


SPIS TREŚCI NUMERU 1 (428)

Przez 32 <i>Jakub Radoszewski</i>	str. 1
Jeszcze jeden wzór na pole trójkąta <i>Andrzej Wrzesień</i>	str. 3
Dawne miary	str. 4
W lunaparku <i>Krzysztof Turzyński</i>	str. 6
Konkurs zadań astronomicznych	str. 8
Zobaczyć chaos: czar obliczeń dwójkowych <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 9
 Labirynt <i>Krzysztof Piecuch</i>	str.12
Aktualności	str.13
Oszacowanie sumy długości przekątnych <i>Martha Ubik</i>	str.14
Kącik przestrzenny: Metoda siatek <i>Michał Kieza</i>	str.16
 Zadania	str.17
 Doświadczenia z elastyczną kulą wodną (część 2) <i>Stanisław Bednarek</i>	str.18
Informatyczny kącik olimpijski (26): Posłańcy <i>Tomasz Kulczyński</i>	str.20
 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.21
Klub 44	str.22
Patrz w niebo: Woda poza Ziemią	str.24
Styczeń	str.24
 Jednokładności <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okladki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-639-73-67)

internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2010 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2010 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 0-804-200-600

Cena prenumeraty w 2010 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

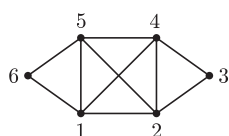
Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

W następnym numerze:
Jaka logika jest intuicyjna

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł



Rys. 1

We współczesnej informatyce szeroko rozumiana kwestia efektywności odgrywa niebagatelną rolę. Jest to związane z koniecznością operowania na coraz większych ilościach danych przy jednoczesnym uwzględnieniu wzrastających wymagań użytkowników względem szybkości i jakości usług – bodaj najlepszą, ale na pewno nie jedyną, ilustracją tego zjawiska jest Internet. Dlatego też informatycy na wszelkie sposoby starają się przyspieszać tworzone aplikacje. Stosowane są do tego zasadniczo dwa podejścia: „bardziej teoretyczne”, polegające na zmniejszaniu złożoności czasowych i pamięciowych wykorzystywanych algorytmów, a w ostateczności stałego czynnika w złożoności (patrz np. artykuł *Średnio lepiej* w *Delcie* 12/2009), oraz „bardziej praktyczne”, w którym projektuje się coraz to wydajniejsze procesory, łączy istniejące procesory w większe zespoły, powiększa pamięci podręczne i dyskowe, zwiększa przepustowości łączy sieciowych etc. (o skali tego zjawiska można przeczytać w artykule o mikroprocesorach w *Delcie* 5/2009). W tym artykule zaprezentujemy metodę optymalizacji programów, która w tej klasyfikacji znajduje się gdzieś pośrodku.

Nasze rozważania będą opierać się na pewnym dosyć prostym problemie grafowym. Dany jest graf nieskierowany G , mający n wierzchołków oraz m krawędzi. Naszym zadaniem jest zliczenie w tym grafie wszystkich *trójkątów*, czyli takich trójek wierzchołków u, v, w , że istnieją wszystkie krawędzie: z u do v , z v do w i z u do w . Na przykład, graf z rysunku 1 zawiera sześć trójkątów.

Najprostszy algorytm rozwiązujący opisany problem polega na rozważeniu wszystkich trójek wierzchołków; łatwo zauważyć, że można go zaimplementować w złożoności czasowej $O(n^3)$. Powstaje pytanie, czy da się to jakoś poprawić. Intuicja podpowiada, że powinno się dać – źródłem takiej intuicji może być pierwsze zadanko (nie)informatyczne z *Delty* 8/2009, w którym pokazano, jak zliczać w grafie naraz wszystkie trójkąty i antytrójkąty (czyli trójki wierzchołków, z których żadne dwa nie są połączone krawędzią) w czasie $O(n^2)$. Niestety, po chwili namysłu można dojść do wniosku, że podana tam sztuczka nie zadziała w przypadku zliczania samych trójkątów. Innym z podejść jest uzależnienie złożoności czasowej konstruowanego algorytmu od m , a nie – lub w mniejszym stopniu – od n . I tak, znane jest rozwiązanie problemu trójkątów o złożoności czasowej $O(m^{\frac{3}{2}})$ (przy naturalnym założeniu, że $n = O(m)$), które w przypadku grafów rzadkich ($m = O(n)$) jest istotnie lepsze od powyższego, lecz dla grafów gęstych ($m = \Theta(n^2)$) jego przewaga znika. Nas jednak takie manipulacje nie będą tym razem interesować – powiedzmy, że poszukujemy algorytmu, którego złożoność czasową możemy oszacować tylko za pomocą n . W dalszej części tekstu skonstruujemy algorytm, który w pewnym sensie spełnia postawione wymagania.

Nasz graf będziemy reprezentować za pomocą macierzy sąsiedztwa, czyli dwuwymiarowej tablicy t , w której $t[i][j]$ jest jedynką, jeśli w G istnieje krawędź łącząca wierzchołki i oraz j , a zerem w przeciwnym przypadku. Zakładając, że wierzchołki G są ponumerowane od 0 do $n - 1$, opisany na wstępie podstawowy algorytm zliczania trójkątów można zapisać tak:

```

w := 0;
for i := 0 to n - 1 do
  for j := 0 to n - 1 do
    if (t[i][j]) then
      for k := 0 to n - 1 do
        if (t[i][k] and t[j][k]) then
          w := w + 1;
return w;

```

W powyższym pseudokodzie zastosowaliśmy konwencję traktującą wartość 1 w tablicy jako prawdę, a 0 jako fałsz (jest to popularne w wielu językach programowania). Co prawda, konwencja ta sama w sobie ani trochę nie przyspiesza rozwiązania, jednakże naprowadza nas na istotne spostrzeżenie, że cała tablica t



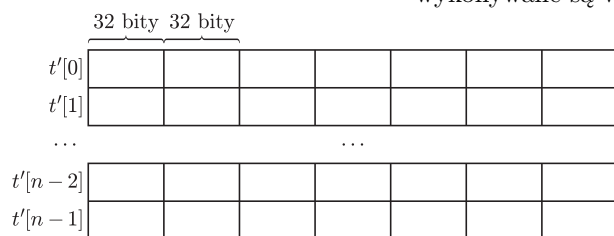
Rozwiązanie zadania M 1264.

Wykażemy, że w ciągu x_1, x_2, \dots występuje liczba parzysta.

Przypuścimy, że wszystkie liczby x_1, x_2, \dots są nieparzyste. Różnice między nimi są parzyste, a więc każda z tych liczb ma w zapisie dziesiętnym pewną niezerową cyfrę parzystą.

Niech $x_1 = \overline{a_1 a_2 \dots a_m}$ oraz niech j będzie najmniejszą liczbą, dla której cyfra a_j jest parzysta i różna od 0. Ponieważ każdy następny wyraz ciągu powstaje poprzez dodanie do poprzedniego liczby większej od 0 i mniejszej niż 10, więc dla pewnego k otrzymamy liczbę $x_k = \overline{b_1 b_2 \dots b_m}$, gdzie $b_i = a_i$ dla $i < j$, $b_j = a_j + 1$, $b_i = 0$ dla $j < i < m$; liczba b_m jest, oczywiście, nieparzysta. To oznacza, że liczba x_k ma w zapisie dziesiętnym jedynie cyfry nieparzyste i zera. Wobec tego liczba x_{k+1} musi być parzysta.

wypełniona jest tak naprawdę wartościami logicznymi. Jest ono istotne dlatego, że takie jednobitowe wartości w informatyce samodzielnie występują stosunkowo rzadko. Faktycznie, zazwyczaj bity grupuje się co najmniej w bajty, jeżeli nie w czwórki bajtów (najpopularniejsze obecnie liczby całkowite 32-bitowe), ósemki itd., a dopiero na takich większych paczkach w procesorze wykonywane są wszystkie interesujące nas operacje.



Rys. 2

Idąc za tą sugestią, możemy trochę lepiej „upakować” tablicę t , na przykład w ten sposób, że podzielimy każdą jej wiersz $t[i]$ nie na pojedyncze bity, ale na paczki po $B = 32$ bity (rys. 2). Każdy wiersz otrzymanej tablicy t' będzie się składał wówczas z $\lceil \frac{n}{B} \rceil$ takich paczek, przy czym wartość logiczną odpowiadającą $t[i][j]$ w starej tablicy można odnaleźć w nowej jako bit o numerze $j \bmod B$ w paczce bitów $t'[i][j \text{ div } B]$ (tutaj **div** i **mod**

oznaczają odpowiednio iloraz i resztę z dzielenia). Ponieważ – co może być dla Czytelnika nieco zaskakujące – w większości popularnych języków programowania wartości logiczne pamiętane są w zmiennych jednobajtowych (a nie jednobitowych!), więc w ten sposób udało nam się choć trochę zmniejszyć zapotrzebowanie algorytmu na pamięć. Dużo bardziej zaskakujące jest jednak to, że przedstawiona modyfikacja tablicy t pozwala istotnie zredukować czas działania rozwiązania.

Aby to zauważyć, przyjrzyjmy się najbardziej wewnętrznej pętli **for**. Otóż przeglądamy w niej równoległe kolejne pola wierszy $t[i]$ oraz $t[j]$ i zwiększamy wynik wtedy, gdy natrafimy na parę pól zawierających jedynek. Przy nowej reprezentacji tablicy możemy to wykonać trochę efektywniej: zamiast obliczać koniunkcje logiczne pojedynczych par bitów, będziemy to robić na całych paczkach B -bitowych naraz. Korzystamy tu z faktu, iż działanie **and** przedłuża się we wszystkich bodaj językach programowania na działanie na liczbach całkowitych „po bitach”, które to działanie z kolei stanowi pojedynczą instrukcję standardowych procesorów. Oto pseudokod takiego rozwiązania:

```
w := 0;
for i := 0 to n - 1 do
  for j := 0 to n - 1 do
    if (t'[i][j div B] and 2j mod B) then
      for k := 0 to  $\lceil \frac{n}{B} \rceil - 1$  do
        w := w + zapalone_bity(t'[i][k] and t'[j][k]);
return w;
```

W stosunku do poprzedniego pseudokodu zmienił nam się, po pierwsze, warunek w pierwszej instrukcji **if**. Na szczęście jego nowa postać daje się łatwo zrealizować za pomocą pojedynczych operacji arytmetycznych oraz logicznych: koniunkcji i przesunięcia bitowego.

A zatem pozostała nam już tylko jedna niewyjaśniona kwestia, a mianowicie implementacja zliczania zapalonych bitów (czyli jedynek) w liczbie całkowitej. Okazuje się, że w niektórych wariantach języków programowania po prostu mamy do dyspozycji odpowiednią funkcję, np. `_builtin_popcount` w kompilatorach z rodziny GCC (języki C/C++). Jeśli jednak nie mamy tyle szczęścia, zawsze możemy wykorzystać metodę zwaną *tablicowaniem*. Polega ona na tym, że jeszcze przed uruchomieniem całego algorytmu obliczamy tablicę *bity*, która dla każdej liczby całkowitej D -bitowej k przechowuje liczbę zapalonych bitów w k . Wartość D dobieramy tak, aby tablica ta była stosunkowo niewielka, żeby dało się ją szybko wypełnić wartościami najprostszą możliwą metodą, czyli przeglądając kolejne bity poszczególnych liczb D -bitowych – dobrym kandydatem jest np. $D = 16$. Mając do dyspozycji tablicę *bity*, możemy dokończyć rozwiązanie na dwa sposoby: najprościej, tzn. zmniejszając w całym rozwiązaniu wartość parametru B do 16 (wówczas obliczenie wartości funkcji `zapalone_bity` sprowadza się do pojedynczego odwołania do tablicy *bity*), albo utrzymując wartość $B = 32$, ale każdorazowo dzieląc liczby, których zapalone bity chcemy zliczyć, na połowki odpowiadające

W językach programowania występują dwa typy przesunięć bitowych – w lewo, np. $(101)_2 \text{ shl } 3 = (101000)_2$, oraz w prawo, np. $(11010)_2 \text{ shr } 2 = (110)_2$. One także stanowią pojedyncze instrukcje w popularnych procesorach.



Czytelników, którzy nie czują się zbyt pewnie, używając operacji bitowych, zachęcamy do potrenowania na lamigłówkach bitowych z *Delty* 11/2008.



16 mniej i 16 bardziej znaczącym bitom (tutaj mamy dwa odwołania do tablicy). Można sprawdzić, że w każdym przypadku otrzymujemy rozwiązanie wykonujące mniej operacji od wyjściowego, siłowego $O(n^3)$.

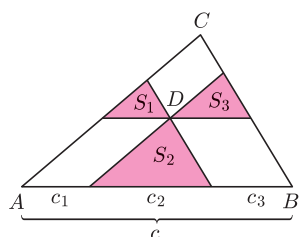
W ten sposób zakończyliśmy opis ulepszonych algorytmów zliczania trójkątów w grafie. Nie sposób jednak oprzeć się wrażeniu, iż owo ulepszenie jest bardzo nieznaczne – na tyle nieznaczne, że nie jest pewne, czy warto było pisać o nim cały ten artykuł. Aby się przekonać o tym, że jednak może ono mieć sens, wystarczy się przyjrzeć temu, jak rozwija się współcześnie praktyczna strona informatyki. Otóż już w standardowych procesorach mamy do dyspozycji zmienne 64-bitowe (są one jednak mniej efektywne niż 32-bitowe – to fakt), ale coraz częściej pojawiają się już tzw. maszyny 64-bitowe i 128-bitowe (te ostatnie są jednak wciąż dosyć rzadkie). To oznacza także wzrost możliwej wartości parametru B , a przecież nasz algorytm (zakładając, dla uproszczenia, możliwość zliczenia zapalonych bitów liczby za pomocą pojedynczej instrukcji procesora) ma złożoność czasową $O(n^3/B)$. Mając takie względy na uwadze, informatycy-teoretycy już od jakiegoś czasu uwzględniają parametr B w analizach złożoności czasowych swoich algorytmów. Ważne jest tu podstawowe założenie, iż operacje arytmetyczne i logiczne na wbudowanych liczbach całkowitych można wykonywać w czasie stałym (niezależnym od B), które to założenie jest podstawą analiz złożoności badanej wszystkich istniejących algorytmów.

A na sam koniec pozostawiamy Czytelnikom ćwiczenie z tej samej serii. Popularną metodą obliczania najkrótszych ścieżek między wszystkimi parami wierzchołków w grafie (skierowanym bądź nie) jest algorytm Floyd–Warshalla. Istnieje także prostsza wersja tego algorytmu, w której dla każdej pary wierzchołków sprawdzamy tylko, czy istnieje jakakolwiek ścieżka łącząca te wierzchołki (tę wersję nazywa się też często algorytmem wyznaczania domknięcia przechodniego grafu) – patrz pseudokod poniżej. W jaki sposób można użyć operacji na bitach do usprawnienia tego algorytmu?

```

for k := 0 to n - 1 do
  for i := 0 to n - 1 do
    for j := 0 to n - 1 do
      t[i][j] := t[i][j] or (t[i][k] and t[k][j]);

```



Jeszcze jeden wzór na pole trójkąta

W związku z *Deltoidem* z numeru 4/2009, w którym autorka zachęca do poszukiwania wzorów na pole trójkąta, chciałbym przedstawić pewien dość nietypowy wzór „fraktalny”. Nietypowy, bo pole trójkąta przedstawia jako pewną zależność od pól swoich „wewnętrznych” trójkątów – i tylko od nich. Fraktalny, ponieważ w nieskończoność można powielać pewien algorytm.

Wygląda to tak. Trójkąt ABC dzielimy trzema prostymi równoległymi do boków, przecinającymi się w dowolnym punkcie wewnętrznym D (rysunek). W wyniku takiego podziału otrzymamy trzy trójkąty podobne do trójkąta ABC i trzy równoległoboki. Oznaczając przez S_1, S_2, S_3 pola wskazanych trójkątów oraz przez S pole trójkąta ABC , otrzymujemy wzór

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$

Dowód. Z podobieństwa trójkątów mamy

$$\frac{c_1}{c} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}, \quad \frac{c_2}{c} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}, \quad \frac{c_3}{c} = \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}},$$

i otrzymujemy

$$c = c_1 + c_2 + c_3 = c \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + c \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} + c \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}.$$

Stąd

$$1 = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}},$$

więc

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2. \quad \square$$

Dalej, analogicznie, można podzielić dowolny z trzech małych trójkątów i kontynuować ten proces, otrzymując trójkąty o polach T_1, T_2, \dots, T_n oraz wzór

$$S = \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{T_k} \right)^2.$$

Przy $n \rightarrow \infty$ uzyskujemy zatem

$$S = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{T_k} \right)^2.$$

Wiadomo więc, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{T_k}$ jest zbieżny. Biorąc konkretne algorytmy dzielenia trójkątów, otrzymamy pewne szeregi liczbowe, których zbieżność w sposób klasyczny może być kłopotliwa do wykazania. Zachęcam Czytelników do poszukania takich przykładów.

T A B E L E

PRZERACHOWANIA MIAR

POLSKICH I ROSYJSKICH
NA METRYCZNE I NAODWRÓT

DO UŻYTKU PRAKTYCZNEGO

UŁOŻYŁ M. T.

1930

NAKŁADEM KSIĘGARNI LUDWIKA FISZERA W ŁODZI

WSTĘP.

Na mocy Dekretu o miarach z dn. 8 lutego 1919 roku w brzmieniu, podanem w Dzienniku Ustaw R. P. № 72, poz. 661 z roku 1928, obowiązuje w Polsce zarówno w stosunkach prywatnych jak i publicznych używanie wyłączne miar metrycznych, których uznanem przez prawo jednostkami są: dla miar długości *metr*, dla miar powierzchni *metr kwadratowy* i *ar*, dla miar objętości *metr sześcienny* i *litr*, dla miar masy (wagi) *kilogram* i *kwintal* (centnar metryczny).

