

Nagrodę Dziekanów






dla Autora najlepszego artykułu w *Delcie*
w roku akademickim 2008/2009

uzyskał

Marcin Kuczma

za artykuł *Dzieje świata faktoriałem odmierzone*
zamieszczony w numerze 4(419)/2009

SPIS TREŚCI NUMERU 2 (429)

Rozkład leku w organizmie <i>Marcin Granat</i>	str. 1
Radioteleskop w Arecibo	str. 3
Konkurs zadań astronomicznych	str. 3
Jaś i magiczna fasola <i>Michał Dąbrowski</i>	str. 4
Gwiazdy nowe <i>Agnieszka Majczyna,</i> <i>Mirosław Należyty</i>	str. 6
Jaka logika jest intuicyjna? <i>Marek Czarnecki,</i> <i>Krzysztof Kapulkin</i>	str. 8
Problem kapeluszy <i>Marcin Krzyukowski</i>	str.10
 Zadania	str.11
 Człowiek stereometryczny <i>Adam Śmialkowski</i>	str.12
 Doświadczenia z elastyczną kulą wodną (część 3) <i>Stanisław Bednarek</i>	str.14
Informatyczny kącik olimpijski (27): Regiony <i>Tomasz Kulczyński</i>	str.16
Aktualności	str.17
 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.18
Klub 44	str.19
Patrz w niebo: Supergromady galaktyk	str.24
Luty	str.24
 Zadanie o 20 prostych <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-639-73-67)

internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2010 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2010 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 0-804-200-600

Cena prenumeraty w 2010 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:
Potęgi dwójki

Rozkład leku w organizmie

Marcin GRANAT*

Czy przyjmując lekarstwo, zastanawiamy się, co właściwie się z nim dzieje w naszym organizmie? Każdy lek, który dostał się do naszego ustroju, ulega szeregowi skomplikowanych przemian, które określa się akronimem **LADME**. Pochodzi on od pierwszych liter angielskich nazw następujących procesów.

- **Liberation** (uwolnienie) – rozpad postaci leku i uwolnienie jego cząsteczek (np. gdy lek jest w postaci tabletki, uwolnienie odbywa się np. dzięki dodaniu do niej skrobi, która, pobierając wodę z otoczenia, pęcznieje i rozrywa tabletkę).
- **Absorbtion** (wchłanianie) – obejmuje proces przedostawania się cząsteczek leku z miejsca uwolnienia do krwi. Najczęściej zachodzi na zasadzie dyfuzji biernej.
- **Distribution** (dystrybucja) – polega na przenikaniu leku z krwi do pozostałych tkanek organizmu. Łatwo się zatem domyśleć, że tkanki i organy bardziej unaczynione (np. serce) zawierają będą więcej cząsteczek leku niż mniej unaczynione. Na tym etapie wiele leków wiąże się z białkami osocza. Zmniejsza to działanie terapeutyczne leku, lecz także przedłuża proces eliminacji – dlatego istnieją leki o długim działaniu.
- **Metabolism** (metabolizm, biotransformacja) – zmiana chemicznej struktury cząsteczek leku, która często prowadzi do utraty właściwości leczniczych. Należy zaznaczyć, że biotransformacja może też mieć miejsce podczas eliminacji. Istnieją także leki, które są wydalane w postaci niezmienionej.
- **Excretion** (eliminacja) – usuwanie cząsteczek leku z tkanek. Jej efektem jest zmniejszenie stężenia leku w organizmie, głównie dzięki działalności nerek i wątroby. Tempo oczyszczania krwi z leku jest nazywane klirensem.

Procesy, jakim podlega lek, są skomplikowane. Dlatego może zaskakujące wydać się, że w większości przypadków spadek stężenia leku we krwi jest przez lekarzy i farmaceutów uznawany po prostu za wykładniczy. Oznacza to, że tempo spadku stężenia jest wprost proporcjonalne do stężenia. Inaczej mówiąc, w każdym odcinku czasu ubywa taki sam ułamek stężenia.

Dlaczego zanik stężenia możemy tak traktować? Badania kliniczne różnych leków dostarczyły danych empirycznych, dzięki analizie których można stwierdzić, że stężenie leku maleje wskutek procesów metabolizmu i eliminacji w sposób łudząco przypominający zanik wykładniczy. Lek w rzeczywistości nie zanika idealnie wykładniczo, niemniej jednak taki matematyczny opis rozkładu leku sprawdza się bardzo dobrze, a dane empiryczne pokrywają się w zadowalający sposób z obliczeniami.

Zanik wykładniczy odpowiada stałemu prawdopodobieństwu, że dana cząsteczka leku zostanie usunięta lub ulegnie biotransformacji, tracąc swoje właściwości terapeutyczne. Oznacza to, między innymi, że nie następuje efekt wysycenia – ani punktów eliminacji (których szukać należy głównie w nerkach), ani enzymów, dzięki którym dochodzi do biotransformacji.

Zanik leku przestaje być wykładniczy, zasadniczo, w dwóch przypadkach. Po pierwsze, wtedy, gdy lek jest dostarczany do krwi ze stałą szybkością przez dłuższy czas (przykładem może być kroplówka). Wtedy w organizmie ustala się równowaga i stężenie leku podczas jego podawania może być ustalone. Drugi przypadek to przyjęcie tak dużej dawki, że w ustroju przekroczone zostaje pewne graniczne, charakterystyczne dla danej substancji leczniczej stężenie, powodujące efekty nasycenia, czyli niewydolności procesów metabolizmu i eliminacji. Wtedy kinetyka zaniku leku zmienia się stopniowo z pierwszorzędowej (ilość usuwanego leku w jednostce czasu proporcjonalna

*student, Wydział Farmaceutyczny
Collegium Medicum UJ



Rozwiązanie zadania F 758.

Oświetlenie Ziemi E_S w słoneczny dzień jest proporcjonalne do I/L^2 , gdzie L jest odległością Ziemi od Słońca, a I światłością Słońca.

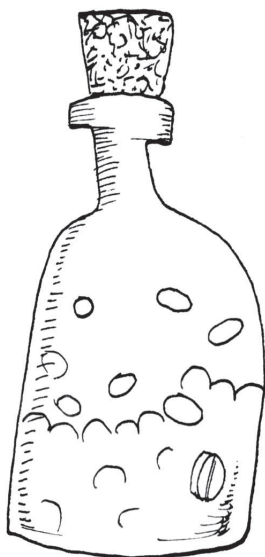
Księżyc oświetla Ziemię odbitym światłem słonecznym. Można przyjąć, że odległość Księżyca od Słońca wynosi tyle samo co Ziemi od Słońca, zatem oświetlenie powierzchni Księżyca w czasie pełni jest także równe E_S . Na całą powierzchnię Księżyca (zakładamy, że jest ona dyskiem o promieniu r) pada energia słoneczna $W = E_S \pi r^2$, z czego αW jest rozpraszana. Zatem natężenie światła rozpraszanego przez Księżyc w kącie sferycznym 2π wynosi $I_K = \alpha E_S \pi r^2 / (2\pi)$ i oświetlenie Ziemi przez Księżyc jest równe

$$E_K = \alpha E_S r^2 / (2l^2),$$

gdzie l jest odległością Księżyca od Ziemi. Podstawiając dane liczbowe $l \approx 400\,000$ km, $r \approx 2\,000$ km otrzymujemy szukany stosunek oświetleń:

$$\frac{E_K}{E_S} = \frac{\alpha r^2}{2 l^2} \approx \frac{1}{800\,000}.$$

Wzięta z tablic astronomicznych różnica jasności Słońca i Księżyca wynosi około 14^{mag} , co daje stosunek jasności rzędu $1/400\,000$. Wielkości te można także zmierzyć samemu, np. za pomocą światłomierza fotograficznego, najlepiej dokonując pomiaru światła odbitego od dużej jednolitej powierzchni.



Rozwiązanie zadania M 1267.

Przyjmijmy, że wraz z każdą liczbą k zapisywaną na tablicy zapisywana jest na kartce liczba $k + 1$. Ponieważ $mn + m + n + 1 = (m + 1)(n + 1)$, więc za każdym razem, gdy na kartce widnieją liczby k, l , to dopisywana jest do nich liczba kl . Początkowo na kartce napisane zostały liczby 2 i 3. Zatem wszystkie liczby zanotowane na kartce są postaci $2^a \cdot 3^b$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi nieujemnymi. Stąd wszystkie liczby na tablicy są postaci $2^a \cdot 3^b - 1$.

do stężenia) na kinetykę zerowego rzędu (ilość usuwanego leku w jednostce czasu ustalona). Zdarzają się jednak sytuacje bardziej skomplikowane. Czasami, analizując wykres obrazujący zanik wykładniczy leku, ze zdziwieniem zauważamy, że w pewnym momencie stężenie zamiast nadal maleć, lekko wzrasta, by później znowu opadać. Choć wydaje się to dziwne, taka sytuacja może naprawdę mieć miejsce, gdy, na przykład, woreczek żółciowy pacjenta początkowo pochłonie więcej leku, a później uwolni go z powrotem do krwi.

Przyjrzyjmy się teraz aspektowi praktycznemu opisywanego zjawiska. Weźmy pod uwagę typowy przypadek, który może być opisywany modelem z kinetyką reakcji chemicznej I rzędu. Ma on miejsce np. wtedy, gdy substancja lecznicza znajduje się już w krwiobiegu po podaniu jednorazowym. Spadek stężenia można wtedy opisać wzorem

$$(1) \quad c_t = c_0 \cdot e^{-kt},$$

gdzie c_t to stężenie leku po czasie t ; c_0 – stężenie początkowe leku; k – stała szybkości rozkładu badanego leku. Stała k to po prostu współczynnik proporcjonalności między tempem zaniku leku a jego stężeniem. Jest ona charakterystyczna dla danego leku, ale również zależna od predyspozycji genetycznych i czynników środowiskowych. Dlatego stała szybkości rozkładu leku nigdy nie będzie miała tej samej wartości u wszystkich osób. Przeprowadzając analizę statystyczną, można wyznaczyć średnią wartość k dla danego leku. Należy przy tym pamiętać, że nie każde odchylenie od średniej jest zjawiskiem patologicznym; jedynie bardzo duże odstępstwa mogą sugerować zaburzenia metaboliczne u pacjenta, powodujące nieprawidłowy rozkład leku. Dla takiego chorego podany lek może nie mieć żadnych właściwości leczniczych lub nawet być szkodliwy. Znajomość średniej wartości stałej rozkładu może być także pomocna w identyfikacji leku, który został podany pacjentowi.

Empirycznie stałą rozkładu leku wyznacza się, mierząc jego stężenie dwukrotnie, a następnie dzieląc logarytm stosunku stężeń przez czas, który upłynął między pomiarami:

$$(2) \quad k = \frac{\ln(c_1/c_2)}{t_2 - t_1}.$$

Warto zaznaczyć, że wzór ten jest szczególnie przydatny, gdy stężenie początkowe jest nieznanne. Należy również pamiętać, że jego stosowanie daje rozsądne wyniki tylko wtedy, gdy zanik leku jest opisywany wzorem (1).

Dla każdego leku obecnego w ustroju można dodatkowo wyznaczyć okres półtrwania $T_{1/2}$, czyli czas, po którym połowa dawki leku ulega rozkładowi. Okres półtrwania, tak jak stała szybkości rozkładu leku, jest charakterystyczny dla danego leku, a wartość, którą osiąga, zależy od czynników genetycznych i wpływu środowiska. Łatwo zauważyć, że okres półtrwania jest ściśle związany ze stałą szybkości rozkładu $T_{1/2} = \frac{1}{k} \cdot \ln 2$, dlatego też jego znaczenie w analizie medycznej jest takie samo, jak stałej szybkości rozkładu leku.

Temat ten jest obszerny, więc może Czytelnik w wolnym czasie sam zechce zaobserwować podobne zjawiska, a zapewniam, że jest ich немало i dotyczą nie tylko substancji leczniczych.

Bibliografia

- Tomasz Grabowski, *Farmakokinetyka i Biofarmacja*, T. Grabowski, Warszawa, 2000–2008.
- Tadeusz W. Hermann, *Farmakokinetyka: teoria i praktyka*, Wydawnictwo Lekarskie PZWL, Warszawa, 2002.
- Tadeusz W. Hermann, Łucja Skibińska, *Wykłady i ćwiczenia z farmakokinetyki*, Wydawnictwo AM w Poznaniu, 1992.

Radioteleskop w Arecibo

W listopadowej *Delcie*, pisząc o nieruchomych teleskopach, napisałem też o wielkim radioteleskopie ustawionym pod Arecibo na wyspie Puerto Rico, wprowadzając do tekstu błąd. Mianowicie napisałem tam, że czasza tego radioteleskopu jest paraboloidalna, co okazuje się nieprawdą. Jest ona mianowicie sferyczna, a zatem, mówiąc językiem optyki, obraz źródła w ognisku obarczony jest aberracją sferyczną lustra. Aberracja sferyczna to wada sferycznego lustra (lub soczewki skupiającej o powierzchniach sferycznych) polegająca na tym, że promienie równoległe do osi optycznej, rozmaicie od tej osi odległe, skupiają się w rozmaitych odległościach od lustra lub soczewki. Inaczej mówiąc, wiązka promieniowania nie ma punktowego ogniska i obrazem źródła punktowego (leżącego na osi optycznej) jest plama świetlna. Wady tej nie ma lustro paraboloidalne i to ono z reguły jest głównym elementem teleskopu (wszystko jedno czy optycznego czy radiowego). Poza osią obraz jest jednak i tak nieostry – im dalej od osi, tym bardziej nieostry. Takie są własności lustro paraboloidalnego – stąd ograniczone pole widzenia teleskopu.

Dlaczego więc radioteleskop Arecibo ma lustro sferyczne? Można by pomyśleć, że gdyby miał lustro paraboloidalne, dawałby ostry obraz przynajmniej na osi. Prawdopodobnie konstruktorom chodziło o kompromis: żeby radioteleskop dawał obraz generalnie gorszy, niż mógłby, za to w przybliżeniu jednakowej jakości w całym polu widzenia czaszy. Takie coś za coś. Zresztą aberrację sferyczną tej wielkiej czaszy częściowo likwiduje się, wykorzystując odbicie promieniowania od drugiej, mniejszej, zanim promieniowanie dotrze do anteny – to odpowiednik wtórnego lustro w niemal każdym teleskopie optycznym. W rezultacie ten ogromny radioteleskop może obserwować obiekty położone 20 stopni od zenitu, a to dzięki przemieszczaniu anten wiszących nad czaszą na trzech potężnych linach.

Niestety, Arecibo nie ominęły kłopoty finansowe. Jeżeli nie znajdą się sponsorzy, to obserwatorium może zostać zamknięte w 2011 roku. A wyłączenie z pracy radioteleskopu o średnicy 300 m, jak łatwo się domyślać, będzie poważną stratą dla astronomii.

T. K.



Konkurs zadań astronomicznych

Rozwiązania zadań z numeru 12/2009

A 23. $\alpha = 5'$ – rozmiar kątowy protuberancji, $d = 1,5 \cdot 10^8$ km – odległość Ziemi od Słońca; $D_Z = 12,7 \cdot 10^3$ km; rozmiar kątowy wiąże się z rozmiarem liniowym protuberancji, r , i odległością poprzez zależność: $\text{tg}(\alpha/2) = 0,5r/d$, stąd: $r = 2d \cdot \text{tg}(\alpha/2)$. Podstawiając wartości liczbowe, otrzymujemy $r = 2,2 \cdot 10^5$ km, co daje 17,3 średnic Ziemi.

A 24. Energia wyzwolona w procesie zamiany masy spoczynkowej na energię wynosi $E = m_{BH} \cdot c^2$, natomiast energia potrzebna na zmianę temperatury wody o ΔT wynosi $E_w = \Delta T \cdot c_w \cdot m$. Zakładając, że nie ma strat energii, a więc cała energia związana z masą spoczynkową jest zamieniana na energię wewnętrzną wody, otrzymujemy: $\Delta T = m_{BH} \cdot c^2 / (c_w \cdot m) = 10^4 \cdot m_p \cdot c^2 / (c_w \cdot m)$, a po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy $\Delta T = 1,4372 \cdot 10^{-9}$ K.

Jaś i magiczna fasola

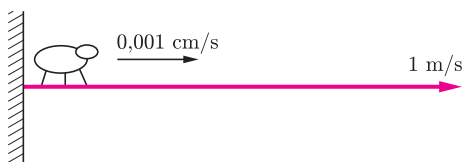
Michał DAŁBROWSKI*

Dwa warianty tej samej bajki

Bajka opowiada historię tytułowego Jasia, syna biednej wdowy. Pewnego dnia matka wysłała Jasia na targ, aby sprzedał ostatnią krowę, ale Jaś wymienia ją na magiczne fasolki. Rozszoszczona matka wyrzuca nasiona za okno, a następnego dnia wyrasta z nich gigantyczna roślina, która sięga aż do chmur. Jaś wspina się po łodydze fasoli ku niebu, aż dociera do wielkiego zamku zamieszkiwanego przez olbrzyma. (...)

No właśnie – dociera, ale czy aby na pewno? Nasuwa się pytanie, czy Jaś ma szansę dostać się do zamku olbrzyma, jeżeli prędkość jego wspinaczki jest dużo, dużo mniejsza niż tempo rośnięcia fasoli. Rozważmy następujący model fizyczny sytuacji, przedstawiony za pomocą zadania:

Nieskończenie rozciągliwa guma ma jeden koniec przyczepiony do ściany, drugi zaś jest ciągnięty z prędkością 1 m/s. Początkowo guma ma 1 m długości. Robak, początkowo będący przy ścianie, zaczyna pełznąć wzdłuż gumy z prędkością 0,001 cm/s. Czy robak kiedykolwiek dotrze do końca gumy? Jeśli tak, to po jakim czasie?



Rozwiązanie dla informatyka

Na początek przeformułujemy zadanie tak, by dało się ono opisać jako sekwencja skończonej liczby prostych kroków. W tym celu wyobrazimy sobie, że, zamiast pełznąć jednostajnie wzdłuż gumy, robak odczeka sekundy, patrząc na rozciągającą się gumę, po czym wykonuje natychmiastowy skok do miejsca, gdzie znalazłby się po kolejnej sekundzie, gdyby guma się nie rozciągała. W miejscu tym czeka cierpliwie przez sekundę, podczas kiedy guma się wydłuża, a następnie wykonuje kolejny skok... Przy takim ruchu robak porusza się nieco wolniej, niżby wynikało to z treści zadania – w porównaniu z robakiem pełznącym jednostajnie prawie zawsze znajduje się bliżej ściany, gdzie prędkości punktów gumy są mniejsze. Oznacza to, że schemat skokowego ruchu robaka opisany powyżej może dać nam górne oszacowanie na czas ruchu robaka.

