








Przypominamy,
że począwszy od tego roku
termin nadsyłania prac
na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki
upływa 1 kwietnia.

SPIS TREŚCI NUMERU 3 (418)

Wprowadzenie do zgrubnej geometrii <i>Michał Skrzypczak</i>	str. 1
Prawa Cassiniego	str. 3
Od własności paraboli do równania funkcyjnego <i>Tomasz Tkocz</i>	str. 4
Spotkanie z matematykiem	str. 5
Kosmiczna linijka 3. Procjon: zagadkowy układ podwójny <i>Bożena Czerny, Agnieszka Janiuk</i>	str. 6
Konkurs zadań astronomicznych	str. 6
Aktualności	str. 7
Combinatorial Nullstellensatz w kombinatoryce przestrzennej <i>Mikołaj Bińkowski</i>	str. 8
 Zadania	str. 9
 Czy komputer zna się na matematyce? <i>Piotr Krzyżanowski</i>	str.10
 Przeprowadzamy elektrolizę <i>Stanisław Bednarek</i>	str.12
O robieniu wykresów <i>Adam Kolany</i>	str.14
Komentarz <i>Witold Bednarek</i>	str.16
 Niematematyczne obrazki <i>Andrzej Walat</i>	str.17
Ciągi de Bruijna <i>Jakub Radoszewski</i>	str.18
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.21
Klub 44	str.22
Patrz w niebo	str.24
Marzec	str.24
 Co za dużo, to niezdrowo? <i>Joanna Jaszurńska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński, Andrzej Walat, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.
Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-639-73-67)

internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2009 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2009 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 0-804-200-600

Cena prenumeraty w 2009 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

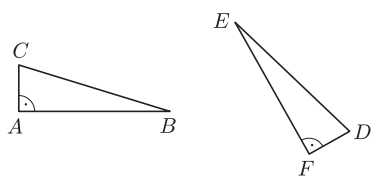
W następnym numerze:
Siła silni

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Wprowadzenie do zgrubnej geometrii

Michał SKRZYPCZAK*

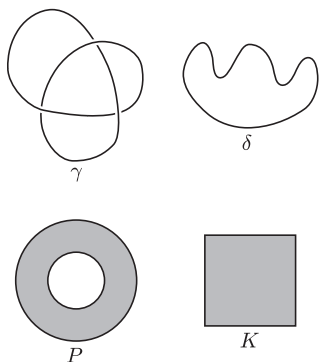


Rys. 1. Już dzieci w podstawówce wiedzą, że trójkąty ABC , DEF są „takie same”.

Na geometrię można patrzeć jak na dziedzinę badającą różnorodne przestrzenie metryczne. Podczas takich badań jedno z fundamentalnych zagadnień to pytanie, jakie obiekty uważamy za „takie same”.

Powszechnie przyjęte jest, że figury *izometryczne* są takie same. Mówimy, że dwa zbiory A, B są izometryczne, gdy istnieje funkcja zachowująca odległość, przeprowadzająca A na B .

Często również figury podobne uznaje się za jednakowe. Standardowy przykład to litera A pisana przez panią nauczycielkę na tablicy i literki A pisane w zeszytach dzieci.



Rys. 2. Z topologicznego punktu widzenia krzywe γ i δ są jednakowe, ale pierścień P i kwadrat K już nie.

Zarówno izometryczność, jak i podobieństwo odnoszą się do kształtu figury (jej rozmiarów, proporcji, kątów, ...). Topologia podchodzi do figur w bardziej ogólny sposób. Dwie figury (zbiory) A, B są homeomorficzne, jeśli istnieje takie przekształcenie ciągle A na B , że przekształcenie odwrotne B na A też jest ciągle. Na przykład, jeden zbiór można przekształcić na drugi poprzez rozciąganie i ściskanie, dopuszczalne jest też rozcinanie, byle tylko skleić potem „tak samo”. Można sobie wyobrazić, że zbiory są wykonane z gumy. Odcinek otwarty $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ jest homeomorficzny z prostą rzeczywistą \mathbb{R} , intuicyjnie – wystarczy go rozciągnąć do nieskończoności.

Zgrubna geometria to kolejny sposób patrzenia na przestrzenie metryczne. Sposób ten różni się bardzo istotnie od poprzednio podanych. Nie jest ważny dokładny kształt figury, czy jest ona gruba czy cienka, czy jest w jednym kawałku czy nie. Istotne jest, jak figura wygląda „z bardzo daleka”. Ze zgrubnego punktu widzenia wszystkie zbiory ograniczone są równoważne (w szczególności każde dwa trójkąty są jednakowe). Natomiast zbiór ograniczony nigdy nie jest równoważny zbiorowi nieograniczonemu, między innymi odcinek nie może być zgrubnie równoważny prostej.

