

## Nagrodę i Medal im. Włodzimierza Zonna


za popularyzację wiedzy o Wszechświecie  
przyznawane co dwa lata od 1983 roku  
przez Polskie Towarzystwo Astronomiczne  
w tym roku  
**otrzymał**

długoletni kierownik działu astronomii *Delty*

## Tomasz Kwast

Gratulujemy!

## SPIS TREŚCI NUMERU 11 (426)

Teoria liczb na znaczkach pocztowych <i>Jan Swadźba</i>	str. 1
Grawitina przypadki we Wszechświata przeszłości zamierzchniej <i>Marcin Badziak</i>	str. 2
Drobne oszustwo <i>Jakub Radoszewski</i>	str. 4
Nieruchome teleskopy <i>Tomasz Kwast</i>	str. 6
Kosmiczna linijka 11. Kwazar 3C 273 <i>Bożena Czerny, Agnieszka Janiuk</i>	str. 7
 Rozeta katedry w Metz – dokończenie <i>Wojciech Guzicki</i>	str. 8
Konkurs zadań astronomicznych  Zadania	str.10
<b>Olimpiada Informatyczna</b>	str.11
Aktualności	str.15
Kształt wiszącego łańcucha <i>Marek Kordos</i>	str.16
 Badamy właściwości dźwięków <i>Stanisław Bednarek</i>	str.20
 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.22
Klub 44	str.23
Patrz w niebo	str.24
Listopad  Jesienne wielokąt <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński, Andrzej Walat, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.  
Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-639-73-67)  
internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl  
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2010 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2010 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 0-804-200-600

Cena prenumeraty w 2010 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):  
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:  
Wielościanny Catalana

Teoria liczb cieszy się uznaniem nie tylko matematyków, ale i projektantów znaczków. I choć wymiary znaczka wymuszają oszczędny zapis, to wiele z nich, dzięki pomysłowości projektantów, w pełni zasługuje na tytuł ambasadora „królowej matematyki”. Znaczek to darmowa i o ogromnym zasięgu reklama „królowej” – zaciekawia, a nieraz i zachęca do jej bliższego poznania. To nic, że niekiedy można usłyszeć, oprócz pytań: *Kto to odkrył, udowodnił, obliczył?, Jak to odkrył?* ... i takie: *Po co to komu?, Kogo to interesuje?* ... – jest to okazja do rozmowy o matematyce, do podsunięcia odpowiedniej literatury.

Początki teorii liczb sięgają czasów Pitagorasa (–580, –496) i jego uczniów – jej początek znaczkowy wyznacza data 20 VIII 1995 – data wprowadzenia przez Poczta Grecką pierwszych w świecie znaczków z Pitagorasem (znaczek 1 na okładce). Dla pitagorejczyków świat był harmonią opartą na liczbach: *Wszystko jest liczbą*, dopóki nie zajęli się długością przekątnej kwadratu. To był szok! Była i mistyka, np. wyróżniali liczbę  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ , czyli tetraktys, znak, na który przysięgali (zn. 2 i kartka pocztowa – analogofilia).

Pitagorejczycy rozróżniali liczby parzyste i nieparzyste, odkryli liczby doskonałe (zn. 3, zn. 4), liczby zaprzyjaźnione, podali wzory trójek pitagorejskich. Nie przypuszczali jednak, że odkryte przez nich twierdzenie (twierdzenie Pitagorasa) (zn. 5) będzie miało wiele dowodów, zajmie wyjątkowe miejsce w szkolnym nauczaniu, urośnie do Wielkiego Twierdzenia Fermata – Wielkiego Twierdzenia dla Pierre’a de Fermata (1601, 1665) (zn. 6), bo znał dowód (szkoda tylko, że wąski margines zniechęcił go do jego zapisu) i Wielka Hipoteza dla tych, którzy bezskutecznie setki lat szukali dowodu (zn. 7, zn. 8, zn. 14)! Nawet nagroda 100 000 marek (1907) nie skrzesała „iskry Bożej” prowadzącej do dowodu. To prawda, że skusiła wielu amatorów – jest to zrozumiałe, bo teoria liczb przyciągała i dalej przyciąga pozornie prostymi pytaniami marzących o równie prostych odpowiedziach. Dowód opublikował Andrew Wiles w 1995 r. w *Annals of Mathematics* nr 142 (dowód liczył 108 stron), co dowcipnie ujął czeski projektant znaczka (zn. 8).

Poszukiwania dowodu WTF zaowocowały powstaniem nowych pojęć, twierdzeń ważnych dla dalszego rozwoju matematyki. Między innymi Richard Dedekind (1831, 1916) wprowadził pojęcie pierścienia, ideału oraz udowodnił twierdzenie o przedstawieniu niezerowego ideału jako iloczynu ideałów pierwszych (zn. 9).

W teorii liczb szczególne miejsce zajmują liczby pierwsze. Pierwszy wykład teorii tych liczb spotykamy w *Elementach* (–300) Euklidesa (–365; –300) – jest tam definicja: *Liczba pierwsza to taka, która jest mierzalna wyłącznie przez jedynkę* (tzn. jedyny dzielnik mniejszy od niej to jedynka), jest też dowód m.in. twierdzenia, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele

(zn. 10, zn. 11 i kartka). Znaczek polski (zn. 10) jest pierwszym w świecie znaczkiem, który przypomina Euklidesa (do dziś Poczta Grecka nie wydała z nim znaczka); znaczki watykańskie (zn. 2, zn. 11 i kartka) to fragmenty „Szkoły Ateńskiej” Rafaela.

W *Elementach* znajdują się też konstrukcje platońskie foremno 3-, 5-kąta, 15-kąta – na następną konstrukcję foremno 17-kąta (3, 5, 17 to liczby pierwsze Fermata) trzeba było czekać 2100 lat – jej autorem, jak i odpowiedniego twierdzenia (dokładnie twierdzenia Gaussa–Wanzla) o konstruowalności  $n$ -kąta foremno był Carl Friedrich Gauss (1777, 1855). Rysunek na znaczku (zn. 12) to dawny symbol Olimpiady Matematycznej – 17-kąt foremny wpisany w okrąg, cyrkiel oraz ekierka.

Widoczna na znaczku (zn. 13) liczba pierwsza Marina Mersenne’a (1558, 1648) liczy ponad 4 mln cyfr – liczbę „rozpracowali” w 2001 r. M. Cameron, G. F. Woltman i S. Kurowski. W 2008 r. odkryto dwie kolejne liczby pierwsze Mersenne’a liczące ponad 100 mln cyfr – odkrywcy otrzymali nagrodę 100 000 dolarów od Electronic Frontier Foundation.

Poprzez wieki przewija się problem rozmieszczenia liczb pierwszych wśród liczb naturalnych. Niezwykłą rolę w jego rozwikłaniu przypisuje się funkcji  $\zeta$  (dzeta) Riemanna (zn. 14) i związanej z nią hipotezie Riemanna – znów czeka milion dolarów na tego, kto potwierdzi/obali hipotezę.

*Acta Arithmetica* to wiele na świecie znaczące czasopismo poświęcone teorii liczb, które powstało w 1935 r. z inicjatywy S. Lubelskiego oraz A. Walfisza; w latach 1958–69 jego redaktorem naczelnym był W. Sierpiński. Wacław Sierpiński (1882, 1969) był współtwórcą Polskiej Szkoły Matematycznej, jego prace dotyczyły m.in. teorii liczb. Niestety, na znaczku (zn. 15) brak jakiegokolwiek śladu matematycznych osiągnięć W. Sierpińskiego, bo siatka milimetrowa...!

A oto jeszcze krótka galeria (zn. 16–18) matematyków zajmujących się teorią liczb: L. Euler (1707, 1783), J. L. de Lagrange (1736, 1813), P. L. Czebyszew (1821, 1894) – szkoda, że projektanci „zapomnieli” wskazać ich znaczące osiągnięcia! A nie ma swojego znaczka Diofantos, A. M. Legendre, J. P. G. Lejeune-Dirichlet i wielu innych zasłużonych dla rozwoju teorii liczb.

Na zakończenie wypowiedź Ernesta Rutherforda (1871, 1937) – fizyka (Nagroda Nobla w 1908) i filatelisty:

**Cała nauka dzieli się na fizykę i zbieranie znaczków.**

Warto zainteresować się filatelistyką, zostać filatelistą!

[Przyznaje, że mimo uważnej lektury katalogów znaczków Michela (obejmują cały świat „znaczkowy” od początku jego... istnienia (1840)), mogłem coś przeoczyć, a poza tym dostęp do niektórych znaczków, jak i pozostałych walorów filatelistycznych: kartek pocztowych, stempli okolicznościowych... z różnych powodów jest bardzo kłopotliwy.]

\*Katowice

# Grawitina przypadki we Wszechświata przeszłości zamierzchłej

Marcin BADZIAK\*

Marzeniem wielu fizyków jest sformułowanie zunifikowanej teorii wszystkich znanych oddziaływań. (Więcej o oddziaływaniach elementarnych można przeczytać w specjalnym wydaniu *Delty* 5/2000.) Obecnie najpoważniejszym kandydatem na taką teorię jest teoria superstrun. Typową skalą masową jest tu masa Plancka, która jest  $10^{19}$  razy większa od masy protonu. Dla porównania, w akceleratorze LHC w CERN-ie będzie można wyprodukować cząstki mniej więcej 1000 razy cięższe od protonu. Oznacza to, że bezpośrednie badanie teorii superstrun, polegające na wyprodukowaniu wzbudzonych stanów superstrunowych w zderzeniach cząstek, jest raczej poza zasięgiem ludzkich możliwości. Eksperymentalnie można weryfikować tylko niskoenergetyczne przybliżenie teorii strun – supersymetryczne rozszerzenie obecnie obowiązującej teorii oddziaływań, czyli Modelu Standardowego. Supersymetria wiąże właściwości cząstek o spinie całkowitym i połówkowym. Supersymetrycznym partnerem grawitonu, hipotetycznej cząstki przenoszącej oddziaływania grawitacyjne, jest grawitino – fermion o spinie  $3/2$ . Ze względu na to, że supersymetria nie jest dokładną symetrią przyrody, grawitino (w odróżnieniu od hipotetycznego grawitonu) musi mieć masę różną od zera.

Czy możemy coś powiedzieć o możliwych własnościach grawitina, mimo że nie wiemy, jaką ta cząstka miałaby mieć masę, oraz mimo że cząstka ta oddziałuje tylko grawitacyjnie, czyli znacznie słabiej niż wszelkie znane cząstki? Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Okazuje się bowiem, że od własności grawitina zależy historia Wszechświata. I tak jak archeologowie poznają dziś np. dzieje cywilizacji sumeryjskiej, badając znajdowane w ziemi ślady kultury materialnej, fizycy przypatrują się uważnie wyglądowi i składowi Wszechświata, szukając śladów niezwykłych oddziaływań – nieznanymi jeszcze cząstek, może nawet podlegających egzotycznym prawom fizyki.

Taką pozostałością z kosmicznej przeszłości jest mikrofalowe promieniowanie tła wypełniające Wszechświat. Obserwując je, stwierdzono, że zwykła materia w postaci neutralnych atomów (składających się z protonów, neutronów i elektronów) stanowi zaledwie 4% całkowitej energii Wszechświata. Nieznane jest pochodzenie pozostałych 96% energii. Cała znana nam materia podlega przyciąganiu grawitacyjnemu. Gdyby była ona jedynym składnikiem Wszechświata, jego ekspansja ulegałaby spowolnieniu. Jednakże z obserwacji odległych supernowych wynika, że Wszechświat najprawdopodobniej rozszerza się obecnie z przyspieszeniem. (Możliwe są też inne, mniej powszechnie akceptowane wytłumaczenia, patrz

artykuł Krzysztofa Bolejki – *Delta* 5/2008.) Oznacza to, że musi istnieć forma energii, która powoduje przyspieszoną ekspansję Wszechświata. Jest ona nazywana ciemną energią i stanowi 73% całkowitej energii Wszechświata. Odpowiedź na pytanie, co stanowi ciemną energię, jest jednym z największych wyzwań dla współczesnej fizyki. Pozostałe 23% stanowi tzw. ciemna materia. Mimo że nie wiadomo, czym ona dokładnie jest, to jednak zostały poznane niektóre jej właściwości. Na pewno jest to materia nieoddziałująca z fotonami: nie świeci (stąd jej nazwa) i nie rozprasza promieniowania odległych galaktyk. Mogą ją stanowić cząstki, które oddziałują tylko słabo i grawitacyjnie. Ponadto muszą one być stabilne, a przynajmniej żyć na tyle długo, by nie rozpadły się do chwili obecnej. Spośród cząstek Modelu Standardowego powyższe kryteria spełniają neutrino. Neutrino mają bardzo małą masę. W związku z tym, w trakcie tworzenia się struktur wielkoskalowych, czyli galaktyk oraz gromad i supergromad galaktyk, poruszały się z prędkościami bliskimi prędkości światła. Taka szybko poruszająca się ciemna materia powodowałaby „rozłazenie się” skupisk materii o małych rozmiarach. Jednak obserwacje i symulacje komputerowe wskazują, iż najpierw tworzyły się mniejsze struktury, z których dopiero w toku ewolucji formowały się galaktyki, gromady i supergromady galaktyk. Z tego wynika, że większość ciemnej materii we Wszechświecie musi stanowić tzw. zimna ciemna materia, czyli cięższe cząstki, poruszające się z prędkościami nierelatywistycznymi. Okazuje się, że aktualnie najlepszym kandydatem na zimną ciemną materię jest najlżejsza cząstka supersymetryczna. W wielu modelach to właśnie grawitino ma najmniejszą masę spośród wszystkich cząstek supersymetrycznych, a na dodatek jest cząstką stabilną. W typowych modelach masa grawitina jest rzędu 1 do 100 mas protonu. Jest to na tyle dużo, by grawitina poruszały się z prędkościami nierelatywistycznymi i nie przeszkadzały przy tworzeniu się najmniejszych struktur we Wszechświecie. Ponadto wiele modeli przewiduje obecną gęstość energii grawitin na poziomie obserwowanej gęstości ciemnej materii. Nie ma zatem przeszkód, by to właśnie grawitina stanowiły ciemną materię.

Mimo że stabilne grawitino jest bardzo dobrym kandydatem na ciemną materię, wiąże się z nim poważny problem kosmologiczny. W bardzo wczesnym Wszechświecie grawitina były produkowane w ogromnych ilościach. Gęstość energii grawitin musiała być bardzo duża, co prowadziło do szybkiego zapadnięcia się Wszechświata pod wpływem przyciągania grawitacyjnego – chyba że masa grawitina byłaby mniejsza niż milionowa część masy protonu. Jednakże niezwykle trudno skonstruować realistyczny model z tak lekkim grawitinem. Od masy grawitina zależy też czas życia drugiej co do lekkości cząstki supersymetrycznej. Jeśli byłby on zbyt długi,

\*Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki  
Uniwersytetu Warszawskiego

rozpady tych ostatnich cząstek zagrażałyby procesowi pierwotnej nukleosyntezy. Proces ten rozpoczął się około sekundy po Wielkim Wybuchu. Wcześniej, gdy Wszechświat był bardziej gorący, jądra atomowe nie mogły na trwałe powstać ze względu na ogromną gęstość wysokoenergetycznych fotonów (na jeden barion we Wszechświecie przypada ponad miliard fotonów). Fotony te rozбивały większość nowo tworzonych jąder i prawie cała materia barionowa składała się ze swobodnych protonów i neutronów, które przeistaczały się jedne w drugie wskutek oddziaływań słabych. Ze względu na to, że neutron jest trochę cięższy od protonu, neutronów było mniej niż protonów i asymetria ta narastała wraz z obniżaniem się temperatury. Około sekundy po Wielkim Wybuchu Wszechświat ochłodził się do tego stopnia, że oddziaływania słabe praktycznie ustały. W tym czasie na jeden neutron przypadało sześć protonów. Jednak jądra atomowe nie mogły powstawać w znaczących ilościach jeszcze przez około minuty, gdyż wysokoenergetycznych fotonów było nadal zbyt dużo. W trakcie tej minuty część neutronów zdążyła się rozpaść (czas połowicznego rozpadu neutronu wynosi 10,5 minuty) i na jeden neutron przypadało już siedem protonów. Jest to o tyle ważne, że prawie wszystkie neutrony zostały potem związane w jądra helu  ${}^4\text{He}$ . Stąd można obliczyć, że  ${}^4\text{He}$  powinien stanowić około 25% materii barionowej we Wszechświecie. Pozostałe 75% barionów pozostało w postaci swobodnych protonów, które później związały się z elektronami, tworząc neutralny wodór. W procesie pierwotnej nukleosyntezy powstały również śladowe ilości kilku innych lekkich jąder: deuteru  ${}^2\text{H}$  i helu  ${}^3\text{He}$  (stanowiące około  $10^{-5}$  wszystkich jąder) oraz litu  ${}^7\text{Li}$  (około  $10^{-9}$  wszystkich jąder). Te wartości dobrze zgadzają się z obserwacjami. Prawidłowe przewidywanie zawartości lekkich jąder we Wszechświecie jest ogromnym sukcesem Standardowego Modelu Kosmologicznego opartego na Modelu Standardowym oddziaływań elementarnych.

