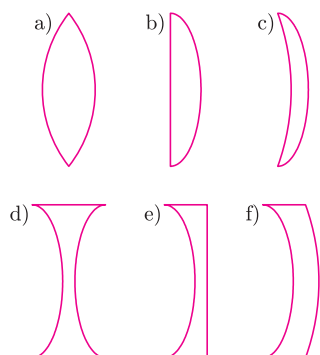


Rys. 2. Układ do badania zdolności rozpraszającej soczewki; *l* – latarka, *s* – równoległa wiązka światła, *n* – naczynie, *b* – butelka, *w* – woda, *m* – plastelina, *p* – powietrze, *f* – ognisko pozorne.

Ponieważ wartości współczynnika załamania mogą być różne dla różnych długości fali światła, zwykle liczbę tę podaje się dla żółtego światła o długości fali 589,29 nm.



Rys. 3. Forma do odlewania soczewek z żelatyny; *p* – podstawa, *f* – pasek folii, *z* – żelatyna.



Rys. 4. Soczewki odlane z żelatyny; a) dwuwypukła, b) płaskowypukła, c) wypukłokwłósta, d) dwuwkłósta, e) wkłóstołaska, f) wkłóstowypukła.

Żeby przekonać się, jak zdolność skupiająca soczewki zależy od rodzaju ośrodka, w którym ta soczewka się znajduje, wykonajmy następujące doświadczenie. Używaną w poprzednich doświadczeniach spłaszczoną, przezroczystą butelkę, napełnioną tym razem powietrzem, dokładnie zamknijmy korkiem i przyciśniemy, np. plasteliną, do dna przezroczystego naczynia o płaskich ściankach.

Z powodzeniem może być małe prostokątne akwarium (rys. 2) lub pojemnik na warzywa z lodówki. Do naczynia nalejmy wody w takiej ilości, żeby butelka była całkowicie zanurzona. Na jedną ze ścianek naczynia skierujemy równoległą wiązkę światła i zobaczymy, jak wygląda ta wiązka po przejściu przez zanurzoną w wodzie butelkę, będącą teraz soczewką powietrzną. Okazuje się, że wiązka ta z równoległej stała się rozbieżną. Oznacza to, iż soczewka taka rozprasza światło i nie ma ogniska rzeczywistego. Przyjmuje się, że ma ona ognisko pozorne, które znajduje się w miejscu przecięcia przedłużeń promieni wychodzących z soczewki. Ogniskową takiej soczewki uznaje się za ujemną.

Doświadczenie powyższe możemy powtórzyć w innej wersji. Napełniamy butelkę czystą wodą, zamykamy ją i mocujemy w naczyniu, które wypełniamy stężonym roztworem soli kuchennej. Oświetlamy butelkę i obserwujemy wychodzącą z niej wiązkę światła. Okazuje się, że i w tym przypadku otrzymaliśmy soczewkę rozpraszającą, ale rozbieżność wiązki jest mniejsza, czyli soczewka ma mniejszą zdolność rozpraszającą.

Z ostatnich doświadczeń wynika, że soczewka o tych samych promieniach krzywizny może stać się ze skupiającej soczewką rozpraszającą, gdy umieścimy ją w ośrodku o odpowiednio dobranych właściwościach optycznych. Właściwości te charakteryzuje współczynnik *n* załamania światła danego ośrodka względem próżni, który wyrażony jest stosunkiem prędkości *c* rozchodzenia się światła w próżni do prędkości *v* rozchodzenia się światła w tym ośrodku, czyli

$$(*) \quad n = \frac{c}{v}.$$

Dla uzupełnienia dodajmy, że prędkość rozchodzenia się światła w próżni jest największą prędkością obiektu materialnego lub sygnału w przyrodzie i wynosi 299 792,458 km/s. Prędkość światła w dowolnym innym ośrodku jest mniejsza od tej wartości i dlatego współczynnik załamania zdefiniowany wzorem (*) jest większy od jedności. Rekordowe wartości współczynnika załamania mają tytanian strontu (2,41) i diament (2,42). Patrząc na wzór (*), łatwo zauważyć, że im mniejsza prędkość rozchodzenia się światła w danym ośrodku, tym większy jego współczynnik załamania. Ośrodek o większym współczynniku załamania nazywa się ośrodkiem gęstszym optycznie. Gdy soczewkę skupiającą (w powietrzu) umieścimy w ośrodku gęstszym optycznie niż materiał soczewki, to stanie się ona soczewką rozpraszającą.

