






SPIS TREŚCI NUMERU 9 (424)

Czas na czas <i>Krzysztof Turzyński</i>	str. 1
Kosmiczna linijka 9. Galaktyka aktywna M87 <i>Bożena Czerny, Agnieszka Janiuk</i>	str. 3
Do czego komputer nigdy się nie przyda? <i>Tomasz Kazana</i>	str. 4
 Rozeta katedry w Metz – ciąg dalszy <i>Wojciech Guzicki</i>	str. 6
Konkurs zadań astronomicznych	str. 8
 Zadania	str. 8
Olimpiada	str. 9
Informatyczny kącik olimpijski (23): Haszowanie <i>Tomasz Kulczyński</i>	str.13
Jak znaleźć najlepszą żonę? <i>Andrzej Grzesik</i>	str.14
Logarytm w liczbach naturalnych <i>Jan Szejko</i>	str.16
 Rzutów ciąg dalszy, czyli badamy rzut ukośny <i>Stanisław Bednarek</i>	str.18
Aktualności	str.20
 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.21
Klub 44	str.22
Patrz w niebo	str.24
Wrzesień	str.24
 Dzielenie figur raz jeszcze <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński, Andrzej Walat, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-639-73-67)

internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2009 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2009 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 0-804-200-600

Cena prenumeraty w 2009 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

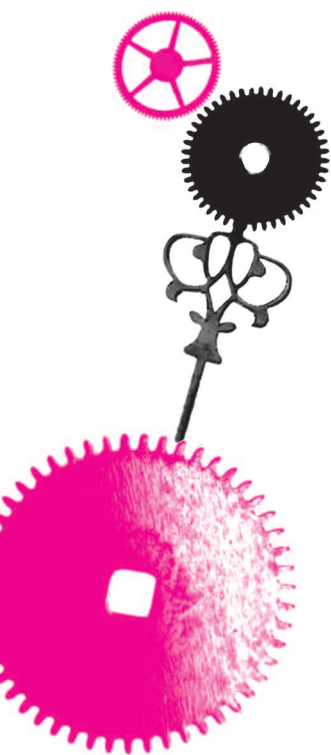
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

O programach współbieżnych



Czas na czas

Krzysztof TURZYŃSKI

Skończyły się wakacje w szkołach, już niebawem zacznie się rok akademicki na uczelniach. Tylko patrzeć, a nadejdą słotne jesienne wieczory. Wszystkie te okoliczności sprzyjają chwili zadumy nad upływem czasu i jego naturą.

Stąd do wieczności

Poczynione w ostatnich latach obserwacje kosmologiczne wydarły Wszechświatowi wiele z jego sekretów. Postawiły one również przed ludzkością szereg pytań i wyzwań. Na przykład, czy tempo rozszerzania się Wszechświata zwiększa się i będzie zwiększać się zawsze, jak przewiduje to najprostszy model kosmologiczny? Jeśli tak, to fragment Wszechświata, z którego kiedykolwiek w przyszłości dotrą do nas jakiegokolwiek sygnały, jest ograniczony i, co gorsza, wciąż się zmniejsza.

Skoro obszar, z którym kiedykolwiek wejdziemy w kontakt, na przykład, czerpiąc zeń energię, jest skończony, to skończona jest także całkowita ilość energii pozostająca do dyspozycji ludzkości. Przypuszczając, że istnienie jakichkolwiek form życia wymaga dostarczania pewnej minimalnej mocy, dochodzimy do wniosku, że po upływie dostatecznie długiego czasu ów fragment Wszechświata ziać będzie zimną i martwą pustką. I chociaż pewnym pocieszeniem jest to, że odpowiednie skale czasowe liczy się w miliardach lat, to intuicyjne założenie, że przyszłość, w której działo się będzie coś interesującego, nigdy się nie skończy, wcale nie musi być prawdziwe.

Administracyjna względność czasu

Wróćmy jednak na razie gdzieś bliżej naszego dużo bardziej ograniczonego wycinka czasoprzestrzeni i wyobraźmy sobie następującą sytuację. Rada Ministrów lub zgoda Komisja Europejska wydaje okólnik lub dyrektywę, że od najbliższego poniedziałku ludzie reprezentowani przez owo ciało mają wstawać o godzinę później, co pozwoli na zaoszczędzenie energii i poprawę samopoczucia wskutek lepszego wykorzystania światła słonecznego. Czy dałoby się uniknąć zamieszek zwolenników dłuższego spania z przeciwnikami mieszania się rządu w sekrety alkowy, takie jak pora nastawienia budzika?

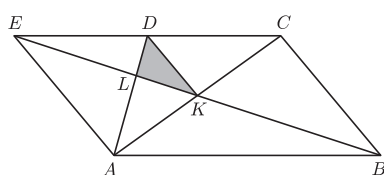
Odpowiednie rozporządzenie wszakże istnieje i jest posłusznie wykonywane – każdej wiosny przestawiamy zegarki o godzinę do przodu i cofamy je o godzinę każdej jesieni. Dzień zmiany czasu jest jednakowy w całej Europie, ale mieszkańcy tych hrabstw Stanów Zjednoczonych, które zdecydowały się wprowadzić zmianę czasu z zimowego na letni (i odwrotnie), cieszą się tym ostatnim mniej więcej o miesiąc dłużej niż Europejczycy. W niektórych zaś miejscach, np. w tych częściach stanu Arizona, które nie są rezerwatami indiańskimi, czasu z zimowego na letni nie zmienia się w ogóle.

Dni, których nigdy nie było

Nawet definicje powszechnie używanych jednostek czasu – roku, dnia czy sekundy – mogą prowadzić do kłopotów. Jednym z najbardziej spektakularnych wydarzeń pokazujących niedoskonałości ludzkiego definiowania czasu była reforma kalendarza wprowadzona w 1582 roku przez papieża Grzegorza XIII. Miała ona na celu przeciwdziałanie oddalaniu się świąt Wielkanocy od równonocy wiosennej, czyli chwili, kiedy oś obrotu Ziemi tworzy kąt prosty z linią łączącą środki Słońca i Ziemi. W nowym kalendarzu rok zwykły liczy 365 dwudziestoczwierogodzinnych dni, a co cztery lata, ale nie w latach o numerach podzielnych przez 100 i niepodzielnych przez 400, wypada rok przestępny, w którym dodajemy dodatkowo jeden dzień – 29 lutego. To „wypadanie” niektórych lat przestępnych różni kalendarz gregoriański od kalendarza juliańskiego, wprowadzonego przez Juliusza Cezara, w którym co czwarty rok jest przestępny. Średnia długość roku w kalendarzu gregoriańskim wynosi zatem 365,2425 dnia, różniąc się o 0,0075 dnia od średniej długości roku w kalendarzu juliańskim, i stanowi dobre przybliżenie czasu upływającego między kolejnymi równonocami wiosennymi.



Rozwiązanie zadania M 1253.
Niech E będzie punktem przecięcia prostych CD i BK .



Wówczas na mocy twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{CE}{AB} = \frac{CK}{KA} = 1,$$

skąd wynika, że czworokąt $ABCE$ jest równoległobokiem, a ponieważ $AB : CD = 2$, więc $DE = CD$. Ponadto

$$(*) \quad \frac{DL}{LA} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Oznaczmy przez $[F]$ pole figury F oraz niech $[DKL] = x$. Wówczas, na mocy równości (*), jest $[AKL] = 2x$. Ponieważ punkt K jest środkiem przekątnej AC , więc $[CDK] = [ADK] = 3x$, a to oznacza, że $[ACD] = 6x$.

Z drugiej strony, korzystając z warunku $AB : CD = 2$, wnioskujemy, że $[ACD] = \frac{1}{3}[ABCD] = \frac{1}{3}$. Stąd $6x = \frac{1}{3}$, czyli $x = \frac{1}{18}$. Ostatecznie pole czworokąta $KCDL$ wynosi $x + 3x = 4x = \frac{2}{9}$.



Reforma gregoriańska, wyrzucając z kalendarza daty od 5 do 14 października 1582 roku, usunęła opóźnienie Wielkanocy, jakie narosło od czasu soboru nicejskiego w 325 roku. Zgromadzenie owo przyjęło z kolei datę równonocy wiosennej wypadającą na 21 marca, kompensując 3 dni różnicy, jakie narosły od wprowadzenia kalendarza juliańskiego do soboru. Nietrudno zauważyć, że cały opisany wyżej kłopot z Wielkanocą spowodowany jest tym, że stosunek długości roku do długości doby – które to długości nie są wcale jednoznacznie zdefiniowane, o czym dalej – nie jest liczbą całkowitą.

Czym jest rok?

Jeżeli przyjmiemy definicję roku jako czasu upływającego od jednej równonocy wiosennej do następnej (tzw. rok zwrotnikowy), to wtedy czas, jaki Ziemi zabiera pełny obieg wokół Słońca, nie jest równy jednemu rokowi! Powodem tego jest fakt, że oś obrotu Ziemi nie wskazuje stałego kierunku w przestrzeni, ale obraca się zwolna, a obrót taki ma okres około 26 tysięcy lat. Kolejne równonocy wiosenne nie występują zatem dokładnie w tych samych „miejscach” orbity ziemskiej, co oznacza, że układ gwiazdozbiorów na niebie przesuwa się powoli z okresem owych 26 tysięcy lat. Ponieważ nie prowadzi to w praktyce do żadnych nieporozumień, ludzkość uznała, że życie z taką anomalią jest całkowicie znośne. Podstawowym efektem owego przesuwania się gwiazdozbiorów jest fakt, że chociaż Słońce w czasach starożytnych znajdowało się podczas przesilenia letniego w gwiazdozbiorze Raka (od czego czerpie do dziś swą nazwę zwrotnik Raka), dziś tłem tego zdarzenia jest pogranicze Byka i Bliźniąt.

Czym jest doba?

Jednym ze sposobów zdefiniowania doby jest stwierdzenie, że składa się ona z $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$ sekund, które są podstawowymi jednostkami czasu. Od 1967 roku sekunda jest określona jako 9 192 631 770 okresów fali elektromagnetycznej emitowanej przy przejściu pomiędzy dwoma nadsubtelnie rozszczepionymi poziomami energetycznymi stanu podstawowego atomu cezu 133.

Taka dwudziestoczworgodzinna doba nie jest równa okresowi obrotu Ziemi wokół własnej osi! Okres ten wynosi 23 godziny 56 minut i 4,1 sekundy, co stanowi niemal $364/365$ części doby. Różnica bierze się z tego, że pełen obieg Ziemi wokół Słońca „dodaje” rocznie dodatkowy dzień w stosunku do dni wynikających z samego obrotu Ziemi. Rzeczywiście, gdyby Ziemia nie obracała się w ogóle wokół własnej osi, dany punkt Ziemi przez pół roku zwrócony byłby w stronę Słońca, przez pozostałe pół zaś krył się w cieniu, co dawałoby jedną, bardzo długą dobę.

Co gorsza, tempo obrotu Ziemi wokół własnej osi nie jest stałe, doba wydłuża się mniej więcej o 2 milisekundy na dzień na stulecie. Różnicę pomiędzy czasem atomowym, definiującym sekundę, a czasem astronomicznym możemy próbować skompensować, dodając niekiedy, średnio co 430 dni, sekundy przestępne. Powoduje to narastanie różnicy między międzynarodowym czasem atomowym (*International Atomic Time*, w skrócie określanym francuskim akronimem TAI) a wprowadzonym w 1972 roku uniwersalnym czasem koordynowanym (*Universal Coordinated Time*, UTC). Oba wzorce czasu są nam potrzebne, gdyż ważne jest zarówno bardzo dokładne mierzenie odległości czasowych, jak i posiadanie wzorca czasu zgodnego z ruchem Słońca po niebie. Obecnie różnica wskazań między UTC a TAI wynosi 34 sekundy.

Nadzorowaniem UTC zajmuje się *International Earth Rotation Service* (IERS) w Paryżu. Organizacja ta decyduje o tym, czy na koniec każdego 30 czerwca i 31 grudnia czasu UTC (czyli odpowiednio po pierwszej godzinie 1 lipca i drugiej godzinie 1 stycznia czasu obowiązującego w Polsce) należy dodać sekundę przestępną, by pozostać w zgodzie z prędkością obrotu Ziemi. Ostatnia, jak dotąd, sekunda przestępna została dodana do UTC po 31 grudnia 2008 r.

Co dalej?

Opisane przykłady świadczą o tym, że określanie jednostek czasu wcale nie jest tak oczywistą sprawą, jak to się zazwyczaj wydaje. Czy obserwacja ta może zatem służyć np. jako wymówka na wypadek spóźnienia? Osądź to sam, Czytelniku Wnikliwy.



Rozwiązanie zadania M 1254.

Wykażemy, że takie kolorowanie jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest podzielna przez 3.

Przyjmijmy, że n jest liczbą podzielną przez 3, oraz niech

$$A_1 A_2 \dots A_{3k} A'_1 A'_2 \dots A'_{3k}$$

będzie danym graniastosłupem. Wówczas kolorujemy wierzchołki A_1 i A'_1 na żółto, A_2 i A'_2 na zielono, A_3 i A'_3 na niebiesko, A_4 i A'_4 na żółto, itd. Takie pokolorowanie spełnia warunki zadania.

Przyjmijmy z kolei, że wierzchołki graniastosłupa pokolorowano zgodnie z warunkami zadania na trzy kolory: żółty, zielony i niebieski. Każdemu żółtemu wierzchołkowi Z przyporządkujemy wierzchołek zielony, który jest połączony krawędzią z wierzchołkiem Z . Wówczas odwzorowanie to jest wzajemnie jednoznaczne: każdemu wierzchołkowi żółtemu przypisano tylko jeden wierzchołek zielony, a ponadto żaden zielony wierzchołek nie jest przypisany dwóm żółtym.

Wobec tego żółtych i zielonych wierzchołków jest tyle samo. Analogiczne stwierdzenie dowodzimy dla kolorów niebieskiego i zielonego. Zatem liczba wierzchołków graniastosłupa, czyli $2n$, jest podzielna przez 3, skąd bezpośrednio wynika, że liczba n jest podzielna przez 3.

Kosmiczna linijka

9. Galaktyka aktywna M87. Odległość 16 Mpc (4 Mpc na linijce)

Galaktyka o numerze 87 z katalogu Messiera, czyli M87, jest najjaśniejszą, a zarazem centralną galaktyką w gromadzie galaktyk Virgo, widocznej w gwiazdozbiornie Panny. Nasz Układ Lokalny też należy do tej gromady galaktyk, ale znajduje się na jej dalekich peryferiach, więc światło od tej galaktyki biegnie do nas aż 55 milionów lat.

M87 jest ogromną galaktyką eliptyczną i zawiera znaczną liczbę gromad kulistych: jest ich ponad 12 tysięcy (dla porównania: w Drodze Mlecznej mamy ich 100 razy mniej).

W 1918 roku amerykański astronom Heber Curtis zauważył, że z jądra galaktyki M87 emitowany jest zagadkowy promień świetlny, będący, jak się okazało, strugą świecącego gazu. Strugi takie, wyrzucane przez jądra galaktyk (a także przez inne obiekty kosmiczne, na przykład, układy podwójne gwiazd zawierające czarną dziurę, tzw. mikrokwazary), nazywane są dżetami. Dżet w M87 świeci w zakresie rentgenowskim, optycznym i radiowym, obserwacje zaś z Teleskopu Hubble'a pokazały jego pozornie nadświetlną prędkość (jest to efekt czysto geometryczny, wynikający z tego, że obserwator widzi jedynie rzut prostopadły źródła światła, które porusza się na niebie z liniową prędkością bardzo bliską c , ale nie większą). Ostatnio obserwacje wykonane przez teleskop Czerenkowa HESS pokazały, że dżet w M87 jest również źródłem silnej emisji fotonów o energiach rzędu TeV.

Mechanizm wyrzucania dżetu z okolicy jądra galaktyki nie został jeszcze do końca zbadany i stanowi obecnie przedmiot żywego zainteresowania astronomów. Bez wątplenia, bardzo ważne jest to, że galaktyka M87 zawiera w swoim centrum olbrzymią czarną dziurę, której masa szacowana jest na $3,4 \cdot 10^9$ mas Słońca. Czarna dziura pochłania ze swojego otoczenia materię, która, jeśli ma odpowiednio dużo momentu pędu, to spiraluje do centrum po coraz ciasniejszych orbitach. Tworzy się wówczas dysk akrecyjny, który kosztem energii grawitacyjnej nagrzewa się do temperatur rzędu milionów stopni Kelwina, a jego promieniowanie

przyciemia światło otaczających gwiazd i jest objawem aktywności centrum galaktyki. Pierwsze galaktyki aktywne zostały odkryte na początku lat 40. XX wieku przez Karla Seyferta i sklasyfikowane na podstawie obserwacji ich niezwykle silnych linii emisyjnych.

Obserwacje rentgenowskie galaktyki M87 i jej otoczenia w macierzystej gromadzie, wykonane przez satelitę Chandra, pokazały istnienie włóknistych struktur i pierścieni, które mogą być śladami jej wcześniejszych epizodów aktywności (jak fale na wodzie).