Ponieważ jednak znaczny odłam ludności, przeważnie na ziemiach byłego zaboru rosyjskiego, wskutek długotrwałego przyzwyczajenia używa nadal w stosunkach prywatnych miar dawnych, a często nie potrafi miar tych na metryczne przerachować, nie znając nawet niekiedy właściwego stosunku między temi dwoma systemami miar, okazało się wskazanem wydanie niniejszej broszurki,

Oddając broszurkę niniejszą w ręce czytelnika polskiego, wyrażamy nadzieję, że stanie się ona pomocą dla tych wszystkich, co jeszcze niedość oswoili się z miarami metrycznymi, i w ten sposób przyczyni się także do ostatecznego zwycięstwa obowiązującego u nas, jak i w całej prawie Europie, *systemu miar metrycznych*.

Miary nowopolskie i rosyjskie.

MIARY DŁUGOŚCI.

Pręt ma 15 stóp
Sążeń kw. ma 3 łokcie = 3 *rosyjski*
Łokieć ma 2 stopy
Stopa ma 12 cali
Cali ma 12 linij
Linja

Przy mierzeniu drogi:

Mila ma 7 wiorst

Wiorsta (ros.)

MIARY POWIERZCHNI.

Pręt kwadratowy ma 225 stóp kw.
Sążeń kw. ma 9 łokci kw.
Łokieć kw. ma 4 stopy kw.
Stopa kw. ma 144 cale kw.
Cali kw. ma 144 linje kw.
Linja kw.

Miary powierzchni rolne:

Włóka ma 30 morgów
Mórg ma 300 prętów kw.
Pręt kw. (p. wyżej)

MIARY OBJĘTOŚCI.

Sążeń sześcienny ma 27 łokci sześć.
Łokieć sześć. ma 8 stóp sześć.
Stopa sześć. ma 1728 cali sześć.
Cali sześć. ma 1728 linij sześć.
Linja sześć.

Ponadto:

Sąg jest połową sążnia sześć.

Do mierzenia objętości ciał płynnych i sypkich:

Korzec ma 4 ćwierci (ćwiartki)
Ćwierć ma 8 garnicy pol.
Garniec pol. ma 4 kwarty pol. (= 1 litrowi)
Kwarta ma 4 kwaterki
Kwaterka

Ponadto w powszechnem użyciu był garniec ros. z analogicznym podziałem:

Garniec ros. ma 4 kwarty ros. (= 0,81995 l.)
Kwarta ros. ma 4 kwaterki ros.
Kwaterka ros.

MIARY MASY (WAGI).

Centnar ma 4 kamienie lub 100 funtów nowop.
Kamień ma 25 funtów nowop.
Funt nowop. ma 32 łyty
Łuty

Częściej od funta nowopolskiego (równego 405,504 gramów) używano funta rosyjskiego (równego 409,51241 g.) Funt rosyjski miał podział:

Pud ma 40 funtów ros.
Funt rosyjski ma 32 łuty.

Ponadto była w użyciu miara polsko-rosyjska:

Centnar ma 4 kamienie lub 100 funtów ros.
Kamień ma 25 funtów ros.
Funt ros.

Do mierzenia wagi siana służył:

Centnar siana = 120 funtów ros.

Do mierzenia wagi zbóż służył korzec o różnej wadze dla rozmaitych zbóż, mianowicie:

Korzec pszenicy równy 240 f. ros.

„ żyta równy 230 f. ros.

„ jęczmienia i gryki równy 200 f. ros.

„ owsa równy 140 lub 160 f. ros.

„ grochu, bobiku, łubinu lub wyki równy 260 f. ros.

„ rzepaku równy 210 f. ros.

„ ziemniaków równy 260 lub 280 f. ros.

„ kaszy jęczmiennej lub gryczanej równy 200 f. ros.

„ buraków lub marchwi równy 280 lub 300 f. ros.

„ koniczyzny, lucerny lub przelotu równy 250 f. ros.

Worek mąki równy 200 f. ros.

Porównanie miar nowopolskich i rosyjskich z metrycznymi.

MIARY DŁUGOŚCI.

1 przęt = 4,32 m
1 sążen = 1,728 „
1 łokieć = 0,576 „
1 stopa = 0,288 „
1 cal = 0,024 „
1 linja = 2 mm
1 mila = 7,4676 km
1 wiorsta = 1,0668 „
1 m = 0,2314815 przęta
= 0,5787037 sążnia
= 1,736111 łokcia
= 3,472222 stopy
= 41,666667 cali
= 500 linij
1 km = 0,13391183 mili
= 0,93738283 wiorsty

MIARY POWIERZCHNI.

1 sąż. kw. = 2,985984 m²
1 łok. „ = 0,331776 „
1 stopa „ = 0,082944 „
1 cal „ = 0,000576 „
1 linja „ = 4 mm²
1 włoka = 16,79616 ha
1 mórg = 0,559872 „
1 przęt kw. = 0,00186624 „
1 m² = 0,3348980 sąż. kw.
= 3,0140818 łok. „
= 12,056327 stóp „
= 1736,1111 cali „
= 250000 linij „
1 ha = 0,0595374 włoki
= 1,7861225 mórgów
= 535,83676 przętów kw.

MIARY OBJĘTOŚCI.

1 sążen sześć. = 5,159780352 m³
1 sąg = 2,579890176 „
1 stopa sześć. = 0,23887872 „
1 cal sześć. = 0,000013824 „
1 m³ = 0,1938067 sąż. sześć.
= 0,3876134 sągów
= 41,8621537 st. sześć.
= 72337,963 cali sześć.

Dla ciał płynnych i sypkich:

Nowopolskie: 1 korzec = 128 l
1 ćwierć = 32 l
1 garniec = 4 l
1 kwarta = 1 l
1 kwaterka = 0,25 l
1 l = 0,0078125 korcy
= 0,03125 ćwierci
= 0,25 garnicy
= 1 kwarta
= 4 kwaterki
Polsko-rosyjskie: 1 garniec ros. = 3,2798 l
1 kwarta ros. = 0,81995 l
1 kwaterka ros. = 0,2049875 l
1 l = 0,3048966 garnicy ros.
= 1,2195866 kwart ros.
= 4,8783462 kwaterek ros.

MIARY MASY (WAGI).

Nowopolskie: 1 centnar = 40,5504 kg
1 kamień = 10,1376 „
1 funt = 0,405504 „
1 łut = 0,012674 „
Polsko-rosyjskie: 1 centnar = 0,409512 q
1 kamień = 0,102378 „
1 pud = 16,3804964 kg
1 funt = 0,4095124 „
1 łut = 0,012797262 „
1 kg = 0,0246607 centnara
= 0,0586428 kamienia
= 2,4660669 funta
= 78,914141 łuta
1 q = 2,44193 centnara
= 9,76772 kamienia
1 kg = 0,0610482 puda
= 2,4419284 funta
= 78,141710 łuta

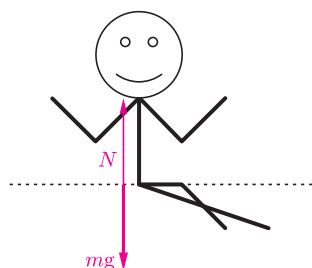
Dla zboża i produktów rolnych:

1 korzec pszenicy = 240 f. ros. = 0,982829784 kwintala
1 „ żyta = 230 „ = 0,941878543 „
1 „ jęczmienia, gryki = 200 „ = 0,81992482 „
1 „ owsa = 140 „ = 0,573317374 „
lub 1 „ = 160 „ = 0,655219856 „
1 „ grochu, bobiku, łubinu, wyki = 260 „ = 1,06473227 „
1 „ rzepaku = 210 „ = 0,859976061 „
1 „ ziemniaków = 260 „ = 1,06473227 „
lub 1 „ = 280 „ = 1,146634748 „
1 „ kaszy jęczmiennej lub gryczanej = 200 „ = 0,81902482 „
1 „ kaszy jaglanej = 260 „ = 1,06473227 „
1 „ buraków, marchwi = 280 „ = 1,146634748 „
lub 1 „ = 300 „ = 1,22853723 „
1 „ koniczyzny, lucerny, przelotu = 250 „ = 1,023781025 „
1 centnar siana = 120 „ = 0,491414892 „
1 worek mąki = 200 „ = 0,81902482 „
Dalej: 1 korzec węgla = 240 „ = 0,982829784 „

W lunaparku

Krzysztof TURZYŃSKI

Badania terenowe przeprowadzone zostały wraz z prof. Thomasem Flacke i dr Dominiką Konikowską w parku rozrywki Cedar Point w stanie Ohio, USA; towarzyszą badaniom autor niniejszym serdecznie dziękuje.



Rys. 1

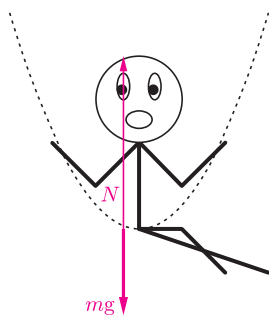
Amatorzy wrażeń moszczą się w siedzeniach wagonika. Obsługa życzy niezapomnianych przeżyć. Za chwilę rozpocznie się jazda kolejką górską, zwaną też często z angielska *roller coasterem*.

Na dobrą sprawę fizyka tych urządzeń jest niezwykle prosta jak na wynalazki, które ściągają do parków rozrywki na całym świecie miliony turystów. Po pierwsze, na podróżującego kolejką górską pasażera o masie m działa siła grawitacji o wartości mg skierowana pionowo w dół. Po drugie, pasażer ów, siedząc w fotelu wagonika, naciska na fotel. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona na pasażera działa więc również siła reakcji, jaką fotel wywiera na siedzenie tegoż osobnika – siła ta jest zawsze prostopadła do toru ruchu wagonika. I to już wszystko! (Niekiedy trzeba jeszcze uwzględnić siłę reakcji oparcia fotela, działającą prostopadłe do oparcia na plecy pasażera, ale bez wyraźnej konieczności nie będziemy komplikować prowadzonych tu rozważań.) W opisaną powyżej sytuację oczekiwania na przejazd bilans sił jest bardzo prosty – siła reakcji równoważy siłę grawitacji i, zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki Newtona, pasażer kolejki może spoczywać.

Niczym w wierszu Tuwima, wagonik rusza z zółwią ociężałością, wciągany powoli na szczyt pierwszego wzniesienia stalowym łańcuchem. Pasażerowie kolejki rozglądają się wokół z rosnącym napięciem, widząc, jak tłum oczekujących na jazdę ludzi, bezlik zaparkowanych samochodów, a nawet budynki parku rozrywki maleją w oddali. Osiągnąwszy szczyt pierwszego wzniesienia, wagoniki ruszają na łeb na szyję w dół. Przeróżliwy wrzask pasażerów wwierca się w uszy.

Kolejki górskie opisanego tutaj typu zamieniają energię potencjalną pola grawitacyjnego Ziemi, wyrażającą się wzorem $E_P = mgh$, gdzie h jest wysokością nad ustalonym poziomem, na energię kinetyczną ruchu postępowego, $E_K = mv^2/2$, gdzie v jest prędkością ruchu. Największe kolejki osiągają wysokość 100 m, co oznacza, że rozpędzony wagonik zjeżdżający z pierwszego wzniesienia ma prędkość przekraczającą 150 km/h. Jeśli dodać do tego, że zjazd odbywa się często po zboczu nachylonym o 80 stopni do poziomu, wrażenia muszą być na tyle silne, by wydobyć krzyk z gardzieli największych twardzieli.

Wrzask pasażerów kolejki nie ustaje w momencie powrotu do wyjściowego poziomu. Podróżujący doznają niezwykłego i trochę przerażającego wrażenia – jakby ich ciała zniemacka zaczęły ważyć znacznie więcej.

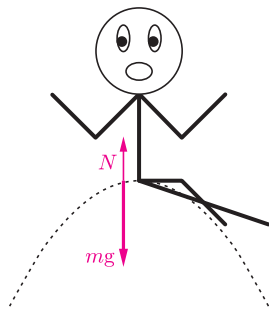


Rys. 2

Subiektywne odczucie ciężaru ciała nie jest bezpośrednio związane z siłą grawitacji. Pomyślmy o najprostszej sytuacji, kiedy stoimy na wadze, oddziałując na nią siłą grawitacji mg , a waga, zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona, odwzajemnia nam się siłą reakcji o tej samej wartości, ale skierowaną pionowo w górę. Tę siłę reakcji interpretujemy jako ciężar własnego ciała. W opisanym wyżej najprostszym przypadku siła reakcji jest równa co do wartości sile grawitacji, ale już kiedy zanurzymy się w wypełnionym wodą basenie, na nasze ciało zaczyna działać dodatkowo siła wyporu, w znacznym stopniu równoważąc siłę grawitacji. Naciskamy więc słabiej na dno basenu i siła reakcji dna basenu jest niewielka – dlatego w wodzie czujemy się tak lekkcy. Wróćmy jednak na kolejkę górską. Jej kształt wokół „dołka” możemy przybliżyć łukiem okręgu. Siła F_r potrzebna do spowodowania ruchu ciała o masie m i prędkości v po okręgu o promieniu r (siła dośrodkowa) ma wartość $F_r = mv^2/r$ i jest skierowana prostopadłe do toru ruchu, w kierunku środka okręgu. Ta siła musi być wypadkową siły grawitacji i siły N reakcji fotela, otrzymujemy zatem $N - mg = mv^2/r$, skąd obliczamy $N = mg + mv^2/r$, a zatem siła reakcji jest większa od siły grawitacji. Rzeczywiście, mamy prawo czuć się ciężcy w najniższym punkcie ruchu wagonika. Jak bardzo? Przyjmując promień okręgu,

jaki można dopasować do schematów dużych kolejek, równy 50 m, otrzymujemy siłę reakcji, a więc pozornie odczuwany ciężar równy pięciokrotności siły grawitacji, czyli w języku astronautyki i powieści science-fiction „przeciążenie 5g”. W rzeczywistości z powodu oporów ruchu przeciążenie na prawdziwej kolejce górskiej przez większość czasu jest mniejsze, ale i tak osiąga – przez ułamki sekund – wartości, przy których serce nie jest w stanie tłoczyć krwi do mózgu. Można by powiedzieć, że nie jest dziwne uruchamianie w tej sytuacji przez mózg silnych emocji. Warto zauważyć, że nawet zwykła podwórkowa huśtawka potrafi zapewnić doznania porównywalne z jazdą kolejką górską – kiedy huśtamy się, odchylając siodełko od pionu o kąt 90 stopni, analogiczny bilans sił i energii pokazuje, że przy zaniedbaniu oporów ruchu osiągamy przeciążenia 3g.

Rozpędzony wagonik osiąga szczyt drugiego, nieco niższego niż pierwsze, wzniesienia, czemu towarzyszy nowa erupcja pisków.

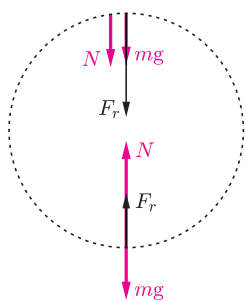


Rys. 3

Na szczytach wzniesień tor ruchu wagonika jest zakrzywiony w przeciwną stronę niż w „dołkach”. Przybliżając ponownie tor ruchu przez łuk okręgu, otrzymujemy bilans sił prowadzący do wniosku, że $N = mg - mv^2/r$, a zatem nasz odczuwany ciężar zmniejsza się. Znak minus pojawiający się w ostatnim wyrażeniu sugeruje możliwość uzyskania ujemnego wyniku – ale siła reakcji siedzenia fotela może w naszym układzie działać tylko w jedną stronę. Jeśliby pokonywać wzniesienie z na tyle dużą prędkością lub po na tyle małym promieniu, że wyrażenie na N stałoby się ujemne, odpowiadałoby to ujemnemu naciskowi siedzenia pasażera na fotel i pasażer ten zostałby wystrzelony w powietrze, chyba że dodatkowa uprzęż utrzymałaby go w fotelu, wywierając dodatkową siłę reakcji. Przy prędkości 100 km/h maksymalny promień okręgu, dla którego nie zachodzi konieczność stosowania uprzęży, to niemal 80 m, czyli dość duży jak na mocno „zakręconą” trasę kolejki.

Po zjechaniu z drugiego wzniesienia wagonik wspina się na trzecie o charakterystycznym parabolicznym kształcie. Tym razem pisk pasażerów jest głośniejszy i trwa nieustannie przez dobre kilka sekund.

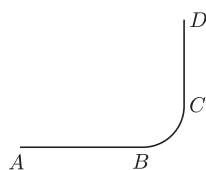
Atrakcją, jaką konstruktorzy kolejki górskiej zafundowali w tym miejscu pasażerom, jest tor odpowiadający trajektorii pocisku wystrzelonego w powietrze. Znajdujące się w polu grawitacyjnym ciało, którego początkowa prędkość ma składową poziomą oraz skierowaną w górę składową pionową, wykonuje ruch będący złożeniem dwóch prostych ruchów: jednostajnego prostoliniowego w kierunku poziomym i jednostajnie opóźnionego, a potem przyspieszonego, w kierunku pionowym. W ruchu takim wystrzelone ciało zakreśla właśnie parabolę. Poruszający się po takiej linii pasażerowie kolejki czują się, jakby fotele przestały oddziaływać na ich ciała, skoro i tak poruszają się oni, jakby żadnego podparcia w ogóle nie mieli – siła reakcji znika. Nic dziwnego, że temu fragmentowi toru towarzyszą tak silne emocje, nawet jeśli zanik siły reakcji nie jest na prawdziwych kolejkach górskich całkowity, bo maleje ona na parabolicznych odcinkach toru do mniej więcej 1/5 siły grawitacji.