Jeżeli mamy trochę żelatyny i kilka pasek dość grubej, przezroczystej folii, używanej do drukarek lub jako okładki do bindowania druków, to możemy wykonać szereg soczewek o różnych kształtach. Pozwolą nam one przeprowadzić bardziej systematyczne badania. W tym celu z pasek folii o szerokości około 1,5 cm i długości kilkunastu centymetrów sporządzamy formy, przedstawiające zarys soczewki. Niech na początek będzie to soczewka dwuwypukła (rys. 3). Końce pasek sklejemy taśmą samoprzylepną, a wygięte paski przyklejamy starannie klejem szybkowiążącym do poziomej podstawy. Do otrzymanej formy wlewamy stężony roztwór żelatyny w ciepłej wodzie i wstawiamy całość do lodówki, żeby żelatyna skrzepła. Po skrzepnięciu żelatynową soczewkę wyjmujemy z formy i możemy jej użyć do badania właściwości skupiających. (Przy sporządzaniu żelatynowej soczewki nie wahał się poprosić o pomoc osób mających większe doświadczenie z zastosowaniem żelatyny w kuchni, np. przy przygotowywaniu deserów.) W analogiczny sposób wykonujemy soczewki o innych kształtach, pokazanych na rysunku 4. Zamiast oświetlać soczewkę równoległą wiązką światła z latarki, możemy skierować na nią promień światła pochodzący ze wskaźnika laserowego i badać przebieg promienia w różnych odległościach od środka soczewki. Zaletą żelatynowych soczewek jest możliwość ich odkształcania i obserwacji, jak wpływa to na zdolność skupiającą. Żelatynowe soczewki nie są jednak zbyt trwałe i po kilku dniach może okazać się, że tracą swój kształt w wyniku wyparowania lub wycieku wody.

LHC – początek sezonu łowieckiego

Źródłem każdego prawdziwego sukcesu jest ciężka praca. W trakcie naprawiania i poprawiania LHC po awarii sprzed półtora roku wymieniono kilkadziesiąt kilkunastometrowych zespołów magnesów, zainstalowano kilka tysięcy czujników, co wymagało położenia kilkuset kilometrów nowych kabli, opracowano metodę i za jej pomocą wyczyszczono ponad 4 km rury próżniowej, w której panuje próżnia lepsza niż w przestrzeni kosmicznej.

Jeżeli chodzi o magnesy, to kilka z nich uprzednio umieszczono w różnych eksponowanych miejscach. Jeden z nich stał na dużym rondzie tuż przed granicą francusko-szwajcarską w miejscu, które dwa razy dziennie pokonują tysiące ludzi zmierzających do pracy w Genewie. Większość sądziła, że to tylko atrapa. Tymczasem okazało się, że był to zapasowy moduł, który pewnego dnia zabrano, by stał się częścią LHC.

Zespoły badawcze eksperymentów również nie próżnowały. Zebrano setki milionów przypadków przejścia przez detektory mionów kosmicznych, których strumień, pomimo około stumetrowej warstwy ziemi i skał, wynosi kilka kiloherców na ar. Dane te zbierano, prawie nie przerywając trybowania (ang. *commissioning* – odbiór techniczny). Zbieranie danych odbywało się z nominalną częstotliwością kilkuset herców, czyli w tempie kilkudziesięciu milionów dziennie. Dla porównania, cztery eksperymenty zainstalowane przy LEP-ie, poprzedniku LHC, w ciągu dekady zarejestrowały wspólnie raptem 10 milionów przypadków.

W końcu nadszedł listopad. Po pierwszych próbach z cyrkulacją wiązki 20 listopada osiągnięto stabilną orbitę. Przy okazji zaobserwowano coś zaskakującego. Energia wiązki minimalnie zmieniła się po włączeniu magnesu eksperymentu CMS. Może nie byłoby w tym nic dziwnego, w końcu jest to dodatkowe pole czterech tesli na odcinku kilkunastu metrów, tylko że skierowane równoległe do wiązki. Szybko jednak zdano sobie sprawę, że to tylko zbieg okoliczności. Włączanie magnesu było przypadkowo zsynchronizowane z górowaniem Księżyca, a trwało kilka godzin. Zarejestrowana zmiana była spowodowana wpływem skorupy ziemskiej deformującym akcelerator. Efekt dobrze znany od czasów LEP-u.

Trzy dni później, 23 listopada, doszło do pierwszych zderzeń proton-proton, najpierw przy energii 900 GeV, z którą wiązki są wstrzykiwane z pośredniego akceleratora SPS. Kolizje te zostały zarejestrowane, z czym związana jest następująca anegdota. Zespoły eksperymentów nie oczekiwały pierwszych zderzeń przed początkiem grudnia, więc gorączkowo pracowały, by do tego czasu zakończyć wszelkie prace nad detektorami. Jednak 23 listopada „mechanicy” poinformowali „mostek”, że mają zamiar mieć jednocześnie obie wiązki w LHC oraz że „chyba nie uda im się uniknąć zderzeń” pomimo rozkolimowania wiązek. Jeżeli więc „jakieś fragmenty detektorów są w stanie pracować przy nie do końca stabilnych wiązkach”, to można próbować coś zarejestrować. Po hasło: „wszystkie ręce na pokład” eksperymenty, łamiąc pieczęlowicę wypracowane procedury bezpieczeństwa, doprowadziły swoje detektory do gotowości i rzeczywiście zarejestrowały po około 100 przypadków. Na ten moment niektórzy pracowali prawie 30 lat...

Już po kilku dniach okazało się, że detektory identyfikują rozpady mezonów π^0 (najlżejszych cząstek zbudowanych z kwarków) na dwa fotony, co zawsze jest traktowane jako dowód bardzo dobrego zrozumienia działania kalorymetrów elektromagnetycznych, służących do rejestracji fotonów i elektronów.