Galaktyka aktywna M87, podobnie jak Centrum Drogi Mlecznej Sgr A*, świeci znacznie poniżej jasności Eddingtona (jest to graniczna jasność, przy której siła związana z ciśnieniem promieniowania równoważy przyciąganie grawitacyjne na powierzchni gwiazdy, czy też, analogicznie, na powierzchni dysku akrecyjnego). Jasność Eddingtona jest proporcjonalna do masy centralnej i w przypadku M87 można ją oszacować na $4,25 \cdot 10^{47}$ erg/s, obserwowana zaś jasność galaktyki jest oceniana na ułamek procenta jasności eddingtonowskiej.

Pomimo tego podobieństwa czarna dziura w M87 nie jest uszpona, tak jak ta w Sgr A*, lecz produkuje potężny dżet. Coś się więc za tym kryje: być może czarna dziura w M87 bardzo szybko się obraca i energia czerpana z jej rotacji służy do zasilania dżetu? W odpowiedzi na to pytanie pomogą planowane obecnie obserwacje radiowe bezpośrednich okolic czarnej dziury w M87, możliwe dzięki interferometrii wielkobazowej (VLBI). Dzięki temu, że masa czarnej dziury w M87 jest duża, to nawet przy odległości 16 Mpc powierzchnia jej horyzontu widziana z Ziemi wynosi aż 22 mikrosekundy łuku. Jest to jedynie 2,5 raza mniej niż powierzchnia horyzontu czarnej dziury w Sgr A*, która, choć jest dużo bliżej, to jest też mniej masywna (promień horyzontu skaluje się proporcjonalnie do masy). Porównanie dostatecznie dokładnych obrazów posłuży do sprawdzenia, dlaczego w okolicy jednej z tych czarnych dziur powstaje dżet, a w drugiej nie.

Bożena CZERNY, Agnieszka JANIUK

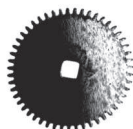
Rozwiązanie zagadki z Iko. Weźmy w takie, że $w^2 \geq n$. Wtedy kolejno:

$$\begin{aligned} \left(\frac{w}{w-1}\right)^w &= \left(1 + \frac{1}{w-1}\right)^w \geq 1 + \frac{w}{w-1} > 2, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k &> \left(\left(\frac{w-1}{w}\right)^w\right)^k = \left(\left(1 - \frac{1}{w}\right)^k\right)^w \geq \left(1 - \frac{k}{w}\right)^w = \\ &= \left(1 - \frac{wk}{w^2}\right)^w \geq \left(1 - \frac{wk}{n}\right)^w = \left(\frac{n-wk}{n}\right)^w. \end{aligned}$$

Po drodze dwukrotnie skorzystaliśmy z nierówności Bernoulliego. Prawdopodobieństwo, że wśród $10w$ słów nie ma kolizji przy f , wynosi:

$$P = \frac{\prod_{i=0}^{10w-1} (n-i)}{n^{10w}} = \prod_{i=0}^9 \frac{\prod_{j=0}^{w-1} (n-iw-j)}{n^w} < \prod_{i=0}^9 \frac{(n-iw)^w}{n^w} < \prod_{i=0}^9 \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2^{-45}.$$

Stąd, z ogromnym prawdopodobieństwem wśród $10\lceil\sqrt{n}\rceil$ słów występuje żądana kolizja.



Do czego komputer nigdy się nie przyda?

Tomasz KAZANA*

Czym jest programowanie? Zapewne ilu programistów, tyle opinii. Na potrzeby tego artykułu przyjmijmy taką definicję: programowanie to sztuka formalnego (w ściśle określonym języku) zapisu sposobu postępowania (algorytmu) w celu rozwiązywania określonego problemu dla konkretnych danych. A więc programista tworzy *przepis*, który zmusznie wykonywany na krzemowych brankach procesora, pozwala komputerowi odpowiadać na różnorodne pytania. Chcemy szybko obliczyć n -tą liczbę Fibonacciego? Powiedzmy komputerowi, *jak* ma to robić, tzn. napiszmy odpowiedni program. Wówczas możemy bez trudu wyznaczyć, na przykład, setny wyraz tego ciągu. Oczywiście, od wyboru algorytmu, a więc od naszej inwencji, zależy, jak długo takie obliczenie będzie trwać. Jednak nie to zagadnienie zamierzamy w tym artykule rozważać. Chcemy pokazać coś dużo bardziej zaskakującego. Otóż istnieją problemy, dla których nie istnieje żadna metoda postępowania! To znaczy, że nie da się napisać programu, który by je rozwiązywał. Zaznaczmy to wyraźnie: to nie tak, że jeszcze nikt nie wpadł na pomysł, jak taki problem rozwiązać. Po prostu można w ścisły sposób udowodnić, że nigdy nikomu się to nie uda. Problemy tego typu nazywamy nierozstrzygalnymi. Kilka z nich spróbujemy w tym artykule naszkicować.

Pierwszym przykładem jest tak zwany problem Posta. Ustalmy jakiś alfabet, dla uproszczenia niech będą to dwie litery a i b . Nasze zadanie określimy następująco: dla danych n par słów nad tym alfabetem, tj. dla wejścia

$$(u_1, w_1), \dots, (u_n, w_n),$$

chcemy sprawdzić, czy istnieje taki skończony ciąg indeksów $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, że

$$u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} = w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k}.$$

Na przykład, dla danych $(u_1 = aa, w_1 = aaa)$, $(u_2 = aba, w_2 = b)$, $(u_3 = ababa, w_3 = aaaaab)$ odpowiedź brzmi *tak*, a opisaną własność realizuje ciąg $(1, 2, 1)$, ponieważ $u_1 u_2 u_1 = aa \cdot aba \cdot aa = aaa \cdot b \cdot aaa = w_1 w_2 w_1$.

Okazuje się, że problem Posta, choć dość łatwo go sformułować, jest nierozstrzygalny. Jest on istotny także z jeszcze innego powodu. Otóż często wykorzystuje się go do tego, żeby udowodnić, że inne problemy są nierozstrzygalne.

Mowa tu o tak zwanym sprowadzeniu badanego problemu do jakiegoś innego problemu nierozstrzygalnego. Tzn. aby udowodnić, że problem P jest nierozstrzygalny, możemy zastosować następujące rozumowanie nie wprost. Załóżmy, że P jest rozstrzygalny. Wówczas pokazujemy pewną ustaloną konstrukcję, która przekształca dane wejściowe problemu Posta na dane wejściowe problemu P , w taki sposób, aby na podstawie wyniku działania P można było odczytać rozwiązanie problemu Posta (dla tych konkretnych danych). To już oznacza sprzeczność, bo tym samym pokazaliśmy program, który (uruchamiając program rozwiązujący P) potrafi rozstrzygać własność Posta. Ta sprzeczność dowodzi nierozstrzygalności P .

Jest więc trochę „ważniejszym” przykładem niż inne, stąd pokazujemy go na początku.

Podobny status mają niektóre problemy NP-zupełne, na przykład problem spełnialności formuł logicznych (SAT).

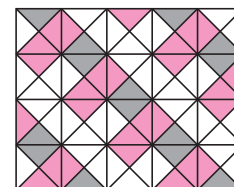
We współczesnej informatyce teoretycznej badanie problemów nierozstrzygalnych (a raczej: rozstrzyganie, które problemy są, a które nie są rozstrzygalne) ma niebagatelne znaczenie. Wachlarz znanych zagadnień nierozstrzygalnych jest przez to bardzo szeroki. Są to zadania często głęboko teoretyczne i trudne do przejrzystego, nawet powierzchownego omówienia. My jednak spróbujemy przedstawić kilka bardzo prostych do opisanie problemów, które okazują się nierozstrzygalne. (Pierwsze dwa zostały zaczerpnięte z prac Davida Harela, wybitnego informatyka izraelskiego.) Przykłady są zróżnicowane, aby Czytelnik wyrobił sobie jakąś intuicję, co może być niemożliwe, a co – tylko trudne.

Problem 1. Klocki

Na wejściu otrzymujemy skończoną liczbę rodzajów kwadratowych klocków, które mają pokolorowane ćwiartki (jak na rysunku 1) – klocków każdego rodzaju jest w zestawie nieskończenie wiele. Chcielibyśmy móc odpowiadać na pytanie, czy mając tylko takie klocki, można nimi pokryć całą płaszczyznę (rys. 2). Przy tym dwa klocki wolno postawić obok siebie, gdy stykają się ćwiartkami w tym samym kolorze. W ogólności komputer nam w tym nie pomoże, bo to problem nierozstrzygalny...



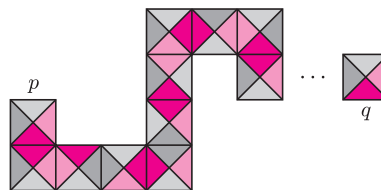
Rys. 1



Rys. 2

Problem 2. Wąż z klocków na półpłaszczyźnie

Wejście tego problemu jest takie samo jak poprzednio. Powiedzmy, że dla rodzajów klocków określonych w wejściu i wskazanych dwóch punktów na kratowanej płaszczyźnie chcielibyśmy sprawdzić, czy istnieje *wąż z klocków* łączący te punkty (rys. 3). Tak opisany problem jest rozstrzygalny. Jednak jeśli nieco zmienimy zasady, tzn. zażądamy, by węże mieściły się w całości w górnej półpłaszczyźnie – nasz problem stanie się nierozstrzygalny.



Rys. 3

*doktorant, Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Problem 3. Uniwersalne programy do debugowania

Nierozstrzygalne są wszelkie problemy, które miałyby weryfikować odpowiednio nietrywialne własności programów podanych na wejściu. Nierozstrzygalny jest, na przykład, problem sprawdzania, czy dany program nie ma wycieków pamięci, czy zawsze się kończy, czy daje poprawny wynik (w jakimś określonym sensie) itp. Na dużym poziomie ogólności można o tym myśleć tak, iż nie istnieją (i nie mogą istnieć) żadne uniwersalne programy do automatycznego *debugowania*, czyli usuwania błędów z innych programów.

Problem 4. Dziesiąty problem Hilberta

Nie jest możliwe napisanie programu, który stwierdzałby, czy zadane równanie diofantyczne ma choć jedno rozwiązanie, czy nie.

Równanie diofantyczne to równanie wielomianowe, którego rozwiązania szukamy w zbiorze liczb całkowitych. Najczęściej rozważa się równania diofantyczne z kilkoma niewiadomymi. Przykłady: $x^5 + y^5 = z^5$, $x^2 - 3y^2 = 1$.

Problem ten postawiony został na przełomie XIX i XX w. przez Hilberta. Oczekiwania były raczej pozytywne. Niestety, marzenia prysły za sprawą Jurija Matijasiewicza, który w latach 70. XX wieku jako pierwszy wykazał nierozstrzygalność tego problemu. Uwaga: dla części wejść oczywiście można ten problem rozwiązać. Być może nawet da się napisać program, który zadziała na pewnym ograniczonym podzbiórze danych, chociażby na równaniach liniowych. Nierozstrzygalność oznacza tyle, że nie da się napisać programu zawsze poprawnego, działającego dla każdego możliwych danych. Tu: rozwiązującego każde możliwe równanie diofantyczne, lub choćby stwierdzającego, czy jego rozwiązanie istnieje.

Problem 5. Automatyczne rozstrzygnięcie hipotez

Nierozstrzygalny jest problem, czy podana na wejściu hipoteza matematyczna jest prawdziwa, czy fałszywa. Tzn. jakąś hipotezę formułujemy ściśle i czekamy na weryfikację. Zwrot *ściśle* oznacza tutaj – w języku jakiejś odpowiednio silnej logiki (nieformalnie: chcielibyśmy, aby hipoteza była wyrażona w dostatecznie bogatym języku matematycznym, np. przy użyciu takich pojęć, jak „dla każdego” czy „istnieje”).

Okazuje się, że pewne wąskie podproblemy tego zagadnienia są rozstrzygalne. Na przykład, Mojżesz Presburger udowodnił, iż hipotezy z dziedziny arytmetyki, ale te nieużywające mnożenia (a więc samo dodawanie), które da się wyrazić w tzw. języku logiki pierwszego rzędu, można weryfikować automatycznie za pomocą komputera.

Problem 6. Problem stopu

Nierozstrzygalne jest pytanie, czy dany program dla konkretnych danych wejściowych pętli się czy nie. W języku programisty powiedzielibyśmy, że nie da się napisać programu `super-program.c`, który – dostawszy na wejściu jakiś inny program `do-testowania.c` oraz dane wejściowe `dane.in` – stwierdzałby (w skończonym czasie), czy dla danych `dane.in` program `do-testowania.c` kończy się czy nie. Podamy pełny dowód tego twierdzenia.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że taki program jednak udało nam się napisać. Tzn. mamy funkcję

```
bool stop(program, dane),
```

która zawsze działa w skończonym czasie i zwraca prawdę wtedy i tylko wtedy, gdy podany *program* dla wejścia *dane* zatrzymuje się. Napiszmy teraz inną funkcję:

```
bool fun(program)
if stop(program, program) then
  while true do sleep();
else
  return true;
```

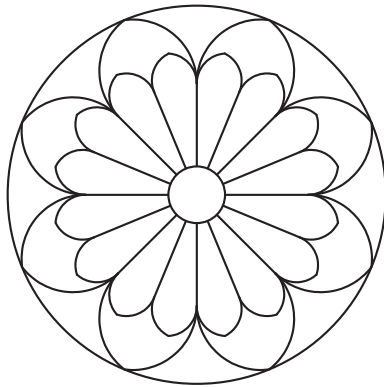
Zauważmy, że w powyższej funkcji jako drugi parametr funkcji `stop`, a zatem jako dane wejściowe, podany jest sam *program*!

Zastanówmy się, jaki jest wynik działania `fun(fun)`. Każdy program dla określonych danych albo się pętli, albo nie – rozważmy więc dwa przypadki. Najpierw załóżmy, że wykonanie `fun(fun)` zatrzymuje się. Wówczas, na mocy określenia problemu stopu, `stop(fun, fun)` zwraca **true**. Jednak wtedy analiza kodu funkcji `fun` pokazuje, że `fun(fun)` pętli się, gdyż warunek po **if** jest prawdziwy. Uzyskaliśmy sprzeczność, co oznacza, że `fun(fun)` musi się pętlić. To jednak (znów patrzymy na instrukcję **if** w funkcji `fun`) implikuje, że `stop(fun, fun)` zwraca prawdę, a to, z definicji funkcji `stop`, oznacza dokładnie tyle, że `fun(fun)` zatrzymuje się.

W każdym przypadku uzyskaliśmy zatem sprzeczność, więc teza została udowodniona. □

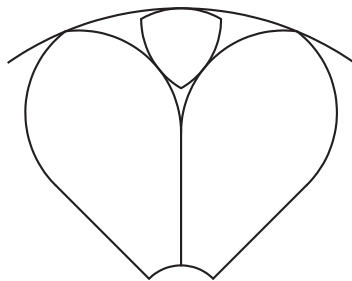
Autor ma świadomość, że ten artykuł w dużej mierze jest tylko namiastką, prezentacją ledwie kilku przykładów, i ma stanowić raczej zachętę do dalszych poszukiwań. Przy okazji ma jednak nadzieję, że udało się, choćby mgliście, dać ogłęd, czym się – między innymi – zajmuje współczesna informatyka teoretyczna. Samą tematykę problemów nierozstrzygalnych można oczywiście rozwijać dalej. Ciekawy, być może wart oddzielnego przedstawienia, wydaje się temat hierarchii problemów nierozstrzygalnych. Mówimy tu o takiej hierarchii, w której problemy nierozwiązywalne (tzn. nierozstrzygalne) dzielimy na mniej i bardziej beznadziejne przypadki. Porządek jest tu taki, że problem P_1 jest *trudniejszy* od P_2 , jeśli założenie o tym, że P_1 byłby rozstrzygalny, pozwoliłoby hipotetycznie rozstrzygnąć P_2 , a odwrotnie – już nie. Pewnie można by tu mieć wątpliwości, po co w ogóle porównywać problemy, które i tak są niemożliwe do rozwiązania. Z pewnością jest tu jakiś element sztuki dla sztuki (jak w każdej bardzo teoretycznej dyscyplinie nauki), jednak tego typu zagadnienia nie są wyłącznie domeną smakoszy.

Rezultaty z dziedziny nierozstrzygalności to tak zwane twierdzenia o niemożności – zjawisko fascynujące samo w sobie! To znaczy udaje nam się dowieść, że czegoś nie da się rozwiązać. Wskutek tego musimy mieć świadomość, że istnieją problemy, na które nie pomogą ani nasze szkiełka, ani nasze oczy, ani nawet tona krzemu zaprogramowana przez najlepszych algorytmików.

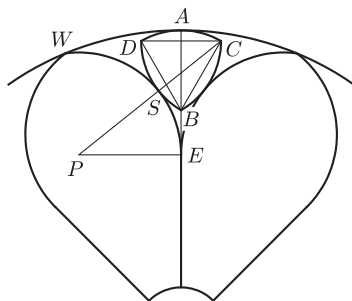


Rys. 1

Przypominamy: trójkąt Reuleaux to figura uzyskana z trójkąta równobocznego XYZ w ten sposób, że bok XY zostaje zastąpiony łukiem XY okręgu o środku Z i podobnie pozostałe boki; punkty X, Y, Z nazywamy wierzchołkami otrzymanego trójkąta Reuleaux.