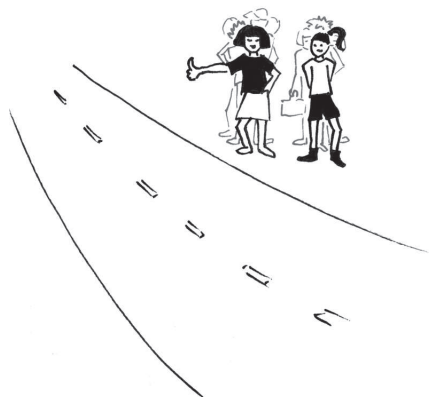
Należy podkreślić, że przebieg pierwotnej nukleosyntezy jest niezwykle czuły na odstępstwa od Modelu Standardowego. Na przykład, istnienie dodatkowej, czwartej generacji lekkich neutrin spowodowałoby zahamowanie oddziaływań słabych przy wyższej temperaturze. W konsekwencji stosunek neutronów do protonów byłby większy i powstałoby więcej helu  ${}^4\text{He}$ , niż obserwujemy we Wszechświecie. Dlatego, konstruując rozszerzenia Modelu Standardowego, należy uważać, by nowe cząstki i oddziaływania nie zaburzyły w sposób znaczący przebiegu pierwotnej nukleosyntezy. Dotyczy to w szczególności rozpadów cząstek supersymetrycznych na grawitino i „zwykle” cząstki, produkty takich rozpadów są bowiem bardzo energetyczne i, zderzając się z lekkimi jądrami, mogą powodować ich dalsze przekształcenia w niezgodzie z obserwacjami. Niebezpieczeństwa tego można by uniknąć, gdyby wszystkie takie rozpady zaszły jeszcze przed rozpoczęciem pierwotnej nukleosyntezy. Jednak żeby do tego doszło, cząstki supersymetryczne

musiałyby być ponad 10 000 razy cięższe od protonu, czyli dużo cięższe, niż zakładają realistyczne modele supersymetrii.

W rozwiązaniu opisanego wyżej kosmologicznego problemu grawitina może pomóc inflacja, która najprawdopodobniej miała miejsce w bardzo wczesnym Wszechświecie. Inflacja to okres bardzo szybkiego – i przyspieszonego – rozszerzania się Wszechświata. Tłumaczy ona wiele niewyjaśnionych własności Wszechświata, takich jak jednorodność i izotropowość w dużych skalach oraz zerowa krzywizna. Ponadto fluktuacje kwantowe pola napędzającego inflację są oczywistym źródłem pierwotnych niejednorodności gęstości materii, które mogły dać początek obserwowanym dzisiaj galaktykom. Mimo że nie zostało jeszcze zrozumiane, dlaczego doszło do inflacji, to nie ma już dziś większych wątpliwości, że jest ona częścią historii Wszechświata. Wróćmy jednak do pytania, jak inflacja może pomóc w rozwiązaniu kosmologicznego problemu grawitina. Otóż jednym ze skutków błyskawicznego rozszerzenia się Wszechświata jest zmniejszenie gęstości wszystkich cząstek, w tym grawitin, praktycznie do zera. Okres inflacji powoduje więc, że Wszechświat staje się pusty, co nijak nie przypomina tego, co obserwujemy. Po inflacji musi nastąpić podgrzanie Wszechświata, czyli produkcja cząstek, która poprzedza jego standardową ewolucję opisywaną modelem Wielkiego Wybuchu. (Można by powiedzieć, że proces podgrzania dosłownie realizuje znaczenie metafory „Wielki Wybuch”.) Proces podgrzania mógłby jednak doprowadzić do pojawienia się kosmologicznego problemu grawitina na nowo, gdyż nie ma żadnego powodu, by grawitina nie były produkowane w zderzeniach cząstek także po inflacji. Ale ilość tak produkowanych grawitin zależy od temperatury podgrzania, czyli temperatury, jaką osiągnął Wszechświat po inflacji. Dlatego rozwiązanie kosmologicznego problemu grawitin wymaga odpowiednio niskiej temperatury podgrzania. Istnienie górnego ograniczenia na temperaturę podgrzania może być o tyle kłopotliwe, że obserwowana dziś asymetria między ilością barionów i antybarionów we Wszechświecie musiała wytworzyć się po inflacji. Zbyt niska temperatura podgrzania mogłaby z kolei spowodować, że taka asymetria by się nie wygenerowała. Nad poszukiwaniem rozsądnego kompromisu między tymi dwoma ograniczeniami pracuje dziś wielu fizyków.

Czy grawitino istnieje? Na to pytanie częściowo mogą odpowiedzieć już niebawem wyniki z LHC. Czy tworzy ono ciemną materię we Wszechświecie? Jaki jest związek grawitina z inflacją i ewolucją Wszechświata? Na te pytania wciąż chcemy odpowiedzieć. Jednak niezależnie od tego, jakie są te odpowiedzi, z rozważań naszych wynika, że Wszechświat potrafi wziąć w karby rozpasaną wyobraźnię fizyków, a zrozumienie jego ewolucji dostarcza silnych ograniczeń na właściwości egzotycznych cząstek – także i tych, których z uwagi na ich duże masy lub nikłą siłę oddziaływań nigdy w akceleratorach nie wyprodukujemy.

**Słowniki.** Dany jest pewien duży zbiór  $D = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ . Chcielibyśmy zaprojektować *słownik* do przechowywania wybranych elementów z  $D$ . Taki słownik to struktura danych, do której można wstawiać elementy, z której można elementy usuwać i dla której można sprawdzać, czy dana liczba  $x \in D$  się w niej znajduje. Implementuje się go zazwyczaj za pomocą zrównoważonych drzew poszukiwań binarnych, których nazwa chyba dobrze oddaje ich poziom skomplikowania. Ale po co się męczyć, jeśli możemy troszkę oszukać?



Do wykonania naszego zadania wykorzystamy *haszowanie*, którego główną ideą jest to, żeby z czegoś dużego zrobić coś małego o „odpowiednich” właściwościach. Obierzmy pewną funkcję  $h$  (zwaną funkcją haszującą, funkcją mieszającą lub funkcją skrótu), która elementy ze zbioru  $D$  przekształca na elementy pewnego niedużego zbioru  $M = \{0, 1, \dots, n - 1\}$  i której wartości można jakoś łatwo obliczać. Zauważmy teraz, że słownik dla elementów z  $D$  możemy zaimplementować za pomocą słownika dla elementów z  $M$ , jeżeli tylko przed wykonaniem każdej operacji słownikowej występujący w niej element z  $D$  będziemy przekształcać za pomocą  $h$  (wynik tego przekształcenia nazywamy *haszem* dla elementu). Z kolei słownik dla elementów z  $M$  implementuje się prościutko, chociażby za pomocą  $n$ -elementowej tablicy zliczającej.

Gdzie zatem tkwi oszustwo? Ponieważ  $n$  jest istotnie mniejsze niż  $N$ , to na pewno funkcja  $h$  nie będzie różnowartościowa, a dowolne dwa elementy  $x \neq y$ , dla których  $h(x) = h(y)$ , w naszym słowniku potraktujemy jako takie same – to niedobrze. Zaradzić można temu na dwa sposoby. Po pierwsze, można założyć, że będziemy mieli szczęście, tzn. że na żadne dwa takie elementy nie natrafimy, i starać się wybrać  $h$  tak, żeby jak najlepiej „rozrzuciła” elementy z  $D$  (do tego celu świetnie nadaje się funkcja  $h(x) = x \bmod n$  i różne jej odmiany). Takie założenie jest jednak zazwyczaj nazbyt optymistyczne, gdyż niezależnie od wyboru  $h$ , średnio po  $O(\sqrt{n})$  operacjach z dużym prawdopodobieństwem zdarzy się jakaś kolizja (jest to tzw. paradoks urodzin, opisany w IKO w *Delcie* 9/2009). Drugi sposób polega na zastosowaniu jakiejś metody radzenia sobie z takimi kolizjami, na przykład przez zastąpienie tablicy zliczającej tablicą list, do których będą trafiały elementy o tych samych wartościach haszy; wówczas znalezienie elementu będzie wymagało zawsze przejścia po liście odpowiadającej jego haszowi. Przy odpowiednim doborze  $h$  można z dużym prawdopodobieństwem zapewnić, aby listy te nadmiernie się nie wydłużały – dokładne oszacowania pozostawiamy teoretykom.

**Słowa.** Niniejszy artykuł nie jest jednak poświęcony liczbom, ale słowom, czyli skończonym ciągom liter z pewnego ustalonego alfabetu  $A$  (np. alfabetu angielskiego), którego rozmiar oznaczamy przez  $|A|$ . Zakładając, że  $D$  jest tym razem zbiorem takich słów, jak w tym przypadku dobrać odpowiednią funkcję haszującą? Dla danego słowa  $s = a_1 a_2 \dots a_m$  przyjmijmy mianowicie:

$$h(s) = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_m x^{m-1}) \bmod p.$$

W powyższym zapisie  $x$  jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią,  $p$  – liczbą pierwszą (tak na wszelki wypadek – zapewne teoretycy mają jakieś dobre argumenty uzasadniające ten wybór), a litery  $a_i$  utożsamiamy z liczbami całkowitymi, tj.  $a = 0, b = 1 \dots$ . Ze względów praktycznych warto dobrać zawsze  $x > 2|A|$ , gdyż dla bardzo małych  $x$  (np.  $x = 2$ ) zazwyczaj łatwo znaleźć dwa krótkie słowa tej samej długości i o tych samych wartościach haszy. (Czy potrafisz, Czytelniku, podać jakiś taki przykład?)

Aby wyznaczyć hasz dla danego słowa, możemy zastosować tzw. schemat Hornera, czyli obliczyć hasze dla wszystkich kolejnych sufiksów (tj. końcowych fragmentów) słowa  $s$ :

$$h_m = a_m \bmod p, \quad h_i = (a_i + x h_{i+1}) \bmod p \quad \text{dla } i = m - 1, m - 2, \dots, 1.$$

Daje to prosty algorytm o złożoności  $O(m)$ .

Za pomocą opisanej funkcji  $h$  możemy już łatwo skonstruować słownik reprezentujący zbiór słów. Jednak nie jest to bynajmniej jedyne zastosowanie haszy na słowach. Okazuje się, że za ich pomocą można rozwiązać wiele znanych



**Rozwiązanie zadania F 751.**

W chwili, gdy natężenie prądu wynosiło  $I_0$ , ładunek na kondensatorze  $C$  wynosił  $q_0 = CI_0 R$ , a energia pola elektrostatycznego była równa

$$W_0 = \frac{q_0^2}{2C}.$$

Stan równowagi nastąpi, gdy ten ładunek rozdzieli się między kondensatorami. Energia pola elektrostatycznego będzie wtedy równa

$$W_1 = \frac{q_0^2}{2C_{\text{całk}}} = \frac{q_0^2}{6C}.$$

Zatem w układzie wydzielono ciepło

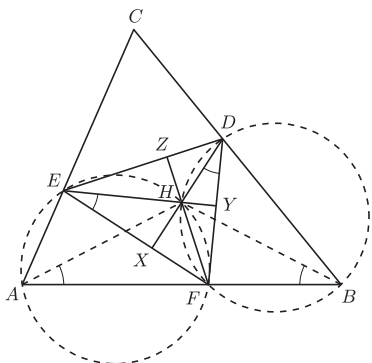
$$Q = W_0 - W_1 = \frac{q_0^2}{3C} = \frac{CI_0^2 R^2}{3}.$$



### Rozwiązanie zadania M 1259.

Z danych w treści zadania równości kątów wynika, że  $\sphericalangle EFD = \sphericalangle BCA$ .

Oznaczmy przez  $H$  punkt przecięcia wysokości trójkąta  $DEF$ .



Przyjmijmy ponadto, że proste  $DH$  i  $EF$  przecinają się w punkcie  $X$ , proste  $EH$  i  $DF$  przecinają się w punkcie  $Y$ , a proste  $FH$  i  $ED$  przecinają się w punkcie  $Z$ . Wówczas

$$\sphericalangle EAF + \sphericalangle EHF = \sphericalangle EDF + \sphericalangle YHZ = 360^\circ - \sphericalangle HYD - \sphericalangle HZD = 180^\circ,$$

skąd wynika, że na czworokącie  $AFHE$  można opisać okrąg. Analogicznie, na czworokącie  $BFHD$  można opisać okrąg. Ponadto

$$\sphericalangle HEF = 90^\circ - \sphericalangle DFE = \sphericalangle HDF.$$

Wobec tego

$$\sphericalangle HAF = \sphericalangle HEF = \sphericalangle HDF = \sphericalangle HBF,$$

skąd wynika, że  $HA = HB$ .

Analogicznie dowodzimy, że  $HB = HC$ , co oznacza, że punkt  $H$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .



problemów z algorytmiki tekstów, zazwyczaj w podobnej złożoności czasowej co w przypadku innych klasycznych metod (takich jak słownik słów bazowych czy dużo bardziej złożone drzewo sufiksowe), ale znacznie prościej.

Jak poprzednio, i tutaj tkwi drobne oszustwo wynikające z niebezpieczeństwa kolizji. Jednakże, ponieważ w dalszych rozważaniach nie będziemy się zajmować strukturami słownikowymi, więc możemy sobie pozwolić na to, żeby  $p$  było stosunkowo duże, np. rzędu  $10^{16}$  (zakładając, że chcemy uniknąć przepełnienia typu 64-bitowego w schemacie Hornera). Można też w ogóle nie przyjmować żadnej wartości  $p$ , czyli wyznaczać wartości haszy z pominięciem operacji modulo! Wówczas będzie to odpowiadać obliczeniom modulo zakres typu, czyli np.  $2^{64}$ . W obu przypadkach prawdopodobieństwo kolizji, przy odpowiednio niedużej liczbie operacji, jest stosunkowo małe, więc można przyjąć wariant optymistyczny, że równe hasze oznaczają równe słowa.

**Najdłuższe wspólne pod słowo.** Zauważmy, że na podstawie haszy  $h_i$  dla sufiksów słowa  $s$  możemy łatwo wyznaczać hasze dla poszczególnych pod słów (tj. spójnych fragmentów)  $s$ . Faktycznie, dla słowa  $a_i a_{i+1} \dots a_j$  szukanym haszem jest

$$(a_i + a_{i+1}x + \dots + a_j x^{j-i}) \bmod p = (h_i - x^{j-i+1} h_{j+1}) \bmod p.$$

Jeżeli spamiętamy wartości pierwszych  $m$  potęg liczby  $x$  modulo  $p$ , to wartość tę możemy obliczać w czasie stałym. W takim razie także w  $O(1)$  można sprawdzać, czy dane dwa (równej długości) pod słowa  $s$  są takie same.