W czasie jednej sekundy robak przeskakuje o 0,001 cm, a guma wydłuża się o 1 metr. Oznaczając przez $p[n]$ odległość robaka od ściany po upływie n sekund, z powyższych rozważań otrzymujemy wzór rekurencyjny

$$p[1] = 0,00001m,$$
$$p[n] = \left(\frac{n}{n-1}\right)p[n-1] + 0,00001m \quad \text{dla } n > 1.$$

Rozwijając ten wzór, mamy kolejno

$$p[1] = 0,00001m,$$
$$p[2] = \left(\frac{2}{1}\right) \cdot 0,00001m + 0,00001m =$$
$$= 0,00001m \cdot \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{2}\right) = 0,00001m \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right),$$

*student, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

$$p[3] = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 0,00001m \cdot \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{2}\right) + 0,00001m =$$
$$= 0,00001m \cdot \left(\frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3}\right) =$$
$$= 0,00001m \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

i tak dalej. Ostatecznie otrzymujemy wzór

$$p[n] = 0,00001m \cdot n \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right).$$

Suma po prawej stronie równości, czyli logarytm harmoniczny, zawiera się w przedziale $(\ln(n), \ln(n) + 1)$. Po n -tym kroku długość gumy wynosi n metrów, więc robak na pewno osiągnie koniec gumy, gdy po raz pierwszy zajdzie

$$0,00001 \cdot n \cdot \ln(n) \geq n.$$

A zatem robak osiągnie koniec gumy po czasie $\lceil e^{100000} \rceil$ sekund. Zagadnienie znalezienia oszacowania dolnego pozostawiamy Czytelnikowi Wnikliwemu.

Rozwiązanie dla matematyka

Informatykowi wygodnie jest myśleć, że robak porusza się skokami (co trochę fałszuje wynik). Dzięki temu w każdym przedziale czasowym ma skończenie wiele obserwacji – skoków robaka. Takie podejście, w pewnym uproszczeniu, pozwala wytłumaczyć problem komputerowi i oczekiwać od niego przybliżonego rozwiązania. Matematyk może myśleć o tym zagadnieniu podobnie, ale trochę bardziej abstrakcyjnie. Zamiast szukać dobrych przybliżeń rozwiązania przez zmuszanie robaka do skoków z coraz większą częstotliwością, wprowadza abstrakcyjne nieskończenie małe przedziały czasu. Niech $f(t)$ oznacza odległość robaka od ściany w chwili t przy założeniu, że guma nie jest rozciągana. Będzie nas interesowało, jak daleko robak może zajść w nieskończenie małym przedziale czasu. Tę wartość, oznaczaną przez $df(t)$, możemy opisać po prostu jako różnicę

$$f(t + dt) - f(t).$$

Wielkość $df(t)/dt$ (inaczej $f'(t)$), czyli pochodna funkcji $f(t)$ intuicyjnie ma wyrażać, jak daleko może przesunąć się robak w jednostce czasu, czyli opisuje jego prędkość.

Przyda nam się wynikające z powyższych uwag spostrzeżenie, że

$$(1) \quad f'(t)dt = f(t + dt) - f(t) = df(t)$$

(analogiczny wzór możemy zapisać dla dowolnej funkcji zależnej od parametru t).

Niech $r(t)$ oznacza długość rozciąganej gumy w chwili t , a $b(t)$ odległość robaka od ściany, gdy pełźnie po rozciąganej gumie. Wtedy dla nieskończenie małego przedziału czasu dt mamy

$$b(t + dt) = \left(\frac{r(t + dt)}{r(t)}\right)b(t) + df(t).$$

Wynika to z faktu, iż odległość po czasie dt jest równa poprzedniej odległości pomnożonej przez „współczynnik wydłużenia” gumy plus odległość, jaką przebywa w tym czasie sam robak. (Czy widać podobieństwo między tym wzorem a wzorem z rozwiązania informatycznego?)

Korzystając ze wzoru (1), możemy zapisać nasze równanie w postaci

$$\frac{b(t+dt) - b(t)}{dt} = \left(\frac{r'(t)}{r(t)}\right)b(t) + f'(t),$$

a następnie uprościć lewą stronę

$$b'(t) = \left(\frac{r'(t)}{r(t)}\right)b(t) + f'(t).$$

Udało nam się opisać funkcję $b(t)$ za pomocą równania zawierającego jej pochodną, czyli otrzymaliśmy równanie różniczkowe. Rozwiązaniem tego równania różniczkowego z warunkiem $b(0) = 0$ jest

$$b(T) = r(T) \cdot \int_0^T \left(\frac{f'(t)}{r(t)}\right) dt.$$

Można to łatwo sprawdzić, różniczkując powyższe równanie, ale lepiej przekonać się o jego sensowności, patrząc na rozwiązanie informatyczne. Warto przy tym pamiętać, że matematyk może myśleć o całce jako o *sumie, po odcinkach z nieskończenie drobnego podziału przedziału $[0, T]$, wartości funkcji wybranych z poszczególnych odcinków pomnożonych przez długość odcinków* (czyli dt). W chwili, gdy robak dotrze do końca gumy po czasie T (mamy wtedy równość $b(T) = r(T)$), otrzymujemy zależność

$$\int_0^T \left(\frac{f'(t)}{r(t)}\right) dt = 1.$$

Rozwiązanie tego równania ze względu na T (jeśli istnieje) daje odpowiedź w ogólnym przypadku. Podstawmy teraz dane z początkowego zadania: $f(t) = 0,00001t$ oraz $r(t) = t + 1$. Mamy

$$\int_0^T \left(\frac{0,00001}{t+1}\right) dt = 1.$$

lub, pozbywając się całki,

$$0,00001 \cdot \ln(T+1) = 1.$$

Wobec tego $T = e^{100000} - 1$ sekund.

Rozwiązanie dla fizyka

Przyjmijmy za początek układu współrzędnych koniec gumy przymocowany do ściany. Niech początkowa długość nierozciągniętej gumy wynosi L_0 . Prawy koniec gumy porusza się z prędkością v_0 tak, że znajduje się on po czasie t w odległości $L_0 + v_0t$ od ściany. Robak porusza się z prędkością v względem fragmentu gumy, na którym się aktualnie znajduje. Jednak dla nieruchomego obserwatora jego prędkość jest większa, gdyż również ten fragment gumy porusza się względem obserwatora (i to w dodatku tym szybciej, im dalej fragment ten znajduje się od zamocowanego końca gumy). Nieruchomy obserwator dostaje zatem następujące równanie na prędkość robaka V w związanym z nim układzie (przy czym x to jego aktualne położenie):

$$V = \left(\frac{x}{L_0 + v_0t}\right)v_0 + v$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 0$. Wyraźnie widać, że gdy robak przemieszcza się w prawo (względem wciąż nieruchomego obserwatora), jego prędkość V wzrasta. W pewnym momencie jest większa od v_0 , a zatem dystans między robakiem a prawym końcem gumy zaczyna się zmniejszać. Można pokazać (patrz np. rozwiązanie dla matematyka), że zależność położenia od czasu prowadząca do powyższego wzoru to

$$x(t) = \frac{v}{v_0}(L_0 + v_0t) \ln\left(1 + \frac{v_0t}{L_0}\right).$$

Porównując położenie $x(t)$ z długością gumy $L_0 + v_0t$, dostajemy czas, po którym robak osiągnie drugi koniec gumy

$$t = \frac{L_0}{v_0}(e^{v_0/v} - 1).$$

Podstawiając $L_0 = 1$ m, $v_0 = 1$ m/s i $v = 0,00001$ m/s, otrzymujemy $t = (e^{100000} - 1)$ s. Wynik jest o bardzo wiele rzędów wielkości większy niż czas pozostały do wypalenia się Słońca (z grubsza 10^{17} s) czy nawet obecny wiek Wszechświata (nieprzekraczający 10^{18} s). Fizyk uzna zatem, że robak nie osiągnie nigdy (tj. w żadnej przewidywalnej przyszłości) końca gumy, a matematyk doda zapewne, że to wszystko dlatego, iż logarytm jest bardzo powoli rosnącą funkcją. Czytelnikowi Wnikliwemu pozostawiamy sprawdzenie, jak szybko robak musiałby się poruszać, by osiągnąć koniec gumy np. przed początkiem tegorocznej wiosny. A czy miały na to jakiegokolwiek szanse, gdyby guma rozciągała się w sposób jednorodny, ale z niewielkim przyspieszeniem?

Morał

(...) *Jaś kradnie z zamku olbrzyma kurę znoszącą złote jajka oraz harfę przynoszącą zdrowie i dobre samopoczucie, dzięki czemu Jaś i matka wiodą od tego czasu spokojne i dostatnie życie, głosząc na prawo i lewo, że szczęście sprzyja wytrwałym.*

Bibliografia

www.feynmanlectures.info (portal w całości po angielsku)

* * *

Posłowie dla kosmologa

Opisana w bajce o Jasiu i magicznej fasoli sytuacja jest doskonałą metaforą dla nietypowego (i nierealistycznego) modelu Wszechświata, pozbawionego jakiegokolwiek materii i którego powierzchnie stałego czasu są trójwymiarowymi uogólnieniami powierzchni siodłowej – przestrzeniami o stałej ujemnej krzywiznie. Zgodnie z ogólną teorią względności taki Wszechświat, podobnie jak łądoga magicznej fasoli, rozszerza się jednorodnie ze stałą prędkością. Zgodnie zaś z morałem bajki, gdyby we Wszechświecie tym mógł się znaleźć jakiś odważny i cierpliwy kosmonauta, mógłby on dolecieć z jednego miejsca we Wszechświecie w dowolne inne pod warunkiem zarezerwowania na ten cel dostatecznie długiego czasu.

Napływ coraz dokładniejszych danych obserwacyjnych spowodował, że najbardziej rozpowszechniony dziś obraz Wszechświata jest całkiem inny. Wskutek występowania zagadkowej energii próżni Wszechświat rozszerza się z przyspieszeniem. Oznacza to, że miejsca Wszechświata dostatecznie dalekie od Ziemi oddalają się od niej z prędkością większą od prędkości światła w próżni i będą oddalać się jeszcze szybciej, nie będą zatem mogły zostać osiągnięte nawet przez najszybsze statki kosmiczne i najwytrwalszych kosmonautów. Z kolei, jeżeli, puściwszy wodze wyobraźni, znajdziemy się we Wszechświecie różniącym się od naszego brakiem energii próżni, taki Wszechświat będzie rozszerzał się z opóźnieniem i do wszystkich jego miejsc można będzie dolecieć w czasie wyrażającym się pewną potęgą odległości od tych miejsc, a więc w praktyce znacznie krótszym, niż gdy rozwiązanie opisywane jest funkcją wykładniczą, jak w rozwiązaniu zagadnienia z bajki.

Krzysztof TURZYŃSKI

Śmiało można powiedzieć, że ludzie od zarania dziejów patrzyli w niebo. Niektórzy dostrzegali, że co jakiś czas na niebie pojawiają się obiekty, których w tym miejscu na sferze niebieskiej wcześniej nie było. Naturalnym dla takiego obiektu określeniem jest „nowa gwiazda”. Jak Wnikliwy Czytelnik zauważył, tytuł tego artykułu brzmi „Gwiazdy nowe”. Czy jest zatem różnica między nową gwiazdą a gwiazdą nową? Otóż dla współczesnych astronomów różnica jest, i to zasadnicza, choć tak kategorię można mówić o tej sprawie dopiero od końca XIX w. Wtedy to dzięki rozwojowi technik fotografowania nieba zauważono, że w miejscu nowej był wcześniej słaby obiekt barwy niebieskiej. Nie są to więc nowo narodzone gwiazdy, a jedynie takie, które bardzo znacznie pojaśniały, niekiedy nawet o 10–15 mag, by po jakimś czasie znów stać się ledwie widocznym, niebieskim obiektem.

Wróćmy jednak do początku, czyli do historii najstarszych obserwacji nieba. Chińscy obserwatorzy już około 1500 r. p.n.e. wyróżniali cztery kategorie zmiennych czy też pojawiających się gwiazd: *xingbo* – gwiazda krzak, *huixing* – gwiazda miotła, *kering* – gwiazda gość oraz *liuxing* – gwiazda pływająca. Współcześnie uważa się, że pod pierwszymi dwiema kategoriami kryją się komety, pod określeniem *liuxing* meteory, z kolei *kering* oznacza, jak się sądzi, gwiazdy nowe i supernowe. W 1987 r. Zhuang Weifeng i Wang Lixing wydali katalog gwiazd obserwowanych przez Chińczyków w latach od 532 r. p.n.e. do 1604 r. Katalog ten zawiera 53 gwiazdy goście, czyli gwiazdy nowe i supernowe. Zupełnie inaczej, czyli wyjątkowo mizernie, ma się sprawa z obserwacjami tego typu obiektów w Europie. Do połowy XIX w. zanotowano jedynie trzy takie przypadki – dwie supernowe: z 1572 roku, obserwowana przez Tycho Brahe, i z 1604 r., widziana przez Johanna Keplera, oraz nową w Lisku z 1670 roku odkrytą przez Anthonisa Leuwenhooka i niezależnie przez Jana Heweliusza. Wiązało się to z niezwykle małą liczbą regularnych przeglądów nieba robionych przez stulecia, przeciwnie niż to się właśnie działo w Chinach. Sytuacja zmieniła się pod koniec XIX wieku, kiedy powstały organizacje skupiające obserwatorów amatorów. Powstały też projekty profesjonalnych przeglądów nieba w poszukiwaniu gwiazd zmiennych wszystkich typów. Z obecnie działających najważniejszym jest polski projekt pod kierownictwem Grzegorza Pojmańskiego z Obserwatorium Astronomicznego Uniwersytetu Warszawskiego.

Często zamiast terminu *gwiazdy nowe* używa się określenia *zmiennne kataklizmiczne*. Tę klasę obiektów dzieli się na kilka grup, a te z kolei na podgrupy. Nie chcemy jednak zanudzać Czytelników „zoologią” –

dość powiedzieć, że najważniejszymi grupami zmiennych kataklizmicznych są nowe klasyczne, nowe powrotne, nowe karłowate, gwiazdy nowopodobne i gwiazdy symbiotyczne. Wspólną cechą tych wszystkich obiektów jest to, że są to układy podwójne złożone z białego karła i gwiazdy w różnym stadium zaawansowania ewolucyjnego. W układach tych ma miejsce przepływ masy na białego karła i, jeśli jego pole magnetyczne nie jest zbyt silne, materia ta tworzy dysk akrecyjny, za pośrednictwem którego ostatecznie opada na powierzchnię białego karła. W zależności od masy białego karła, siły jego pola magnetycznego, masy i stopnia zaawansowania ewolucyjnego towarzysza, separacji składników, czy tempa akrecji materii przez białego karła, mają miejsce różne procesy i zjawiska, które powodują tak dużą różnorodność grup obiektów wśród zmiennych kataklizmicznych.

Najbardziej i najwcześniej znaną grupą były nowe klasyczne. Prawdopodobnie nazwy „nowe klasyczne” użył Boris Petrovich Gerasimovič w 1934 roku, także Cecilia Payne-Gaposchkin w 1954 roku w swym artykule używała tej nazwy, ale dopiero po publikacji Briana Warnera w 1972 roku określenie to przeszło do powszechnego użytku, przynajmniej wśród astronomów. Wybuchy nowych klasycznych są niezwykle widowiskowe, gdyż obiekt może pojaśnić nawet o 10–15 magnitudo w ciągu zaledwie kilku dni. Należy podkreślić silny związek między nowymi klasycznymi a nowymi powrotnymi. Gwiazda jest nową klasyczną tylko do czasu, gdy nie zaobserwuje się kolejnego wybuchu, wówczas staje się nową powrotną. W myśl niektórych teorii wszystkie nowe klasyczne są powrotne, tylko z tak długim okresem pomiędzy wybuchami, że nie udało nam się jeszcze zaobserwować tego kolejnego wybuchu. Jaki mechanizm powoduje, że gwiazda jaśnieje nawet milion razy? Odpowiedź kryje się w tym, co zostało już wcześniej powiedziane: w akrecji materii bogatej w wodór z towarzysza na masywnego białego karła.

Tu, być może, należy uczynić króciutką dygresję na temat masy białego karła. Podobnie jak wszystkie inne gwiazdy, nie może mieć dowolnie dużej masy. Z tym jednak zastrzeżeniem, że o ile „normalne” gwiazdy mogą mieć maksymalnie masę około $100M_{\odot}$ (tutaj M_{\odot} jest masą Słońca równą $\sim 2 \cdot 10^{30}$ kg), to biały karzeł ma masę maksymalną, zwaną masą Chandrasekhara, zaledwie około $1,44M_{\odot}$. Tak więc mówiąc o masywnym białym karle mamy na myśli białego karła o masie pomiędzy $\sim 1,3M_{\odot}$ a $\sim 1,44M_{\odot}$.