Rys. 4

Wagonik zbliża się do kolejnej atrakcji. Przejeżdżając przez pętlę podróżujący znajdują się przez chwilę głowami w dół. Okrzyków przerażenia słychać jakby mniej, ale, w końcu, ileż można krzyczeć bez przerwy?

Na szczycie pętli o promieniu r siła dośrodkowa ma ten sam zwrot co siła grawitacji i siła reakcji fotela. Będąc sumą tych ostatnich dwóch, siła dośrodkowa musi być zatem większa od siły grawitacji, $mv^2/r > mg$. Obliczając całkowitą energię pasażera o masie m w granicznym przypadku równości tych sił, otrzymujemy minimalną całkowitą energię pasażera $E = mv^2/2 + 2mgr = \frac{5}{2}mgr$ (wysokość na szczycie pętli to $2r$). Przy zaniedbaniu strat energii jest to również energia tego samego pasażera na dole, tyle że poruszającego się z taką prędkością V , że $mV^2/2 = \frac{5}{2}mgr$. Oznacza to, że siła dośrodkowa na dole pętli wynosi $mV^2/r = 5mg$. Ponieważ wartość tej siły jest tam różnicą wartości siły reakcji i siły grawitacji, siła reakcji fotela

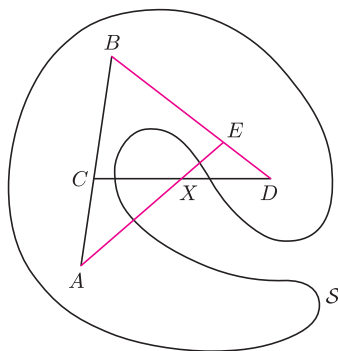


Rys. 5



Rozwiązanie zadania M 1265.

Przypuśćmy, że punkty $A, B \in S$ są punktami widokowymi oraz niech C będzie punktem odcinka AB , który nie jest widokowy. Wówczas istnieje taki punkt $D \in S$ oraz taki punkt X należący do odcinka CD , że $X \notin S$.



Niech E będzie punktem przecięcia prostej AX i odcinka BD . Ponieważ punkt B jest widokowy, więc punkt E należy do zbioru S . Z kolei punkt A jest widokowy, więc każdy punkt odcinka AE , w szczególności punkt X , należy do zbioru S . Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że punkt C jest widokowy.

odpowiada w najniższym punkcie kołowej pętli przecięciu 6g. Takie przecięcia potrafią, nie bez szkody dla zdrowia, znieść jedynie kosmonauci i piloci samolotów bojowych, potrafiący specjalnymi ćwiczeniami przeciwdziałać „ściągnięciu” krwi w dolne partie ciała. Nic więc dziwnego, że pętle w prawdziwych kolejkach górskich nie mają kształtu kołowego, a raczej „łezkowaty”, taki, że promień okręgu przybliżającego tor ruchu jest bardzo duży u podstawy pętli i zmniejsza się ku jej wierzchołkowi, po czym znowu rośnie. W praktyce tor składa się ze sklejonych ze sobą dwóch spiral Eulera (zwanych też spiralami Cornu lub *klotoidami*). Odcinki klotoid występują także często w przebiegu torów kolejowych i tramwajowych z następującego powodu. Wyobraźmy sobie wagon poruszający się ze stałą prędkością najpierw po prostym odcinku AB , potem po odcinku okręgu BC , a następnie znowu po prostym odcinku CD . Między punktami A i B na wagon nie działają żadne siły, w punkcie B pojawia się zniemacka i gwałtownie siła dośrodkowa, która równie nagle znika w punkcie C . Nagłe pojawienie się i zniknięcie siły dośrodkowej działającej na wagon będzie odczuwane przez pasażerów jako nagłe pojawienie się i zniknięcie siły bezwładności (odśrodkowej) działającej na ich ciała i rzucającej ich na boki wagonu. Nietrudno wyobrazić sobie, że stopniowe narastanie, a potem zanikanie siły zmieniającej kierunek wagonu spowoduje, iż podróż jego pasażerów będzie znacznie przyjemniejsza. Krzywizna klotoidy jest z definicji proporcjonalna do jej długości liczonej od ustalonego punktu.

Na szczycie pętli jednej z pań zsunął się z palca pierścionek. Odruchowo wyciągnęła rękę ku ziemi, aby uchwycić zgubę, tymczasem klejnot poszybował w stronę jej stóp, mimo że scena rozgrywała się do góry nogami.

Sprzeczne z intuicją? Za to całkowicie zgodne z bilansem sił. Na szczycie pętli na upuszczony pierścionek działa jedynie siła grawitacji, a na jego byłą właścicielkę suma skierowanych w tę samą stronę siły grawitacji i siły reakcji fotela (brak tej ostatniej oznaczałoby, że owa pani wypadła z fotela), a zatem była właścicielka pierścionka porusza się w dół z tą samą co pierścionek zerową prędkością początkową, ale, na mocy drugiej zasady dynamiki Newtona, z większym przyspieszeniem. Innymi słowy, gdyby nie dodatkowa, skierowana w dół siła reakcji fotela, pierścionek i jego właścicielka lecieliby w dół z tą samą prędkością i przyspieszeniem, tak jak legendarne odważniki Galileusza na szczycie krzywej wieży w Pizie.

Tymczasem wagonik po wykonaniu jeszcze kilku efektownych ewolucji wraca do punktu wyjścia, gdzie elektromagnetyczne hamulce osadzają go w miejscu. Pasażerowie wysiadają – z błyszczącymi z emocji oczami, niektórzy na miękkich nogach. Chyba nikt nie myślał o zasadach dynamiki i bilansach sił.

Konkurs zadań astronomicznych

Rozwiązania zadań z numeru 11/2009

A 21. Refrakcja według wzoru wynosi $4'$, zatem uwolniona od refrakcji wysokość dolnej krawędzi tarczy Słońca wynosi $h_0 = 13^\circ 24'$. W sytuacji z zadania zachodzi $\varphi = 90^\circ - \delta + h_0 + r$, skąd $\varphi = 83^\circ 16'$.

A 22. Aktualna odległość gwiazdy to $r = 1/p = 1,835 \text{ pc} = 5,5 \cdot 10^{13} \text{ km}$. Styczna do sfery niebieskiej składowa prędkości gwiazdy wynosi $v_t = 87,5 \text{ km/s}$, wobec czego pełna prędkość wynosi $v = \sqrt{v_t^2 + v_r^2} = 140,5 \text{ km/s}$. Trójkąt rozpięty na wektorach odpowiadających v_r i v jest podobny do trójkąta o wierzchołkach: Słońce, gwiazda i jej punkt przysłoneczny. Zachodzi więc $r_{\min}/r = v_t/v$, skąd $r_{\min} = 1,143 \text{ pc}$. Droga, jaką musi przebyć gwiazda do punktu przysłonecznego, to $\sqrt{r^2 - r_{\min}^2} = 1,435 \text{ pc}$, na co z prędkością v potrzeba w przybliżeniu 9730 lat.

Zobaczyć chaos: czar obliczeń dwójkowych

Jarosław GÓRNICKI*

Słowo *chaos* sprawia nam kłopot, intuicyjnie je rozumiemy, ale gubimy się, gdy mamy wyjaśnić jego precyzyjne znaczenie. Początki matematycznego badania zjawisk chaotycznych sięgają lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku, choć można ich również upatrywać w pracach Henri Poincarégo z końca XIX wieku. Od tego czasu nadal aktualne są pytania: jak sprawdzić, czy to, co wydaje nam się zjawiskiem chaotycznym, rzeczywiście takim jest, a nie – chociaż bardzo skomplikowanym – jednak dającym się przewidywać? Jakie cechy uznać za charakterystyczne dla chaosu? Na ile ufać obliczeniom numerycznym, gdy podejrzewamy chaotyczne zachowanie badanego zjawiska? Jak odróżnić chaos od szumu (zjawiska losowego)?

Nie wiem, jak precyzyjnie odpowiedzieć na te pytania, sygnalizuję jednak problemy, z jakimi musimy się zmierzyć. Proponuję przypatrzeć się najprostszym jednowymiarowym modelom matematycznym przemieszczania się punktów w odcinku jednostkowym $[0, 1]$. Wydaje się, że modele te kryją w sobie istotę tego, co możemy nazwać *chaosem* (zachowaniem chaotycznym).

W tym artykule przedstawimy dwa proste przekształcenia – nieciągłe przekształcenie piłokształtne P oraz ciągłe przekształcenie namiotowe T . Korzystając z dobrodziejstwa łatwych rachunków w systemie dwójkowym, uwypuklimy ich podobieństwa. Jednocześnie zwracamy uwagę na jeszcze jedno (niekomputerowe!) zastosowanie dwójkowego systemu liczenia, które w tym przypadku przebija system dziesiętny.

System binarny (dwójkowy). Każdą liczbę rzeczywistą $x \in [0, 1)$ możemy przedstawić w postaci reprezentacji binarnej $x = (0, a_1 a_2 a_3 \dots)_2$, gdzie $a_k \in \{0, 1\}$ i $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$. W takim zapisie binarnym liczba 1 ma przedstawienie $1 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + \dots = (1, 0)_2$ lub jako $1 = 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + \dots = (0, \overline{1})_2$ (kreska nad grupą cyfr oznacza jej cykliczne powtarzanie). Podobnie $\frac{1}{2} = (0, 1)_2 = (0, 0\overline{1})_2$. Aby przedstawienie było jednoznaczne, przyjmujemy umowę, że dopuszczalna reprezentacja binarna liczby x nie może kończyć się nieskończonym ciągiem jedynek.

Gdy chcemy przedstawić liczbę $x \in [0, 1)$ w postaci binarnej, możemy wykorzystać następujące postępowanie:

1. napisz „0”,
2. jeśli $2x < 1$, to dopisz cyfrę 0, a w przeciwnym przypadku dopisz cyfrę 1,
3. $x := 2x - a$, gdzie a jest wartością dopisanej cyfry, i przejdź do punktu 2.

Procedura zakończy się, gdy $x = 0$ lub z chwilą, gdy powtórzy się już raz otrzymana wartość x . Wtedy wypisany ciąg cyfr między powtórzeniami występuje cyklicznie.

Mamy więc

$$\frac{1}{10} = (0, \overline{00011})_2, \quad 0,15 = (0, \overline{001001})_2, \quad 0,625 = (0, 101)_2, \quad \frac{5}{7} = (0, \overline{101})_2.$$

Liczby niewymierne mają nieskończone reprezentacje binarne nieokresowe, np.

$$\frac{1}{\pi} = (0, 0101000101111100110000011011011 \dots)_2.$$

Przesunięcie Bernoulliego i piła. Przesunięcie Bernoulliego określamy na binarnych reprezentacjach liczb rzeczywistych $x \in [0, 1)$ w następujący sposób: z zapisu binarnego liczby $x \in [0, 1)$ usuwamy pierwszą cyfrę występującą po przecinku,

$$(0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)_2 \rightarrow (0, a_2 a_3 a_4 \dots)_2,$$

liczbę 1 przekształcamy na nią samą. Mamy więc określone przekształcenie $B : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ wzorem

$$B((0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)_2) = (0, a_2 a_3 a_4 \dots)_2, \quad B(1) = 1.$$



*Katedra Matematyki,
Politechnika Rzeszowska

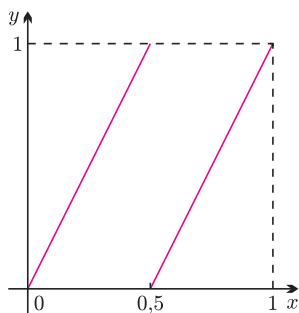
Rozważmy nieciągłe przekształcenie piłokształtne („piłkę”) $P : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (rys. 1) dane wzorem

$$P(x) = \begin{cases} 2x & \text{gdy } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1 & \text{gdy } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

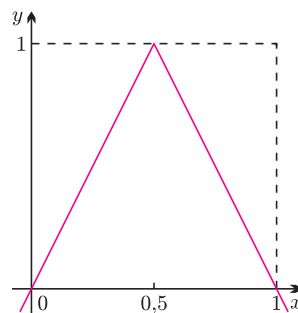
Zauważmy, że mnożenie przez 2 w systemie binarnym oznacza przesunięcie wszystkich cyfr o jedno miejsce w lewo, czyli przejście od $(0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)_2$ do $(a_1, a_2 a_3 a_4 \dots)_2$. Ponadto, $a_1 = 0$ dla $x \in [0, \frac{1}{2})$ oraz $a_1 = 1$ dla $x \in [\frac{1}{2}, 1)$. Wykonując rachunki podyktowane określeniem przekształcenia piłokształtne P , widzimy, że operacja P polega na przesunięciu wszystkich cyfr reprezentacji binarnej liczby $x \in [0, 1)$ o jedno miejsce w lewo, i dodatkowo, gdy $x \in [\frac{1}{2}, 1)$, na usunięciu cyfry, która stoi bezpośrednio przed przecinkiem:

$$x = (0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)_2 \rightarrow P(x) = (0, a_2 a_3 a_4 \dots)_2 = B(x) \quad \text{gdy } x \in [0, 1), \\ P(1) = 1 = B(1).$$

Zatem przekształcenie piłokształtne jest identyczne z przesunięciem Bernoulliego!



Rys. 1



Rys. 2

Piła i przekształcenie namiotowe. Rozważmy teraz przekształcenie ciągle kawałkami liniowe $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dane wzorem

$$T(x) = 1 - |1 - 2x| = \begin{cases} 2x & \text{gdy } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{gdy } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ze względu na kształt wykresu przekształcenia T (rys. 2) nazywamy je *przekształceniem namiotowym*.

Trajektorią (orbitą) punktu x względem dowolnego przekształcenia S nazywamy zbiór

$$\{x, S(x), S(S(x)), S(S(S(x))), \dots\} = \{S^n(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Aby zbadać zachowanie się trajektorii przekształcenia T , wykorzystamy pewną własność przekształcenia T^n dla $n \geq 1$. Z pomocą przychodzi nam przekształcenie piłokształtne (a z nim przesunięcie Bernoulliego). Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że

$$T(T(x)) = (T \circ T)(x) = (T \circ P)(x) = T(P(x)), \quad x \in [0, 1].$$

Rzeczywiście,

$$\text{dla } x \in [0, \frac{1}{4}], \quad T(T(x)) = T(2x) = 4x = T(P(x)),$$

$$\text{dla } x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \quad T(T(x)) = T(2x) = -4x + 2 = T(P(x)),$$

$$\text{dla } x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \quad T(T(x)) = T(-2x + 2) = 4x - 2 = T(2x - 1) = T(P(x)),$$

$$\text{dla } x \in (\frac{3}{4}, 1], \quad T(T(x)) = T(-2x + 2) = -4x + 4 = T(2x - 1) = T(P(x)).$$

Stąd

$$T^n = T \circ P^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

co w łatwy sposób możemy uzasadnić indukcyjnie.

Powyższa własność wiąże oba modele przekształcania odcinka $[0, 1]$ w siebie w tym sensie, że $n - 1$ przekształceń P , po których następuje jedno przekształcenie T , daje ten sam wynik, co przekształcenie namiotowe zastosowane n razy!



Rozwiązanie zadania F 755.

Można przyjąć, że ilość moli powietrza wewnątrz baniek nie zmienia się: $n_3 = n_1 + n_2$.

Z drugiej strony, z równania stanu mamy $n = pV/RT$, gdzie $V = (4/3)\pi r^3$. Równowaga zachodzi, gdy $p = p_0 + 2\sigma/r$, gdzie p_0 to ciśnienie atmosferyczne, a $2\sigma/r$ to dodatkowe ciśnienie pod sferyczną powierzchnią błony mydlanej o napięciu powierzchniowym σ i promieniu r . Wstawiając wyrażenia na n_1, n_2 i n_3 do pierwszego równania, otrzymujemy:

$$p_0 = \frac{2\sigma(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2)}{r_3^3 - r_1^3 - r_2^3}.$$

Żeby p_0 było dodatnie, licznik i mianownik muszą być dodatnie (bo ujemne jednocześnie być nie mogą). Dodatniość mianownika oznacza, że objętość kuli r_3 musi być większa od sumy objętości kul r_1 i r_2 , a dodatniość licznika oznacza, że powierzchnia kuli r_3 musi być nie większa od sumy powierzchni kul r_1 i r_2 .