Dzięki temu za pomocą haszy można zaimplementować algorytm wyznaczania najdłuższego wspólnego pod słowa (NWP) dwóch słów  $s$  i  $t$  długości  $O(n)$ . Będziemy w nim wyszukiwać binarnie długość  $w$  wyniku (daje to czynnik  $\log m$  w złożoności czasowej), a przy ustalonym  $w$  – wrzucać hasze wszystkich  $w$ -literowych pod słów  $s$  i  $t$  do jednej tablicy, sortować w porządku niemalejącym (koszt czasowy  $O(m \log m)$ ) i sprawdzać, czy jakieś dwa hasze pochodzące z różnych wyjściowych słów są takie same. Ostatecznie złożoność czasowa uzyskanego algorytmu to  $O(m \log^2 m)$ . Czy potrafisz, Czytelniku, uogólnić ten algorytm do wyznaczania NWP kilku (ale wciąż  $O(1)$ ) słów?

**Tablica sufiksowa.** Stwierdziliśmy już, że można wykorzystać haszowanie do sprawdzania równości dwóch słów, ale wydawać by się mogło, że w przypadku, gdy słowa mają różne hasze, nie sposób stwierdzić, które z nich jest wcześniejsze leksykograficznie (tj. alfabetycznie). Otóż nic bardziej mylnego! Wystarczy za pomocą porównywania haszy wyszukać binarnie najdłuższy wspólny prefiks (tj. początkowy fragment) dwóch słów i porównać stojące za nim w tych słowach literki – lub stwierdzić ich brak, jeżeli jedno z wyjściowych słów jest prefiksem drugiego. Koszt całej operacji to zaledwie  $O(\log m)$ .

W ten sposób można wyznaczyć bardzo ważną strukturę danych w algorytmice tekstów, czyli tablicę sufiksową. W tablicy tej wymienione są numery wszystkich sufiksów danego słowa w kolejności leksykograficznej tych sufiksów – np. dla słowa  $abaab$  kolejność ta to:  $aab, ab, abaab, b, baab$ , czyli tablica sufiksowa to  $3, 4, 1, 5, 2$ . W tym celu wystarczy posortować (czynnik  $m \log m$  w złożoności) wszystkie numery sufiksów słowa, jako operator porównania wykorzystując opisane powyżej porównanie leksykograficzne – daje to łącznie koszt czasowy  $O(m \log^2 m)$ .

**Wyszukiwanie wzorca w tekście.** Znany algorytm Karpa–Rabina (KR) wyszukiwania wzorca w tekście polega na porównywaniu haszy kolejnych pod słów tekstu z haszem wzorca (złożoność czasowa  $O(m)$ ). Nie jest to jednak wielkie osiągnięcie, gdyż znanych jest mnóstwo prostych i efektywnych algorytmów wyszukiwania wzorca. Jednakże większość z nich bardzo trudno uogólnia się na przypadek dwuwymiarowy – wyszukiwanie jednej prostokątnej tablicy znaków w drugiej. Problem ten nie występuje w przypadku algorytmu KR, dla którego takie uogólnienie jest stosunkowo proste. Pozostawiamy je Tobie, Drogi Czytelniku, jako ćwiczenie. Drobną podpowiedź: w algorytmie KR hasz dla kolejnego pod słowa tekstu wyznaczany jest bezpośrednio na podstawie hasza poprzedniego pod słowa, a nie na podstawie wartości  $h_i$ .

# Nieruchome teleskopy

Tomasz KWAST

Często spotykany na kartach naszego pisma Czytelnik Wnikliwy po przeczytaniu tytułu prawdopodobnie najpierw zapytałby, względem czego taki teleskop miałby być nieruchomy – nieba (tzn. Wszechświata) czy Ziemi, a dopiero potem zacząłby się zastanawiać nad pożytkiem z takiego dziwaczego przyrządu. Możliwości więc są dwie. Jasne, że teleskop nieruchomy względem Wszechświata byłby skierowany stale w jeden obiekt i stwarzałby możliwość wykonania dowolnie długiej jego ekspozycji lub bardzo długiego monitorowania obiektu zmiennego. Ale tylko jednego! Po zakończeniu obserwacji należałoby zorientowanie teleskopu zmienić, a dość łatwo jest to zrobić, gdy teleskop swobodnie orbituje nad Ziemią lub leci ku planetom. Nawiasem mówiąc, dużo łatwiej jest zmienić orientację statku kosmicznego, niż ją potem ustabilizować. W każdym razie ten wariant nieruchomego teleskopu był już wielokrotnie realizowany i takie przyrządy nieustannie latają nad naszymi głowami.

Drugi przypadek – teleskop nieruchomy względem Ziemi – wydaje się bez sensu. Niebo wszak się obraca (powiedzmy – Ziemia, ale to na jedno wychodzi) i wykorzystując ten fakt, można najwyżej zrobić ładne zdjęcie łuków zakreślanych na kliszy przez gwiazdy. Wartość naukowa takiego obrazka będzie właściwie żadna, najwyżej dydaktyczna, bo widać na nim, gdzie jest biegun nieba, równik niebieski itd. Dlatego konstruktorzy teleskopów wymyślili już dawno sposób na pozorne zatrzymanie nieba na potrzeby obserwacji. Sposób ten polega na skonstruowaniu takiego zawieszenia teleskopu, by łatwo dało się go nastawiać w żądanym kierunku i żeby można było go obracać w kierunku przeciwnym do ruchu nieba. Najbardziej rozpowszechniony jest (w każdym razie w przypadku teleskopów średnich rozmiarów) tzw. montaż równikowy (inaczej – paralaktyczny). Teleskop jest w tym przypadku przymocowany do jednej z dwu wzajemnie prostopadłych osi, a druga z nich (tzw. główna) jest równoległa do osi ziemskiej. To przez obrót wokół niej kompensuje się ruch sfery niebieskiej, co zapewnia stosowny silniczek sterowany zegarem. Zauważmy, że gdyby jedna oś teleskopu była pionowa, a druga pozioma (montaż horyzontalny), to żeby teleskop mógł śledzić długo jedną gwiazdę, należałoby go obracać wokół obu osi jednocześnie i to w zmiennym tempie. W dzisiejszych czasach załatwia tę sprawę prosty komputer, a rozwiązanie takie stosuje się w teleskopach wielkich lub odwrotnie – małych, amatorskich, tylko że bez żadnego komputera.

Wielkie teleskopy pewnego typu są całkiem nieruchome, a przynajmniej tak wyglądają. Są to mianowicie teleskopy słoneczne. Od Słońca dociera do nas tak dużo

promieniowania, że można sobie pozwolić na bardzo długą ogniskową, wtedy bowiem obraz Słońca w ognisku obiektywu będzie wielki i można będzie śledzić drobne szczegóły fotosfery. Jeżeli jednak ogniskowa ma długość rzędu 100 m, to warto zastosować pewien wybieg. Sam teleskop, czyli obiektyw z tubusem, jest nieruchomy, za to światło słoneczne kieruje się doń po odbiciu od co najmniej jednego lustra płaskiego, którego odpowiednio dobrany ruch obrotowy kompensuje ruch nieba. Tubus teleskopu słonecznego to zazwyczaj pionowa lub równoległa do osi ziemskiej studnia, na której dnie znajduje się pokój obserwacyjny (z klimatyzacją – to ważne!), a obraz Słońca w tym pokoju jest nieruchomy. Lustro lub układ dwóch płaskich lusterek kierujący światło od ruchomego Słońca do nieruchomego teleskopu to tzw. celostat. Zazwyczaj przykryty jest kopułą, co robi wrażenie, że mieści się tam skromny teleskop, a nie sięgający 100 m w głąb Ziemi.

Ten sam pomysł bywa stosowany w zwykłych teleskopach, tzn. niewyspecjalizowanych do żadnych szczególnych obserwacji. W takim „zwykłym” teleskopie również można zamontować układ lusterek płaskich, które zbiegającą się wiązkę światła kierują wewnątrz obu (wydrążonych) osi do ogniska znajdującego się poza dolnym końcem głównej osi. Taki układ optyczny nazywa się z francuskiego układem *coudé* – łamany. Jego zaletą jest to, że obraz akurat obserwowanego obiektu jest w ognisku *coudé* nieruchomy i jest właściwie już poza teleskopem, można więc tam umieścić dowolnie wielkie i dowolnie ciężkie przyrządy pomiarowe nie obciążając samej jego konstrukcji.

Wreszcie są w użyciu teleskopy prawdziwie nieruchome. Prawdę mówiąc, są to radioteleskopy, a stosowny układ naziemnych anten jest już radioteleskopem, z natury rzeczy nieruchomym, oczywiście, względem Ziemi. Taki radioteleskop skazany jest tylko na przeglądanie nieba w miarę jak przesuwa się ono przed nim wskutek obrotu dobowego. Największy radioteleskop, niewyglądający jak zwykła antena, jest na wyspie Puerto Rico. Stanowi go kotlinka o średnicy 300 m, wyłożona drobną siatką metalową precyzyjnie w kształt paraboloidy (jak w każdym porządnym teleskopie lustrzanym), której oś skierowana jest w zenit. Nad tą ogromną czaszą na trzech linach podwieszona jest klatka z antenami, której przemieszczanie daje radioteleskopowi możliwość kierowania się w nieco różnych kierunkach, zresztą w mocno ograniczonym zakresie.

Jak widzimy, taka różnorodność konstrukcji częściowo wynika ze specjalizacji teleskopów, częściowo służy wygodzie obserwatorów i częściowo bywa złem koniecznym. A na pewno zostaną wynalezione jeszcze inne.

# Kosmiczna linijka

## 11. Kwazar 3C 273. Odległość $z = 0,158$ (400 Mpc na linijce)

Radiowo głośny kwazar o numerze 273 z Trzeciego Katalogu Cambridge jest widoczny w gwiazdozbiornie Panny i jest najjaśniejszym kwazarem na naszym niebie. Jego wizualna wielkość gwiazdowa to 12,9 mag i można go zaobserwować już nawet amatorskim teleskopem. Położenie w pobliżu równika niebieskiego ułatwia obserwacje kwazara teleskopami położonymi zarówno na półkuli północnej, jak i południowej. Jasność absolutna to  $-26,7$ , co czyni go jedną z najjaśniejszych galaktyk aktywnych.

Termin *kwazar*, który zadomowił się już w języku polskim, pochodzi od angielskiego określenia *quasi-stellar radio source*, czyli *niby-gwiazdowe radioźródło*. Kwazary zostały bowiem odkryte najpierw w dziedzinie radiowej i skatalogowane (od lat 50. XX wieku) jako radioźródła. Gdy zidentyfikowano ich odpowiedniki optyczne, okazało się, że są to źródła punktowe, na pierwszy rzut oka przypominające gwiazdy. Jednak widma promieniowania kwazarów nie przypominały żadnego ze znanych typów widmowych pobliskich gwiazd.

W 1963 roku Maarten Schmidt, amerykański astronom pochodzenia duńskiego, opublikował na łamach miesięcznika *Nature* artykuł na temat obiektu 3C 273. Pokazał, że widmo promieniowania kwazara to w istocie widmo emisyjne odległej galaktyki o niezwykle jasnym jądrze, jednak znacznie przesunięte ku czerwieni. Przesunięcie to wynosi  $z = 0,158$  i wynika z efektu Dopplera spowodowanego ekspansją Wszechświata i ucieczką kwazara od nas. Takie przesunięcie ku czerwieni można przeliczyć na odległość (najlepiej w tym celu zastosować jakiś model kosmologiczny, uwzględniający zakrzywienie czasoprzestrzeni) – w przypadku kwazara 3C 273 sięga ona kilkuset megaparseków. Z jądra kwazara wyrzucany jest wielkoskalowy dżet o długości ponad 60 kpc (rozmiar kątowy około 23 sekund łuku). Aktywność jądra jest spowodowana istnieniem centralnej masywnej czarnej dziury i jest tak silna, że dopiero Kosmiczny Teleskop Hubble’a pozwolił dostrzec otaczającą jądro galaktykę macierzystą.

Kwazar 3C 273 jest zatem aktywną galaktyką, kuzynem galaktyki M87, ale jaśniejszym i dalszym, a zatem młodszym. Światło potrzebuje miliarda lat, żeby dotrzeć do nas od tego obiektu, a zatem widzimy jego obraz sprzed miliarda lat. Inne kwazary są jeszcze dalsze – najwięcej znanych kwazarów ma przesunięcie ku czerwieni około 2, a najdalsze mają  $z$  ponad 6. Obrazy tych najdalszych kwazarów, rejestrowane teraz przez nasze teleskopy, powstały, gdy Wszechświat był dziesięciokrotnie młodszy niż obecnie. Można powiedzieć, że obserwując coraz dalsze kwazary śledzimy ewolucję galaktyk i ich jąder, cofając się w czasie.

I tu napotykamy zagadkę, a nawet kilka. Zagadka pierwsza: w jakiej kolejności powstawały elementy struktury galaktyki? Obserwacje pokazują, że im masywniejsza centralna czarna dziura, tym masywniejsza jej galaktyka macierzysta, więc może powstają i rozwijają się jednocześnie? Zagadka druga: czemu masywniejsze galaktyki powstają i ewoluują szybciej? Nie ma jeszcze odpowiedzi na te pytania. Sięgając coraz bardziej w głąb Kosmosu, ciągle jeszcze natrafiamy na coraz bardziej aktywne, ale już uformowane galaktyki. Nie sięgamy jeszcze dostatecznie daleko, aby zobaczyć naprawdę najwcześniejszą fazę powstawania pierwszych gwiazd w pierwszych galaktykach i pierwszych masywnych czarnych dziur. To obserwacyjne ograniczenie nie wynika z faktu, że mamy za małe teleskopy, lecz z tego, iż obiekty są słabe, a ośrodek międzygalaktyczny zaczyna nam bardzo utrudniać widoczność. Na każdej linii widzenia do dalekiego obiektu zaczynamy mieć po drodze kilka – kilkanaście, kilkadziesiąt – innych galaktyk i obłoków międzygalaktycznych. Obserwacje najwcześniejszych galaktyk trzeba będzie prowadzić w zakresie podczerwieni, przy użyciu dostatecznie wielkich teleskopów. Czeka nas tam z pewnością fascynujące odkrycia, a ten niezbadany obszar Kosmosu (w sensie czasu i przestrzeni) określanymi jest często nazwą „Wieki Ciemne”. To czas, gdy dopiero zapalały się pierwsze źródła światła – pierwsze gwiazdy, błyski gamma i kwazary – rozpraszające panujący mrok.

Bożena CZERNY, Agnieszka JANIUK



### Rozwiązanie zadania M 1258.

Konstrukcję zbioru  $S_n$  przeprowadzimy indukcyjnie.

Dla  $n = 2$  zbiór  $S_2 = \{1, 2\}$  ma własność opisaną w treści zadania.

Przyjmijmy z kolei, że zbiór  $S_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  spełnia warunki zadania oraz niech

$$a = a_1 a_2 \dots a_n \prod_{i < j} (a_i - a_j)^2.$$

Wykażemy, że wówczas zbiór

$$S_{n+1} = \{a, a + a_1, a + a_2, \dots, a + a_n\}$$

także spełnia warunki zadania. Istotnie,

z określenia liczby  $a$  wynika, że liczba

$$a(a + a_i) \text{ jest podzielna przez } a_i^2.$$

Z kolei liczba  $(a + a_i)(a + a_j) =$

$$= a^2 + a(a_i + a_j) + a_i a_j \text{ jest podzielna}$$

przez  $(a_i - a_j)^2$ , gdyż liczby  $a$  oraz  $a_i a_j$

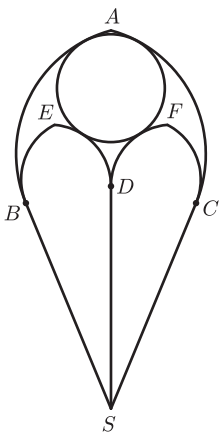
są podzielne przez  $(a_i - a_j)^2$ . Dowód

indukcyjny jest więc zakończony.