Ilość materii, jaka opada na białego karła, jest rzędu 10^{20} kg/rok, czyli $10^{-10}M_{\odot}$ /rok. Materia gromadzi się na powierzchni, tworząc coraz grubszą otoczkę zasilaną coraz nową porcją materii. W najgłębszej warstwie u podstawy tej otoczki na skutek ściskania przez leżącą powyżej materię systematycznie wzrastają ciśnienie i temperatura. Nie wiadomo, ile dokładnie powinno się

*Instytut Problemów Jądrowych

**Obserwatorium Astronomiczne, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

zgrupować materii, bo prace teoretyczne nie dają jednoznacznych wyników. Dość powiedzieć, że gdy temperatura u podstawy otoczki osiągnie wartość około 10^8 K, następuje zapalenie się wodoru, czyli uruchomienie reakcji syntezy wodoru w hel przy udziale węgla (C), azotu (N) i tlenu (O) w roli katalizatorów. O takim przebiegu reakcji syntezy termojądrowej astronomowie mówią, że jest to palenie wodoru przez cykl CNO. Efektem tego palenia wodoru jest wydzielenie dużych ilości energii, a więc znaczne podgrzanie atmosfery gwiazdy. W takiej sytuacji następuje odrzucenie otoczki z prędkościami materii dochodzącymi nawet do 1000 km/s. Materia przetworzona w reakcjach termojądrowych, a więc wzbogacona o cięższe pierwiastki, jest wyrzucana w przestrzeń okółgwiazdową, co w znacznym stopniu wpływa na skład chemiczny materii międzygwiazdowej, z której powstanie następne pokolenie gwiazd. Tego rodzaju proces musi być uwzględniany w badaniu ewolucji składu chemicznego Wszechświata jako całości czy też naszej Galaktyki. W trakcie wybuchu nowej klasycznej ma miejsce epizod tworzenia się pyłu, ale proces ten jest słabo poznany, choć pył jest łatwo obserwowalny w podczerwonych widmach nowych. W widmach tych obserwuje się także linie widmowe węgla, węglowodorów czy związków krzemu. Na zdjęciach szybciej lub wolniej gasnący biały karzeł otoczony jest ekspandującą otoczką wyrzuconej materii. Następnie w ciągu miesięcy czy lat obiekt ten gaśnie, by w końcu osiągnąć jasność obserwowaną przed wybuchem. Ważną i intensywnie badaną cechą nowych klasycznych jest korelacja jasności absolutnej z tempem spadku jasności. Jeśli byłaby obciążona małym rozrzutem, wówczas można by wykorzystać te gwiazdy do wyznaczania za ich pomocą odległości we Wszechświecie. Pomijając bezpośrednią metodę, jaką jest wyznaczenie paralaksy, odległość można wyznaczyć z formuły nazywanej *modułem odległości*:

$$m - M = 5 \log r - 5 + A,$$

gdzie: m jest obserwowaną wielkością gwiazdową obiektu, M – jego absolutną wielkością gwiazdową, r – odległością wyrażoną w parsekach, zaś A – ekstynkcją wyrażoną w magnitudo. Jasność obserwowaną znamy bezpośrednio z obserwacji, natomiast jasność absolutną musimy mieć np. z modeli teoretycznych czy też, jak to się dzieje w przypadku świec standardowych, z zależności między jakąś cechą obserwowaną (np. okresem zmian jasności, albo np. czasem, w jakim obiekt zmienia jasność o określoną wartość itp.) a właśnie jasnością absolutną. Świece standardowe są powszechnie wykorzystywane w astronomii i wciąż poszukuje się nowych, coraz jaśniejszych obiektów, których można by używać w tej roli. Po wytypowaniu rodzaju obiektów kandydujących do roli świecy standardowej należy obiekty te odnaleźć w gromadach kulistych czy otwartych, dla których mamy wyznaczone odległości. Zakładamy, że rozmiar liniowy takiej gromady jest zaniedbywalnie mały w porównaniu z odległością do niej. Równocześnie poszukujemy empirycznej formuły, która wiąże jasność

absolutną z jakąś cechą obserwowaną np. w postaci

$$M = b + a \cdot \log P$$

(gdzie M – jasność absolutna, P – okres zmian jasności, a i b – współczynniki). Formuła taka ma zazwyczaj kilka współczynników (im mniej, tym lepiej, najczęściej dwa), które należy wyznaczyć właśnie za pomocą obiektów, do których odległość znamy. Astronomowie mówią w takim przypadku o skalibrowaniu metody. Oczywiście, Czytelnik natychmiast zauważy, że w zasadzie wystarczy mieć dwa takie obiekty, by wyznaczyć współczynniki a i b . W rzeczywistości robi się to dla dużo większej liczby obiektów, aby otrzymać jak najdokładniejszą formułę. Z kolei ekstynkcja A jest wielkością mówiącą nam, o ile zmniejsza się jasność obiektu na skutek przechodzenia światła przez przestrzeń pomiędzy źródłem a obserwatorem, wypełnioną gazem i pyłem absorbującym czy rozpraszającym światło.

Wróćmy jednak do gwiazd nowych i wyznaczania za ich pomocą odległości. Otóż, stwierdzono, że istnieje korelacja między jasnością absolutną M w maksimum a czasem t_2 (w dniach), w jakim nowa klasyczna zmniejsza jasność od maksimum o 2 magnitudo. Zależność tę możemy wyrazić w następujący sposób:

$$M = b_2 + a_2 \log t_2.$$

W ten sposób jeśli dla jakiejś nowej klasycznej mamy na tyle kompletną krzywą blasku (co nie zawsze się udaje), by wyznaczyć t_2 oraz jasność obserwowaną w maksimum blasku, możemy wówczas posłużyć się powyższą formułą na jasność absolutną i z modułu odległości wyznaczyć odległość.

Niewątpliwą zaletą używania wybuchów nowych klasycznych jako świec standardowych jest ich duża jasność, która pozwala je obserwować nawet w innych galaktykach. Z kolei wadą jest mała liczba zjawisk – uwzględniając wszystkie zaobserwowane nowe, otrzymujemy 26 ± 4 nowe na rok. Dysponujemy zatem zdecydowanie za małą liczbą obserwowanych zjawisk, by chociażby rozstrzygnąć, czy słuszna jest sugestia istnienia dwu oddzielnych populacji nowych – pochodzących z dysku galaktycznego i zgrubienia centralnego. Nowe wciąż nie są używane do wyznaczania odległości we Wszechświecie, pomimo obiecujących przesłanek wskazujących, że mogą być całkiem dobrymi świecami standardowymi. Zapewne należy poczekać na więcej obserwacji, które pozwolą lepiej wyznaczyć współczynniki b_2 i a_2 , o których była mowa wyżej. Tymczasem gwiazdy nowe nie są bynajmniej niewarte zainteresowania astronomów, wręcz przeciwnie – stanowią niezwykle bogate laboratorium do badania zjawisk związanych z paleniem termonuklearnym czy procesów zachodzących w dyskach akrecyjnych, które są wciąż jeszcze słabo opisane teoretycznie. Tak więc liczni obserwatorzy, profesjonalni i amatorzy, wciąż przeczesują niebo w poszukiwaniu zarówno nowych klasycznych, jak i innych obiektów należących do zmiennych kataklizmicznych, a liczba odkrywanych obiektów systematycznie rośnie tak, jak nasza wiedza o nich.

Jaka logika jest intuicyjna?

Marek CZARNECKI*, Krzysztof KAPULKIN**

Profesorowi Pawłowi Urzyczynowi
z podziękowaniem za wiele pięknych chwil z logiką

Początek XX wieku to okres szukania podstaw wiedzy matematycznej. Wśród wielu powstających wówczas koncepcji, na czym oprócz matematykę (np. na teorii mnogości), pojawił się również pogląd zwany *intuicjonizmem*, by wiedza matematyczna była całkowicie zgodna z naszą intuicją. Przedstawiciele intuicjonizmu postulowali stosowanie w nauce jedynie pojęć, które dane są nam empirycznie, a zatem takich, co do których możemy mieć pewne intuicje. Ich sprzeciw budziły więc między innymi: pojęcie *aktualnej nieskończoności* oraz *dowody niekonstruktywne*.

Z rozważanych możliwości ma miejsce druga: liczba $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ nie jest wymierna ani nawet algebraiczna (czyli nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach wymiernych). Wynika to z twierdzenia udowodnionego w 1934 roku przez Aleksandra Gelfonda i – niezależnie – rok później przez Theodora Schneidera:

jeśli a i b są liczbami algebraicznymi i b jest niewymierna, to a^b nie jest algebraiczna.

Jest to wynik badań nad pewną hipotezą Eulera – informacji o niej (i pokrewnych zagadnieniach) najlepiej poszukać pod hasłem: VII problem Hilberta.

Standardowym przykładem niekonstruktywnego rozumowania jest przedstawiony poniżej dowód następującego faktu: istnieją dwie liczby niewymierne a i b o tej własności, że a^b jest liczbą wymierną. Mówimy mianowicie: jeśli $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną, to właśnie znaleźliśmy $a = b = \sqrt{2}$ spełniające tezę. Załóżmy więc, że liczba $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną, i przyjmijmy: $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ oraz $b = \sqrt{2}$. Wówczas

$$a^b = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2,$$

a zatem i w tym przypadku znaleźliśmy szukane liczby.

Zauważmy jednak, że powyższe rozumowanie nie daje nam informacji, jakie to liczby – nie wiemy, który z przypadków zachodzi.

Intuicjonista, nie akceptując tego typu rozumowań, odnajduje źródło problemu w klasycznej (tj. dwuwartościowej) logice. Konsekwentny intuicjonista musi odrzucić logikę w jej klasycznym kształcie, ponieważ okazuje się ona nieadekwatnym narzędziem do opisu dowodów konstruktywnych. Potrzebuje on zatem nowej logiki – logiki prawidłowych intuicjonistycznie rozumowań.

Poniżej przedstawimy trochę inne spojrzenie na rachunek zdań. Modyfikując znaczenie występujących w nim spójników, tj. nadając im nową interpretację, otrzymamy nowy język – bardziej odpowiedni do opisu rozumowań intuicjonistycznych. Jako pierwotne przyjmijmy pojęcie *konstrukcji*. Możemy patrzeć na konstrukcje jak na sposoby budowania nowych obiektów. Spróbujmy prześledzić, jak spójniki próbowali interpretować pierwsi intuicjoniści – Brouwer, Heyting i Kołmogorow. Oto te interpretacje.

Konstrukcja *koniunkcji* $p \wedge q$ to para składająca się z konstrukcji p i konstrukcji q .

Konstrukcja *alternatywy* $p \vee q$ to para składająca się z konstrukcji p lub konstrukcji q oraz informacji, która część alternatywy została skonstruowana.

Konstrukcja *implikacji* $p \Rightarrow q$ to metoda, która każdą konstrukcję p zamienia na konstrukcję q .

Niech \perp oznacza dowolne zdanie fałszywe. Wówczas konstrukcja \perp nie istnieje.

Zauważmy, że pozostałe znane nam spójniki można łatwo otrzymać z już zdefiniowanych. Mianowicie, dla *negacji* przyjmujemy: $\neg p = p \Rightarrow \perp$, dla *równoważności* zaś: $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Co ciekawe (i zamierzone), przy takim spojrzeniu wiele twierdzeń, które znamy z logiki klasycznej, przestaje być twierdzeniami. Dla przykładu: *prawo wyłączonego środka* $p \vee \neg p$ nie jest twierdzeniem logiki intuicjonistycznej. Zwróćmy uwagę, że konstrukcja alternatywy to para, która oprócz konstrukcji jednego ze zdań p , $\neg p$ zawiera również informację, która konstrukcja



*Instytut Filozofii,
Uniwersytet Warszawski
**student, Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski

Centrum
Studiów Zaawansowanych
Politechniki Warszawskiej

i

Stowarzyszenie na rzecz
Edukacji Matematycznej

zapraszają licealistów, nauczycieli
i wszystkich innych zainteresowanych
na

Wykłady popularne z matematyki

Wojciech Guzicki
O przekątnych wielokątów foremnych

Adam Osękowski
Zastosowanie nierówności między
średnimi w geometrii

Wiktor Bartol
Paradoksy logiczne

Czwartek, 4 III 2010,
godz. 16:30–19:30

Gmach Główny Politechniki
Warszawskiej,
pl. Politechniki 1,
sala 134

WSTĘP WOLNY

<http://www.csz.pw.edu.pl>
<http://www.sem.edu.pl>

Oczywiście, istnieje konstruktywny dowód
twierdzenia

istnieją takie liczby a i b , które nie są
wymiernie, a liczba a^b jest wymierna,

czyli można je wskazać. To $\sqrt{2}$ i $\log_2 9$,
mamy bowiem

$$\sqrt{2}^{\log_2 9} = \sqrt{2}^{2 \log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3.$$

Należy jeszcze wykazać, że liczby te
nie są wymierne. Skorzystamy w tym celu
z twierdzenia o jednoznaczności rozkładzie
liczby naturalnej na liczby pierwsze.

Dla dowolnych liczb całkowitych
dodatnich p i q jest $p^2 \neq 2q^2$, bo
w rozkładzie na liczby pierwsze po lewej
stronie jest parzysta liczba dwójek, a po
prawej nieparzysta. Stąd

$$\frac{p^2}{q^2} \neq 2 \quad \text{i} \quad \frac{p}{q} \neq \sqrt{2}.$$

Podobnie, dla dowolnych liczb
całkowitych dodatnich p i q jest $2^p \neq 3^{2q}$,
bo prawa strona jest nieparzysta. Zatem

$$p \neq \log_2 3^{2q} = \log_2 9^q = q \log_2 9$$

oraz

$$\frac{p}{q} \neq \log_2 9.$$

została podana. Nie wiedząc nic więcej o p , nie jesteśmy w stanie podać
tej informacji.

Podobnie rzecz ma się z *prawem podwójnego przeczenia* $p \Leftrightarrow \neg \neg p$. Chcąc podać
konstrukcję dla takiej formuły, musimy w szczególności podać konstrukcję dla
 $\neg \neg p \Rightarrow p$, czyli sposób, w jaki z dowolnej konstrukcji $(p \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$ wyprowadzać
konstrukcję p . Jednak z konstrukcji $(p \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$ nie ma możliwości uzyskania
konstrukcji p , ponieważ w żadnym z następników nie występuje p . Przeciwna
implikacja: $p \Rightarrow \neg \neg p$ jest natomiast poprawna. Spróbujmy ją udowodnić: dowolną
konstrukcję p mamy zamienić na konstrukcję $\neg \neg p$. Mamy zatem następującą
sytuację:

DANE KONSTRUKCJE:	SZUKANA KONSTRUKCJA:
p	$(p \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$

Aby udowodnić implikację, musimy podać metodę, która każdą konstrukcję
 $p \Rightarrow \perp$ zamienia na konstrukcję \perp . Weźmy więc konstrukcję $p \Rightarrow \perp$:

DANE KONSTRUKCJE:	SZUKANA KONSTRUKCJA:
p	\perp
$p \Rightarrow \perp$	\perp

Stosujemy więc metodę $p \Rightarrow \perp$ do konstrukcji p , otrzymując konstrukcję \perp , co
kończy dowód.

Choć zdanie $p \Leftrightarrow \neg \neg p$ nie jest twierdzeniem logiki intuicjonistycznej, to zdanie
 $\neg p \Leftrightarrow \neg \neg \neg p$ już tak. Aby udowodnić równoważność, należy udowodnić implikacje
w obie strony. Implikacja $\neg p \Rightarrow \neg \neg \neg p$ jest poprawna, ponieważ przyjmując
 $q = \neg p$, dostajemy $q \Rightarrow \neg \neg q$, co udowodniliśmy w poprzednim akapicie.
Udowodnimy teraz $\neg \neg \neg p \Rightarrow \neg p$.

DANE KONSTRUKCJE:	SZUKANA KONSTRUKCJA:
$((p \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$	$p \Rightarrow \perp$

Korzystamy z definicji konstrukcji implikacji:

DANE KONSTRUKCJE:	SZUKANA KONSTRUKCJA:
$((p \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$	\perp
p	\perp

Mając $((p \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$, do otrzymania konstrukcji \perp wystarczy znaleźć
konstrukcję $(p \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$:

DANE KONSTRUKCJE:	SZUKANA KONSTRUKCJA:
$((p \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$	$(p \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$
p	$(p \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$

Korzystając ponownie z definicji implikacji, otrzymujemy:

DANE KONSTRUKCJE:	SZUKANA KONSTRUKCJA:
$((p \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$	\perp
p	\perp
$p \Rightarrow \perp$	\perp

Ale teraz wystarczy zastosować metodę $p \Rightarrow \perp$ do p , ponieważ obie te konstrukcje
mamy dane. Dowód został zakończony.

Ktoś mógłby zapytać, dlaczego tak dziwna logika przetrwała do naszych
czasów. Miarą logiki, jak każdej teorii matematycznej, jest jej zastosowanie
do opisu pewnej rzeczywistości. Okazuje się mianowicie, że istnieje ścisła
odpowiedniość między dowodami w naszycowanym powyżej rachunku zdań
a programami komputerowymi pisanymi w dowolnym języku funkcyjnym (ściślej:
termami λ -rachunku). Dowolny term λ -rachunku odpowiada dowodowi pewnej
formuły w logice intuicjonistycznej, każdy zaś dowód ma swój odpowiednik
wśród λ -termów. Powyższa odpowiedniość znana jest jako *izomorfizm*
Curry'ego-Howarda, ale to już temat na inną opowieść.

Problem kapeluszy *Marcin KRZYWKOWSKI**

Rozważmy następujący problem, zwany problemem kapeluszy (ang. *hat problem*). Do pokoju wchodzi n osób i każdej z nich losowo zostaje nałożony niebieski lub czerwony kapelusz. Każdy widzi kapelusze pozostałych osób, ale nie widzi swojego. Żadna komunikacja nie jest dozwolona, z wyjątkiem ustalenia strategii przed rozpoczęciem gry. Po spojrzeniu na kapelusze pozostałych każdy gracz zgaduje, jaki kolor ma jego kapelusz, lub rezygnuje z próby zgadnięcia. Odpowiedzi są udzielane w taki sposób, że pozostali gracze ich nie słyszą oraz nie dowiadują się, czy odpowiadający próbował zgadnąć, czy zrezygnował i czy odpowiedź była poprawna. Uczestnicy grają całą drużyną, która wygrywa, jeżeli co najmniej jedna osoba poprawnie odgadnie kolor swojego kapelusza i nikt inny nie poda błędnej odpowiedzi. W przeciwnym przypadku drużyna przegrywa.

Problem kapeluszy z siedmioma osobami został sformułowany przez Todda Eberta w jego rozprawie doktorskiej [1] i nazwany tam „problemem siedmiu więźniów”. Noga Alon [2] podał ograniczenie dolne na szansę sukcesu dla uogólnionego problemu kapeluszy z n osobami i q kolorami. Po konferencji w Nowym Orleanie, dzięki której problem kapeluszy zdobył zainteresowanie matematyków, a także mediów, w artykule w *The New York Times* [3] przedstawiono problem kapeluszy z trzema osobami i jego związek z teorią kodów Hamminga. Problem kapeluszy ma powiązania z wieloma zagadnieniami informatycznymi i matematycznymi, na przykład z programowaniem liniowym, programowaniem genetycznym, aproksymacją funkcji boolowskich oraz autoredukowalnością ciągów losowych, a także znajduje zastosowania w innych dziedzinach nauki, między innymi w biologii i ekonomii.