W dalszej części artykułu precyzyjniej opiszemy powyższe intuicje.

Aparat zgrubnej geometrii pozwala badać dowolne przestrzenie metryczne i nie tylko. W tym artykule dla uproszczenia ograniczę się tylko do przestrzeni będących podzbiórami przestrzeni euklidesowych \mathbb{R}^n . Odległość dwóch punktów $a, b \in \mathbb{R}^n$ oznaczać będą $d(a, b)$. Na przykład dla $n = 2$, $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ mamy

$$d(a, b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Zdefiniujemy kilka rodzajów funkcji o specyficznych własnościach.

Definicja 1. Dla $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz funkcji $f : X \rightarrow Y$, mówimy, że f jest

- *metrycznie właściwa (ang. proper)*, gdy przeciwobrazy wzdłuż f zbiorów ograniczonych są ograniczone;

czyli gdy dla każdego zbioru ograniczonego $B \subseteq Y$ zbiór

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

jest ograniczony.

- *bornologiczna (ang. bornological)*, jeśli

$$\forall R > 0 \exists S > 0 \forall x, y \in X \quad d(x, y) < R \Rightarrow d(f(x), f(y)) < S;$$

czyli dla każdego $R > 0$ można szacować, jak bardzo oddalone będą obrazy dowolnych dwóch punktów odległych o mniej niż R .

- *zgrubna (ang. coarse)*, jeśli spełnia obie powyższe własności.

Chodzi nam o to, by funkcje zgrubne zachowywały globalny kształt przestrzeni widzianej z dalekiej perspektywy. W związku z tym nie powinny jej za bardzo zgniatać (metryczna właściwość) ani przesadnie rozciągać w żadnym kierunku (bornologiczność).



Zbiór B jest ograniczony, gdy jest zawarty w pewnej kuli. Na przykład, każdy sześcian jest ograniczony, natomiast żadna prosta nie jest.

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Oczywiście, dla każdego zbioru X , $\text{id}_X(x) = x$ jest funkcją zgrubną. Ponadto złożenie funkcji zgrubnych też jest zgrubne.



Rys. 3. Prosta rzeczywista \mathbb{R} i liczby całkowite \mathbb{Z} widziane z daleka.

Pora na kilka przykładów.

- Niech \mathbb{R}_+ oznacza zbiór wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ nie jest ani właściwa, ani bornologiczna. Po pierwsze, $f^{-1}((0, 1]) = [1, \infty)$, więc f nie jest właściwa. Po drugie, dla $R = 1$ nie może istnieć takie $S > 0$, że $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ d(x, y) < R \Rightarrow d(f(x), f(y)) < S$. Gdyby takie S istniało, to dla $x = 1, y = \frac{1}{2S+1}$ byłoby $d(x, y) < R$ oraz $d(1, 2S+1) = 2S > S$ – sprzeczność.
- Funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ stale równa 1 nie jest właściwa ($f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{N}$), ale jest bornologiczna, bo niezależnie od $R > 0, S > 0, x, y$, mamy $d(f(x), f(y)) = d(1, 1) = 0 < S$.
- $f(n) = n^2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest właściwa (zbiory ograniczone w \mathbb{N} są skończone), ale nie bornologiczna. Gdyby f była bornologiczna, to w szczególności dla $R = 2$ istniałoby takie $S > 0$, że $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ d(x, y) < 2 \Rightarrow d(f(x), f(y)) < S$. Wtedy dla $x = S, y = S + 1$ mamy $d(x, y) = 1 < R$, a jednocześnie $d(f(x), f(y)) = d(S^2, S^2 + 2S + 1) = 2S + 1 > S$ – sprzeczność.
- Funkcja $f(x) = \lfloor x \rfloor$ z prostej rzeczywistej \mathbb{R} w liczby całkowite \mathbb{Z} jest zgrubna ($\lfloor x \rfloor$ to „podłoga x ”, czyli największa liczba całkowita mniejsza lub równa x). Proponuję to wykazać.

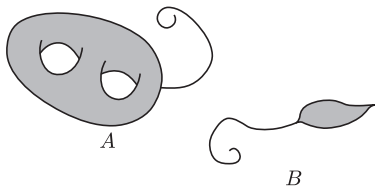
Definicja 2. Dla danych zbiorów $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, przekształcenia $f, g : X \rightarrow Y$ nazywamy bliskimi (ang. close), gdy zbiór

$$\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

jest ograniczony.