Rys. 2



Rys. 3

Rozeta katedry w Metz – ciąg dalszy

W poprzednim artykule (*Delta* 8/2009) skonstruowaliśmy główną część rozety z katedry w Metz: osiem dużych ostrołuków wpisanych w okrąg oraz po dwa mniejsze ostrołuki wpisane w duże ostrołuki (rys. 1). Teraz zajmiemy się wolną przestrzenią między dużymi ostrołukami i okręgiem ograniczającym rozetę. W każdą z tych wolnych przestrzeni wpiszemy trójkąt Reuleaux styczny do obu ostrołuków i danego okręgu (rys. 2). Zaznaczmy wierzchołki trójkąta Reuleaux; niech będą to punkty B, C i D . Zaznaczmy także punkty styczności: niech A będzie punktem styczności okręgu ograniczającego rozetę z łukiem CD , niech E będzie punktem styczności dużych ostrołuków i niech S będzie punktem styczności łuków WE i BD . Niech wreszcie punkt P będzie środkiem okręgu, którego fragmentem jest łuk WE (rys. 3). Oczywiście odcinek PE jest promieniem tego okręgu.

Naszym celem jest znalezienie wierzchołków B, C i D . Muszą przy tym być spełnione następujące warunki:

$$AB = BC = CD = BD \quad \text{oraz} \quad PC = PE + AB.$$

Rozwiążemy najpierw zadanie w pewnym sensie odwrotne. Założymy, że dane są punkty B, C i D , a następnie znajdziemy odpowiadający im punkt P spełniający żądane warunki. Wtedy otrzymaną konfigurację punktów przekształcimy przez jednokładność o środku w punkcie A , tak by otrzymany punkt P pokrył się z danym punktem P .

Konstrukcję tę opiszemy jednak nie odwołując się bezpośrednio do pojęcia jednokładności, tak by była ona zrozumiała również dla osób nieznających własności tego przekształcenia geometrycznego. Czytelnik znający te własności bez trudu dostrzeże sposób wykorzystania jednokładności.

Niech O będzie środkiem okręgu ograniczającego rozetę. Konstrukcję rozpoczynamy od tego, że na prostej OA wybieramy dowolny punkt B' i konstruujemy trójkąt równoboczny $B'C'D'$, którego bok jest równy AB' . Na rysunku 4 wybraliśmy $B' = O$; punkt C' znajduje się wtedy na okręgu ograniczającym rozetę oraz $\sphericalangle AOC' = 30^\circ$. Nie zaznaczamy na tym rysunku punktu D' ; nie jest on potrzebny do konstrukcji punktów B, C i D . Ponieważ trójkąt AOC' jest równoramienny, więc $\sphericalangle OAC' = \sphericalangle OC'A = 75^\circ$. Znajdujemy następnie punkt G , tak by trójkąt OGC' był równoboczny. Zauważmy, że wtedy

$$\sphericalangle AOG = \sphericalangle AOC' + \sphericalangle C'OG = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$



Przez punkt G prowadzimy następnie prostą prostopadłą do OG (czyli równoległą do OA). Zaznaczamy punkt przecięcia tej prostej z prostą AP ; niech będzie to punkt M . Niech H będzie punktem przecięcia prostych GM i PE . Teraz zaczyna się najważniejsza część konstrukcji: na prostej MC' znajdujemy taki punkt K , by $PK = PH$. Następnie przez punkt C' prowadzimy prostą równoległą do PK i w przecięciu z prostą AP znajdujemy punkt P' . Niech E' będzie rzutem punktu P' na prostą OA i niech L będzie punktem przecięcia prostych GM i $P'E'$. Wykażemy, że $P'C' = P'E' + OA$.

Zauważamy dwie pary trójkątów podobnych:

$$\triangle PKM \sim \triangle P'C'M \quad \text{oraz} \quad \triangle PHM \sim \triangle P'LM.$$

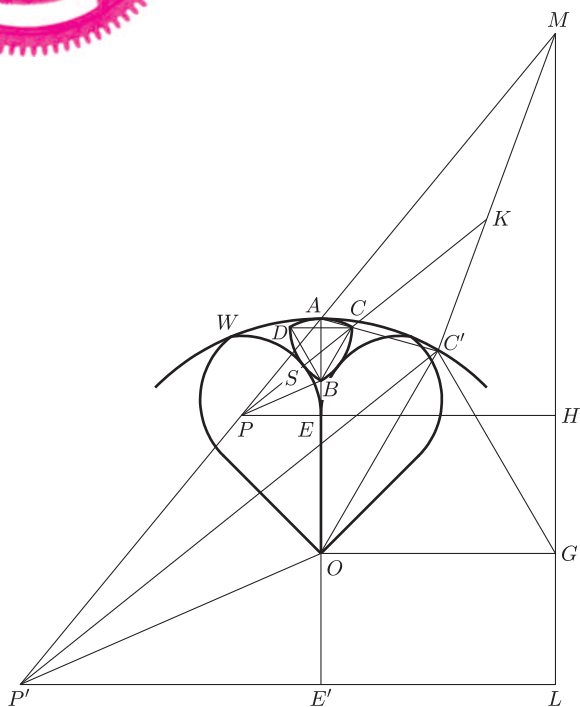
Mamy zatem

$$\frac{PK}{P'C'} = \frac{PM}{P'M} = \frac{PH}{P'L}.$$

Ponieważ $PK = PH$, więc

$$\begin{aligned} P'C' &= P'L = P'E' + E'L = P'E' + OG = \\ &= P'E' + OA. \end{aligned}$$

Teraz znajdujemy punkty B , C i D . Niech C będzie punktem przecięcia prostych AC' i PK . Następnie przez punkt C prowadzimy prostą równoległą do OC' ; punkt B jest punktem przecięcia tej prostej z prostą OA . Wreszcie punkt D jest punktem symetrycznym do C względem prostej OA . Zauważmy najpierw, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AOC' = 30^\circ$. Stąd wynika, że $\sphericalangle DBC = 60^\circ$. Ponieważ z symetrii wynika też, że $DB = BC$, więc trójkąt BCD jest równoboczny. Wiemy również, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle OAC' = 75^\circ$, a więc $\sphericalangle BCA = 75^\circ$. Stąd wynika, że trójkąt BCA jest równoramienny: $BC = BA$.



Rys. 4

Pozostaje do wykazania, że $PC = PE + AB$. Korzystając z podobieństwa trójkątów PCA i $P'C'A$, otrzymujemy proporcję

$$\frac{PC}{P'C'} = \frac{PA}{P'A}.$$

Z podobieństwa trójkątów PEA i $P'E'A$ otrzymujemy

$$\frac{PE}{P'E'} = \frac{PA}{P'A}.$$

Z podobieństwa trójkątów BCA i $OC'A$ i jeszcze raz PCA i $P'C'A$ otrzymujemy

$$\frac{BC}{OC'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{PA}{P'A}.$$

Stąd dostajemy $PE \cdot P'A = P'E' \cdot PA$ oraz $BC \cdot P'A = OC' \cdot PA$.

Po dodaniu ostatnich dwóch równości dostajemy

$$(PE + BC) \cdot P'A = (P'E' + OC') \cdot PA,$$

czyli

$$\frac{PE + BC}{P'E' + OC'} = \frac{PA}{P'A} = \frac{PC}{P'C'}.$$

Ale $P'E' + OC' = P'E' + OA = P'C'$, skąd wynika, że $PE + BC = PC$.

Ponieważ $BC = AB$, więc ostatecznie dostajemy $PE + AB = PC$.

To dowodzi poprawności konstrukcji wierzchołków trójkąta Reuleaux.

Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI

Konkurs zadań astronomicznych

Na rozwiązania zadań A 17 i A 18 czekamy do 1 października 2009 r. (decyduje data stempla pocztowego) pod adresem:

Centrum Astronomiczne
im. Mikołaja Kopernika
ul. Bartycka 18
00-716 Warszawa

z dopiskiem na kopercie „Konkurs Deltą”.

A 17. Promień Ziemi wynosi 6370 km. Oszacować masę ziemskiej atmosfery. [1 pkt]

A 18. Układ zaćmieniowy składa się z gwiazdy ciągu głównego i 6 razy większego czerwonego olbrzyma. Ich jasności są odpowiednio $m_1 = 7,8$ mag i $m_2 = 7$ mag. Obliczyć jasność układu, gdy: (a) widoczne są obie gwiazdy, (b) gwiazda ciągu głównego jest na tle olbrzyma. [2 pkt]

Rozwiązania zadań z numeru 7/2009

A 13. Praca potrzebna na skok wykonana przez kosmonautę na Ziemi i Księżycu jest taka sama i równa przyrostowi energii potencjalnej.

$$E_p^K = E_p^Z, \quad mg_Z h_Z = mg_K h_K$$

czyli ostatecznie wysokość, na jaką wyskoczy kosmonauta na Księżycu, wynosi $h_K = 6h_Z = 4,2$ m.

A 14. Przyjmijmy, że średnia masa atomowa atmosfery wynosi $m_{\text{at}} \approx 14$ u, czyli $23,4 \cdot 10^{-24}$ g, natomiast średnia gęstość atmosfery to $\rho_{\text{sr}} = 10^{-3}$ g/cm³. Stąd $n = \rho/m_{\text{at}}$. Ostatecznie

$$\tau = \rho H \sigma / m_{\text{at}}.$$

Podstawiając wielkości liczbowe (przy założeniu, że grubość atmosfery Ziemi to 10 km), otrzymujemy $\tau \approx 43$.

Promieniowanie rentgenowskie będzie skutecznie pochłaniane przez atmosferę, jeżeli głębokość optyczna związana z pochłanianiem tych fotonów będzie znacząco większa od 1.



Zadania

Zadania z fizyki w tym numerze są oparte na bardzo starych, jeszcze siedemnastowiecznych pomysłach.

F 747. Pod jakimi kątami do poziomu należy ustawić deseczki o długości k i l , aby kulka staczała się po nich w tym samym czasie?

Rozwiązanie na str. 17

F 748. Jaki kształt przybierze woda w naczyniu o kształcie walca, gdy ten będzie się szybko obracał wokół swojej osi?

Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Waldemar POMPE

M 1252. Liczby dodatnie a, b, c należą do przedziału $(0, 1)$. Wykazać, że co najmniej jedna z liczb $a(1 - b)$, $b(1 - c)$, $c(1 - a)$ nie przekracza $1/4$.

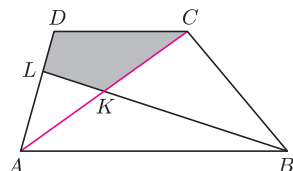
Rozwiązanie na str. 17

M 1253. Dany jest trapez $ABCD$ o polu 1, w którym stosunek długości podstaw AB i CD wynosi 2. Punkt K jest środkiem przekątnej AC , a punkt L jest punktem przecięcia prostych BK i AD . Wyznaczyć pole czworokąta $KCDL$.

Rozwiązanie na str. 1

M 1254. Dany jest graniastosłup o podstawie n -kąta. Rozstrzygnąć, dla jakich liczb n można wierzchołki tego graniastosłupa pokolorować trzema kolorami, tak aby każdy wierzchołek był połączony krawędziami z trzema wierzchołkami o różnych kolorach.

Rozwiązanie na str. 2





Olimpiada

Zadania zawodów I stopnia Olimpiady Astronomicznej, Olimpiady Matematycznej oraz Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów 2009/2010

W dniu oddawania do druku tego numeru *Delta* Konkursy na organizację olimpiad przedmiotowych w roku szkolnym 2009/2010 nie były jeszcze rozstrzygnięte. Z tego względu nie mieliśmy możliwości opublikowania zadań ze wszystkich poszczególnych pierwszych etapów. Nie podajemy też adresów Komitetów Okręgowych. Publikujemy zadania z obu Olimpiad Matematycznych, gdyż wszyscy zainteresowani uzgodnili, że zadania, które zamieszczamy, będą obowiązujące bez względu na to, kto będzie organizatorem. Z kolei dotychczasowy Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej zapewnia, że wszyscy, którzy nadesłali rozwiązania zamieszczonych niżej zadań, otrzymają odpowiedź.

Redakcja

LIII Olimpiada Astronomiczna

Informacje regulaminowe

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.
2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne. Rozwiązywanie zadań zawodów II stopnia i III stopnia odbywa się w warunkach kontrolowanej samodzielności.
3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, **do 12 października 2009 r.**, rozwiązania 3 zadań dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.
4. Uczniowie, którzy przysłał rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do końca października bieżącego roku tematy drugiej serii zadań. Zadania obydwu serii będą również umieszczane na stronie internetowej olimpiady: <http://planetarium.chorzow.net.pl>
5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, **do 16 listopada 2009 r.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.
6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).
7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem:

Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej
Planetarium Śląskie
41-500 Chorzów, skr. poczt. 10

w terminach podanych w p. 3 i 5. Decyduje data stempla pocztowego.

8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.

9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi).

Dodatkowo, do rozwiązań pierwszej serii zadań należy dołączyć na osobnej kartce następujące informacje: imię i nazwisko, rok urodzenia, nazwa szkoły wraz z jej imieniem, adres szkoły (z kodem pocztowym i nazwą województwa), klasa, profil klasy, adres prywatny (z kodem pocztowym), e-mail, nazwisko nauczyciela fizyki i astronomii oraz ewentualnie opiekuna przygotowującego do olimpiady.

10. Zawody II stopnia odbędą się 18 stycznia 2010 r. Zawody III stopnia odbędą się w dniach od 11 do 14 marca 2010 r.

11. Powiadomienia o zakwalifikowaniu do zawodów kolejnych stopni otrzymają jedynie uczniowie awansujący.

12. O uprawnieniach w przyjmowaniu na wyższe uczelnie laureatów i finalistów olimpiady decydują senaty uczelni. Informacje na ten temat są umieszczane na ich stronach internetowych.

Pierwsza seria zadań zawodów I stopnia

1. W marcu 2009 r. na orbicie heliocentrycznej umieszczono sondę *Kepler*. Sonda obiega Słońce w czasie 372,5 dnia, po orbicie położonej w płaszczyźnie orbity ziemskiej. Zakładając, że w momencie początkowym kąt pomiędzy kierunkami: Ziemia–sonda i Ziemia–Słońce wynosił 180° , oblicz ten kąt oraz odległość sondy od Ziemi:

- po planowanym zakończeniu misji, tzn. po 3,5 roku;
- po ewentualnym przedłużeniu misji sondy do 6 lat.

Uwagi:

- ° pomijamy perturbacje pochodzące od Ziemi, Księżyca i planet,
- ° ze względu na małe mimośrodory orbit Ziemi i sondy przyjmujemy, że są one okręgami.

2. Szerokość geograficzna obserwatorium astronomicznego krakowskiego Uniwersytetu Pedagogicznego na Suhorze wynosi $\varphi_S = +49,5^\circ$, natomiast obserwatorium astronomicznego Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Piwnicach $\varphi_P = +53,1^\circ$. Przyjmując, że nocne obserwacje astronomiczne można

przewodzić w okresie, gdy wysokość Słońca $h < -15^\circ$, oblicz różnicę pomiędzy takimi okresami podczas zimowego i letniego przesilenia w tych obserwatoriach.

3. Zadaniem sondy *Kepler* jest poszukiwanie planet pozasłonecznych podobnych do Ziemi. Umieszczony na sondzie teleskop prowadzi równoczesne obserwacje fotometryczne dużej liczby gwiazd w celu wykrycia okresowych zmian ich jasności, wynikających z przejścia na tle tarczy danej gwiazdy hipotetycznej planety. Oblicz, o ile procent zmieniłyby się strumień dochodzącego światła od gwiazdy takiej jak nasze Słońce, gdyby na jej tle przechodziła planeta wielkości Ziemi. Obliczoną zmianę strumienia wyraż w wielkościach gwiazdowych.

4. Krótko opisz cele Międzynarodowego Roku Astronomii 2009 i wymień kilka znanych Ci imprez organizowanych w ramach obchodów tego roku. Zaproponuj program takich obchodów w Twojej szkole, uwzględniając realne możliwości szkoły i uczniów w organizowaniu i przeprowadzeniu elementów takiego programu.

Zadania obserwacyjne

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. W przypadku zastosowania metody fotograficznej można dołączyć negatyw, fotografię, wydruk komputerowy zdjęcia lub plik na CD, DVD itp.

1. Skontroluj prawidłowość wskazań zegara słonecznego znajdującego się w Twojej lub pobliskiej miejscowości. W tym celu dokonaj odczytu wskazań zegara słonecznego w różnych momentach czasu urzędowego i porównaj te wskazania z obliczonym lokalnym czasem prawdziwym słonecznym dla tych momentów. Skomentuj otrzymane wyniki. Swoje obserwacje udokumentuj fotograficznie.

Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 16 listopada 2009 r.

2. Sfotografuj (co najmniej dwukrotnie) planetoidę (3) Juno, która od początku września do połowy października będzie widoczna przez całą noc, osiągając w opozycji 18 września 2009 roku jasność $7,7^m$. Wcześniej wyznacz realny zasięg (w wielkościach gwiazdowych) przyrządu, który posłuży Ci do wykonania zdjęć. Na każdym ze zdjęć zaznacz strzałkami zidentyfikowane jaśniejsze gwiazdy oraz planetoidę. Poniższa tabelka zawiera trzy przewidywane w tym czasie pozycje planetoidy.