Problemem tym zainteresowałem się, czytając artykuł w *Delcie* (zob. [4]). W tym artykule problem kapeluszy został przedstawiony w kontekście kodów Hamminga i tzw. kodów wykrywających błędy, dzięki którym możemy, na przykład, korzystać z płyty CD pomimo zarysowań. W kolejnym artykule dotyczącym tego zagadnienia (zob. [5]) przedstawiono pewne modyfikacje problemu wraz z rozwiązaniami. Autor zachęcał również czytelników do zmięczenia się z problemem kapeluszy z trzema kolorami i n osobami. Najprostszy przypadek, czyli zadanie z trzema osobami i trzema kolorami, rozwiązujemy w niniejszym artykule. Jak dotąd, nie jest znane rozwiązanie problemu dla żadnej liczby $n > 3$ osób przy trzech kolorach kapeluszy.

Rozpatrujemy problem kapeluszy z trzema osobami (Alicja, Bartek i Marek) i trzema kolorami (czerwony, niebieski i zielony). Podamy strategię dla tego problemu i udowodnimy, że jest ona optymalna.

Strategia. Alicja, Bartek i Marek postępują następująco.

Alicja: jeśli Alicja widzi, że Bartek i Marek mają kapelusze różnych kolorów, to stwierdza, że ma kapelusz takiego koloru jak Marek. Jeśli zaś Bartek i Marek mają kapelusze tego samego koloru, to rezygnuje z odpowiedzi.

Bartek: jeśli Bartek widzi, że Alicja i Marek mają kapelusze różnych kolorów, to stwierdza, że ma kapelusz takiego koloru jak Marek. Jeśli zaś Alicja i Marek mają kapelusze tego samego koloru, to rezygnuje z odpowiedzi.

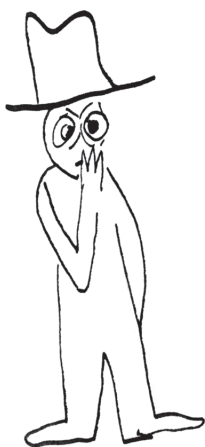
Marek: jeśli Marek widzi, że Alicja i Bartek mają kapelusze tego samego koloru, to stwierdza, że ma kapelusz takiego koloru jak oni. Jeśli zaś Alicja i Bartek mają kapelusze różnych kolorów, to rezygnuje z odpowiedzi.

Udowodnimy, że powyższa strategia jest optymalna, czyli nie istnieje żadna lepsza strategia (deterministyczna).

W naszych rozważaniach przez *przypadek* rozumiemy konkretny układ kapeluszy na głowach graczy. W badanym przez nas problemie kapeluszy z trzema osobami i trzema kolorami jest $3^3 = 27$ możliwych przypadków. Przez *sytuację*, którą widzi dana osoba, rozumiemy układ kapeluszy na głowach wszystkich osób poza tą jedną. W rozwiązywanym przez nas problemie każdy widzi jedną z $3^2 = 9$ możliwych sytuacji.

Twierdzenie. *Powyższa strategia jest optymalna dla problemu kapeluszy z trzema osobami i trzema kolorami.*

Dowód. Naszą strategię łatwo przedstawić za pomocą tabeli. Poniżej podaliśmy kilka przykładowych wierszy tabeli dla naszej strategii. Zachęcamy do



Łatwo zauważyć, że gdyby próbować rozwiązać problem kapeluszy, analizując wszystkie możliwe strategie, to złożoność obliczeniowa tego zagadnienia spowoduje, iż już dla wcale nie tak dużych liczb n i q (liczba osób i liczba kolorów, odpowiednio), problem nie zostanie rozwiązany przez komputer w żadnym rozsądnym czasie.

*Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej, Politechnika Gdańska

samodzielnego wypisania dalszych wierszy, co ułatwi analizę dowodu. W poniższej tabeli przez c , n i z oznaczamy odpowiednio kolor czerwony, niebieski i zielony. Znak „+” oznacza poprawną odpowiedź lub sukces, znak „-” oznacza błędną odpowiedź lub porażkę, a puste pole oznacza rezygnację z odpowiedzi. Po utworzeniu całej tabelki dowiadujemy się, że drużyna wygrywa w 15 spośród 27 przypadków.



Kolor kapelusza			Odpowiedź			Efekt
Alicji	Bartka	Marka	Alicji	Bartka	Marka	
c	c	c			+	+
c	c	n	-	-	-	-
c	n	c	+			+
z	c	n	-			-
c	n	z	-	-		-

Przypuśćmy teraz, że istnieje lepsza strategia, za pomocą której drużyna wygrywa w więcej niż 15 przypadkach, czyli przegrywa w mniej niż 12 przypadkach.

Weźmy dowolną sytuację widzianą przez osobę X , wybraną dowolnie z trójki graczy. Udzielona odpowiedź zależy tylko od sytuacji – jest taka sama we wszystkich przypadkach odpowiadających tej sytuacji. Wobec tego w dwóch z trzech przypadków odpowiadających ustalonej sytuacji odpowiedź osoby X jest błędna, a w jednym jest poprawna. Czyli każda osoba może udzielić odpowiedzi na pytanie o kolor swojego kapelusza w co najwyżej 5 sytuacjach, bo jeśli ktoś odpowiada w co najmniej 6 sytuacjach, to drużyna przegrywa w co najmniej 12 przypadkach, czyli strategia nie jest lepsza od naszej.

Skoro mamy trzy osoby, a każda z nich udziela odpowiedzi na pytanie o kolor swojego kapelusza w co najwyżej pięciu sytuacjach, a każda z tych odpowiedzi jest poprawna w dokładnie jednym przypadku, to drużyna wygrywa w co najwyżej 15 przypadkach. Jest to sprzeczne z założeniem, że stosując rozpatrywaną strategię, drużyna wygrywa w więcej niż 15 przypadkach. \square

Czytelników serdecznie zachęcamy do prób rozwiązania póki co nierozwiązanego problemu kapeluszy z czterema osobami i trzema kolorami.

Literatura

- [1] T. Ebert, *Applications of recursive operators to randomness and complexity*, rozprawa doktorska, University of California at Santa Barbara, 1998.
- [2] N. Alon, *Problems and Results in Extremal Combinatorics. II*, Discrete Mathematics 308 (2008), 4460–4472.
- [3] S. Robinson, *Why mathematicians now care about their hat color*, The New York Times, Science Times section, p. D5, April 10, 2001.
- [4] A. Dąbrowski, *Kolorowe czapeczki*, Delta 7/2005, 1–5.
- [5] A. Dąbrowski, *Kolorowe czapeczki – kontynuacja*, Delta 2/2006, 8–9.



Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1267. Na tablicy zapisano liczby 1 i 2. Jeśli na tablicy znajdują się już liczby m i n , to można do nich dopisać liczbę $mn + m + n$. Wykazać, że na tablicy mogą wystąpić jedynie liczby postaci $2^a \cdot 3^b - 1$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi nieujemnymi.

Rozwiązanie na str. 2

M 1268. Dany jest okrąg o . Przez punkt P leżący na zewnątrz tego okręgu poprowadzono proste styczne do okręgu o w punktach A i B (rysunek). Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg o w punktach C i D . Prosta przechodząca przez punkt B i równoległa do prostej CD przecina okrąg o w punktach B i E . Udowodnić, że prosta AE przechodzi przez środek odcinka CD .

Rozwiązanie na str. 24

M 1269. Dowieść, że nie istnieje liczba całkowita dodatnia n , dla której liczby $2n^2 + 1$, $3n^2 + 1$ oraz $6n^2 + 1$ są kwadratami liczb całkowitych.

Rozwiązanie na str. 22

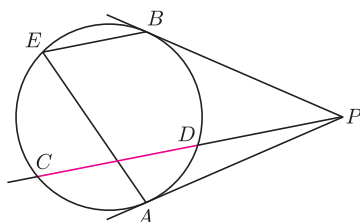
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 757. Ile razy zmieni się oświetlenie obrazu Słońca, otrzymanego za pomocą płasko-wypukłej soczewki, jeśli rozetniemy soczewkę wzdłuż średnicy i złożymy płaskimi stronami?

Rozwiązanie na str. 24

F 758. Ile razy mniejsze jest oświetlenie w nocy w czasie pełni od oświetlenia w południe? W obu przypadkach niebo jest bezchmurne, a wysokość Księżyca i Słońca nad horyzontem jest taka sama. Założyć, że współczynnik rozpraszania powierzchni Księżyca wynosi $\alpha = 0,1$.

Rozwiązanie na str. 2



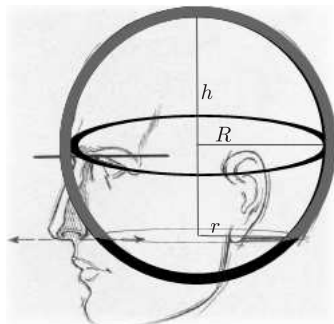


mała delta

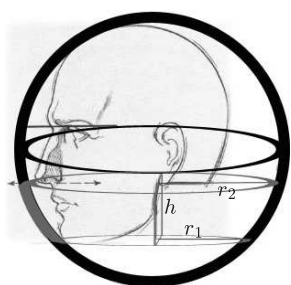
Człowiek stereometryczny

Niełatwo jest narysować postać ludzką, jednak odszukanie w niej pewnych figur geometrycznych ułatwi nam to zadanie. Spróbujmy odnaleźć kilka takich kształtów, które pomogą nam „stworzyć” człowieka.

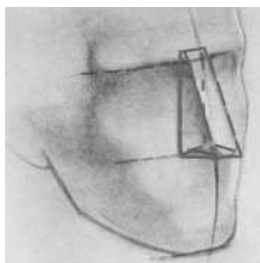
Zacznijmy od głowy, naszego centrum dowodzenia. Na rysunku zaznaczono kopułę czaszki jako **czaszę kuli** (rys. 1) oraz żuchwę jako **warstwę kuli** (rys. 2). Przyglądając się głębiej rysunkom, widzimy, że nos jest **graniastostłupem prostym o podstawie trójkąta prostokątnego** (rys. 3), a szyja to **walec** (rys. 4). Dzięki tym kilku spostrzeżeniom mamy już ogólny zarys głowy.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Przejdźmy teraz do korpusu. W podobny sposób przeanalizujemy jego budowę. Otóż plecy górne są połową **beczki**, która przechodzi w dwa **prostopadłościany**, a biodra są **ostrosłupem ściętym**.

Z kolei bark i biceps to **kule** (u kulturystów bardzo widoczne). Przedramię w pewnym przybliżeniu jest **stożkiem ściętym**.

W podobny sposób można opisać całe ludzkie ciało, jednak... no właśnie, na początku była mowa o rysowaniu postaci, lecz nie każdy ma zdolności plastyczne. Czy można zdobytą wiedzę zastosować nie tylko do szkicowania postaci ludzkich? Przecież każda z wymienionych tu brył ma swoją objętość, inną u każdego człowieka, ale dającą się precyzyjnie obliczyć według powszechnie znanych wzorów. Będziemy dodawać, mnożyć, potęgować, by odkryć prawdę: skąd bierze się masa, gdzie kryją się nasze kilogramy? Aby tego dokonać, potrzebujemy przeprowadzić pewne pomiary. Na przykład, w celu obliczenia objętości czaszy kuli potrzebny nam będzie obwód głowy na wysokości oczu, dzięki któremu obliczymy promień kuli R , obwód głowy na wysokości ust, dający promień podstawy czaszy kuli r (patrz rys. 1). Stosując twierdzenie Pitagorasa, możemy obliczyć wysokość czaszy kuli:

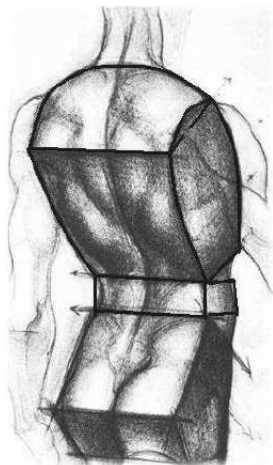
$$h = R + \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Wystarczy teraz otrzymane dane podstawić do wzoru na objętość czaszy kuli,

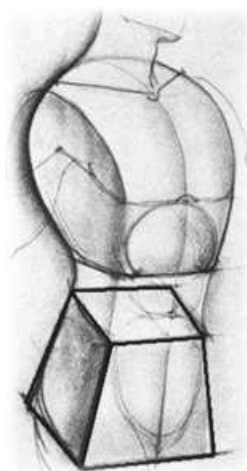
$$V = \pi \left(\frac{hr^2}{2} + \frac{h^3}{6} \right),$$

by obliczyć fundamentalną część objętości naszej głowy. Patrząc na rysunki 2, 3 i 4, widzimy, jakie wymiary potrzebne są do obliczenia objętości pozostałych elementów naszej głowy. Zachęcamy wytrwałych Czytelników do przeprowadzenia podobnych eksperymentów, jakim poddał się piszący ten artykuł. A oto wyniki obliczeń:

$$V_g = 3250 \text{ cm}^3, \quad V_k = 35200 \text{ cm}^3, \quad V_n = 23600 \text{ cm}^3, \\ V_r = 6650 \text{ cm}^3, \quad V_s = 3000 \text{ cm}^3,$$



Rys. 5



Rys. 6

gdzie: V_g – objętość głowy, V_k – objętość korpusu, V_n – objętość nóg, V_r – objętość rąk, V_s – objętość stóp. Suma tych wielkości daje 71700 cm^3 .

Ponieważ obliczenia obarczone są pewnym błędem (nie uwzględniono uszu, objętość dłoni była uwzględniona w przybliżeniu z niedomiarem), zatem do otrzymanego wyniku dodajemy 300 cm^3 . Otrzymana wartość to 72000 cm^3 .

Co dalej możemy zrobić z tak obliczoną objętością? Można obliczyć masę ciała, stosując wzór:

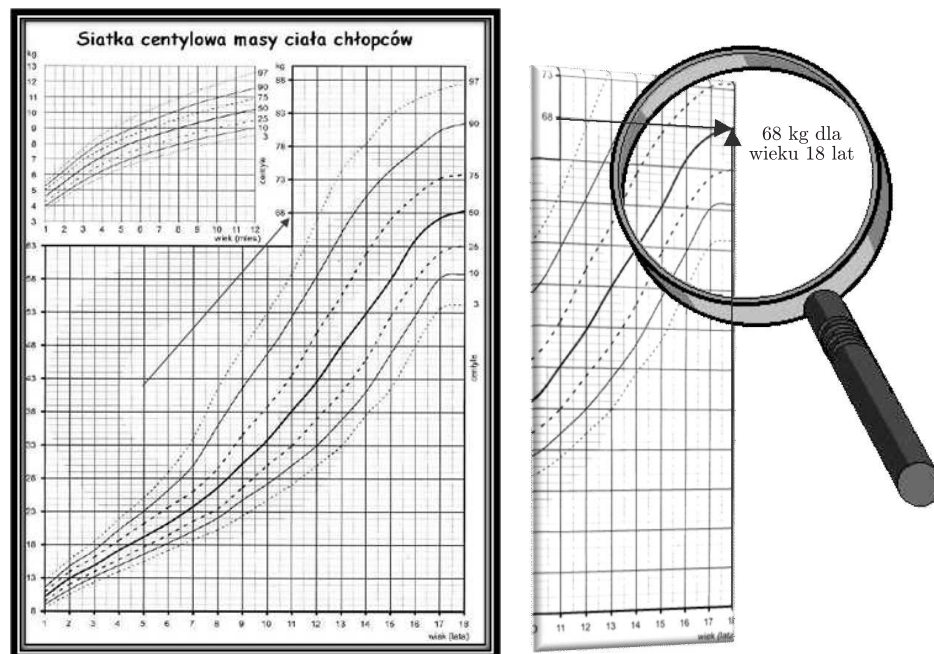
$$m = V \cdot \rho,$$

gdzie m oznacza masę, V – objętość, ρ – gęstość ciała ludzkiego. Ponieważ ciało ludzkie w większości składa się z wody, zatem przyjmiemy gęstość taką, jak gęstość wody w temperaturze ok. $36^\circ\text{--}37^\circ\text{C}$, czyli $0,995 \text{ g/cm}^3$. Masa ciała autora artykułu, obliczona według podanego wzoru, wynosi:

$$m = 72000 \cdot 0,995 = 71640 \left[\text{cm}^3 \cdot \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \text{g} \right].$$

Po zaokrągleniu otrzymujemy wynik 72 kg . Jest to wartość zbliżona do tej, którą wskazuje waga łaźniakowa autora.

Na koniec porównajmy rezultat z siatką centylową. Czym jest siatka centylowa? Jest jedną z obiektywnych metod oceny rozwoju fizycznego dzieci i młodzieży. Najczęściej oceniane są: przebieg wzrostu, przyboru masy ciała, przyrostu obwodu głowy. Strzałką zaznaczono średnie, krajowe wartości, dla chłopców w wieku 18 lat. Autor jest uczniem klasy trzeciej liceum, zatem mieści się w przedstawionym przedziale wiekowym, a obliczenia pokazują, że również jego waga jest w normie.



Powyższe rozważania były częścią pracy napisanej na XXVI Ogólnopolski Sejmik Matematyków. Stanowiły doskonałą zabawę dla samego autora i jego kolegów, ale mogą stać się także inspiracją do wzbogacenia lekcji stereometrii, a może również lekcji rysunku.

*Uczeń VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach

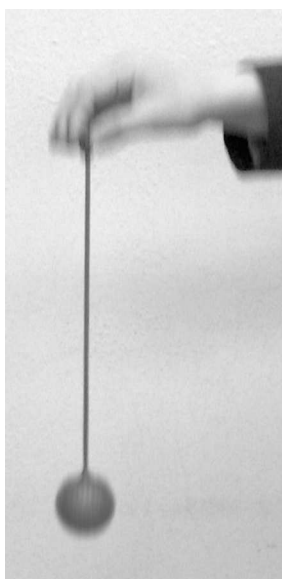
Małą Deltę przygotował Adam ŚMIAŁKOWSKI*

Doświadczenia z elastyczną kulą wodną (część 3)

Stanisław BEDNAREK

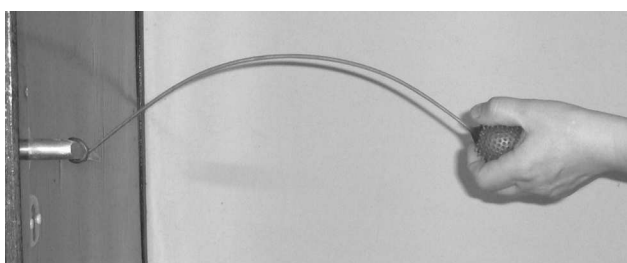
Opisaną w dwóch poprzednich odcinkach tego kącika elastyczną kulę wodną możemy wykorzystać również do badania ruchu drgającego oraz mechaniki cieczy.