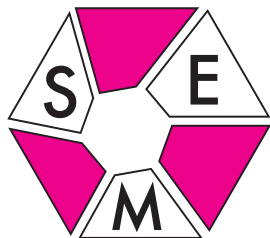
6 grudnia ogłoszono stabilne warunki pracy LHC, co umożliwiło włączenie wszystkich poddetektorów z krzemowymi detektorami śladowymi na czele. Już następnego dnia pokazano rysunki masy par naładowanych pionów, zawierające rezonansowe maksimum rozpadów kaonów (mezonów zawierających masywniejszy kwark dziwny). Zgodność parametrów takiej krzywej (szerokość i położenie maksimum) z symulacjami jest traktowana jako świadectwo poprawnego działania detektorów śladowych. Uzyskanie wyników po kilku godzinach od zebrania danych dowodzi jednocześnie bardzo dobrego opanowania szybkiej obróbki strumienia danych.

Dwa dni później LHC stało się rekordowym akceleratorem, podnosząc energię zderzeń do 2,36 TeV, czyli prześcigając działający w USA Tevatron. Do Świąt, przed którymi LHC zatrzymano na dwumiesięczną przerwę techniczną, eksperymenty zebrały po kilkaset tysięcy przypadków przy energii 900 GeV oraz kilkanaście przy 2,36 TeV.

W chwili wydawania tego numeru *Delta* LHC prawdopodobnie działa przy energii 3,5 TeV, a detektory rejestrują zderzenia z częstotliwością kilka rzędów wielkości większą niż w grudniu ubiegłego roku. Przynajmniej tyle obiecywali specjaliści. To optymistyczne przewidywanie jest poparte niezwykle pozytywnym doświadczeniem związanym z dotychczasowym działaniem LHC. Olbrzymi przyrost świetlności (częstości zachodzenia zderzeń) zostanie osiągnięty poprzez wzrost liczby paczek protonów, wzrost liczby protonów oraz ich zagęszczenie w paczce. Nadal częstość będzie około dwa rzędy wielkości mniejsza od nominalnej, ale pozwoli każdemu z eksperymentów na zebranie do końca roku około 10 miliardów przypadków stanowiących zaledwie jedną setną wszystkich zderzeń, ale tę najbardziej interesującą. Odkryjemy na nowo model standardowy, analizując miliony rozpadów bozonów pośredniczących W i Z oraz tysiące przypadków produkcji najcięższych kwarków top (będą to pierwsze „europejskie” pary tych kwarków, bo do tej pory były obserwowane tylko w Tevatronie).

Energia będzie dwa razy mniejsza niż nominalna (być może zostanie podniesiona do 10 TeV), ale w przypadku zderzacza hadronowego, w którym „twardo” zderzają się partony niosące po ułamku energii protonu, oznacza to tylko zmniejszenie prawdopodobieństwa kreacji masywnych obiektów, niestety, aż o około rząd wielkości. Mimo to już w tym roku LHC pozwoli rozpocząć eksplorację obszaru poza modelem standardowym. Co tam znajdziemy? Nie wiadomo, i to jest najciekawsze.

Piotr ZALEWSKI



W zawodach I stopnia obecnej 61 edycji Olimpiady Matematycznej wzięło udział 1517 uczniów. Jest to liczba znacznie wyższa niż w roku ubiegłym i bliska wieloletniej średniej. Może więc pojawiające się ostatnio narzekania na obniżające się zainteresowanie uczniów matematyką i na ich niechęć do stawiania czoła intelektualnym wyzwaniom są przesadzone, przynajmniej w odniesieniu do uczniów najbardziej ambitnych i matematycznie uzdolnionych. Może też nie zanika wśród nauczycieli chęć pracy z takimi uczniami. Do drugiego stopnia zakwalifikowano około 520 uczniów, ta liczba może jeszcze ulec zmianie, ponieważ komitety okręgowe mogą rozpatrywać odwołania uczestników.

Wszystkie zadania z I stopnia aktualnej edycji Olimpiady (także z pewnej liczby poprzednich) i ich rozwiązania można znaleźć na stronie internetowej Olimpiady pod adresem: www.om.edu.pl

Niektóre z zadań, jak zwykle, okazały się łatwiejsze (nadesłano więcej poprawnych rozwiązań), inne trudniejsze. W momencie przygotowywania tego tekstu nie były jeszcze zebrane wszystkie wyniki z całego kraju. Z danych częściowych (które jednak statystycznie są bliskie ostatecznych) wynika jednak, że zdecydowanie najtrudniejsze okazało się zadanie 12 (pojedyncze rozwiązanie). Nieco łatwiejsze, ale też trudne, było zadanie 11 rozwiązane przez około 0,02% uczestników i zadanie 8, które rozwiązało około 0,1% startujących,

średnio trudnymi — zadania 4, 5, 7 i 9, rozwiązane przez około 25% uczestników, a najłatwiejsze okazało się zadanie 2 rozwiązane przez ponad 85% uczestników.

Prawie zawsze uczniowie znajdują wiele innych sposobów rozwiązania zadań olimpijskich, niż te zaproponowane przez organizatorów. Niejednokrotnie są one prostsze, ładniejsze lub ciekawsze od rozwiązań „firmowych”. Niżej przytaczamy fragment rozwiązania zadania 11 nadesłanego przez uczennicę z Białegostoku.