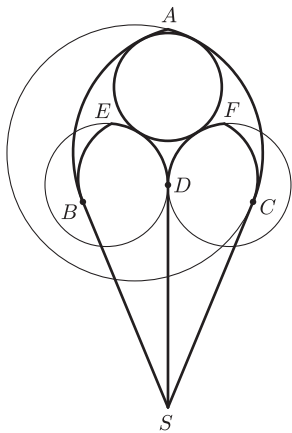




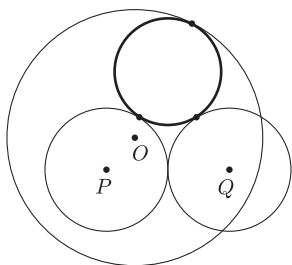
## Rozeta katedry w Metz – dokończenie



Rys. 1



Rys. 2



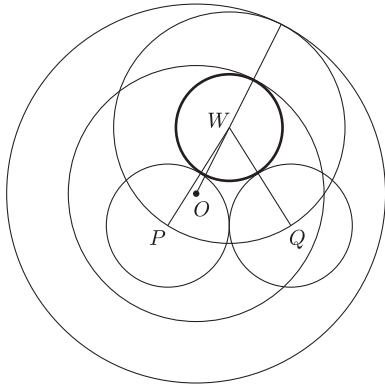
Rys. 3

Do zakończenia rozety z katedry w Metz (patrz *Delta* 9/2009) pozostało nam wpisanie okręgów w osiem ostrołuków. Każdy okrąg ma być styczny wewnętrznie do łuków  $AB$  i  $AC$  oraz styczny zewnętrznie do łuków  $DE$  i  $DF$  (rysunek 1). W tym artykule pokażemy, w jaki sposób można skonstruować taki okrąg. Zauważmy najpierw, że ze względu na symetrię względem osi  $AS$  wystarczy skonstruować okrąg styczny wewnętrznie do łuku  $AC$  i zewnętrznie do łuków  $DE$  i  $DF$ . Narysujmy okręgi, których fragmentami są te trzy łuki (rysunek 2). Naszym celem jest więc skonstruowanie okręgu stycznego do trzech danych okręgów: do dwóch zewnętrznie i do jednego wewnętrznie. Zadanie skonstruowania okręgu stycznego do trzech danych okręgów było już znane w starożytności i dzisiaj nosi nazwę zadania Apoloniusza. Nasze zadanie jest szczególnym przypadkiem zadania Apoloniusza: oba mniejsze okręgi, do których szukany okrąg ma być styczny zewnętrznie, mają równe promienie. Na rysunku 3 widzimy wszystkie okręgi: duży okrąg o środku w punkcie  $O$  i promieniu  $R$  oraz dwa okręgi o środkach w punktach  $P$  i  $Q$  i jednakowych promieniach  $r$ . Szukany okrąg został narysowany grubszą linią; zaznaczono także punkty styczności szukanego okręgu z trzema danymi okręgami. Narysujmy teraz okrąg o tym samym środku, co szukany okrąg, i o promieniu większym o  $r$  (rysunek 4). Ten nowy okrąg przejdzie, oczywiście, przez punkty  $P$  i  $Q$  oraz będzie styczny wewnętrznie do okręgu o środku  $O$  i promieniu  $R + r$ . Skonstruowanie tego większego okręgu pozwoli, oczywiście, skonstruować szukany okrąg: będziemy mieli jego środek i wystarczy skrócić promień o daną długość  $r$ . Mamy zatem do rozwiązania nowe zadanie. Dany jest okrąg o środku w punkcie  $O$  oraz dwa punkty  $P$  i  $Q$  leżące wewnątrz tego okręgu. Należy skonstruować okrąg przechodzący przez punkty  $P$  i  $Q$  oraz styczny wewnętrznie do danego okręgu o środku w punkcie  $O$ . W rozwiązaniu tego zadania skorzystamy z następującego twierdzenia o trzech okręgach.

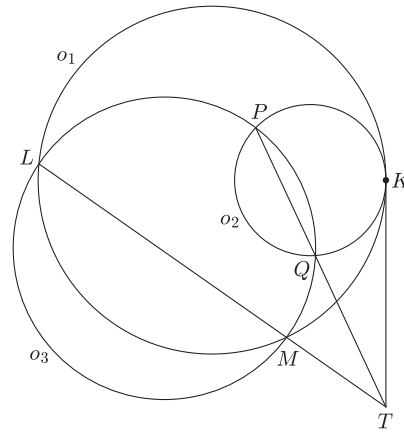
**Twierdzenie.** *Dane są trzy okręgi  $o_1$ ,  $o_2$  i  $o_3$ . Okrąg  $o_2$  jest styczny wewnętrznie do okręgu  $o_1$  w punkcie  $K$ . Okrąg  $o_3$  przecina okrąg  $o_1$  w punktach  $L$  i  $M$  i przecina okrąg  $o_2$  w punktach  $P$  i  $Q$ . Prosta  $PQ$  i styczna do okręgów  $o_1$  i  $o_2$  w punkcie  $K$  mają punkt wspólny  $T$  (rysunek 5). Wtedy punkty  $L$ ,  $M$  i  $T$  są współliniowe.*

Ten punkt  $T$  nazywamy **środkiem potęgowym** okręgów  $o_1$ ,  $o_2$  i  $o_3$ .

Dowód powyższego twierdzenia odłożymy na później. Teraz pokażemy, jak można rozwiązać nasze zadanie konstrukcyjne, wykorzystując to twierdzenie.

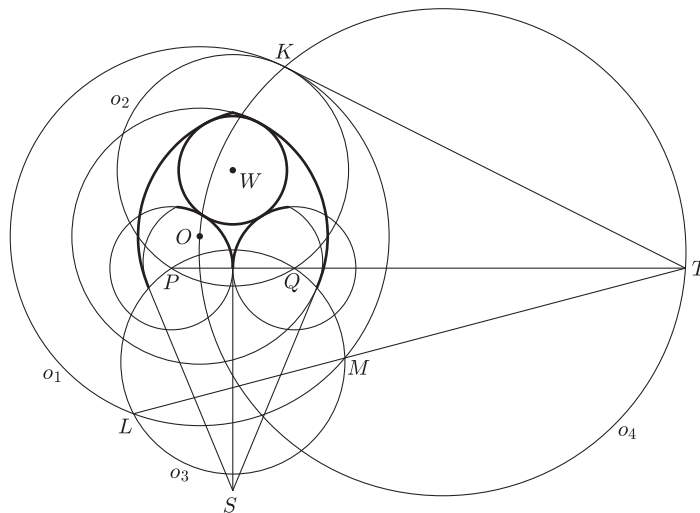


Rys. 4



Rys. 5

Zaczynamy od narysowania okręgu  $o_1$  o środku  $O$  i promieniu  $R + r$ . Przypuśćmy, że został już skonstruowany okrąg  $o_2$  przechodzący przez punkty  $P$  i  $Q$  i styczny wewnętrznie do okręgu  $o_1$ . Niech  $K$  będzie punktem styczności. Teraz rysujemy dowolny okrąg  $o_3$  przechodzący przez punkty  $P$  i  $Q$  i przecinający okrąg  $o_1$  w punktach  $L$  i  $M$ . Niech  $T$  będzie punktem przecięcia prostych  $PQ$  i  $LM$ . Z powyższego twierdzenia wynika, że wspólna styczna do okręgów  $o_1$  i  $o_2$  przechodzi przez punkt  $T$ . To pokazuje, w jaki sposób możemy znaleźć punkt styczności  $K$ . Wystarczy bowiem z punktu  $T$  poprowadzić teraz styczną do okręgu  $o_1$ . Tę styczną konstruujemy bez trudności: punkt  $K$  jest jednym z punktów przecięcia okręgu  $o_1$  i okręgu  $o_4$  o średnicy  $OT$ . Po znalezieniu punktu  $K$  dokończenie konstrukcji jest już łatwe. Okrąg  $o_2$  jest bowiem okręgiem opisanym na trójkącie  $PQK$ . Jego środkiem jest zaznaczony na rysunku punkt  $W$ . Ten punkt  $W$  jest też środkiem szukanego okręgu; promień tego okręgu jest o  $r$  krótszy od promienia okręgu  $o_2$ , czyli jest równy np.  $WP - r$ . Najważniejsze szczegóły całej konstrukcji są pokazane na rysunku 6.



Rys. 6

Szukany okrąg i łuki ostrołuków, do których jest on styczny, zostały na rysunku 6 narysowane grubszą linią.

Pozostaje do udowodnienia nasze twierdzenie. Temu dowodowi poświęcimy następny artykuł.

*Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI*

## Konkurs zadań astronomicznych

Na rozwiązania zadań A 21 i A 22 czekamy do 1 grudnia 2009 r. (decyduje data stempla pocztowego) pod adresem:

Centrum Astronomiczne  
im. Mikołaja Kopernika  
ul. Bartycka 18  
00-716 Warszawa

z dopiskiem na kopercie „Konkurs Deltą”.

**A 21.** W chwili lokalnej północy żeglarz stwierdził, że wysokość dolnego brzegu tarczy Słońca wynosi  $h = 13^\circ 28'$ . Deklinacja środka tarczy Słońca wynosiła wtedy  $\delta = 20^\circ 24'$ , a średnica tarczy Słońca  $2r = 32'$ . Przyjmujemy, że refrakcja atmosferyczna  $R$  zależy od obserwowanej wysokości według przybliżonego wzoru  $R = 1' \operatorname{ctg} h$ . W jakiej szerokości geograficznej był żeglarz? [1 pkt]

**A 22.** Kiedy Gwiazda Barnarda (najszybsza gwiazda na niebie) znajdzie się najbliżej Słońca? Jej ruch własny to  $\mu = 10''34$  rocznie, paralaksa  $p = 0''545$ , a prędkość radialna  $v_r = -110$  km/s. W jakiej będzie wtedy odległości? [2 pkt]

### Rozwiązania zadań z numeru 9/2009

**A 17.** Ciśnienie na powierzchni Ziemi wynosi 1 atm, czyli nad każdym centymetrem kwadratowym powierzchni jest kilogram powietrza. Zatem masa atmosfery wynosi tyle kilogramów, ile centymetrów kwadratowych ma powierzchnia Ziemi, czyli  $5,1 \times 10^{18}$  kg.

**A 18.** Skoro wielkości gwiazdowe  $m$  i natężenia światła  $I$  wiążą zależność  $m = -2,5 \log I$ , więc  $I_1 = 0,000759$ ,  $I_2 = 0,001585$ , skąd

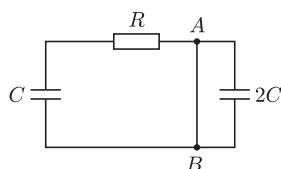
a.  $-2,5 \log(I_1 + I_2) = 6,57$  mag.

b. Mniejsza gwiazda przesłania  $1/6^2 = 0,0278$  powierzchni tarczy olbrzyma, zatem łączna jasność wyniesie  $-2,5 \log(I_1 + 0,278I_2) = 7,74$  mag.



## Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 1

**F 751.** Kondensator o pojemności  $C$  rozładowuje się przez opór  $R$  i łącznik  $AB$  (rys. 1). W momencie, w którym prąd rozładowywania miał natężenie  $I_0$ , łącznik  $AB$  przepalił się. Jaka ilość ciepła wydzielili się w układzie od chwili przepalenia?

Rozwiązanie na str. 4

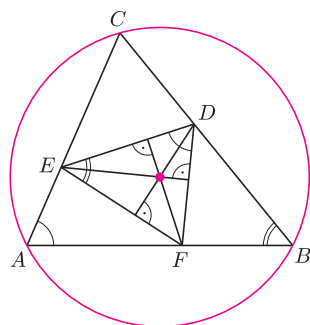
**F 752.** Kondensator został naładowany do  $U_0 = 100$  V, a następnie podłączony do opornika. W pierwszej chwili na oporniku wydzielilo się ciepło  $W_1 = 1$  J, a w następnym takim samym przedziale czasu wydzielilo się ciepło  $W_2 = 0,3$  J. Wyznaczyć pojemność kondensatora.

Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Waldemar POMPE

**M 1258.** Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej  $n > 1$  istnieje taki zbiór  $S_n$  składający się z  $n$  różnych liczb całkowitych dodatnich, że dla każdych dwóch różnych liczb  $a, b \in S_n$  liczba  $ab$  jest podzielna przez  $(a - b)^2$ .

Rozwiązanie na str. 7



Rys. 2

**M 1259.** Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ . Punkty  $D, E, F$  leżą odpowiednio na bokach  $BC, CA, AB$ , przy czym  $\sphericalangle FDE = \sphericalangle BAC$  oraz  $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$  (rys. 2). Dowiedz, że punkt przecięcia wysokości trójkąta  $DEF$  pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

Rozwiązanie na str. 5

**M 1260.** Liczba całkowita  $n > 1$  ma tę własność, że liczba  $2^n + n^2$  jest liczbą pierwszą. Wykazać, że liczba  $n$  jest nieparzystą wielokrotnością liczby 3.

Rozwiązanie na str. 24

## LHC – reaktywacja

Proces wydawniczy miesięcznika powoduje, że *aktualności* są pisane najpóźniej na półtora miesiąca przed ukazaniem się numeru. Dlatego piszę ten tekst między rocznicą pierwszego uruchomienia a rocznicą pierwszego... unieruchomienia LHC. Pierwsza z tych rocznic nie jest dobrze określona, bo LHC działało (lub działał, gdyż, jako *zderzacz*, odmieniane może być również po męsku), zanim zaczęto przecinać wstęgi, a następnie pić szampana. Natomiast druga jest dobrze określona. Rozszczelnienie LHC, które spowodowało ponad roczną przerwę w działaniu, nastąpiło 19 września ubiegłego roku.

Ponowne uruchomienie ma nastąpić w listopadzie, czyli obecny numer *Delty* powinien być w sprzedaży w *dobrych punktach dystrybucji prasy* zarówno przed, jak i po tym wydarzeniu.

Piszę ten tekst nie bez obaw. W zeszłym roku posłużyłem się cytatem z *Lokomotywy* Tuwima. Słowa, niestety, okazały się wieszczce. Para (helu) buchnęła i dłuższy od niejednego pociągu fragment LHC wyskoczył ze swojego łoża.

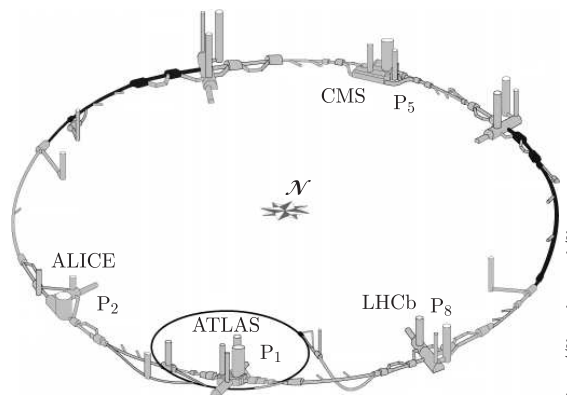
Na wszelki wypadek postaram się nie porównywać już LHC do niczego...