Pierwsze z dzisiejszych doświadczeń dotyczy rezonansu mechanicznego. Trzymamy zabawkę palcami jednej ręki za uchwyt, tak by taśma i kula zwisały pionowo. W pewnej chwili zaczynamy wykonywać ręką ruchy posuwisto-zwrotne w kierunku pionowym (fot. 1). Widzimy, iż kula również rozpoczyna wykonywanie ruchów drgających w tym kierunku. Staramy się zaobserwować, jaka jest amplituda tych drgań. Zmieniamy częstotliwość ruchów ręki i obserwujemy wpływ tych zmian na amplitudę drgań kuli. Okazuje się, że amplituda ta jest największa dla pewnej charakterystycznej częstotliwości ruchów ręki. W tej sytuacji kula znajduje się w stanie rezonansu mechanicznego.



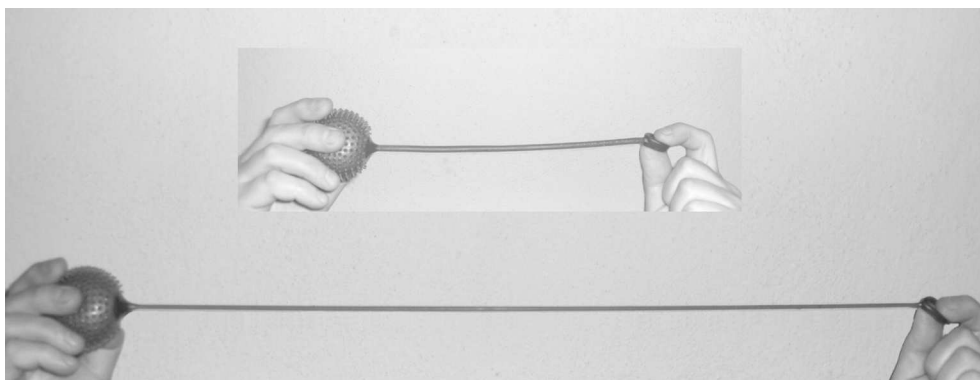
Fot. 1. Wykorzystanie elastycznej kuli wodnej do badania zjawiska rezonansu mechanicznego.

W drugim doświadczeniu wytworzymy falę stojącą. W tym celu uchwyt zabawki zaczepiamy o jakiś stały punkt. Może to być np. klamka przy drzwiach, wieszak do ubrań lub statyw, można też poprosić o przytrzymanie taśmy inną osobę. Kulę chwytną jedną ręką i odsuwamy od uchwytu, tak żeby taśma była lekko naciągnięta i zajmowała pozycję poziomą. Palcem drugiej ręki naciskamy na taśmę w kierunku pionowym i puszczone ją swobodnie. Zauważamy, że w naprężonej taśmie wzbudza się fala stojąca. Strzałka tej fali znajduje się w połowie długości taśmy, a węzły wypadają na jej końcach – przy uchwycie oraz przy kuli (fot. 2). Charakterystyczną cechą tak wytworzonej fali stojącej jest to, że wzbudza się podstawowy mod drgań, czyli drgania o najniższej częstotliwości. Zmieniając siłę naprężającą taśmę i wzbudzając w niej kolejne fale, możemy zaobserwować, że częstotliwość drgań wzrasta wraz ze zwiększaniem siły naprężającej. Zwiększenie częstotliwości możemy stwierdzić, widząc większe rozmycie obrazu drgającej taśmy.



Fot. 2. Wytwarzanie fali stojącej przy użyciu elastycznej kuli wodnej.

W trzecim doświadczeniu zobaczymy, jak zmieniają się wymiary poprzeczne ciała sprężystego, poddanego rozciąganiu. Jest faktem powszechnie znanym, że przyłożenie siły rozciągającej do ciała sprężystego powoduje jego wydłużenie. Spowodowane przez tę siłę wydłużenie jest tym większe, im większa jest wartość przyłożonej siły. Znacznie mniej znanym faktem jest zmiana poprzecznych rozmiarów rozciąganego ciała. Z tym faktem możemy zapoznać się, wykonując następujące doświadczenie. Chwytną palcami jednej ręki koniec taśmy w pobliżu uchwytu, a przeciwny koniec

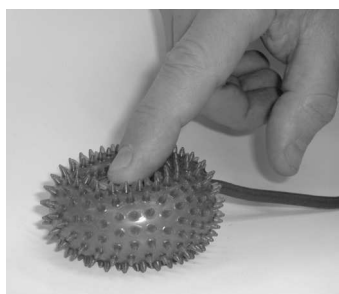


Fot. 3. Uwidocznienie przewężenia ciała sprężystego podczas rozciągania przy użyciu elastycznej kuli wodnej.

ujmujemy w pobliżu kuli palcami drugiej ręki. Ustawiamy dłonie na jednakowej wysokości i rozsuwamy je nieco, tak żeby taśma przyjęła kierunek poziomy, ale nie była rozciągnięta. Obserwujemy grubość taśmy. Następnie rozsuwamy powoli dłonie coraz bardziej, obserwując przez cały czas grubość taśmy. Stwierdzamy, że

wraz ze wzrostem wydłużenia taśmy jej grubość maleje. Ponieważ taśma jest bardzo rozciągliwa, możemy bez obawy rozerwania zwiększyć jej długość nawet 3–4 razy i bezpośrednio zaobserwować bardzo wyraźne przewężenie taśmy (fot. 3).

Elastyczną kulę wodną możemy wykorzystać również do doświadczeń z mechaniki cieczy. Pierwsze z nich będzie dotyczyło prawa Pascala. Elastyczną kulę zabawki kładziemy na płaskiej, poziomej powierzchni, np. na stole. Na kulę od góry nakładamy monetę jednozłotową lub inny krążek o podobnych rozmiarach. Naciskamy palcem na monetę i obserwujemy kształt kuli (fot. 4). Zauważmy, że kula ulega jednakowemu odkształceniu we wszystkich kierunkach. Takie zachowanie się kuli jest ilustracją prawa Pascala mówiącego, że ciśnienie zewnętrzne, wywierane na ciecz lub gaz (ogólnie mówi się – płyn) rozchodzi się w nim we wszystkich kierunkach jednakowo i jest prostopadłe do powierzchni płynu. Zamiast wywierać nacisk na kulę przez monetę, możemy naciskać na nią bezpośrednio palcem. Wówczas kula przyjmie kształt toroidu (fot. 5). Doświadczenie ilustrujące prawo Pascala możemy przeprowadzić w jeszcze inny, może bardziej efektowny sposób. Obejmujemy kulę od dołu kciukiem i palcem wskazującym jednej dłoni, tak żeby dolna część kuli znalazła się między tymi palcami. Następnie powoli zaciskamy oba palce aż do maksymalnego zbliżenia. Widzimy, że ponad zaciśniętymi palcami tworzy się mniejsza kula, co również wskazuje na rozchodzenie się w płynie ciśnienia jednakowo we wszystkich kierunkach i prostopadłe do jego powierzchni (fot. 6).



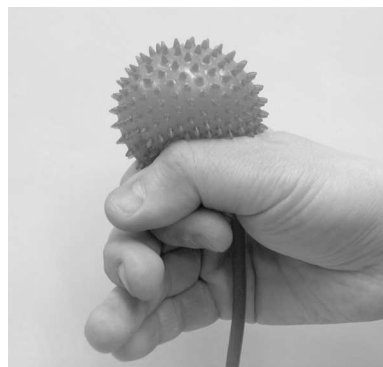
Fot. 4. Sprawdzanie prawa Pascala przy użyciu elastycznej kuli wodnej.



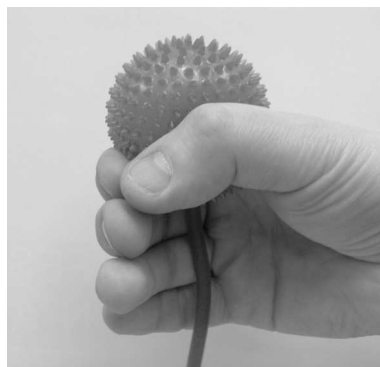
Fot. 5. Inny sposób wykorzystania elastycznej kuli wodnej do sprawdzania prawa Pascala.

W ostatnim doświadczeniu zapoznamy się z ruchami burzliwymi (turbulentnymi) w cieczy. Kulę zabawki obejmujemy zgiętymi czterema palcami jednej ręki i zgiętym kciukiem, tak żeby ponad palce wystawała około połowa kuli (fot. 7). Taśma i uchwyt zabawki powinny przy tym swobodnie zwisać. Następnie szybko zaciskamy palce, zgniatając elastyczną kulę. Widzimy, że powyżej zaciśniętych palców tworzy się uwypuklenie o przewężonej i przezroczystej ścianie z rozsuniętymi kolcami (fot. 8). Wewnątrz tego uwypuklenia widoczna jest woda z poruszającymi się ruchem wirowym białymi kłaczkami. Kłaczkki te pokazują turbulentny ruch wody, spowodowany nagłym zaciśnięciem kuli wprowadzającym zaburzenie.

Kończąc opisy doświadczeń z elastyczną kulą wodną, nie sposób oprzeć się refleksji nad szerokimi możliwościami jej wykorzystania do przeprowadzania interesujących eksperymentów z różnych działów fizyki. Opisane doświadczenia najprawdopodobniej nie wyczerpują wszystkich możliwości wykorzystania tej bardzo prostej, taniej i łatwo dostępnej zabawki. Pomysłowy Czytelnik zapewne wymyśli jeszcze jakiś nowy, ciekawy eksperyment. A może znajdzie jeszcze jakieś inne zabawki, które okażą się w podobnym stopniu uniwersalne i przydatne do przeprowadzania interesujących doświadczeń fizycznych?



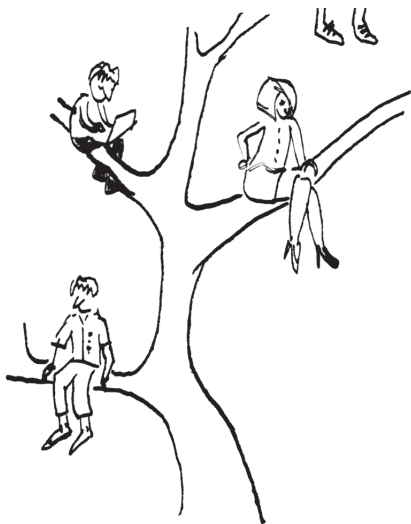
Fot. 6. Sposób zaciśnięcia elastycznej kuli wodnej do sprawdzania prawa Pascala.



Fot. 7. Sposób uchwycenia elastycznej kuli wodnej w celu uwidocznienia ruchu turbulentnego cieczy.



Fot. 8. Ruch turbulentny cieczy w elastycznej kuli wodnej.



Informatyczny kącik olimpijski (27): Regiony

Tym razem weźmiemy pod lupę zadanie *Regions* z Międzynarodowej Olimpiady Informatycznej 2009.

Mamy N pracowników pochodzących z R regionów (każdy z dokładnie jednego). Każdy pracownik, poza pierwszym, ma swojego bezpośredniego przełożonego; zależności te nie tworzą, oczywiście, cykli. Mówimy, że A jest przełożonym B , jeśli A jest bezpośrednim przełożonym B lub, rekurencyjnie, gdy A jest przełożonym bezpośredniego przełożonego B . Znamy hierarchię pracowników oraz wiemy, skąd który pracownik pochodzi. Chcemy odpowiadać, dla różnych r_1 i r_2 , na zapytania postaci: „ile jest par pracowników e_1, e_2 , takich że e_1 pochodzi z regionu r_1 , e_2 pochodzi z regionu r_2 oraz e_1 jest przełożonym e_2 ?”. Pytań takich zostanie nam zadanych Q . Dla porządku należy dodać, że przedstawione w treści zadania górne ograniczenia na wartości N , R i Q były tego samego rzędu.

Problem nie wydaje się łatwy, warto więc zacząć od najprostszyc poprawnych rozwiązań. Zauważmy, że hierarchia pracowników ma strukturę drzewa. Możemy zatem na każde zapytanie odpowiedzieć, wykonując przeszukiwanie tegoż drzewa, w którym zliczamy pracowników z regionu r_1 na ścieżce z korzenia do aktualnego wierzchołka, i zsumować te wartości z wierzchołków będących pracownikami z r_2 . Daje to rozwiązanie w czasie $O(Q \cdot N)$.

Postępując jak wyżej, dla większości zapytań niepotrzebnie przeglądamy całe drzewo, gdy tymczasem istotne wierzchołki (te z regionów r_1 i r_2) stanowią tylko niewielką jego część. Aby temu zaradzić, znajdziemy sposób na szybkie sprawdzanie, czy jeden pracownik jest przełożonym drugiego. W terminach drzew chodzi o sprawdzenie, czy dany wierzchołek jest przodkiem innego wierzchołka. Odpowiedź na to pytanie przynosi algorytm przeszukiwania w głąb (DFS). Jak opisano w książce T. Cormena, C. Leisersona, R. Rivesta i C. Steina *Wprowadzenie do algorytmów*, wystarczy w tym celu obliczyć czasy wejścia (d) oraz wyjścia (f) dla poszczególnych wierzchołków w przeszukiwaniu – wówczas wierzchołek u jest przodkiem v , jeżeli $[d_u, f_u] \supset [d_v, f_v]$ (a każde dwa przedziały tej postaci są albo rozłączne, albo jeden jest zawarty w drugim). Jeśli teraz dla każdego regionu zapamiętamy na wstępie listę pracowników, którzy z niego pochodzą, otrzymamy rozwiązanie o złożoności $O(N + Q \cdot M^2)$, przy czym M jest maksymalną liczbą pracowników z jednego regionu. Celowo wprowadziliśmy takie oznaczenie, mimo że póki co wiemy jedynie, że $M \leq N$.

Aby jeszcze zmniejszyć czas odpowiedzi na pojedyncze zapytanie, możemy z pracowników z regionów r_1 i r_2 zbudować w czasie $O(M)$ nowe drzewo (zawierające tylko tych pracowników), w którym zależności bycia przełożonym pozostaną niezmienione w stosunku do oryginalnego drzewa (może zaistnieć potrzeba dodania sztucznego korzenia). W tym celu zaczynamy od scalenia list pracowników (przedziałów $[d_v, f_v]$) obu regionów uporządkowanych względem d_v . Następnie zauważamy, że rodzicem pracownika $[d_v, f_v]$ w nowym drzewie będzie najbliższy mu element występujący na scalonej liście przed nim, którego wartość f jest większa niż f_v . W ten sposób sprowadziliśmy problem budowy

drzewa do klasycznego problemu typu „najbliższy większy położony z lewej”, który można rozwiązać w czasie liniowym na wiele sposobów (np. za pomocą stosu). Z kolei w nowym drzewie wiemy już, jak rozwiązać nasz problem w czasie $O(M)$. Otrzymaliśmy zatem rozwiązanie o złożoności czasowej $O(N + Q \cdot M)$.

Ten algorytm działa szybko, gdy M jest małe, tzn. gdy regiony są małe. Zastanówmy się więc, co dzieje się, gdy są one duże (nie ma ich wówczas zbyt wiele, bo przecież suma ich rozmiarów to N). W takim przypadku najlepszym pomysłem wydaje się wstępne obliczenie wszystkich R^2 wyników i zapamiętanie ich. Dla każdego regionu r_1 wystarczy jedno przeszukiwanie całego drzewa, aby ustalić wyniki dla wszystkich możliwych r_2 (znow przeszukujemy drzewo, pamiętając w każdym wierzchołku liczbę pracowników z r_1 na ścieżce z korzenia, i w każdym wierzchołku uaktualniamy wynik całkowity dla jego regionu). Takie rozwiązanie ma złożoność czasową $O(R \cdot N + Q)$ i zużywa $O(N + R^2)$ pamięci.

Uzyskaliśmy dwa rozwiązania radzące sobie dobrze w różnych skrajnych przypadkach. Teraz chcielibyśmy je połączyć w jedno, działające szybko dla każdyc danych. W tym celu ustalmy pewną granicę rozmiaru regionu, x . Jeśli oba regiony z danego zapytania mają rozmiar nie większy niż x , używamy pierwszego algorytmu. Jeśli zaś któryś z nich jest większy, używamy drugiego. „Dużyc” regionów jest, oczywiście, nie więcej niż $\frac{N}{x}$. Musimy zatem zmodyfikować drugi algorytm: będzie on teraz w czasie $O(\frac{N^2}{x})$ i pamięci $O(\frac{N \cdot R}{x})$ obliczał wyniki dla zapytań, w których jeden z regionów jest duży, a drugi dowolny. Polecamy Czytelnikowi zastanowienie się, jak to zrobić (potrzeba dwóch przeszukiwań drzewa dla każdego dużego regionu). Stąd, łączny czas wyniesie $O(\frac{N^2}{x} + Q \cdot x)$ przy jednoczesnym zużyciu $O(N + \frac{N \cdot R}{x})$ pamięci. Jeśli ustalimy $x = \sqrt{N}$, otrzymujemy złożoność czasową $O((N + Q)\sqrt{N})$ i pamięciową $O(N + R\sqrt{N})$.

Na koniec pozostawiamy Czytelnikowi pytanie dodatkowe: jak zmodyfikować powyższe rozwiązanie, tak aby zmniejszyć jego złożoność pamięciową do $O(N)$, kosztem zwiększenia złożoności czasowej o czynnik $\log N$?

Tomasz KULCZYŃSKI

Sztuczne pole magnetyczne

Już wyjaśniam, o co chodzi. Nie o sposób wytwarzania pola magnetycznego, tylko o wytworzenie czegoś, co polem magnetycznym nie jest, ale zachowuje się tak, jakby było. Niestety, potrzebne jest dość techniczne wprowadzenie, ale można je (czyli następny akapit) potraktować pobieżnie.

Indukcję pola magnetycznego \mathbf{B} można opisywać za pomocą zadania pola potencjału wektorowego \mathbf{A} w następujący sposób: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, czyli indukcja pola magnetycznego jest równa rotacji potencjału wektorowego. Użyta symbolika, iloczyn wektorowy operatora nabra $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ i pola wektorowego, może być nieoczywista lub w ogóle niezrozumiała, ale w rozważaniach potrzebny jest nam tylko jeden z najprostszych przypadków. Jednorodne pole magnetyczne o indukcji skierowanej wzdłuż \hat{z} , równej $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, może być opisane np. za pomocą potencjału wektorowego $\mathbf{A} = B\left(\frac{y}{2}, -\frac{x}{2}, 0\right)$. Wektor takiego potencjału jest w każdym punkcie prostopadły do wektora $\rho = (x, y, 0)$, a jego wartość proporcjonalna do $|\rho|$, czyli pole wektorowe \mathbf{A} wygląda jak pole prędkości wiru (karuzeli), wirującego wokół osi z . Rotacja jest miarą „lokalnej wirowatości”: składowa B_z jest równa różnicy tempa zmian składowej A_x w kierunku \hat{y} i A_y w kierunku \hat{x} . W omawianym przypadku ta różnica jest wszędzie (poza samym centrum) taka sama (co można sprawdzić, jak ktoś umie i lubi różniczkowanie cząstkowe), a wkłady pochodzące od A_x i A_y są identyczne (gdyby A_x i A_y nie różniły się znakiem, to rotacja byłaby zerowa). Dlatego tę samą indukcję pola magnetycznego można uzyskać, przyjmując $\mathbf{A} = (By, 0, 0)$, choć „wirowatość” takiego potencjału nie jest aż tak oczywista na pierwszy rzut oka.