Powiedzmy jeszcze, jaka jest reprezentacja binarna przekształcenia namiotowego. Dla $x \in [0, \frac{1}{2})$ przekształcenie namiotowe pokrywa się z przekształceniem piłokształtnym, więc

$$T((0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)_2) = (0, a_2 a_3 a_4 \dots)_2.$$

Jeśli $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, to $P(x) = 2x - 1$, więc

$$T(x) = -2x + 2 = 1 - (2x - 1) = 1 - P(x) = 1 - (0, a_2 a_3 a_4 \dots)_2.$$

Ponadto, $T(1) = 0$. Wprowadzając operację sprzężenia dla cyfr binarnych

$$a_i^* = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } a_i = 1, \\ 1 & \text{jeśli } a_i = 0, \end{cases}$$

otrzymujemy dla $x \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$T((0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)_2) = (0, a_2^* a_3^* a_4^* \dots)_2,$$

bowiem

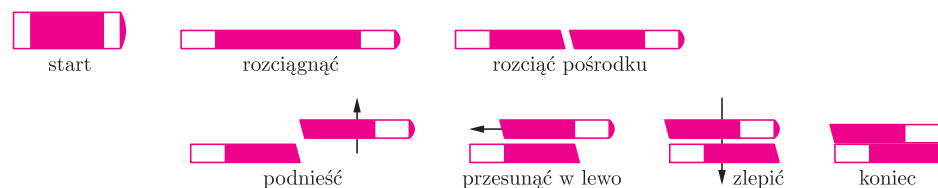
$$(0, a_2 a_3 a_4 \dots)_2 + (0, a_2^* a_3^* a_4^* \dots)_2 = (0, \bar{1})_2 = 1.$$

Dla $x = \frac{1}{2} = (0, 1)_2$ przyjmujemy $T(\frac{1}{2}) = 1$. Mamy więc reprezentację binarną przekształcenia namiotowego dla $x \in [0, 1)$:

$$T((0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)_2) = \begin{cases} (0, a_2 a_3 a_4 \dots)_2 & \text{dla } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{dla } x = \frac{1}{2}, \\ (0, a_2^* a_3^* a_4^* \dots)_2 & \text{dla } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

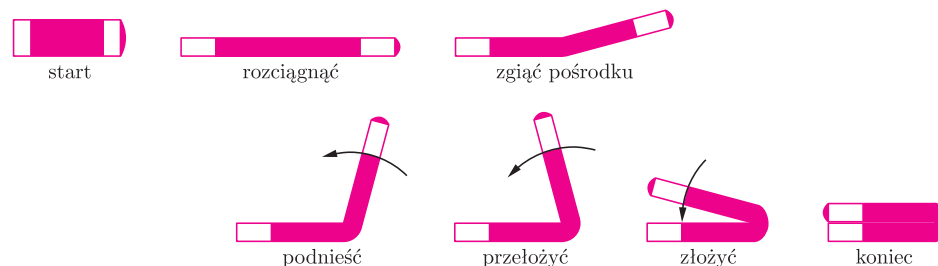
Interpretacja (graficzna) działania P oraz T . Zastanówmy się, co robią przekształcenia P i T z punktami z odcinka $[0, 1]$ w sensie geometrycznym.

Przekształcenie P rozciąga odcinek $[0, 1]$ jednorodnie do podwojenia jego długości, rozcina go w połowie i nakłada rozcięte odcinki jeden na drugi.



Rys. 3

Przekształcenie T rozciąga odcinek $[0, 1]$ jednorodnie do podwojenia jego długości, potem składa go na pół i nakłada połówki (ale bez rozrywania).



Rys. 4

Rozwiązanie zadania M 1266.

Przyjmijmy, że

$$a_i = 1 + i \cdot 100! \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, \dots, 99.$$

Wówczas jeśli d jest wspólnym dzielnikiem pierwszym liczb a_k i a_l , to liczba

$$a_k - a_l = 100!(k - l)$$

jest także podzielna przez d . Skoro d jest liczbą pierwszą, to $d \leq 97$. Jednak wtedy żadna z liczb a_k , a_l nie jest podzielna przez d . Wobec tego każde dwa wyrazy rozpatrywanego ciągu są względnie pierwsze.

Przy wielokrotnym zastosowaniu przekształcenia P lub T punkty z odcinka $(0, 1)$ „wędrują” w nim w trudny do przewidzenia sposób – mówimy, że poruszają się chaotycznie. Przypomina to wałkowanie ciasta francuskiego – sposób ten zapewnia, że szczypta przypraw dodanych do ciasta będzie rozprowadzona w nim równomiernie.

W drugiej części artykułu (*Delta* 3/2010) powiemy, jakie własności charakteryzują chaos (jak dzisiaj nam się wydaje) oraz sprawdzimy, że według tej definicji przekształcenia P i T generują chaotyczne przemieszczanie się punktów w odcinku $(0, 1)$.



mała delta

Labirynt

Sławek uwielbia łamigłówki. Ostatnio jego pasją stały się labirynty. Całe noce spędza na rozwiązywaniu coraz to trudniejszych labiryntów, które generuje mu jego komputer. Pewnego dnia jednak komputer zawiesił się. Sławek postanowił, że w takim razie stworzy swój własny labirynt, a później go rozwiąże. Tylko jak to zrobić? W Internecie można znaleźć kilka algorytmów tworzenia labiryntów. Niestety, większość z nich nie nadaje się do odtworzenia na kartce. Ponadto wiele z nich gwarantuje, że istnieje ścieżka między wejściem a wyjściem, po prostu ją tworząc. Tylko jaką przyjemność będzie miał wtedy Sławek, rozwiązując taki labirynt, skoro już podczas tworzenia go pozna jego rozwiązanie?

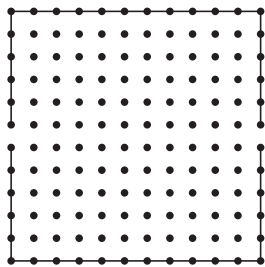
Po kilku godzinach zmagania Sławek wpadł na pomysł. Na samym początku narysował pusty labirynt z jednym wejściem i jednym wyjściem (rysunek 1). Następnie wybrał jeden punkt leżący na brzegu i połączył go z sąsiednim *samotnym* punktem, czyli takim, który nie był jeszcze połączony z żadnym innym. A następnie ten punkt połączył z kolejnym samotnym punktem, i tak dalej, aż powstała jedna ściana labiryntu (rysunek 2). Następnie całą procedurę powtarzał, aż każdy z punktów był połączony z którymś ze swoich sąsiadów (rysunek 3).

Sławek szybko zauważył, że niezależnie od tego, jak będzie tworzył labirynt według tego algorytmu, zawsze będzie istniała ścieżka łącząca wejście z wyjściem. Mało tego! Z każdego miejsca labiryntu można dojść do każdego innego. Dlaczego? Gdy labirynt jest pusty – jest to oczywiste. Wystarczy teraz zauważyć, że własność ta pozostaje zachowana po dorysowaniu każdej kolejnej ściany. Faktycznie, jeśli istniała jakaś droga z jednego miejsca do drugiego, która przechodziła tędy, którą teraz prowadzi ściana, to wystarczy, że drogę tę zmodyfikujemy tak, że obejdziemy tę ścianę dookoła (rysunki 4a i 4b). Możemy to zrobić, bo jeden z końców ściany przed jej narysowaniem musiał być samotny.

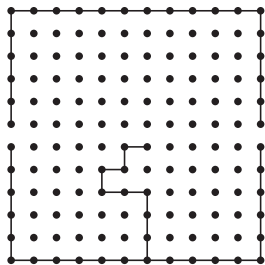
Sławek zauważył jeszcze jedną ciekawą własność swojego labiryntu, a mianowicie to, że istnieje w nim tylko jedno rozwiązanie. Można łatwo zauważyć, że z konstrukcji labiryntu wynika następujący fakt: każda ściana połączona jest (bezpośrednio bądź pośrednio) z górną albo dolną częścią obramowania labiryntu (rysunek 5). No a gdyby istniały dwa istotnie różne rozwiązania, musiałyby istnieć taka ściana, która nie byłaby połączona ani z górnym, ani z dolnym obramowaniem (rysunek 6).

Sławek szybko zaczął się nudzić, więc tworzył coraz to bardziej skomplikowane labirynty. Gdy przestał bawić się kropkami na kartce i liniami prostymi, zaczął otrzymywać ciekawe labirynty, takie jak ten na rysunku 7. Zachęcam Czytelników do dalszych eksperymentów, które mogą okazać się ciekawą rozrywką na długie, zimowe wieczory.

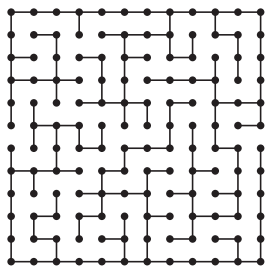
*Małą Deltę przygotował Krzysztof PIECUCH**



Rys. 1



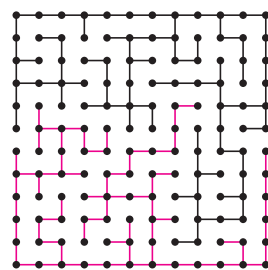
Rys. 2



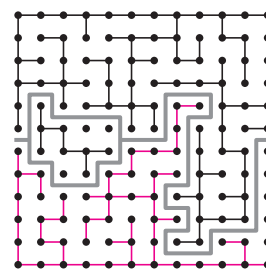
Rys. 3



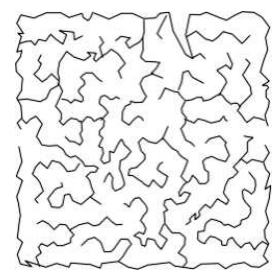
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

*student,
Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Wrocławski

Co z litem się dzieje?

Lit jest najmasywniejszym pierwiastkiem, który pozostał po pierwotnej nukleosyntezie. Lit może być produkowany w gwiazdach, ale warunki umożliwiające jego produkcję jeszcze lepiej radzą sobie z jego destrukcją lub przetwarzaniem w masywniejsze izotopy innych pierwiastków. Dlatego większość atomów litu, które powszechnie występują w akumulatorach laptopów czy kamer cyfrowych, w bateriach zegarków czy rozruszników serca, powstała przed końcem trzeciej minuty po Wielkim Wybuchu.

Badanie rozpowszechnienia litu w gwiazdach jest jednym ze sposobów poznawania procesów ewolucji gwiazd. Odkryto warunki, w których lit może być wytwarzany, ale gwiazdy podobne do Słońca stopniowo go niszczą. Im są starsze, tym mają go mniej. Rozrzut zawartości litu w tego typu gwiazdach jest jednak bardzo duży, a Słońce należy do ubogich w lit.

W pracy [1] autorzy raportują wyniki pomiarów rozpowszechnienia litu wyekstrahowanych z danych zebranych podczas wieloletniego monitorowania 451 podobnych do Słońca gwiazd za pomocą spektroskopu HARPS (*High Accuracy Radial velocity Planet Searcher*). Głównym celem przeglądu jest odkrywanie planet poprzez precyzyjny pomiar zmian prędkości radialnych, z dokładnością nie gorszą niż 1 m/s. Dla 70 z monitorowanych gwiazd obecność planet została potwierdzona. Nie oznacza to, że pozostałe gwiazdy planet nie mają. Planety te, jeżeli istnieją, nie miotają jednak rodzimą gwiazdą wystarczająco mocno.

Okazuje się, że gwiazdy z potwierdzoną obecnością planet mają systematycznie niższą zawartość litu niż te, dla których obecności planet nie udało się dotąd wykryć.

Możliwe wyjaśnienie tej obserwacji jest następujące. Ruchy pływowe, generowane przez obecność planet, wpływają na transport materii w tych gwiazdach, przyspieszając destrukcję litu. Na szczęście zjawisko to nie zmienia zawartości litu w samych planetach, wliczając w to Ziemię, więc publikacja nie powinna spowodować masowego wykupywania baterii (choć, tak naprawdę, zależy to wyłącznie od tego, jak informacja ta zostanie przedstawiona w środkach masowego rażenia). Odkrycie to (w zasadzie należy to raczej traktować jako potwierdzenie zjawiska, którego się spodziewano) być może pozwoli na efektywniejsze poszukiwanie układów planetarnych podobnych do naszego: gwiazdy bogate w lit można sobie raczej darować.

Azot, ukryty bohater?

Gdy na Ziemi pojawiało się życie, czyli około 3,5 miliarda lat temu, Słońce świeciło dużo słabiej niż obecnie. Nasi ewolucyjni praprzodkowie mieli do dyspozycji tylko około 80% ciepła, którym my możemy się cieszyć (w zimie to może nie ma się czym tak bardzo cieszyć, ale wiosna i w tym roku nieuchronnie przyjdzie). Jeżeli bilans ciepła młodej Ziemi byłby taki sam jak dzisiaj, to byłaby ona całkowicie zlodowaciała, wbrew temu, co o jej historii wiemy. Żadne z do niedawna proponowanych rozwiązań, wliczając wysokie koncentracje gazów cieplarnianych takich jak metan, amoniak czy popularny ostatnio ditlenek węgla, nie pozwoliło na stworzenie zadowalającego scenariusza.

Opublikowana niedawno praca [2] zawiera sugestię, że problem można rozwiązać za pomocą azotu. Propozycja jest o tyle zaskakująca, że azot nie jest efektywnym gazem cieplarnianym. Gdyby jednak gazowego azotu było kiedyś dużo więcej niż obecnie, to ciśnienie atmosferyczne byłoby odpowiednio wyższe, co wzmagałoby działanie innych gazów cieplarnianych.

W celu oszacowania ilości azotu w atmosferze miliardy lat temu przebadano izotopowy skład azotu w osadach i skałach. Skład ten zależy od tego, jaka część obecnie związanego azotu była kiedyś w postaci gazowej.

Okazuje się, że od czasów archaiku (3,8–2,5 miliarda lat temu) mniej więcej tyle samo azotu zostało związane w skorupie ziemskiej, co jest go obecnie w atmosferze. Uwolnienie takiej ilości azotu przy obecnej koncentracji gazów cieplarnianych podniosłoby średnią temperaturę o kilka stopni, ale miliardy lat temu ta koncentracja była wielokrotnie wyższa, co pozwalała na wzrost temperatury o kilkanaście stopni i wystarcza, żeby skompensować mniejszą intensywność promieniowania słonecznego.

Jako czynnik wychwytyjący azot wskazywane są oczywiście organizmy żywe. Wygląda na to, że życie na Ziemi miało jeszcze bardziej znaczący wpływ na skład atmosfery, niż sądzono. Nie tylko tlen został wyprodukowany przez rośliny, ale również azot w znacznej części usunięty. Oba te procesy trwają nadal. Np. łubin bardzo sprawnie wiąże azot, a tlen... jest stale produkowany. Pamiętajcie o ogrodach...

Piotr ZALEWSKI

[1] G. Israelian i inni, *Enhanced lithium depletion in Sun-like stars with orbiting planets*, Nature 08483, 12 listopada 2009.

[2] C. Goldblatt i inni, *Nitrogen-enhanced greenhouse warming on early Earth*, Nature Geoscience ngeo692, 15 listopada 2009.

Oszacowanie sumy długości przekątnych

Martha UBIK

Jest to skrót pracy uczniowskiej nagrodzonej srebrnym medalem w XXXI Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki w 2009 roku, Kraków.

W artykule Marka Kordosa *Szacujemy*, który został opublikowany w czasopiśmie *Matematyka – Społeczeństwo – Nauczanie* (41, lipiec 2008), przedstawione jest następujące oszacowanie dla czworokąta wypukłego:

$$\text{pół obwodu} < \text{suma przekątnych} < \text{obwód}.$$

Znajduje się tam również wskazówka dotycząca analogicznego szacowania w pięciokącie. Artykuł zakończony jest kilkoma pytaniami o możliwe uogólnienia tych wyników. Na te pytania starałam się w mojej pracy odpowiedzieć.

W dalszej części będę używać następujących oznaczeń:

- X – obwód rozpatrywanego wielokąta wypukłego;
- D – suma długości przekątnych tego wielokąta;
- n – liczba wierzchołków tego wielokąta (przyjmijmy, że $n > 3$).

W mojej pracy uzyskałam następujące nierówności:

1. dla n parzystego: $\frac{8}{n^2 - 8} < \frac{X}{D} < \frac{2}{n - 3}$;
2. dla n nieparzystego: $\frac{8}{n^2 - 9} < \frac{X}{D} < \frac{2}{n - 3}$.

Poniżej przedstawiam szkic dowodu dolnego oszacowania dla n nieparzystego.

Niech $n = 2k + 1$ dla pewnej liczby naturalnej k . Oznaczmy wierzchołki wielokąta przez A_1, A_2, \dots, A_n .

Dla każdej liczby całkowitej i z przedziału $[1, n]$ prawdziwe są następujące nierówności, które wynikają z nierówności trójkąta (indeksy przy wierzchołkach rozpatrywane są modulo n):

- (1) $|A_i A_{i+2}| < |A_i A_{i+1}| + |A_{i+1} A_{i+2}|$,
- (2) $|A_i A_{i+3}| < |A_i A_{i+1}| + |A_{i+1} A_{i+2}| + |A_{i+2} A_{i+3}|$,
- (3) $|A_i A_{i+4}| < |A_i A_{i+1}| + |A_{i+1} A_{i+2}| + |A_{i+2} A_{i+3}| + |A_{i+3} A_{i+4}|$,
- ⋮
- (k) $|A_i A_{i+k}| < |A_i A_{i+1}| + |A_{i+1} A_{i+2}| + |A_{i+2} A_{i+3}| + \dots + |A_{i+k-1} A_{i+k}|$.

W ten sposób dla każdego indeksu i wypisujemy oszacowania górne dla przekątnych o jednym wierzchołku w A_i , a drugim leżącym nie dalej niż o k wierzchołków od niego, licząc w kierunku odwrotnym do wskazówek zegara (zobacz rys. 1). Przykładowo, gdy $i = 1$, to po lewej stronie wystąpią wszystkie przekątne wychodzące z wierzchołka A_1 , dla których indeks drugiego wierzchołka nie jest większy od $(k + 1)$. Jeśli rozpatrzymy takie nierówności dla wszystkich wierzchołków, to oszacujemy wszystkie przekątne – każdą dokładnie raz.

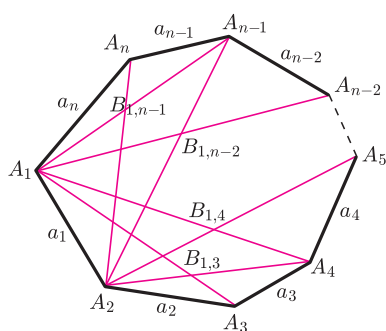
Zauważmy, że każdy bok wielokąta występuje w nierówności typu (1) dwa razy, typu (2) – trzy razy, a ogólnie w nierówności typu (m) – $m + 1$ razy. Dodając powyższe nierówności stronami, otrzymujemy zatem:

$$D < (2 + 3 + 4 + \dots + k) \cdot X = \frac{k(k+1) - 2}{2} \cdot X = \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} - 2}{2} \cdot X = \frac{n^2 - 9}{8} \cdot X.$$

W podobny sposób można uzasadnić dolne oszacowanie w przypadku, gdy liczba boków wielokąta jest parzysta.