Zadanie 11. Czworokąty wypukłe $ABCD$ i $PQRS$ mają jednakowe pola. Ponadto spełnione są równości:

$$AB = PQ, \quad BC = QR, \quad CD = RS, \quad DA = SP.$$

Dowieść, że istnieją punkty P', Q', R', S' leżące na tej samej płaszczyźnie co czworokąt $ABCD$, takie że

$$AP' = BQ' = CR' = DS'$$

oraz czworokąt $P'Q'R'S'$ jest przystający do czworokąta $PQRS$.

Udowodnimy, że przekątne czworokątów $ABCD$ i $PQRS$ przecinają się pod tym samym kątem. Literami w, x, y, z oznaczymy odległości punktu przecięcia przekątnych od kolejnych wierzchołków, a literą α oznaczymy kąt między odcinkami w i x . Długości kolejnych boków czworokąta to a, b, c i d . Z twierdzenia kosinusów wynika, że $a^2 = w^2 + x^2 - 2wx \cos \alpha$, $b^2 = y^2 + x^2 + 2yx \cos \alpha$, $c^2 = z^2 + y^2 - 2zy \cos \alpha$, $d^2 = w^2 + z^2 + 2wz \cos \alpha$.

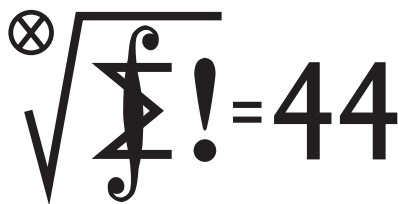
Niech P oznacza pole czworokąta. Ze wzoru na pole trójkąta mamy

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}[(xy + wz) \sin \alpha + (xw + yz) \sin \alpha] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x^2 + y^2 - b^2}{-2 \cos \alpha} + \frac{w^2 + z^2 - d^2}{-2 \cos \alpha} \right) \sin \alpha + \left(\frac{x^2 + w^2 - a^2}{2 \cos \alpha} + \frac{y^2 + z^2 - c^2}{2 \cos \alpha} \right) \sin \alpha \right] = \\ &= -\frac{1}{4}(w^2 + x^2 + y^2 + z^2 - b^2 - d^2) \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{4}(w^2 + x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - c^2) \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \frac{1}{4}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Z tej równości oraz z równości odpowiednich boków czworokątów $ABCD$ i $PQRS$, a także ich pól, otrzymujemy wniosek, że tangensy kątów między przekątnymi obydwóch czworokątów są równe, więc same kąty też są równe.

Można też zadać pytanie, czy założenie równości pól w tym zadaniu jest rzeczywiście potrzebne. Z pracy jednego z uczniów z Warszawy wynika, że w zasadzie nie, tzn. udowodnił on tezę bez tego założenia, nie rozpatrując kilku bardzo szczególnych przypadków. Zachęcamy Czytelników do przemyślenia zarówno tej kwestii, jak i do dokończenia rozwiązania.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2010

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 597, 598

Redaguje Marcin E. KUCZMA

597. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

598. Niech $M = \{1, 2, \dots, m^2\}$ (m jest ustaloną liczbą naturalną).

- (a) Ile jest w zbiorze M podzbiorów niezawierających pary liczb, których różnica dzieli się przez m ?
- (b) Ile jest w zbiorze M podzbiorów niezawierających pary liczb, których różnica jest równa m ?

Zadanie 598 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2009

Przypominamy treść zadań:

589. W każde pole tabelki o wymiarach $n \times n$ wpisujemy dodatnią liczbę całkowitą nie większą od n tak, by w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie wszystkie liczby były równe lub wszystkie liczby były różne. Niech S będzie sumą wszystkich liczb w tabelce. Ile różnych wartości S można w ten sposób uzyskać (dla ustalonego n)?

590. Dowieść, że dla każdej parzystej liczby naturalnej n oraz dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n \leq \frac{1+x+\dots+x^n}{n+1}.$$

589. Jeśli w każdym wierszu jest permutacja liczb $1, \dots, n$, to $S = n \cdot n(n+1)/2$. Gdy w dokładnie jednym wierszu jest ciąg stały (k, \dots, k) , a w każdym z pozostałych wierszy jest permutacja liczb $1, \dots, n$, wówczas $S = nk + (n-1) \cdot n(n+1)/2$.

Gdy w dwóch wierszach są ciągi stałe (k, \dots, k) , (l, \dots, l) , przy czym $k \neq l$, to w każdej kolumnie musi być permutacja liczb $1, \dots, n$, i znów $S = n \cdot n(n+1)/2$. Jeśli zaś $k = l$, to w każdej kolumnie musi być ciąg stały (k, \dots, k) , więc $S = n^2k$.

