






## SPIS TREŚCI NUMERU 12 (427)

Wielościany Catalana <i>Tadeusz E. Doroziński</i> <i>Zdzisław Pogoda</i>	str. 1
Średnio lepiej <i>Piotr Chrzastowski</i>	str. 4
Tableau Younga i prawo haczykowe <i>Lukasz Bieniasz-Krzywiac</i>	str. 6
XXVI Ogólnopolski Sejmik Matematyków	str. 8
Konkurs zadań astronomicznych	str. 9
 <b>Zadania</b>	str. 9
Rudy osioł	str.10
Rudy osioł – podejście informatyczne <i>Jakub Radoszewski</i>	str.10
 Środek potęgowy trzech okręgów <i>Wojciech Guzicki</i>	str.12
Berstery rentgenowskie <i>Agnieszka Majczyzna</i>	str.14
George Polya, <i>Jak to rozwiązać?</i>	str.15
Kosmiczna linijka 12. Mikrofalowe promieniowanie tła <i>Bożena Czerny, Agnieszka Janiuk</i>	str.16
XXXI Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	str.17
 Doświadczenia z elastyczną kulą wodną (część 1) <i>Stanisław Bednarek</i>	str.18
Aktualności	str.20
 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.21
Informatyczny kącik olimpijski (25): Odgadywanie funkcji <i>Tomasz Kulczyński</i>	str.22
Klub 44	str.23
Patrz w niebo	str.24
Grudzień	str.24
 Déjà vu <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyzna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński, Andrzej Walat, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-639-73-67)

internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2010 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2010 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 0-804-200-600

Cena prenumeraty w 2010 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

W następnym numerze:  
*Roller coaster*

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

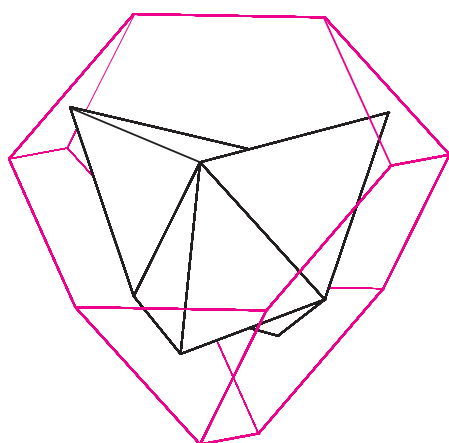
# Wielościany Catalana

Tadeusz E. DOROZIŃSKI\*, Zdzisław POGODA\*\*

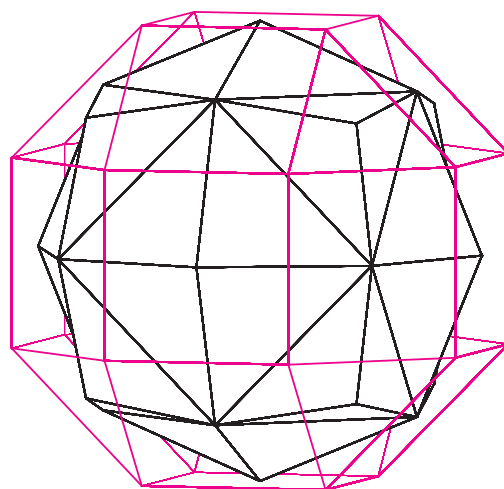
Wielościany foremne, zwane też platońskimi, to takie, których wszystkie ściany są jednakowymi wielokątami foremnymi i które mają jednakowe naroża. Jak wiadomo, jest ich pięć. Jeśli połączymy środki sąsiednich ścian takiego wielościanu, otrzymamy krawędzie wielościanu dualnego. Operacja ta nie przyniesie nam jednak nic nowego: do czworościanu dualny będzie czworościan, do sześciianu ośmiościan (i nawzajem), a do dwunastościanu dwudziestościan (i też nawzajem). Zatem wielościany foremne (nie zawsze różne) łączą się za jej pomocą w pary. Mówiąc inaczej: dwukrotne wykonanie tej operacji prowadzi do wielościanu takiego samego jak wyjściowy, choć innej wielkości.



Przedłużenie tej operacji nawet na tak porządne wielościany, jak wielościany półforemne (zwane również archimedesowymi), nie może odbyć się mechanicznie. Wielościany półforemne też mają ściany foremne, ale niejednakowe, a ich naroża nadal są jednakowe, co oznacza, że składające się na nie wielokąty ułożone są w takim samym cyklicznym porządku. Jest ich 13 oraz dwie nieskończone serie: to dwa  $n$ -kąty połączone paskiem kwadratów (graniastosłupy) lub paskiem trójkątów równobocznych (antygraniastosłupy). Wykonując opisaną wyżej operację dla niektórych z takich wielościanów, np. dla wielościanu noszącego nazwę czworościanu ściętego (rys. 1), w którego wierzchołkach zbiega się trójkąt z dwoma sześciokątami, otrzymamy wielościan nie tylko niepółforemny, ale nawet niewypukły. Podobnie jest dla sześćo-ośmiościanu rombowego małego (rys. 2), w którego wierzchołku schodzą się trzy kwadraty i trójkąt.



Rys. 1. Czworościan ścięty i wielościan wyznaczony przez środki jego ścian.

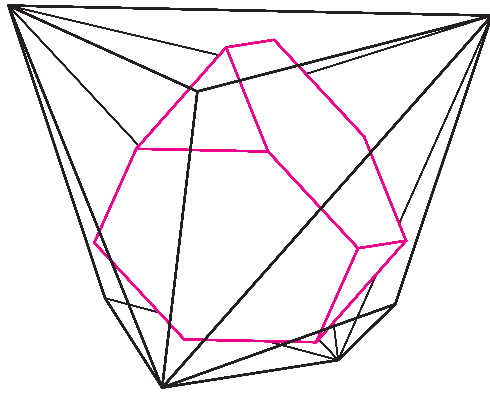


Rys. 2. Sześćo-ośmiościan rombowy mały i wielościan wyznaczony przez środki jego ścian.

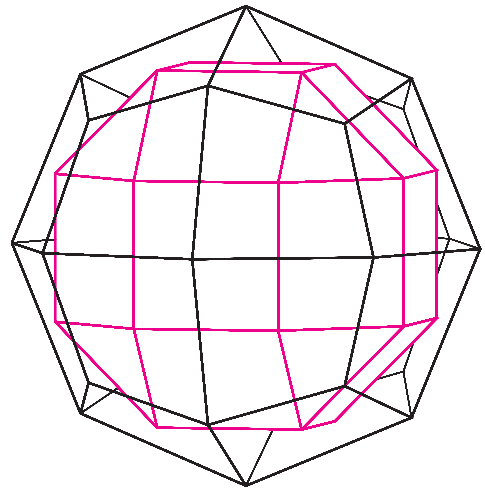
Jak uratować sytuację i wymyślić coś, co byłoby przedłużeniem dualności, a dotyczyłoby i wielościanów półforemnych? Jest pewien szczęśliwy zbieg okoliczności, który to umożliwia: na każdym wielościanie półforemnym można opisać sferę – nie jest to całkiem banalne, ale nie wątpimy, że Czytelnicy potrafią to uzasadnić. No to ją opiszmy i w każdym wierzchołku wielościanu poprowadźmy płaszczyznę styczną do tej sfery. Płaszczyzny te wytną wypukły wielościan, który będziemy uważali (za Eugenem Charlesem Catalanem) za dualny do wyjściowego. Rysunki 3 i 4 przedstawiają właśnie tak wykonane wielościany dualne do wielościanów z poprzednich rysunków. Jak widać, wielościany dualne nie są już półforemne, choć, oczywiście, są wypukłe, a nawet mają ściany przystające – choć nie są one wielokątami foremnymi.

\*Düsseldorf

\*\*Instytut Matematyki,  
Uniwersytet Jagielloński

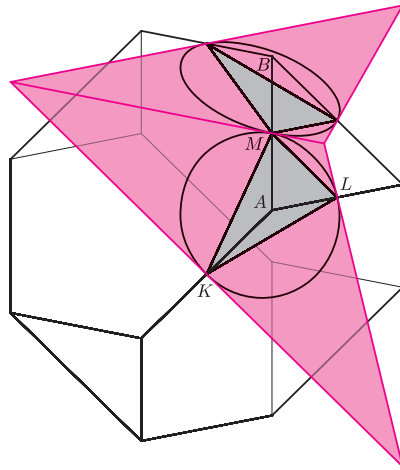


Rys. 3. Wielościan dualny do czworościanu ściętego według Catalana.

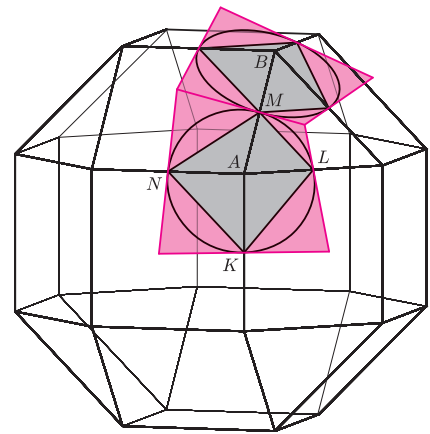


Rys. 4. Wielościan dualny do sześćo-ośmiościanu rombowego małego według Catalana.

Ale jest też inna metoda dająca te same wyniki. Otóż, istnieje jeszcze jedna sfera związana z wielościanami półforemnymi, mianowicie przechodząca przez środki wszystkich krawędzi takiego wielościanu. Nazywana jest ona sferą pośrednią. Środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka leżą na jednej płaszczyźnie (co nie jest takie trudne do uzasadnienia) – jej przecięcie ze sferą pośrednią to oczywiście okrąg. Rysując w środkach krawędzi styczne do niego, otrzymujemy wielokąt, które formują wielościan podobny do uzyskanego poprzednią metodą. Ten sposób pochodzi – według Cundy’ego i Rolleta (autorów książki *Modele matematyczne*) – od Dormana Luke’a. Opisaną metodę uzyskiwania wielościanu dualnego ilustrują rysunki 5 i 6.



Rys. 5. Konstrukcja wielościanu dualnego wg Luke’a dla czworościanu ściętego. . .



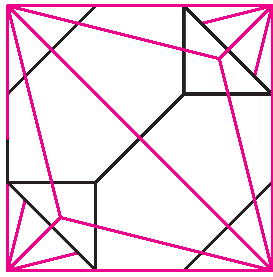
Rys. 6. . . i dla sześćo-ośmiościanu rombowego małego.

Wszystkie wielościany dualne do wielościanów półforemnymi nazywamy wielościanami Catalana. Dlaczego jednak nazywamy je także dualnymi? Otóż okazuje się, że (rozsądne) powtórzenie tej operacji na wielościanach Catalana daje nam. . . wielościany półforemne. Dzieje się tak dlatego, że stosowana przez nas, w obu przypadkach, operacja to dualność względem sfery. Operacja ta przy danej sferze przypisuje punktowi leżącemu na zewnątrz sfery (*biegunowi*) płaszczyznę (*biegunową*) zawierającą punkty styczności stycznych do sfery poprowadzonych z tego punktu, a dla pozostałych punktów określa się ją, przyjmując zasadę, że jeśli punkt *A* leży na biegunowej punktu *B*, to biegunowa punktu *A* przechodzi przez punkt *B*. Czytelnik może sprawdzić, że określa to tę operację dla wszystkich punktów – dodajmy jeszcze, że biegunowa punktu sfery to płaszczyzna styczna w tym punkcie. Nietrudno sprawdzić, że dualność względem każdej z rozpatrywanych sfer zamienia wielościan półforemny na jego wielościan Catalana i odwrotnie. A zatem dwukrotnie wykonana daje wielościan taki, jak wyjściowy.

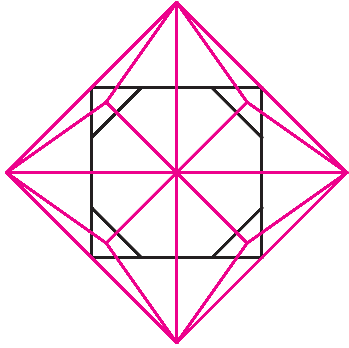


**Rozwiązanie zadania F 753.**  
Prąd płynie w ciągu połowy czasu przez jedną diodę, wydzielając moc  $P_1 = U^2/R_1$ , a w ciągu drugiej połowy czasu przez drugą diodę, wydzielając moc  $P_2 = U^2/R_2$ . Zatem średnia moc wydzielana w obwodzie wynosi

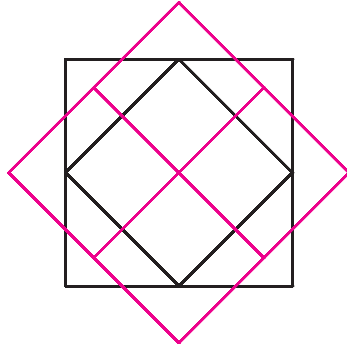
$$P = \frac{P_1 + P_2}{2} = U^2 \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}.$$



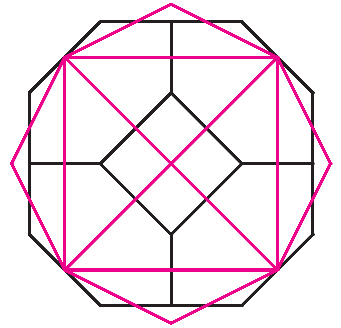
czworościan ścięty  
czworościan potrójny



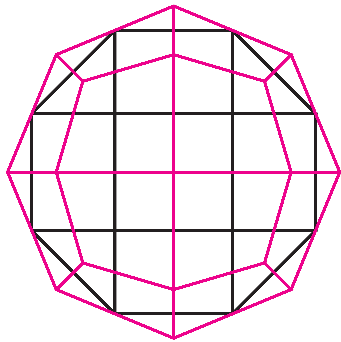
sześcián ścięty  
ośmiościan potrójny



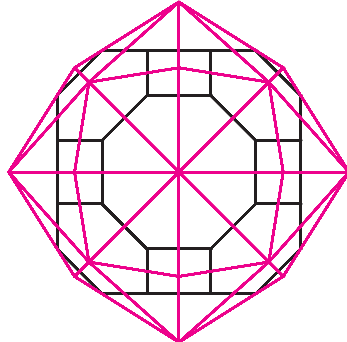
sześcián-ośmiościan  
dwunastościan rombówy



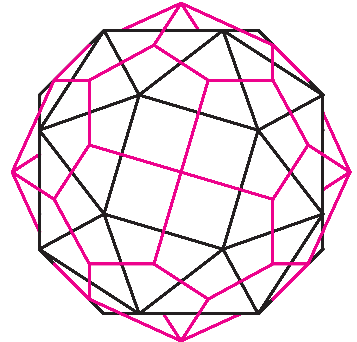
ośmiościan ścięty  
sześcióścian poczwórny



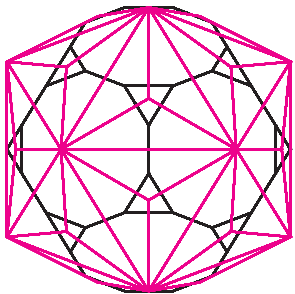
sześcián-ośmiościan rombówy mały  
dwudziestoczterościan rombówy



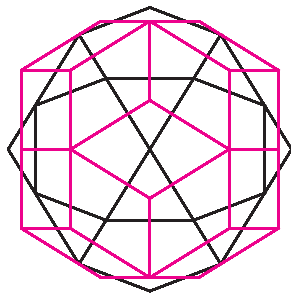
sześcián-ośmiościan rombówy wielki  
ośmiościan szóstkowy



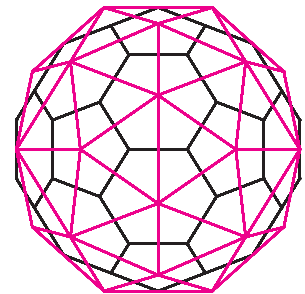
sześcián przycięty  
dwudziestoczterościan pięciokątny



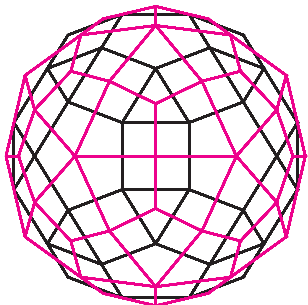
dwunastościan ścięty  
dwudziestościan potrójny



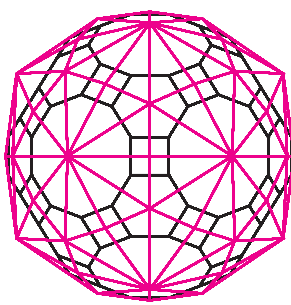
dwudziesto-dwunastościan ścięty  
trzydziestościan rombówy



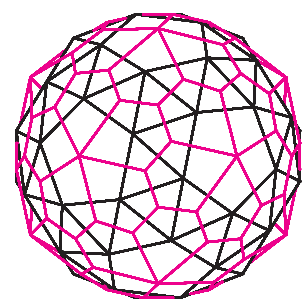
dwudziestościan ścięty  
dwunastościan pięciokątny



dwudziesto-dwunastościan rombówy mały  
sześćdziesięścian deltoidowy



dwudziesto-dwunastościan rombówy wielki  
dwudziestościan szóstkowy



dwunastościan przycięty  
sześćdziesięścian pięciokątny

Rys. 7. Wielościany archimedesowe z dualnymi do nich wielościanami Catalana.

Uważne porównywanie jest szczególnie istotne w przypadku kosztowniejszych algorytmów. Autor artykułu poprawiał kiedyś pewien program, który był używany przez parę lat, przy czym za każdym uruchomieniem dla typowych danych obliczenia trwały około pół godziny. Tymczasem przesunięcie jednej instrukcji w kodzie spowodowało, że czas działania zmniejszył się do 4 sekund! Po prostu jeden z iloczynów skalarnych był obliczany niepotrzebnie w najbardziej zagnieżdżonej z trzech pętli i wystarczyło jego obliczenie przenieść na wyższy poziom, zmniejszając koszt z  $O(n^4)$  do  $O(n^3)$  – proszę zgadnąć, ile wynosiło  $n$  dla typowych danych.

\*Instytut Informatyki,  
Uniwersytet Warszawski

Czasami sprawa jest prosta: pod każdym względem algorytm A przewyższa algorytm B. Obliczanie rozwiązań układu równań liniowych za pomocą wzorów Cramera praktycznie zawsze będzie gorsze od metody eliminacji Gaussa. Zazwyczaj jednak sytuacja jest inna. Dla jednych danych lepszy jest algorytm A, a dla innych B. Informatycy radzą sobie z tymi problemami, wprowadzając pojęcie *złożoności średniej*. Zakładamy zatem pewien rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni danych (najczęściej jednostajny) i jako miarę złożoności algorytmu przyjmujemy wartości zmiennej losowej wyrażającej liczbę operacji, które wykonamy dla tych danych. Wtedy *wartość oczekiwana* tej zmiennej losowej jest poszukiwaną funkcją kosztu – nazywamy ją kosztem średnim algorytmu (lub problemu, gdy bierzemy jeszcze minimum po wszystkich średnich kosztach algorytmów rozwiązujących dany problem).