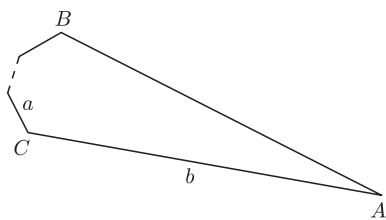
Aby wykazać prawdziwość górnego oszacowania, wystarczy zauważyć, że sumę długości każdej pary niesąsiadujących boków można oszacować z góry przez sumę długości łączących je przekątnych (rys. 1). Ponieważ każdy koniec każdej przekątnej ma punkt wspólny z dwoma bokami, a każdy koniec każdego boku ma punkt wspólny z $(n - 3)$ przekątnymi, to, dodając stronami wszystkie takie nierówności, otrzymamy oczekiwane oszacowanie.

Okazuje się, że przedstawione powyżej nierówności są optymalne, tzn. dla każdego $n > 3$ istnieje wielokąt wypukły, dla którego wartość wyrażenia $\frac{X}{D}$ jest dowolnie bliska liczbie $\frac{2}{n-3}$ oraz wielokąt, dla którego ta wartość jest dowolnie bliska liczbie $\frac{8}{n^2-8}$ dla n parzystego, a $\frac{8}{n^2-9}$ dla n nieparzystego.

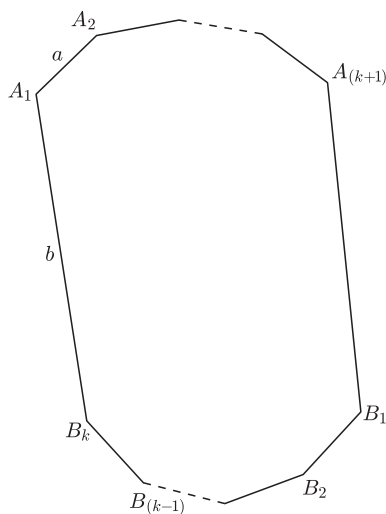


Rys. 1. $|a_1| < |A_1 B_{1,3}| + |A_2 B_{1,3}|$,
 $|a_3| < |A_3 B_{1,3}| + |A_4 B_{1,3}|$,
 $|a_1| + |a_3| < |A_1 A_3| + |A_2 A_4|$.

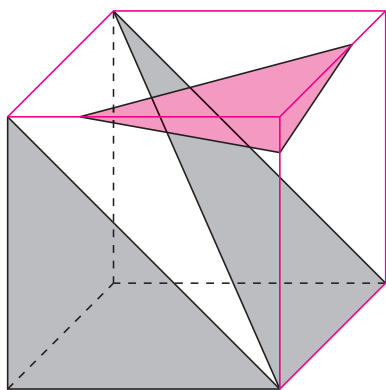
W przypadku wielokąta o liczbie boków $n = 2k$ należy uwzględnić, że przekątne, które łączą wierzchołki o numerach różniących się o k , występują w powyższych nierównościach dwukrotnie.



Rys. 2

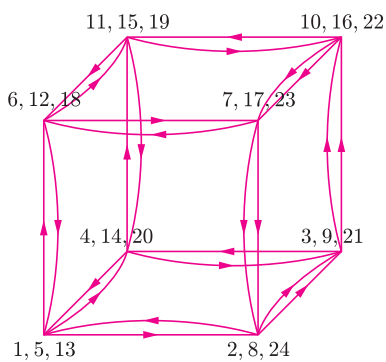


Rys. 3



Rys. 4

Cykl Eulera to taki cykl w grafie, który przechodzi przez każdą jego krawędź dokładnie raz.



Rys. 5

Rozważmy najpierw wielokąt z rysunku 2. Zaczniemy od ustalenia punktów B i C . Chcielibyśmy, żeby w naszym wielokącie boki AB i AC miały długość b , a pozostałe boki (możemy narysować ich dowolnie dużo) – długość a . Taki wielokąt istnieje dla każdego $b > \frac{|BC|}{2}$. Wystarczy wykazać, że dla dostatecznie dużej wartości b stosunek $\frac{X}{D}$ przyjmie wartość dowolnie bliską liczbie $\frac{2}{n-3}$. To stwierdzenie na pewno wyda się intuicyjne, gdy przypomnimy sobie pomysł na dowód oszacowania górnego: wierzchołek A należy do 2 boków i $n - 3$ przekątnych. Dokładne rachunki pominiemy.

Natomiast w celu wykazania, że optymalne jest dolne oszacowanie w przypadku nieparzystokąta, można rozpatrzyć wielokąt z rysunku 3 o dwóch bokach A_1B_k i B_1A_{k+1} długości b i pozostałych bokach długości a .

Podobny problem można rozważyć w przypadku wielościanów. Nazwijmy *przekrojem trójkątnym* trójkąt, którego wszystkie wierzchołki należą do zbioru wierzchołków rozważanego wielościanu wypukłego. Przykładowo, pośród trójkątów zacieniowanych na rysunku 4, przekrojami trójkątnymi są szare, a nie jest takim przekrojem kolorowy. Niech w będzie liczbą wierzchołków wielościanu, T oznacza sumę pól wszystkich przekrojów trójkątnych danego wielościanu, a S pole powierzchni całkowitej tej bryły. Można oszacować wartość wyrażenia $\frac{T}{S}$.

Ja otrzymałam wynik:

$$\frac{\binom{w}{3}}{2} > \frac{T}{S} \geq \max\left(1, \frac{w}{12}\right).$$

Może Tobie, Czytelniku, uda się to oszacowanie poprawić?

Drugi problem „przestrzenny” dotyczy przekątnych wielościanu. Niech tym razem X oznacza sumę długości krawędzi danego wielościanu, a D sumę długości przekątnych wielościanu oraz przekątnych jego ścian. Niech ponadto k i w będą odpowiednio liczbą krawędzi oraz liczbą wierzchołków danego wielościanu ($w > 4$).

Oszacowanie górne wyrażenia $\frac{X}{D}$ ze względu na w nie jest możliwe, bo dla każdego $w > 3$ można skonstruować ostrosłup o dowolnie dużej odległości wierzchołka od płaszczyzny podstawy, a wraz z jej wzrostem zwiększa się wartość tego wyrażenia (jedynymi składnikami D są długości przekątnych podstawy, a one nie zmieniają się przy zmianie wysokości ostrosłupa; zwiększają się natomiast długości krawędzi bocznych). Zatem wartość wyrażenia $\frac{X}{D}$ nie jest ograniczona z góry.

Można natomiast szacować z dołu. Jeśli podwoimy szkielet wielościanu, tzn. potraktujemy go jako graf i każdą krawędź zamienimy na dwie o tych samych wierzchołkach, to wówczas z każdego wierzchołka wielościanu będzie wychodzić parzysta liczba krawędzi, co jest warunkiem wystarczającym do istnienia cyklu Eulera w skonstruowanym w ten sposób grafie. Na rysunku 5 przedstawiony jest taki cykl dla sześcianu. Liczby przy wierzchołkach oznaczają kolejność odwiedzania w cyklu Eulera. Można dokonać podobnego szacowania jak w przypadku płaszczyzny, tzn. długość odcinka łączącego wierzchołek odwiedzany w cyklu Eulera jako i -ty z wierzchołkiem odwiedzanym w cyklu jako j -ty oszacować przez sumę długości odcinków łączących wierzchołek o numerze i z $(i + 1)$, $(i + 1)$ z $(i + 2)$, ..., $(j - 1)$ z j . Trzeba jednak uwzględnić, że nie każdy odcinek łączący wierzchołki o niekolejnych indeksach jest przekątną wielościanu lub przekątną jego ściany. Przykładowo, na rysunku 5 odcinek łączący piąty wierzchołek cyklu z wierzchołkiem dwunastym jest krawędzią, a odcinek łączący wierzchołek szósty z wierzchołkiem dwunastym jest zdegenerowany do punktu.

Powyższą metodą otrzymałam nierówność:

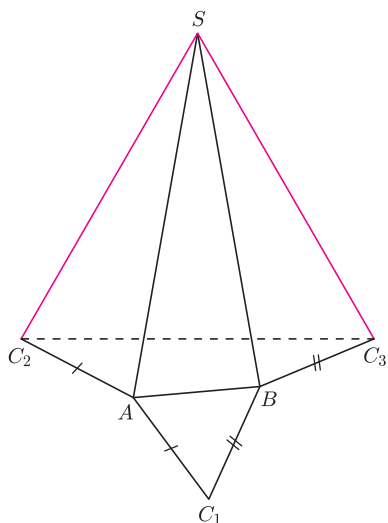
$$(*) \quad \frac{9}{2k^2 - 10k - 3w} < \frac{X}{D}.$$

Ponieważ $k \geq \frac{3}{2}w$, więc dla $k > 6$ mianownik lewej strony nierówności $(*)$ będzie dodatni. Dla $k = 6$ i $w = 4$ (dla czworościanu) mianownik ten zeruje się – czworościan nie ma przekątnych ani przekątnych ścian.

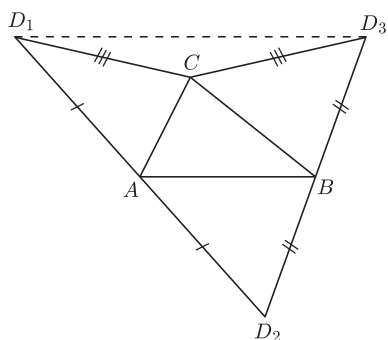
Pozostaje pytanie, czy powyższe oszacowanie jest optymalne. Wszystkich Czytelników zachęcam do próby znalezienia odpowiedzi, gdyż nie udało mi się ani znaleźć optymalnego przykładu, ani poprawić oszacowania. Opisany tu temat z pewnością nie jest wyczerpany, więc namawiam, by przyjrzeć mu się uważnie.

Kącik przestrzenny

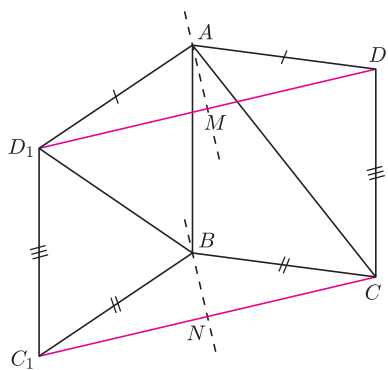
Metoda siatek



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zadania rozwiązywane w kolejnych odcinkach zwykle będą pochodzić z konkursów matematycznych z różnych krajów. Wyjaśnienia skrótów nazw znajdziecie na stronie Delti.

W tym odcinku, oprócz zadań z polskich konkursów, mamy zadanie z Olimpiady Matematycznej Czech i Słowacji.

Pierwszy kącik poświęcimy metodzie siatek przydatnej w rozwiązywaniu zadań przestrzennych. Powierzchnię wielościanu występującego w zadaniu można rozciąć i rozłożyć na płaszczyźnie. W ten sposób często uzyskamy zależności, których nie widać w przestrzeni. To podejście jest szczególnie skuteczne, gdy wszystkie obiekty rozpatrywane w zadaniu są położone na powierzchni wielościanu. Ale nawet jeśli występują jakieś inne elementy, to często przyglądając się siatce można uzyskać przydatne wnioski albo chociaż bardziej czytelny rysunek do zadania. Warto przy tym pamiętać, że siatkę możemy skonstruować także dla wielościanów zdegenerowanych – jeśli teza zadania dla przypadku zdegenerowanego jest nieprawdziwa, to znaczy, że niektóre siatki trzeba wykluczyć z rozważań.

Zajmiemy się tutaj jedynie takimi zadaniami, w których narysowanie siatki faktycznie wnosi coś nowego do rozwiązania.

1. (OMG 2-II-5) *Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa ABCS, w którym*
 $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = 20^\circ$.

Wykazać, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości każdej krawędzi AS, BS, CS.

Rozwiązanie. Rozetnijmy powierzchnię ostrosłupa wzdłuż krawędzi AC, BC, SC i rozłóżmy ją na płaszczyźnie. W ten sposób uzyskujemy sześciokąt $AC_1BC_3SC_2$ będący siatką tego ostrosłupa (rys. 1). Ponieważ $SC_2 = SC_3$ oraz $\sphericalangle C_2SC_3 = \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC + \sphericalangle CSA = 60^\circ$, więc trójkąt C_2C_3S jest równoboczny. Stąd

$$CA + AB + BC = C_2A + AB + BC_3 \geq C_2C_3 = CS.$$

Analogicznie dowodzimy, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości pozostałych krawędzi bocznych.

2. (CZS 1995) *W czworościanie ABCD sumy kątów płaskich przy wierzchołkach A i B wynoszą po 180° . Wykazać, że $CD \geq AB$.*

Rozwiązanie. Rozpatrzmy sześciokąt $D_1AD_2BD_3C$ będący siatką czworościanu ABCD (rys. 2). Z treści zadania wynika, że punkty A i B leżą odpowiednio na odcinkach D_1D_2 i D_2D_3 . Ponadto z równości $AD_1 = AD_2$ i $BD_2 = BD_3$ wynika, że $D_1D_3 = 2AB$. Korzystając z nierówności trójkąta D_1CD_3 , otrzymujemy

$$2CD = CD_1 + CD_3 \geq D_1D_3 = 2AB.$$

3. (OM 47-III-4) *W czworościanie ABCD zachodzą równości*
 $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$ oraz $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$.

Dowieść, że krawędzie AB i CD mają jednakową długość.

Rozwiązanie. Rozpatrzmy sześciokąt AD_1C_1BCD będący siatką czworościanu ABCD (rys. 3). Przepisując równości dane w treści zadania jako

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABD_1 = \sphericalangle BD_1C_1,$$

widzimy, że proste CD , AB i C_1D_1 są równoległe. Stąd i z równości $CD = C_1D_1$ wynika, że czworokąt CDD_1C_1 jest równoległobokiem. Biorąc pod uwagę M i N, środki odcinków DD_1 i CC_1 , uzyskamy również równoległość prostych CD i MN , a więc też AB i MN . Ponieważ $AD = AD_1$ i $BC = BC_1$, to punkty A i B leżą na symetrycznych odcinkach DD_1 i CC_1 . Skoro jednak odcinki CC_1 i DD_1 są równoległe, to ich symetralne również. To wraz z poprzednim spostrzeżeniem, że $AB \parallel MN$, oznacza, iż czworokąt $ABNM$ jest równoległobokiem. W takim razie $AB = MN = CD$ (uważny Czytelniku z pewnością dostrzeże, że z rozwiązania wynika także równość $AD = BC$).

Szczęśliwi oddajemy takie rozwiązanie zadania na olimpiadzie matematycznej, a potem ze zdziwieniem zauważamy, że obcięto nam punkty. Dlaczego?

No właśnie, po chwili zastanowienia dostrzegamy, że dowolny trapez spełnia założenia zadania, a nie musi spełniać tezy. Gdzieś więc milcząco skorzystaliśmy

z tego, że czworoscian $ABCD$ jest niezdegenerowany. Po dokładniejszym przyjrzeniu się stwierdzamy, że dowód psuje się tylko w przypadku, gdy symetralne odcinków CC_1 i DD_1 pokrywają się (punkty A, B, M, N leżą wtedy na jednej prostej i nie można stąd wywnioskować, że $ABNM$ jest równoległobokiem, choćby zdegenerowanym do odcinka). To ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BAC + \sphericalangle DAC$. Jednakże w dowolnym niezdegenerowanym czworoscianie w każdym wierzchołku suma dwóch kątów płaskich jest większa od trzeciego, więc w przypadku niezdegenerowanym wspomniane proste nie mogą się pokryć. Na takie niespodzianki należy bardzo uważać, dlatego zawsze warto zastanowić się, co się dzieje w przypadku zdegenerowanym.

Zadania

4. (OM 51-III-4) W ostrostupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2\dots A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° . Dla każdej liczby $n \geq 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty B_2, B_3, \dots, B_n , leżące odpowiednio na krawędziach A_2S, A_3S, \dots, A_nS , że

$$A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \dots + B_{n-1}B_n + B_nA_1 < 2A_1S.$$

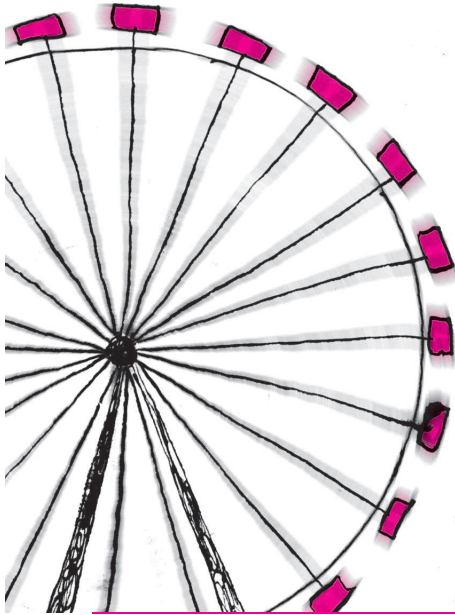
5. (UKR 1996) W czworoscianie $SABC$ zachodzą równości

$$\sphericalangle SAC + \sphericalangle CAB = \sphericalangle SBA, \quad \sphericalangle SAB + \sphericalangle CAB = \sphericalangle SCA, \quad SB + SC = SA.$$

Wyznaczyć miarę kąta między dwusiecznymi kątów płaskich ASB i ASC tego czworoscianu.

Więcej zadań na internetowej stronie *Delty*.

Michał KIEZA



Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1264. Ciąg x_1, x_2, \dots liczb całkowitych dodatnich jest określony rekurencyjnie w następujący sposób: liczba x_{n+1} powstaje z liczby x_n poprzez dodanie do niej wartości liczbowej pewnej niezerowej cyfry zapisu dziesiętnego liczby x_n . Rozstrzygnąć, czy tak określony ciąg x_1, x_2, \dots może składać się jedynie z liczb nieparzystych.