Użycie potencjału wektorowego, oprócz możliwych korzyści praktycznych, ma szczególne uzasadnienie w przypadku zjawisk kwantowych. Efekty magnetyczne można wtedy objaśniać za pomocą różnicy faz wywołanych różną sumaryczną wartością iloczynu ładunku i krążenia potencjału wektorowego dla różnych, interferujących trajektorii. Z formalnego punktu widzenia efekty magnetyczne mogą zostać sprowadzone do obecności wyrazu $q\mathbf{A}$ w hamiltonianie (czyli operatorze całkowitej energii) określającym funkcję falową cząstki o ładunku q . Oczywiście jest, że efekty te dotyczą tylko obiektów naładowanych.

Nie wszystkim się to podoba. W szczególności specjalistom od rozrzedzonych gazów, które w ultraniskich temperaturach stają się kondensatami Bosego–Einsteina (BEC). Ponieważ są one makroskopowymi obiektami kwantowymi, więc świetnie nadają się do badań podstaw mechaniki kwantowej. W szczególności pozwalają na badanie zjawisk analogicznych do występujących w fizyce fazy skondensowanej (dawniej fizyce ciała stałego). Tylko że nie tych związanych z ładunkiem, bo atomy w kondensatach BEC, jak to atomy, są neutralne [1].

Ale skoro magnetyzm można sprowadzić do obecności odpowiedniego wyrazu związanego z potencjałem, to co się stanie, jeżeli taki wyraz do hamiltonianu wprowadzimy? W myśl zasady, że identyczne równania dają identyczne rozwiązania, powinniśmy zaobserwować zjawiska magnetyczne.

To tyle teoria, ale czy to się da zrobić? Autorzy pracy [2] pokazali, że tak, czyli udało im się wytworzyć tytułowe sztuczne pole magnetyczne.

Osiągnięto to w następujący sposób. Próbkę atomów rubidu ^{87}Rb w stanie BEC oświetlono dwiema wiązkami lasera skierowanymi wzdłuż kierunków $\hat{y} \pm \hat{x}$ (czyli wzajemnie prostopadłych), spolaryzowanymi liniowo wzdłuż, odpowiednio, $\hat{y} \mp \hat{x}$, o częstości ω i $\omega + \Delta\omega$. Ponieważ $\Delta\omega$ została dobrana tak, żeby odpowiadać zeemanowskiemu rozszczepieniu poziomu energetycznego elektronu walencyjnego, wywołanemu zewnętrznym jednorodnym polem magnetycznym skierowanym wzdłuż kierunku \hat{y} (jak widać, do wytworzenia sztucznego pola magnetycznego potrzebne jest zwykle pole magnetyczne), więc dzięki nieelastycznemu rozpraszaniu fotonów na atomach BEC (rozpraszaniu ramanowskiemu) nastąpiło sprzężenie trzech zeemanowsko rozszczepionych stanów energetycznych elektronu, które można interpretować jako pojawienie się potencjału wektorowego wzdłuż kierunku \hat{x} . Potencjał ten jest związany z różnicą pędu fotonów obu wiązek, skierowaną wzdłuż tego kierunku. Potencjał ten jest jednak stały, więc jeszcze nie nadaje się do wygenerowania sztucznego pola magnetycznego. Żeby to umożliwić, wprowadzono gradient zewnętrznego pola magnetycznego wzdłuż kierunku \hat{y} , co spowodowało zależność wartości potencjału wektorowego od wartości współrzędnej y .

Jak się jednak przekonać, że ta inżynieria działa? Konfiguracja jest w sumie dość prosta, ale jej interpretacja, zawierająca wiele przybliżeń, już nie.

Atomy BEC są w stanie nadciekłym. Naszkicowana interpretacja dotyczy wolnego ruchu tych atomów. Jest to sytuacja podobna do stanu nadprzewodnictwa w ciele stałym. Jedną z cech charakterystycznych nadprzewodnictwa jest wypychanie pola magnetycznego z nadprzewodnika (efekt Meissnera). Po przekroczeniu granicznej wartości indukcji pola jedne nadprzewodniki wychodzą ze stanu nadprzewodnictwa, a inne wbudowują w siebie kwanty strumienia pola magnetycznego. Im większa indukcja pola, tym więcej takich przebijających nadprzewodnik kwantów.

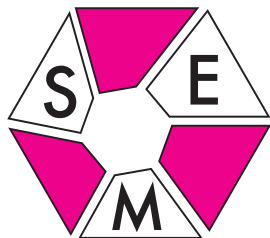
W opisanym doświadczeniu zaobserwowano to samo, tylko zamiast kwantów strumienia indukcji magnetycznej, zarejestrowano kwanty momentu pędu, manifestujące się w postaci wirów, w liczbie odpowiadającej natężeniu sztucznego pola magnetycznego.

Opisane doświadczenie może i na pewno zostanie rozwinięte na wiele sposobów. Autorzy planują zaobserwowanie odpowiednika ułamkowego efektu Halla, a teoretycy proponują sztuczne wytworzenie pól o bardziej rozbudowanych grupach symetrii niż elektromagnetyczne $U(1)$.

Piotr ZALEWSKI

[1] M. Zwierlein, *Neutral atoms put in charge*, Nature **462** (2009) 584–585, wraz z referencjami.

[2] Y.-J. Lin i inni, *Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms*, Nature **462** (2009) 628–632.



W tym roku szkolnym odbywa się V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (OMG). Mamy więc mały jubileusz. I jest on udany. Rozwiązania zadań z I stopnia nadesłało 1121 uczniów, z których 622 zakwalifikowało się do zawodów II stopnia. Jest to liczba rekordowa, prawie dwa razy wyższa niż w roku ubiegłym (i we wcześniejszych edycjach). To niezwykle cieszy i pokazuje, że OMG zaistniała w gimnazjalnej świadomości. Zadania OMG, mimo że bazują na programie nauki matematyki w gimnazjum, dość znacznie swoim charakterem różnią się od typowych zadań szkolnych. Ich rozwiązanie wymaga sporej pomysłowości i oryginalności myślenia. Rosnący udział i wysoki poziom przygotowania uczestników pokazują, że jest wśród uczniów gimnazjum i wśród nauczycieli, wychowawców tych uczniów, zapotrzebowanie na podejmowanie intelektualnych wyzwań oraz poznawanie i rozwijanie swoich twórczych możliwości. Wśród zadań olimpijskich są łatwiejsze i takie, których rozwiązanie wymaga więcej wysiłku, uporu i pomysłowości. Spośród zadań I stopnia aktualnej edycji najłatwiejsze okazało się zadanie nr 3, a najtrudniejsze zadanie nr 6.

Oto te zadania.

Zadanie 3. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a + b + c + d = 101 \\ ab + cd = 200. \end{cases}$$

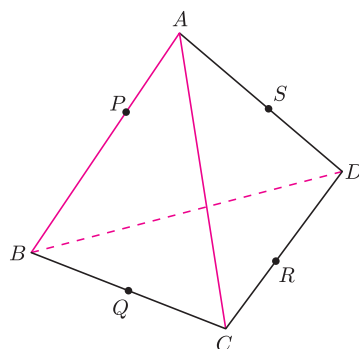
Wykaż, że dokładnie jedna z liczb a, b, c, d jest nieparzysta.

A to szkice ich rozwiązań.

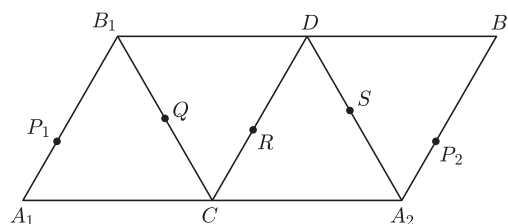
Zadanie 3. Z pierwszego równania wynika, że albo dokładnie jedna, albo dokładnie trzy spośród danych liczb są nieparzyste. Jeśli nieparzystych liczb jest 3, to wtedy liczba $ab + cd$ jest nieparzysta, co przeczy drugiemu równaniu. Wobec tego wśród danych liczb jest dokładnie jedna nieparzysta.

Zadanie 6. Czworoscian foremny o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną tak, że w przekroju otrzymano czworokąt. Jaki jest najmniejszy możliwy obwód tego czworokąta? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 6. Przekrojem czworoscianu jest czworokąt, więc płaszczyzna przecięła cztery krawędzie czworoscianu. Niech punkty P, Q, R, S będą położone na krawędziach czworoscianu, jak na rysunku 1. Rozetnijmy kolorowe krawędzie czworoscianu. Otrzymamy siatkę z rysunku 2.



Rys. 1



Rys. 2

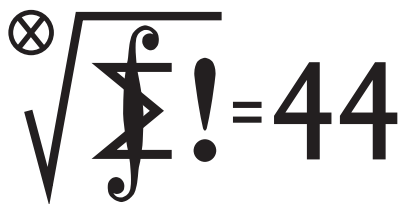
Czworokąt $A_1A_2B_2B_1$ jest równoległobokiem. Jeśli będziemy sklejać tę siatkę, aby otrzymać czworoscian, to skleimy wierzchołki A_1 i A_2 oraz B_1 i B_2 . Wówczas skleją się punkty P_1 i P_2 . Wobec tego czworokąt $A_1A_2P_1P_2$ jest równoległobokiem i $|P_1P_2| = |A_1A_2| = 2$.

Obwód łamanej zamkniętej $PQRSP$ (niekoniecznie płaskiej) jest równy długości łamanej $P_1QRS P_2$. Obwód ten będzie najmniejszy (równy 2), gdy punkty Q, R, S będą leżały na odcinku P_1P_2 . Wówczas odcinki PQ i RS będą równoległe do krawędzi AC , a więc będą leżały na jednej płaszczyźnie. Taki czworokąt $PQRS$ będzie czworokątnym przekrojem o najmniejszym obwodzie.

A może ktoś znajdzie inne, ciekawsze, bardziej pomysłowe, czy też ładniejsze rozwiązania?

Więcej informacji o OMG można znaleźć na jej stronie internetowej pod adresem www.omg.edu.pl

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2010

Lista uczestników ligi zadaniowej Klub 44M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
583 ($WT = 1,45$) i 584 ($WT = 1,54$)
z numeru 6/2009

Jerzy Cisło	6-44,31
Marek Prauza	3-42,39
Tomasz Warszawski	2-42,26
Zbigniew Galias	1-42,05
Tomasz Tkocz	1-41,42
Tomasz Wietecha	7-37,49
Witold Bednarek	4-36,92
Franciszek S. Sikorski	35,70
Wojciech Maciak	35,69
Bartłomiej Dyda	4-34,68
Łukasz Garncarek	1-33,48
Adam Woryna	2-32,71
Andrzej Daniluk	2-29,74
Jan Czardybon	29,57
Zbigniew Skalik	1-29,36
Jacek Jendrej	27,67
Joachim Jelisiejew	27,50
Joanna Bogdanowicz	26,02
Michał Kieza	3-23,58
Wojciech Świeboda	23,15
Paweł Łabędzki	23,04
Tomasz Choczewski	22,41
Michał Miodek	21,18
Andrzej Dorobisz	20,89
Piotr Żmijewski	1-20,21
Piotr Kumor	10-20,13

Legenda (przykładowo): stan konta
4-36,92 oznacza, że uczestnik już
czterokrotnie zdobył 44 punkty,
a w kolejnej (piątej) rundzie ma 36,92
punktów.

Listę otwiera **Jerzy Cisło**, który
zgrupował na swoim koncie 44 punkty
już po raz siódmy!

Zestawienie obejmuje wszystkich
uczestników ligi, którzy spełniają
następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie
wykonywanej rundzie) wynosi
co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej
jednego zadania z rocznika 2007, 2008
lub 2009.

Nie drukujemy więc nazwisk tych
uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy
lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli
ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić
do naszych matematycznych łamigłówek,
jego nazwisko automatycznie wróci na
listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44M (w kolejności
uzyskiwania statusu Weterana):
J. Janowicz (8), P. Kamiński (5),
M. Gałeczki (5), J. Uryga (4),
A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał,
T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk,
K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza,

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 595, 596

Redaguje Marcin E. KUCZMA

595. Na bokach AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$ odłożono odcinki AK, BL, CM, DN jednakowej długości. Dowieść, że jeżeli czworokąt $KLMN$ jest kwadratem, to także czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

596. Dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych m, n obliczyć największy wspólny dzielnik liczb $u = (n + 1)^m - n$ oraz $v = (n + 1)^{m+2} - n$.

Zadanie 596 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2009

Przypominamy treść zadań:

587. Dana jest liczba dodatnia $a \leq 1/2$. Określamy ciąg (x_n) wzorami:
$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - ax_n^2 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Dowieść, że ciąg (nx_n) jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

588. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ równanie

$$x^2 + xy + y^2 = 13^n$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y .

587. Funkcja $x \mapsto x(1 - ax)$ odwzorowuje przedział $(0; 1)$ w siebie, więc (x_n) jest ciągiem liczb dodatnich. Jest to ciąg malejący ($x_n - x_{n+1} = ax_n^2$), zatem zbieżny. Jego granica g spełnia równanie $g = g(1 - ag)$, czyli jest równa zero.

Weźmy pod uwagę ciąg (y_n) o wyrazach $y_0 = 1$,

$$y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Z przekształcenia

$$y_n = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \frac{ax_n^2}{x_n(x_n - ax_n^2)} = \frac{a}{1 - ax_n}$$

widąc, że $y_n \rightarrow a$. Zatem liczba a jest też granicą ciągu o wyrazach

$$\begin{aligned} \frac{y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}}{n} &= \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 + \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1} \right) \right) = \frac{1}{nx_n}. \end{aligned}$$

A to znaczy, że $nx_n \rightarrow 1/a$.

588. Przekształcenie liniowe $(x' = 4x + y, y' = -x + 3y)$ indukuje przekształcenie formy kwadratowej $Q(x, y) = x^2 + xy + y^2$:

$$Q(x', y') = (4x + y)^2 + (4x + y)(-x + 3y) + (-x + 3y)^2 = 13Q(x, y).$$

Para liczb $x_0 = 0, y_0 = 1$ spełnia równanie $Q(x_0, y_0) = 1$. Rekurencja $(x_{n+1} = 4x_n + y_n, y_{n+1} = -x_n + 3y_n)$ określa wobec tego ciąg par liczb (x_n, y_n) , spełniających równania $Q(x_n, y_n) = 13^n$.

* * *

P. Kumor (10), P. Gadziński (7),
 K. Jedziniak, J. Olszewski (11),
 L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (7),
 T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz,
 B. Dyda (4), M. Peczarzski, M. Adamaszek,
 P. Kubit (4), J. Cisło (7), W. Bednarek (4),
 D. Kurpiel, P. Najman (4), M. Kieza,
 M. Kasperski, K. Dorobisz (jeśli uczestnik
 przekroczył barierę 44 punktów więcej niż
 trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

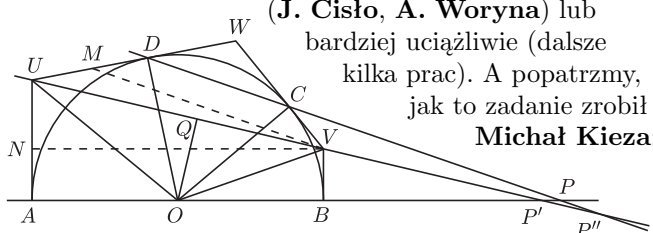
Pozostali członkowie Klubu 44M
 (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik,
 A. Daniluk, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak,
 T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka,
 J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski,
 R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy,
 S. Solecki, T. Warszawski, A. Woryna,
 G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński,
 M. Czerniakowska, A. Dzedzej, P. Figurny,
 M. Fiszer, Z. Galias, L. Garncarek,
 L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak,
 K. Hryniewiecki, A. Idzik, K. Jachacy,
 M. Jastrzębski, A. Józwiak, K. Kamiński,
 G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski,
 A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer,
 R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak,
 M. Łupieżowiec, J. Mańdziuk, B. Marczak,
 M. Marczak, M. Matłęga, R. Mazurek,
 H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek,
 R. Mitraszewski, M. Mostowski,
 W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska,
 W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz,
 A. Ruszel, Z. Sewartowski, Z. Skalik,
 A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk,
 W. Szymczyk, T. Tkocz, K. Trautman,
 P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zajac,
 Z. Zaus, K. Zawislowski, P. Żmijewski.

Zadanie 569 [Czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg;
 środek O , średnica AB ; $AB \cap CD = \{P\}$;
 $o(OBC) \cap o(ODA) = \{O, Q\} \Rightarrow OQ \perp PQ$]
 (współczynnik trudności $WT = 2,43$; liczba poprawnych
 rozwiązań $LPR = 12$). Ile prac, tyle metod. Tu się
 można było popisać erudycją: prosta biegunowa plus
 inwersja (**A. Dorobisz**), inwersja plus okrąg Feuerbacha
 (**J. Olszewski**), okrąg Feuerbacha plus twierdzenie
 Desargues’a (**K. Dorobisz**), osie potęgowe (firmowo).
 Można też było, całkiem elementarnie, przeprowadzić
 staranny rachunek na kątach – krótko i zgrabnie

(**J. Cisło, A. Woryna**) lub
 bardziej uciążliwie (dalsze
 kilka prac). A popatrzmy,
 jak to zadanie zrobił
Michał Kieza:



Styczne do danego okręgu w punktach
 A, B, C, D wyznaczają pięciokąt $ABVWU$ z kątami
 prostymi A i B (rysunek; przyjmujemy $|AU| > |BV|$).
 Odcinki OU i OV są średnicami okręgów ODA i OBC ;
 ich wspólna cięciwa OQ tworzy kąty proste
 z odcinkami QU, QV , więc $Q \in UV$ i wystarczy
 wykazać, że proste AB, UV, DC mają punkt
 wspólny. Niech $AB \cap UV = \{P'\}$, $DC \cap UV = \{P''\}$
 i niech $M \in UD, N \in UA$: $MV \parallel DC$,
 $NV \parallel AB$; wtedy $|UP'| : |UV| = |UA| : |UN|$,

Janusz Olszewski jest bohaterem tego sezonu ligi matematycznej. Jedenaście
 pełnych rund – jedenaście razy 44 punkty, absolutny rekord. Po pierwszych
 nadesłanych rozwiązaniach (5/1990) – uczestnictwo początkowo nieregularne,
 ze sporymi przerwami. Ale przez ostatnie parę lat rytm jest ustabilizowany:
 co dwanaście numerów – kolejne przekroczenie bariery 44. Serdecznie
 gratulujemy! Panie Januszu, tak dalej trzymać! Jeszcze mały wysiłek, trzy
 razy tyle, co dotąd, i będzie 44×44 .