Rozważmy tę kwestię na bardzo praktycznym przykładzie. Mamy dwie wersje niesamowicie ważnego algorytmu, zwanego algorytmem wyszukiwania binarnego – można powiedzieć – będącego podstawą informatyki. Za pomocą wyszukiwania binarnego przeszukujemy większość baz danych. Każda oszczędność jest tu ważna. Podstawowa idea jest jasna: w posortowanym niemalejąco ciągu danych  $A[l..p]$  szukamy zadanej wartości  $x$ , a dokładniej indeksu, pod którym występuje. Szukamy zatem takiego  $i$ ,  $l \leq i \leq p$ , żeby nasza poszukiwana wartość  $x$  była równa  $A[i]$ . Badamy więc „środek” przedziału  $s = \lfloor (l+p)/2 \rfloor$  i jeśli  $x \leq A[s]$ , to koncentrujemy się na lewej „połowie” przedziału, a jeśli  $x > A[s]$ , to na prawej. Powtarzamy to tak długo, aż przedział zrobi się jednoelementowy, i wtedy sprawdzamy, czy szukana wartość tam właśnie się znajduje. Kod w Pascalu podanego algorytmu wyglądając może tak:

```
l:=1; p:=n;
while (l < p) do
  begin
    s:=(l+p) div 2;
    if (x > A[s]) then l:=s+1
      else p:=s;
  end;
if (x = A[l]) then wynik:=l
  else wynik:=-1; // w ten sposób
  // zakomunikujemy porażkę
```

## Średnio lepiej

Piotr CHRZAŚTOWSKI\*

Każdy problem algorytmiczny można rozwiązać na wiele sposobów. Gdy zależy nam na wyborze jednego z takich rozwiązań, musimy odpowiedzieć sobie na pytanie, co to znaczy, że jeden algorytm jest lepszy od drugiego, czyli znaleźć wspólną *miarę* oceny ich jakości. Trudność polega na tym, że nie do końca wiadomo, co brać pod uwagę. Algorytm szybki, czyli wykonujący stosunkowo niewiele działań, może być wymagający pamięciowo, czyli potrzebować dużo pamięci komputera. Algorytm działający wolno dla dużych danych może świetnie poradzić sobie z danymi małymi. Dalej, nie tylko rodzaj mierzonej wielkości może mieć wpływ na naszą ocenę algorytmu, ale i rodzaj danych. Może się chociażby zdarzyć, że dla większości danych jeden z algorytmów zdecydowanie przeważa nad drugim, i tylko dla stosunkowo niewielkiej ich liczby jest gorszy.

Mówienie o „środku” i „połowach” jest drobnym, ale dopuszczalnym nadużyciem: w rzeczywistości zazwyczaj będzie to prawie środek i prawie połowa (z dokładnością do jedynki).

Możemy jednak zadać pytanie: w każdym obrocie pętli już mamy element  $A[s]$  w ręce, więc może lepiej byłoby sprawdzić, czy przypadkiem zachodzi  $x = A[s]$ ? Głupio byłoby czekać, aż przedział zrobi się jednoelementowy.

Zatem konkurencyjna wersja algorytmu wyszukiwania binarnego jest taka:

```
l:=1; p:=n; s:=(l+p) div 2;
while (l < p) and (A[s] <> x) do
  begin
    if (x > A[s]) then l:=s+1
      else p:=s-1; // tu wiemy, że
      // A[s]<>x
    s:=(l+p) div 2;
  end;
if (x = A[s]) then wynik:=s
  else wynik:=-1; // w ten sposób
  // zakomunikujemy porażkę
```

Poza nieistotną z punktu widzenia złożoności kolejnością wyznaczania środka przedziału kod ten od poprzedniego różni się w zasadzie tylko tym, że w dozorze pętli mamy dodatkowo jeszcze jeden warunek do sprawdzenia i koniunkcję do wykonania. Teraz pętla zakończy wykonywać się wcześniej, jeśli tylko dostatecznie szybko wpadniemy na  $x$  znajdujące się gdzieś w środku przedziału  $[l..p]$  – wydaje się więc, że możemy na tym sporo zyskać. Czy mniejsza liczba wykonania pętli zrekompensuje nam jednak lekkie zwiększenie kosztu wykonania pojedynczego obrotu związane ze skomplikowaniem dozoru pętli?

Ustalmy najpierw, co jest tu miarą danych i algorytmu. Rozmiar danych to po prostu  $n$ , czyli liczebność zbioru, w którym poszukujemy naszego  $x$ . Niewątpliwie, gdy elementu  $x$  nie ma w tablicy, to druga wersja jest gorsza, po prostu będzie niepotrzebnie sprawdzała jeden warunek więcej, a i tak zakończy działanie, gdy długość przedziału spadnie do 1. Jeśli jednak  $x$  jest, i to w dodatku tylko w jednym miejscu, to być może, mając szczęście, nie wykonamy ani jednego obrotu pętli i od razu natrafimy na szukaną wartość. Ale tak zdarzy się tylko w jednym przypadku na  $n$ , przy założeniu, że każdej wartości



szukamy z jednakowym prawdopodobieństwem. Jeśli  $x$ -ów jest więcej, to oczywiście szansa natrafienia na którąś z pozycji zawierającą  $x$  rośnie i drugi algorytm może okazać się lepszy (a na pewno lepszy będzie, gdy wszystkie wartości są równe  $x$ ).

W każdym razie złożoność algorytmu jest zależna od liczby wykonań pętli. Przyjmijmy zatem jako miarę złożoności liczbę sprawdzeń dozoru pętli. Przeanalizujemy sytuację, w której zadany ciąg w tablicy jest ściśle rosnący, a poszukiwane wartości pojawiają się z jednakowym prawdopodobieństwem. Czy warto wtedy dokładać sobie pracy przy każdorazowym sprawdzaniu warunku wyjścia z pętli, aby zmniejszyć liczbę jej obrotów? Rachunki w ogólnym przypadku są dość skomplikowane. Wykonamy teraz upraszczające założenie. Przyjmiemy mianowicie, że  $n = 2^k - 1$  dla pewnego  $k$ . Dzięki temu po każdym obrocie pętli w drugim algorytmie będziemy mieli przedziały długości  $2^{k'} - 1$  dla pewnego  $k' \leq k$ . Czy wolno robić takie założenia? W zasadzie mogłyby one nieco wypaczyć wynik, ale w naszym przypadku nie będzie tak źle. Jak duży błąd możemy popełnić? Otóż możemy pomylić się nie więcej niż o 1. W końcu po pierwszym strzale mamy do zbadania dla dowolnego  $n$  przedział nie dłuższy niż  $\frac{n}{2}$ , zatem nasz wynik będzie się różnił od prawdziwego nie więcej niż o 1, bo w przedziale  $[\frac{n}{2}..n]$  musi znajdować się jakaś liczba postaci  $2^k - 1$ , a dla niej liczba kroków jest co najmniej taka jak dla  $\frac{n}{2}$  – wszak liczba obrotów pętli nie może urosnąć dla mniejszych danych. I można przypuszczać, że różnica w obliczeniach dla obu algorytmów będzie proporcjonalna, zatem obliczenia wykonane dla  $n$  będących prawie potęgami dwójki będą dawały reprezentatywne wyniki.

Jaki jest zatem średni koszt pierwszego algorytmu? Tam – zależnie od szukanej wartości  $x$  – otrzymamy zawsze albo  $k$ , albo  $k + 1$  sprawdzeń dozoru pętli. Mniej się nie da: musimy zjechać z długością przedziału do jedynki, odrzucając za każdym razem albo połowę, albo o jeden mniej niż połowę elementów. W przypadku drugiego algorytmu sytuacja nieco się komplikuje. Żeby wyznaczyć średnią liczbę sprawdzeń dozoru pętli, przyjmijmy, że kolejno wyszukujemy wartości  $1, 2, \dots, n$  w tablicy zawierającej tylko te liczby, dodajmy uzyskane liczby sprawdzeń dozoru pętli dla każdej z tych wartości i podzielmy wynik przez  $n$  – otrzymamy w ten sposób średnią liczbę sprawdzeń dozoru pętli.

Jest tylko jedna wartość, dla której pętla nie wykona się ani razu, czyli dozór będzie sprawdzony raz – znajduje się ona w połowie tablicy. Są dwie wartości, dla których sprawdzenie wykona się dwa razy – są one umieszczone mniej więcej w jednej czwartej i w trzech czwartych tablicy, cztery, dla których wykona się trzy razy, itd. W końcu dla prawie połowy wartości (a dokładniej dla wszystkich nieparzystych wartości) wykonamy maksymalną liczbę  $k$  sprawdzeń dozoru. Łącznie zatem wysumowana liczba wszystkich sprawdzeń dozoru pętli dla wszystkich danych to

$$S = \sum_{j=1}^k j2^{j-1}$$

(sumowanie przebiega względem liczby sprawdzeń dozoru pętli).

Ile wynosi ta liczba dokładnie, można obliczyć na wiele sposobów. Jednym z najciekawszych jest niejako utrudnienie tego problemu i obliczenie wartości wielomianu

$$W(x) = \sum_{j=1}^k jx^{j-1}$$

w punkcie  $x = 2$ . Widzimy, że

$$W(x) = V'(x) \quad \text{dla} \quad V(x) = \sum_{j=1}^k x^j.$$

Ale wyrazy wielomianu  $V(x)$  tworzą zwykły ciąg geometryczny z pierwszym wyrazem, jak i ilorazem, równym  $x$ . Korzystając ze wzoru na sumę pierwszych  $k$  wyrazów ciągu geometrycznego, otrzymujemy

$$V(x) = x \frac{x^k - 1}{x - 1}.$$

A pochodna to

$$V'(x) = \frac{((k+1)x^k - 1)(x-1) - x^{k+1} + x}{(x-1)^2}.$$

Wygląda dość obskurnie, ale takie jest już życie! Na szczęście chcemy znać jej wartość w dość przyjaznym punkcie  $x = 2$ , więc szybko otrzymujemy

$$S = W(2) = V'(2) = 2^k(k-1) + 1.$$

Ostatecznie średnia liczba obrotów pętli będzie równa

$$\frac{S}{n} = \frac{2^k(k-1) + 1}{2^k - 1} > k - 1.$$

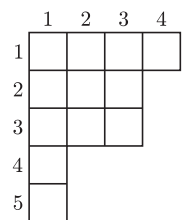
Zatem okazuje się, że w porównaniu z pierwszym algorytmem zyskujemy średnio nie więcej niż dwa obroty pętli!

Czy zysk ten może zrekompensować stratę związaną ze sprawdzaniem dodatkowego warunku przy każdym obrocie pętli? Tak, ale tylko dla małych danych. Przeprowadzone eksperymenty pokazały, że dla danych rzędu paru milionów pierwszy, a zarazem prostszy, algorytm daje wyniki o kilka-kilkanaście procent lepsze. W trakcie testowania nie korzystaliśmy tu z funkcji optymalizacyjnych kompilatora, takich jak tzw. leniwe wyliczanie warunków logicznych, co mogłoby nieco poprawić działanie drugiego algorytmu.

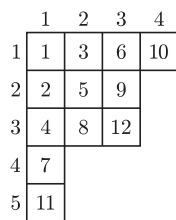
Leniwe wyliczanie polega na tym, że kompilator przerywa obliczanie warunku w pierwszym momencie, w którym orientuje się, że wynik już i tak zna. Na przykład, gdy oblicza koniunkcję dwóch warunków i pierwszy z nich okazuje się fałszem, uznaje, że nie ma po co obliczać drugiego, i przerywa obliczenia, od razu przekazując wynik.

Zanim zaczniemy ulepszać nasze rozwiązania, warto czasem trochę przeliczyć, czy się to w ogóle opłaca. A tak czy siak, warto potem przetestować nowe pomysły z zegarkiem w rękę, szczególnie w przypadku algorytmów ważnych, które mają istotny wpływ na końcową złożoność. Reasumując: dla typowych danych, kiedy z dużym prawdopodobieństwem dany element  $x$  występuje w tablicy co najwyżej jednokrotnie, zazwyczaj lepiej stosować pierwszy, prostszy algorytm i nie zawracać sobie głowy wcześniejszym przerywaniem pętli. Czasami w programowaniu leniwość się opłaca!

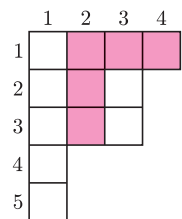
Tableau [wym. tablo, lm. tableaux, z tą samą wymową] – po francusku tablica.



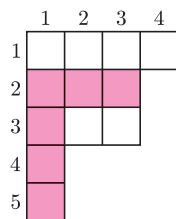
Rys. 1. Diagram Ferrersa kształtu (4, 3, 3, 1, 1).



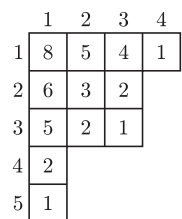
Rys. 2. Przykład standardowego tableau Younga kształtu (4, 3, 3, 1, 1).



Rys. 3. Haczyk komórki (1, 2).



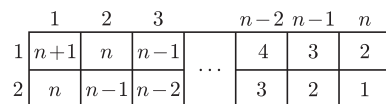
Rys. 4. Haczyk komórki (2, 1).



Rys. 5. Rozmiary haczyków.

Co ciekawe, diagram Ferrersa z wpisanymi w komórki długościami haczyków prawie nigdy nie tworzy standardowego tableau Younga.

Polecam Czytelnikowi poeksperymentowanie z prawem haczykowym także na kilku mniejszych przykładach, np. (3, 2) ⊢ 5.



Rys. 6. Rozmiary haczyków.

Poprawne słowo nawiasowe to napis złożony z nawiasów otwierających '(' i zamykających ')', w którym każdemu nawiasowi otwierającemu możemy jednoznacznie przyporządkować jakiś nawias zamykający.

## Tableau Younga i prawo haczykowe

Łukasz BIENIASZ-KRZYWIEC\*

Prawo haczykowe to bardzo ciekawy wzór kombinatoryczny na liczbę różnych tableau Younga (o tym, co to za stwory, za chwilę). Niniejszy artykuł jest poświęcony pięknemu dowodowi prawa haczykowego. Dowodowi, który jest oparty na idei wykraczającej daleko poza przyziemne schematy, sięgającej królestwa natchnienia i twórczości, a jednocześnie zaskakująco prostej i zrozumiałej.

Każdą liczbę naturalną  $n$  można przedstawić (często na wiele sposobów) w postaci skończonej sumy dodatnich liczb całkowitych  $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$ , gdzie  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ . Takie przedstawienie nazywamy *podziałem* liczby  $n$  i oznaczamy  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \vdash n$  lub w skrócie  $\lambda \vdash n$ . Podziały liczb naturalnych wygodnie jest reprezentować graficznie w postaci *diagramów Ferrersa* (zwanymi czasem *diagramami Younga*). Na przykład podziałowi  $12 = 4 + 3 + 3 + 1 + 1$  odpowiada diagram z rysunku 1. Mówiąc bardziej formalnie,  $i$ -ty wiersz diagramu dla podziału  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \vdash n$  składa się z  $\lambda_i$  kwadratów (komórek). Komórkę leżącą na przecięciu  $i$ -tego wiersza oraz  $j$ -tej kolumny oznaczamy  $(i, j)$ .

*Tableau Younga* otrzymujemy poprzez wypełnienie wszystkich komórek pewnego diagramu Ferrersa liczbami naturalnymi. Mówimy, że tableau ma *kształt*  $\lambda \vdash n$ , jeśli zostało uzyskane z diagramu odpowiadającego podziałowi  $\lambda \vdash n$ . Tableau kształtu  $\lambda \vdash n$  nazywamy *standardowym*, gdy zawiera wszystkie liczby ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  oraz jego każdy wiersz czytany z lewej do prawej i każda kolumna czytana z góry do dołu tworzą ciąg rosnący (przykład na rys. 2). My będziemy zajmować się wyłącznie tableau standardowymi.

Interesujący nas problem kombinatoryczny wyraża się następującym pytaniem. *Na ile sposobów można rozmieścić liczby 1, 2, ..., n w komórkach diagramu Ferrersa odpowiadającego podziałowi  $\lambda \vdash n$  tak, aby uzyskać standardowe tableau Younga?*

Aby sformułować odpowiedź, potrzebna nam będzie jeszcze jedna definicja. Każdej komórce  $(i, j)$  diagramu przypisujemy *haczyk*  $H_{ij}$ , czyli zbiór komórek  $(a, b)$ , takich że  $a = i$  oraz  $b \geq j$  lub  $a \geq i$  oraz  $b = j$ . *Rozmiar*  $h_{ij}$  haczyka to nic innego jak liczba komórek w zbiorze  $H_{ij}$  (patrz przykłady na rys. 3, 4 i 5).

**Prawo haczykowe** (Frame–Robinson–Thrall). *Jeśli  $\lambda \vdash n$  jest podziałem  $n$ , to liczba standardowych tableau Younga kształtu  $\lambda \vdash n$  wynosi*

$$f(\lambda) = \frac{n!}{\prod h_{ij}},$$

gdzie iloczyn w mianowniku przebiega wszystkie komórki diagramu Ferrersa odpowiadającego  $\lambda \vdash n$ .

Zanim przejdziemy do uzasadnienia, przyjrzyjmy się przykładowi tableau kształtu  $(n, n) \vdash 2n$ . Diagram Ferrersa odpowiadający podziałowi  $(n, n) \vdash 2n$  to zwykły prostokąt o szerokości  $n$  i wysokości 2. Długości haczyków komórek z tego diagramu są widoczne na rysunku 6. Co w tym przypadku mówi prawo haczykowe? Wszystkich różnych tableau kształtu  $(n, n) \vdash 2n$  jest

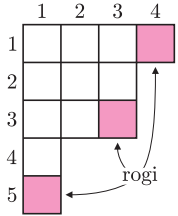
$$\frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n},$$

a to jest przecież  $n$ -ta liczba Catalana! Wobec tego standardowych tableau kształtu  $(n, n) \vdash 2n$  jest dokładnie tyle samo, co poprawnych słów nawiasowych długości  $2n$ . Znając ten wynik, można łatwo skonstruować wzajemnie jednoznaczne przekształcenie przypisujące tableau słowom nawiasowym i na odwrót. Zostawiam to, jako nietrudne ćwiczenie, dla Ciebie, Czytelniku. Jednak *chapeau bas* przed tymi, którzy zauważyli to wcześniej.