Rozwiązanie na str. 1

M 1265. Dany jest zbiór S na płaszczyźnie. Punkt $A \in S$ nazwiemy punktem *widokowym* zbioru S , jeśli dla każdego punktu $X \in S$ odcinek AX należy do zbioru S . Wykazać, że jeżeli punkty A i B są punktami widokowymi zbioru S , to każdy punkt odcinka AB jest także punktem widokowym zbioru S .

Rozwiązanie na str. 8

M 1266. Znaleźć 100-wyrazowy, niestały, ciąg arytmetyczny liczb całkowitych dodatnich, w którym każde dwa wyrazy są względnie pierwsze.

Rozwiązanie na str. 11

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 755. Dwie bańki mydlane o promieniach r_1 i r_2 zlewają się, tworząc jedną bańkę o promieniu r_3 . Znając napięcie powierzchniowe σ , znaleźć ciśnienie atmosferyczne.

Rozwiązanie na str. 10

F 756. Woda w garnku jest podgrzewana za pomocą grzałki elektrycznej o mocy $P = 1000$ W. W ciągu dwóch minut temperatura wody wzrosła z 85°C do 95°C . Grzałka została wyłączona, a temperatura wody spadła w ciągu jednej minuty o jeden stopień. Ile wody znajdowało się w garnku? Ciepło właściwe wody wynosi $4,19 \cdot 10^3$ J/(kg · K).

Rozwiązanie na str. 24

Doświadczenia z elastyczną kulą wodną (część 2)

Stanisław BEDNAREK

Dzisiaj będziemy kontynuowali doświadczenia z elastyczną kulą wodną. Do przeprowadzenia niektórych z nich potrzebne są dwie takie kule. Na szczęście, są one tanie i łatwo dostępne w sklepach z zabawkami lub kioskach, a także na bazarach i u ulicznych sprzedawców.

Mając już dwie kule, zabieramy się do pierwszego eksperymentu. Wykorzystamy w nim kule wodne w charakterze interesującej karuzeli. Uchwyty dwóch zabawek składamy razem i przytrzymujemy palcami jednej ręki, tak żeby kule i taśmy zwisały swobodnie. Palcami drugiej ręki ujmujemy obie kule, po czym, obracając je kilkadziesiąt razy wokół osi pionowej, skręcamy taśmy (fot. 1). Następnie puszczamy kule swobodnie. Zauważamy, że taśmy się rozkręcają, a kule poruszają się po okręgu w płaszczyźnie poziomej. Taśmy podtrzymujące kule odchylają się przy tym od pionu (fot. 2). Jest to spowodowane działaniem sił odśrodkowych, podobnie jak w doświadczeniu z kulą poruszającą się ruchem jednostajnym po okręgu w płaszczyźnie poziomej.

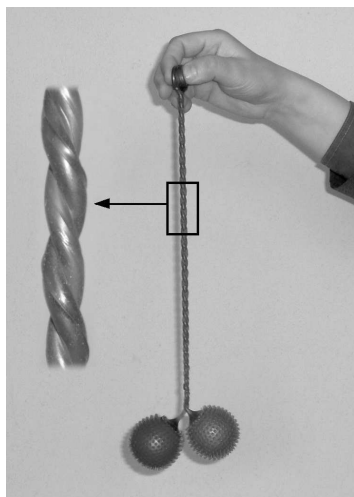
Wraz z rozkręcaniem się taśm prędkość kątowna kul i ich kąt odchylenia wzrastają. Ponieważ kule oddalają się od osi obrotu, wzrasta również ich sumaryczny moment bezwładności. Rozpędzone kule ponownie skręcają taśmy w odwrotnym kierunku i opisane efekty się powtarzają, przy czym energia mechaniczna układu stopniowo maleje wskutek występowania oporów ruchu. Doświadczenie to w interesujący sposób ilustruje dynamikę ruchu obrotowego układu o zmiennym momencie bezwładności i przemiany energii mechanicznej.

Zastanówmy się jeszcze chwilę nad opisem ruchu kul. Po skręceniu taśm zostaje w nich zmagazynowana energia potencjalna sprężystości. Kiedy kule puścimy swobodnie, energia ta zmienia się na energię kinetyczną ruchu obrotowego kul oraz grawitacyjną energię potencjalną. (Pomijamy tutaj niewielką energię potencjalną sprężystości taśm spowodowaną ich rozciągnięciem przez wypadkowe siły działające na kule). Rozpędzone kule dzięki swojej bezwładności poruszają się nadal w tym samym kierunku,

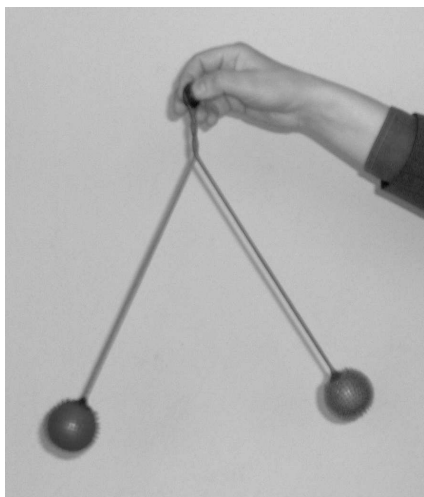
co powoduje ponowne skręcanie taśm. W tym czasie energia kinetyczna ruchu obrotowego zmienia się w energię potencjalną sprężystości. Gdy kule zatrzymają się, układ znowu ma tylko energię potencjalną sprężystości. Następnie opisany cykl przemian energii się powtarza. Gdyby nie straty energii mechanicznej w wyniku tarcia o powietrze i niedoskonałej sprężystości taśm, to ilości obu rodzajów energii byłyby dokładnie równe i ruch układu trwałby nieskończenie długo.

Wraz ze wzrostem prędkości ruchu kul wzrasta wartość działającej na każdą z nich siły odśrodkowej. Siły odśrodkowe mają tu kierunek poziomy. Z kolei siła ciężkości każdej z kul ma kierunek pionowy. Taśmy ustawiają się wzdłuż wypadkowej tych sił, która, jak łatwo zauważyć, ma kierunek ukośny. Gdy prędkość ruchu kul wzrasta, to również zwiększa się wartość siły odśrodkowej i wypadkowa tych sił zostaje bardziej odchylona od pionu. Przejawia się to większym kątem odchylenia taśm od pionu. Ponieważ kształt układu nie jest stały – zmienia się kąt nachylenia taśm i odległość kul od osi obrotu – więc moment bezwładności układu też się zmienia. Wzrasta on wraz ze wzrostem odległości między kulami i jest wprost proporcjonalny do kwadratu tej odległości. Sprawi to trudność tym, którzy chcieliby opisać ilościowo ruch układu, stosując do tego celu prostą postać drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego, znaną, być może, ze szkoły. Oczywiście, druga zasada dynamiki stosuje się do tego przypadku, ale trzeba skorzystać z jej postaci różniczkowej, czym tutaj nie będziemy się zajmowali.

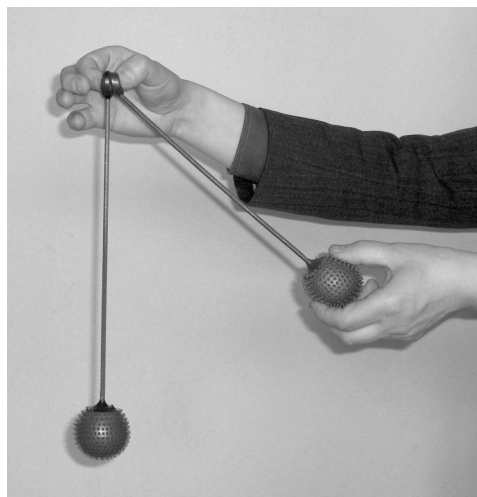
W następnym doświadczeniu zbadamy zderzenie ciał częściowo sprężystych. Uchwyty dwóch zabawek składamy razem i trzymamy palcami jednej ręki, tak żeby taśmy i kule zwisały swobodnie, a kule stykały się. Jedną z kul chwytamy



Fot. 1. Przygotowanie elastycznych kul wodnych do uruchomienia karuzeli.



Fot. 2. Działanie karuzeli złożonej z dwóch elastycznych kul wodnych.



Fot. 3. Przygotowanie elastycznych kul wodnych do badania zderzenia ciał częściowo sprężystych.

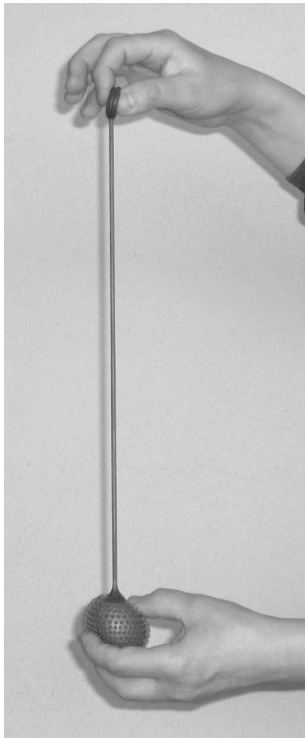
palcami drugiej ręki, odchylamy od pionu o pewien kąt i puszczamy swobodnie (fot. 3). Odchylona kula, wracając do położenia równowagi, uderza w nieruchomą kulę i powoduje jej ruch. Sama przy tym zmniejsza swoją prędkość i też wychyla się o pewien kąt. Między kulami zachodzi zderzenie częściowo sprężyste, które jest charakteryzowane przez współczynnik sprężystości k ($0 < k < 1$). Pęd kul w tym zderzeniu jest zachowany, natomiast energia kinetyczna zachowana jest częściowo. Ilość zachowanej energii określa właśnie współczynnik sprężystości k .

Warto tutaj dodać, że zderzenie częściowo sprężyste jest najbardziej adekwatnym modelem rzeczywistych zderzeń i występuje np. podczas kolizji pojazdów. Dlatego też doświadczenie to jest przykładem realistycznego typu zderzenia. Jeżeli dwie zabawki zawiesimy jedną obok drugiej za uchwyty, np. nakładając je na jeden lub dwa poziome pręty albo przywiązując je do prętów kawałkami nici, to będziemy mogli badać bardziej złożone przypadki zderzeń. Mogą to być zderzenia, w których obie kule mają niezerowe prędkości początkowe, zderzenia skośne i zderzenia niecentralne.

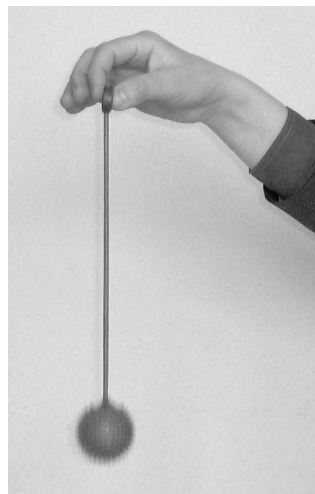
Zderzenia niecentralne często występują w mikroświecie, z tym że zderzenie określa się wtedy jako sprężyste (elastyczne), jeśli przed i po zderzeniu mamy do czynienia z tymi samymi obiektami. Przykładem sprężystego zderzenia niecentralnego jest rozpraszanie Rutherforda, które polega na odchyleniu kierunku ruchu cząstek alfa, przelatujących w pobliżu jądra atomowego. Zarówno jądro, jak i cząstki alfa mają dodatnie ładunki elektryczne, które, odpychając się wzajemnie, powodują odchylenie toru ruchu cząstki alfa. Jądro związane z siecią krystaliczną ciała stałego pozostaje praktycznie nieruchome. Z kolei akceleratory cząstek elementarnych buduje się zwykle do badania zderzeń niesprężystych, czyli takich, w których produkowane są nowe cząstki.

Tematem kolejnego doświadczenia będzie wahadło sprężynowe. Nieruchoma zabawka zwisa, trzymana palcami jednej ręki za uchwyt.

Pociągamy palcami drugiej ręki za kulę pionowo w dół i puszczamy ją swobodnie (fot. 4). Zauważamy, że kula zaczyna wykonywać drgania w kierunku pionowym wokół położenia równowagi (fot. 5).



Fot. 4. Elastyczna kula wodna przed wykorzystaniem jej w roli wahadła sprężynowego.



Fot. 5. Wahadło sprężynowe wykonane z elastycznej kuli wodnej.

Ponieważ siła sprężystości ma wartość wprost proporcjonalną do wychylenia i jest zwrócona w stronę położenia równowagi, są to drgania harmoniczne. Elastyczna taśma spełnia w tym przypadku rolę zwykle używanej do tego celu sprężyny spiralnej.

Kulę wodną możemy także wykorzystać do doświadczeń o charakterze ilościowym. Masę drgającej kuli łatwo zwiększyć, nakładając na nią obciążniki o znanej masie, np. wykonane z kawałków plasteliny. Z kolei długość początkową elastycznej taśmy można skracać bez jej ucinania. Wystarczy chwycić palcami lub zamocować zabawkę za taśmę poniżej uchwytu. Pozwala to na sprawdzenie znanego dla wahadła sprężynowego wzoru na jego okres drgań T :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

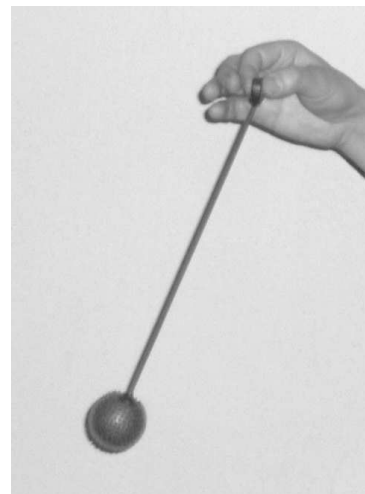
gdzie m oznacza masę kuli wraz z ewentualnymi dodatkowymi obciążnikami, a k jest współczynnikiem sprężystości aktualnie drgającej części taśmy (nie mylić z oznaczanym tą samą literą współczynnikiem sprężystości zderzenia!).

Zobaczymy teraz, jak działa wahadło o zmiennej długości. W tym celu przytrzymujemy palcami jednej ręki uchwyt zabawki – tak żeby taśma miała kierunek pionowy i kula zwisała swobodnie. Drugą ręką chwytamy kulę, odchylamy ją od pionu o pewien kąt i puszczamy swobodnie. Odchylona kula wraz z taśmą wraca do położenia równowagi, wychyla się w przeciwną stronę i znowu wraca do tego położenia (fot. 6). Następnie opisane ruchy powtarzają się, a ich amplituda, czyli maksymalne wychylenie z położenia równowagi, stopniowo maleje na skutek istnienia oporów ruchu. Uważnie obserwując ruch kuli, stwierdzamy, że długość taśmy ulega przy tym zmianom.

Obserwowany efekt wyjaśniamy tym, że na kulę poruszającą się po łuku działa siła odśrodkowa, która powoduje rozciąganie elastycznej taśmy. Wartość tej siły jest proporcjonalna do kwadratu prędkości kuli i jest większa przy przechodzeniu kuli w pobliżu położenia równowagi, kiedy jej prędkość też jest większa. W doświadczeniu tym kula wykonuje ruch złożony z dwóch prostych ruchów – ruchu posuwisto-zwrotnego wzdłuż taśmy i ruchu wahadłowego po łuku. Ruch wzdłuż taśmy jest szybciej tłumiony niż ruch wahadłowy, dlatego w krótkim czasie

drgania kuli stają się zbliżone do drgań wahadła fizycznego. Zanim to nastąpi, ruch kuli ma bardzo widowiskowy i interesujący charakter. Ilościowy opis całego ruchu nie jest zadaniem łatwym i wykracza poza ramy tego kącika.

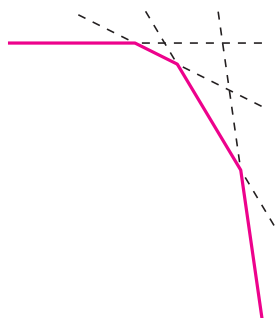
Tyle doświadczeń z elastycznymi kulami wodnymi na dzisiaj. Zachowajmy te kule, ponieważ przydadzą nam się jeszcze za miesiąc, kiedy będziemy kontynuowali doświadczenia z ich wykorzystaniem.



Fot. 6. Elastyczna kula wodna jako wahadło o zmiennej długości.

Informatyczny kącik olimpijski (26): Pościągcy

Kolejny kącik poświęcamy zadaniu *Harbingers (Pościągcy)* z Olimpiady Informatycznej Środkowej Europy 2009.



Rozważmy pewne państwo z wyróżnioną stolicą, w którym sieć dróg tworzy drzewo (tj. nieskierowany graf spójny bez cykli). W każdym mieście (wierzchołku grafu) i znajduje się posłaniec o parametrach: s_i – czas w minutach potrzebny na przygotowanie do podróży, v_i – liczba minut, w ciągu których przebywa kilometr trasy. Znamy też długości poszczególnych dróg. Aby przesłać wiadomość z pewnego miasta x do stolicy, należy wysłać stamtąd posłańca w jej kierunku (w drzewie jest on wyznaczony jednoznacznie). Na swej trasie, w dowolnym mieście może on albo postanowić kontynuować podróż w kierunku stolicy, albo skończyć podróż i przekazać wiadomość kolejnemu posłańcowi, który będzie musiał przygotować się do podróży i kontynuować dzieło poprzednika z podobnymi opcjami w każdym kolejno napotkanym mieście. Zmian posłańców na drodze do celu może być dowolnie wiele, ale każdy następny potrzebuje czasu na przygotowanie się. Dla każdego miasta chcielibyśmy obliczyć, w ile minut można najszybciej przesłać stamtąd wiadomość do stolicy.