Czy sytuacja z zeszłego roku może się powtórzyć? Eksperci zapewniają, że nie. Wypadek zdarzył się w trakcie testów obciążenia magnesów prądem potrzebnym do utrzymania wiązek o energii dochodzącej do 70% nominalnej wartości. Prąd o natężeniu ponad 8 kA jest potrzebny do wytworzenia pola magnetycznego o indukcji prawie 6 tesli, pozwalającej na zakrzywianie torów protonów o energii 5 TeV. Prądy o takim natężeniu można utrzymywać tylko w nadprzewodzących cewkach. Magnesy LHC są chłodzone nadciekłym helem o temperaturze 1,9 K. Miejsce, którego neuralgiczność nie została doceniona, było połączenie nadprzewodzących szyn prądowych (szynoprzewodów) kolejnych sekcji magnesów. Elementy te zostały przetestowane wyrywkowo i nie były objęte monitoringiem wartości oporu elektrycznego. Można powiedzieć, że, przynajmniej częściowo, było to spowodowane presją jak najszybszego uruchomienia LHC.

Niestety, w czasie testów w jednym z połączeń opór elektryczny wzrósł o nanoomy, co przy płynącym przez niego prądzie wystarczyło do lokalnego ogrzania helu do temperatury wrzenia, wyjścia elementu ze stanu nadprzewodnictwa, a więc przeistoczenia się tego elementu w potężną grzałkę. Zanim zadziały mechanizmy wytracające prąd z obwodów, ciśnienie helu gwałtownie wzrosło, zawory bezpieczeństwa okazały się za mało drożne, co doprowadziło do rozsądzenia płaszcza magnesu, przy okazji uszkadzając akcelerator na długości kilkudziesięciu metrów.

Dlaczego tym razem ma być inaczej, mało tego – lepiej, a nawet całkiem dobrze? Wszystkie połączenia zostały ponownie sprawdzone, a te, które wykazywały podobne symptomy – poprawione. Jeżeli chodzi o symptomy, to po fakcie okazało się, że prekursorów przyszłej katastrofy było widać w zapisach tego, co monitorowane było, tylko nikt nie zauważył, co widzi.

W przypadku poprawek instalowano dodatkowy monitoring. Niektóre połączenia nie zostały jednak poprawione, bo wiązałyby się to z ogrzaniem całego LHC do temperatury pokojowej, a to spowodowałoby jeszcze większe opóźnienia, bo procedura rozmrażania i ponownego zamrażania trwa miesiące.



Wymyślono jednak sposób mierzenia oporów połączeń z zewnątrz i oczywiście wszędzie takie systemy zainstalowano. Przy okazji tych dokładnych studiów ze zdumieniem odkryto synchroniczne wychodzenie sąsiednich magnesów ze stanu nadprzewodnictwa. Standardowy monitoring czegoś takiego nie przewidywał, bo nikt wcześniej tego nie obserwował. Jest on oparty na porównywaniu sąsiednich magnesów, więc w takim przypadku nie działa. Zaprojektowanie, wdrożenie i zainstalowanie systemu monitorującego kilka magnesów zamiast dwóch spowodowało dodatkowe opóźnienie o pół roku (na jesieni zeszłego roku mówiono o ponownym uruchomieniu już w maju 2009). Głównym powodem opóźnienia była konieczność użycia elektroniki cyfrowej (zamiast analogowej), odpowiednio odpornej na wysokie natężenia promieniowania jonizującego generowanego przez LHC.

LHC ruszy w listopadzie, o ile nie pojawi się coś niespodziewanego. Jakakolwiek dodatkowa poprawka wymagająca ingerencji w zimną masę LHC to, co najmniej, trzy miesiące dodatkowego opóźnienia. Jak będzie działać reaktywowane LHC – nie wiadomo. Wiadomo, jakie są plany.

Wiązki będą wstrzykiwane do LHC z akceleratora SPS (który jest mniejszy, ale nadal olbrzymi: ma obwód kilku kilometrów; ćwierć wieku temu umożliwił odkrycie bozonów pośredniczących W i Z). Wiązki te mają energię 0,45 TeV i dopiero w LHC będą przyspieszane do większych energii. Po bardzo krótkiej fazie zderzania wiązek bez ich przyspieszania LHC ma umożliwić zderzanie protonów z protonami przy energii 3,5 TeV na wiązkę. Będzie to już energia rekordowa. W dodatku jest ona uważana za całkowicie bezpieczną z punktu widzenia ewentualnego gaśnięcia nadprzewodnictwa w magnesach. Po zebraniu statystyki wystarczającej do prześcignięcia konkurencji, czyli TeVatronu (zderzającego protony z antyprotonami przy energii około 1 TeV na wiązkę), energia ma być podniesiona do 5 TeV na wiązkę, a pod koniec 2010 roku do LHC mają być wpuszczone jądra ołowiu.

Jeżeli wszystko pójdzie w miarę dobrze, to na przyszłorocznych zimowych konferencjach pojawią się informacje, że LHC na nowo odkryło Model Standardowy, a na letnich ukażą się albo pierwsze publikacje z ograniczeniami dotyczącymi fizyki wykraczającej poza ten paradygmat, albo sugestie, że coś takiego zaczyna być widać.

W tej chwili chyba największe (rozsądnie umotywowane) nadzieje wiąże się z możliwością stwierdzenia, że ciemna materia jest zbudowana z dziś jeszcze nieodkrytych cząstek, które można będzie w LHC wyprodukować.

Piotr ZALEWSKI

# Kształt wiszącego łańcucha

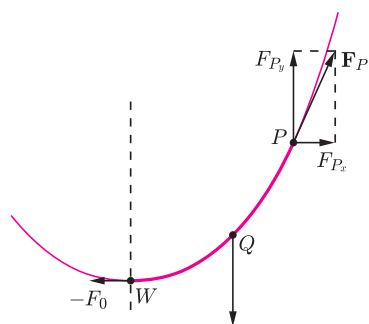
Marek KORDOS

Powstanie analizy matematycznej w XVII wieku wiązało się z wprowadzeniem do matematyki nieskończoności, a w szczególności z badaniem zmienności. Za wzorzec służyły zależności wzięte z mechaniki. Zależność między drogą, prędkością i przyspieszeniem stała się wzorcem rachunku różniczkowego i całkowego. Kluczowe stały się badania nad różnego rodzaju krzywymi powstającymi jako rozwiązania naturalnych problemów mechanicznych,

jak tautochrona (np. *Delta* 2/2006), brachistochrona (np. *Delta* 7/2007), krzywa łańcuchowa, traktrysa.

W tym tekście opowiem o przedziwnych zależnościach, jakie wywodzą się z badania krzywej łańcuchowej. Przy okazji będzie mowa o prostych faktach z klasycznej geometrii różniczkowej, czyli teorii opisującej obecność analizy matematycznej w geometrii.

## Kształt łańcucha, czyli krzywa łańcuchowa



Rys. 1

Wektorem stycznym do krzywej łańcuchowej jest naprężenie  $\mathbf{F}$  realnego (ale idealnego) łańcucha. Przedstawimy go za pomocą jego składowej poziomej i pionowej:  $\mathbf{F}_P = (F_{Px}, F_{Py})$ .

W najniższym punkcie  $W$  (wierzchołku krzywej) składowa pionowa jest zerowa i  $\mathbf{F}_W = (-F_0, 0)$ . Wyobraźmy sobie, że chwytamy łańcuch w wierzchołku oraz w dowolnym innym punkcie  $P$  i zostawiamy tylko fragment między  $W$  i  $P$  o długości  $s$ . Aby łańcuch nie zmienił kształtu (i nie poruszał się), składowa pozioma w punkcie  $P$  musi równoważyć tę w punkcie  $W$ , czyli dla dowolnego punktu  $P$  mamy  $F_{Px} = F_0$ . Natomiast składowa pionowa w punkcie  $P$  musi zrównoważyć ciężar tego fragmentu łańcucha:  $Q = \rho \cdot s = F_{Py}$ , gdzie  $\rho$  to ciężar łańcucha na jednostkę długości. Dla wygody oznaczmy jeszcze  $a = F_0/\rho$ . Mamy wobec tego  $\mathbf{F}_P = (a \cdot \rho, s \cdot \rho)$ , a tym samym  $F_{Py}/F_{Px} = s/a$ .

Jaki to wyznacza kształt?

Ogólniej: jak opisać krzywą? Najzręczniejszą potraktować ją jako trajektorię ruchu. Wygodnie wtedy jest jako parametrem posłużyć się nie czasem, lecz przebywaną drogą  $s$  – czyli jedziemy po krzywej samochodem ze stałą szybkością (tutaj trasa będzie płaska, jak na Great Salt Lake Desert, ale na ogół tak być nie musi). Jeśli tę trajektorię opisywać będą współrzędne  $(x(s), y(s))$ , to

prędkość (czyli zmiany położenia) opisywać będzie  $\mathbf{V} = (x'(s), y'(s))$  – jest to wektor styczny do trajektorii. Zysk z naszego wyboru parametru jest taki, że

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1,$$

ponieważ szybkość jest stała.

Tak jest dla każdej krzywej.

Dla krzywej łańcuchowej mamy więc układ równań

$$\begin{cases} \frac{y'(s)}{x'(s)} = \frac{s}{a}, \\ (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1, \end{cases}$$

z którego wynika, że

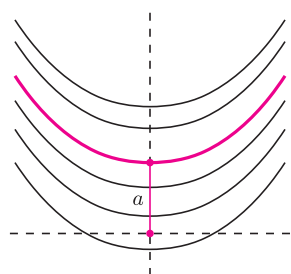
$$\mathbf{V} = (x'(s), y'(s)) = \left( \frac{a}{\sqrt{s^2 + a^2}}, \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}} \right).$$

Operacja prowadząca od  $f'$  do  $f$  to całkowanie. Jego najprostszą formą jest zgadnięcie, jaka to funkcja może mieć taką właśnie pochodną, o jaką nam chodzi. Metoda ta zapewne wystarczy, by stwierdzić, że  $y(s) = \sqrt{s^2 + a^2} + \text{coś}$ . Próby naszych praojców pokazały, że najwygodniej będzie przyjąć, iż to „coś” to zero – wybór ten nadaje sens użytej przez nas stałej  $a$ : teraz będzie to wysokość „wierzchołka” krzywej łańcuchowej nad osią  $x$ -ów.

Dla znalezienia  $x(s)$  opisana wyżej metoda całkowania raczej zawodzi. Trzeba użyć metody numer 2: poszukać w tablicach całek nieoznaczonych w jakimś poradniku i wtedy (dobierając tutaj „coś” tak, aby było  $x(0) = 0$ ) otrzymujemy, że krzywa łańcuchowa ma przedstawienie parametryczne

$$\left( a \ln \frac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a}, \sqrt{s^2 + a^2} \right)$$

– straszna jest ta pierwsza współrzędna, ale napisałem ją dla porządku: nigdzie dalej nie będziemy z niej korzystali.



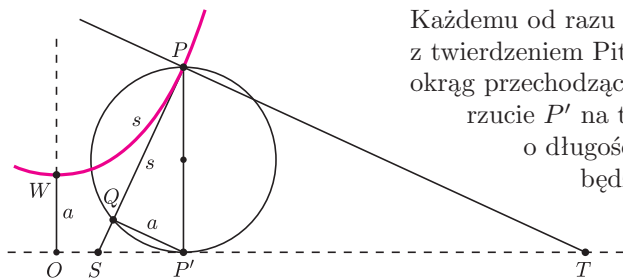
Rys. 2

Czytelnik Erudyta wie, że krzywą łańcuchową można przedstawić też jako wykres funkcji

$$f(x) = \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}.$$

Z dalszego ciągu tekstu widać będzie, dlaczego wybrałem inną drogę.

## Konstrukcja stycznej, rektyfikacja i kwadratura krzywej łańcuchowej



Rys. 3

Każdemu od razu druga współrzędna punktów krzywej łańcuchowej kojarzy się z twierdzeniem Pitagorasa. Narysujmy to więc. Cóż się okazuje: jeśli narysujemy okrąg przechodzący przez jakiś punkt  $P$  tej krzywej i styczny do osi  $x$ -ów w jego rzucie  $P'$  na tę oś, a następnie narysujemy (w stronę zera) cięciwę  $P'Q$  o długości  $a$  (rys. 3), to (ponieważ  $|PP'| = \sqrt{s^2 + a^2}$ ) odcinek  $PQ$  będzie miał długość  $s$ . Będzie więc tej samej długości co łuk  $WP$  – dokonaliśmy rektyfikacji (czyli wyprostowania) krzywej łańcuchowej!

Zauważmy przy okazji, że prosta  $PQ$  jest styczna do krzywej łańcuchowej w punkcie  $P$ . Obliczmy w tym celu kotangens kąta  $QPP'$ , jaki prosta  $PQ$  tworzy z pionem, czyli tangens kąta, który tworzy z poziomem. Mamy

$$\operatorname{ctg} \sphericalangle QPP' = \frac{s}{a} = \frac{y'(u)}{x'(u)},$$

co jest geometrycznym opisem kierunku stycznej.

Na koniec (czego już nie obliczymy) odnotujmy, że pole trapezu krzywoliniowego  $OWPP'$  jest równe  $as$ , czyli podwojonemu polu trójkąta  $QPP'$ . Rysując więc (cyrklem i linijką!) ten trójkąt, dokonaliśmy też kwadratury krzywej łańcuchowej.

Zatem, choć krzywej łańcuchowej cyrklem i linijką narysować się nie da, to – gdy ją już mamy – możemy cyrklem i linijką skonstruować styczną do niej, znaleźć odcinek równy jej długości i trójkąt równy ograniczanemu przez nią polu.

Dalej wykorzystamy jeszcze fakt, że odcinek stycznej od  $P$  do przecięcia z osią  $x$ -ów to  $\frac{s^2 + a^2}{s}$  (czyli  $|QS| = \frac{a^2}{s}$ ), a odcinek normalnej (czyli prostopadłej do stycznej) to  $|PT| = \frac{s^2 + a^2}{a}$ , co otrzymuje się bezpośrednio z twierdzenia Pitagorasa.

### Katenoida

Jest to powierzchnia powstająca przez obracanie krzywej łańcuchowej wokół osi  $x$ -ów (po łacinie *catena* to łańcuch). Aby poznać jej najistotniejsze własności, zbadajmy krzywiznę krzywej łańcuchowej.

*Powróćmy do samochodu: jeśli jedzie on po płaszczyźnie ze stałą szybkością, to na zakrętach rzuca nas na prawe lub lewe drzwiczki (bardziej naukowo: przyspieszenie jest prostopadłe do prędkości). Wielkość tego przyspieszenia w geometrii nazywa się krzywizną i często oznacza ją literą  $\kappa$  (kappa).*

Obliczmy krzywiznę krzywej łańcuchowej, a więc najpierw pochodną  $\mathbf{V}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= \left( \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}} \cdot (a, s) \right)' = \left( \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}} \right)' \cdot (a, s) + \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}} \cdot (0, 1) = \\ &= \frac{-s}{(\sqrt{s^2 + a^2})^3} \cdot (a, s) + \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}} \cdot (0, 1) = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{s^2 + a^2})^3} \cdot (-sa, -s^2 + (s^2 + a^2)) = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{s^2 + a^2})^3} \cdot (-sa, a^2) = \frac{a}{(\sqrt{s^2 + a^2})^3} \cdot (-s, a), \end{aligned}$$

stąd

$$|\mathbf{V}'| = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

i taka jest krzywizna (przyspieszenie). To, co wykorzystamy dalej, to fakt, że jest to odwrotność długości odcinka normalnej.

*Bez większego trudu każdy może obliczyć, że krzywizna okręgu to odwrotność jego promienia. To spostrzeżenie pozwala na wprowadzenie pojęcia środka krzywizny oraz promienia krzywizny krzywej w danym punkcie  $P$ . Mianowicie*

na normalnej odkładamy odwrotność krzywizny (czyli  $r = \frac{1}{\kappa}$ ) po tej stronie, z której krzywa wygląda jak brzeg figury wypukłej – otrzymany punkt to środek krzywizny. Okrąg o środku w tym punkcie i promieniu  $r$  najlepiej przybliża krzywą w otoczeniu punktu  $P$ . Wyróżniając jedną ze stron, na jakie krzywa dzieli płaszczyznę, będziemy mówili o krzywiznie dodatniej i ujemnej (sinusoida, na przykład, będzie zmieniała cyklicznie znak krzywizny – prawda?).