Data	α_{2000}	δ_{2000}
8 września 2009	$0^h 08^m$	$-1^\circ 05'$
18 września 2009	$0^h 02^m$	$-3^\circ 11'$
18 października 2009	$23^h 44^m$	$-9^\circ 03'$

3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji prowadzonych w ostatnim roku.

Zalecana literatura

- Obowiązujące w szkołach podręczniki do przedmiotów ścisłych.
- H. Chrupała, M. T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych*.
- H. Chrupała, *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach).
- H. Chrupała, J. M. Kreiner, M. T. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami*.
- J. M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką*.
- J. M. Kreiner, *Ziemia i Wszechświat – astronomia nie tylko dla geografów*.
- D. H. Levy, *NIEBO – Poradnik użytkownika*.
- *Słownik szkolny – Astronomia* (praca zbiorowa).
- *Encyklopedia szkolna – fizyka z astronomią* (praca zbiorowa).
- Atlas nieba. Obrotowa mapa nieba.
- Czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Świat Nauki*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie*.



LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać **listem poleconym** pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2009 r. – I seria,

31 października 2009 r. – II seria,

30 listopada 2009 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć pod adresem: www.om.edu.pl



Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb rzeczywistych dodatnich, spełniających równanie

$$(x^{2010} - 1)(y^{2009} - 1) = (x^{2009} - 1)(y^{2010} - 1).$$

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Na odcinku AC wybrano punkt D , który nie jest wierzchołkiem trójkąta ABC . Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD . Wykazać, że punkty B, C, D, S leżą na jednym okręgu.

3. Dwa ciągi skończone będziemy nazywać zgodnymi, jeżeli jeden z nich powstał przez usunięcie z drugiego dwóch identycznych, sąsiadujących ze sobą segmentów. Na przykład zgodne są ciągi $(1, 2, 3, 2, 3, 4)$ i $(1, 4)$,

jak również (1) i $(1, 1, 1, 1, 1)$, natomiast nie są zgodne ciągi $(2, 2, 2, 2, 2)$ i $(2, 2)$, ani $(1, 4)$ i $(1, 2, 3, 3, 2, 4)$. Operacją segmentowania nazwiemy zastąpienie ciągu przez ciąg z nim zgodny. Dowieść, że z każdego skończonego ciągu liczbowego można otrzymać, za pomocą pewnej liczby operacji segmentowania, ciąg niemalejący.

4. Liczba 2 należy do zbioru A , który spełnia następujący warunek: Dla każdej liczby rzeczywistej $x \in A$, jeżeli $x \neq 0$ i $x \neq 1$, to

$$\frac{x+1}{x} \in A \quad \text{oraz} \quad \frac{2x-1}{x-1} \in A.$$

Udowodnić, że A zawiera wszystkie liczby wymierne większe od 1.

II seria

5. Dany jest czworościan $ABCD$, którego ściany są trójkątami ostrokątnymi. Na prostej l leży środek sfery wpisanej oraz środek sfery opisananej na czworościanie. Udowodnić, że jeśli prosta l przecina odcinek AB , to $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

6. Dana jest liczba pierwsza $p \neq 5$ oraz takie liczby całkowite a, b, c , że p jest dzielnikiem obu liczb $a + b + c$ i $a^5 + b^5 + c^5$. Wykazać, że co najmniej jedna z liczb $a^2 + b^2 + c^2$, $a^3 + b^3 + c^3$ jest podzielna przez p .

7. Trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB > 90^\circ$, wpisany jest w okrąg o środku S . Prosta CS przecina odcinek AB

w punkcie D . Udowodnić, że jeżeli

$$AC + BC = 2CS,$$

to okręgi wpisane w trójkąty ADC i BDC mają równe promienie.

8. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c i liczby całkowitej $n \geq 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b} \geq \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \right) \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + c^n}{3}}.$$

III seria

9. Niech \mathbb{N}_0 oznacza zbiór liczb całkowitych nieujemnych. Funkcje $f, g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ spełniają dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ warunek

$$g(f(n)) = g(n) - n.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości $f(0)$.

10. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n , dla których istnieją parami różne liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, spełniające warunki

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

oraz

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n.$$

11. Czworokąty wypukłe $ABCD$ i $PQRS$ mają jednakowe pola. Ponadto spełnione są równości

$$AB = PQ, \quad BC = QR, \quad CD = RS, \quad DA = SP.$$

Dowieść, że istnieją punkty P', Q', R', S' leżące na tej samej

płaszczyźnie co czworokąt $ABCD$, takie że

$$AP' = BQ' = CR' = DS'$$

oraz czworokąt $P'Q'R'S'$ jest przystający do czworokąta $PQRS$.

12. Gracze K i F grają w c -fasolki, gdzie c jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Gracz K posiada na początku $n \geq 2$ pustych kubków. W każdej rundzie wskazuje dowolne dwa rozłączne, niepuste zbiory kubków. Następnie F wybiera jeden ze zbiorów wskazanych przez K i dokłada po jednej fasolce do każdego z kubków w tym zbiorze. Gra kończy się w momencie wybranym przez K , przy czym liczba rund nie może przekroczyć cn . K wygrywa, gdy po zakończeniu gry w każdym kubku znajduje się inna liczba fasolek, w przeciwnym razie wygrywa F . Wyznaczyć wszystkie liczby c o następującej własności: dla każdego $n \geq 2$ gracz K ma strategię zapewniającą mu zwycięstwo w c -fasolki.



V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów



Zachęcamy Gimnazjalistów do wzięcia udziału w zawodach!

Zgodnie z decyzją Ministra Edukacji Narodowej laureaci OMG są zwolnieni z egzaminu gimnazjalnego z części matematyczno-przyrodniczej i przyjmowani do wybranego liceum w pierwszej kolejności.

Wielu finalistów OMG zostało później laureatami Olimpiady Matematycznej (dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych).

Terminarz:

Zawody stopnia pierwszego **1 września 2009 r. – 26 października 2009 r.**
Zawody stopnia drugiego **9 stycznia 2010 r.**
Zawody stopnia trzeciego **20–21 marca 2010 r.**

Jak wystartować w OMG?

Wystarczy rozwiązać co najmniej jedno z poniższych zadań i swoje rozwiązania przesłać do właściwego Komitetu Okręgowego OMG, **najpóźniej dnia 26 października 2009 r.** (decyduje data stempla pocztowego).

Aby zakwalifikować się do kolejnego etapu Olimpiady, nie jest konieczne rozwiązanie wszystkich zadań. Progi kwalifikacyjne są każdego roku inne i zależą od liczby uczestników, jakości rozwiązań i trudności zadań.

Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, zadania z poprzednich edycji OMG oraz inne informacje można znaleźć na stronie internetowej OMG: www.omg.edu.pl

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

1. Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych a, b, c , dla których $a^2 = b^2 + c$.
2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Wyznacz wszystkie punkty P leżące wewnątrz tego trapezu i spełniające równość
$$[PAB] + [PCD] = [PBC] + [PDA],$$
gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ .
3. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają układ równań
$$\begin{cases} a + b + c + d = 101, \\ ab + cd = 200. \end{cases}$$
Wykaż, że dokładnie jedna z liczb a, b, c, d jest nieparzysta.
4. Dany jest 18-kąt foremny $A_1A_2 \dots A_{18}$. Wykaż, że czworokąt ograniczony prostymi $A_2A_7, A_3A_{15}, A_6A_{12}$ i $A_{10}A_{17}$ jest prostokątem. Czy ten prostokąt jest kwadratem?
5. Przy każdym wierzchołku 55-kąta foremnego napisano liczbę całkowitą. Żadna z tych liczb nie jest podzielna przez 5. Wykaż, że istnieją takie dwie liczby a i b , napisane przy sąsiednich wierzchołkach tego wielokąta, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 5.
6. Czworoscian foremny o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną tak, że w przekroju otrzymano czworokąt. Jaki jest najmniejszy możliwy obwód tego czworokąta? Odpowiedź uzasadnij.
7. Dana jest taka liczba rzeczywista a , że liczby $a^2 + a$ oraz $a^3 + a$ są wymierne. Udowodnij, że liczba a jest wymierna.



Rozwiązanie zadania M 1252.

Dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. Wobec tego $a(1-b) \cdot b(1-c) \cdot c(1-a) =$

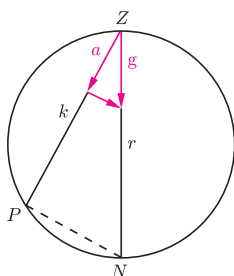
$$= a(1-a) \cdot b(1-b) \cdot c(1-c) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3,$$

skąd wynika, że co najmniej jedna z liczb $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ nie przekracza $1/4$.



Rozwiązanie zadania F 747.

Niech r będzie liczbą większą od k i od l . W pionowym kole o promieniu $r/2$ rysujemy z jego najwyższego punktu cięciwę o długości k .



Ruch kulki staczającej się po deseczce umieszczonej tak, jak ta cięciwa, trwa tyle samo czasu (oznaczmy go przez t_1) co swobodny spadek wzdłuż pionowej średnicy koła (ten czas oznaczmy przez t). Jest tak dlatego, że z podobieństwa trójkątów mamy

$$\frac{a}{g} = \frac{ZP}{ZN} = \frac{at_1^2/2}{gt^2/2},$$

skąd po skróceniu wynika, że $t_1^2 = t^2$, a ponieważ obie liczby są dodatnie, więc $t_1 = t$.

Umieszczenie w tym samym kole cięciwy o długości l zaczynającej się w najwyższym punkcie daje rozwiązanie.

Ze względu na dowolność wyboru r zadanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Informatyczny kącik olimpijski (23): Haszowanie

Tym razem przyjrzymy się zadaniu *Haszowanie* z Obozu Naukowo-Treningowego im. A. Kreczmaro 2008.

Niech L będzie zbiorem słów o długości co najwyżej 20 złożonych z małych liter alfabetu angielskiego, a \mathbb{Z}_n – zbiorem reszt z dzielenia przez n . Mając dane $n < 10^{16}$ i pewną funkcję $f : L \rightarrow \mathbb{Z}_n$, mamy znaleźć takie dwa słowa $u, v \in L$, że $f(u) = f(v)$. Pisząc, że funkcja f jest „dana”, mam na myśli, że możemy spytać o jej wartości dla konkretnych słów, które nas interesują. Chodzi właśnie o znalezienie rozwiązania zadania, korzystającego z możliwie niewielkiej liczby takich zapytań.

Zauważmy najpierw, że wystarczy wziąć dowolne $n + 1$ słów (z warunków zadania wynika, że $n < |L|$) i w tym zbiorze na pewno znajdują się dwa spełniające warunki zadania. Daje to algorytm wykonujący $O(n)$ zapytań, wykorzystujący pamięć $O(n)$.

Okazuje się, że przy losowym wyborze słów ze zbioru L , oczekiwana liczba zapytań (i zużycie pamięci) przy opisanej metodzie to $O(\sqrt{n})$. Proponuję Czytelnikowi zastanowienie się, dlaczego tak jest (jest to związane z tzw. *paradoksem urodzin*) – rozwiązanie znajduje się w innym miejscu numeru.

Zapamiętanie \sqrt{n} słów o długości rzędu 20 znaków może być jednak przy podanych ograniczeniach dość kłopotliwe. Omówimy teraz rozwiązanie niniejszego zadania działające w stałej pamięci i oczekiwanej złożoności czasowej $O(\sqrt{n})$.

Obierzmy funkcję różnowartościową $g : \mathbb{Z}_n \rightarrow L$, o pseudolosowych wartościach, której wartość dla konkretnej liczby z \mathbb{Z}_n będziemy umieli łatwo obliczyć. Dobrym przykładem jest funkcja zwracająca w punkcie x słowo, które jest w L leksykograficznie na $(x \oplus 1357)$ miejscu (\oplus to różnica symetryczna na bitach – *xor*).

Zdefiniujmy $h : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, tak żeby $h(x) = f(g(x))$. Problem sprowadza się do znalezienia takich różnych x i y , że $h(x) = h(y)$, wówczas bowiem $g(x)$ i $g(y)$ będą naszymi szukanymi słowami. Teoretycznie, h mogłoby być permutacją zbioru \mathbb{Z}_n , a liczby x i y mogłyby w ogóle nie istnieć, jest to jednak zupełnie nieprawdopodobne przy losowym wyborze g .

Jak znaleźć takie x i y w stałej pamięci? Obierzmy w tym celu losowe $p \in \mathbb{Z}_n$ i rozważmy ciąg

$$(a_i) = (p, h(p), h(h(p)), h(h(h(p))), \dots, h^i(p), \dots).$$

Możemy przyjąć, że $(g(a_i))$ jest losowym ciągiem słów (bo funkcja g zwraca losowe słowa), czyli wśród jego pierwszych $O(\sqrt{n})$ wyrazów z dużym prawdopodobieństwem znajdują się dwa o równych obrazach przy przekształceniu f . Na odpowiadających im wyrazach ciągu (a_i) funkcja h także ma jednakowe wartości, a stąd także w samym (a_i) z prawdopodobieństwem bliskim 1 występuje powtórzenie po $O(\sqrt{n})$ wyrazach. Niech pierwszym elementem, który się powtarza, będzie a_i , które stoi także na pozycji $j + 1$. Ciąg (a_i) wygląda więc następująco:

$$a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_j, a_i, a_{i+1}, \dots, a_j, a_i, a_{i+1}, \dots,$$

gdzie j jest rzędu \sqrt{n} , a a_{i-1} i a_j to szukana para liczb. Żeby je odszukać, należy porównywać, dla kolejnych $k = 1, 2, \dots$, wyraz a_k z a_{2k} oraz a_{2k+1} . Gdy $k = i$, wszystkie te trzy wyrazy należą do cyklu a_i, \dots, a_j , a przez kolejne $j - i + 1$ kroków a_k zatacza pełen cykl, a dwa pozostałe zataczają go nawet dwukrotnie. Po drodze któryś z tych dwóch musi się więc spotkać z a_k . Niech takim spotkaniem będzie $a_k = a_l$. Wtedy $l - k$ jest wielokrotnością długości naszego cyklu (czyli $l - k = c(j - i + 1)$ dla pewnego $c \in \mathbb{Z}_+$). Biorąc p i $h^{l-k}(p)$ i aplikując do nich h tak długo, jak długo są różne, otrzymamy żądane a_{i-1} i a_j . W każdym z dwóch przeszukiwań wykonujemy $O(j)$ kroków, a więc oczekiwana liczba wywołań funkcji f jest równa $O(\sqrt{n})$.

Tomasz KULCZYŃSKI

O G Ł O S Z E N I E

kino.matematyka.pl

YouTube i matematyka? Nic nowego. Na tym znanym portalu filmowym można także znaleźć filmy o matematyce. Zarówno te mówiące o jej pięknie, jak również zwykłe „lekcje” lub wyjaśnienia trudnych pojęć.

Od roku na YouTube są inne filmy związane z Królową Nauk – to prace nadesłane na ogólnopolski konkurs *Matematyka nie kończy się w szkole*, organizowany przez firmę *Zibi*, przedstawiciela *CASIO* w Polsce. Są to naprawdę reklamówki tego przedmiotu, wykonane zazwyczaj z odrobiną humoru. Filmów jest ponad 130; wszystkie, w tym 3 zwycięskie (*Matma na plus*, *Każdy liczy*, *W czym pomaga mi matematyka*), można znaleźć na kanale YouTube/Kalkulatory.

Udany debiut konkursu spowodował, że firma zdecydowała się na zorganizowanie II edycji konkursu. Zapraszamy wszystkich interesujących się matematyką i lubiących robić filmy do spróbowania sił w konkursie.

Najważniejsze informacje:

- główna nagroda to 10 tys. zł;
- film nie może być krótszy niż 1 minuta i dłuższy niż 3;
- filmy należy nadsyłać (poprzez www.kalkulatory.pl) do końca września;
- w październiku wszystkie filmy zostaną opublikowane na YouTube;
- na początku listopada 40 filmów o największej oglądalności i z najlepszymi ocenami internautów przejdzie do finału.

Skład Jury:

Agnieszka Herma (matematyk),
 Krzysztof Nowakowski (matematyk),
 Aleksandra Siewko (redaktor naczelna *Cogito*),
 Elżbieta Wieteska (redaktor naczelna *Wiedzy i Życia*),
 Aleksandra Wróblewska (matematyk),
 Magdalena Zajdel (portal Kinoskop.pl).

Piotr Tomczak
 specjalista ds. kalkulatorów
 Zibi SA

(więcej informacji na www.kalkulatory.pl)

W literaturze można spotkać to zagadnienie jako tzw. problem sekretarki. Warto zaznaczyć, że dotyczy on nie tylko rekrutacji pracowników. Jeśli jedziemy samochodem i chcemy po drodze zatankować, to mijamy kilka stacji, obserwując cenę benzyny, a następnie tankujemy na takiej, która ma najlepszą cenę. Ile wynosi to najlepsze „kilka”? Obliczyliśmy wcześniej – około 37%.