Jak widać, odpowiedzią na postawione na początku pytanie jest formuła wyrażająca się pięknym, zwartym wzorem. Ale skąd wzięły się w niej długości haczyków? Okazuje się, że to pytanie długo pozostawało bez odpowiedzi. Pierwszy dowód, wymyślony przez Robinsona i Frame'a oraz niezależnie Thralla tej samej majowej nocy 1953 roku, bazuje na skomplikowanych metodach

\*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

algebraicznych i nie wyjaśnia fenomenu haczyków. Poniżej przedstawiamy krótki probabilistyczny dowód, zaproponowany przez Greene'a, Nijenhuisa i Wilfa dopiero w 1979 roku. Jego centralnym punktem jest eksperyment losowy, w którego definicji pojawiają się haczyki.



Rys. 7.  $F(4, 3, 3, 1, 1) = F(3, 3, 3, 1, 1) + F(4, 3, 2, 1, 1) + F(4, 3, 3, 1)$ .

Na początek zauważmy, że w każdym standardowym tableau liczba  $n$  musi wystąpić w którymś z rogów, czyli komórek, które leżą na końcu zarówno swojego wiersza, jak i kolumny. Usunięcie rogu powoduje powstanie mniejszego tableau. Przez  $F(\lambda) = F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  oznaczmy liczbę standardowych tableau kształtu  $\lambda \vdash n$ . Powyższa obserwacja daje nam prostą zależność rekurencyjną na  $F(\lambda)$  (rys. 7):

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{cases} \sum_{\alpha} F(\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha} - 1, \dots, \lambda_m) & \text{gdy } \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{\alpha} \geq \dots \geq \lambda_m, \\ 1 & \text{gdy } m = 1, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

co w skrócie zapisujemy

$$F = \sum_{\alpha} F_{\alpha}, \quad \text{gdzie } F_{\alpha} = F(\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha} - 1, \dots, \lambda_m).$$

Zauważmy, że tak naprawdę sumujemy tylko po rogach, bo składniki, dla których  $\lambda_{\alpha+1} > \lambda_{\alpha} - 1$ , są równe 0. Skoro mamy zależność rekurencyjną, to możemy udowodnić naszą formułę haczykową (tj. wzór  $F(\lambda) = f(\lambda)$ ) przez indukcję względem rozmiaru tableau. Dla  $n = 1$  się zgadza. Ale co dalej? Gwóźdź programu tkwi w zweryfikowaniu równości

$$1 = \sum_{\alpha} \frac{f_{\alpha}}{f}$$

(gdzie  $f$  i  $f_{\alpha}$  definiujemy analogicznie do  $F$  i  $F_{\alpha}$ ) poprzez nadanie jej probabilistycznej interpretacji. W tym celu rozważmy następujący eksperyment.

W pierwszym kroku wybieramy z diagramu Ferrersa losową komórkę  $(a_1, b_1)$ .

Prawdopodobieństwo wybrania każdej komórki jest jednakowe, równe  $1/n$ .

Następnie wybieramy losową komórkę  $(a_2, b_2)$  spośród reszty komórek należących do haczyka  $H_{a_1 b_1}$ , każdą z prawdopodobieństwem  $1/(h_{a_1 b_1} - 1)$ .

Kolejna komórka jest wybierana losowo spośród pozostałych komórek z  $H_{a_2 b_2}$  itd. Kontynuujemy ten proces, aż trafimy do jakiegoś rogu  $(a_k, b_k)$  (rys. 8).

Ciąg komórek  $(a_1, b_1) \rightarrow (a_2, b_2) \rightarrow \dots \rightarrow (a_k, b_k)$  wybranych w toku losowania będziemy nazywali *ścieżką*. Powyższy eksperyment przypisuje konkretnemu diagramowi Ferrersa kształtu  $\lambda \vdash n$  przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, P)$ . Zdarzenia elementarne to ścieżki. Prawdopodobieństwo ścieżki wyraża się wzorem

$$P((a_1, b_1) \rightarrow \dots \rightarrow (a_k, b_k)) = \frac{1}{n} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{h_{a_i b_i} - 1}.$$

Niech  $P(\alpha, \beta)$  oznacza prawdopodobieństwo, że losowa ścieżka kończy się w rogu  $(\alpha, \beta)$ . Każda ścieżka kończy się w którymś rogu, więc oczywiście

$$1 = \sum_{(\alpha, \beta)} P(\alpha, \beta).$$

$$P(\alpha, \beta) = \frac{f_{\alpha}}{f},$$

to zakończylibyśmy dowód. Spróbujmy. Na początek zauważmy, że gdy  $(\alpha, \beta)$  jest pewnym rogiem, to wówczas (patrz rys. 9 i 10)

$$(1) \quad \frac{f_{\alpha}}{f} = \frac{1}{n} \prod_{1 \leq i < \alpha} \frac{h_{i\beta}}{h_{i\beta} - 1} \prod_{1 \leq j < \beta} \frac{h_{\alpha j}}{h_{\alpha j} - 1} = \frac{1}{n} \prod_{1 \leq i < \alpha} \left(1 + \frac{1}{h_{i\beta} - 1}\right) \prod_{1 \leq j < \beta} \left(1 + \frac{1}{h_{\alpha j} - 1}\right).$$

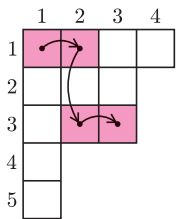
Musimy jakoś pokazać, że  $P(\alpha, \beta)$  równe jest właśnie tyle. Nie obejdziemy się bez jeszcze jednej definicji. Niech  $S$  będzie ścieżką

$$(a, b) = (a_1, b_1) \rightarrow \dots \rightarrow (a_k, b_k) = (\alpha, \beta)$$

kończącą się w jakimś rogu tableau. *Rzut* ścieżki  $S$  to para zbiorów

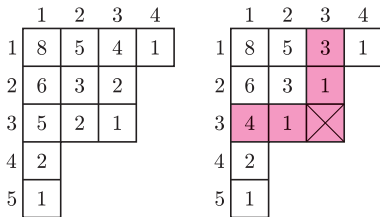
$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  (numery wierszy) oraz  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$  (numery kolumn)

– patrz rysunek 11. Niech  $P(A, B | a, b)$  oznacza prawdopodobieństwo, że losowa ścieżka zaczynająca się w komórce  $(a, b)$  ma rzut  $A, B$ . Wartość  $P(\alpha, \beta)$  możemy

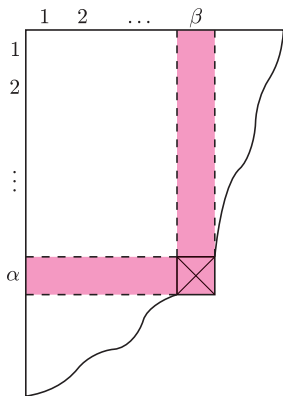


Rys. 8. Ścieżka

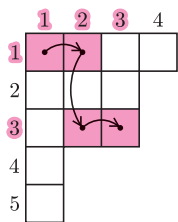
$$(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3).$$



Rys. 9. W zaciemnionych komórkach zmniejszamy rozmiary haczyków.



Rys. 10



Rys. 11.  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ .



teraz obliczyć, korzystając z odpowiednich prawdopodobieństw warunkowych:

$$(2) \quad P(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum P(A, B | a, b).$$

W powyższym wzorze sumujemy po takich  $A, B, a, b$ , że  $A \subseteq \{1, 2, \dots, \alpha\}$ ,  $B \subseteq \{1, 2, \dots, \beta\}$  oraz  $a = \min A$ ,  $b = \min B$  i  $\alpha = \max A$ ,  $\beta = \max B$ . Aby móc uczynić użytek z zależności (2), posłużymy się następującym wzorem:

$$(3) \quad P(A, B | a, b) = \prod_{i \in A, i < \alpha} \frac{1}{h_{i\beta} - 1} \prod_{j \in B, j < \beta} \frac{1}{h_{\alpha j} - 1}.$$

Udowodnimy go przez indukcję względem długości ścieżki  $k$ . Dla  $k = 1$  się zgadza (dlaczego?). Gdy  $k > 1$ , to ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy równość

$$P(A, B | a, b) = \frac{1}{h_{ab} - 1} \cdot (P(A \setminus \{a\}, B | a_2, b_1) + P(A, B \setminus \{b\} | a_1, b_2)).$$

Pierwszy składnik odpowiada wybraniu drogi w dół, a drugi – drogi w prawo w haczyku  $H_{ab}$  (rys. 12). Zarówno  $A \setminus \{a\}$ ,  $B$ , jak i  $A$ ,  $B \setminus \{b\}$  odpowiadają ścieżkom długości  $k - 1$ , zatem na mocy indukcji mamy

$$P(A \setminus \{a\}, B | a_2, b_1) = (h_{a\beta} - 1) \cdot \Gamma$$

oraz

$$P(A, B \setminus \{b\} | a_1, b_2) = (h_{\alpha b} - 1) \cdot \Gamma,$$

gdzie  $\Gamma$  to prawa strona w równości (3). Wobec tego

$$P(A, B | a, b) = \frac{1}{h_{ab} - 1} \cdot ((h_{a\beta} - 1) + (h_{\alpha b} - 1)) \cdot \Gamma = \Gamma,$$

bo, jak pokazuje prosty argument rysunkowy (patrz rys. 13),

$$h_{ab} - 1 = (h_{a\beta} - 1) + (h_{\alpha b} - 1).$$

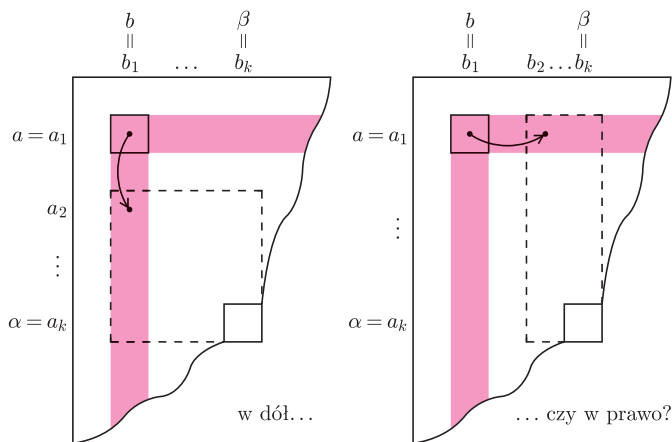
To kończy dowód wzoru (3).

Jeżeli teraz wstawimy wynik ze wzoru (3) do równości (2), to otrzymamy:

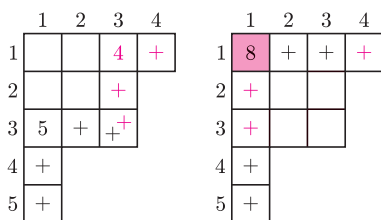
$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta) &= \frac{1}{n} \sum P(A, B | a, b) = \frac{1}{n} \sum \prod_{i \in A, i < \alpha} \frac{1}{h_{i\beta} - 1} \prod_{j \in B, j < \beta} \frac{1}{h_{\alpha j} - 1} = \\ &= \frac{1}{n} \prod_{1 \leq i < \alpha} \left(1 + \frac{1}{h_{i\beta} - 1}\right) \prod_{1 \leq j < \beta} \left(1 + \frac{1}{h_{\alpha j} - 1}\right) = \frac{f_\alpha}{f}. \end{aligned}$$

Rzeczywiście, po wymnożeniu prawej strony we wzorze (1) uzyskujemy sumę, której składniki są dokładnie postaci (3). Czyli  $P(\alpha, \beta) = f_\alpha/f$ . To kończy dowód!

Pusty iloczyn (iloczyn niezawierający żadnego czynnika) jest równy 1.



Rys. 12



Rys. 13.  $8 - 1 = (4 - 1) + (5 - 1)$ .

## Wyniki XXVI Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Bystra, 4–7 VI 2009

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych przez Jury (wraz z bibliografią) lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim, publicznym zreferowaniu tego opracowania.

W roku 2009/10 zaproponowane przez Jury tematy to:

nieziemienniki topologiczne, zdarzenia nieprawdopodobne, moje ulubione krzywe, liczby pierwsze, obliczanie „okropnych” sum nieskończonych, twierdzenia typu Ramseya, Enigma i inne takie, algorytmy przybliżone, różne systemy numeracji, potęga punktu względem okręgu.

Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach we współpracy z Uniwersytetem Śląskim; [www.spinor.edu.pl](http://www.spinor.edu.pl)

Jury w składzie: prof. dr hab. Maciej Sablik – przewodniczący, dr Marian Podhorodyński – zastępca przewodniczącego, dr Lech Bartłomiejczyk, dr Tomasz Bielaczyc, dr Adrian Brückner, dr Włodzimierz Fechner, mgr Żywilla Fechner, dr Maria Górniołek, dr Erwin Kasperek, mgr Renata Kawa, mgr Tomasz Kochanek, dr hab. Mieczysław Kula, dr Michał Machura, dr Janusz Morawiec, dr Barbara Przebieracz, dr Anna Szczerba-Zubek, przyznało

I nagrodę **Janowi Wegehauptowi** z VIII LO w Katowicach za pracę *Słów kilka o uprawianiu geometrii na powierzchni sześciannu*;

II nagrodę **Tomaszowi Smolarczykowi** z I LO w Pszczynie za pracę *Rozwiązywanie równań wielomianowych*;

III nagrodę **Patrycji Osadnik** z I LO w Lublińcu za pracę *Geometria w geografii*;

IV nagrodę **Krystianowi Gruszczynskiemu** z I LO w Koszalinie za pracę *Matematyka i origami*.

W głosowaniu na najlepszą prezentację nauczyciele nagrodzili **Jana Wegehaupta**, a uczniowie **Adama Śmiałkowskiego**, obu z VIII LO w Katowicach.

## Konkurs zadań astronomicznych

Na rozwiązania zadań A 23 i A 24 czekamy do 4 stycznia 2010 r. (decyduje data stempla pocztowego) pod adresem:

Centrum Astronomiczne  
im. Mikołaja Kopernika  
ul. Bartycka 18  
00-716 Warszawa

z dopiskiem na kopercie „Konkurs *Delty*”.



**A 23.** Podczas całkowitego zaćmienia Słońca ponad tarczą Księżyca można zaobserwować ogromne eksplozje na powierzchni Słońca, tzw. protuberancje. Jaki jest rozmiar takiej protuberancji w km oraz w stosunku do rozmiaru Ziemi, jeśli jej rozmiar kątowy wynosi 5 minut łuku? Odległość do Słońca to około  $1,5 \cdot 10^8$  km, a średnica Ziemi to około 13 tys. km. [1 pkt]

**A 24.** W akceleratorze LHC naukowcy mają nadzieję wyprodukować małe czarne dziurki. Masa takiej czarnej dziurki mogłaby być 1000 razy większa od masy protonu ( $m_p = 1,6727 \cdot 10^{-27}$  kg). Gdyby taka mała czarna dziurka wpadła do szklanki z wodą i wyparowała (wskutek procesu Hawkinga), a energia z tego procesu została zamieniona na ciepło, to o ile stopni została podgrzana woda? Przyjmujemy, że szklanka ma pojemność 0,25 litra, a ciepło właściwe wody to  $c_w = 4,19 \cdot 10^3$  J  $\cdot$  kg $^{-1}$   $\cdot$  K $^{-1}$ . [2 pkt]

### Rozwiązania zadań z numeru 10/2009

**A 19.** Zauważamy, że tor spadku swobodnego to połowa zdegenerowanej do odcinka elipsy, w której ognisku jest Ziemia, a apogeum leży na orbicie Księżyca. Jej półoś jest więc połową promienia orbity Księżyca. Okres obiegu  $T$  i półoś orbity  $a$  zgodnie z trzecim prawem Keplera spełniają zależność  $T^2/a^3 = \text{const}$ , gdzie stała ta jest taka sama dla Księżyca i dla ciała spadającego swobodnie. Czas spadku swobodnego wyniesie więc

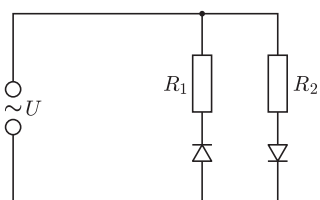
$$T = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{3/2}} \cdot (\text{miesiąc gwiazdowy}) = 4,83 \text{ doby.}$$

**A 20.** Aby piloci widzieli Słońce nieruchome, samolot musiałby pokonać długość równoleżnika w dobę, czyli  $2\pi R \cos \varphi / 1000 = 24$  h, gdzie  $R$  oznacza promień Ziemi. Stąd  $\varphi = 53^\circ 2'$ , czyli w przybliżeniu jest to szerokość geograficzna Warszawy.



## Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY



**F 753.** Dwa oporniki  $R_1$  i  $R_2$  oraz dwie diody połączone są do źródła napięcia zmiennego  $U$  tak jak na rysunku. Znaleźć średnią moc wydzielaną w układzie. Rozwiązanie na str. 2

**F 754.** Do źródła napięcia  $U_0$  podłączono szeregowo opornik  $R_1$  oraz opór zmienny  $R_2 = R_{02} - aU$ , gdzie  $U$  jest spadkiem potencjału na tym oporniku, a  $a$  jest stałe. Znaleźć natężenie prądu w obwodzie, zakładając, że znamy  $U_0$ ,  $R_1$ ,  $R_{02}$  i  $a$ . Rozwiązanie na str. 22

Redaguje Waldemar POMPE

**M 1261.** Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby  $x_1, x_2, \dots, x_{1001} \in \{-1, 1\}$ , że

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{1000}x_{1001} + x_{1001}x_1 = 499.$$

Rozwiązanie na str. 23

**M 1262.** Ostrosłup prawidłowy sześciokątny przecięto płaszczyzną, która przecina wszystkie jego krawędzie boczne. W przekroju otrzymano sześciokąt wypukły  $ABCDEF$ . Wykazać, że proste  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$  przecinają się w jednym punkcie. Rozwiązanie na str. 24

**M 1263.** Liczba rzeczywista  $x$  ma następującą własność: dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $q$  istnieje taka liczba całkowita  $p$ , że

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{3q}.$$

Dowieść, że liczba  $x$  jest całkowita. Rozwiązanie na str. 16

## Rudy osioł

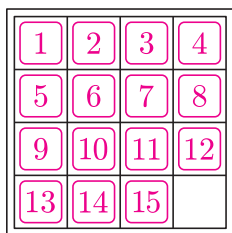
Bardzo rozpowszechnione są różne zabawki polegające na tym, by przez przesuwanie pionków o określonym kształcie w ograniczonym obszarze uzyskać pożądaną ich porządek.