Reasumując, możliwymi wartościami sumy S są liczby

$$\frac{n^2(n+1)}{2}, \quad nk + \frac{n(n^2-1)}{2}, \quad n^2k; \quad 1 \leq k \leq n$$

(i wszystkie one faktycznie mogą być osiągnięte) – razem, a priori, $2n+1$ wartości. Czy jednak są one różne? Możliwe, że (dla pewnych $k, l \leq n$) ma miejsce któraś z równości

$$(1) \quad \frac{n^2(n+1)}{2} = nk + \frac{n(n^2-1)}{2},$$

$$(2) \quad \frac{n^2(n+1)}{2} = n^2k,$$

$$(3) \quad nk + \frac{n(n^2-1)}{2} = n^2l.$$

Każde z równań (1) i (2) sprowadza się do $2k = n+1$; nie ma więc rozwiązań, gdy n jest liczbą parzystą, ma natomiast dokładnie jedno rozwiązanie $k = (n+1)/2$, gdy n jest liczbą

nieparzystą. Równanie (3) przekształcamy do postaci

$$2k - 1 = n(2l - n).$$

I znów: dla n parzystego – brak rozwiązań. Dla n nieparzystego: lewa strona przedstawia liczbę mniejszą niż $2n$, prawa – wielokrotność n . Równość zachodzi jedynie, gdy obie strony są równe n , czyli dla $k = (n+1)/2 = l$.

Wniosek: gdy n jest liczbą parzystą, wszystkie wyznaczone na początku wartości są różne; suma S może mieć każdą z tych $2n+1$ wartości. Gdy n jest liczbą nieparzystą, wartość $n^2(n+1)/2$ powtarza się trzykrotnie; jest więc $2n-1$ możliwych wartości sumy S .

590. Zadana nierówność zachodzi dla $x = 1$. Dla $x \neq 1$ przepisujemy ją równoważnie jako

$$(4) \quad \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \geq (n+1) \left(\frac{x+1}{2}\right)^n,$$

i w tej postaci będziemy jej dowodzić.

Dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b ma miejsce równość

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} - (a-b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (a^{n+1-k} b^k - a^{n+1-k} (-b)^k) \\ &= 2 \sum_{k \in K} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k, \end{aligned}$$

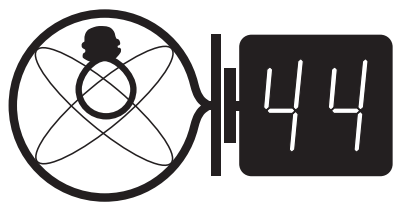
gdzie $K = \{1, 3, 5, \dots, n-1, n+1\}$. Kontynuujemy przekształcenia dla $b \neq 0$:

$$(5) \quad \frac{(a+b)^{n+1} - (a-b)^{n+1}}{2b} = \sum_{k \in K} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k-1} \geq \geq (n+1)a^n;$$

ostatnia nierówność powstała przez odrzucenie z uzyskanej sumy wszystkich składników z wyjątkiem pierwszego – są one liczbami nieujemnymi, bo wykładniki potęg są parzyste.

Podstawiamy teraz w (5) $a = (x+1)/2$, $b = (x-1)/2$ i dostajemy dowodzoną nierówność (4).

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
482 ($WT = 3,04$) i 483 ($WT = 2,38$)
z numeru 9/2009

Krzysztof Magiera	Łosiów	36,89
Michał Koźlik	Gliwice	28,86
Jerzy Witkowski	Radlin	18,88

Zadania z fizyki nr 494, 495

Redaguje Jerzy B. BROJAN

494. Elektrony w metalu można – jak wiadomo – uważać za cząstki swobodne. Załóżmy, że w kawałku metalu poruszającym się z przyspieszeniem elektrony osiągają to samo przyspieszenie wskutek działania pola elektrycznego wytworzonego przez odpowiednie ładunki powierzchniowe. Obliczyć moc promieniowania kwadratowej płytki metalowej o boku $l = 5$ cm i grubości $d = 0,5$ cm, drgającej z amplitudą $A = 1$ cm i częstotliwością $f = 1$ kHz wzdłuż osi prostopadłej do płytki.

Wskazówka: Zgodnie z prawami elektrodynamiki w tzw. przybliżeniu dipolowym moc promieniowania dipola elektrycznego o momencie p jest równa

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{d^2 p}{dt^2} \right)^2.$$

Momentem dipolowym układu dwóch ładunków $+q$ i $-q$ odległych o d nazywamy iloczyn qd .

495. Dwie półproste tworzą kąt 2α , którego dwusieczna jest pionowa. Wzdłuż tych półprostych mogą ślizgać się bez tarcia końce jednorodnego pręta o długości l . W którym przypadku poziome położenie pręta jest położeniem równowagi trwałej – gdy wierzchołek kąta jest na górze, czy gdy jest na dole? Dla przypadku równowagi trwałej podać wzór na częstotliwość małych drgań pręta wokół tego położenia.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2009

Przypominamy treść zadań:

486. Gdy spojrzę w lustro, zamknąć prawe oko i naszkicować, jak widzimy swoją twarz, powstanie obraz schematycznie przedstawiony na rysunku 1.

1. Zestawić dwa prostokątne lusterka pod kątem prostym, zamknąć prawe oko i naszkicować obraz twarzy powstający przy dwukrotnym odbiciu światła w lusterkach. Obracać przed sobą zestaw wokół osi pokrywającej się z kierunkiem widzenia i notować zmiany obrazu.

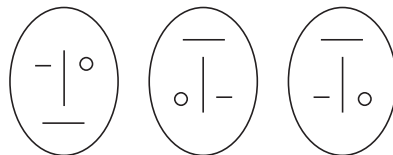
2. Zestawić trzy prostokątne lusterka tak, żeby tworzyły narożnik sześcianu, zamknąć prawe oko i naszkicować obraz twarzy powstający przy trzykrotnym odbiciu światła. Obracać przed sobą zestaw i notować zmiany obrazu.