Jak powszechnie wiadomo, znalezienie najlepszej żony (lub męża) nie należy do najprostszyc zadań. Panuje też stereotypowe przekonanie, że dla matematyków to zadanie jest dużo trudniejsze niż dla „zwykłych ludzi”. Jest to pogląd błędny – chociażby dlatego że, wbrew powszechnemu mniemaniu, matematyk to nie uwięziony w świecie książek samotnik. Co więcej, matematyk mógłby spróbować znaleźć jakąś naukową metodę pozwalającą wybrać najlepszą kandydatkę. Czy takie strategie w ogóle istnieją?

Warto znaleźć sobie sekretarkę

Poszukiwanie sekretarki jest znacznie łatwiejsze niż poszukiwanie żony, więc od tego zacznijmy.

Rozważmy takie zagadnienie – zgłasza się do nas wiele kandydatek na sekretarkę, będą po kolei przychodzić na rozmowę i musimy spośród nich wybrać tę najlepszą. Problem w tym, że w każdym momencie, gdy z którąś rozmawiamy, musimy się zdecydować, czy ją przyjmujemy, czy odrzucamy. Jeśli się na nią zdecydujemy, to z dalszymi już nie rozmawiamy, natomiast jeśli ją odrzucimy, do tej kandydatki wrócić już nie możemy. Jeżeli odrzucamy wszystkie, to zmuszeni jesteśmy do wybrania tej ostatniej. Czyli wiemy jedynie, ile kandydatek przyjdzie oraz jak przedstawia się aktualnie sprawdzana na tle tych, które już były. O tych, które pojawią się później, nie wiemy nic. Naszym zadaniem jest zmaksymalizowanie prawdopodobieństwa znalezienia najlepszej sekretarki.

Zauważmy najpierw, że oplaca się wybierać tylko spośród tych kandydatek, które okazały się lepsze od wszystkich poprzednich. To dlatego, że interesująca nas najlepsza sekretarka oczywiście spełnia ten warunek. Zauważmy też, że jeśli w pewnym momencie oplaca się nam zdecydować na jedną z takich kandydatek, to oplaca się także wybrać późniejszą kandydatkę, która jest lepsza od dotychczasowych (prawdopodobieństwo tego, że najlepsza sekretarka jest wśród dalszych kandydatek, maleje). Innymi słowy, najlepsza strategia to taka, w której najpierw odrzucamy k początkowych kandydatek spośród n , a następnie decydujemy się na pierwszą, która będzie lepsza od wszystkich dotychczasowych. Problemem jest teraz tylko znalezienie optymalnego progu.

Załóżmy, że najlepsza sekretarka jest na pozycji a w kolejce na rozmowę (tak jest z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$). Jeśli $a \leq k$, to przy użyciu naszej strategii jej nie wybierzemy. Natomiast jeśli $a > k$, to wybierzemy ją wtedy, gdy najlepsza z kandydatek o numerach $1, 2, \dots, a - 1$ będzie wśród pierwszych k . W przeciwnym przypadku nie dotarlibyśmy do kandydatki numer a , tylko skończylibyśmy wcześniej. Czyli w tym przypadku prawdopodobieństwo naszej wygranej wynosi $\frac{k}{a-1}$. Zatem całkowite prawdopodobieństwo, że uda nam się znaleźć najlepszą sekretarkę, wynosi

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{k}{k} + \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{k+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{k+2} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n-1} = \frac{k}{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right).$$

Dla dużych n , czyli dużej liczby kandydatek, możemy przybliżyć sumę przez całkę, otrzymując z powyższego wzoru

$$\frac{k}{n} \int_k^n \frac{1}{x} dx = \frac{k}{n} \ln \frac{n}{k} = -\frac{k}{n} \ln \frac{k}{n}.$$

Funkcja $-x \ln x$ przyjmuje swoje maksimum w punkcie $x = \frac{1}{e}$, co można łatwo sprawdzić, obliczając pochodną. Zatem będziemy mieć największą szansę wygranej dla $\frac{k}{n} \approx \frac{1}{e}$, czyli $k \approx \frac{n}{e} \approx 0,37n$. Podstawiając tę wartość do wzoru, stwierdzamy, że prawdopodobieństwo wybrania najlepszej sekretarki wynosi $\frac{1}{e} \approx 37\%$.

Zatem najlepsza strategia to odrzucić pierwszych 37% kandydatek, a następnie wybrać tę, która będzie lepsza od wszystkich do tej pory. To daje nam aż 37% szansy wybrania najlepszej ze wszystkich. Czyli matematyk w ponad 1/3 przypadków bierze, co najlepsze!

*student, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

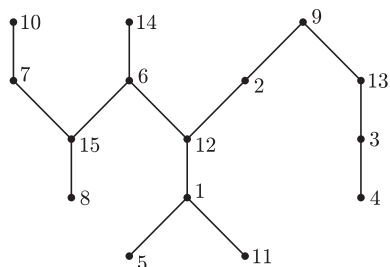
Nie można być wybrednym

Zauważmy, że jeśli będziemy mieć pecha i najlepsza kandydatka będzie wśród pierwszych 37% (a stanie się tak na... 37%), to dojdziemy do samego końca i weźmiemy ostatnią, która jest, krótko mówiąc, przeciętna. Zatem średnie miejsce, które zajmuje wśród wszystkich ta, którą wybierzemy, jest raczej dość odległe. Aby temu zapobiec, trzeba trochę zmodyfikować naszą strategię.

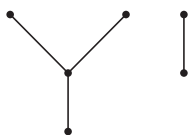
Jeśli przedostatnia testowana kandydatka zajmuje drugie miejsce wśród dotychczasowych, to lepiej zdecydować się na nią, a nie liczyć na to, że ostatnia będzie jeszcze lepsza. Ogólnie, łatwo zauważyć, że przedostatnia się „opłaca”, gdy jest w pierwszej połowie spośród dotychczasowych. Można obliczyć, kiedy warto wybrać trzecią od końca, czwartą, itd. W ten sposób dostaniemy strategię, która będzie zdefiniowana przez ciąg liczb określających, które miejsce wśród już widzianych może zajmować aktualna kandydatka, abyśmy się na nią zdecydowali.

Przykładowo, w przypadku 4 kandydatek taki ciąg to (0, 1, 2, 4). To oznacza, że pierwszej nigdy nie przyjmujemy, drugą, gdy jest najlepsza do tej pory, trzecią, gdy jest 1 lub 2, a czwartą zawsze (jeśli do niej dojdziemy). W tym przypadku można obliczyć, że średnie miejsce tej, na którą się zdecydujemy, to 1,875. Nasuwa się pytanie: jak to wygląda dla większych wartości n ? Okazuje się, że jest niesamowicie optymistycznie – dla 100 kandydatek taka strategia da nam sekretarkę z miejsca w przybliżeniu $3,6!$ Dla wartości n dążących do nieskończoności statystyczne miejsce wybranej kandydatki zbiega do około 3,83. Oznacza to, że nawet jeśli będzie 1 000 000 kandydatek, to i tak możemy przyjąć strategię, która da nam sekretarkę może nie najlepszą, ale na pewno ze ścisłej czołówki!

Trzeba pilnować porządku



Przykładowe uporządkowanie kandydatek na żonę. Krawędź pomiędzy wierzchołkami (kandydatkami) oznacza, że ta wyżej jest lepsza od tej niżej. Numery określają kolejność, w jakiej są sprawdzane.



Graf po sprawdzeniu 6 kandydatek.

Problem znalezienia żony od problemu znalezienia sekretarki różni się tym, że kandydatek na żonę nie da się porównywać tak łatwo, jak kandydatek na sekretarkę. Wiadomo – jedna lepiej gotuje, inna lepiej wygląda, jeszcze inna interesuje się matematyką bardziej niż pozostałe... Gdy „sprawdzamy” kolejne kandydatki, to nie możemy powiedzieć „ma trzecie miejsce na liście dotychczasowych”, tylko coś w rodzaju „była lepsza od tej, gorsza od tamtej, a z tą się nie da porównać”. Czyli kandydatki tworzą nam pewien porządek częściowy, który można przedstawić na grafie – jak obok.

Problem znalezienia najlepszej żony polega więc na tym, że sprawdzamy kandydatki w pewnej kolejności, na bieżąco tworzymy graf porządku częściowego i decydujemy, czy daną kandydatkę wybrać, czy też bezpowrotnie odrzucić. Najważniejsze pytanie brzmi: czy da się znaleźć taką strategię, aby dla dowolnej liczby kandydatek, niezależnie od tego, jaki graf tworzą ani w jakiej kolejności przychodzą, mieć pewną niezerową szansę znalezienia najlepszej. Przez najlepszą rozumiemy tu dowolną, od której nie ma lepszej, czyli element maksymalny porządku.

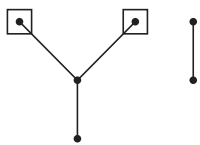
W 1980 roku Berezowski pokazał, że istnieje strategia, która daje nam zwycięstwo z prawdopodobieństwem równym co najmniej $a(1/w)^{w/(w-1)}$, gdzie a to liczba elementów maksymalnych, a w to szerokość grafu, czyli długość najdłuższego ciągu elementów nieporównywalnych. Ale to nie jest wynik, który nas satysfakcjonuje – wartość ta zależy od grafu, jaki tworzą kandydatki. Ponadto w pewnych przypadkach, na przykład gdy graf jest złożony z jednego elementu maksymalnego i wielu elementów mniejszych od niego, które są nieporównywalne między sobą, ta wartość może być dowolnie bliska zeru.

Najlepszy efekt daje wytrwałość i... rzut monetą

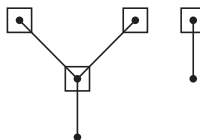
Przełom nastąpił w 1999 roku. Preater wykazał, że strategia, jakiej szukamy, istnieje i daje prawdopodobieństwo znalezienia najlepszej żony równe co najmniej 12,5%. Niedawno, bo w 2007 roku, ukazała się praca z udziałem polskich matematyków (Georgiou, Kuchta, Morayne, Niemiec), w której udowodniono, że strategia Preatera z drobną modyfikacją daje prawdopodobieństwo znalezienia najlepszej żony równe 25%!

Zgodnie z tą strategią, mając n kandydatek, należy po kolei:

- rzucić n razy monetą i odrzucić tyle początkowych kandydatek, ile wypadło orłów;
- rzucić raz monetą i jeśli wypadł orzeł, to zaznaczyć te wierzchołki, które mają największą wysokość, a jeśli wypadła reszka, to zaznaczyć wierzchołki, które mają największą lub o 1 mniejszą wysokość;
- wybrać pierwszą spośród następnych kandydatek, która będzie lepsza od jakiejś zaznaczonej i będzie najlepsza wśród dotychczasowych.



Graf po sprawdzeniu 6 kandydatek, gdy wypadł orzeł.



Graf po sprawdzeniu 6 kandydatek, gdy wypadła reszka.

Ta strategia daje nam prawdopodobieństwo 25%, że niezależnie od tego, jaki graf tworzą kandydatki na żonę i w jakiej kolejności przychodzą, wybierzemy właśnie tę najlepszą. Niesamowicie optymistyczny wynik – nawet jeśli bierzemy pod uwagę 3 miliardy kandydatek, to dzięki opisanej metodzie na 25% znajdziemy wśród nich najlepszą żonę!

No, ale to nie koniec. Nikt nie twierdzi, że lepiej się nie da. Wiemy, że wskazana wyżej strategia nie da lepszego prawdopodobieństwa, ale przecież może być inna, lepsza metoda. W opisanej strategii odrzucaliśmy średnio połowę kandydatek, a następnie losowaliśmy, które wierzchołki zaznaczamy – może lepiej będzie, jeśli po $1/3$ kandydatek zaznaczmy wierzchołki o największej wysokości, a po $2/3$ także te o wysokości o jeden mniejszej? A może trzeba szukać całkiem innej metody? Mam powody przypuszczać, że istnieje strategia dająca, jak w przypadku poszukiwań sekretarki, szansę równą $1/e$, czyli około 37%. Czekam tylko na kogoś, kto znajdzie tę strategię i udowodni. Zachęcam do poszukiwań – zarówno teoretycznych, jak i praktycznych!

Logarytm w liczbach naturalnych

Jan SZEJKO*

Zajmiemy się problemem znalezienia funkcji ze zbioru liczb całkowitych dodatnich w zbiór liczb naturalnych, możliwie wiernie oddającej podstawowe własności logarytmu. Następujące zadanie jest pierwszą próbą określenia własności, które szukana funkcja ma spełniać.

Przyjmujemy, że $0 \in \mathbb{N}$.

Problem 1. Czy istnieje funkcja $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{N}$, która nie jest stale równa 0 i spełnia warunki:

- 1) f jest niemalejąca,
- 2) dla dowolnych $k, l \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi $f(kl) = f(k) + f(l)$?

Nie jest to trudny problem; pokażemy, że, niestety, nie ma takiej funkcji.

Dowód. Dla każdego $n > 1$ zachodzi $f(n) > 0$, gdyby bowiem dla pewnego $n > 1$ było $f(n) = 0$, to również $f(n^k) = kf(n) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$. A stąd byłoby $f(n) \equiv 0$ ze względu na monotoniczność f , czyli sprzeczność.

Pokażemy, że $a^{f(b)} \geq b^{f(a)}$ dla $a, b > 1$. Dla każdej liczby wymiernej $\frac{p}{q}$, korzystając kolejno z warunków 2) i 1), otrzymujemy:

$$\frac{p}{q} > \frac{f(b)}{f(a)} \Leftrightarrow pf(a) > qf(b) \Leftrightarrow f(a^p) > f(b^q) \Rightarrow a^p > b^q.$$

Aby skorzystać z ciągłości potęgowania, trzeba zauważyć, że dla ustalonych a i b relacja między a^p i b^q zależy tylko od wartości ułamka $\frac{p}{q}$ (bo $a^p > b^q \Leftrightarrow a^{\frac{p}{q}} > b$), a następnie wziąć malejący ciąg liczb wymiernych zbiegający do $\frac{f(b)}{f(a)}$.

Potęgowanie jest ciągle, więc musi być również $a^p \geq b^q$ dla $\frac{p}{q} = \frac{f(b)}{f(a)}$, stąd $a^{f(b)} \geq b^{f(a)}$, czego należało dowieść. Zauważmy ciekawą rzecz: nigdzie nie założyliśmy nic więcej o a i b oprócz tego, że $a, b > 1$. Zatem analogiczna nierówność zachodzi, gdy zamienimy a i b miejscami: $b^{f(a)} \geq a^{f(b)}$. Mamy więc równość $a^{f(b)} = b^{f(a)}$ dla $a, b > 1$. To jednak nie może być prawda, ponieważ dla $a = 2, b = 3$ dostajemy równość liczby parzystej i nieparzystej. \square

Wiemy już, że nie ma funkcji, która spełnia warunki 1) i 2). Możemy jednak się zastanowić, co będzie, jeśli któryś z nich osłabimy. Zastąpmy warunek 2) słabszym warunkiem 2').

Problem 2. Czy istnieje funkcja $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{N}$, która nie jest stale równa 0 i spełnia warunki:

- 1) f jest niemalejąca,
- 2') dla $k, l \in \mathbb{Z}_+$ względnie pierwszych zachodzi $f(kl) = f(k) + f(l)$?

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Tu już nie możemy skorzystać z poprzedniej metody, ponieważ nie mamy podstaw do stwierdzenia, że $f(a^n) = nf(a)$. Można zauważyć, że gdyby taka tożsamość zachodziła, to w istocie spełniony byłby warunek 2).

Okazuje się, że po tym osłabieniu nadal nie istnieje odpowiednia funkcja – w rzeczywistości z tych słabszych warunków można wyprowadzić warunek 2), co pokazuje, że oba problemy są równoważne. Aby to udowodnić, najpierw wykażemy

Lemat 1. *Jeśli $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ spełnia warunki 1) i 2'), to dla każdego $a \in \mathbb{Z}_+$ istnieje takie $n \in \mathbb{Z}_+$, że*

$$f(an) = f(a(n+1)).$$

Lemat ten mówi w szczególności, że f musi mieć dowolnie długie przedziały, na których jest stała – jeśli bowiem $f(an) = f(a(n+1))$, to z monotoniczności f (warunek 1)) na całym przedziale $[an, a(n+1)]$, długości $a+1$, f musi być stała.

Zajmijmy się dowodem lematu.

Dowód. Gdyby dla danego a nie było takiej liczby n , to wiedzielibyśmy, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi $f(ak) + 1 \leq f(a(k+1))$, a więc również $f(a(k+l)) \geq f(ak) + l$ dla dowolnego $l \in \mathbb{Z}_+$, czyli f rośnie przynajmniej liniowo. Intuicyjnie stwierdzamy, że funkcja zachowująca się podobnie do logarytmu powinna rosnać mniej więcej tak, jak logarytm.

Formalnie można to uzasadnić następująco: niech p będzie liczbą pierwszą, która nie dzieli a , natomiast r jakąś liczbą niepodzielną przez p . Wtedy

$$f(p) + f(ar) = f(par) = f(a(r + (p-1)r)) \geq f(ar) + (p-1)r,$$

czyli $f(p) \geq (p-1)r$. Jednak r można wybrać dowolnie duże, co prowadzi do sprzeczności. Zatem musi istnieć takie n , że $f(an) = f(a(n+1))$. \square

Udowodnimy teraz, że nie istnieje funkcja, o której mówi problem 2.