Jako pierwsze nasuwa się rozwiązanie o złożoności $O(n^2)$. Obliczamy wyniki w_i dla kolejnych wierzchołków, poczynając od tych najbliższych stolicy. Zacniemy od $w_s = 0$ dla samej stolicy. Dla każdego kolejnego wierzchołka i musimy zdecydować, do którego miasta powinien dojść posłaniec wysłany z i przed pierwszą zmianą. Niech będzie to miasto j , oczywiście na drodze z i do stolicy. Wtedy $w_i = \min_j \{s_i + v_i \cdot odl(i, j) + w_j\}$, przy czym $odl(i, j)$ jest odległością pomiędzy miastami i oraz j . Jeżeli na samym początku obliczymy odległości d_i od stolicy do wszystkich miast, to możemy przekształcić nasz wzór tak: $w_i = \min_j \{s_i + v_i \cdot (d_i - d_j) + w_j\}$; jego bezpośrednie zastosowanie daje rozwiązanie o złożoności $O(n^2)$.

Okazuje się, że rozwiązanie to można usprawnić. Zacznijmy od dalszego przekształcenia naszego wzoru: $w_i = s_i + v_i \cdot d_i + \min_j \{w_j - d_j \cdot v_i\}$. Wśród prostych o równaniach $y = w_j - d_j \cdot x$ (wciąż dla j ze ścieżki łączącej i ze stolicą) będziemy szukać tej, która leży najniżej dla $x = v_i$. Współczynniki kierunkowe tych prostych dla kolejnych j są uporządkowane malejąco, bo odległość od stolicy jest coraz większa. Aby efektywnie znajdować najniższą prostą, pamiętamy dla kolejnych przedziałów, która prosta jest najniższej na danym przedziale (patrz rysunek powyżej).

Będziemy przechodzić nasze drzewo w głąb (ze stolicy), obliczając kolejne w_i i utrzymując taką strukturę prostych dla aktualnej ścieżki ze stolicy do wierzchołka, w którym jesteśmy. Będziemy wykonywać trzy rodzaje operacji:

1. wyszukanie w strukturze prostej o najmniejszej wartości y dla $x = v_i$, aby móc obliczyć w_i ;
2. wstawienie nowej prostej i aktualizacja struktury;
3. wyrzucenie takiej prostej i cofnięcie zmian w strukturze (przy cofaniu się w przeszukiwaniu grafu).

Pierwszą operację wykonujemy za pomocą prostego wyszukiwania binarnego po końcach przedziałów zawartych w strukturze. Druga wymaga usunięcia pewnej liczby prostych z prawej strony (potencjalnie żadnej) i umieszczenia na ich miejscu nowej. Nowo wstawiona prosta jest zawsze położona najbardziej na prawo, bo

ma najmniejszy współczynnik kierunkowy. Aby móc wykonywać trzecią operację, usuwane w drugiej operacji proste musimy jakoś przechowywać w pamięci. W tym celu do implementacji naszej struktury użyjemy tablicy, którą będziemy wypełniać, począwszy od skrajnie lewych komórek, zaopatrzonej w licznik aktualnie używanych komórek. Przy wstawianiu nowej prostej zapamiętujemy gdzieś na boku, co znajdowało się w komórce tablicy, w której tę prostą umieściliśmy, oraz ile prostych usunęliśmy ze struktury (a więc stała ilość danych dla każdej operacji). Poniżej zilustrowano przebieg wstawiania prostej x do struktury w dwóch różnych przypadkach. Dane na białym tle nie są w aktualnej strukturze, ale znajdują się w tablicy i mogą kiedyś posłużyć do odtwarzania wcześniejszej zawartości struktury. Widać, że w obu przypadkach można później, przy cofaniu się w przeszukiwaniu grafu, zrekonstruować wyjściową zawartość struktury.

a	b	c	d	e	f	g	
---	---	---	---	---	---	---	--

 licznik = 4

Przypadek 1:

a	b	x	d	e	f	g	
---	---	---	---	---	---	---	--

 licznik = 3
wyrzucone: 2, zapamiętane: c

Przypadek 2:

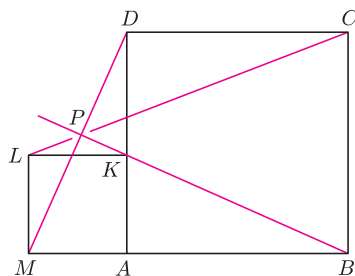
a	b	c	d	x	f	g	
---	---	---	---	---	---	---	--

 licznik = 5
wyrzucone: 0, zapamiętane: e

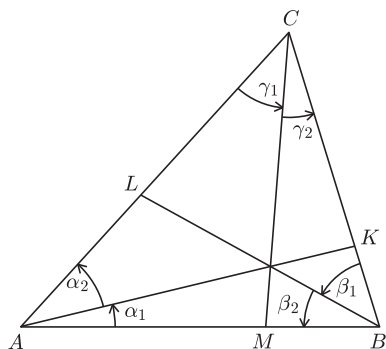
Zaznaczmy, że w drugiej operacji należy binarnie wyszukać, ile prostych z końca trzeba usunąć. Tak więc, operacje pierwszą i drugą wykonujemy w czasie logarytmicznym, a trzecią w czasie stałym. Otrzymujemy algorytm działający w czasie $O(n \log n)$ i pamięci $O(n)$.

Dodajmy na koniec, że w tym zadaniu w połowie testów stopień każdego z wierzchołków był równy co najwyżej 2. Polecamy Czytelnikowi zastanowienie się, na ile upraszcza to omawiany algorytm i czy w tym przypadku istnieje szybsze asymptotycznie rozwiązanie.

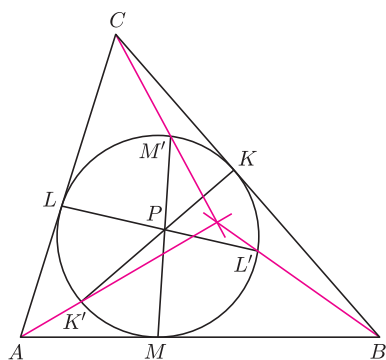
Tomasz KULCZYŃSKI



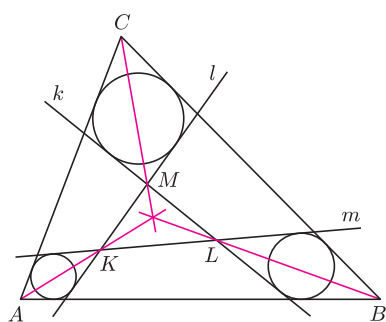
Rys. 1



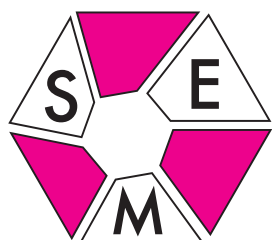
Rys. 2



Rys. 3. K, L, M to punkty styczności, P – obrany dowolnie.



Rys. 4. k, l i m są styczne do okręgów.



Na najnowszym plakacie SEM widnieje dwanaście konfiguracji geometrycznych, których wspólną cechą jest to, że narysowane czerwone proste przecinają się w jednym punkcie (zob. okładka). W niniejszym tekście proponujemy cztery metody, które można wykorzystać do dowodu tej własności, jak również wskazówki ułatwiające ich zastosowanie.

- Rozwiązując zadania, których ilustrację stanowi pierwszy wiersz plakatu, warto pamiętać o tym, **kiedy na czworokącie wypukłym można opisać okrąg**.

Spójrzmy na środkowy z rysunków pierwszego wiersza plakatu (i również na rysunek 1). Aby wykazać, że proste MD , BK i CL przecinają się w jednym punkcie, należy zauważyć, iż punkt P , w którym przecinają się proste MD i BK , leży jednocześnie na okręgu opisanym na kwadracie $ABCD$ oraz na okręgu opisanym na kwadracie $AKLM$. Wówczas $\sphericalangle LPM = \sphericalangle LAM = 45^\circ$ (jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku). Podobnie $\sphericalangle DPC = \sphericalangle DAC = 45^\circ$. Stąd $\sphericalangle LPM = \sphericalangle DPC$, czyli punkty L, P, C są współliniowe.

- W kolejnych trzech zadaniach przydaje się **trygonometryczna wersja twierdzenia Cevy**, w której klasyczny warunek dotyczący długości wektorów jest zastąpiony przez warunek wiążący sinusy pewnych kątów: *jeśli w trójkącie ABC punkty K, L, M leżą odpowiednio na prostych BC, CA i AB , to proste AK, BL i CM przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1,$$

gdzie kąty $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ są kątami skierowanymi odpowiednio między półprostymi AB i AK, AK i AC, BC i BL, BL i BA, CA i CM oraz CM i CB (rys. 2).

Spójrzmy teraz na środkowy rysunek drugiego wiersza plakatu (i rysunek 3). Aby wykazać, że proste AK', BL' oraz CM' przecinają się w jednym punkcie, wystarczy skorzystać z tego twierdzenia dla trójkątów AML, MBK, LKC, MKL i odpowiednio punktów K', L', M' oraz P . Tezę otrzymamy po kilku przekształceniach i uwzględnieniu równości kątów.

- Rozwiązanie zadań, znajdujących się na plakacie w trzecim wierszu, ułatwia następujący fakt: *jeśli dwa trójkąty mają boki odpowiednio równoległe, to można je nałożyć za pomocą **jednokładności** lub przesunięcia*.

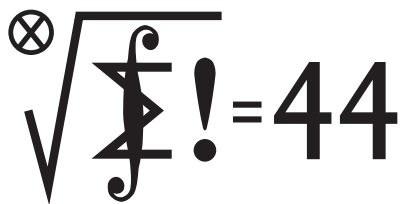
Spójrzmy na środkowy rysunek trzeciego wiersza plakatu (i rysunek 4). Przytoczony fakt wykorzystamy, aby wykazać, że proste AK, BL i CM przecinają się w jednym punkcie. W tym celu musimy znaleźć dwa trójkąty o odpowiednich bokach równoległych. Pierwszym z nich będzie trójkąt ABC . Drugi powstanie poprzez poprowadzenie stycznych do okręgu wpisanego w trójkąt KLM , równoległych do boków pierwszego trójkąta. Wykorzystując jednokładności o środkach w punktach K, L i M , należy zauważyć, że każdy wierzchołek nowego trójkąta leży na jednej z interesujących nas prostych AK, BL i CM .

- Ostatnie trzy konfiguracje stanowią szczególne **przypadki twierdzenia Brianchona**: *w sześciokącie opisanym na okręgu główne przekątne przecinają się w jednym punkcie*, co ilustruje prawy rysunek ostatniego rzędu plakatu.

Powyższe twierdzenie zachodzi także, gdy kąty przy niektórych wierzchołkach sześciokąta mają miarę 180° . Dwa takie „zdegenerowane” przypadki – trójkąt i czworokąt – przedstawione zostały na plakacie. Narysujcie, jak będzie to wyglądało dla pięciokąta.

Joanna ZAKRZEWSKA

Klub 44

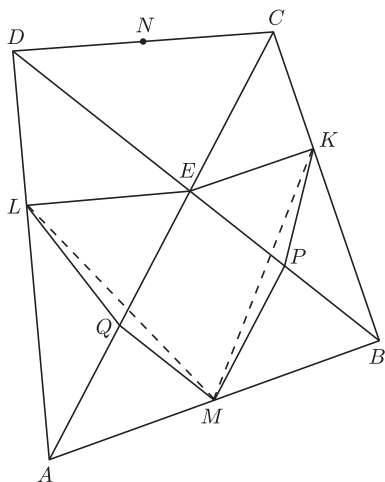


Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
581 ($WT = 3,31$) i 582 ($WT = 1,28$)
z numeru 5/2009

Janusz Olszewski	Warszawa	46,65
Jerzy Cisło	Wrocław	42,86
Marek Prauza	Poraj	42,39
Tomasz Warszawski	Kraków	42,26
Zbigniew Galias	Kraków	42,05
Tomasz Tkocz	Rybnik	38,43
Tomasz Wietecha	Tarnów	37,49

Oto hit absolutny: nowy rekord.
Pan Janusz Olszewski: 44 punkty po raz
jedenasty!
Wielkie brawa!!!



Środki P i Q odcinków BE i AE łączymy odpowiednio z punktami K i L oraz z punktem M . Tworzą się podobne trójkąty równoramienne EPK i EQL oraz równoległobok $EPMQ$. Tak więc

$$|MP| = |QE| = |QL|, \quad |MQ| = |PE| = |PK|$$

oraz

$$|\sphericalangle EPK| = |\sphericalangle EQL|, \quad |\sphericalangle EPM| = |\sphericalangle EQM|.$$

Dodajemy stronami ostatnie dwie równości (w sytuacji jak na rysunku – przy innym położeniu punktów trzeba te równości odjąć) i otrzymujemy $|\sphericalangle KPM| = |\sphericalangle LQM|$. Z uzyskanych związków wynika przystawanie trójkątów MPK i LQM , więc i równość $|MK| = |ML|$.

Analogicznie stwierdzamy, że $|NK| = |NL|$. Zatem punkty M i N leżą na symetralnej odcinka KL .

586. Niech $\{a_1, a_2, \dots, a_9\}$ będzie zadanym zbiorem liczb naturalnych, $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_9 \leq 99$.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 593, 594

Redaguje Marcin E. KUCZMA

593. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + 5}{a_n}.$$

Dowieść, że wszystkie jego wyrazy są liczbami całkowitymi.

594. Rozważamy funkcję

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}.$$

Niech a będzie ustaloną liczbą rzeczywistą, różną od 0 i 1. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste x , spełniające równanie $f(x) = f(a)$.

Zadanie 594 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2009

Przypominamy treść zadań:

585. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu przecięcia jego przekątnych na proste BC i DA . Punkty M i N są środkami boków AB i CD . Wykazać, że punkty K i L są symetryczne względem prostej MN .

586. Dowieść, że każdy dziewięcioelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \dots, 99\}$ ma takie dwa rozłączne niepuste podzbiory A i B , że suma liczb w zbiorze A jest równa sumie liczb w zbiorze B .

585. Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych. Czworokąt $ABCD$ ma okrąg opisany, więc trójkąty BEC i AED są podobne. Punkty K i L są spodkami wysokości w tych trójkątach (albo leżą oba na bokach BC i AD , jak na rysunku, albo oba na przedłużeniach tych boków).

Będziemy rozważali tylko te jego podzbiory F , które spełniają warunki

$$3 \leq |F| \leq 6, \quad |F \cap \{a_4, \dots, a_9\}| \geq 2.$$

Liczba takich zbiorów wynosi

$$\sum_{\substack{3 \leq k+l \leq 6 \\ k \geq 2}} \binom{6}{k} \binom{3}{l} = \sum_{k=2}^6 \binom{6}{k} \sum_{l=3-k}^{6-k} \binom{3}{l} = 395.$$

Suma liczb w każdym takim zbiorze F jest nie mniejsza niż b i nie większa niż c , gdzie

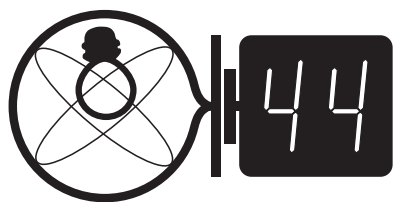
$$b = a_1 + a_4 + a_5, \quad c = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9.$$

W przedziale $\langle b; c \rangle$ jest $c - b + 1 = d$ liczb naturalnych,

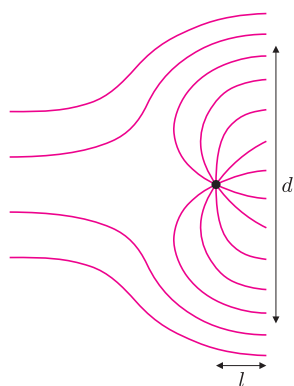
$$d = a_9 + a_8 + a_7 + a_6 - a_1 + 1 \leq 99 + 98 + 97 + 96 < 395.$$

Zatem pewne dwa różne takie zbiory mają jednakową sumę elementów. Jeżeli nie są rozłączne, odrzucamy ich część wspólną i dostajemy zbiory A i B , o jakie chodzi.

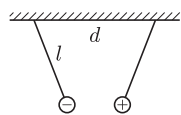
Redaguje Jerzy B. BROJAN



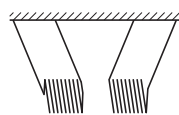
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2010



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
480 ($WT = 1,36$) i 481 ($WT = 2,14$)
z numeru 6/2009

Andrzej Idzik	Bolesławiec	45,76
Krzysztof Magiera	Łosiów	35,98
Michał Koźlik	Gliwice	25,50
Jerzy Witkowski	Radlin	16,54

Od 14 lat Pan Idzik występuje w szrankach naszego Klubu, a teraz zakończył dziewiątą rundę! Oznacza to wspaniałe tempo – co półtora roku pełne okrążenie. Ile rund jeszcze zaliczymy, Panie Andrzeju?

Należy więc zbadać przebieg funkcji $f(\alpha) = (k - \sin \alpha)^2 \operatorname{tg} \alpha$ dla kątów spełniających warunek $\sin \alpha < k$. Nietrudno przekonać się, że dla $k \leq 1$ w rozważanym przedziale funkcja ma jedno maksimum, a więc równanie $f(\alpha) = A$ ma dla odpowiednio małych A dwa rozwiązania – pierwsze w obszarze, gdzie f rośnie, a drugie, gdzie f maleje. Rosnąca funkcja f oznacza, że przy większym wychyleniu wzrost odpowiedniej składowej siły ciężkości (za co odpowiada czynnik $\operatorname{tg} \alpha$) przeważa nad spadkiem odległości ciał i wzrostem siły F_e , czyli w pierwszym przypadku równowaga jest trwała; analogicznie w drugim jest nietrwała. Dla $1 < k < \sqrt{2}$ funkcja (rozpatrywana teraz w przedziale od zera do 90°) najpierw rośnie, następnie maleje, a dalej znów rośnie, więc przy odpowiednio dobranej wartości A mamy trzy położenia równowagi (trwała, nietrwała, trwała),

490. Fusy herbaciane są nieco cięższe od herbaty i opadają na dno. Gdy zamieszcamy herbatę, powstaje siła odśrodkowa, która powoduje podwyższenie poziomu herbaty przy brzegu naczynia, tak jakby siła ciężkości była odchylna od pionu na zewnątrz (mówimy o „pozornej sile ciężkości”, będącej sumą siły ciężkości i siły odśrodkowej). Zatem rolę dna powinien pełnić raczej zewnętrzny brzeg denka szklanki, a nie jego środek. Dlaczego więc fusy zbierają się na środku denka?