Szczepan Jeleński w swojej *Lilavati* pisze np. o *Piętnastce*, znanej pod angielską nazwą *Fifteen Puzzle* czy pod francuską nazwą *Taquin*. Została ona ponoć wymyślona w 1878 roku, a największą popularność miała w pierwszym ćwierćwieczu ubiegłego wieku. W grze tej przesuwamy w kwadratowym pudełeczku pionki-kwadraciki o krawędziach cztery razy krótszych od brzegu pudełeczka. Kwadracików tych jest 15, więc jest też wolne miejsce rozmiarów jednego kwadracika, co pozwala na stopniowe zmienianie położenia pionków. Zadaniem grającego jest – poprzez przesuwanie pionków – przejście od danego ułożenia do ustawienia ich „po kolei”, czyli tak, jak na rysunku 1 – nazwijmy ten stan *sukcesem*.

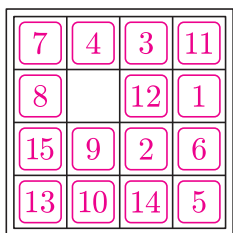
Ciekawą rzeczą jest to, że nie dla każdego wstępnego ułożenia pionków w pudełeczku możliwe jest doprowadzenie do sukcesu. Zatem poza przesuwaniem pionków można postawić sobie w związku z Piętnastką np. następujące pytania:

- jak poznać, czy dany układ (np. ten z rysunku 2) pozwala na doprowadzenie do sukcesu?
- jeśli nie pozwala, to ile co najmniej pionków trzeba nielegalnie (to jest wyjmując z pudełka) zamienić, aby doprowadzenie do sukcesu było możliwe?
- które to pionki?

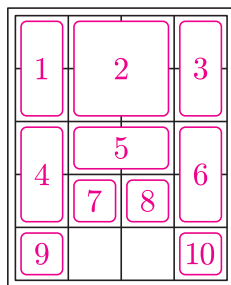
Pozostawiając Czytelnika z tymi problemami, przejdźmy do tytułowego *Rudego osła*.



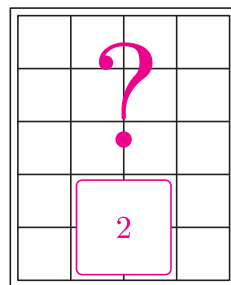
Rys. 1



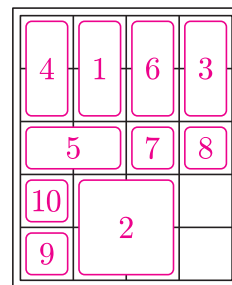
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Jest to gra podobna do Piętnastki, bo też przesuwamy pionki w pudełeczku. Tyle że teraz pudełeczko ma wymiary  $4 \times 5$ , a wewnątrz są następujące pionki: cztery kwadraciki  $1 \times 1$ , cztery prostokąty  $1 \times 2$ , jeden prostokąt  $2 \times 1$  i jeden kwadrat  $2 \times 2$  – na tym ostatnim (u nas oznaczonym liczbą 2) jest z reguły wizerunek osłej głowy, stąd nazwa gry. Położenie wstępne pionków jest zawsze jednakowe, takie jak na rysunku 3. A sukcesem jest tutaj umieszczenie osłej głowy, czyli dużego kwadratu, pośrodku dolnej krawędzi, jak na rysunku 4, przy czym jest obojętne, jak będą rozmieszczone pozostałe pionki. Zadanie to jest wykonalne, a grający powinien postarać się o to, by osiągnąć sukces w możliwie małej liczbie ruchów.

Jaka jest najmniejsza możliwa liczba ruchów – nie wiem. Oto przepis na uzyskanie sukcesu w 118 pojedynczych posunięciach (litery p, l, g, d to skróty odpowiednio od jeden w prawo, jeden w lewo, jeden w górę, jeden w dół):

9p, 4d, 5l, 8d, 6l, 10g, 8p, 6d, 5p, 5p, 7g, 7l, 9g, 9g, 6l, 10l, 10d, 5d, 9p, 9p, 7p, 7p, 4g, 6g, 10l, 10l, 8l, 8l, 5d, 7d, 7p, 6p, 4p, 1d, 1d, 2l, 3l, 9g, 9g, 7g, 7g, 6p, 3d, 3d, 2p, 1g, 1g, 4l, 8g, 8g, 10p, 10g, 5l, 5l, 3d, 6d, 8p, 8p, 2d, 9l, 9l, 7g, 7l, 8g, 8g, 6g, 6g, 3p, 10p, 10d, 2d, 9d, 9p, 1p, 4g, 4g, 2l, 9d, 9d, 7d, 8l, 6g, 3g, 10p, 9d, 2p, 4d, 4d, 1l, 8l, 7l, 6l, 3g, 3g, 2p, 7d, 7d, 8d, 8d, 1p, 4g, 4g, 7l, 7g, 5g, 9l, 9l, 10l, 10l, 2d, 8p, 8p, 7p, 7p, 5g, 10g, 10l, 2l.

Uzyskuje się tym sposobem ułożenie pionków takie, jak na rysunku 5.

Ciekawe, czy ktoś z Czytelników znajdzie sposób uzyskania sukcesu w mniejszej liczbie pojedynczych ruchów?

M. K.

## Rudy osioł – podejście informatyczne

Po przeczytaniu notki o łamigłówce *Rudy osioł* informatykowi może nasuwać się myśl, aby do znalezienia najmniejszej liczby ruchów potrzebnych do przejścia od stanu początkowego do końcowego spróbować zaprząć komputer. Mnie jednak wpadł najpierw do głowy pomysł wymagający istotnie mniej wysiłku: może warto spróbować poszperać w Internecie – a nuż znajdzie się tam gotowe rozwiązanie?

Wyniki przeszukiwania sieci globalnej przerosły moje najśmielsze oczekiwania. Pragnąc dotrzeć do możliwie największej liczby punktów odniesienia, postanowiłem poszukać jakichś informacji na stronach anglojęzycznych. W tym celu potrzebowałem poznać międzynarodową nazwę osłej łamigłówki. I zdziwiłem się niemało, gdy

okazało się, że łamigłówka figuruje w angielskiej Wikipedii pod nazwą... *Klotski*, czyli „prawie” klocki.

Jak to z takimi grami bywa, istnieje kilka odmian Klotsków pochodzących z różnych krajów: w Japonii pionek  $2 \times 2$  utożsamiany jest z córką uwięzioną w budynku, w Chinach – z legendarnym bohaterem Cao Cao, w Tajlandii – z uciekającym z więzienia Khunem Phaenem itd. Opisane wersje właściwie się nie różnią, lecz znane są też odmiany tej łamigłówki o trochę innych pozycjach początkowych, docelowych, tudzież rodzajach klocków. Skąd więc, przy całej tej różnorodności, swojsko brzmiąca międzynarodowa nazwa Klotski?

Trudno znaleźć w Internecie jednoznaczną odpowiedź na to pytanie, krąży wiele różnych poglądów (że, na przykład, polskie dzieci grały w Klocki, by doskonalić umiejętność

myślenia strategicznego), ostatecznie jednak ślady, które znalazłem na polskich i chińskich (sic!) blogach, prowadzą do pakietu gier wydanego wraz z systemem Microsoft Windows 3.1, w którym po raz pierwszy omawiana gra pojawiła się w wersji elektronicznej pod taką właśnie nazwą. Z kolei Microsoft zakupił licencję tej gry od innej firmy, której prezesem był w owym czasie podobno pewien emigrant z Polski. . .

Ponieważ na podstawie materiałów znalezionych w sieci nie zdołałem wyrobić sobie jednoznacznej opinii na temat faktycznego pochodzenia łamigłówek, więc pozostawiam Czytelnikom dalsze dociekanie i wracam do meritum. Otóż w Wikipedii można znaleźć informację, że minimalną liczbą ruchów potrzebnych do rozwiązania Klotsków, przy założeniu, że klocki można przesuwac w jednym ruchu o więcej niż jedno pole (a zatem o jedno lub o dwa), jest 81, a pierwszym, który opublikował takie rozwiązanie w 1964 r., był Martin Gardner. Nie doszukałem się jednakże danych na temat wersji gry, w której dozwolonymi ruchami są jedynie pojedyncze przesunięcia, więc musiałem zająć się jej rozwiązaniem sam – oczywiście z pomocą komputera.

Do radzenia sobie z podobnymi problemami najłatwiej jest wykorzystać technikę o mądrze brzmiącej nazwie *przeszukiwanie przestrzeni stanów*. Polega ona na tym, że abstrahujemy nieco od konkretnej struktury problemu – wszystkie możliwe postaci planszy traktujemy jako stany, wśród których wyróżniamy początkowy i końcowy (czy też końcowe), i dla każdego stanu wyznaczamy, do których stanów można z niego przejść w jednym posunięciu – po czym w grafie stanów (krawędziami są opisane pojedyncze przejścia) uruchamiamy odpowiedni algorytm przeszukiwania. Przy poszukiwaniu najkrótszej ścieżki może to być, na przykład, przeszukiwanie wszerz (BFS). Zasadniczym kryterium możliwości zastosowania tej metody jest tylko i wyłącznie to, ile różnych stanów występuje w przypadku danej gry oraz do ilu stanów można z danego stanu przejść w jednym ruchu. Pierwszy z tych parametrów odpowiada za złożoność pamięciową przeszukiwania, a drugi za złożoność czasową.

W przypadku wielu znanych łamigłówek już nawet liczba stanów jest na tyle duża, że praktycznie uniemożliwia zastosowanie opisanej techniki – na przykład, chociażby w malutkiej Piętnastce jest ich aż  $16! \approx 2 \cdot 10^{14}$  (to oszacowanie uzyskujemy, traktując wolne pole jak szesnasty pionek). Okazuje się jednak, że – jakkolwiek plansza w tym przypadku jest większa – w Rudym osle możliwych stanów jest o wiele mniej, jeżeli tylko odpowiednio starannie ustalimy, które stany są dla nas *faktycznie różne*, a które możemy swobodnie utożsamiać.

Zliczanie stanów zacznijmy od tego, że kwadrat  $2 \times 2$  możemy umieścić na planszy na  $3 \cdot 4$  sposoby (dlaczego?), następnie prostokąt  $2 \times 1$  na co najwyżej  $3 \cdot 5$  sposobów (a nawet z pewnością mniej niż tyle, gdyż duży kwadrat w każdym położeniu uniemożliwia pewne umiejscowienia tego prostokąta). Dalej przychodzi nam z pomocą kluczowa obserwacja: jeżeli chodzi o kwadraty

$1 \times 1$ , to tak naprawdę w opisie stanu zupełnie nas nie interesuje, które z nich są które, czyli możemy je traktować jako *nierozróżnialne*. Wynika to m.in. stąd, że w położeniu końcowym (rys. 4 na poprzedniej stronie) ich rozmieszczenie nie jest dla nas w ogóle istotne. Stąd ich położenia są z naszego punktu widzenia wyznaczone jednoznacznie poprzez kombinację 4 liczb z 14-elementowego zbioru (14 to wszystkie pola minus te już obsadzone). Podobnie, pozostałe cztery prostokąty  $1 \times 2$  możemy traktować jako nierozróżnialne. W tym przypadku jednak fakt, że do ich jednoznacznej identyfikacji na planszy wystarczy znajomość zajętych przez nie wszystkie pól (kombinacja 8 liczb z 10), jest dużo mniej oczywisty. Wynika to mianowicie stąd, że jeżeli znamy osiem pól, które zajmują nasze cztery prostokąty, to na ich podstawie możemy jednoznacznie wyznaczyć położenia tych prostokątów, na przykład w pętli łącząc w pary dowolne z najniższej położonych spośród tych pól z jego górnym sąsiadem.

Ostatecznie liczba stanów w Klotskach jest ograniczona przez

$$12 \cdot 15 \cdot \binom{14}{4} \cdot \binom{10}{8} = 8\,108\,100,$$

a to jest już wielkość nieprzekraczająca możliwości w miarę nowoczesnego komputera. Dalej, ponieważ w każdym stanie są dokładnie dwa wolne pola, to liczba przejść z każdego stanu jest nie większa niż 8 (dlaczego?), co w łącznym rozrachunku dobrze ogranicza liczbę krawędzi koniecznych do przejścia przy przeszukiwaniu.

Wiemy już, że możemy śmiało wykorzystać przeszukiwanie przestrzeni stanów do ostatecznego rozstrzygnięcia tego, jaka jest długość najkrótszej kombinacji ruchów rozwiązującej łamigłóvkę Rudy osioł. Kiedy jednak zacznie się faktycznie implementować odpowiedni program, zaczynają się nagle pojawiać różne istotne pytania natury technicznej: Jakiej struktury użyć do reprezentacji stanów? Jak przy wybranej reprezentacji efektywnie (ale zarazem możliwie najprościej) wyznaczyć wszystkie krawędzie wychodzące z danego stanu? Jakich struktur danych użyć w samym przeszukiwaniu (do pamiętania już odwiedzonych stanów i ich odległości od stanu początkowego)? Wreszcie, jak odzyskać wynik, czyli nie tylko odległość od stanu początkowego do końcowego, ale ruchy, jakie należy po kolei wykonać (np. w formacie 9p, 4d, 5l, . . . , w którym pionki są już ewidentnie rozróżnialne)?

Mnie się udało przezwyciężyć jakoś te wszystkie trudności i napisałem stosowny program, dzięki któremu wiem już, czy istnieje rozwiązanie Rudego osła w mniej niż 118 ruchach. Nie zdradzę jednak jeszcze odpowiedzi na to pytanie, lecz zachęcam Czytelników do samodzielnego zmierzania się z tym problemem (z użyciem komputera lub też bez). A programy firmowane przez redakcję (wraz z jakimiś odpowiedziami na postawione pod koniec pytania techniczne) ukażą się na stronie internetowej *Delty* wraz z numerem 5/2010.

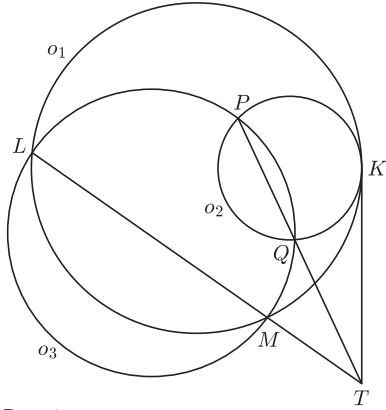
Jakub RADOSZEWSKI





# mała delta

## Środek potęgowy trzech okręgów



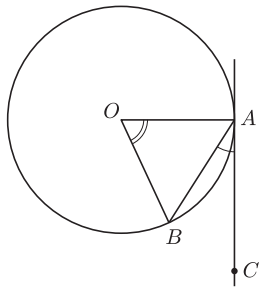
Rys. 1

W poprzednim artykule (*Delta* 11/2009) sformułowaliśmy twierdzenie, które było wykorzystane w konstrukcji. Teraz podamy jego dowód. A oto nasze twierdzenie:

**Twierdzenie 1.** *Dane są trzy okręgi  $o_1$ ,  $o_2$  i  $o_3$ . Okrąg  $o_2$  jest styczny wewnętrznie do okręgu  $o_1$  w punkcie  $K$ . Okrąg  $o_3$  przecina okrąg  $o_1$  w punktach  $L$  i  $M$  i przecina okrąg  $o_2$  w punktach  $P$  i  $Q$ . Prosta  $PQ$  i styczna do okręgów  $o_1$  i  $o_2$  w punkcie  $K$  mają punkt wspólny  $T$  (rys. 1). Wtedy punkty  $L$ ,  $M$  i  $T$  są współliniowe.*

Punkt  $T$  nazywamy *środkiem potęgowym* okręgów  $o_1$ ,  $o_2$  i  $o_3$ .

Będziemy dowodzić szeregu prostych twierdzeń. Zaczniemy od udowodnienia twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą.



Rys. 2

**Twierdzenie 2.** *Przyjmujemy, że prosta  $AC$  jest styczna do okręgu w punkcie  $A$ . Niech odcinek  $AB$  będzie cięciwą tego okręgu. Wtedy kąt  $BAC$  jest połową kąta środkowego  $BOA$  opartego na łuku  $AB$  zawartym wewnątrz kąta  $BAC$  (rys. 2).*

**Dowód.** Oznaczmy przez  $\alpha$  kąt  $BAC$ . Wtedy  $\sphericalangle BAO = 90^\circ - \alpha$  oraz  $\sphericalangle BOA = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle BAO = 180^\circ - 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 2\alpha$ .

**Twierdzenie 3.** *Niech prosta  $AC$  będzie styczna do okręgu w punkcie  $A$  i niech odcinek  $AB$  będzie cięciwą tego okręgu. Wtedy kąt  $BAC$  jest równy kątowi wpisanemu  $BDA$  opartemu na łuku  $AB$  zawartym wewnątrz kąta  $BAC$  (rys. 3).*

**Dowód.** Zauważmy, że przy oznaczeniach z twierdzenia 2 mamy  $\sphericalangle BDA = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BOA = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha = \sphericalangle BAC$ .

**Twierdzenie 4.** *Niech prosta  $CT$  będzie styczna do okręgu w punkcie  $C$ . Niech następnie prosta przechodząca przez punkt  $T$  przecina okrąg w punktach  $A$  i  $B$  (rys. 4). Wtedy  $TC^2 = TA \cdot TB$ .*

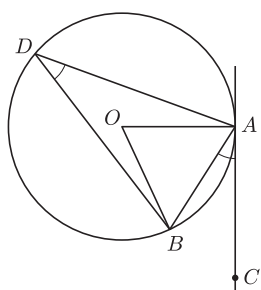
**Dowód.** Z twierdzenia 3 wynika, że  $\sphericalangle CAT = \sphericalangle BCT$ . Ponadto trójkąty  $CAT$  i  $BCT$  mają wspólny kąt przy  $T$ . Stąd wynika, że te trójkąty są podobne. Mamy zatem

$$\frac{TA}{TC} = \frac{TC}{TB},$$

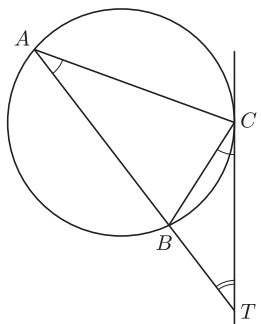
skąd wynika, że  $TC^2 = TA \cdot TB$ .