Tu więc okazało się, że środkiem krzywizny jest punkt symetryczny do  $T$  względem  $P$  (nie ma go na rysunku 3), promieniem krzywizny zaś jest  $|PT|$ . To spostrzeżenie pozwoli nam na wykazanie, że katenoida jest powierzchnią minimalną.

Aby wyjaśnić to pojęcie, musimy przez chwilę zająć się powierzchniami ogólnie. Będziemy mówili o powierzchniach gładkich (co oznaczać będzie, że wykonywane przez nas manipulacje – np. znajdowanie płaszczyzny stycznej w jakimś punkcie – będą się udawały). Przecinajmy powierzchnię wszystkimi płaszczyznami przechodzącymi przez dany punkt i zawierającymi prostą prostopadłą do płaszczyzny stycznej w tym punkcie – takie przekroje nazywają się *normalne*. Ich krzywizna (jeśli nie jest w każdym kierunku taka sama) przyjmuje swoją wartość najmniejszą i największą tylko raz; ciekawe, że kierunki, w których przyjmowane są ekstremalne wartości, są prostopadłe. Wartości ekstremalne oznacza się zazwyczaj  $\kappa_1$  i  $\kappa_2$ , a nie np.  $\kappa_{\max}$  i  $\kappa_{\min}$ , bo to, która jest jaka, zależy przecież od obranej przez nas orientacji. Ważne są jednak wielkości

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad \text{i} \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2},$$

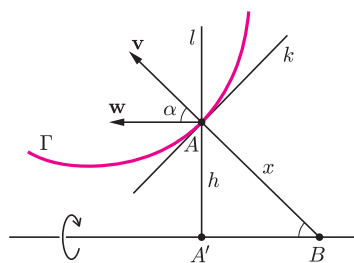
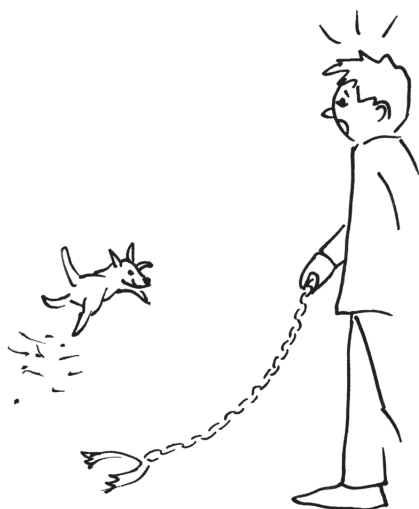
zwane odpowiednio krzywizną Gaussa i krzywizną średnią. Ta pierwsza gra wielką rolę w geometrii i jej zastosowaniach, bo nie zmienia się podczas żadnego wyginania powierzchni niezmienną długości leżących na niej krzywych, a nazwę zawdzięcza temu, kto wpadł na jej pomysł i wykazał, jak wiele od niej zależy. Natomiast okazało się, że powierzchnie, dla których ta druga jest równa zeru, to powierzchnie minimalne. Termin ten oznacza, że jeśli na tej powierzchni leży jakaś (niekoniecznie płaska) krzywa, to wykonując jej kopię z drutu i rozpinając na niej membranę o minimalnym polu powierzchni (np. błonę mydlaną), otrzymamy właśnie powierzchnię, z której ta krzywa była wyjęta.

Pozostając jeszcze na chwilę wśród „dowolnych” krzywych, zajmijmy się problemem, jak wyglądają krzywe o ekstremalnych krzywiznach na powierzchni powstałej przez obrót krzywej wokół osi  $x$ -ów (aby nie komplikować – niech krzywa ta będzie – jak krzywa łańcuchowa – „wypięta” w stronę tej osi). Wówczas jedną z krzywizn ekstremalnych będzie krzywizna obracanej krzywej – oznaczmy ją przez  $\kappa_1$  i przyjmijmy dla zwrócenia uwagi, że jest ujemna. Od razu widać, że druga ekstremalna krzywizna będzie odmiennego znaku – ale która z krzywizn skierowanych w stronę osi  $x$ -ów będzie największa? Aby ten problem rozstrzygnąć, dobrze jest skorzystać z twierdzenia Meusnier’a, które mówi, jak zależy krzywizna  $\kappa$  dowolnej krzywej płaskiej  $\Gamma$  od krzywizny  $\kappa_N$  przekroju normalnego mającego tę samą prostą styczną; otóż  $\kappa_N = \kappa \cdot \sin \alpha$ , gdzie  $\alpha$  to kąt między płaszczyzną, w której leży  $\Gamma$  i płaszczyzną styczną do powierzchni. Oznaczając przez  $h$  odległość punktu krzywej od osi obrotu (rys. 4), mamy

dla przekroju przez punkt  $A$ , prostopadłego do osi obrotu,  $\kappa = \frac{1}{h}$ . Ponieważ  $h = x \sin \alpha$ , więc  $\frac{1}{h} \sin \alpha = \frac{1}{x}$ . Z drugiej strony druga krzywizna ekstremalna

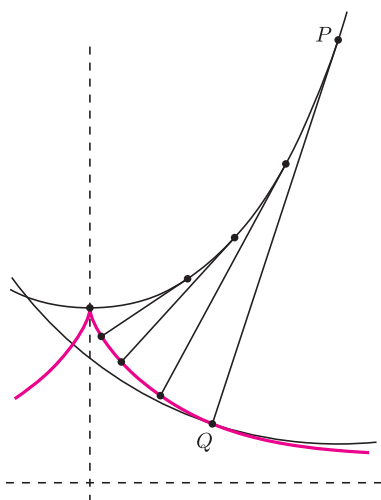
jest w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny, w której leży obracana krzywa, czyli w płaszczyźnie zawierającej normalną. Zestawiając te dwa spostrzeżenia, stwierdzamy, że  $\kappa_2$  to długość odcinka normalnej od krzywej do osi obrotu.

W przypadku obracania krzywej łańcuchowej mamy więc  $\kappa_1 = -\kappa_2$ , skąd wynika, że krzywizna średnia jest równa zeru i katenoida rzeczywiście jest powierzchnią minimalną. Można ją sobie wyprodukować, zanurzając w roztworze mydła dwa dotykające się druciane pierścienie (najlepiej na rączkach), a następnie delikatnie rozsuwając je; utworzona między nimi powierzchnia będzie właśnie katenoidą.

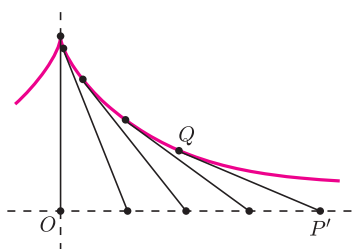


Rys. 4. Rozpatrzmy dwie płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzny rysunku: jedną zawierającą prostą  $k$  (to płaszczyzna styczna w punkcie  $A$  do powstającej przez obracanie powierzchni) i drugą – zawierającą prostą  $l$  (to płaszczyzna prostopadła do osi obrotu). Kąt między nimi to kąt między prostopadłymi do nich wektorami  $v$  i  $w$ .

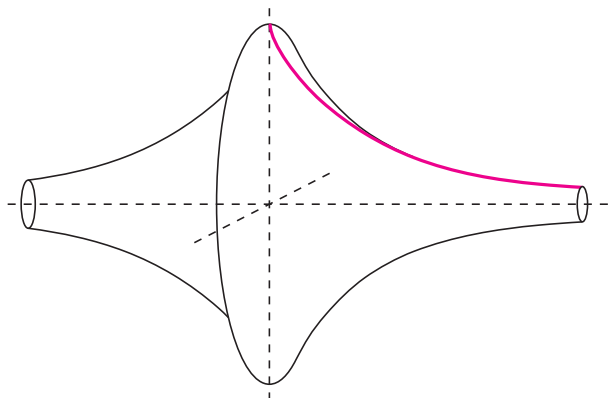
## Rozwijamy (lub ciągniemy) sznurek, czyli tworzymy traktryse



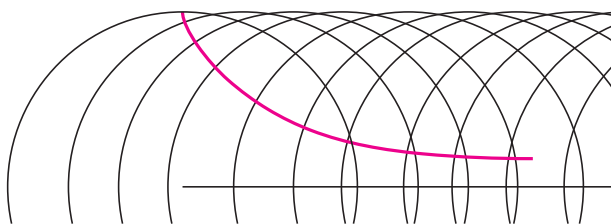
Rys. 5



Rys. 6. Gdy ktoś nie lubi opowiadać o kacuszce, może traktryse opisać jako krzywą, której odcinek stycznej do osi  $x$ -ów jest stałej długości.



Rys. 7. Środkowy fragment pseudosfery z zaznaczonym prawym łukiem wyznaczającym ją traktryse.



Rys. 8

Jeśli wyobrazimy sobie, że wzdłuż krzywej łańcuchowej jest rozciągnięty sznurek kończący się w jej wierzchołku (przytrzymywanym przez nas) ciężarkiem, który w pewnym momencie puszczamy, trajektoria ciężarka wyznaczy nam krzywą o nazwie *traktrysa* (rys. 5).

Rozwijanie napiętego sznurka z krzywej to pomysł prowadzący do pojęcia *ewolwenty* doprecyzowanego w geometrii różniczkowej. Każda krzywa ma wiele ewolwent, bo sznurek może mieć wolny koniec (ten z ciężarkiem) w różnych jej miejscach. Jeśli mamy ewolwentę jakiejś krzywej, to krzywa, z której powstała, jest zbiorem jej środków krzywizny – nazywamy ją jej *ewolutą*. Wszystkie ewolwenty danej krzywej mają tę samą ewolutę – ją właśnie.

To, że ewoluta składa się ze środków krzywizny swojej ewolwenty, staje się bezpośrednio widoczne, gdy zatrzymamy w pewnym momencie rozwijanie sznurka (np. na naszym obrazku w punkcie  $P$ ). Wówczas huśtający się ciężarek będzie się kołysał po okręgu dobrze pasującym do ewolwenty (na naszym obrazku będzie to okrąg o środku  $P$  i promieniu  $PQ$ ).

Widać to wszystko (i jeszcze więcej) także na rysunku 3. Oczywiście, długość odcinka  $PQ$  rośnie w miarę rozwijania się sznurka. Ale widzimy też, że odległość  $QP'$  pozostaje stała (równa  $a$ ). Pozwala to na inną definicję traktrysy wykorzystującą sznurek: jeśli w punkcie  $W$  umieścimy kacuzkę na sznurku trzymanym przez dziecko w punkcie  $O$  i dziecko to będzie wędrowało wzdłuż osi  $x$ -ów, kacuzka poruszać się będzie właśnie po traktrysie (rys. 6). To podejście pozwala za traktryse uważać raczej krzywą „podwojoną” przez odbicie symetryczne względem osi  $y$ -ów. Przecież dziecko może po osi  $x$ -ów powędrować zarówno w prawo, jak i w lewo.

Główną zaletą traktrysy dla matematyków jest to, że jej obracanie wokół osi  $x$ -ów daje powierzchnię o stałej krzywiznie Gaussa. Zastosujmy bowiem do niej (przydługie) uwagi o powierzchniach obrotowych z poprzedniej strony. Stwierdzamy wtedy (znow rysunek 3) nie tylko, że krzywizna traktrysy

w punkcie  $Q$  jest równa  $-\frac{1}{s}$ , ale też, że druga krzywizna ekstremalna powstałej

powierzchni to odwrotność długości odcinka  $QS$ , czyli  $\frac{s}{a^2}$ , a więc

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

Dlaczego to takie ważne? Bo w przestrzeni trójwymiarowej są tylko cztery powierzchnie o stałej krzywiznie Gaussa: dwie mają krzywiznę zero – to płaszczyzna i (nieograniczona) powierzchnia walca, jedna ma stałą krzywiznę dodatnią (każdy łatwo stwierdzi, że to sfera, czyli powierzchnia kuli) i jedna, właśnie otrzymana, ma stałą krzywiznę ujemną. Z tego względu powierzchnię powstałą przez obrót traktrysy wokół jej asymptoty nazywamy pseudosferą (rys. 7).

Co ciekawe: mimo że pseudosfera jest nieograniczona, to pole jej powierzchni jest równe  $4\pi a^2$ , czyli wyraża się takim samym wzorem, jak dla sfery. Głębszą konsekwencją stałej krzywizny Gaussa jest możliwość zbudowania jednorodnej (w każdym punkcie takiej samej) geometrii, ale to już inna historia.

Opowieść tę można by ciągnąć dalej, dla przykładu na rysunku 8 podany jest jeszcze inny sposób uzyskania traktrysy: jest to krzywa przecinająca pod kątem prostym każdy z okręgów o środkach leżących na prostej – proszę to sprawdzić (jaki mają promień?).

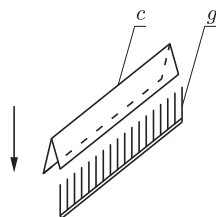
O traktrysie i pseudosferze pisaliśmy też w *Delcie* 6(385)/2006.





Jeden herc (Hz) to jedno drganie na sekundę.

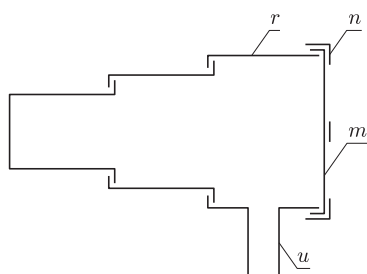
Z wiekiem upośledzeniu ulega odbieranie dźwięków o najwyższych częstotliwościach. Pomysłowi przedsiębiorcy sprzedają „odstraszacze młodzieży” emitujące przenikliwe dźwięki o częstościach słyszalnych statystycznie jedynie dla obywateli w wieku poniżej dwudziestu kilku lat. Urządzenia te montowane bywają np. w barach.



Rys. 1. Przygotowanie grzebienia do wytwarzania dźwięków; *g* – grzebień, *c* – celofan.



Fot. Tak wygląda trąbka fanfarowa przy średniej długości rury.



Rys. 2. Wygląd trąbki fanfarowej w przekroju osiowym; *r* – rura teleskopowa, *n* – nasadka, *m* – membrana, *u* – ustnik.

Dźwięki słyszalne przez człowieka są to drgania mechaniczne o częstotliwości w granicach od 20 Hz do 20 000 Hz. Wraz z wiekiem granice te ulegają zawężeniu. Niektóre zwierzęta słyszą dźwięki spoza tego przedziału. Nietoperze i psy odbierają dźwięki o częstotliwościach wyższych od 20 000 Hz – tzw. ultradźwięki. Z kolei delfiny słyszą również dźwięki o częstotliwościach poniżej 20 Hz, nazywane infradźwiękami. Dźwięki stanowią dla człowieka obszerne i ważne źródło informacji o otaczającym go świecie. Pogorszenie się słuchu, następujące wraz z wiekiem, jest dotkliwą niepełnosprawnością. W dzisiejszych doświadczeniach zajmiemy się badaniem niektórych właściwości dźwięków.

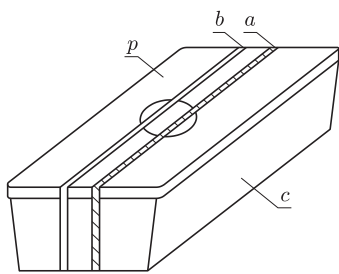
Do pierwszego doświadczenia potrzebna będzie plastikowa linijka oraz imadło lub ścisk stolarski. Zamiast linijki możemy do doświadczenia użyć brzeszczotu piłki do metalu. Chwyćmy linijkę ręką za jeden z końców i poruszajmy ją możliwie jak najszybciej tam i z powrotem. Czy linijka wydaje przy tym jakiś dźwięk? Okazuje się, że żadnego dźwięku nie słyszemy, ponieważ ruch linijki jest zbyt powolny – nie jesteśmy w stanie wykonywać ruchu tam i z powrotem z częstotliwością większą niż 20 razy w ciągu jednej sekundy.