491. Do strumienia czystej wody płynącej z prędkością $v_0 = 10 \text{ cm/s}$ wprowadzono końcówkę rurki, przez którą wypływa zabarwiona woda w tempie $A = 1000 \text{ cm}^3/\text{s}$. Obliczyć średnicę d strumienia wody zabarwionej w odległości $l = 5 \text{ cm}$ za końcówką rurki (rys. 1), przy następujących założeniach:

- 1) woda wypływa z rurki izotropowo (jednakowo we wszystkich kierunkach),
- 2) przepływ jest stacjonarny (stały w czasie) i laminarny, tzn. nie występuje mieszanie.

Wskazówka. Dla pola przepływu cieczy obowiązuje zasada superpozycji (podobnie jak np. dla pola elektrycznego), zgodnie z którą w każdym punkcie wektor prędkości cieczy jest sumą stałego wektora \vec{v}_0 i radialnie skierowanego wektora o wartości zależnej od A i od odległości od rurki.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2009

Przypominamy treść zadań:

482. Dwa małe ciała o jednakowych masach zawieszono na nitkach o długości l zaczepionych w odległości d od siebie (rys. 2). Ciała są naładowane przeciwnymi znakami. Jaki warunek muszą spełniać l i d , aby przy pewnych wartościach mas i ładunków mogły istnieć dwa różne położenia równowagi ciał? Jaki musi być ten warunek, aby mogły istnieć trzy różne położenia równowagi? Czy są to położenia równowagi trwałe, czy nietrwałe? Nie bierzemy pod uwagę sytuacji, w której ciała się stykają.

483. Dwie zwojnice zawieszono na przewodach. Po włączeniu zasilania prądem przemiennym przyciągnęły się (rys. 3). Gdy między nie wstawiono pionową płytę z pewnego materiału, zaczęły się odpychać. Na czym polega efekt? Jaki to był materiał?

482. Zauważmy najpierw, że w położeniu równowagi kąty odchylenia nici od pionu muszą być jednakowe. W przeciwnym przypadku dla ciała o większym kącie odchylenia większa byłaby też prostopadła do nici składowa siły ciężkości, natomiast siła oddziaływania elektrycznego działałaby nieco w dół, więc „mniej efektywnie” – jej składowa prostopadła do nici byłaby mniejsza niż dla drugiego ciała i warunki równowagi byłyby ze sobą sprzeczne. Dla jednakowych kątów α ciała są na jednakowej wysokości, siła oddziaływania elektrycznego F_e jest pozioma, a warunek równowagi sprowadza się do wzoru

$$F_e = F_g \operatorname{tg} \alpha,$$

gdzie F_g jest siłą ciężkości. Ponieważ F_e jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ciał, równej $d - 2l \sin \alpha$, więc wprowadzając parametr $k = d/2l$, otrzymujemy równanie

$$(k - \sin \alpha)^2 \operatorname{tg} \alpha = A,$$

gdzie w wyrażeniu A zebrane zostały wszystkie pozostałe stałe (ładunki, masy itd.).

natomiast dla $k \geq \sqrt{2}$ funkcja monotonicznie rośnie i mamy jedno położenie równowagi trwałe.

Ścisłe wyprowadzenie granicznej wartości k wymaga dwukrotnego różniczkowania – najpierw przyrównania pochodnej $f'(\alpha)$ do zera, skąd wynika zależność $k(\alpha)$, a następnie wyznaczenia maksimum tej funkcji (rozwiązania równania $k'(\alpha) = 0$).

483. Płyta była wykonana z dobrego przewodnika (np. miedzi), a przyczyną odpychania były wzbudzone w niej prądy wirowe. O zwrocie siły oddziaływania prądów wirowych na zwojnicę decyduje reguła Lenza – prąd wirowy „sprzeciwia się” zmianom pola magnetycznego, czyli wytwarza pole przeciwnie skierowane (jakby na osi zwojnicy powstał magnes o przeciwnym ustawieniu biegunów).

Patrz w niebo: Woda poza Ziemią

Już od dłuższego czasu astronomowie zbliżają się do odkrycia ziemopodobnych (może tam odkrywamy życie!) planet przy innych niż Słońce gwiazdach. Nie wiadomo, jak długo to jeszcze potrwa, niemniej na ten problem jest nastawionych kilka programów badawczych. Uważa się, że życia warto poszukiwać właśnie na planetach niewielkich i mających powłokę ciekłej wody. Zapewne woda ta powinna stanowić zewnętrzną warstwę planety, tymczasem w naturze może z tym być rozmaicie, a nawet rozmaicie w różnym czasie. Na przykład ocenia się, że zamrożony Ganimedes, największy satelita Jowisza, gdyby był bliżej Słońca, byłby zapewne globem oblany oceanem o głębokości 800 km. Nie jest to całkowita fikcja, gdyż odległości planet od centralnej gwiazdy mogą się zmieniać, inaczej mówiąc, migracje planet wydają się zjawiskiem bardzo prawdopodobnym. Zbyt daleko od gwiazdy planeta zamroźnie, zbyt blisko może wodę utracić. Z drugiej strony ocenia się, że planeta o masie 0,1 masy Ziemi mogłaby przetrwać nawet w odległości 0,3 j.a. od Słońca. Atmosfera takiej planety mocno by się rozděła, ale cała woda nie „wygotowałaby” się.

Cały ten obraz komplikują spadki ciał meteorowych. Prawdopodobnie ciekłym globem, z wielkim oceanem,

nie zaszkodzą (tj. niewiele zmienią) spadki nawet dużych meteoroidów, natomiast gdy wody jest mało, meteoroidy mogą znacznie przyspieszyć proces utraty wody nadającej się do podtrzymywania życia. Jako przykład podaje się Marsa. Na jego powierzchni widać ewidentne ślady działania wody w odległej przeszłości, która obecnie jest zapewne skryta w głębi gruntu w wielkich pęknięciach skorupy. Woda w każdym razie tłumaczyłaby rdzewienie powierzchniowych minerałów, tym samym czerwoną barwę planety. No, ale woda była tam dawno... Przedstawiono jednak możliwość rdzewienia na sucho. Mars prawdopodobnie pokryty jest (średnio) 5-centymetrową warstwą meteoroidów i ich szczątków, nagromadzonych tam przez miliardy lat. Wobec tego atomy żelaza obecne w tym gruzie są niekiedy jonizowane przez słoneczny nadfiolet, a jeżeli uwolniony wtedy elektron zostanie wychwycony przez atom tlenu z atmosfery, to takie dwa jony mogą się połączyć, przez co atom żelaza zostanie utleniony. Skoro więc rozstrzygnięcie o możliwości istnienia życia na obcych planetach ma zależeć od takich subtelności, to chyba jeszcze długo pozostaniemy w niewiedzy.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania F 756.

Przepływ ciepła w czasie ogrzewania wody to $Pt_1 = cm\Delta T_1 + Q_1$, gdzie t_1 to czas ogrzewania, $\Delta T_1 = 10^\circ$, a Q_1 to straty energii, proporcjonalne do różnicy temperatur wody i otoczenia oraz do czasu t_1 . Dla stygnięcia mamy $cm\Delta T_2 = Q_2$. Ponieważ różnica temperatur wody i powietrza zmienia się nieznacznie, więc możemy przyjąć, że $Q_2 = Q_1/2$ ($t_1 = 2t_2$). Stąd

$$m = \frac{Pt_1}{c\Delta T_1 + 2c\Delta T_2} \approx 2,4 \text{ kg.}$$

Styczeń

I znowu zaczął się Nowy Rok. Oczywiście, ma to znaczenie tylko psychologiczne, bo początek roku to sprawa całkowicie umowna (lub tradycja). W każdym razie układ gwiazd jest taki sam, jak przed rokiem, tylko inna jest konfiguracja planet. Znowu wieczorem w okolicach zenitu widzimy Perseusza, o którym było miesiąc temu. Ku południowi od niego (zarazem w stronę horyzontu) widzimy Byka, okazały gwiazdozbiór zawierający dwie gromady otwarte – Plejady i Hiady. Takie gromady to doskonały materiał na testowanie rozmaitych twierdzeń astrofizycznych. Można bowiem z dużym prawdopodobieństwem przypuszczać, że wszystkie gwiazdy gromady mają taki sam skład chemiczny, wiek i odległość od Ziemi, a za różnice, jakie obserwujemy, odpowiedzialne są tylko różne masy początkowe tych gwiazd. I to właśnie powinno wynikać z porządnej teorii astrofizycznej. Prawdę mówiąc, to już raczej historia astronomii, bo obecnie astrofizyka jest już dobrze ugruntowaną nauką i wiele takich testów zakończyło się sukcesem.

Merkury na początku stycznia jest w złączeniu dolnym ze Słońcem, więc go nie widać, ale już 27 I znajdzie się w maksymalnej elongacji zachodniej (o 25°), czyli można go szukać rano nad wschodnim horyzontem. Wenus w styczniu nie widać; jest za Słońcem i 11 I znajdzie się w złączeniu górnym. Mars najbliższy Ziemi znajdzie się 27 I, a w opozycji 29 I. Czyli widać go przez całą noc na granicy Raka i Lwa. Jowisz jest w Wodniku i wcześniej wieczorem zachodzi. Saturn jest w Pannie i widać go w drugiej połowie nocy. Nów Księżyca wypada 15 I, a pełnia 30 I. Podczas nowiu nastąpi obrączkowe zaćmienie Słońca widoczne w Afryce równikowej, na południu Indii i na południu Chin. Księżyc zakryje 11 I Antaresa, co zobaczą mieszkańcy północy USA, wschodniej Kanady i Grenlandii. Długa seria comiesięcznych zakryć Antaresa skończyła się w październiku 2009, toteż styczniowe zakrycie trudno nazwać kontynuacją serii, zwłaszcza że jeszcze tylko jedno nastąpi w lutym. Około 3 I można obserwować dość obfity rój Kwadrantydów. Tego też dnia Ziemia znajdzie się w perihelium.

T. K.

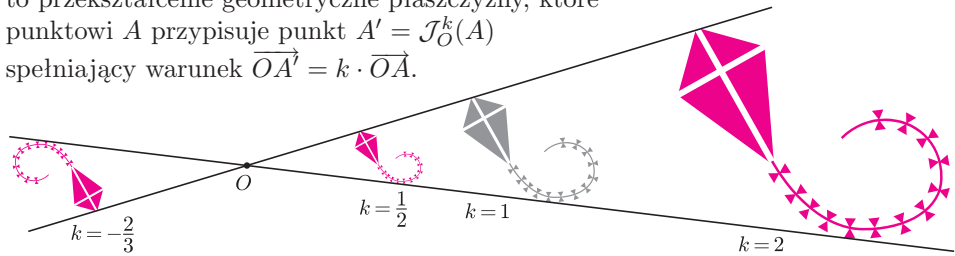


Jednokładności

Joanna JASZUŃSKA

Jednokładność o środku O i skali $k \neq 0$, oznaczana \mathcal{J}_O^k , to przekształcenie geometryczne płaszczyzny, które punktowi A przypisuje punkt $A' = \mathcal{J}_O^k(A)$ spełniający warunek $\vec{OA'} = k \cdot \vec{OA}$.

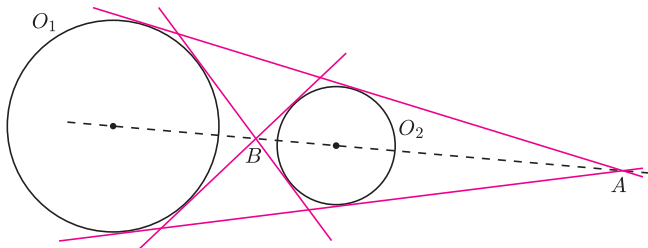
- $k = 1$ – identyczność
- $k = -1$ – symetria środkowa
- $|k| > 1$ – „odsuwanie” od O
- $0 < |k| < 1$ – „przyciąganie” do O
- $k > 0$ – jednokładność prosta
- $k < 0$ – jednokładność odwrotna



Rys. 1. Różne jednokładne obrazy szarego latawca.

Jednokładność ma szereg miłych własności: jest podobieństwem, obrazem prostej jest prosta do niej równoległa, punkt i jego obraz oraz środek jednokładności są współliniowe, etc.

Fakt. Dla nieprzystających okręgów O_1 i O_2 istnieją dwie jednokładności przeprowadzające O_1 na O_2 , jedna prosta, druga odwrotna (rys. 2).



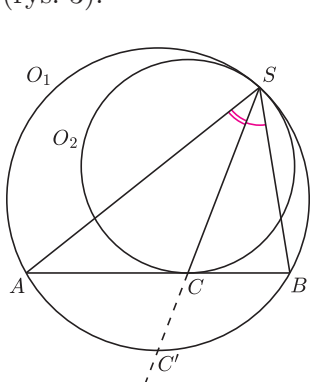
Rys. 2. A – środek jednokładności prostej, B – odwrotnej w przypadku okręgów rozłącznych zewnętrznie.

Oto kilka przykładów zastosowania jednokładności.

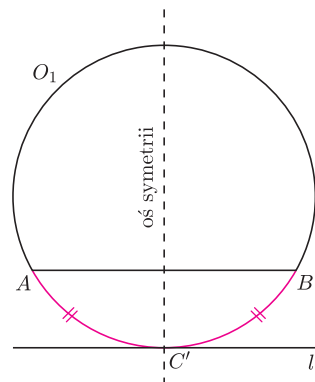
1. Banknot przykryto 25 monetami o promieniu 2. Czy da się go przykryć 100 monetami o promieniu 1?

R. Tak. Podzielmy banknot na ćwiartki dwiema prostymi równoległymi do boków i przechodzącymi przez środek. Każda część jest obrazem wyjściowego prostokąta w pewnej jednokładności o skali $\frac{1}{2}$, zatem każdą ćwiartkę da się przykryć 25 monetami o promieniu $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. \square

2. Okręgi O_1 i O_2 są styczne wewnętrznie w punkcie S , cięciwa AB okręgu O_1 jest styczna do O_2 w punkcie C . Wykaż, że $\sphericalangle CSA = \sphericalangle CSB$ (rys. 3).



Rys. 3



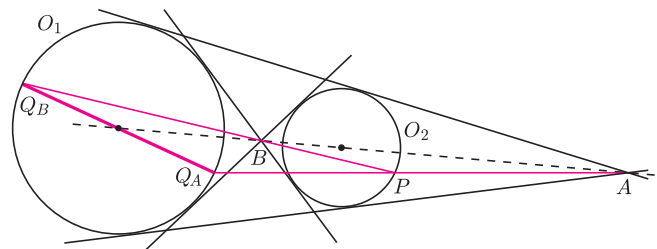
Rys. 4

R. Istnieje taka jednokładność prosta o środku S , że $\mathcal{J}_S(O_2) = O_1$. Obrazem prostej AB jest prosta l do niej równoległa i styczna do okręgu O_1 w punkcie $C' = \mathcal{J}_S(C)$ (rys. 4). Punkt C' jest zatem środkiem łuku AB , stąd $\sphericalangle ASC = \sphericalangle ASC' = \sphericalangle BSC' = \sphericalangle BSC$. \square

3. Nieprzystające okręgi O_1 i O_2 leżą jeden na zewnątrz drugiego. Ich wspólne styczne przecinają prostą wyznaczoną przez ich środki w punktach A i B . Niech P będzie dowolnym punktem okręgu O_2 . Udowodnij, że istnieje średnica okręgu O_1 , której jeden koniec leży na prostej PA , a drugi – na prostej PB .

Zadanie pochodzi z XLII Olimpiady Matematycznej.

R. Oznaczmy promienie okręgów O_1, O_2 odpowiednio przez r_1, r_2 i przyjmijmy bez straty ogólności, że $r_1 > r_2$ oraz że punkt B należy do odcinka łączącego środki okręgów, a punkt A leży poza tym odcinkiem (rys. 5). Wtedy $\mathcal{J}_A^{r_1/r_2}(O_2) = O_1 = \mathcal{J}_B^{-r_1/r_2}(O_2)$.



Rys. 5

Niech $Q_A = \mathcal{J}_A^{r_1/r_2}(P)$ oraz $Q_B = \mathcal{J}_B^{-r_1/r_2}(P)$. Punkt Q_A leży wówczas na prostej PA , punkt Q_B na PB . Pozostawiam do sprawdzenia, że $Q_A Q_B$ jest średnicą okręgu O_1 . \square

Zadania domowe:

4. Rozłączne okręgi O_1 i O_2 są styczne wewnętrznie do okręgu O w punktach odpowiednio S i T . Prosta l , nierozdzielająca okręgów O_1 i O_2 , jest do nich styczna w punktach odpowiednio P i Q . Wykaż, że proste SP i TQ przecinają się w punkcie należącym do okręgu O .

5*. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AE i BC są równoległe oraz $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC$. Przekątne AC i BE przecinają się w punkcie P . Udowodnij, że $\sphericalangle EAD = \sphericalangle BDP$ oraz $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ADP$.
Wskazówka. Rozważ $\mathcal{J}_P^{-PA/PC}$.