**Twierdzenie 5.** *Dwie proste przechodzące przez punkt  $T$  (leżący na zewnątrz okręgu) przecinają okrąg w punktach  $A$  i  $B$  oraz  $C$  i  $D$  (rys. 5). Wtedy  $TA \cdot TB = TC \cdot TD$ .*

**Dowód.** Poprowadźmy styczną  $TK$  do okręgu. Z twierdzenia 4 wynika, że  $TA \cdot TB = TK^2 = TC \cdot TD$ .

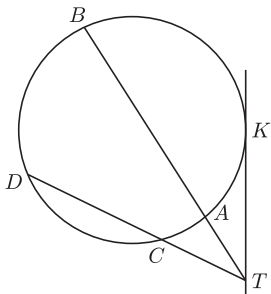


Rys. 3

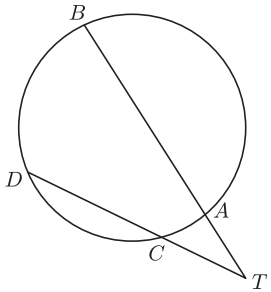


Rys. 4

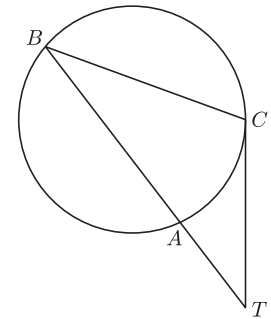




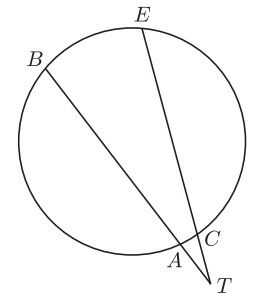
Rys. 5



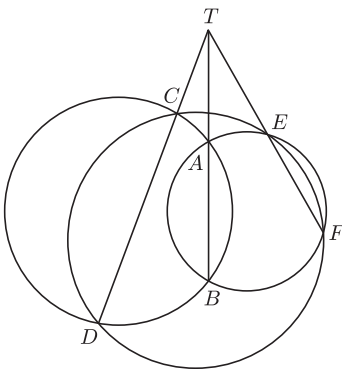
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Warto też zajrzeć do zadań w numerze 8/2009.

**Twierdzenie 6.** Dane są dwie nieleżące na jednej prostej półproste o wspólnym początku  $T$ . Punkty  $A$  i  $B$  leżą na jednej półprostej, punkt  $C$  na drugiej. Ponadto  $TA \cdot TB = TC^2$ . Wtedy półprosta  $TC$  jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  (przy czym, oczywiście, punktem styczności jest punkt  $C$ ).

**Dowód.** Punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$  nie są współliniowe, więc można poprowadzić okrąg przez te punkty. Prosta  $TA$  przecina ten okrąg w dwóch punktach  $A$  i  $B$ . Punkt  $T$  nie leży wewnątrz odcinka  $AB$ , więc leży na zewnątrz okręgu. Stąd wynika, że półprosta  $TC$  jest styczna do okręgu lub przecina go w dwóch punktach. Gdyby półprosta  $TC$  przecinała ten okrąg w dwóch różnych punktach  $C$  i  $D$  (rys. 6), to z twierdzenia 5 mielibyśmy  $TA \cdot TB = TC \cdot TD$ , czyli  $TC = TD$ , wbrew przypuszczeniu, że punkty  $C$  i  $D$  są różne. Zatem punkt  $C$  jest jedynym punktem wspólnym prostej  $TC$  i okręgu.

**Twierdzenie 7.** Dane są dwie nieleżące na jednej prostej półproste o wspólnym początku  $T$ . Na jednej z nich wybieramy dwa punkty  $A$  i  $B$ , na drugiej dwa punkty  $C$  i  $D$ . Ponadto  $TA \cdot TB = TC \cdot TD$ . Wtedy punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  leżą na jednym okręgu.

**Dowód.** Punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$  nie są współliniowe, więc można poprowadzić okrąg przez te punkty. Tak jak w poprzednim dowodzie punkt  $T$  leży na zewnątrz okręgu. Stąd wynika, że półprosta  $TC$  jest styczna do okręgu lub przecina go w dwóch punktach. Gdyby ta półprosta była styczna do okręgu (rys. 7), to punkt  $C$  byłby punktem styczności i z twierdzenia 4 mielibyśmy równość  $TA \cdot TB = TC^2$ . Zatem  $TC^2 = TC \cdot TD$ , skąd otrzymalibyśmy równość  $TC = TD$ . Punkty  $C$  i  $D$  pokrywałyby się wbrew założeniu. Niech zatem półprosta  $TC$  przecina okrąg w punkcie  $E$  różnym od  $C$  (rys. 8). Wtedy z twierdzenia 5 wynika, że  $TA \cdot TB = TC \cdot TE$ , czyli  $TD = TE$ . Zatem  $D = E$ , czyli punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  leżą na jednym okręgu.

**Dowód twierdzenia 1.** Ponieważ półprosta  $TK$  jest styczna do okręgu  $o_1$ , więc punkt  $T$  leży na zewnątrz tego okręgu. Mamy teraz dwa przypadki.

**Przypadek 1.** Półprosta  $TL$  jest styczna do okręgu  $o_1$ . Wtedy  $TK = TL$ . Z twierdzenia 4 (zastosowanego do okręgu  $o_2$ ) wynika, że  $TK^2 = TP \cdot TQ$ , czyli  $TL^2 = TP \cdot TQ$ . Z twierdzenia 6 wynika, że półprosta  $TL$  jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie  $PQL$ , czyli do  $o_3$ . Okręgi  $o_1$  i  $o_3$  są więc styczne, wbrew założeniu, że mają dwa punkty wspólne.

**Przypadek 2.** Półprosta  $TL$  przecina okrąg  $o_1$  w dwóch punktach  $L$  i  $N$ . Wtedy z twierdzenia 4 (zastosowanego do okręgów  $o_1$  i  $o_2$ ) wynika, że  $TL \cdot TN = TK^2$  oraz  $TP \cdot TQ = TK^2$ . Zatem  $TP \cdot TQ = TL \cdot TN$ , czyli punkty  $P$ ,  $Q$ ,  $L$  i  $N$  leżą na okręgu. To znaczy, że punkt  $N$  leży na okręgu opisanym na trójkącie  $PQL$ , czyli na okręgu  $o_3$ . Punkty  $L$ ,  $M$  i  $N$  są więc punktami wspólnymi okręgów  $o_1$  i  $o_3$ , skąd wynika, że  $M = N$ , czyli punkty  $T$ ,  $L$  i  $M$  są współliniowe.

Środek potęgowy trzech okręgów definiujemy też, gdy każde dwa okręgi przecinają się w dwóch punktach (rys. 9). Dowód, że proste  $AB$ ,  $CD$  i  $EF$  przecinają się w jednym punkcie  $T$ , jest podobny do dowodu przeprowadzonego wyżej. Środek potęgowy można też zdefiniować, gdy okręgi się nie przecinają, ale to już nie będzie przedmiotem naszych rozważań.

Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI

Lata sześćdziesiąte XX wieku to okres licznych odkryć w dziedzinie astronomii rentgenowskiej, zapoczątkowanych przez badania korony słonecznej przez Herberta Friedmana pod koniec lat pięćdziesiątych. Krokiem milowym było jednak odkrycie w 1962 roku pierwszego źródła rentgenowskiego poza Układem Słonecznym przez zespół pod kierownictwem Bruno Rossiego i Riccardo Giacconiego w gwiazdozbiornie Skorpiona Sco X-1. Po tym odkryciu nastąpiła seria detekcji kolejnych źródeł (w gwiazdozbiornach Centaura i Byka), tak że nikt już nie miał wątpliwości, iż Słońce nie jest jedynym na niebie źródłem rentgenowskim. Obserwacje optyczne źródła Sco X-1 ujawniły, że są to układy podwójne, ale za pierwszy odkryty rentgenowski układ podwójny uważa się dopiero zbadany kilka lat później Cyg X-1, bo na podstawie obserwacji wyznaczono jego okres orbitalny i oszacowano masę składników. Wkrótce po tym przyszło kolejne ważne – dokonane w 1975 niezależnie przez zespół Grindlaya oraz Beliana, Connera i Evansa – odkrycie pierwszych wybuchów rentgenowskich. Wybuchy te pochodziły ze znanego źródła w gromadzie kulistej NGC 6624 (3U1820-30). Wkrótce zaobserwowano kolejne dwa berstery rentgenowskie, jak zdecydowano się nazwać tę grupę obiektów (ang. *X-ray bursters*) – MXB1743-29 oraz MXB1743-28.

Źródła wybuchów rentgenowskich należą do klasy obiektów określanych jako mało masywne układy rentgenowskie (ang. *Low Mass X-ray Binary – LMXB*). Są to układy podwójne złożone ze zwanego obiektu – gwiazdy neutronowej lub czarnej dziury – i mało masywnego towarzysza (o masie mniejszej niż masa Słońca). Źródła wybuchów rentgenowskich wykazują niezwykłą różnorodność zachowań – są obiekty stale aktywne w dziedzinie rentgenowskiej, jak i źródła przejściowe (czasem tylko aktywne), są układy zaćmieniowe (choć źródłem zaćmień nie jest towarzysz, lecz dysk akrecyjny), są obiekty typu atol, jak i typu Z, są też w końcu berstery będące jednocześnie pulsarami. To, co łączy te tak różnorodne źródła w jedną klasę obiektów, to obecność wybuchów rentgenowskich mających szczególną cechę, a mianowicie *mięknięcie* widma w czasie spadku jasności po takim wybuchu, czyli zwiększanie stosunku jasności długofalowej, mniej energetycznej części widma rentgenowskiego do części krótkofalowej. Tego typu wybuchy nazywamy wybuchami typu pierwszego (typ I). Ich źródłem jest termonuklearne palenie materii w atmosferze gwiazdy neutronowej. Jak Czytelnik zapewne się domyśla, są też wybuchy typu II, przy czym należy wyraźnie zaznaczyć, że nie są to dosłownie wybuchy, a znaczące pojaśnienia obiektu. Tak jak w przypadku źródeł z wybuchami typu I, tak i te źródła są układami podwójnymi złożonymi z gwiazdy neutronowej i towarzysza o małej masie. W układzie takim ma miejsce przepływ materii na gwiazdę

neutronową poprzez dysk akrecyjny. Co pewien czas dysk ten staje się niestabilny, skutkiem czego jest gwałtowne opadanie dużych ilości materii na powierzchnię gwiazdy neutronowej. Energia wyzwolona w trakcie zderzenia materii z powierzchnią gwiazdy neutronowej zamieniana jest na ciepło, a następnie wyświecana w zakresie rentgenowskim. Ponieważ proces niszczenia dysku jest dosyć gwałtowny, pojaśnienie jest nagłe i duże. Obiekty o takim zachowaniu są rzadkością pośród układów, w których składnikiem głównym jest gwiazda neutronowa. Inaczej jest w przypadku, gdy składnikiem głównym jest biały karzeł, ale to temat na oddzielną opowieść.

Obecnie znamy 125 układów LMXB, a 40 z nich to berstery rentgenowskie. Berstery wykazują wszystkie cechy charakterystyczne dla mało masywnych układów rentgenowskich. Towarzysz jest słaby, o jasności absolutnej około  $2^m$ , i poza szczególnymi przypadkami nie jest obserwowany bezpośrednio. Tylko w przypadku, gdy towarzyszem jest chłodny olbrzym, obserwuje się jego widmo w sumarycznym widmie obiektu. Okresy orbitalne bersterów rentgenowskich są krótsze niż 16 h, choć zdarzają się wyjątki. Cir X-1 ma okres orbitalny 398 h, ale nie jest ostatecznie rozstrzygnięte, czy obiekt ten jest bersterem. Z kolei ekstremalnie krótki okres orbitalny, wynoszący 11 min, ma układ 4U1820-30. Jest to najkrótszy znany okres orbitalny pośród wszystkich istniejących układów podwójnych. Przy krótkich okresach orbitalnych należy się spodziewać małych mas towarzyszy, ale tylko dla nielicznych bersterów udało się je wyznaczyć.

Istnieją przesłanki wskazujące na to, że pole magnetyczne gwiazd neutronowych w bersterach rentgenowskich jest relatywnie słabe – rzędu  $10^7$ – $10^9$  Gs ( $10^3$ – $10^5$  T). Jasność bersterów zawiera się w przedziale  $10^{36}$ – $10^{37}$  erg/s. Przy niskiej jasności (w ramach tego przedziału) wybuchy występują niemalże periodycznie i częstotliwość wybuchów rośnie liniowo z jasnością, czego przykładem mogą być obiekty KS 1731-260 czy GS 1826-24, natomiast przy wyższych jasnościach częstotliwość wybuchów maleje, a wybuchy stają się bardziej nieregularne. Typowy czas pomiędzy wybuchami wynosi  $10^4$ – $10^5$  s. W trakcie wybuchu jasność źródła rośnie do osiągnięcia maksymalnej wielkości w ciągu 1 s, następnie w czasie od 3 do 100 sekund maleje do poziomu sprzed wybuchu, a emitowana energia jest rzędu  $10^{39}$  erg. Wybuchy rentgenowskie wykazują ogromną różnorodność kształtów krzywych blasku, przy czym dla danego źródła kształty krzywych blasku wyglądają podobnie. Kształt krzywej blasku zależy też od zakresu energii, w której obserwujemy – dla wyższych energii spadek jasności jest szybszy niż dla niższych.

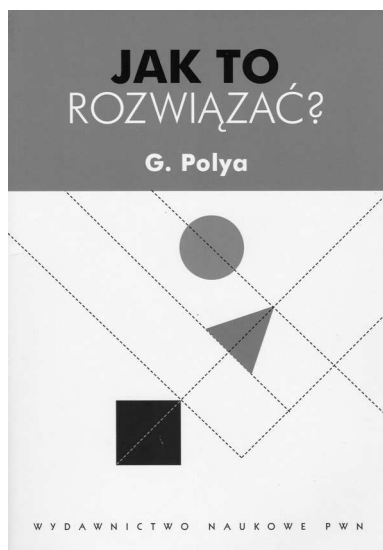
Czasem obserwujemy krzywą blasku z charakterystyczną strukturą podwójnego maksimum. Początkowo nie utożsamiano tych wybuchów z wybuchami typu I,

ponieważ wybuchy te są silniejsze, a czas trwania dłuższy, około 1500 s. Jasność wybuchów o krzywych blasku z podwójnym maksimum jest bliska jasności Eddingtona (jest to maksymalna jasność, jaką może mieć gwiazda, której atmosfera ani się nie zapada, ani nie ekspanduje), a więc ma miejsce znacząca ekspansja fotosfery gwiazdy neutronowej. Interpretacja powstawania rentgenowskiej krzywej blasku z podwójnym maksimum jest następująca. Ponieważ jasność podczas ekspansji jest stała, w trakcie ekspansji wraz ze wzrostem promienia maleje temperatura – aż spadnie do wartości, przy której zanika emisja rentgenowska. Później następuje faza kontrakcji – znów przy stałej jasności – a więc zmniejsza się promień, a temperatura rośnie do wielkości, w której znów może mieć miejsce emisja rentgenowska. Przypuszcza się, że wybuchów z ekspansją fotosfery można by było używać jako świec standardowych ze względu na znaną, stałą jasność podczas ekspansji.

Są też jeszcze superwybuchy, które w odróżnieniu od typowych wybuchów typu I trwają dłużej, mają większą jasność i zdarzają się rzadziej. Pierwszy superwybuch, pochodzący ze źródła 4U1735-44, został zaobserwowany przez zespół Cornelisse'a w 2000 roku. W chwili obecnej znamy superwybuchy z 6 źródeł:

4U1820-30, 4U1735-44, KS1731-26, 4U1636-53, Ser X-1, GX3+1. Widma superwybuchów mięknią z czasem, krzywe blasku wykazują mniej lub bardziej podobny do eksponencjalnego zanik, a w ich trakcie może mieć miejsce ekspansja fotosfery. Istnieją poszlaki wskazujące, że superwybuchy wpływają na powtarzalność „normalnych” wybuchów, tzn. sprawiają, że po superwybuchu normalny wybuch następuje później niż powinien. Podobnie jak w przypadku wybuchów typu I, tak i za superwybuchy odpowiedzialne jest termonuklearne palenie materii, z tym że nie wodoru czy helu, lecz węgla. Szczegółowy przebieg procesów nie jest jednak do końca znany. Niektórzy sugerują wręcz, że proces termonuklearnego palenia węgla w skorupie gwiazdy neutronowej nie jest możliwy.

Na tym jednak nie kończy się lista niewyjaśnionych zagadnień związanych z bersterami rentgenowskimi. Wielki postęp w naszym rozumieniu tych obiektów przyniosły obserwacje satelitów rentgenowskich Chandra i XMM-Newton. Jednak jak to zwykle w astronomii bywa, liczba powstałych przy tej okazji pytań znacznie przewyższyła liczbę odpowiedzi, jakie przyniosły te obserwacje. Berstery rentgenowskie mimo ponad 30 lat badań wciąż wydają się fascynujące i pełne niespodzianek.



### George Polya, *Jak to rozwiązać?*

Wznowienie klasycznej książki George'a Polya przypada na okres przygotowań do obowiązkowej matury z matematyki. Matura – jak i matematyka – polega na rozwiązywaniu zadań. Nazbyt często uczeń polskiej szkoły rozpoczyna tę czynność od postawienia kluczowego pytania: jaki wzór tu pasuje? Trudno się dziwić, że tak postrzegana matematyka nie budzi uczniowskiej sympatii, a efekty jej nauczania są dalekie od oczekiwań nauczających. Trudno też się dziwić, że w międzynarodowych testach młodzi Polacy nie najlepiej radzą sobie z zadaniami nietypowymi.

Swoje podejście Polya ujmuje w czterech zasadniczych punktach:

(1) Staraj się *zrozumieć* zadanie. (2) Znajdź związki między danymi i niewiadomymi. Możesz być zmuszony rozpatrywać zadania pomocnicze, jeżeli nie możesz znaleźć związku bezpośrednio. Powinieneś w końcu ułożyć pewien *plan* rozwiązywania zadania. (3) *Wykonaj* swój plan. (4) *Przestudiuj* otrzymane rozwiązanie.

Każdej z tych wskazówek towarzyszy lista pytań, jakie *warto* sobie stawiać, przystępując do jej realizacji. Mówiąc dosadnie, Autor powiada: jeśli masz rozwiązać zadanie – zacznij myśleć! I pokazuje, na czym takie myślenie polega. Pokazuje na licznych przykładach, jak może wyglądać analiza problemu, jak można krok po kroku, pytanie po pytaniu dochodzić do sensu zadania i w rezultacie do rozwiązania.