Teraz jeden koniec linijki zamocujemy w imadle przykręconym do stołu lub przyciśniemy go do stołu ściskiem stolarskim. Jeżeli nie mamy żadnego z tych przyrządów, możemy koniec linijki przycisnąć do stołu palcami jednej ręki. Nieprzymocowany koniec linijki wprawiamy w ruch przez odgięcie go ku dołowi i swobodne puszczenie. Czy w tym przypadku linijka wydaje dźwięk? Okazuje się, że tak, ponieważ swobodny ruch drgający linijki odbywa się z dostatecznie dużą częstotliwością. Z przeprowadzonych doświadczeń wynika, że źródłem dźwięku są ciała drgające z odpowiednią częstotliwością.

Wzbudzanie drgań ciał wydających dźwięki może się odbywać w bardzo różny sposób. Przekonają nas o tym następane doświadczenia. Weźmy plastikowy grzebień oraz kawałek celofanu, używanego do pakowania kwiatów lub artykułów spożywczych. Zamiast celofanu możemy użyć kawałka cienkiej folii wyciętej z torebki do pakowania produktów w sklepach. Zegnijmy celofan na pół i nałóżmy go na zęby grzebienia w sposób pokazany na rysunku 1. Przyciśniemy końce celofanu do grzebienia palcami obu rąk i, trzymając grzebień przed sobą, przyłożmy go do ust. Dmuchaemy na celofan. Czy słyszemy przy tym jakieś dźwięki? Okazuje się, że tak. Ustami wyczuwamy przy tym drgania celofanu.

Do budowy instalacji elektrycznych używa się często plastikowych, karbowanych rurek. Kawałek takiej rurki o długości kilkudziesięciu centymetrów możemy kupić w sklepie z artykułami elektrotechnicznymi. Dmuchnijmy w koniec takiej rurki. Czy słyszemy przy tym jakieś dźwięki? Jeżeli do sklepu z artykułami elektrotechnicznymi mamy zbyt daleko, to w sklepach z zabawkami lub w kiosku można czasami spotkać tzw. grającą rurkę – kosztuje kilka złotych. Jest to również plastikowa, karbowana rurka zakończona z jednej strony prostopadłościenną, cienką komorą. Dmuchnijmy w tę komorę lub w drugi koniec rurki. Czy rurka wydaje jakieś dźwięki? Okazuje się, że zarówno rurka do budowy instalacji elektrycznej, jak i grająca rurka podczas dmuchania wydają dźwięki. Jest to spowodowane drganiami przepływającego przez rurki powietrza, które wytwarzane są, gdy powietrze trafia na karby. W obu rurkach dźwięki możemy wytworzyć jeszcze w inny, interesujący sposób. Jeden koniec rurki chwyćmy dłonią i wprawmy rurkę w ruch obrotowy, tak żeby drugi jej koniec zataczał okrąg. W tej sytuacji powietrze przepływa przez rurkę pod działaniem siły odśrodkowej i jest również wprawiane w drgania na karbach, wydając dźwięki.

Również w sklepach z zabawkami lub w kiosku można za kilka złotych kupić trąbkę fanfarową (fotografia). Budowę wewnętrzną w przekroju osiowym można zobaczyć na rysunku 2. Teleskopowa, trzyczęściowa rura o średnicy kilku centymetrów jest z jednej strony otwarta, z drugiej zaś strony jest zamknięta nasadką, pod którą znajduje się sprężysta, plastikowa membrana. Do zewnętrznej części rury przymocowany jest prostopadle ustnik. Opisana trąbka bardzo dobrze nadaje się do doświadczeń dotyczących wytwarzania dźwięków. Dmuchnijmy w ustnik



Rys. 3. Przyrząd do badania barwy dźwięku; c – prostokątne pudełko od margaryny, p – pokrywa pudełka, a – skręcona gumka aptekarska, b – gumka aptekarska prosta.

Wysokość dźwięku możemy również w prosty sposób zbadać za pomocą małych cymbałków używanych jako zabawka lub do nauki podstaw muzyki. Są one dostępne w sklepach muzycznych lub w sklepach z zabawkami. Składają się z szeregu metalowych sztabek o coraz mniejszej długości, przymocowanych luźno do plastikowej ramki. Do kompletu dołączone są dwie drewniane lub plastikowe pałeczki. Uderzmy jedną pałeczką w najdłuższą sztabkę, a następnie, po pewnym czasie, w najkrótszą. Co słyszymy w pierwszym i drugim przypadku? Czym różnią się oba dźwięki? Podobnie jak w przypadku trąbki fanfarowej, dźwięk uzyskany przy mniejszej długości jest wyższy niż przy długości większej. Dlaczego tak się dzieje? Zarówno w trąbce fanfarowej, jak i w cymbałkach powstają drgania. W trąbce są to drgania słupa powietrza i membrany, a w cymbałkach drgania metalowych sztabek. Im dłuższy jest słup powietrza lub sztabka, tym mniejsza jest częstotliwość ich drgań i niższy dźwięk.

Cymbałki mogą posłużyć nam także do wykrycia kolejnej właściwości dźwięku. Uderzmy lekko młoteczką w jedną sztabkę, najlepiej w jedną ze środkowych, i posłuchajmy wytworzonego dźwięku. Gdy uciwnie, uderzmy w tę samą sztabkę, ale mocno, i także posłuchajmy dźwięku. Czym różnią się oba dźwięki? Potocznie mówimy, że pierwszy dźwięk jest cichy, a drugi głośny. Fizycznie pierwszy dźwięk ma małe natężenie, co znaczy, że przenosi ze sobą małą energię w jednostce czasu – czyli moc – na jednostkę powierzchni. Drugi dźwięk ma duże natężenie, co oznacza, iż moc na jednostkę powierzchni przenoszona przez ten dźwięk jest duża. Głośność dźwięku też jest używana w fizyce, ale w innym znaczeniu. Będzie ona przedmiotem następnego, nieco trudniejszego, doświadczenia.

Uderzmy pałeczką w jedną ze sztabek cymbałków położoną blisko ich środka z umiarkowaną siłą i wsłuchajmy się uważnie w wytworzony dźwięk. Spróbujmy ocenić słuchem jego natężenie. Uderzmy następnie z możliwie taką samą siłą w najdłuższą sztabkę i dokonajmy ponownej oceny natężenia otrzymanego dźwięku. Powtórzmy jeszcze to doświadczenie z najkrótszą sztabką. Czy udało nam się usłyszeć jakąś różnicę w natężeniach? Natężenia trzech wytworzonych dźwięków są w przybliżeniu takie same, ale dźwięk ze środkowej sztabki wydaje się nieco głośniejszy niż pozostałe. Dlaczego tak się dzieje? Jest to spowodowane tym, że czułość ucha ludzkiego na dźwięki o tych samych natężeniach, ale o różnych częstotliwościach,

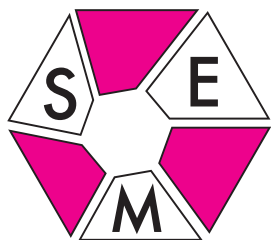
trąbki. Co słyszymy? Dotknijmy przy tym lekko membrany opuszką palca. Co wyczuwamy? Okazuje się, że trąbka podczas dmuchania wydaje donośny dźwięk. Dotykając membrany, czujemy drgania.

Trąbka fanfarowa posłuży nam do kolejnego doświadczenia. Wyciągnijmy wszystkie trzy części rury teleskopowej, tak żeby jej długość była maksymalna. Dmuchiemy w ustnik. Następnie wsuńmy do wewnątrz wszystkie części rury tak, aby uzyskać jej minimalną długość. Ponownie dmuchiemy z taką samą siłą w ustnik. Czym różnią się dźwięki wydawane przez trąbkę w pierwszym i drugim przypadku? W pierwszym przypadku dźwięk wydawany przez trąbkę był bardziej basowy, a w drugim przypadku bardziej piskliwy. Częstotliwość dźwięku w pierwszym przypadku była niższa niż w drugim, dlatego dźwięk pierwszy nazywa się niskim, a drugi wysokim. Jedną z cech, charakteryzujących dźwięk, jest jego wysokość. Jest to cecha do pewnego stopnia subiektywna. Jej obiektywną miarą jest częstotliwość dźwięku.

nie jest jednakowa. Przeciętne ucho największą czułość wykazuje dla dźwięków o częstotliwości około 3000 Hz.

Dźwięki wykazują jeszcze jedną właściwość, która nazywana jest... barwą. Żeby ją wyjaśnić, zbudujemy prosty przyrząd złożony z prostokątnego pudełka od margaryny lub masła roślinnego i dwóch gumek aptekarskich, pokazany na rysunku 3. W pokrywie pudełka wycinamy nożyczkami okrągły otwór o średnicy około 3 cm. Zamykamy pudełko pokrywką i naciągamy na nie dwie jednakowe gumki aptekarskie. Obie gumki powinny być tak samo naprężone i zajmować położenie symetryczne względem otworu. Wprawmy po kolei gumki w drgania przez potrącenie palcem z taką samą siłą i w tym samym miejscu ich odcinków znajdujących się nad otworem. Czy słyszymy jakąś różnicę w wytwarzanych dźwiękach? Następnie jedną z gumek skręćmy kilkanaście razy wokół jej podłużnej osi i wprawmy po kolei gumki w drgania w poprzednio opisany sposób. Wsłuchajmy się uważnie w wytwarzane dźwięki. Czy tym razem uda nam się usłyszeć jakąś różnicę? O ile w pierwszej części doświadczenia słyszeliśmy jednakowe dźwięki, to w drugiej części brzmiały one nieco inaczej, ponieważ różniły się barwą.

Barwa dźwięku polega na występowaniu w nim dodatkowych drgań o częstotliwości wyższej niż częstotliwość podstawowa, decydująca o wysokości dźwięku. W naszym doświadczeniu te dodatkowe drgania występowały w wyniku skręcenia gumki. Dzięki barwie możemy odróżnić dźwięki o tej samej wysokości wydawane przez różne instrumenty muzyczne lub różne osoby. Mówi się czasem, że ktoś ma „miękki” lub „ciepły” głos. Łatwo dostępnym instrumentem jest flet prosty, używany w nauczaniu podstaw muzyki już w przedszkolu. Wykonany z plastiku lub z drewna, dostępny jest w sklepach muzycznych lub sklepach z zabawkami, z pamiątkami ludowymi albo na aukcjach internetowych. Postarajmy się o flety plastikowy i drewniany o tej samej długości i takim samym rozmieszczeniu otworów. Czy wsłuchując się uważnie w dźwięki o tej samej wysokości, potrafimy na podstawie ich barwy odpowiedzieć, który z nich jest wydawany przez flet plastikowy, a który przez drewniany? Spróbujmy opisać, czym charakteryzują się barwy dźwięku pochodzące z obu instrumentów.



## Dziwne czworościany

We wrześniu br. ukazała się w sprzedaży broszura *II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów* (2006/2007). Publikacja zawiera szczegółowe omówienie wszystkich zadań tych zawodów oraz dwa dodatki tematyczne: *Nierówność Schwarza* (autor: Tomasz Szymczyk) oraz *Twierdzenie Carnota* (autorzy: Wojciech Guzicki i Waldemar Pompe).

Treść jednego z zadań tej olimpiady brzmiała:

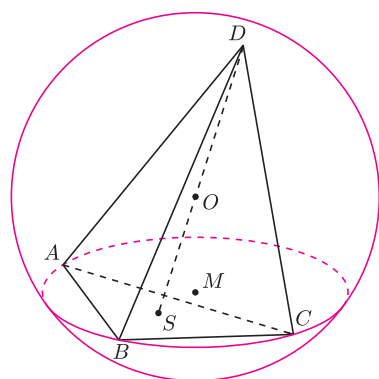
*Czy istnieje taki czworościan, w którym co najmniej jedna ściana jest trójkątem rozwartokątnym, a środek sfery opisanej na tym czworościanie leży w jego wnętrzu? Odpowiedź uzasadnij.*

Okazuje się, że taki czworościan istnieje. Pokażemy, jak go skonstruować.

Rozpatrzmy sferę o środku  $O$  i dowolny okrąg o promieniu mniejszym od promienia sfery, leżący na tej sferze (rysunek). Wybierzmy na tym okręgu punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$  tak, aby trójkąt  $ABC$  był rozwartokątny (czyli nie zawierał środka  $M$  tego okręgu). Niech  $S$  będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta  $ABC$  (np. jego środkiem ciężkości). Oznaczmy przez  $D$  punkt przecięcia półprostej  $SO$  ze sferą. Wówczas czworościan  $ABCD$  spełnia warunki zadania: ściana  $ABC$  jest trójkątem rozwartokątnym, a środek sfery opisanej na tym czworościanie, czyli punkt  $O$ , leży wewnątrz czworościanu  $ABCD$ .  $\square$

A czy istnieje taki czworościan, którego *co najmniej dwie* ściany są trójkątami rozwartokątnymi i którego środek sfery opisanej leży w jego wnętrzu? Ile najwięcej ścian będących trójkątami rozwartokątnymi może mieć taki czworościan?

Piszcie do nas! Najciekawsze prace opublikujemy.



## Olimpiady Matematyczne

W połowie sierpnia został rozstrzygnięty przez Ministerstwo Edukacji Narodowej konkurs na organizację olimpiad przedmiotowych w roku szkolnym 2009/2010. Organizacja Olimpiady Matematycznej i Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów została powierzona SEM.

- Zarząd SEM powołał Komitet Główny Olimpiady Matematycznej, w składzie:

prof. dr hab. Rafał Latała – przewodniczący,  
dr Michał Krych – wiceprzewodniczący,  
dr Marcin Kuczma – sekretarz naukowy,  
dr Jerzy Bednarczuk, dr hab. Krzysztof Chełmiński, mgr Paulina Domagalska,  
mgr Kamil Duszenko, prof. dr hab. Andrzej Fryszkowski, mgr Andrzej Grzesik,  
Michał Kieza (student), dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr Adam Osękowski,  
Michał Pilipeczuk (student), mgr Jakub Pochrybniak, dr Waldemar Pompe,  
prof. dr hab. Edmund Puczyłowski, dr hab. Michał Wojciechowski,  
prof. dr hab. Przemysław Wojtaszczyk, dr Jarosław Wróblewski.

Informacje o Olimpiadzie Matematycznej można znaleźć na stronie [www.om.edu.pl](http://www.om.edu.pl)

- Zarząd SEM powołał też Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, w składzie:

prof. dr hab. Edmund Puczyłowski – przewodniczący,  
mgr Tomasz Szymczyk – koordynator krajowy,  
dr Waldemar Pompe – sekretarz naukowy,  
dr Jerzy Bednarczuk, mgr Paulina Domagalska, prof. dr hab. Andrzej Fryszkowski,  
dr hab. Wojciech Guzicki, mgr Joanna Zakrzewska.

Informacje o Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów można znaleźć na stronie [www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl)

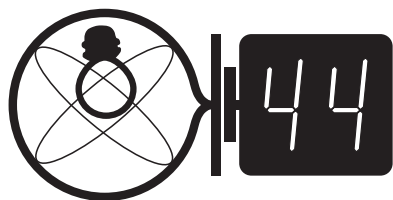
## Klub 44



## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.



### Zadania z fizyki nr 486, 487

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**486.** Gdy spojrzeć w lustro, zamknąć prawe oko i naszkicować, jak widzimy swoją twarz, powstanie obraz schematycznie przedstawiony na rysunku obok.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2010



1. Zestawić dwa prostokątne lusterka pod kątem prostym, zamknąć prawe oko i naszkicować obraz twarzy powstający przy dwukrotnym odbiciu światła w lusterkach. (Obraz z dwoma nosami lub w ogóle bez nosa oznacza, że kąt nie był prosty.) Obracać przed sobą zestaw wokół osi pokrywającej się z kierunkiem widzenia i notować zmiany obrazu.