Jedenaście to spora liczba. Jednak przegrywa z liczbą czternaście – a tyle rund ma
 na swym koncie inny, doskonale nam znany uczestnik **obu lig** – matematycznej
 i fizycznej, pan **Tomasz Wietecha**. W każdej po siedem rund. Imponujący
 wynik. Serdecznie gratulujemy! Dziękujemy za już, prosimy o jeszcze. I czekamy
 na godnych naśladowców pana Tomasza w dwuboju.

Teraz coś innego. Jeden z Czytelników wyraził w swoim liście prośbę „żeby
 omówienie nie przebiegało pod hasłem: co znowu spieprzył redaktor ligi”. Tak
 się fortunnie składa, że da się tę prośbę spełnić w sposób wręcz doskonały –
 pisząc mianowicie, co się redaktorowi udało *nie spartaczyć*. Otóż znalazło się
 wśród nadesłanych propozycji zadanie o wielościanie (ostrosłupie) mającym
 sferę wpisaną, spełniającą pewne warunki. Należało wykazać, że suma dwóch
 kątów spełnia jakąś nierówność.

Proponowany dowód był poprawny, zadanie znalazło uznanie, i dopiero na etapie
 korekty redaktor ligi spostrzegł, że jest w stanie również uzasadnić nierówność
 odwrotną. A także każdą inną tezę, bowiem założenia są sprzeczne; wielościan,
 spełniający podane warunki, nie istnieje. Zadanie zostało w ostatniej chwili
 wymienione – choć właściwie mogłoby pójść: od strony formalno-logicznej błędu
 przecież nie ma. Jednak chyba lepiej, że nie poszło.

I taka refleksja: jakby to było pięknie, gdyby redaktor ligi mógł przyrzec,
 że już nigdy żadnej pomyłki nie popełni... Jednak redaktor zdecydowanie
 odmawia związania się taką obietnicą i zamiast tego przechodzi do omówienia
 najciekawszych rozwiązań zadań, uogólnień rezultatów oraz uwag uczestników ligi.

zaś $|UP''| : |UV| = |UD| : |UM|$. Otrzymane
 stosunki są równe, bo $|UA| = |UD|$ oraz
 $|NA| = |VB| = |VC| = |MD|$. Zatem $P' = P''$.

Zadanie 571 [Pionki na płaszczyźnie kratowej; start –
 jeden pionek; ruchy – zastępowanie pionka przez dwa
 pionki na wolnych polach przyległych \Rightarrow istnieje zbiór
 skończony Z , w którym stale jakieś pole jest zajęte
 (im mniejszy Z , tym lepsze rozwiązanie)] ($WT = 2,71$;
 $LPR = 6(8?)$). Bez błędne dowody (**K. Dorobisz**,
A. Dzedzej, Z. Galias, J. Olszewski, W. Świeboda,
A. Woryna) identyczne z firmowym – niemające
 późniejszego: suma liczb $2^{-|i|-|j|}$ po zajętych polach
 (i, j) ; jeszcze dwie „zasadniczo dobre” prace z usterkami
 (niedopracowane uzasadnienia lub niedokładnie
 odczytana treść).

Ta metoda pozwala wskazać zbiór Z (o jaki chodzi), mający
 57 pól. Czy da się znaleźć mniejszy? **Krzysztof Dorobisz**
 zdołał zejść do 52, biorąc zbiór złożony z pól (i, j) , gdzie
 $|i| + |j| \leq 5$, z usuniętymi polami $(\pm 5, 0), (\pm 4, 0), (0, \pm 5),$
 $(0, \pm 4)$ oraz $(1, 4)$; uzasadnienie w szczegółach – uciążliwe.
 Ciekawe, jak wygląda minimalny taki zbiór Z ...

Zadanie 574 [Czworościan; sfery dopisane styczne do
 ścian w środkach okręgów wpisanych \Rightarrow czworościan
 foremny] ($WT = 2,64$; $LPR = 7$). Rozwiązanie
 firmowe (analiza kątów płaskich na ścianach), podane
 przez autora zadania (**M. Kieza**), znaleźli także:
J. Cisło, A. Dorobisz, T. Warszawski. Natomiast

K. Dorobisz, J. Olszewski, A. Woryna uzasadniają najpierw równość wszystkich kątów dwuściennych, a stąd już niedaleko do tezy.

Zadanie 576 [A, G – średnie (arytm., geom.) liczb $a, b, c \geq 0 \Rightarrow A - G \leq \max(u, v, w)$, gdzie $u = (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2, v = (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2, w = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$] ($WT = 1,55; LPR = 15$). Wielu uczestników dowodzi nierówności nieco mocniejszej: $A - G \leq (u + v + w)/3$. Inne ciekawe jej wzmocnienie wskazuje **Andrzej Daniluk** (bez pełnego dowodu, który wszelako łatwo uzyskać przez modyfikację rozwiązania firmowego): różnica $A - G$ leży między $1/3$ a $2/3$ liczby $\max(u, v, w)$.

Adam Woryna daje uogólnienie na n liczb $a_1, \dots, a_n \geq 0$:

$$\frac{1}{n} \sum a_i - \left(\prod a_i \right)^{1/n} \leq \max_{i < j} (\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2;$$

dowód za długi, by go tu przytoczyć.

Zadanie 578 [$a_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + \dots + (n-1)\sqrt{1+n}}}$; $\lim a_n = ?$] ($WT = 2,39; LPR = 8$). Bezbledne rozwiązania: **J. Cisło, A. Daniluk, P. Drobiński, K. Kamiński, J. Olszewski, T. Tkocz, A. Woryna** oraz **K. Dorobisz**. Poza ostatnim z wymienionych, wszyscy robili to podobnie, przy tym prościej niż w rozwiązaniu firmowym. Przy dość znacznych różnicach w opracowaniach – wspólna idea: rozważa się *dwie* nieskończone macierze $[b_{n,k}], [c_{n,k}]$ ($n \geq k \geq 1$), generowane przez jednakową zależność rekurencyjną

$$kb_{n,k} = b_{n,k-1}^2 - 1, \quad kc_{n,k} = c_{n,k-1}^2 - 1$$

oraz warunki brzegowe $b_{n,n} = 1, c_{n,n} = n + 2$; łatwo sprawdzić, że wówczas

$$b_{n,1} = a_n \quad \text{oraz} \quad c_{n,k} = k + 2 \quad \text{dla} \quad n \geq k \geq 1.$$

Jasne, że $1 < b_{n,k} < c_{n,k}$ dla $n > k \geq 1$. Różnymi sposobami można teraz szacować różnicę $d_{n,k} = c_{n,k} - b_{n,k}$, na przykład tak:

$$kd_{n,k} = (c_{n,k-1} + b_{n,k-1})d_{n,k-1} > (k+2)d_{n,k-1}.$$

Wymnażając te nierówności dla $k = 2, \dots, n$ (przy ustalonym $n \geq 4$), skracając co się da oraz uwzględniając związki $d_{n,n} = n + 1, 0 < d_{n,1} = 3 - a_n$, dostaje się dwustronne oszacowanie $3 - 6/(n+2) < a_n < 3$ i wynik $\lim a_n = 3$.

K. Kamiński zauważa, że (nieco ogólniej) $b_{n,k} \rightarrow k + 2$ przy $n \rightarrow \infty$ i ustalonym k .

Ciekawe uogólnienie znajduje **J. Olszewski**, dowodząc, że równanie funkcyjne $f(x)^2 = xf(x+b) + ax + (a+b)^2$ (ze stałymi $a, b \geq 0$) ma w klasie funkcji $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ jedyne rozwiązanie $f(x) = x + a + b$; wykorzystuje technikę zastosowaną w rozwiązaniu zadania ligowego, budując ciąg funkcji dany przez rekurencję $f_{n+1}(x)^2 = xf_n(x+b) + ax + (a+b)^2$.

Zadanie 580 [$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła, $\sum_{(x,y,z)\text{-cykl}} f(x+y+z) = 0 \Rightarrow f = ?$] ($WT = 2,55; LPR = 9$). Wszystkie rozwiązania podobne do firmowego. Na uwagę zasługuje elegancko dopracowane końcówki (**A. Woryna**) – po uzyskaniu równości $f(0) = 0$ oraz (*) $f(x) = -2f(f(x))$

mamy przypadki: gdy ciągła funkcja f jest nieograniczona z góry lub z dołu, to zbiór jej wartości zawiera przedział $(0; \infty)$ lub $(-\infty; 0)$ i wobec (*) zawiera też drugi z tych przedziałów; zatem f jest „na” i wzór (*) daje $f(x) = -x/2$. Gdy zaś f jest ograniczona i z góry i z dołu, to funkcja $h(x) = x + f(2x)$ jest „na”; wówczas wyjściowe równanie z $x = y = z$ daje $f(h(x)) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa zeru.

Można pytać o istotność założenia ciągłości f . Autor zadania, pan **Tomasz Tkocz**, zwrócił uwagę, że jeśli f spełnia zadane równanie, to funkcja $g(x) = f(x + f(-x))$ jest addytywna (co nietrudno sprawdzić, kładąc $z = -x - y$). Wiadomo, że bardzo słabe założenia o regularności funkcji addytywnej g gwarantują jej liniowość (skąd, znów nietrudno, choć nie natychmiast, $f(x) = -x/2$ lub $f(x) = 0$). Zatem każde założenie o funkcji f , które implikuje dowolne z owych „bardzo słabych założeń” o g , wystarczy dla tezy zadania (na przykład: f nierosnąca $\Rightarrow g$ nierosnąca $\Rightarrow g$ liniowa; itp.).

Autor zadania zwierzył się też, że inspirację pomysłu dała (znana w geometrii różniczkowej) tożsamość Jacobiego dla nawiasu Poissona:

$$\sum_{(F,G,H)\text{-cykl}} \{F, \{G, H\}\} = 0.$$

Zadanie 581 [$|X| = n \geq 4; A_1, \dots, A_m \subset X, m = 2^{n-2} + 1 \Rightarrow \exists i, j, k, l: |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| \leq 1$] ($WT = 3,31; LPR = 3$). Najtrudniejsze zadanie w tym sezonie. Dobre rozwiązania: **M. Kieza, J. Olszewski** (istota dowodu, jak w rozwiązaniu firmowym) oraz **A. Woryna** – odsyłacz do pracy P. Frankl, N. Tokushige, *Weighted 3-wise 2-intersecting families*, J. Comb. Th. (A) 100 (2002) (www.cc.u-ryukyu.ac.jp/~hide/publist.html), z rezultatów której wynika, że przy podanych założeniach istnieją wręcz *trzy* takie zbiory, że $|A_i \cap A_j \cap A_k| \leq 1$ (dowody w tej pracy mocno techniczne; liczne przypadki).

W kilku próbach rozwiązań ich autorzy wywodzą tezę ze stwierdzenia, że w „najbardziej niekorzystnej” konfiguracji jest, jak trzeba – tyle, że bez dowodu owej skrajnej niekorzystności. Uzupełnienie tej „ustereczki” to dokładnie tyle, co zrobienie zadania.

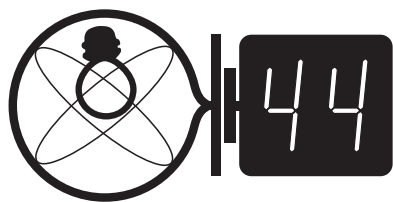
Zadanie 584 [$a, b, c > 0; U = \sum_{\text{cykl}} a^2b, V = \sum_{\text{cykl}} ab^2; A = a^3 + abc, B = b^3 + abc, C = c^3 + abc \Rightarrow \sqrt{UV} \geq abc + \sqrt[3]{ABC}$] ($WT = 1,54; LPR = 10$). Prawie wszystkie rozwiązania jak firmowe, mało frapujące. Z jednym wyjątkiem; oddajmy głos mistrzowi. **Janusz Olszewski**: z nierówności średnich dla trójek liczb ab^2, bc^2, ca^2 oraz $aB/b, bC/c, cA/a$ wychodzi, że $V \geq 3abc$ oraz $2V \geq 3\sqrt[3]{ABC}$, zatem prawa strona dowodzonej nierówności nie przekracza V ; przez symetrię nie przekracza też U , więc $i \sqrt{UV}$. (!!)

I jeszcze uogólnienie dla $a_1, \dots, a_n > 0$: jeśli $U = \sum_{i:\text{cykl}} a_i^l a_{i+1}^k, V = \sum_{i:\text{cykl}} a_i^k a_{i+1}^l, P = \prod_{i:\text{cykl}} a_i^{k+l}, Q = \prod_{i:\text{cykl}} (a_i^{k+l} + a_i^l a_{i+1}^{k-l} a_{i+2}^l)$, to

$$\min(U, V) \geq \frac{n}{3} \sqrt[n]{P} + \frac{n-1}{2} \sqrt[n]{Q}$$

(dowód tą samą metodą).

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2010

Zadania z fizyki nr 492, 493

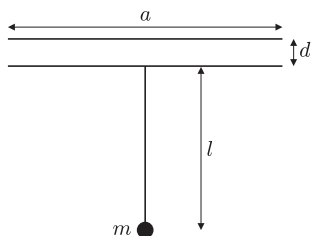
Redaguje Jerzy B. BROJAN

492. Pociąg o masie 500 ton został rozpędzony na drodze 300 m od spoczynku do prędkości 20 m/s przez lokomotywę, której moc była stała. Oblicz wartość tej mocy.

493. Siłomierz waży 1 N i daje dokładne wskazania, gdy jest w pozycji poziomej. Gdy zawieszono go za jeden koniec, wskazanie siłomierza było równe F_1 , a gdy za drugi, wskazanie było równe F_2 . Czy zawsze musi być spełnione równanie $F_1 + F_2 = 1$ N?

Rozwiązania zadań z numeru 10/2009

Przypominamy treść zadań:



484. Okładki kondensatora są prostokątami o wymiarach a i b , a odległość między ich środkami jest równa d , przy czym $d \ll a$, $d \ll b$. Górna okładka jest pozioma i nieruchoma, a dolna może się obracać wokół osi równoległej do boku b i przechodzącej przez jej środek. Dolna okładka jest sztywno połączona z prętem o długości l , na końcu którego znajduje się ciężarek o masie m (rysunek). Naładowano kondensator do napięcia U . Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby pionowe położenie pręta (kiedy okładki są równoległe) było położeniem równowagi trwałej?

485. Mamy trzy jednakowe ciała, których ciepło właściwe jest stałe (nie zależy od temperatury), a temperatury wynoszą 100 K, 200 K i 300 K. Do jakiej maksymalnej temperatury można ogrzać jedno z tych ciał, jeśli energia przepływa tylko między nimi, przy czym możemy wykorzystywać maszyny cieplne?

484. Wprowadźmy kąt przechyłu dolnej okładki δ oraz współrzędną poziomą x ($-a/2 < x < a/2$). Jeśli kąt δ jest mały, to natężenie pola elektrycznego kondensatora jest lokalnie takie, jak dla kondensatora płaskiego o odległości okładek równej $d - x\delta$, czyli

$$E = \frac{U}{d - x\delta} \approx \frac{U}{d} \left(1 + \frac{x\delta}{d} \right).$$

Gęstość powierzchniowa ładunku na okładce jest opisana wyrażeniem $\sigma = \epsilon_0 E$, a siłę dF działającą ze strony górnej okładki na jednostkę powierzchni dS dolnej znajdziemy, mnożąc σ przez natężenie pola jednej okładki (czyli $E/2$). Z dokładnością do wyrazów liniowych w δ ,

$$\frac{dF}{dS} = \frac{\epsilon_0 U^2}{2d^2} \left(1 + \frac{2x\delta}{d} \right).$$

Moment siły działającej na dolną okładkę M obliczymy drogą całkowania

$$M = \int_{-a/2}^{a/2} b \frac{dF}{dS} x dx = \frac{\epsilon_0 b U^2 a^3 \delta}{12d^3}.$$

Zwrot tego momentu sprzyja wzrostowi kąta δ , zatem równowagę trwałą może zapewnić większy moment siły ciężkości ciężarka na końcu pręta. Jest on równy $mgl\delta$, więc szukany warunek równowagi trwałej ma postać

$$12mgl\delta^3 > \epsilon_0 b U^2 a^3.$$

485. Oznaczmy temperatury początkowe jako T_1 , T_2 i T_3 , a końcowe jako T'_1 , T'_2 i T'_3 . Przy jednakowych i stałych ciepłach właściwych z zasady zachowania energii wynika równanie

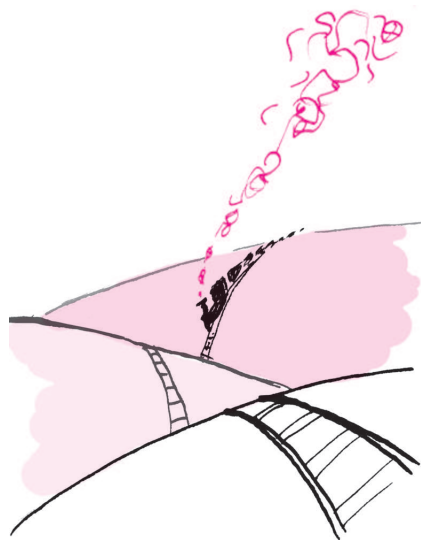
$$T_1 + T_2 + T_3 = T'_1 + T'_2 + T'_3.$$

Podczas działania doskonałej maszyny cieplnej kontaktującej się z termostatami o temperaturach T_1 i T_2 spełniona jest nierówność

$$\frac{dQ_1}{T_1} \geq -\frac{dQ_2}{T_2},$$

a uzyskana energia (praca silnika) może być zmagazynowana w celu zasilania następnej maszyny cieplnej. Przy wymienionych poprzednio założeniach dochodzimy do nierówności

$$\frac{dT_1}{T_1} \geq -\frac{dT_2}{T_2},$$



Rozwiązanie zadania M 1269.