Chciałoby się, żeby tę książkę przeczytał każdy nauczający matematyki, niezależnie od poziomu. Chciałoby się, żeby ją przeczytał każdy licealista. Może jednak nie należy tak zawężać listy potencjalnych czytelników? W końcu nie ma powodu, żeby sposób myślenia proponowany przez Polę ograniczać do samej matematyki i samej szkoły. Myślenie jest naprawdę *trendy!*

W. B.

Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009

# Kosmiczna linijka

## 12. Mikrofalowe promieniowanie tła. Odległość 4,2 Gpc (4 Gpc na linijce)

Gdy patrzymy na niebo gołym okiem lub za pomocą teleskopu optycznego, widzimy na nim jasne gwiazdy, a pomiędzy nimi pustą przestrzeń. Jednak gdy użyjemy radioteleskopu, okazuje się, że cała przestrzeń kosmiczna jest wypełniona poświatą, emitującą promieniowanie elektromagnetyczne o dużych w porównaniu ze światłem widzialnym długościach fal. W przeciwieństwie do światła widzialnego poświata ta nie pochodzi od konkretnych źródeł, lecz stanowi swego rodzaju „tło”. Owo promieniowanie tła zostało odkryte, nieco zresztą przypadkowo, przez Arno Penziasa i Roberta Wilsona w 1964 roku, za co już w roku 1970 odkrywcy ci otrzymali Nagrodę Nobla. Za pomocą anteny radiowej stwierdzili oni istnienie promieniowania jednakowego w każdym kierunku, którego widmo ma postać widma ciała doskonale czarnego, a maksimum natężenia przypada w zakresie mikrofalowym (długość fali rzędu 1 mm). Temperatura odpowiadająca takiemu promieniowaniu jest bardzo niewielka: to jedynie 2,7 kelwina.

Obserwacja mikrofalowego promieniowania tła stanowiła kamień milowy w kosmologii, ponieważ potwierdziła hipotezę Wielkiego Wybuchu, która przewiduje istnienie takiego właśnie promieniowania, wyemitowanego z tzw. powierzchni ostatniego rozproszenia. Promieniowanie tła, zwane również reliktywnym, powstało w młodym, liczącym sobie zaledwie kilkaset tysięcy lat, Wszechświecie. Początkowo Wszechświat wypełniony był mieszaniną gorącej plazmy i promieniowania. W miarę jego ekspansji, mieszanina ta ochładzała się – energia tworzących ją cząstek malała. Przy odpowiednio niskiej temperaturze mogły trwale powstać pierwsze atomy pierwiastków, które nie pochłaniały już ani nie rozpraszały coraz mniej energetycznego promieniowania – Wszechświat stał się „przezroczysty”. To promieniowanie obserwujemy dzisiaj jako relikty tamtej epoki, a jest ono znacznie chłodniejsze niż w owym czasie, ponieważ objętość Wszechświata istotnie się od tamtej pory zwiększyła.

W latach 1990–1992 mapę rozkładu promieniowania mikrofalowego wykonał satelita COBE. Zauważono wówczas, że rozkład ten nie jest doskonale jednorodny,

lecz występują w nim maleńkie fluktuacje temperatury. Ich wielkość to około jednej stutysięcznej i tak bardzo niskiej temperatury. Dlatego bardzo trudno je zauważyć – do tego potrzebny był bardzo czuły instrument na pokładzie satelity. Te fluktuacje mikrofalowego promieniowania tła są śladem początkowych niejednorodności w rozkładzie materii, które powstały w pierwszych ułamkach sekund ewolucji Wszechświata. Właśnie z tych niejednorodności powstały gromady galaktyk, galaktyki, gwiazdy i planety.

Najdokładniejsze jak dotąd mapy mikrofalowego promieniowania tła wykonał satelita WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), wystrzelony w 2001 roku. Zbierane przez niego dane były regularnie publikowane; ostatnia analiza, oparta o 5 lat obserwacji, ujrzała światło dzienne w 2008 roku. Po przeanalizowaniu zarejestrowanych fluktuacji oszacowano m.in. wiek Wszechświata na 13,69 miliarda lat. Okazało się też, iż przy założeniu Standardowego Modelu Kosmologicznego do danych zebranych przez satelitę WMAP najlepiej pasuje model Wszechświata, w którym przestrzeń jest płaska (euklidesowa), gęstość jest w przybliżeniu równa gęstości krytycznej, a ponad 70% jego zawartości stanowi tzw. ciemna energia. Pozostała zawartość jest równie tajemnicza: ponad 22% to ciemna materia, a jedynie niecałe 5% to zwykła materia barionowa, z której zbudowane są gwiazdy, planety i my sami.

Efektami związanymi z promieniowaniem tła, które obecnie szczególnie interesują astrofizyków, są efekt Sunyaeva–Zeldowicza oraz efekt Sachsa–Wolfe’a. Pierwszy z nich polega na tym, że fotony promieniowania tła rozpraszają się na wysokoenergetycznych elektronach w gromadach galaktyk, uzyskując w ten sposób dodatkową energię. Drugi efekt powoduje, że fotony, przechodząc przez zmieniający się potencjał grawitacyjny, tracą lub zyskują energię, w wyniku czego zostają „poczerwienione” lub „poniebieszczone”. Obserwacje tych efektów pomagają w badaniu wielkoskalowej struktury Wszechświata.

Teraz czekamy na nowe wyniki z wystrzelonego w maju 2009 roku satelity PLANCK.

*Bożena CZERNY, Agnieszka JANIUK*



### Rozwiązanie zadania M 1263.

Niech  $q = 1$ . Wówczas istnieje taka liczba całkowita  $p$ , że  $|x - p| < 1/3$ . Wykażemy indukcyjnie, że

$$(1) \quad |x - p| < \frac{1}{3 \cdot 2^n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots,$$

skąd natychmiast wynika, że  $x = p$ , a więc  $x$  jest liczbą całkowitą.

Dla  $n = 0$  nierówność (1) jest spełniona. Przyjmijmy zatem, że zależność (1) zachodzi dla pewnej liczby  $n$ . Wówczas

$$(2) \quad |2^{n+1}x - 2^{n+1}p| < \frac{2}{3}.$$

Z drugiej strony wiemy, że dla  $q = 2^{n+1}$  istnieje liczba całkowita  $r$  spełniająca nierówność

$$(3) \quad |2^{n+1}x - r| < \frac{1}{3}.$$

Zatem wykorzystując nierówności (2) oraz (3), dostajemy

$$|2^{n+1}p - r| \leq |2^{n+1}x - 2^{n+1}p| + |2^{n+1}x - r| < \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

A ponieważ liczby  $r$  oraz  $2^{n+1}p$  są całkowite, więc  $r = 2^{n+1}p$ . Równość ta oraz zależność (3) kończą dowód indukcyjny.



## Protokół posiedzenia Jury XXXI Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki



Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie: Krzysztof Ciesielski, Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Maria Donten, Marek Kordos, Agnieszka Wojciechowska-Waszkiewicz, Jarosław Wróblewski, na posiedzeniu w dniu 1 lipca 2009 roku w Krakowie, po wysłuchaniu prezentacji prac dopuszczonych do finału, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść prac i sposób ich przedstawienia, postanowiło, co następuje:

- 1) srebrny medal otrzymuje  
**Martha Ubik** z II LO im. Króla Jana III Sobieskiego w Krakowie za pracę  
*Oszacowanie sumy długości przekątnych;*
- 2) brązowy medal otrzymuje  
**Michał Zając** z Gimnazjum nr 2 w Brzesku za pracę  
*O pewnej grze grafowej;*
- 3) wyróżnienia otrzymują  
**Tomasz Dwojak** z I LO im. Cypriana K. Norwida w Bydgoszczy za pracę  
*Twierdzenie Leibniza oraz twierdzenie o siecznych dla wielokąta*  
i **Maciej Rzeszut** z VII LO im. Juliusza Słowackiego w Warszawie za pracę  
*Charakteryzacja złożonej liczby rzutów liniowych;*
- 4) wyżej wymienieni laureaci otrzymują też nagrody rzeczowe w postaci kalkulatorów naukowych CASIO ufundowanych przez firmę ZIBI oraz książek Wydawnictwa Naukowego PWN;
- 5) wyrazy uznania i dyplomy, a także nagrody książkowe ufundowane przez ZG PTM otrzymują opiekunowie wszystkich finalistów, tj.  
**Mariusz Adamczak, Jacek Dymel i Henryk Toruńczyk.**

(—) podpisy Członków Jury

**CASIO**  
www.kalkulatory.pl



## Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do **1 kwietnia** prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje:
  - adres prywatny autora,
  - klasa, nazwa i adres szkoły,
  - imię, nazwisko i adres opiekuna pracy(można wypełnić formularz ze strony [www.mimuw.edu.pl/delta](http://www.mimuw.edu.pl/delta)).
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.
8. Finaliści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt organizatorów.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny, brązowy i wyróżnienia.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału i ich opiekunowie otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Redakcji *Delty*.

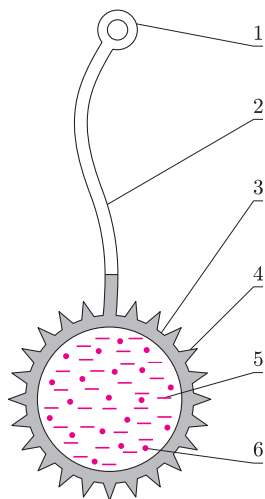


# Doświadczenia z elastyczną kulą wodną (część 1)



Stanisław BEDNAREK

Współcześni fizycy do przeprowadzania doświadczeń wykorzystują często bardzo skomplikowane i kosztowne urządzenia, takie jak Wielki Zderzacz Hadronów (znany także pod angielskim akronimem LHC) w podgenewskim Europejskim Centrum Badań Jądrowych (jak brzmi oficjalna nazwa laboratorium znanego pod francuskim skrótem CERN). My do wykonywania naszych doświadczeń używaliśmy zwykle przedmiotów i materiałów codziennego użytku, z których budowaliśmy proste przyrządy i układy. Okazuje się jednak, że czasami nie musimy nawet niczego budować. Do przeprowadzania wielu interesujących doświadczeń dobrze nadają się niektóre zabawki. Jedną z ich zalet jest to, że można je wykorzystać w gotowej postaci, bez żadnych przeróbek i adaptacji. Przykładem takiej zabawki jest elastyczna kula wodna, którą możemy kupić za kilka złotych w sklepie z zabawkami lub w kiosku.



Rys. 1. Budowa elastycznej kuli wodnej; 1 – uchwyt, 2 – taśma, 3 – sfera, 4 – kolec, 5 – woda, 6 – cząstka zawiesiny.

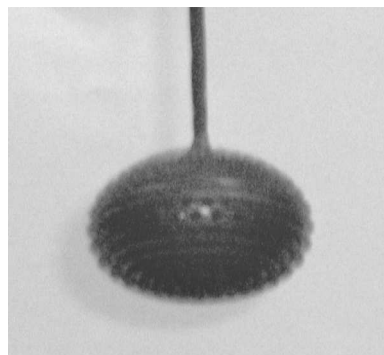
Zabawka ta wykonana jest z bardzo elastycznego, zabarwionego, ale jednocześnie przepuszczającego światło kauczuku silikonowego (fot. 1, rys. 1). Składa się ona z uchwytu w kształcie pierścienia połączonego kilkunastocentymetrowej długości taśmą ze sferą o średnicy kilku centymetrów, pokrytą regularnie rozmieszczonymi, miękkimi kolcami. Sfera wypełniona jest wodą i niemieszającą się z nią białawą substancją, tworzącą kłaczkowatą zawiesinę. Mimo swojej niezwykle prostej budowy zabawka ta pozwala na wykonanie szeregu interesujących eksperymentów, którymi zajmiemy się w tym i dwu następnym artykułach.

Tematem pierwszego eksperymentu jest kształt ciała sprężystego w ruchu obrotowym. Naszą zabawkę trzymamy palcami jednej ręki za uchwyt tak, żeby koniec z kolcami zwisał swobodnie. Zwisający koniec ma kształt kuli. Palcami drugiej ręki obejmujemy koniec z kolcami i obracamy go kilkadziesiąt razy w płaszczyźnie poziomej, aż taśma ulegnie silnemu skręceniu. Teraz puścamy go swobodnie i uważnie obserwujemy jego zachowanie i kształt. Widzimy, że zaczyna on coraz szybciej wirować wokół swojej pionowej osi. Początkowo kształt kuli ulega przy tym zmianie i staje się coraz bardziej elipsoidalny, przy czym oś wielka elipsoidy ma kierunek poziomy (fot. 2). Jest to spowodowane działaniem na zabawkę i zawartą w niej wodę sił odśrodkowych, rozciągających je w kierunku prostopadłym do osi obrotu.



Fot. 1. Wygląd zewnętrzny elastycznej kuli wodnej.

Po rozkręceniu taśmy koniec zabawki obraca się dalej w tę samą stronę i skręca taśmę w przeciwnym kierunku, zmniejszając przy tym swoją prędkość. Wraz ze spadkiem prędkości jego kształt ponownie zbliża się do sferycznego, aż w końcu zabawka zatrzymuje się i jej koniec przyjmuje kształt sferyczny. Opisane procesy powtarzają się, ale maksymalna prędkość obrotu zmniejsza się w wyniku strat energii na pokonanie sił tarcia o powietrze oraz oporów ruchu wynikających z niedoskonałej sprężystości taśmy. Doświadczenie to wyjaśnia, dlaczego niektóre planety o płynnym wnętrzu, w tym również Ziemia, mają kształt elipsoid. Pozwala również na wytłumaczenie wzajemnych przemian energii potencjalnej sprężystości na energię kinetyczną ruchu obrotowego.



Fot. 2. Elipsoidalny kształt wirującej elastycznej kuli wodnej.

Drugie doświadczenie dotyczy ruchu jednostajnego po okręgu w płaszczyźnie poziomej. Zabawkę ujmujemy za uchwyt palcami jednej dłoni tak, żeby taśma i koniec z kolcami zwisały pionowo. Zataczając dłonią małe, poziome kółka, wprawiamy kulę w ruch po okręgu w płaszczyźnie poziomej. Zauważamy, że taśma ulega przy tym odchyleniu od pionu i porusza się po powierzchni bocznej stożka (fot. 3). Zwiększając prędkość ruchu dłoni, widzimy, iż kąt odchylenia taśmy od pionu i jej długość wzrastają.

Dzieje się tak dlatego, że na poruszający się po okręgu koniec zabawki działają dwie wzajemnie prostopadłe siły. Są nimi: ciężar zabawki, skierowany pionowo i zwrócony w dół, oraz siła odśrodkowa, skierowana poziomo i zwrócona na zewnątrz okręgu. Wartość ciężaru jest stała, a wartość siły odśrodkowej jest wprost proporcjonalna do kwadratu prędkości końca zabawki. Taśma utrzymująca kulę z kolcami poruszającą się po okręgu ustawia się w kierunku

wypadkowej tych sił i przyjmuje kierunek ukośny. Przy większej prędkości taśma jest silniej rozciągana i wydłuża się, przyjmując przy tym kierunek bardziej odchylony od pionu. Podobny efekt odchylenia obserwujemy w przypadku krzesełek z pasażerami poruszającymi się po poziomym okręgu na niektórych typach karuzeli.



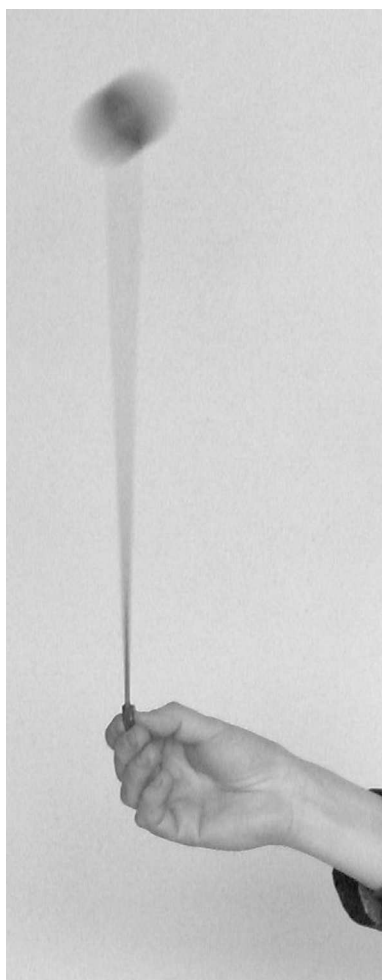
Fot. 3. Elastyczna kula wodna, poruszająca się ruchem jednostajnym po okręgu w płaszczyźnie poziomej.

W trzecim doświadczeniu zajmiemy się ruchem obrotowym kuli z kolcami w płaszczyźnie pionowej. Zabawkę trzymamy tak samo jak w poprzednim doświadczeniu. Dłonią wykonujemy ruchy po łuku w płaszczyźnie pionowej tak, żeby kula z kolcami wykonywała wahania o jak największej amplitudzie. W pewnym momencie kula wykonuje pełny obrót w płaszczyźnie pionowej. Kontynuujemy ruchy dłoni, podtrzymując ruch obrotowy kuli (fot. 4). Zwiększając szybkość ruchów dłoni, zauważamy, że kula również krąży szybciej, a długość taśmy, wyznaczająca promień toru, po którym porusza się kula z kolcami, wzrasta.

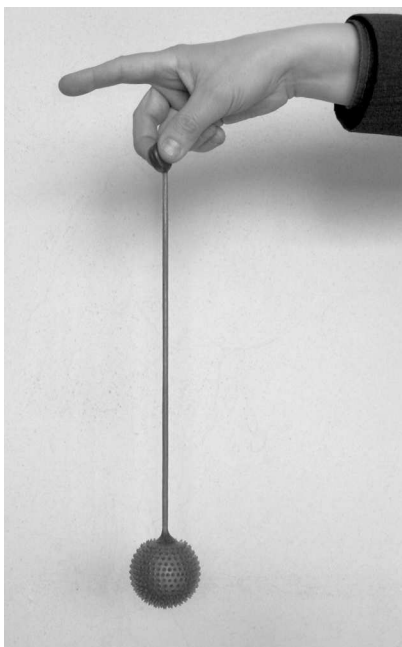
Przyczyną zaobserwowanego faktu jest wprost proporcjonalna zależność siły odśrodkowej od kwadratu prędkości kuli. W tym doświadczeniu należy zwrócić uwagę, że wskutek rozciągliwości taśmy tor ruchu kuli nie jest dokładnie okręgiem. Dzieje się tak dlatego, że kula, poruszając się ku górze, traci część swojej energii kinetycznej na rzecz wzrastającej energii potencjalnej ciężkości. Prędkość kuli na tym etapie ruchu maleje, a więc z kolei powoduje zmniejszenie siły odśrodkowej i promienia toru.

Czwarte doświadczenie ma na celu zilustrowanie zasady zachowania momentu pędu. Na początku zabawkę wprawiamy w ruch obrotowy w płaszczyźnie pionowej w sposób podobny do opisanego powyżej. Jedyna różnica polega na tym, że uchwyt zabawki trzymamy kciukiem i palcem środkowym jednej ręki, a palec wskazujący pozostaje zgięty tuż przy palcu środkowym. W pewnym momencie wyprostowujemy palec wskazujący (fot. 5), na który zaczyna nawijać się taśma, co powoduje zmniejszanie się promienia toru kuli (fot. 6). Ponieważ moment pędu poruszającej się kuli pozostaje z dobrym przybliżeniem stały, a promień toru maleje, to prędkość kątowna kuli musi wzrastać. Istotnie, przy mniejszej długości taśmy kula nawija się na palec wskazujący coraz szybciej.