2. Zestawić trzy prostokątne lusterka tak, żeby tworzyły narożnik sześcianu, zamknąć prawe oko i naszkicować obraz twarzy powstający przy trzykrotnym odbiciu światła. Obracać przed sobą zestaw i notować zmiany obrazu.

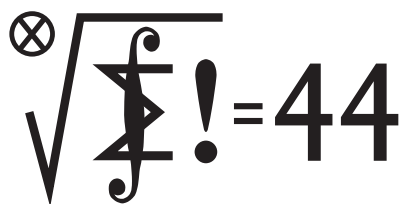
(3. Dokładnie posprzątać rozbite szkło.)

**487.** Na końcach nieważkiego pręta o długości  $l = 1$  m znajdują się dwie jednakowe masy punktowe. Pręt jest podtrzymywany w środku, wokół którego może się swobodnie obracać, i znajduje się w polu grawitacyjnym Ziemi, które uznajemy za takie, jakby cała masa Ziemi była skupiona w jej środku. Obliczyć okres małych drgań pręta wokół pionowego położenia równowagi.

Jaka będzie odpowiedź, jeśli pręt jest jednorodny, a pozostałe dane – niezmiennione?

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
476 ( $WT = 2,65$ ) i 477 ( $WT = 3,25$ )  
z numeru 4/2009

Tomasz Wietecha	Tarnów	43,22
Andrzej Idzik	Bolesławiec	37,42
Krzysztof Magiera	Łosiów	30,37
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	28,18
Radosław Poleski	Kołobrzeg	23,47
Michał Koźlik	Gliwice	18,13
Jerzy Witkowski	Radlin	16,54



### Zadania z matematyki nr 589, 590

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
577 ( $WT = 1,95$ ) i 578 ( $WT = 2,39$ )  
z numeru 3/2009

Paweł Najman	Jaworzno	43,32
Tomasz Warszawski	Kraków	42,26
Zbigniew Galias	Kraków	42,05
Janusz Olszewski	Warszawa	38,35
Jerzy Cisło	Wrocław	37,87
Tomasz Wietecha	Tarnów	35,05

**589.** W każde pole tabelki o wymiarach  $n \times n$  wpisujemy dodatnią liczbę całkowitą nie większą od  $n$  tak, by w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie wszystkie liczby były równe lub wszystkie liczby były różne. Niech  $S$  będzie sumą wszystkich liczb w tabelce. Ile różnych wartości  $S$  można w ten sposób uzyskać (dla ustalonego  $n$ )?

**590.** Dowieść, że dla każdej parzystej liczby naturalnej  $n$  oraz dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  zachodzi nierówność

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n \leq \frac{1+x+\dots+x^n}{n+1}.$$

Zadanie 590 zaproponował pan Tomasz Tkocz z Rybnika.



### Rozwiązanie zadania F 752.

Moc prądu, przechodząca w ciepło na podłączonym oporniku, jest w każdej chwili proporcjonalna do kwadratu napięcia na kondensatorze  $U_C^2$ , czyli energii kondensatora. Stąd wynika, że w każdej chwili energia kondensatora zmniejsza się tak, że

$$\frac{\Delta E_1}{E_1} = \frac{\Delta E_2}{E_2}.$$

W oznaczeniach naszego zadania

$$E_1 = \frac{1}{2}CU_0^2, \quad \Delta E_2 = W_2,$$

$$\Delta E_1 = W_1, \quad E_2 = E_1 - \Delta E_1,$$

zatem

$$\frac{W_1}{E_1} = \frac{W_2}{E_1 - W_1},$$

stąd

$$E_1 = \frac{W_1^2}{W_1 - W_2}.$$

Zatem

$$C = \frac{2E_1}{U_0^2} = \frac{2W_1^2}{U_0^2(W_1 - W_2)} \approx 280 \mu\text{F}.$$

## Patrz w niebo

Od dawna wiemy, że gromady galaktyk wypełnione są bardzo rzadkim i bardzo gorącym (o temperaturze dziesiątków milionów kelwinów) gazem świecącym w zakresie rentgenowskim. Najpotężniejszym rentgenowskim źródłem na niebie jest gromada zwana Perseusz A, odległa o 80 Mpc. Kilka lat temu grupa angielskich astronomów za pomocą rentgenowskiego satelity Chandra uzyskała wyjątkowo ostre obrazy centralnych części gromady. Na zdjęciu zaobserwowano w szczególności liczne włókna zgęszczonego gazu wokół centrum największej aktywnej galaktyki gromady, NGC 1275, zawierającej supermasywną czarną dziurę. Czarna dziura emituje dwie wielkie strugi (dżety), które w otaczającym je gazie wytwarzają dwa bąble. Ten dość standardowy obraz zinterpretowano jednak w nie całkiem standardowy sposób, co ma ważne konsekwencje.

Bąble powstające na końcach dżetów muszą od czasu do czasu być niszczone wskutek ruchu samego gazu w galaktyce i są po jakimś czasie odtwarzane. Wszystko to powoduje, że w galaktyce powstaje skomplikowana struktura włókien zgęszczonego gorącego gazu, które biorą udział w obrocie galaktyki i zarazem wędrują ku jej krawędzi. Biegające przez galaktykę zgęszczenia i rozrzedzenia gazu to ostatecznie nic innego jak dźwięk, nawet gdy jego fala ma długość liczoną w kiloparsekach. Częstość tych fal oszacowano na 1 cykl na 10 mln lat. Media, gdy dowiedziały się o tym odkryciu, doniosły podobno, że czarna dziura w NGC 1275 buczy (wyje? trąbi?) pewien ton w przybliżeniu o 57 oktaw poniżej zakresu słyszalnego. Oczywiście, nieważne jest, jak efektywnie to zjawisko opisać, ważne jest natomiast, że fale dźwiękowe niosą energię, która w tym przypadku została oceniona na 100 mln przeciętnych supernowych dla jednego włókna. Jest to więc energia po prostu duża, jej źródłem jest, oczywiście, owa supermasywna czarna dziura, a przedstawione tu niemal poetycko zjawisko to mechanizm odprowadzania energii z czarnej dziury. Mechanizm ten wydaje się nie do pominięcia przy modelowaniu ewolucji aktywnych galaktyk.

Tomasz KWAST

## Listopad

W listopadowe wieczory – o ile, oczywiście, jest dobra pogoda – nie można nie zerknąć w kierunku Wielkiej Mgławicy Andromedy, najbliższej „innej” galaktyki (jeżeli nie liczyć niewidocznych z Polski Obłoków Magellana). Ta bez trudu dostrzegalna galaktyka przesuwana się wieczorem w pobliżu zenitu, dzięki czemu warunki jej obserwowania są najlepsze. Na północ od Andromedy znajdziemy Kasjopeję, której pięć dość jasnych gwiazd układa się w poszerzoną literę W lub M – nie sposób nie zauważyć. Jest to gwiazdozbiór okołobiegunowy, czyli widać go przez cały rok, niemniej właśnie jesienią znajduje się wieczorami blisko zenitu. Ponieważ leży w Drodze Mlecznej, każde spojrzenie przez lornetkę daje wspaniały widok. Wyjątkowymi tam obiektami – niestety, niewidocznymi – są: radioźródło Cassiopeia A, tj. pozostałość po supernowej z roku około 1700, która wskutek zbiegu okoliczności w ogóle nie została zarejestrowana w kronikach, oraz galaktyka Maffei 1 widoczna tylko w podczerwieni, gdyż przesłania ją warstwa „naszej” materii międzygwiazdowej (nazwa galaktyki to nazwisko włoskiego astronoma, który ją odkrył w 1968 roku).

Wenus jest w Wadze, jak i Słońce, zatem jej nie widać. Mars jest w Raku i widać go przez całą noc. Jowisz jest w Koziorożcu i wieczorem zachodzi. Saturn jest w Pannie i wschodzi bardzo późną nocą. Pełnia Księżyca wypada 2 XI, a nów 16 XI. Żadnych zakryć jasnych gwiazd nie będzie – w październiku skończyła się seria zakryć Antaresa, a żadna nowa nie zaczęła się. Przewiduje się trzy roje meteorów: Taurydów około 7 XI, Leonidów około 15 XI i Andromedydów około 23 XI, wszystkie jednak mało obfite. Tak więc listopad będzie ubogi w zjawiska; zresztą w listopadzie niebo na ogół i tak jest zachmurzone...

T. K.



### Rozwiązanie zadania M 1260.

Jeśli liczba  $2^n + n^2$  jest liczbą pierwszą,  $n$  musi być liczbą nieparzystą. Pozostaje zatem wykazać, że liczba  $n$  jest podzielna przez 3.

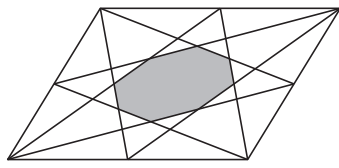
Ponieważ dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $k$  jest  $2^{2k} \equiv 1 \pmod{3}$ , więc także  $2^{2k+1} \equiv 2 \pmod{3}$ . Stąd wynika, że liczba  $2^n - 2$  jest podzielna przez 3. Wobec tego liczba  $n^2 + 2$  nie może być podzielna przez 3 (w przeciwnym razie liczba  $(2^n - 2) + (n^2 + 2) = 2^n + n^2$  nie byłaby liczbą pierwszą). To jednak możliwe jest jedynie wtedy, gdy liczba  $n$  jest podzielna przez 3.



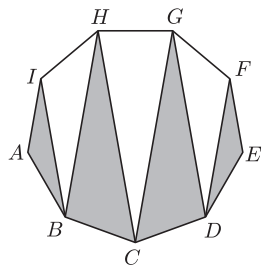
## Jesienne wielokąty

Joanna JASZUŃSKA

Oto dziesięć zadań na długie jesienne wieczory.



Rys. 1



Rys. 2

1. Każdy wierzchołek **jedenastokąta** pomalowano jednym z czterech kolorów. Udowodnij, że można wybrać pięć kolejnych wierzchołków, pomalowanych co najwyżej trzema kolorami.

2. Wykaż, że w **dwunastokącie** foremnym  $A_1A_2 \dots A_{12}$  przekątne  $A_1A_6$ ,  $A_2A_9$  i  $A_3A_{11}$  przecinają się w jednym punkcie.

3. Udowodnij, że środkowe dowolnego **trójkąta** dzielą go na sześć trójkątów o równych polach.

4. Wykaż, że środki boków dowolnego **czworokąta** tworzą równoległobok.

5. Przekątne  $AC$  i  $BD$  **pięciokąta** foremnego  $ABCDE$  przecinają się w punkcie  $P$ . Oblicz  $CP/AP$ .

6. **Sześciokąt** wypukły ma wszystkie kąty po  $120^\circ$ . Czy musi być foremny?

7. Wykaż, że w **siedmiokącie** foremnym  $S = ABCDEFG$  zachodzi równość

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

8. W równoległoboku o polu 1 poprowadzono wszystkie odcinki łączące wierzchołki ze środkami boków. Wyznacz pole szarego **ośmiokąta** (rys. 1).

9. **Dziewięciokąt** z rysunku 2 jest foremny. Która część ma większe pole, biała czy szara?

10. W każdym wierzchołku **dziesięciokąta** foremnego rośnie drzewo. Początkowo na każdym drzewie siedzi małpa. Co minutę pewne dwie małpy przeskakują, każda na któreś z dwóch sąsiednich drzew. Czy wszystkie małpy mogą znaleźć się jednocześnie na jednym drzewie?

## Rozwiązania i wskazówki

1. Któryś kolorem pomalowano najwyżej dwa wierzchołki (bo  $3 \cdot 4 > 11$ ). Jeśli zero lub jeden, to nie ma problemu. Jeśli dwa, to któraś z dwóch łączących je łamanych zawiera co najmniej pięć z pozostałych dziewięciu wierzchołków.  $\square$

2. Są to wysokości w  $\triangle A_2A_6A_{11}$  (inne rozwiązanie: dwusieczne w  $\triangle A_1A_3A_9$ ).  $\square$

3. Środkowe dzielą boki na połowy i przecinają się w stosunku  $2 : 1$ . Stąd każdy z sześciu trójkątów ma jeden bok będący połową odpowiedniego boku całego trójkąta  $T$  i wysokość opuszczoną na ten bok trzykrotnie krótszą od odpowiedniej wysokości  $T$ . Zatem pole każdego z nich to  $1/6$  pola  $T$ .  $\square$

4. Sprawdź, że odcinek łączący środki boków  $AB$  i  $BC$  danego czworokąta jest równoległy do przekątnej  $AC$ .  $\square$

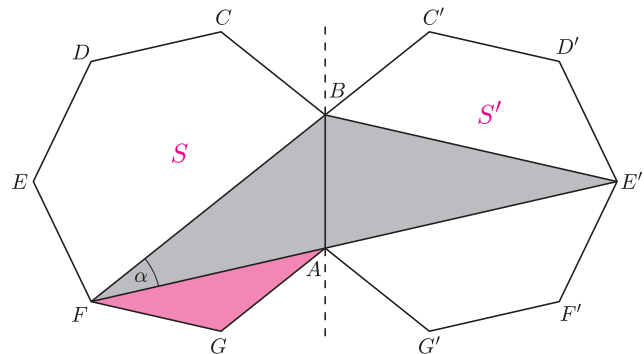
5. Wykaż kolejno, że  $AP = PD = DE = CD$ , że  $\triangle ACD \sim \triangle DPC$  i że

$$\frac{CP}{AP} = \frac{AP}{AC} = \frac{AP}{AP + PC} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \square$$

Punkt  $P$  wyznacza tak zwany **złoty podział** odcinka  $AC$ .

6. Nie. Może nawet mieć każdy bok innej długości.  $\square$

7. Kąt  $\alpha = \sphericalangle AFB$  jest wpisany w okrąg opisany na  $S$ , oparty na krótszym z łuków  $AB$ , więc  $\alpha = 180^\circ/7$ . Stąd  $\sphericalangle FAB = 4\alpha$ . Niech  $S' = ABC'D'E'F'G'$  będzie obrazem  $S$  w symetrii względem prostej  $AB$  (rys. 3). Wtedy  $\sphericalangle BAE' = 3\alpha$ , więc  $\sphericalangle FAE' = \sphericalangle FAB + \sphericalangle BAE' = 4\alpha + 3\alpha = 7\alpha = 180^\circ$ . Stąd punkty  $F, A, E'$  są współliniowe. Ponieważ  $S$  i  $S'$  są foremne i przystające, zachodzą warunki:  $BF \parallel GA$ ,  $BE' \parallel AE \parallel GF$  oraz  $BF = BE'$ .



Rys. 3

Uzyskujemy zatem  $\triangle BFE' \sim \triangle GAF$ . Wobec tego

$$\frac{BF}{GA} = \frac{FE'}{AF} = \frac{AE' + AF}{AF} = \frac{AE'}{AF} + 1.$$

Skoro  $BF = AD$ ,  $GA = AB$ ,  $AE' = AD$  i  $AF = AC$ , dostajemy

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AC} + 1, \quad \text{a stąd} \quad \frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}. \square$$

8. Dorysuj przekątne równoległoboku, połącz wszystkie środki boków i wykorzystaj zadanie 3. Wynik:  $1/6$ .  $\square$

9. Szara. Dorysuj przekątne  $AH$ ,  $BG$ ,  $CF$  i znajdź sześć par trójkątów przystających różnych barw i jeszcze jeden szary.  $\square$

10. Nie. Niech co drugie drzewo będzie palmą. Początkowo siedzi na nich łącznie pięć małp. Liczba małp siedzących na palmach nie zmienia parzystości, więc nigdy nie będzie równa 0 ani 10.  $\square$