487. Na końcach nieważkiego pręta o długości $l = 1$ m znajdują się dwie jednakowe masy punktowe m . Pręt jest podtrzymywany w środku, wokół którego może się swobodnie obracać, i znajduje się w polu grawitacyjnym Ziemi, które uznajemy za takie, jakby cała masa Ziemi była skupiona w jej środku. Obliczyć okres małych drgań pręta wokół pionowego położenia równowagi.

Jaka będzie odpowiedź, jeśli pręt jest jednorodny, a pozostałe dane – niezmiennione?



Rys. 1



Rys. 2

Rys. 3

Rys. 4

486. Obraz widziany w dwóch lusterkach, których krawędź zetknięcia jest pionowa (równoległa do osi twarzy), podano na rysunku 2. Przy obrocie lusterek obraz obraca się dwukrotnie szybciej, np. przy poziomej krawędzi zetknięcia otrzymujemy rysunek 3. Obraz widziany w trzech lusterkach jest podany na rysunku 4 i nie zmienia się przy obrocie zestawu.

487. Wprowadźmy kąt przechyłu pręta jako δ , a połowę długości pręta oznaczmy dla wygody jako l' . W pierwszym rzędzie względem δ oraz względem stosunku l'/R odległości końców pręta od środka Ziemi wynoszą $R - l'$ oraz $R + l'$ (gdzie R jest promieniem Ziemi), a siły działające na końce są równe

$$F_1 = \frac{GMm}{(R-l')^2} \approx mg \left(1 + \frac{2l'}{R} \right),$$

$$F_2 = \frac{GMm}{(R+l')^2} \approx mg \left(1 - \frac{2l'}{R} \right),$$

gdzie M – masa Ziemi, g – przyspieszenie ziemskie. W tym samym przybliżeniu nietrudno również wyznaczyć kąty między kierunkami tych sił a osią pręta. Są one równe $\delta(1 + l'/R)$ i $\delta(1 - l'/R)$, a stąd momenty sił F_1 i F_2

wynoszą

$$M_1 \approx mgl'\delta \left(1 + \frac{3l'}{R} \right), \quad M_2 \approx mgl'\delta \left(1 - \frac{3l'}{R} \right).$$

Wypadkowy moment siły jest równy

$$M_w \approx \frac{6mgl'^2}{R} \delta$$

i widać, że jego zwrot sprzyja powrotowi do położenia pionowego, zatem wystąpią drgania. Kwadrat częstości drgań ω jest równy ilorazowi współczynnika stojącego przed δ w powyższym wzorze przez moment bezwładności $I = 2ml'^2$:

$$\omega^2 = \frac{3g}{R}.$$

Zauważmy, że otrzymany wynik nie zależy ani od masy pręta, ani od jego długości, a zatem obowiązuje on dla „wiązek” składającej się z dowolnej liczby takich prętów – czyli dla pręta o dowolnym symetrycznym rozkładzie masy (w szczególności jednorodnego). Wartością liczbową okresu jest

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{3g}} = 2920 \text{ s} = 48 \text{ min } 40 \text{ s}.$$

Patrz w niebo: Gromada ruchoma Arktura

Trudno sobie wyobrazić, że najjaśniejsze gwiazdy mogą kryć jeszcze jakieś tajemnice. Tajemnic szuka się przecież wśród gwiazd ledwo widocznych przez największe teleskopy. Weźmy np. Arktura. To czwarta pod względem jasności gwiazda na całym niebie, stara, uboga w pierwiastki ciężkie, typu widmowego K2, odległa o 11 pc itd. Na pierwszy rzut oka – gwiazda jak gwiazda. Jednak już Edmond Halley odkrył (w 1718 r.) jej wyjątkowo szybki ruch na niebie (2,29 sekundy łuku na rok), co przy jej odległości daje 120 km/s względem grupy gwiazd otaczających Słońce (samo Słońce względem tych gwiazd ma prędkość 20 km/s). To jeszcze nie wszystko. Olin Eggen (1971 r.) i późniejsi badacze odkryli, że z dużą dokładnością identyczne prędkości przestrzenne ma ponad 50 gwiazd rozrzuconych na dużym obszarze nieba. Taka grupa gwiazd nazywana jest gromadą ruchomą. Zauważmy, że nie jest łatwo odkryć gromadę ruchomą, gdyż z góry nie wiadomo wszak, które gwiazdy mogą do niej należeć.