To tylko niektóre z doświadczeń, jakie możemy wykonać przy użyciu tej prostej zabawki. Kolejne eksperymenty opisane zostaną już w nowym roku.



Fot. 4. Elastyczna kula wodna, wykonująca ruch obrotowy w płaszczyźnie pionowej.



Fot. 5. Przygotowanie elastycznej kuli wodnej do ilustracji zasady zachowania momentu pędu.



Fot. 6. Ilustracja zasady zachowania momentu pędu przy użyciu elastycznej kuli wodnej.

## Nobel dla majstrów światła

W tym roku Nagroda Nobla z Fizyki została przyznana w połowie Charlesowi Kuen Kao za *przełomowe osiągnięcia w wykorzystaniu światłowodów do komunikacji optycznej* oraz w połowie Willardowi Sterlingowi Boyle'owi i George'owi Elwoodowi Smithowi za *wynalezienie obrazującego obwodu półprzewodnikowego – sensora CCD*.

Jak widać, po raz kolejny potraktowano testament Alfreda Nobla dosłownie i uhonorowano tych, którzy *najbardziej przysłużyli się ludzkości*. Co prawda, zrobili to nie w mijającym roku, tylko trochę wcześniej, w latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych ubiegłego stulecia, ale nie da się ukryć, że każdy z nas korzysta z konsekwencji ich inwencji.

Możliwość przesyłania światła za pomocą dielektrycznej rurki, z wykorzystaniem całkowitego wewnętrznego odbicia, była znana, co najmniej, od połowy XIX wieku. Na dużą skalę została po raz pierwszy wykorzystana w czasie Światowej Wystawy w Paryżu 120 lat temu do iluminacji strumieni wody w fontannach. Dziś również światłowody są używane głównie do zabawiania się. Znacząca część informacji przekazywanej przez oplatającą Ziemię pajęczynę światłowodów to ruchome i nieruchome obrazy, w większości uzyskane za pomocą sensorów CCD (lub za pomocą wynalezionego mniej więcej w tym samym czasie sensora CMOS).

Zarówno światłowody, jak i CCD mają niezliczone „poważne” zastosowania. Detektory uruchamianego LHC właśnie za pomocą światłowodów komunikują się z farmami procesorów, podejmującymi w czasie rzeczywistym decyzje o tym, które dane są wystarczająco interesujące, żeby mogły zostać przekazane światowej, splecionej światłowodami, sieci komputerowej GRID. W sensory CCD wyposażone są już praktycznie wszystkie instrumenty astronomiczne. Ekscytujące zdjęcia, tak z kosmicznych, jak i z naziemnych obserwatoriów, są otrzymywane właśnie za ich pomocą. Użycie CCD rewolucjonizuje także np. obrazowanie medyczne.

Światłowody również znalazły pierwsze praktyczne zastosowanie w medycynie. Był nim gastrokop, który został skomercjalizowany w połowie ubiegłego wieku. Wydawało się wtedy jednak, że światłowody nie znajdują zastosowania w komunikacji, choć w laboratoriach demonstrowano możliwość przesyłania informacji za ich pomocą. Brak optymizmu był spowodowany bardzo wysoką atenuacją sygnału świetlnego – moc sygnału spadała sto razy na drodze 20 metrów. Z drugiej strony, pół wieku temu, potrzeby nie były jeszcze tak wielkie oraz nie znano odpowiednio dobrego źródła światła. Laser dopiero powstawał, był drogi i nieporęczny. Przełomowa rola Kao polegała na pokazaniu, że tak wysoka atenuacja jest spowodowana zanieczyszczeniami światłowodów, a następnie na wykazaniu, że szkło kwarcowe może pozwolić na wydłużenie drogi, na której sygnał spada o dwa rzędy wielkości, do kilometra. Kao okazał się nie tylko znakomitym fizykiem, ale także

dobrym propagatorem idei światłowodu jako wydajnego i ekonomicznego kanału przesyłania informacji. Dzięki temu konieczne technologie zostały opracowane, a pierwsze praktyczne zastosowanie światłowodu nastąpiło w niecałe dziesięć lat od podstawowej publikacji Kao z 1966 roku.

Dwaj pozostali nobliści również pracowali w przemyśle, a konkretnie w Bell Laboratories w New Jersey. Koncepcja CCD powstała w raczej nietypowy sposób. Wydział elektroniczny Bell Labs podlegał Jackowi Mortonowi i był podzielony na oddział urządzeń półprzewodnikowych oraz oddział zajmujący się wszystkim pozostałym. Pod koniec lat sześćdziesiątych technologią, z którą wiązano wielkie nadzieje, była „pamięć pęcherzyków magnetycznych” (*magnetic bubble memory*), a głównym światowym ośrodkiem jej rozwoju był oddział Bell Labs, konkurencyjny do oddziału kierowanego przez Boyle'a. Morton uzależnił pozostawienie środków do dyspozycji oddziału Boyle'a od zaproponowania półprzewodnikowego odpowiednika pęcherzyków magnetycznych. 17 października 1969 roku do biura Mortona przyszli i Boyle, i Smith. W ciągu godzinnej dyskusji, w obawie przed utratą środków na własne badania, naszkicowali na tablicy koncepcję „pamięci pęcherzyków ładunku”, zasady jej działania oraz możliwe zastosowania. Tak zaczęła się historia *Charge Coupled Device*, czyli CCD. Pomysł użycia CCD jako pamięci nie przetrwał próby czasu, podobnie jak jej magnetycznego odpowiednika. CCD to matryca z kubelkami na ładunek, który jest generowany dzięki fotonom poprzez efekt fotoelektryczny. Ładunek może być odczytywany linia po linii, komórka po komórce, poprzez „przelanie” go z komórki do komórki. Właśnie ten sposób odczytu jest pozostałością po koncepcji pęcherzyków. Dzięki niemu czynna część matrycy CCD może obejmować praktycznie całą powierzchnię sensora. A ponieważ urządzenia te mogą mieć bardzo niski poziom szumu oraz efektywność kwantową dochodzącą do 90%, to trudno się dziwić, że tradycyjna fotografia, z efektywnością zaledwie rzędu 1% i uciążliwym procesem chemicznym zamiast błyskawicznej elektroniki, odchodzi do profesjonalnych zastosowań niszowych.

Na koniec z dumą informujemy, że na tegoroczną uroczystość wręczenia Nagród Nobla zostali zaproszeni laureaci Konkursu Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej, a wśród nich Aleksander Kubica i Wiktor Pilewski, zdobywcy pierwszej nagrody za pracę *Spiralne soczewki dyfrakcyjne*, skrót której planujemy opublikować na naszych łamach.

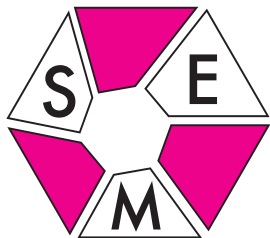
Przy okazji nadmieniamy, że na omówienie prac polskich naukowców, które mogłyby zostać docenione przez Szwedzką Akademię Nauk, mamy od dawna zarezerwowane miejsce.

Piotr ZALEWSKI



# Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl



W dniach 9–11 października 2009 roku w ośrodku Dresso w Sulejowie odbyła się współorganizowana przez SEM konferencja **Matematyka. Jak uczyć?** Wzięło w niej udział ponad 100 matematyków z całego kraju. Byli to zarówno nauczyciele matematyki w szkołach podstawowych, gimnazjach, liceach, jak też pracownicy wyższych uczelni, w tym najwybitniejsi nasi profesorowie. To bardzo dobrze, bo troska o matematyczną edukację społeczeństwa powinna być wspólna. Wspólny też dla nauczających wszystkich szczebli powinien być obraz matematyki, choć – rzecz jasna – w zależności od wieku i przygotowania naszych podopiecznych inaczej ten obraz będziemy im demonstrować.

Oprócz referatów, które w roboczy sposób pokazywały różne podejścia do uczenia wybranych zagadnień matematycznych, odbyło się wiele dyskusji i zebrań. Stworzyły one okazję do wymiany w szerokim gronie poglądów na temat problemów edukacji matematycznej i roli, jaką w tym względzie mogą i powinny odgrywać olimpiady.

Nad wszystkim unosiły się dwa fundamentalne pytania:

- jak dalece w szkole powinniśmy unikać formalizmów matematycznych (czy wręcz przeciwnie – wprowadzać je)?
- jak dalece mamy zdobywać miłośników matematyki, ukazując jej czyste, wręcz muzyczne piękno, a jak dalece mamy jednać jej zwolenników przez ukazywanie wszechstronnych zastosowań matematyki i ich niezwyklej skuteczności?

W tej drugiej sprawie pojawił się pogląd, że do matematyki najlepiej prowadzi podziw uczniów dla zapału jej nauczyciela.

Więcej informacji o konferencji można znaleźć na stronie SEM.

## Zupełnie inne, a to samo

Wszelkie pojęcia i twierdzenia matematyczne wylaniają się z obserwacji, że w wielu, często odległych sytuacjach czy rozumowaniach pojawia się podobny pomysł, który jest decydujący dla rozwiązania rozważanych problemów, daje się zaobserwować jakaś analogia, wyraźnie narzuca się pokrewieństwo sytuacji. Dopiero później, nieraz po wielu stuleciach, matematycy postanawiają te regularności nazwać, sformułować ich aksjomatykę, skodyfikować technikę używaną przy ich stosowaniu.

Najdobitniej chyba widać to w przypadku bardzo przydatnego pojęcia grupy, które było używane już w pierwszych odnotowanych dokonaniach matematycznych naszych przaprzodków, a które zdefiniowano i nazwano dopiero w latach sześćdziesiątych XIX wieku (dość wspomnieć, że nawet działający na początku XIX wieku Gauss, Abel i Galois, stosując w swoich rozumowaniach grupy, nie widzieli w nich odrębnego pojęcia).

W tym spostrzeżeniu kryje się możliwa odpowiedź na to, czy o takich pojęciach jak grupa można mówić także w szkole dowolnego szczebla. Można – trzeba tylko pamiętać, by mówić o nich na poziomie obserwacji analogii, prawidłowości – bez tracenia czasu na ich wprowadzanie (czy choćby nazywanie), bo to nie tylko zabiera czas, ale też obciąża uwagę ucznia i kieruje ją na zapamiętywanie nowej terminologii.

Oto cztery przykłady znanych faktów matematycznych, które – mimo że są bardzo różne – można uzyskać w analogiczny sposób (mówiąc językiem zawodowców: z pomocą twierdzenia Lagrange’a o rzędzie podgrupy – ale przecież nie musimy demoralizować młodzieży tak odrażającym słownictwem: możemy po prostu pokazać, że „robi się” to za każdym razem tak samo).

1. Liczby postaci  $F_n = 2^{2^n} + 1$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną, nazywają się liczbami Fermata. Fermat przypuszczał (albo był przekonany), że są to liczby pierwsze. Euler zauważył, że nie jest to prawdą już dla  $F_5$ . Wśród faktów dotyczących tych liczb jest i taki: *jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, która dzieli  $F_n$ , to zachodzi  $p = 2^{n+1}k + 1$  dla pewnej liczby naturalnej  $k$ .*
2. Jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą różną od 2 i 5, to rozwinięcie dziesiętne  $1/p$  jest ułamkiem okresowym, którego okres dzieli  $p - 1$ .
3. Liczba osi symetrii  $n$ -kata jest równa 0 lub dzieli  $n$ .
4. Na pewnej tablicy świetlnej można wyświetlać różne konfiguracje za pomocą przełączników. Każdy przełącznik ma ustalony obszar działania. Gdy się go naciśnie, to w jego obszarze zgasną wszystkie zapalone żarówki i zapalą się wszystkie te, które się nie paliły. Okazuje się, że liczba konfiguracji, które możemy wyświetlić na tej tablicy, jest potęgą 2.



### Rozwiązanie zadania F 754.

Spadek napięcia na drugim oporniku to  $U = IR_2 = IR_{02} - aUI$ , stąd

$$U = \frac{IR_{02}}{1 + aI}.$$

Z prawa Ohma mamy

$$U_0 = IR_1 + U = IR_1 + \frac{IR_{02}}{1 + aI},$$

otrzymujemy więc

$$I = \frac{1}{2aR_1} \left( aU_0 - R_1 - R_{02} + \sqrt{(R_1 + R_{02} - aU_0)^2 + 4aR_1U_0} \right).$$

Najprostszym pomysłem jest rozdzielenie problemu na  $n$  mniejszych: szukanie oddzielnie wartości  $f(x)$  dla kolejnych  $x$ . Dla ustalonego  $x$  można to zrobić, na przykład, wyszukując binarnie. W tym celu sprawdzamy, czy  $f(x) \in \{0, 1, \dots, y\}$  dla  $y = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , następnie zależnie od wyniku dla  $y = \lceil \frac{n}{4} \rceil$  lub  $y = \lfloor \frac{3n}{4} \rfloor$  itd. Oczywiście, wykonamy około  $\log n$  zapytań, ale równoległe do nich trzeba jeszcze zmieniać zbiór  $B$ , co zajmie, dla danego  $x$ , około  $n$  operacji. Łącznie zapytań do biblioteki wychodzi mniej więcej  $n \cdot (\log n + n)$ , a konkretnie dla  $n = 90$  – prawie 9000, czyli zdecydowanie za dużo.

O wiele lepszym rozwiązaniem jest połączenie wszystkich wyszukiwań binarnych w jedno, żeby nie musieć nieustannie zmieniać zbioru  $B$  (co jest głównym kosztem pierwszego algorytmu). Sprawdzenie, dla których wartości  $x$  mamy  $f(x) \in \{0, 1, \dots, \frac{n}{2}\}$ , zajmuje około  $\frac{3n}{2}$  operacji ( $\frac{n}{2}$  razy dokładamy element do zbioru  $B$ , po czym wykonujemy  $n$  zapytań). Pozwala to podzielić dziedzinę na dwa zbiory  $C$  i  $D$ , z których każdy odpowiada fragmentowi przeciwdziedziny rozmiaru mniej więcej  $\frac{n}{2}$ . W kolejnym kroku z aktualnego zbioru  $B$  usuwamy elementy od  $\frac{n}{4}$  do  $\frac{n}{2}$ , a dokładamy do niego elementy od  $\frac{n}{2}$  do  $\frac{3n}{4}$  (razem  $\frac{n}{2}$  operacji). Wówczas wykonanie zapytań dla każdego elementu z  $C$  i  $D$  pozwala na rozdrobnienie tych zbiorów na odpowiadające podprzedziałom przeciwdziedziny rozmiaru  $\frac{n}{4}$  (dlaczego?). W tej fazie znów wykonaliśmy  $\frac{3n}{2}$  operacji. Odpowiednio modyfikując zbiór  $B$ , to rozdrabnianie można kontynuować – po  $\log n$  takich fazach otrzymany podział dziedziny wyznacza dokładnie wszystkie wartości funkcji. Daje to razem  $\frac{3}{2}n \log n$  operacji, przy czym cały czas pomijałem fakt, że  $\frac{n}{2}$  i  $\log n$  mogą nie być całkowite, co może prowadzić do drobnych błędów w tym oszacowaniu. Dla  $n = 90$  otrzymujemy łączną liczbę operacji około 900; z powodu opisanych niedokładności ciężko ją jednak obliczyć dokładnie. Na zawodach takie rozwiązanie wymagało dodatkowych usprawnień, aby uzyskać maksymalną liczbę punktów.

Rozwiązanie proponowane przez autora kącika opiera się na programowaniu dynamicznym i jest pewnym ulepszeniem poprzedniego. Będziemy w nim wyznaczać dla każdej pary  $(x, y)$  liczbę  $t(x, y)$  operacji potrzebnych

## Informatyczny kącik olimpijski (25): Odgadywanie funkcji

Tematem kącika w tym miesiącu będzie zadanie *Wires and Switches* z Międzynarodowej Olimpiady Informatycznej z 1995 roku.

Dana jest liczba naturalna  $n$ . Należy odgadnąć funkcję  $f : \{0, 1, \dots, n - 1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n - 1\}$  (tzn. jej wartości dla wszystkich argumentów), która jest reprezentowana przez zewnętrzną bibliotekę komunikującą się z programem stanowiącym rozwiązanie. Biblioteka umożliwia jedynie wykonywanie następujących operacji:

- zapytanie, czy  $f(x) \in B$  dla pewnego  $x$  i aktualnego zbioru  $B$ ,
- dodanie do zbioru  $B$  jednego elementu,
- usunięcie ze zbioru  $B$  jednego elementu.

Zbiór  $B$  jest początkowo pusty. Celem jest uzyskanie jak najmniejszej łącznej liczby wykonanych operacji. Konkretniej, na zawodach było wiadomo, że  $n \leq 90$ , i należało zmieścić się w 900 operacjach.

nam do odgadnięcia funkcji, jeśli jej dziedzina liczy  $x$  elementów, a przeciwdziedzina –  $y$  elementów, przy założeniu, że początkowo zbiór  $B$  nie zawiera elementów z przeciwdziedziny lub zawiera ją całą (może natomiast zawierać dowolne elementy spoza niej). Algorytm zadawania zapytań do biblioteki możemy teraz oprzeć chociażby na następującym, bezpośrednim pomysłem: aby odgadnąć funkcję, dodajmy kilka (a konkretnie  $q$ ) elementów do zbioru  $B$  (a w przypadku, gdy  $B$  zawierał całą przeciwdziedzinę – usuńmy z niego  $q$  elementów), a następnie sprawdźmy, dla których argumentów funkcja daje wartości z  $B$  (niech będzie ich  $p$ ). W ten sposób podzielimy zarówno dziedzinę, jak i przeciwdziedzinę, na dwa podzbiory i będziemy mogli rozwiązywać dwa otrzymane podproblemy osobno. Zauważmy, że mamy wpływ na wybór  $q$ , ale nie mamy żadnego na  $p$ . W takim razie, zakładając, że wystąpi najgorsza ewentualność (pod względem wyboru  $p$ ), możemy przyjąć, że:

$$t(x, y) = \min_{0 < q < y} \max_{0 \leq p \leq x} (q + x + t(p, q) + t(x - p, y - q)),$$

gdyż  $q$  operacji zużywamy na dodawanie elementów do  $B$  (lub ich usuwanie), następnie  $x$  operacji na dzielenie dziedziny, a potem rozwiązujemy oba pozostałe podproblemy. Zauważmy, że przy takim algorytmie zapytań dla każdego z podproblemów w momencie rozpoczęcia przetwarzania zbioru  $B$ , zgodnie z poczynionym założeniem, zawiera wszystkie elementy z danej przeciwdziedziny lub nie zawiera żadnego z nich.