Dowód. Niech a będzie dowolną liczbą całkowitą większą od 1. Pokażemy przez indukcję, że $f(a^n) = nf(a)$ dla $n \in \mathbb{Z}_+$. Podstawa indukcji jest trywialna: $f(a) = f(a)$.

Korzystając z lematu 1, ustalmy liczbę $k \in \mathbb{Z}_+$ (zależną tylko od a), taką, że

$$f(a(ak+1) - 1) = f(a(ak+1) + 1).$$

Co więcej, $f(a(ak+1)) = f(a) + f(ak+1)$ z warunku 2') i tę samą wartość f przyjmuje również dla $a(ak+1) \pm 1$. Chcemy wykazać tezę indukcyjną $f(a^{m+1}) = (m+1)f(a)$ przy założeniu, że $f(a^m) = mf(a)$. Mamy

$$f(a^{m+1}) + f(ak+1) = f(a^{m+1}(ak+1)) = f(a^m(a^2k+a)).$$

Z 2') oraz założenia indukcyjnego dostajemy

$$\begin{aligned} f(a^m(a^2k+a \pm 1)) &= f(a^m) + f(a^2k+a \pm 1) = f(a^m) + f(a^2k+a) = \\ &= mf(a) + f(a) + f(ak+1), \end{aligned}$$

więc z monotoniczności również

$$f(a^m(a^2k+a)) = (m+1)f(a) + f(ak+1).$$

Podsumowując, dostajemy

$$f(a^{m+1}) + f(ak+1) = f(a^m(a^2k+a)) = (m+1)f(a) + f(ak+1),$$

czyli po prostu tezę indukcyjną. To kończy dowód indukcyjny, że $f(a^n) = nf(a)$ dla $a, n \in \mathbb{Z}_+$. Stąd już warunek 2) jest prostą konsekwencją, a więc problem sprowadza się do poprzedniego. \square

Oczywiście, można dalej próbować osłabiać warunki. Nie wydaje się, by miało sens dalsze osłabianie 2), ale można zastąpić warunek 1) warunkiem mówiącym, że dla $n \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi $f(n+1) \geq f(n) - 1$, czyli niemalejący jest ciąg $a_n = f(n) + n$. Można też pójść w inną stronę i zastanowić się, co wyjdzie dla liczb wymiernych, czyli szukać funkcji $f : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}$ spełniającej którąś wersję warunków. Możliwości poszukiwań jest wiele, być może nawet uda się tak dobrać warunki, by odpowiednia funkcja istniała i nie była trywialna. Zachęcam Czytelników do samodzielnego zajęcia się tym tematem.

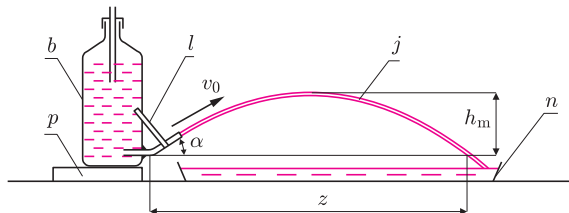
Oczywiście, nie wynika z tego jeszcze, że f jest od pewnego miejsca stała – np. funkcja „część całkowita \sqrt{n} ” ma dowolnie długie przedziały, na których jest stała, ale nie jest stała na $[N, \infty)$ dla żadnego $N \in \mathbb{N}$.

Wystarczy dobrać takie k , że $f(a^2k) = f(a^2(k+1))$. Z lematu 1 wynika, że taka liczba istnieje.

Rzutów ciąg dalszy, czyli badamy rzut ukośny

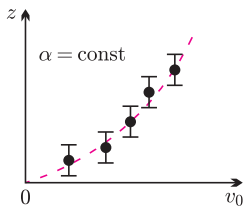
Stanisław BEDNAREK

Celem naszych dzisiejszych doświadczeń będzie badanie rzutu ukośnego. Układ doświadczalny do przeprowadzenia tych badań przedstawia rysunek 1. Wykorzystujemy w nim butelkę Mariotte'a, taką samą jak do badania rzutu poziomego. Butelkę tę ustawiamy na stole lub podłodze na jednej lub dwóch podkładkach. Od strony elastycznej rurki umieszczamy dużą kufkę fotograficzną lub brytfannę, tak żeby rurka znalazła się tuż nad jej brzegiem, można także wykonać to doświadczenie w wannie lub brodziku kabiny prysznicowej.



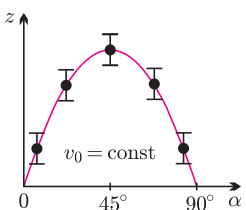
Rys. 1. Układ do badania rzutu ukośnego; b – butelka Mariotte'a, p – podkładka, l – taśma, n – kufka lub brytfanna, j – strumień wody, v_0 – prędkość początkowa, α – kąt rzutu, z – zasięg rzutu, h_m – maksymalna wysokość.

Dla uzyskania rzutu ukośnego rurka powinna być odchylona od poziomu ku górze o pewien kąt α . Można tego dokonać za pomocą kawałka taśmy samoprzylepnej, którą obejmujemy rurkę od dołu i przyklejamy końce taśmy do butelki. Strumień wody wypływający z rurki będzie poruszał się po paraboli zwróconej ramionami ku dołowi. Dla ułatwienia pomiarów długość z przyjmujemy z dobrym przybliżeniem jako zasięg rzutu ukośnego (rys. 1). Największe wzniesienie strumienia wody h_m nad tym odcinkiem przyjmujemy jako maksymalną wysokość rzutu ukośnego. Obie te wielkości możemy zmierzyć przy użyciu dwóch linijek, przy czym wygodnie jest zapewnić sobie pomoc drugiej osoby.



Rys. 2. Zależność zasięgu rzutu ukośnego z od jego prędkości v_0 ; α – kąt rzutu.

Mając przygotowany układ pomiarowy, możemy zbadać kilka zależności, charakteryzujących rzut ukośny. W każdym przypadku wszystkie pomiary przeprowadzamy co najmniej 5–6 razy i na podstawie uśrednionych wyników tych pomiarów sporządzamy wykres. Najpierw zajmijmy się związkiem zasięgu z rzutu ukośnego oraz jego prędkości v_0 (rys. 2). Kąt rzutu α będzie pozostawał w tym przypadku niezmienny. Prędkość rzutu ukośnego, $v_0 = \sqrt{2gh}$, obliczamy tak samo, jak w przypadku rzutu poziomego. Jaka krzywa stanowi wykres?



Rys. 3. Zależność między zasięgiem rzutu ukośnego z oraz kątem rzutu α ; v_0 – prędkość rzutu.

Następnie zajmijmy się zależnością zasięgu z od kąta rzutu α (rys. 3). Teraz prędkość rzutu v_0 będzie pozostawała niezmienna. Kąt rzutu α zmieniamy przez podniesienie elastycznej rurki względem poziomu. Czynimy to, przyklejając wyżej końce taśmy samoprzylepnej do butelki. Oczywiście, do pomiarów kątów używamy kątomierza. Staramy się przeprowadzić pomiary dla całego zakresu kątów 0–90°, zwracając przy tym uwagę, żeby dla większych kątów nie spowodować załamania elastycznej rurki. Jaką krzywą przedstawia teraz wykres? Dla jakiej wartości kąta rzutu zasięg jest maksymalny? Czy ten sam zasięg otrzymujemy tylko dla jednego kąta rzutu?

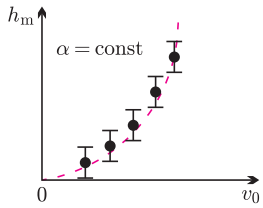
Zajmijmy się jeszcze maksymalną wysokością rzutu ukośnego h_m . Ustalamy pewien kąt rzutu α . Pierwszą z linijek umieszczamy poziomo, tak jakbyśmy chcieli zmierzyć nią zasięg rzutu. Drugą linijkę ustawiamy pionowo i mierzymy największe wzniesienie strumienia wody nad pierwszą linijką, czyli maksymalną wysokość rzutu h_m . Zmieniamy prędkość rzutu i powtarzamy pomiary. Uzyskane wyniki wykorzystujemy do sporządzenia wykresu przedstawiającego zależność maksymalnej wysokości h_m od prędkości rzutu v_0 (rys. 4).

Ostatnia seria pomiarów pozwoli nam uzyskać związek między maksymalną wysokością h_m a kątem rzutu α . Dla ustalonej prędkości rzutu kąt ten zmieniamy kilkakrotnie, podobnie jak to robiliśmy w przypadku zasięgu. Otrzymane wyniki pomiarów również wykorzystujemy do sporządzenia wykresu (rys. 5). Popatrzmy na ostatnie dwa wykresy. Czym różnią się kształty krzywych, które one przedstawiają?

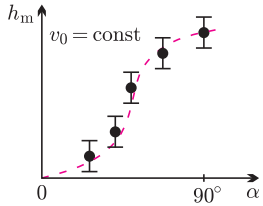
Przeprowadzimy teraz krótkie rozważania teoretyczne pozwalające na wspólne wyjaśnienie i ilościowe opisanie uzyskanych zależności dla rzutu ukośnego oraz badanego wcześniej rzutu poziomego. W tym celu rozpatrzmy rzut ukośny niewielkiego ciała A , umieszczonego na wysokości H , w układzie współrzędnych XOY , przyjętym jak na rysunku 6. Rzut ten możemy potraktować jako złożenie ruchu jednostajnego wzdłuż osi OX i jednostajnie zmiennego z przyspieszeniem ziemskim g wzdłuż osi OY . W chwili t od wyrzucenia ciała jego współrzędne x, y wyrażają się następującymi wzorami:

$$(1) \quad x = v_0 t \cos \alpha,$$

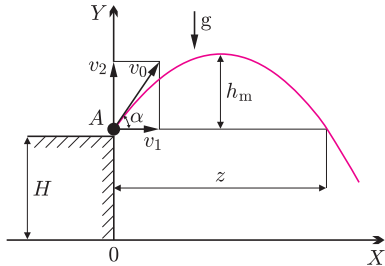
$$(2) \quad y = H + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$



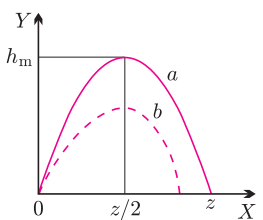
Rys. 4. Zależność maksymalnej wysokości rzutu ukośnego h_m od prędkości rzutu v_0 ; α – kąt rzutu.



Rys. 5. Zależność między maksymalną wysokością rzutu ukośnego h_m a kątem rzutu α ; v_0 – prędkość rzutu.



Rys. 6. Ogólny przypadek rzutu ukośnego ciała we współrzędnych prostokątnych XOY ; H – wysokość początkowa, v_1, v_2 – składowe prędkości początkowej v_0 , g – przyspieszenie ziemskie, z – zasięg, h_m – maksymalna wysokość, α – kąt rzutu.



Rys. 7. Tor rzutu ukośnego w przypadku pominięcia oporu powietrza a (parabola) i w przypadku jego uwzględnienia b (krzywa balistyczna); z – zasięg rzutu, h_m – maksymalna wysokość.

Z równania (1) wyznaczamy t i podstawiamy do równania (2). Otrzymujemy wówczas równanie toru w postaci

$$(3) \quad y = H + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Jest to równanie kwadratowe względem x , a zatem tor rzutu ukośnego istotnie stanowi parabola. Przyjmując warunek $\alpha = 0$, dostajemy rzut poziomy z prędkością v_0 , ciała umieszczonego na wysokości H . Równanie toru tego rzutu ma postać

$$(4) \quad y = H - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Nakładając na równanie (4) warunki $y = 0$ i $x = z$, dostajemy wzór na zasięg rzutu poziomego:

$$(5) \quad z = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Ze wzoru (5) wynika, że zasięg z w tym rzucie jest wprost proporcjonalny do prędkości rzutu oraz do pierwiastka kwadratowego z wysokości. Dlatego badając rzut poziomy, otrzymaliśmy linię prostą i parabolę, będącą wykresem funkcji pierwiastkowej – porównaj rysunki 3 i 4 przy eksperymentach dotyczących rzutu poziomego.

Teraz nałożymy warunki $H = 0$, $x = z$ i $y = 0$ na równanie (3). Warunki te odpowiadają upadkowi ciała rzuconego ukośnie pod kątem α . Otrzymane wówczas równanie po prostym przekształceniu daje wzór na zasięg rzutu ukośnego w postaci

$$(6) \quad z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Ze wzoru (6) wyciągamy wniosek, że zasięg rzutu ukośnego jest wprost proporcjonalny do kwadratu prędkości rzutu i sinusa podwójonego kąta, pod którym ciało wyrzucono. Teraz rozumiemy, dlaczego dla zależności zasięgu rzutu ukośnego od prędkości dostaliśmy parabolę (por. rys. 2), a dla zależności tego zasięgu od kąta wykres podwójonej funkcji sinus (por. rys. 3).

Pozostaje nam jeszcze wyprowadzenie wzorów na maksymalną wysokość rzutu ukośnego. Najłatwiej można to zrobić, korzystając ze znanego wzoru na współrzędną pionową y_w wierzchołka paraboli. Wzór ten znany z tablic matematycznych i podręczników ma postać

$$(7) \quad y_w = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

gdzie a, b, c są współczynnikami ogólnego równania paraboli

$$(8) \quad y = ax^2 + bx + c.$$

Wobec $H = 0$ i (3) mamy $c = 0$, co znacznie upraszcza obliczenia. Po porównaniu wspomnianych wzorów i podstawieniu współczynników a, b do wzoru (7) otrzymujemy

$$(9) \quad h_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Patrząc na wzór (9), widzimy, że maksymalna wysokość w rzucie ukośnym jest wprost proporcjonalna do kwadratów prędkości początkowej i sinusa kąta rzutu. Uzasadnia to otrzymanie paraboli dla zależności maksymalnej wysokości rzutu od jego prędkości (por. rys. 4) i wykresu funkcji sinus podniesionej do kwadratu dla zależności tej wysokości od kąta rzutu (por. rys. 5).

Dla uzupełnienia naszych rozważań należy jeszcze zwrócić uwagę na jeden istotny fakt polegający na pominięciu oporu powietrza. Kiedy prędkości rzutu są niewielkie – tak jak w naszych doświadczeniach – uproszczenie to jest uzasadnione. Tor rzutu ma wtedy kształt paraboli o opadających ramionach (rys. 7). Przy dużych prędkościach początkowych, wynoszących setki m/s, np. przy wystrzale z karabinu lub działa, oporu powietrza nie można pominąć. Istnienie oporu powietrza powoduje zmniejszenie zasięgu i maksymalnej wysokości. Rzeczywisty tor rzutu ulega skróceniu i obniżeniu w porównaniu z wynikiem uzyskanym przy zaniedbaniu oporów powietrza, zmieniając się z paraboli w tzw. krzywą balistyczną.

Na zakończenie problem do samodzielnego przemyślenia i sprawdzenia doświadczalnego. Jaką maksymalną wysokość rzutu można uzyskać w układzie przedstawionym na rysunku 1, przy pominięciu wszelkich oporów ruchu? Pod jakim kątem należy wykonać ten rzut? Ile będzie wynosił jego zasięg?

Rozstania na zawsze (Planck)

Dwa miesiące przed 220 rocznicą zburzenia Bastylli, 14 maja 2009 roku z Gujany Francuskiej wystrzelono raketę Ariane, która oprócz Herschela, o którym pisaliśmy miesiąc temu, zabrała w podróż bez powrotu laboratorium kosmiczne Planck. Oba instrumenty zostaną umieszczone 1,5 miliona kilometrów od Ziemi po przeciwnej stronie niż Słońce i będą krążyć wokół punktu Lagrange'a L2 (patrz sierpniowe *Aktualności*).

Cel misji Planck [1] jest równie prosty co ambitny: ostatecznie ustalić geometrię i skład Wszechświata. Oczywiście, nic ostatecznie zrobić się nie da (no, może z jednym wyjątkiem). Chodzi o to, że Planck ma wyzyskać informację odcisniętą w reliktowym promieniowaniu tła.

Wykorzystywanie tego źródła informacji do poznawania historii i struktury Wszechświata zapoczątkował satelita COBE, którego zespół badawczy 17 lat temu ogłosił odkrycie fluktuacji promieniowania relikowego na poziomie 10^{-5} .

Obecnie prym w tej dziedzinie wiedzy satelita WMAP wspomagany przez eksperymenty balonowe. Głównie dzięki niemu wiemy, że Wszechświat wygląda na euklidesowy, ma prawie 13,7 miliardów lat (z procentową dokładnością), składa się tylko w niecałej jednej dwudziestej ze znanej materii, jedną czwartą stanowi nieznaną natury ciemna materia, a prawie trzy czwarte całkowitej gęstości materii przypada na jeszcze mniej znaną ciemną energię. Informacje te pochodzą nie tylko z analizy promieniowania relikowego, ale, razem z kilkoma niewymienionymi, stanowią podstawę modelu Λ CDM, uznawanego za punkt wyjścia do wszelkich rozważań kosmologicznych.