Na podstawie tych danych obserwacyjnych już w obecnym stuleciu wysunięto pogląd, że Arktur i cała gromada ruchoma to przybysze z innej galaktyki. Sam Eggen sugerował, że gromada ruchoma to resztki po dawnej gromadzie, która uległa już rozproszeniu w Galaktyce. Jego współpracownicy znaleźli jednak wśród tych gwiazd istotne różnice składu chemicznego, czego nie powinno być, gdyby powstały one mniej więcej w jednym miejscu. Wymodelowawszy ruch Arktura wstecz na 8 mld lat, uzyskano hipotetyczne miejsce startu dla karłowatej galaktyki liczącej 100 mln gwiazd. Po „puszczeniu” jej w normalny ruch okazało się, że galaktyka ta została przez naszą wchłonięta i rozproszyła się w niej około 5 mld lat temu, przy czym kinematyczne cechy jej resztek są bardzo zbliżone do obserwowanych cech gromady ruchomej Arktura. Potwierdzenia tego mechanizmu badacze oczekują po opracowaniu pomiarów prędkości radialnych 50 mln gwiazd w planowanym projekcie RAVE (*Radial Velocity Experiment*), ale już teraz podkreślają niezwykłość faktu, że takie bądź co bądź subtelne zjawiska można śledzić, obserwując gwiazdy widoczne niemal gołym okiem.

Tomasz KWAST

Marzec

Oriona wieczorem widać już wyraźnie w zachodniej stronie nieba, a na południu mamy Wielkiego i Małego Psa, jego myśliwskich towarzyszy. Alfę obu tych gwiazdozbiorów to bardzo jasne gwiazdy, ponieważ są stosunkowo bliskie: Procyon, alfa Małego Psa, leży w odległości 3,5 pc, Syriusz zaś, alfa Wielkiego Psa, najjaśniejsza gwiazda całego nieba, w odległości 2,6 pc. Obie gwiazdy są podwójne i obie mają za towarzyszy białe karły, czyli gwiazdy o masie zbliżonej do masy Słońca i rozmiarach niewielkiej planety. Gęstości tych gwiazd są zatem rzędu miliona razy większe od gęstości wody, a są te gwiazdy ostatnimi stadiami ewolucji gwiazd o umiarkowanych masach (od 2 do 8 mas Słońca). Na niebie między Procyonem a Syriuszem przechodzi Droga Mleczna, która, omijając od zachodu zenit, ciągnie się ku północy. W sumie więc dużo do oglądania choćby przez lornetkę.

Venus jest w Rybach, gdzie też jest Słońce, zatem jej nie widać. Mars jest w Raku i widać go praktycznie przez całą noc. Jowisz jest w Wodniku i nie widać go wskutek bliskości Słońca. Saturn jest w Pannie, 22 III ma opozycję, czyli znajduje się w przeciwnej stronie nieba niż Słońce, więc widać go przez całą noc. Nów Księżyca wypada 15 III, a pełnia 30 III. W marcu nie mamy żadnych zaćmień, żadnych zakryć i żadnych przewidywalnych rojów meteorów. Za to – jak co roku – 20 III jest równonoc, czyli początek wiosny!

T. K.

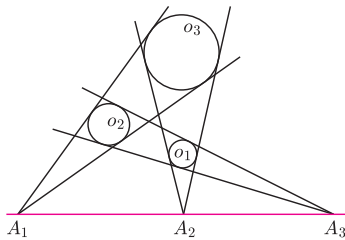


Rozwiązanie zadania M 1272.

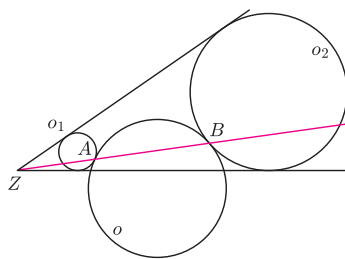
Zauważmy, że dodanie liczby 1 do dwóch wybranych liczb nie zmienia parzystości sumy wszystkich liczb. Suma sześciu równych liczb całkowitych jest parzysta. Tymczasem $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ jest liczbą nieparzystą. To dowodzi, że nie jest możliwe uzyskanie sześciu równych liczb.



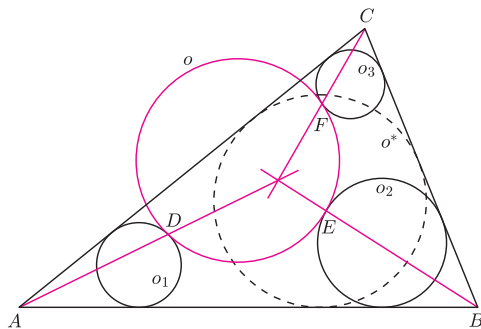
Jednokładność o skali dodatniej (prostą) oznaczamy \mathcal{J}^+ , o skali ujemnej zaś (odwrotną) \mathcal{J}^- .



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Wykonanie rysunku pozostawiam Czytelnikowi.

Dowód twierdzenia o prostej Eulera można znaleźć w poprzednim *deltoidzie*.

Dobrze się składa

Joanna JASZUŃSKA

Tematem styczniowego *deltoidea* były jednokładności. Przypomnijmy, że *jednokładność* o środku O i skali $k \neq 0$ to przekształcenie geometryczne płaszczyzny, które punktowi A przypisuje punkt $A' = \mathcal{J}_O^k(A)$ spełniający warunek $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

Fakt. Dla nieprzystających okręgów o_1 i o_2 istnieje dokładnie jedna jednokładność taka, że $\mathcal{J}^+(o_1) = o_2$, oraz dokładnie jedna taka, że $\mathcal{J}^-(o_1) = o_2$.

Zachodzi następujące miłe twierdzenie, dowód pozostawiam jako zadanie.