Powyższy wzór pozwala obliczyć wszystkie wartości  $t(x, y)$  dla  $x, y \leq n$ . Po zakodowaniu rozwiązania okazuje się, że  $t(90, 90) = 877$ , co pozwala z zapasem odgadnąć każdą funkcję, mieszcząc się w wyznaczonym limicie. Pytanie kontrolne: jak na podstawie wartości  $t(x, y)$  zaprojektować konkretny algorytm zadawania zapytań do biblioteki?

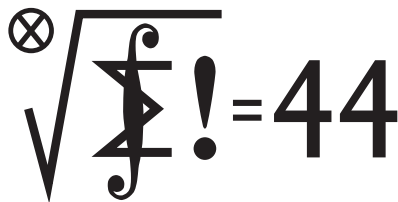
Na koniec zachęcam Czytelnika do zastanowienia się, czy strategia, zgodnie z którą obliczaliśmy wartości  $t(x, y)$ , jest optymalna, a jeśli nie, to czy potrafi on znaleźć taką, która wymaga mniejszej liczby operacji (w ogólności lub chociaż dla pewnych  $n$ ).

Tomasz KULCZYŃSKI



### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

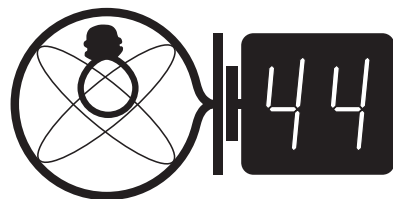


Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
579 ( $WT = 1,16$ ) i 580 ( $WT = 2,55$ )  
z numeru 4/2009

Paweł Najman	Jaworzno	47,03
Tomasz Warszawski	Kraków	42,26
Janusz Olszewski	Warszawa	42,06
Zbigniew Galias	Kraków	42,05
Jerzy Cisło	Wrocław	41,58
Marek Prauza	Poraj	41,11
Tomasz Wietecha	Tarnów	37,49
Tomasz Tkocz	Rybnik	37,15

Paweł Najman: to już czwarte pełne okrążenie.



Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
478 ( $WT = 2,10$ ) i 479 ( $WT = 2,95$ )  
z numeru 5/2009

Tomasz Wietecha	Tarnów	45,11
Andrzej Idzik	Bolesławiec	42,26
Krzysztof Magiera	Łosiów	32,48
Radosław Poleski	Kołobrzeg	23,47
Michał Koźlik	Gliwice	22,00
Jerzy Witkowski	Radlin	16,54

Pan Wietecha kończy siódmą rundę w klubie 44F, czyli czternastą (!) w obu Klubach łącznie.

### Zadania z matematyki nr 591, 592

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**591.** Liczby naturalne  $a, b, c$  są związane zależnością

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Niech  $d$  będzie największym wspólnym dzielnikiem tych liczb. Dowieść, że iloczyn  $abcd$  jest kwadratem liczby naturalnej.

**592.** Punkt  $P$  leży wewnątrz czworościanu  $ABCD$ . Proste  $AP, BP, CP, DP$  przecinają sfery opisane na czworościanach  $PBCD, PCDA, PDAB, PABC$  odpowiednio w punktach  $K, L, M, N$  (różnych od  $P$ ). Udowodnić, że

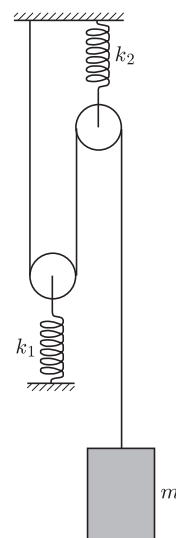
$$\frac{|AP|}{|AK|} \cdot \frac{|BP|}{|BL|} \cdot \frac{|CP|}{|CM|} \cdot \frac{|DP|}{|DN|} \leq \frac{1}{256}.$$

Zadanie 592 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

### Zadania z fizyki nr 488, 489

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**488.** Ciężarek o masie  $m$  wisi na nici, która owija się wokół dwóch nieważkich bloków ruchomych. Osie bloków są napięte sprężynkami o stałych sprężystości  $k_1$  i  $k_2$  (rysunek). Obliczyć okres pionowych drgań ciężarka wokół położenia równowagi.



**489.** Chemiczne oczyszczanie wzbogaconego uranu

(tzn. zawierającego podwyższony procent rozszczepialnego izotopu  $^{235}\text{U}$ , stosowanego w reaktorach jądrowych) może być przeprowadzane w zbiorniku z cieczą, w którym oczyszczony tlenek uranu opada na dno. Ciepło wytwarzane przez reakcję chemiczną jest odprowadzane przez wodę otaczającą zbiornik.

W pewnym zakładzie stosującym tę technologię doszło do dość poważnego wypadku, gdy oczyszczano uran wzbogacony nie – jak zwykle – do 3%, ale do 19% (tak wysoko wzbogacony uran jest stosowany w reaktorach wysokotemperaturowych).

Przyczyną wypadku było zaniedbanie polegające na przetwarzaniu tej samej ilości materiału, co zwykle, mimo wyższej zawartości izotopu rozszczepialnego. Uran osadzający się na dnie zbiornika przekroczył wskutek tego masę krytyczną i rozpoczęła się reakcja łańcuchowa, która trwała w sposób samoczynnie kontrolowany przez 17 godzin. Jakie zjawiska fizyczne lub chemiczne mogły być odpowiedzialne za kontrolowany przebieg reakcji, która nie rozwinęła się do skali wybuchu?



### Rozwiązanie zadania M 1261.

Przyjmijmy, że wśród liczb  $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_{1000}x_{1001}, x_{1001}x_1$  jest dokładnie  $a$  jedynek oraz dokładnie  $b$  minus-jedynek. Wtedy  $a + b = 1001$  oraz  $a - b = 499$ , skąd otrzymujemy  $a = 750$  oraz  $b = 251$ . Wobec tego

$$(x_1x_2 \dots x_{1001})^2 = (x_1x_2)(x_2x_3)(x_3x_4) \dots (x_{1000}x_{1001})(x_{1001}x_1) = (-1)^{251} = -1.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, z której wynika, że nie istnieją liczby spełniające warunki zadania.

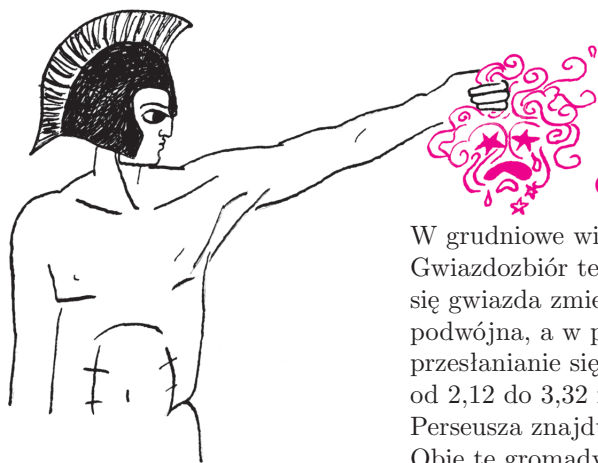
## Patrz w niebo

Powszechnie uważa się, że dominującym zjawiskiem w świecie planetoid są zderzenia. Od czasu, gdy do planetoid zbliżyły się sondy kosmiczne z kamerami, skutki tych zderzeń po prostu widać w postaci kraterów, rys, pęknięć i wszelkiego rodzaju „ran”. Wzajemne obijanie się planetoid powinno – „na zdrowy rozum” – doprowadzić do wymieszania wszelkich parametrów ich ruchu, inaczej mówiąc – do chaosu. Obserwacji dotyczących m.in. tempa obrotu czy usytuowania osi obrotu jest więcej, niż można by przypuszczać, gdyż na długo przed erą kosmiczną obserwowano zmiany jasności planetoid i w wielu przypadkach udało się z nich uzyskać te właśnie parametry kinematyczne, a nawet kształt.

I tu niespodzianka! Okazało się bowiem, że np. wśród 10 planetoid rodziny Koronis (rodzina to planetoidy mające bardzo zbliżone półośie orbit) obserwuje się dziwne regularności. Sześć planetoid rotujących w kierunku prostym (tj. w jakim zachodzi ruch orbitalny) ma osie obrotu niemal równoległe – celujące w Kasjopeję, a ich okresy obrotu zawierają się między 8 a 9 godzinami. Pozostałe cztery planetoidy, obracające się w kierunku wstecznym, mają osie obrotu niemal prostopadłe do płaszczyzny Układu Słonecznego, a obracają się albo bardzo wolno, albo bardzo szybko.

Skoro rozkład tych parametrów ruchu jest tak odmienny od losowego, pojawia się naturalne pytanie o przyczynę takiego stanu rzeczy. Pewna grupa astronomów za tę przyczynę uważa (uwaga!) światło słoneczne. Mianowicie, według tych badaczy ogrzana dzienna strona planetoidy pozbywa się nadmiaru energii, gdy stanie się stroną nocną. Emisja podczerwieni może skupiać się w wyróżnionym kierunku, zależnym od kształtu planetoidy, rodzaju powierzchni i tempa rotacji – w każdym razie powstawałby wtedy niezwykle słaby odrzut, za to działający przez miliardy lat, czego skutkiem mogłyby być wspomniane dziwne regularności. Badacze oceniają, że planetoidy o rozmiarach przekraczających 40 km byłyby za wielkie, by poddawać się temu mechanizmowi. Z tego wcale jednak nie wynika, że ewolucja małych ciał przebiegałaby szybko i gładko, gdyż w jej trakcie czyhałyby na nie rozliczne rezonanse, stanowiące nieraz pułapki nie do przebycia. Ponadto wydaje się beznadziejną sprawą możliwość odróżnienia, co w ruchu wybranej planetoidy pochodzi z warunków początkowych, a co jest skutkiem późniejszej ewolucji. Niemniej próba wprowadzenia do mechaniki nieba sił pochodzących z odrzutu promieniowania jest godna zauważenia.

Tomasz KWAST



## Grudzień

W grudniowe wieczory nad głową widzimy na tle Drogi Mlecznej Perseusza. Gwiazdozbiór ten słynie z kilku obiektów. Przede wszystkim w nim znajduje się gwiazda zmienna znana „od zawsze”, mianowicie Algol. Jest to gwiazda podwójna, a w płaszczyźnie obiegi składników leży Ziemia. Okresowe przesłanianie się tych gwiazd daje zmiany jasności całego układu w granicach od 2,12 do 3,32 mag w okresie 2,87 dnia. Po drugie, w północnej części Perseusza znajduje się podwójna gromada otwarta gwiazd, znana jako „h i chi”. Obie te gromady widać nieuzbrojonym okiem, a w lornetce widać obie naraz, co stanowi wspaniały widok. Po trzecie, w gwiazdozbiórze tym leży galaktyka NGC 1275, należąca do tzw. galaktyk Seyferta. Jest to jeden z typów galaktyk aktywnych, a w połowie ubiegłego wieku została ona, jako jedna z pierwszych galaktyk, zidentyfikowana z silnym radioźródłem. Nie widać jej gołym okiem, a leży w odległości około 20 Mpc.

Merkury znajdzie się 18 XII najdalej od Słońca i można go szukać na niebie po zachodzie Słońca. Wenus jest – jak Słońce – w Wężowniku, zatem jej nie widać. Mars jest we Lwie i koło północy wschodzi. Jowisz jest w Koziorożcu i zachodzi bardzo wczesnym wieczorem. Saturn jest w Pannie i wschodzi wyraźnie po północy. Pełnia Księżyca wypada 2 XII, nów 16 XII, a 31 XII ponownie pełnia i będzie wtedy zaćmienie Księżyca – w samą noc sylwestrową, właściwie w wieczór sylwestrowy, z maksymalną fazą około godz. 20. Niestety, będzie to zaćmienie częściowe. Jak zwykle 21 XII nastąpi przesilenie zimowe, czyli zacznie się zima, ale dni zaczną się już wydłużać. Z przewidywalnych rojów meteorów można w grudniu obserwować dwa: Geminidy około 12 XII i Ursydy około 22 XII. Szczęśliwego Nowego Roku!

T. K.



### Rozwiązanie zadania M 1262.

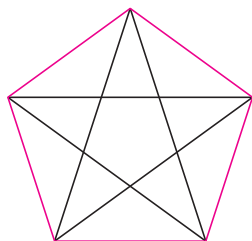
Niech  $P$  oznacza punkt przecięcia prostej zawierającej wysokość danego ostrosłupa z płaszczyzną sześciokąta  $ABCDEF$ . Wykażemy, że punkt  $P$  leży na każdej z prostych  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ . Punkt  $P$  jest wówczas punktem wspólnym prostych  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$ .

Niech  $S$  oznacza wierzchołek danego ostrosłupa. Ponieważ ostrosłup jest prawidłowy, więc wysokość tego ostrosłupa leży w płaszczyźnie  $ADS$ . Wobec tego prosta zawierająca wysokość ostrosłupa przecina prostą  $AD$ . Stąd wynika, że punkt  $P$  leży na prostej  $AD$ .

Analogicznie dowodzimy, że punkt  $P$  leży na prostych  $BE$  i  $CF$ , co kończy rozwiązanie zadania.



Przy pięciu osobach trójka jak z zadania 1 może nie istnieć. Wierzchołki pięciokąta to osoby, kolorowa linia oznacza znajomych, czarna – nieznanym.



Najmniejszą liczbę osób o opisanej w zadaniu 1 własności nazywa się liczbą Ramseya  $R(3, 3)$ . Z powyższego przykładu oraz z zadania 1 wynika, że  $5 < R(3, 3) \leq 6$ , zatem  $R(3, 3) = 6$ .

## Déjà vu

Joanna JASZUŃSKA

Niektóre fakty matematyczne są na tyle uniwersalne i przydatne, że pojawiają się niezwykle często, w najrozmaitszych kontekstach i sformułowaniach. Przykładem jest poniższe zadanie 1, dalsze zaś zadania to różne jego „wcielenia” oraz zastosowania.

**1.** Spotkało się sześć osób, niektóre z nich się znają. Wykaż, że istnieje wśród nich taka trójka osób, że każde dwie się znają lub żadne dwie się nie znają. Zakładamy, że jeśli osoba  $A$  zna osobę  $B$ , to również  $B$  zna  $A$ .

**R.** Osoba  $O$  wśród pozostałych pięciu osób albo co najmniej trzy zna, albo co najmniej trzech nie zna. W pierwszym przypadku, jeśli pewna para jej znajomych się zna, to wraz z  $O$  tworzą szukaną trójkę. Jeśli zaś z trojga znajomych  $O$  żadnych dwoje się nie zna, to oni tworzą szukaną trójkę. Drugi przypadek rozważamy analogicznie.  $\square$

**2.** Budowniczy i Malarz grają w następującą grę. Budowniczy zaczyna i w każdym swoim ruchu rysuje na płaszczyźnie odcinek. Malarz w swoim ruchu koloruje ten odcinek na żółto lub zielono. Budowniczy wygra, jeśli powstanie jednokolorowy trójkąt, którego bokami są całe odcinki. Czy zawsze może wygrać?

**R.** Tak. Może zacząć od narysowania pięciu odcinków o wspólnym końcu. Malarz musi pewne trzy z nich pomalować tym samym kolorem, powiedzmy żółtym. Wtedy Budowniczy łączy ich drugie końce, budując trójkąt. Jeśli Malarz którykolwiek bok pokoloruje na żółto, to przegra. Ale jeśli wszystkie trzy pomaluje na zielono, też przegra!  $\square$

Następujące zadanie pozostawmy jako proste ćwiczenie.

**3.** Pomiędzy niektórymi z pewnych  $n$  miast są drogi. Dla dowolnie wybranych trzech miast istnieją dokładnie jedna lub dokładnie dwie z trzech możliwych łączących je dróg. Czy może być  $n = 6$ ?

**4.** W Lolandii jest 17 miast, z których każde dwa łączy jeden z trzech środków komunikacji: LOT, PKS albo PKP. Udowodnij, że pomiędzy pewnymi trzema miastami można odbyć podróż „po trójkącie”, korzystając tylko z jednego środka komunikacji.

**R.** Niemożliwe, aby każdym z trzech środków transportu dawało się dotrzeć ze stolicy do najwyżej 5 z pozostałych 16 miast, bo  $3 \cdot 5 < 16$ . Przyjmijmy więc, że pociągiem można dotrzeć do pewnych 6 miast. Jeśli któreś dwa z nich też łączy kolej, to one wraz ze stolicą tworzą szukaną trójkę. W przeciwnym przypadku każde dwa z nich łączy jeden z dwóch pozostałych środków komunikacji i dalszy dowód przebiega jak w zadaniu 1.  $\square$

Czytelnik teraz bez trudu zapewne rozwiąże następujące zadanie z XXXVII Olimpiady Matematycznej.

**5.** W turnieju szachowym uczestniczy 66 zawodników, każdy z każdym rozgrywa jedną partię, rozgrywki odbywają się w czterech miastach. Udowodnij, że pewna trójka zawodników rozgrywa wszystkie partie między sobą w tym samym mieście.

**6.** Liczby  $1, 2, \dots, 65$  podzielono na cztery rozłączne zbiory. Wykaż, że w którymś z nich znajdują się takie (niekoniecznie różne) liczby  $x, y, z$ , że  $x + y = z$ .

**R.** Każdemu z czterech zbiorów przypiszmy inny kolor. Narysujmy 66 punktów ponumerowanych od 1 do 66. Każde dwa punkty połączmy tym kolorem, który przypisano zbiorowi zawierającemu różnicę ich numerów. Wówczas, analogicznie do zadania 5, istnieją takie trzy punkty ponumerowane liczbami  $a > b > c$ , że łączące je odcinki są

tego samego koloru. Wtedy liczby  $x = a - b, y = b - c$  oraz  $z = a - c$  wszystkie należą do jednego z danych czterech zbiorów i spełniają równość  $x + y = z$ .  $\square$

Na koniec proponuję zadanie z II Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów oraz pewną rozrywkę.

**7.** W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów, narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

Rozwiązanie na stronie [www.sem.edu.pl/omg](http://www.sem.edu.pl/omg)

**Gra Sim.** Planszą do gry są wierzchołki sześciokąta foremnego. Dwaj gracze na przemian, każdy innym kolorem, rysują dowolny bok lub przekątną sześciokąta. Przegrywa ten, kto swoim kolorem narysuje trzy odcinki tworzące trójkąt (uwzględniamy tylko trójkąty o wierzchołkach w wierzchołkach wyjściowego sześciokąta).