Zakłada się, że Planck będzie działał tylko kilkanaście miesięcy, ale w tym czasie ma tak poprawić dotychczasowe wyniki zbierane przez kilka lat, że osiągną one poziom dokładności odpowiadający niepewności związanej z naturalnym szumem kosmosu. Jest to możliwe dzięki wyjątkowej precyzji instrumentów nowej generacji. Na zdjęciu widać odbicie anten i bolometrów w półtorametrowym zwierciadle. Instrumenty zostały schłodzone na początku lipca. Niektóre elementy Plancka stały się najzimniejszymi obiektami w przestrzeni kosmicznej, osiągając temperaturę zaledwie 0,1 K powyżej zera bezwzględnego.

Podstawowym celem misji jest sporządzenie map promieniowania całego nieba w dziewięciu pasmach częstości (od 33 do 857 GHz). Dla siedmiu z tych pasm będzie możliwy również pomiar liniowej polaryzacji promieniowania. Mapy będą wykonane z rozdzielczością kątową od 33 do 5 minut łuku, a dokładność pomiaru temperatury osiągnie 2 milionowe.

Satelita będzie obracał się wokół osi skierowanej pionowo na zamieszczonym zdjęciu, co pozwoli jego teleskopowi zeskanować w ciągu minuty wąską obęcz nieba. Oś będzie skierowana mniej więcej wzdłuż kierunku od Słońca, ale zmiany jej położenia w granicach 15 stopni, w połączeniu

z obiegiem wokół Słońca, pozwolą na przebadanie całego nieba w pół roku. W czasie trwania misji takie mapy zostaną wykonane dwukrotnie.

Rejestracja w wielu pasmach, z jednoczesnym pomiarem polaryzacji, pozwoli na bardzo dobre rozróżnienie między mikrofalowym promieniowaniem tła, szumem kosmosu oraz innymi, zlokalizowanymi w przestrzeni, źródłami mikrofal. Oprócz głównego, kosmologicznego, programu badawczego, Planck ma dostarczyć informacji na temat pozagalaktycznych źródeł mikrofal, składu i własności gazu międzygwiazdowego, wielkoskalowej struktury oraz pól magnetycznych Drogi Mlecznej, zwartych obiektów gwiazdowych czy zagrażających Ziemi asteroid.

Głównym celem misji pozostaje jednak weryfikacja lub falsyfikacja modeli kosmologicznych. Oprócz dokładniejszego wyznaczenia parametrów dowolnego modelu (ponieważ te parametry nie są mierzone bezpośrednio, więc ich wartości zawsze są związane z konkretnym modelem ewolucji Wszechświata; możliwe jest, że kilka konkurencyjnych modeli, lub ich wariantów, może zgadzać się z wszystkimi dostępnymi ograniczeniami) można będzie rozróżniać różne rodzaje inflacji czy różne warianty ciemnej energii.

Oprócz tego Planck umożliwi odróżnienie pierwotnej anizotropii promieniowania tła (związanej ze stanem Wszechświata w momencie, gdy 380 milionów lat po Wielkim Wybuchu stał się przezroczysty) od wtórnych anizotropii wywołanych propagacją tego promieniowania (a więc niosących unikalne informacje na temat dalszej ewolucji Wszechświata).

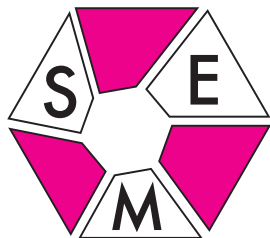
Rok po zakończeniu misji wszystkie dane zostaną udostępnione całej naukowej społeczności. To już naprawdę niedługo i można się na ten moment przygotować. Polska nie jest członkiem ESA (European Space Agency), w której posiadaniu jest zarówno Planck, jak i Herschel, więc może – twórczo opracowując dane – udałoby się w ten sposób wtrącić jakiś polski akcent? Wystarczy tylko mieć dobry pomysł.

Piotr ZALEWSKI

[1] <http://planck.esa.int>



Planck przed włożeniem do Ariane (zdjęcie: ESA).



Ułamki proste...

... to takie, których licznikiem jest 1, a mianownik jest liczbą całkowitą większą od 1.

Egipcjanie z bliżej nieznanego powodów uważali, że wszystkie ułamki pomiędzy 0 i 1 należy przedstawiać w postaci sumy różnych ułamków prostych. Okazuje się, że zawsze da się to zrobić.

Rozkład na różne ułamki proste

Oto **algorytm**: od ułamka, który chcemy rozłożyć, odejmujemy największy mniejszy od niego ułamek prosty. Operację powtarzamy dla otrzymanej różnicy, aż do chwili, gdy i ona jest ułamkiem prostym. Algorytm ten ma własność stopu, bo liczniki kolejnych różnic są coraz mniejsze (dlaczego?), więc w końcu muszą stać się jedynką.

Przykład:

$$9/19 - 1/3 = (27 - 19)/(19 \cdot 3) = 8/57,$$

$$8/57 - 1/8 = (64 - 57)/(57 \cdot 8) = 7/456,$$

$$7/456 - 1/66 = (462 - 456)/(456 \cdot 66) = 6/(456 \cdot 66) = 1/(456 \cdot 11) = 1/5016.$$

Zatem

$$\frac{9}{19} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{66} + \frac{1}{5016}.$$

Rozkład **nie jest jednoznaczny**, bowiem np.

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)},$$

co pozwala liczbę składników dowolnie powiększać.

Podany algorytm pozwala rozłożyć ułamek k/n na nie więcej niż k ułamków prostych. Podany przykład pokazuje jednak, że zdarza się (wskutek skrócenia), iż liczba składników może być mniejsza. Stąd wywodzą się np. dwie hipotezy

Hipoteza Pála Erdősa–Ernsta G. Strausa:

dla dowolnego n ułamek $4/n$ daje się rozłożyć na sumę dokładnie trzech różnych ułamków prostych;

Hipoteza Andrzeja Schinla:

dla dowolnego k istnieje taka liczba N , że dla $n > N$ ułamek k/n można rozłożyć na trzy ułamki proste.

W przypadku pierwszej hipotezy sprawdzono jej prawdziwość dla wszystkich $n < 10^{14}$.

Dla wprawy sprawdźcie (wskazówka jest wyżej), czy

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{19} + \frac{1}{66} + \frac{1}{5016} = \frac{1}{2} + \frac{1}{38}.$$

Rozwinięcia dziesiętne

Jak wiadomo, rozwinięcie dziesiętne ułamka może być skończone lub okresowe. Inne rozwinięcia zarezerwowane są dla liczb niewymiernych. Ale jak długi może być okres w takim rozwinięciu?

Każdy może sobie sprawdzić, że

$$\frac{1}{3} = 0,(3), \quad \frac{1}{7} = 0,(142857), \quad \frac{1}{11} = 0,(09),$$

$$\frac{1}{13} = 0,(076923), \quad \frac{1}{17} = 0,(0588235294117647).$$

Okresy liczb $1/7$ i $1/17$ mają długość odpowiednio 6 i 16, czyli zaledwie o 1 mniejszą od ich mianowników.

W takiej sytuacji, to znaczy gdy rozwinięcie dziesiętne ułamka $1/k$ ma okres długości $k - 1$, mówimy, że jest to rozwinięcie maksymalne. Nasuwa się pytanie, czy faktycznie okres nie może być dłuższy.

Nietrudno to uzasadnić. Liczby przy dzieleniu dziesiętnym zaczynają się powtarzać, gdy drugi raz trafimy na tę samą resztę. A różnych (niezerowych) reszt może być dokładnie $k - 1$.

Przykłady: przy dzieleniu 1 przez 7 kolejno pojawiają się reszty 1, 3, 2, 6, 4, 5 i znów 1, 3 itd.; przy dzieleniu przez 17 reszty to 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, 1 i znów 10, 15 itd.

Natomiast przy dzieleniu przez 13 pojawiają się tylko niektóre spośród możliwych reszt: 10, 9, 12, 3, 4, 1. Jeszcze gorzej jest przy 11 – tylko 10 i 1. A przy 3 mamy już tylko 1.

A czy zawsze jest tak, że liczba reszt pojawiających się przy dzieleniu przez k dzieli $k - 1$?

Powstaje pytanie, odwrotności których liczb mają w systemie dziesiętnym maksymalne okresy. O dziwo, pełna odpowiedź na to pytanie nie jest znana – praktycznie jedyną ogólną metodą jest... wykonanie dzielenia.

Chętnym polecamy sprawdzenie, że maksymalne okresy mają odwrotności liczb 19, 23, 97, 337.

Z życia SEM

2 czerwca 2009 roku w Piotrkowie odbył się pod patronatem SEM i przy współpracy Wojewódzkiego Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli oraz I LO im. Bolesława Chrobrego

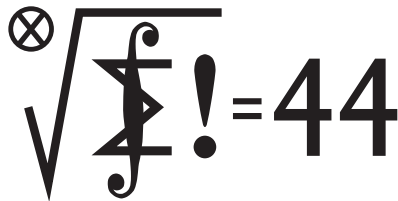
Dzień Dziecka z Matematyką.

O pierwszym plakacie SEM (patrz np. *Delta* 2/2009) mówił Waldemar Pompe, po czym odbyło się spotkanie nauczycieli poświęcone pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie. Spotkanie zakończyły zajęcia warsztatowe dla uczniów pod tytułem *Rozwiązywanie zadań konkursowych z geometrii*.

Informujcie nas, jakie spotkania odbywają się w Waszej miejscowości!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2009

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
573 ($WT = 1,62$) i 574 ($WT = 2,64$)
z numeru 1/2009

Marcin Kasperski	Warszawa	45,50
Krzysztof Dorobisz	Kraków	43,27
Andrzej Idzik	Bolesławiec	43,15
Tomasz Warszawski	Kraków	42,26
Zbigniew Galias	Kraków	42,05
Paweł Najman	Jaworzno	35,68

Do grona Weteranów dołączył
Marcin Kasperski.

581. Niech \mathcal{F} będzie rodziną danych $2^{n-2} + 1$ podzbiorów zbioru X . Jeżeli pewne dwa zbiory $A, B \in \mathcal{F}$ są rozłączne, teza jest oczywista. Dalej odrzucamy ten banalny przypadek z rozważań.

Podzbiór U zbioru X nazwiemy *ciekawym*, gdy ma niepuste przecięcie z każdym zbiorem $A \cap B$ ($A, B \in \mathcal{F}$); w szczególności cały zbiór X jest ciekawy.

Przypuśćmy, że X jest sumą dwóch rozłącznych zbiorów ciekawych U i V , liczących odpowiednio u i v elementów. Wszystkie podzbiory zbioru U grupujemy w pary zbiorów dopełniających się do całego zbioru U . Z każdej takiej pary co najwyżej jeden jest częścią wspólną zbioru U i pewnego zbioru $A \in \mathcal{F}$ (bo gdyby dla pewnych $A, B \in \mathcal{F}$ zbiory $A \cap U$ oraz $B \cap U$ dopełniały się do U , to zbiór $A \cap B \cap U$ byłby pusty, wbrew temu, że U jest zbiorem ciekawym). Zatem co najwyżej 2^{u-1} podzbiorów zbioru U ma postać $A \cap U$ dla $A \in \mathcal{F}$.

Analogicznie, co najwyżej 2^{v-1} podzbiorów zbioru V ma postać $A \cap V$ dla $A \in \mathcal{F}$. To jednak implikuje, że liczność rodziny \mathcal{F} nie przekracza $2^{u-1} \cdot 2^{v-1} = 2^{n-2}$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że zbioru X nie da się rozbić na dwa zbiory ciekawe.

Zadania z matematyki nr 585, 586

Redaguje Marcin E. KUCZMA

585. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu przecięcia jego przekątnych na proste BC i DA . Punkty M i N są środkami boków AB i CD . Wykazać, że punkty K i L są symetryczne względem prostej MN .

586. Dowieść, że każdy dziewięcioelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \dots, 99\}$ ma takie dwa rozłączne niepuste podzbiory A i B , że suma liczb w zbiorze A jest równa sumie liczb w zbiorze B .

Zadanie 586 zaproponował pan Krzysztof Dorobisz z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2009

Przypominamy treść zadań:

581. Dany jest n -elementowy zbiór X ($n \geq 4$) oraz $2^{n-2} + 1$ jego różnych podzbiorów. Wykazać, że wśród tych podzbiorów istnieją takie cztery, których część wspólna jest zbiorem pustym lub jednoelementowym.

582. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par funkcji $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, mających pochodne wszystkich rzędów i spełniających warunki: $f'(0) = g'(0) = 1$ oraz

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \cdot g^{(n)}(x)$$

dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Niech U_0 będzie zbiorem ciekawym o minimalnej liczbie elementów i niech u_0 będzie dowolnym jego elementem; zbiór $U_0 \setminus \{u_0\}$ nie jest już ciekawy. Także zbiór $V_0 = X \setminus U_0$ nie jest ciekawy, w myśl konkluzji poprzedniego akapitu. Istnieją zatem takie zbiory $A, B \in \mathcal{F}$ oraz takie zbiory $C, D \in \mathcal{F}$, że $A \cap B$ nie przecina zbioru $U_0 \setminus \{u_0\}$, zaś $C \cap D$ nie przecina V_0 . Tak więc u_0 jest jedynym elementem, który może należeć do $A \cap B \cap C \cap D$. Zbiory A, B, C, D tworzą czwórkę, o jaką chodziło.

582. Wymagane warunki spełnia na przykład każda para funkcji postaci

$$f(x) = ae^{x/a}, \quad g(x) = be^{x/b},$$

gdzie $a, b > 0$, $a + b = 1$.

Oznaczając $\alpha = 1/a$, $\beta = 1/b$, mamy bowiem

$$h(x) = f(x)g(x) = abe^{(\alpha+\beta)x}.$$

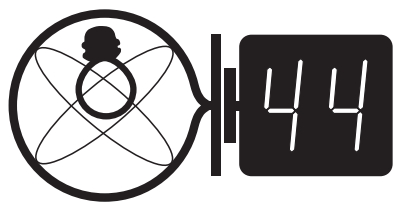
Po n -krotnym zróżniczkowaniu:

$$f^{(n)}(x) = a\alpha^n e^{\alpha x}, \quad g^{(n)}(x) = b\beta^n e^{\beta x},$$

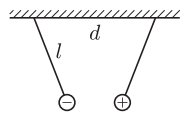
$$h^{(n)}(x) = ab(\alpha + \beta)^n e^{(\alpha+\beta)x}.$$

A ponieważ $\alpha + \beta = \alpha\beta$, dostajemy żadaną równość $h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)g^{(n)}(x)$.

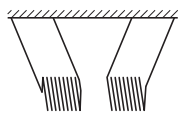
Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2009



Rys. 1



Rys. 2

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
472 ($WT = 1,90$) i 473 ($WT = 3,40$)
z numeru 2/2009

Tomasz Wietecha	Tarnów	37,66
Andrzej Idzik	Bolesławiec	33,04
Krzysztof Magiera	Łosiów	30,37
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	28,18
Michał Koźlik	Gliwice	17,52

478. Oznaczmy kąt między pionem a promieniem koła poprowadzonym do punktu oderwania (albo – do punktu spadku) jako α , a czas lotu jako t . Wzdłuż osi poziomej ruch ciała jest jednostajny, zatem

$$(1) \quad 2r \sin \alpha = \omega r \cos \alpha \cdot t,$$

natomiast wzdłuż osi pionowej mamy

$$(2) \quad 2wr \sin \alpha = gt.$$

Ponadto jeśli ciało ma upaść na to samo miejsce koła, to kąt jego obrotu w ciągu czasu t powinien być równy $2\alpha + 2\pi n$ (gdzie n – liczba całkowita), czyli

$$(3) \quad \omega t = 2\alpha + 2\pi n.$$

Z równań (1) i (3) otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha + \pi n.$$

Dla $n = 0$ i $\alpha < \pi$ rozwiązanie nie istnieje, natomiast dla $n = 1$ rozwiązaniem jest $\alpha_1 = 1,352$ rad, a dla $n = 2$ mamy $\alpha_2 = 1,442$ rad. Ponieważ z równań (1) i (2) wynika

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r \cos \alpha}},$$

więc $\omega_1 = 12,3$ rad/s, $\omega_2 = 16,0$ rad/s.

479. Ponieważ przy ładowaniu jednego kondensatora z drugiego końcowe napięcie zawsze jest mniejsze od maksymalnego, więc żądane napięcie $2U$ można uzyskać tylko, łącząc wszystkie 3 kondensatory szeregowo (po uprzednim naładowaniu C_1 i C_2). Należy zauważyć, że w przeciwieństwie do „zwykłego” połączenia szeregowego ładunki na tych kondensatorach nie będą na ogół jednakowe, zatem podczas rozładowania baterii poszczególne kondensatory nie rozładują się do zera. Nie ma to jednak znaczenia dla przepływu energii w obwodzie, do którego taka bateria byłaby dołączona (liczy się tylko całkowite napięcie i pojemność zastępcza). Rozważmy dwie najprostsze możliwości:

- oba kondensatory C_1 i C_2 zostają naładowane jednocześnie, tzn. połączone równolegle i dołączone do C ,
- najpierw ładujemy kondensator C_1 , następnie C_2 (oba przez dołączenie do C).