Jeśli liczby $2n^2 + 1$, $3n^2 + 1$ oraz $6n^2 + 1$ są kwadratami liczb całkowitych, to także liczby $(2n^2 + 1) \cdot 9n^2 = 18n^4 + 9n^2$ oraz $(3n^2 + 1)(6n^2 + 1) = 18n^4 + 9n^2 + 1$ są kwadratami liczb całkowitych. Jednak dwie kolejne liczby całkowite dodatnie nie mogą być jednocześnie kwadratami liczb całkowitych. Otrzymaliśmy sprzeczność.

równoważnej nierówności $d(\ln(T_1)) \geq -d(\ln(T_2))$. Zatem $d(T_1 T_2) \geq 0$, tzn. iloczyn temperatur jest funkcją niemalejącą. Gdy maszyna cieplna kontaktuje się z trzema termostatami, ostatecznym wnioskiem jest nierówność

$$T_1 T_2 T_3 \leq T'_1 T'_2 T'_3.$$

Pozostaje nieco matematyki – należy wykazać, że maksymalna wartość jednej z temperatur (np. T'_3) występuje wtedy, gdy nierówność przechodzi w równość (tzn. stosujemy idealne maszyny cieplne), a pozostałe dwie temperatury są sobie równe. Otrzymujemy równanie III stopnia względem T'_3 , a więc podamy tylko rozwiązanie numeryczne: $T'_3 = 330,5$ K.

* * *

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44F
po 481 zadaniach

Krzysztof Magiera (Łosiów)	1 – 35,98
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	2 – 28,18
Michał Koźlik (Gliwice)	25,50
Radosław Poleski (Kołobrzeg)	23,47
Jacek Konieczny (Poznań)	19,16
Jerzy Witkowski (Radlin)	2 – 16,54
Ryszard Woźniak (Kraków)	13,77

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2007–2009 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 10 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (9), T. Wietecha (7), J. Łazuka, M. Wójcicki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44F (alfabetycznie):

„dwukrotni”:

J. Lipkowski, A. Nowogrodzki,
P. Perkowski, J. Witkowski;

„jednokrotni”:

A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias,
A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak,
K. Kapcia, K. Magiera, B. Mikielwicz,
L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski,
T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach,
L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.

Jak co roku, przyjrzyjmy się rozwiązaniom przysłanym przez Czytelników (a także pomyłkom redaktora rubryki).

Zadanie 466 [Hamowanie metra i pomiar czasu] (współczynnik trudności $WT = 1,03$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 10$). Wartość WT , a także rekordowo duża (jak na ligę fizyczną) liczba poprawnych rozwiązań wskazują, że zadanie było bardzo łatwe. Zapewne nie należy się temu dziwić, gdyż wzory na ruch jednostajnie zmienny należą do najbardziej oklepanych w fizyce szkolnej. Niezbędne przekształcenia algebraiczne były jednak nieco uciążliwe; ciekawe, że akurat to nie sprawia naszym Czytelnikom trudności, chociaż zupełnie elementarne zadania wymagające jakościowego opisu różnych zjawisk fizycznych nie cieszą się taką popularnością.

Zadanie 467 [Obrót chmury elektronowej w polu magnetycznym] ($WT = 2,71$, $LPR = 5$). Spośród dobrych rozwiązań należy wyróżnić nadesłane przez p. **Tomasza Wietechę** – jedyne, w którym pole magnetyczne chmury zostało wzięte pod uwagę. Jego indukcja została nawet obliczona ściśle, choć wystarczyło tylko zauważyć, że wobec podanego założenia o nierelatywistycznym ruchu elektronów jest ono znacznie słabsze od pola zewnętrznego.

Zadanie 471 [Wzbudzenie obrotu naładowanego pręta przez włączenie przepływu prądu w zwojnicy] ($WT = 1,75$, $LPR = 2$). W rozwiązaniu firmowym pominięto powrotny strumień pola magnetycznego na zewnątrz zwojnicy, co dla danych wartości liczbowych było raczej uzasadnione, ale zasługiwało na dyskusję. Dobre rozwiązania nadesłali **J. Witkowski** i **M. Koźlik**, a także **T. Wietecha** – to trzecie jednak było spóźnione i z tego względu nie zostało zaliczone do punktacji.

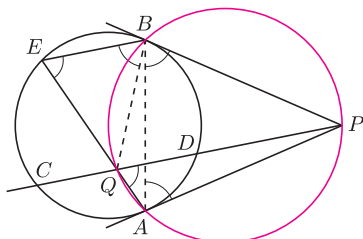
Zadanie 472 [Jakościowy wybór skali elektroskopu] ($WT = 1,90$, $LPR = 5$). W rozwiązaniu firmowym ukryło się przeoczenie tak banalne, że aż zawstydzające – pominięcie zależności siły Coulomba od odległości między prętem a różnymi częściami listka. Uwzględnienie tego elementu dałoby zależność między ładunkiem elektroskopu q a kątem odchylenia listka φ w postaci

$$q^2 \sim \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi},$$

czyli w pobliżu $\varphi = 0$ skala elektroskopu powinna być „rozsunięta”. Sporo jest tu jednak punktów wątpliwych, przede wszystkim – jak silna jest zależność od φ rozkładu ładunków na pręcie i listku? A czy grubość listka i pręta nie łagodzi wzrostu siły Coulomba dla małych φ na tyle, że w praktyce podany przez autora wybór skali jest może jednak prawidłowy? Nie da się ukryć, że zadanie było trudne, a rozwiązanie firmowe – niedopracowane, poczucie sprawiedliwości nakazuje więc pobłażliwość wobec niepewnych elementów w pracach Czytelników.



Rozwiązanie zadania M 1268.
Oznaczmy przez Q punkt przecięcia prostych AE i CD .



Wówczas

$$\sphericalangle AQP = \sphericalangle AEB = \sphericalangle ABP,$$

skąd wynika, że punkty A, P, B, Q leżą na jednym okręgu. Ponadto $AP = BP$, więc $\sphericalangle BAP = \sphericalangle ABP$. Wobec tego

$$\sphericalangle BEQ = \sphericalangle AQP = \sphericalangle BAP = \sphericalangle PQB = \sphericalangle EBQ.$$

Zatem punkt Q leży na symetralnej odcinka EB . Symetralna ta przechodzi przez środek okręgu i jest jednocześnie prostą CD . Zatem symetralna odcinka BE jest także symetralną odcinka CD . Stąd wniosek, że punkt Q jest środkiem odcinka CD .



Rozwiązanie zadania F 757.
Oświetlenie E obrazu jest równe stosunkowi strumienia świetlnego Φ przechodzącego przez soczewkę do powierzchni obrazu S . Po złożeniu soczewki na pół jej powierzchnia zmniejszy się dwukrotnie, i tak samo zmniejszy się strumień światła przez nią przechodzący.

Pole powierzchni obrazu także się zmieni. Promień obrazu Słońca wynosi $r = F \operatorname{tg} \alpha/2$, gdzie F jest ogniskową soczewki, a α średnicą kątową Słońca. Ponieważ α jest bardzo małe, około $30'$, więc $r \approx F\alpha/2$. Po rozcięciu i złożeniu dwóch wypukłych części ogniskowa układu zmniejszy się dwukrotnie, i tak samo zmniejszy się promień obrazu Słońca. Zatem powierzchnia obrazu będzie cztery razy mniejsza.

Stosunek oświetleń wynosi ostatecznie:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\Phi_2 S_1}{\Phi_1 S_2} = 2.$$

Patrz w niebo: Supergromady galaktyk

Największymi obecnie obserwowanymi skupiskami materii są supergromady galaktyk, czyli gromady gromad. O ile gromady galaktyk są często obiektami wyraźnie widocznymi (oczywiście na zdjęciach), to oznaczenie, np. na mapie nieba, granic supergromad nie jest łatwe. Jeżeli nawet takie granice jakoś się oznaczy, to i tak trzeba pamiętać, że na zdjęciach widzimy tylko rzuty galaktyk na sferę niebieską, podczas gdy chciałoby się poznać przestrzenny rozkład materii we Wszechświecie. Jest to wykonalne, jednak wymaga znacznie większego nakładu pracy, gdyż trzeba tu żmudnych wyznaczeń odległości tysięcy galaktyk na podstawie pomiarów ich prędkości radialnych.

W wyniku tych prac zarysowuje się już od lat obraz rozkładu materii we Wszechświecie w największej skali. Od lat 80. ubiegłego wieku znany jest Wielki Atraktor, tj. skupisko gromad galaktyk na południowej półkuli nieba z centrum w gwiazdozbiornie Węgielnicy. W przybliżeniu też od tego czasu znamy Wielki Mur (*Great Wall*), czyli ogromne pasmo gromad ciągnące się z grubsza w płaszczyźnie równika niebieskiego od Hydry do Wężownika, a w przestrzeni w odległości 100 Mpc. Wreszcie, w bieżącym już wieku, wyodrębniono *Sloan Great Wall*, pasmo gromad galaktyk usytuowane na niebie podobnie, choć jest krótsze (od Hydry do Panny) i położone w odległości 300 Mpc. *Sloan Great Wall* byłby największą strukturą zaobserwowaną we Wszechświecie, aczkolwiek jest wysoce niepewne, czy w ogóle stanowi on „obiekt” w potocznym znaczeniu tego słowa. Jest bowiem tak wielki, że trudno mówić o grawitacyjnej więzi między np. jego końcami.

Mechanizm powstawania takich struktur to obecnie jeden z najciekawszych problemów w kosmologii. Nie ulega wątpliwości, że są one wynikiem działania co najmniej dwóch procesów: grawitacyjnego kondensowania się materii oraz ekspansji Wszechświata. Nie wiadomo, czy te Wielkie Mury aktualnie kondensują się, czy rozpadają, nie wiadomo, jaki jest ich związek z niejednorodnościami promieniowania tła, itd. Prace są w toku.

Tomasz KWAST

Luty

W lutowe wieczory dominuje na niebie wspaniały Orion i chyba nikt, zwłaszcza mając w ręce lornetkę, nie oprze się chęci przejrzenia obszaru tego gwiazdozbioru. Niemal w zenicie jest teraz Woźnica, gwiazdozbiór mniejszy i nie tak okazały, ale wart, by nań również skierować lornetkę, gdyż przebiega przez niego Droga Mleczna. W obszarze ograniczonym do wielokąta wyznaczonego przez jego najjaśniejsze gwiazdy znajdziemy co najmniej sześć gromad otwartych. Gromady otwarte w Drodze Mlecznej w ogóle występują obficie, tu jednak tworzą wyjątkowe skupisko. Ich jasności zawierają się między granicznym zasięgiem nieuzbrojonego oka (umownie 6 mag), a w przybliżeniu 10 mag. Bardzo zróżnicowana jest też liczebność zawartych w nich gwiazd, od kilkunastu do setek. Ich odległości to co najmniej kiloparsek. Oczywiście, w całej okazałości widać je dopiero na dostatecznie długo naświetlanych zdjęciach. Najjaśniejsza gwiazda całego gwiazdozbioru (Capella – alfa Woźnicy) jest typu widmowego zbliżonego do słonecznego, jest jednak innej klasy jasności – dlatego przy zbliżonej temperaturze powierzchniowej ma rozmiary 17 razy większe, a moc 150 Słońc. Ma zresztą też małego towarzysza (w odległości 0,74 j.a.).

Wenus jest w Wodniku, czyli zbyt blisko Słońca, aby było ją widać. To samo tyczy się Jowisza (28 II ma złączenie ze Słońcem). Mars natomiast jest w Raku i wieczorem jest na niebie całkiem wysoko. Wreszcie koło północy wschodzi Saturn. Nów Księżycy wypada 14 II, pełnia zaś 28 II. Księżyc zakryje Antaresa 7 II, co będzie widać na północnym Pacyfiku, Morzu Beringa i na Alasce. Żadnych zaćmień w lutym nie będzie. Nie będzie też przewidywalnych rojów meteorów. Wprawdzie w Bliźniętach, doskonale widocznych w lutowe wieczory, znajduje się radiant Geminidów, ale rój ten maksimum aktywności ma w grudniu.

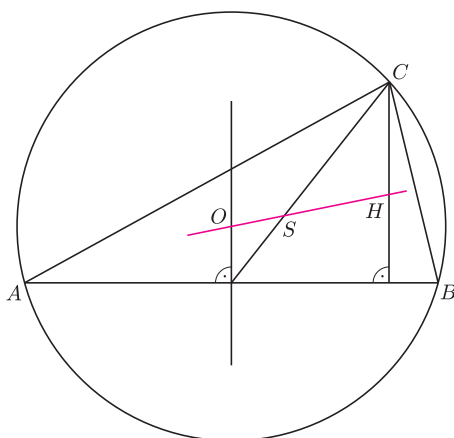
T. K.



Jednokładność \mathcal{J}_O^k o środku O i skali $k \neq 0$ to przekształcenie geometryczne płaszczyzny, które punktowi A przypisuje punkt $A' = \mathcal{J}_O^k(A)$ spełniający warunek $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

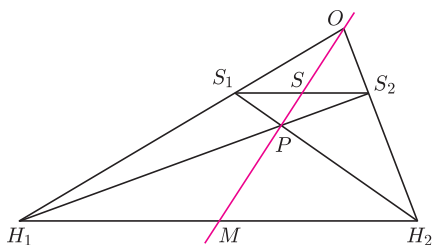
Środek ciężkości trójkąta to punkt przecięcia środkowych, dzieli on każdą z nich w stosunku $2 : 1$, licząc od wierzchołka.

Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia wysokości.



Rys. 1. Prosta Eulera.

Zadanie o trapezie. Przekątne trapezu $H_1H_2S_2S_1$ przecinają się w punkcie P , przedłużenia zaś ramion H_1S_1 i H_2S_2 w punkcie O . Wykaż, że prosta OP przechodzi przez środki podstaw trapezu.



Rys. 2

R. Oznaczmy przez M i S punkty przecięcia prostej OP z podstawami odpowiednio H_1H_2 i S_1S_2 (rys. 2). Podstawa H_1H_2 wraz z punktem M jest obrazem podstawy S_1S_2 z punktem S w pewnej jednokładności prostej o środku O , a także w pewnej jednokładności odwrotnej o środku P . Stąd $H_1M/H_2M = S_1S/S_2S$ oraz $H_1M/H_2M = S_2S/S_1S$. Zatem $S_1S/S_2S = S_2S/S_1S$, czyli $S_1S = S_2S$, więc też $H_1M = H_2M$. \square

Zadanie o 20 prostych Joanna JASZUŃSKA

Często w zadaniach geometrycznych należy wykazać, że w jednym punkcie przecinają się pewne trzy proste, czasem – że nieskończenie wiele. Tym razem zadanie chyba dość nietypowe, bo polegające na wykazaniu, że pewnych 20 prostych ma wspólny punkt.

Najpierw jednak dwa fakty pomocnicze: twierdzenie o prostej Eulera i zadanie o trapezie. W ich dowodach przydadzą się jednokładności, o których była mowa w poprzednim *deltoidzie*.

Twierdzenie o prostej Eulera. W trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, punkt S jest środkiem ciężkości, a punkt H jest ortocentrum. Wówczas punkty O, S, H leżą, w tej właśnie kolejności, na jednej prostej, zwanej *prostą Eulera* (rys. 1). Ponadto zachodzi równość $SH = 2 \cdot SO$.

Dowód. Rozważmy jednokładność o środku w punkcie S i skali -2 . Obrazem środka boku AB jest wierzchołek C trójkąta. Stąd obrazem symetralnej boku AB jest prosta do niej równoległa (więc prostopadła do AB) i przechodząca przez C , czyli wysokość CH trójkąta. Analogicznie jest dla pozostałych symetralnych, więc obrazem ich punktu przecięcia O jest punkt przecięcia wysokości H . Wobec tego punkty O, S, H leżą na jednej prostej, w tej kolejności (bo skala jednokładności jest ujemna) oraz $SH = 2 \cdot SO$. \square

Zadanie o 20 prostych. Na okręgu danych jest sześć punktów. Wybieramy pewne trzy z nich i przez H_1 oznaczamy ortocentrum wyznaczonego przez nie trójkąta T_1 , przez S_2 zaś – środek ciężkości trójkąta T_2 wyznaczonego przez pozostałe trzy z danych punktów. Udowodnij, że wszystkie możliwe otrzymane w ten sposób proste H_1S_2 przechodzą przez pewien ustalony punkt.

R. Oznaczmy dodatkowo przez S_1 środek ciężkości trójkąta T_1 , zaś przez H_2 ortocentrum trójkąta T_2 . Zauważmy, że dany okrąg jest opisany na obu rozważanych trójkątach. Zatem jego środek O oraz punkty S_1 i H_1 leżą na prostej Eulera, w tej właśnie kolejności, i $S_1H_1 = 2 \cdot S_1O$; analogicznie dla O, S_2, H_2 .

Skoro

$$\frac{S_1H_1}{S_1O} = 2 = \frac{S_2H_2}{S_2O},$$

to, z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, $H_1H_2S_2S_1$ jest trapezem. Środek ciężkości S wszystkich sześciu danych punktów jest środkiem odcinka S_1S_2 . Oznaczmy P – punkt przecięcia S_1H_2 z S_2H_1 oraz M – środek odcinka H_1H_2 . Z zadania o trapezie wiemy, że punkty O, S, P i M leżą na jednej prostej. Wobec tego mamy sytuację jak na rysunku 2.

Z twierdzenia Talesa

$$\frac{H_1H_2}{S_1S_2} = \frac{OH_1}{OS_1} = 3,$$

zatem $\mathcal{J}_P^{-3}(S_1S_2) = H_2H_1$ oraz $\mathcal{J}_O^3(S_1S_2) = H_1H_2$. Stąd $PM = 3 \cdot PS$ oraz $OM = 3 \cdot OS$, więc

$$PS = \frac{1}{4} \cdot SM = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot OS, \quad \text{czyli} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{OS}.$$

Zatem położenie punktu P , przez który przechodzi prosta H_1S_2 , zależy tylko od punktów S i O , a nie od początkowego wyboru wierzchołków trójkąta T_1 . \square

Prostych jest rzeczywiście 20, gdyż każda odpowiada wyborowi pewnej trójki z sześciu punktów, co można zrobić na $\binom{6}{3} = 20$ sposobów.