Twierdzenie. Złożenie dwóch jednokładności jest albo jednokładnością o skali będącej iloczynem wyjściowych skal i środku współliniowym ze środkami składanych jednokładności, albo przesunięciem, jeśli iloczyn wyjściowych skal jest równy 1.

Skoro jednokładności tak dobrze się składa, zobaczmy kilka zastosowań.

1. Okręgi o_1, o_2, o_3 są rozłączne zewnętrznie. Te dwie styczne do o_1 i o_2 , które nie rozdzielają tych okręgów, przecinają się w punkcie A_3 . Analogicznie definiujemy punkty A_1 i A_2 (rys. 1). Wykaż, że punkty A_1, A_2, A_3 są współliniowe.

R. Punkty A_1, A_2 i A_3 są środkami jednokładności $\mathcal{J}_{A_1}^+, \mathcal{J}_{A_2}^+$ i $\mathcal{J}_{A_3}^+$ takich, że $\mathcal{J}_{A_1}^+(o_2) = o_3, \mathcal{J}_{A_2}^+(o_3) = o_1$ oraz $\mathcal{J}_{A_3}^+(o_2) = o_1$. Złożenie $\mathcal{J}_{A_2}^+ \circ \mathcal{J}_{A_1}^+$ to jednokładność prosta i $\mathcal{J}_{A_2}^+ \circ \mathcal{J}_{A_1}^+(o_2) = \mathcal{J}_{A_2}^+(o_3) = o_1$. Stąd jej środkiem, który na mocy twierdzenia musi leżeć na prostej A_1A_2 , jest na mocy faktu punkt A_3 . \square

2. Okręgi o_1 i o_2 są rozłączne zewnętrznie i wpisane w kąt o wierzchołku Z . Okrąg o jest styczny zewnętrznie do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i B (rys. 2). Udowodnij, że punkty A, B, Z są współliniowe.

R. Rozważmy jednokładności \mathcal{J}_A^- i \mathcal{J}_B^- takie, że $\mathcal{J}_A^-(o_1) = o$ oraz $\mathcal{J}_B^-(o) = o_2$. Jednokładność $\mathcal{J}_B^- \circ \mathcal{J}_A^-$ jest prosta oraz $\mathcal{J}_B^- \circ \mathcal{J}_A^-(o_1) = \mathcal{J}_B^-(o) = o_2$, więc jej środkiem musi być punkt Z . Leży on zatem na prostej AB . \square

3. Okręgi o_1, o_2, o_3 są styczne odpowiednio do par boków AB i AC, AB i BC oraz AC i BC trójkąta ABC . Okrąg o jest styczny wewnętrznie do okręgów o_1, o_2, o_3 odpowiednio w punktach D, E, F (rys. 3). Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

R. Niech o^* będzie okręgiem wpisanym w trójkąt ABC . Istnieje \mathcal{J}_D^- taka, że $\mathcal{J}_D^-(o) = o_1$, oraz \mathcal{J}_A^+ taka, że $\mathcal{J}_A^+(o_1) = o^*$, wtedy $\mathcal{J}_A^+ \circ \mathcal{J}_D^-(o) = o^*$. Złożenie $\mathcal{J}_A^+ \circ \mathcal{J}_D^-$ jest więc jednokładnością odwrotną, przeprowadzającą o na o^* (istnieje dokładnie jedna, nawet jeśli o i o^* są przystające lub równe). Stąd jej środek leży na prostej AD . Analogicznie, leży też na prostych BE i CF . \square

4. Czworokąt $A_1A_2A_3A_4$ jest wpisany w okrąg o środku O . Punkty H_1, H_2, H_3, H_4 to ortocentra trójkątów, odpowiednio, $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$. Wykaż, że czworokąty $A_1A_2A_3A_4$ i $H_1H_2H_3H_4$ są przystające.

R. Niech punkty S_1, S_2, S_3, S_4 będą środkami ciężkości odpowiednio powyższych czterech trójkątów, S zaś – środkiem ciężkości czwórki punktów A_1, A_2, A_3, A_4 . Z własności środków ciężkości, dla każdego $i = 1, 2, 3, 4$ punkty S_i, S, A_i leżą, w tej właśnie kolejności, na jednej prostej oraz $SA_i = 3 \cdot SS_i$, zatem $\mathcal{J}_S^{-3}(S_i) = A_i$. Z twierdzenia o prostej Eulera, dla każdego i punkty O, S_i, H_i leżą, w tej właśnie kolejności, na jednej prostej oraz $SH_i = 2 \cdot SO$, stąd $\mathcal{J}_O^{1/3}(H_i) = S_i$. Złożenie $\mathcal{J}_S^{-3} \circ \mathcal{J}_O^{1/3}$ to jednokładność o skali $-3 \cdot \frac{1}{3} = -1$ (symetria środkowa), która przeprowadza $H_1H_2H_3H_4$ na $A_1A_2A_3A_4$. Zatem czworokąty te są przystające. \square

Poniższe zadanie pochodzi z L Olimpiady Matematycznej.

5. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC . Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF . Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka. Okręgi wpisane w trójkąty AEF i DEF są styczne wtedy i tylko wtedy, gdy w czworokąt $AFDE$ można wpisać okrąg.

Rozwiązanie na stronie www.om.edu.pl