W przypadku a) na każdym kondensatorze wystąpi jednakowe napięcie $U' = UC/(C + C_1 + C_2)$, a jeśli zestawiona bateria

Zadania z fizyki nr 482, 483

Redaguje Jerzy B. BROJAN

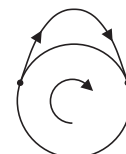
482. Dwa małe ciała o jednakowych masach zawieszono na nitkach o długości l zaczepionych w odległości d od siebie (rys. 1). Ciała są naładowane przeciwnymi znakami. Jaki warunek muszą spełniać l i d , aby przy pewnych wartościach mas i ładunków mogły istnieć dwa różne położenia równowagi ciał? Jaki musi być ten warunek, aby mogły istnieć trzy różne położenia równowagi? Czy są to położenia równowagi trwałej, czy nietrwałej? Nie bierzemy pod uwagę sytuacji, w której ciała się stykają.

483. Dwie zwojnice zawieszono na przewodach. Po włączeniu zasilania prądem przemiennym przyciągnęły się (rys. 2). Gdy między nie wstawiono pionową płytę z pewnego materiału, zaczęły się odpychać. Na czym polega efekt? Jaki to był materiał?

Rozwiązania zadań z numeru 5/2009

Przypominamy treść zadań:

478. Koło o promieniu $r = 30$ cm obraca się ze stałą prędkością kątową w płaszczyźnie pionowej. W pewnym momencie od koła oderwało się małe ciało (np. kropla wody), a po pewnym czasie spadło na to samo miejsce koła, przyklejając się bez straty energii (tzn. prędkości ciała i brzegu koła w miejscu upadku były jednakowe – zob. rys. 3). Podać co najmniej dwie wartości prędkości kątowej ω , przy których takie zdarzenie jest możliwe. Opór powietrza pominąć.



Rys. 3

479. Mamy do dyspozycji kondensator o pojemności C naładowany do napięcia U oraz 2 nienaładowane kondensatory, których pojemności C_1 i C_2 możemy wybrać według życzenia. Kondensatory można dowolnie łączyć w obwód, rozłączać i łączyć ponownie. Dobrać wartości C_1 i C_2 oraz zaprojektować takie połączenia i przełączenia, aby korzystając tylko z energii zgromadzonej w pierwszym kondensatorze uzyskać baterię naładowaną do napięcia $2U$ i o maksymalnej możliwej pojemności zastępczej.

Czy możliwe jest wytworzenie napięcia $2U$, jeśli poza kondensatorem naładowanym dysponujemy tylko jednym kondensatorem dodatkowym oraz zwojnicą? Jeśli tak, to jaką pojemność baterii można uzyskać?

ma mieć napięcie $2U$, to $U' = \frac{2}{3}U$, stąd $C_1 + C_2 = \frac{1}{2}C$. Maksymalna wartość pojemności zastępczej

$$C_z = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}$$

wystąpi dla $C_1 = C_2 = \frac{1}{4}C$ i wynosi $C_z = \frac{1}{9}C$.

W przypadku b) na kondensatorze C_1 otrzymamy napięcie $U_1 = UC/(C + C_1)$, a potem na dwóch pozostałych napięcie $U_2 = U_1C/(C + C_2)$. Dalej postępujemy jak poprzednio: z warunku $U_1 + 2U_2 = 2U$ wyznaczamy związek między C_1 a C_2 (teraz ma on postać $(C + 2C_1)(C + C_2) = 2C^2$), a szukając maksymalnej wartości C_z , otrzymujemy $C_1 = \frac{1}{4}C$, $C_2 = \frac{1}{3}C$, $C_z = \frac{1}{8}C$.

Bardziej skomplikowane pomysły – np. po czynnościach opisanych w b) łączymy jeszcze C_1 z C_2 – nadają się już raczej tylko do analizy numerycznej. Autorowi nie udało się w żadnym z nich przekroczyć wartości osiągniętej w powyższym przypadku b), tzn. $C_z = \frac{1}{8}C$.

Jeśli mamy do dyspozycji kondensator o pojemności C_1 oraz zwojnicę (indukcyjność), to możemy zamknąć obwód zestawiony z wyjściowego kondensatora C i tych elementów, a następnie otworzyć go po upływie połowy okresu drgań. W tym momencie prąd nie płynie (tak jak w chwili początkowej), zatem energia zwojnicy jest równa zero i – w odróżnieniu od obwodów poprzednich – zachowany jest nie tylko ładunek, lecz także energia kondensatorów. Oznaczając przez U' napięcie otrzymane na kondensatorze C , a przez U_1 napięcie na C_1 , mamy równania

$$CU = CU' + C_1U_1, \quad CU^2 = CU'^2 + C_1U_1^2,$$

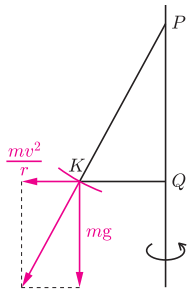
zatem

$$U' = U \frac{C - C_1}{C + C_1}, \quad U_1 = U \frac{2C}{C + C_1}.$$

Ponieważ suma tych napięć ma wynosić $2U$, więc $C_1 = \frac{1}{3}C$, a dalej $C_z = \frac{1}{4}C$. Wyniku tego nie można już poprawić, gdyż cała energia początkowa została przekształcona w energię „użyteczną” (jak łatwo sprawdzić, ładunki obu kondensatorów są jednakowe, więc razem z całą baterią także każdy oddzielnie rozładuje się do zera). Zaprojektowaliśmy zatem doskonały „transformator napięcia stałego” – gdyby jeszcze dało się skonstruować taki układ przełączników!



Rozwiązanie zadania F 748.
Zaniedbując lepkość i napięcie powierzchniowe wody, otrzymamy paraboloidę obrotową. Przy takim założeniu poszukujemy bowiem powierzchni, z której – przy obracaniu jej z prędkością v – nie stoczy się położona w dowolnym punkcie kulka, a to ze względu na to, iż wypadkowa siły odśrodkowej (mv^2/r) i grawitacji (mg) będzie prostopadła do tej powierzchni. Niech prosta PQ (rysunek) będzie osią obrotu, a PK niech będzie prostopadła do szukanej powierzchni (ponadto $KQ = r$).



Z podobieństwa trójkątów mamy

$$\frac{mv^2/r}{mg} = \frac{KQ}{PQ},$$

zatem

$$v^2 = \frac{gr^2}{PQ},$$

czyli

$$v = r \sqrt{\frac{g}{PQ}}$$

i czas pełnego obrotu jest równy

$$T = \frac{2\pi r}{r \sqrt{g/PQ}} = 2\pi \sqrt{\frac{PQ}{g}}.$$

Ponieważ ten czas jest taki sam dla wszystkich punktów powierzchni, więc poszukujemy takiej krzywej, dla której rzut odcinka prostopadłej do krzywej (od punktu na niej do osi obrotu) na tę oś (na rysunku PQ) jest taki sam dla wszystkich punktów.

Dla paraboli $x^2 = py$ w jej punkcie (a, b) styczna ma równanie $ax = \frac{1}{2}p(y + b)$, więc prostopadła w tym punkcie ma równanie $\frac{1}{2}px = -ay + a(\frac{1}{2}p + b)$. Interesujący nas odcinek ma więc stałą długość $p/2$, co kończy dowód.

Patrz w niebo

Gromady kuliste gwiazd są obiektami bardzo starymi. Dowodzi tego zarówno ich kształt, jak i skład chemiczny gwiazd. Uważa się bowiem, że kulisty kształt świadczy o osiągnięciu przez gromadę stanu równowagi, na co trzeba było długo poczekać. Gwiazdy zaś zawierają mało pierwiastków ciężkich, ponieważ w epoce ich powstawania nie było jeszcze dość materii rozproszonej wzbogaconej w te pierwiastki, wyprodukowane w innych, starszych gwiazdach. A w ciągu miliardów lat dzielących nas od tamtego czasu z gromadą mogły zdarzyć się różne dziwne rzeczy.

I tak kilka lat temu pojawiła się wiadomość, że najbardziej czerwone gwiazdy najjaśniejszej na niebie gromady Omega Centauri poruszają się wspólnie w nieco innym kierunku niż reszta gwiazd gromady. Wysłunęto więc przypuszczenie, że gromada wchłonęła niedawno te niesforne gwiazdy, które, być może, tworzyły przedtem inną gromadę. Wyznaczenie składowych prędkości gwiazd w takiej gromadzie jest problemem niesłychanie trudnym. Z pomiarem prędkości radialnych gwiazd nie ma problemu, ale pomiar składowych prostopadłych do promienia widzenia to prawdziwe wyzwanie. Gromada bowiem znajduje się w takiej odległości (5,2 kpc), że wszelkie przesunięcia jej gwiazd na niebie są na granicy najlepszych dzisiejszych metod obserwacyjnych. Nic więc dziwnego, że konkurencja wysunęła inne tłumaczenie, iż mianowicie popełniono całkiem uzasadnione błędy obserwacyjne. Zdawało się, że czasy popełniania takich błędów dawno minęły! Jednak przesunięcia gwiazd wyznaczono na podstawie dwóch zestawów zdjęć uzyskanych wprawdzie tym samym teleskopem, ale wcześniejsze zdjęcia powstały przed, a późniejsze po jego przeprowadzce (!) z Południowej Afryki do Australii. Otóż ta przeprowadzka mogła przypadkowo spowodować minimalną zmianę geometrii obiektywu (był to refraktor), co zaowocowało pozornym przesunięciem gwiazd najbardziej czerwonych. Technicznych szczegółów można tylko się domyślać, gdyż australijskie obserwatorium kilka lat temu spłonęło.

Bez względu na wynik tego sporu naukowego, który chyba pozostanie nierozstrzygnięty, warto zwrócić uwagę na to, jak delikatnym urządzeniem jest teleskop i że beztraska w posługiwaniu się nim może (przynajmniej według niektórych) doprowadzić do odkryć pozornych.

Tomasz KWAST

Wrzesień

Lato dobiega końca, tymczasem wysoko na niebie wieczorami dominuje tzw. Letni Trójkąt, czyli trzy bardzo jasne gwiazdy: Wega (alfa Lutni), Deneb (alfa Łabędzia) i Altair (alfa Orła). Przez ten Trójkąt przebiega też Droga Mleczna, sięgająca południowo-zachodniego horyzontu, a tam jest przecież Strzelec i centrum Galaktyki. Jest zatem co oglądać, nawet gdy ma się do dyspozycji tylko lornetkę. Trudno lornetką prowadzić naukowe obserwacje, ale samo spokojne „przejechanie” nią wzdłuż Drogi Mlecznej może dostarczyć w pogodną noc niezapomnianych wrażeń. Niemal w każdym miejscu w polu widzenia trafia się jakaś gromada otwarta. Na granicy zasięgu nieuzbrojonego oka jest gwiazda 61 Cygni, gwiazda podwójna, której składniki dzieli na niebie pół minuty łuku. W istocie jest to układ pięciu gwiazd, ale lornetka już nie wystarczy, by się o tym przekonać. Gwiazda odległa jest o 3,4 pc, i jest dzięki temu jedną z pierwszych, których odległości udało się wyznaczyć. Dokonał tego F. W. Bessel w 1838 roku – w tym samym roku zmierzono odległość alfy Centaura i Wegi.

Venus jest we Lwie, czyli tak blisko Słońca, że jej nie widać. Mars jest w Bliźniętach i wschodzi koło północy. Jowisz jest w Koziorożcu i wieczorem jest już nad południowym horyzontem. Saturn jest na granicy Lwa i Panny, czyli praktycznie za Słońcem. Pełnia Księżyca wypada 4 IX, a now 18 IX. Księżyc 13 IX zakryje Marsa, ale zobaczą to mieszkańcy tylko obszarów arktycznych, a 24 IX Antaresa, co będzie widoczne na Dalekim Wschodzie i na Pacyfiku. Venus zbliży się do Regulusa 20 IX na pół stopnia, ale w Polsce będzie wtedy dzień. Lato – jak powiedzieliśmy – kończy się i 22 IX będzie jesienna równonoc, i zacznie się jesień. Żadnych przewidywalnych rojów meteorów we wrześniu nie będzie.

T. K.



Dzielenie figur raz jeszcze

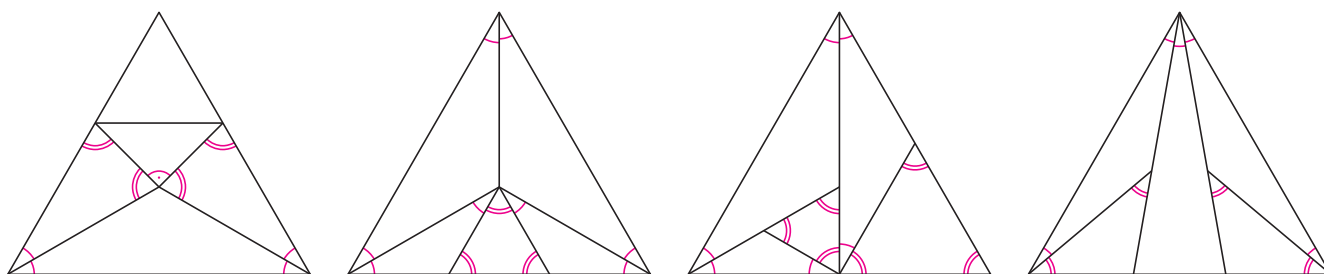
Joanna JASZUŃSKA

W poprzednim numerze *deltoidu* pojawiło się mnóstwo króciutkich zadań dotyczących dzielenia figur. Oto rozwiązania niektórych spośród nich.

Pojęcie *podziału* figury wyjaśnijmy na przykładzie: przekątne kwadratu *dzielą* go na cztery przystające trójkąty prostokątne równoramienne.

1. Podziel trójkąt równoboczny na 5 trójkątów równoramiennych.

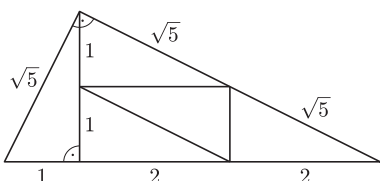
R. Kilka możliwych rozwiązań przedstawia rysunek 1. □



Rys. 1

2. Czy istnieje trójkąt, który można podzielić na 5 trójkątów przystających?

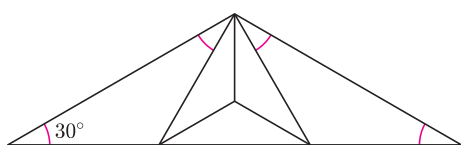
R. Istnieje (rys. 2). Warto zwrócić uwagę, że trójkąt został podzielony na trójkąty przystające podobne do niego. Czy są inne rozwiązania? □



Rys. 2

3. Czy istnieje trójkąt nieprostokątny, który można podzielić na 5 trójkątów podobnych do niego?

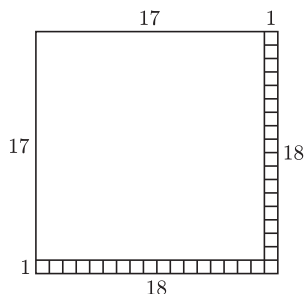
R. Istnieje (rys. 3). Czy są inne rozwiązania? □



Rys. 3

4. Kwadrat podzielono na 36 kwadratów, z których 35 ma pole równe 1. Czy ostatni też musi mieć pole 1?

R. Nie musi (rys. 4). Czy są inne rozwiązania? □



Rys. 4

5. Ile łamań potrzeba, aby tabliczkę czekolady o wymiarach 4×6 połamać na 24 pojedyncze kostki? Łamań wolno dokonywać tylko wzdłuż linii podziału na kostki i można łamać tylko jedną część naraz.

R. Po każdym łamaniu przybywa jeden kawałek czekolady. Zatem niezależnie od sposobu łamania tabliczka zostanie podzielona na 24 pojedyncze kostki zawsze po dokładnie 23 łamaniach. □

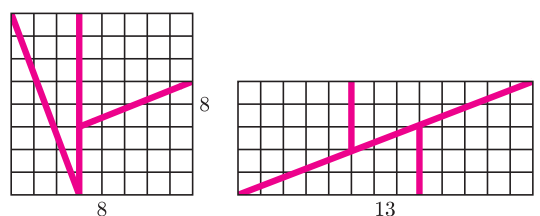
6. Ile cięć potrzeba, aby kostkę sera o wymiarach $3 \times 3 \times 3$ rozciąć na 27 kostek jednostkowych? Cięć wolno dokonywać tylko wzdłuż płaszczyzn podziału na kostki, rozcięte części można dowolnie przestawiać i można ciąć kilka części naraz.

R. Środkowa kostka jednostkowa, której wszystkie ściany początkowo są niewidoczne, musi zostać „wykrojona”. Żadnym cięciem nie da się ciąć naraz wzdłuż więcej niż jednej z jej sześciu ścian. Koniecznych jest zatem przynajmniej sześć cięć. Jednocześnie tyle cięć wystarcza, nawet bez przestawiania części. □

Na zakończenie dwa nowe zadania.

7. Podziel graniastosłup prawidłowy trójkątny na trzy czworościany o równych objętościach.

8. Kwadrat o polu 64 podzielono na cztery części i zbudowano z nich prostokąt o polu 65, jak na rysunku 5. Wyjaśnij, jak to się stało.



Rys. 5