Jeśli dwie funkcje spełniają powyższą definicję, to – gdy patrzymy na nie z dostatecznie daleka – wydają się być jednym i tym samym przekształceniem.

Przykładowo, jeśli przekształcenie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ przemieszcza każdy punkt $x \in \mathbb{R}^n$ o co najwyżej 100, to $\{d(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq [0, 100]$, więc f jest bliska $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Oczywiście, 100 można zastąpić dowolną ustaloną liczbą.



Rys. 4. Zbiory A, B są ograniczone, więc zgrubnie równoważne.

Definicja 3. Dwa zbiory $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ są zgrubnie równoważne (ang. coarsely equivalent), gdy istnieją takie funkcje zgrubne $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow X$, że ich złożenia są bliskie identycznościom ($f \circ g$ bliskie id_Y oraz $g \circ f$ bliskie id_X).

Udowodnimy, że dowolne dwa niepuste zbiory ograniczone $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ są zgrubnie równoważne. Niech funkcje $f : B \rightarrow C, g : C \rightarrow B$ będą funkcjami stałymi (przyjmującymi po jednej wartości). Jak łatwo sprawdzić, funkcje te są zgrubne, bo zbiory B i C są ograniczone. Ponadto złożenia $f \circ g, g \circ f$ to funkcje stałe, a skoro B jest ograniczony, to każda funkcja stała $B \rightarrow B$ jest bliska id_B (analogicznie z C). Więc B i C są zgrubnie równoważne.

Fakt 1. Jeśli dane są funkcje zgrubne $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, to funkcja

$$f \times g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

powstająca przez stosowanie f i g „po współrzędnych”, też jest zgrubna.

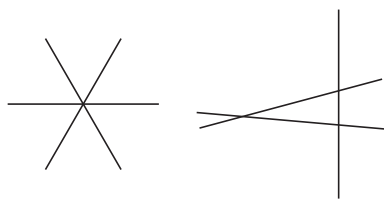
$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$$

Warto spróbować samodzielnie wykazać powyższy fakt.

Fakt 2. Przestrzenie $\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^n$ są zgrubnie równoważne dla $n = 1, 2, \dots$

Dowód. Ustalmy n . Rozważmy $f(x_1, \dots, x_n) = (\lfloor x_1 \rfloor, \dots, \lfloor x_n \rfloor) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ oraz $g(z) = z : \mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Funkcja f jest zgrubna, gdyż jest zastosowaniem funkcji zgrubnej $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ „po współrzędnych”. Funkcja g jest izometrią (zachowuje odległości punktów), więc oczywiście jest zgrubna. Ponadto $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{Z}^n}$, więc $f \circ g$ jest bliskie $\text{id}_{\mathbb{Z}^n}$. Z drugiej strony $g \circ f$ przesuwa każdy punkt o mniej niż $d((0, \dots, 0), (1, \dots, 1)) = \sqrt{n}$, więc jest bliskie $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Przestrzenie $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, dla $n \neq m$, nie są zgrubnie równoważne, jednak dowód tego jest dalece nietrywialny, wykorzystuje pojęcie wymiaru asymptotycznego – zgrubnej wersji definicji wymiaru. Fakt ten oznacza, między innymi, że prosta i płaszczyzna nie są zgrubnie równoważne. Odpowiada to intuicji mówiącej



Rys. 5. 3-gwiazdka i inne trzy parami nierównoległe proste są zgrubnie równoważne.

o patrzeniu na przestrzeń „z bardzo daleka”: niezależnie z jak daleka spojrzymy na prostą, zawsze jest ona „cienka”, natomiast płaszczyzna zawsze jest „szeroka”.

Pora na kilka ciekawych faktów.

Fakt 3. *Niezależnie od tego, jak położymy na płaszczyźnie trzy proste (jeśli tylko żadne dwie z nich nie będą równoległe), zbiór punktów tych prostych jest zgrubnie równoważny 3-gwiazdce.*

Powyższy fakt pozostaje prawdziwy, gdy zamiast prostych rozważymy pasy ustalonej szerokości oraz gdy przejdziemy z \mathbb{R}^2 do dowolnej przestrzeni \mathbb{R}^n . Ponadto zamiast trzech prostych i 3-gwiazdki, możemy rozważać dowolne k parami nierównoległych prostych i k -gwiazdkę.

Warto zwrócić uwagę, że w powyższym fakcie zgrubna równoważność jest rozumiana szerzej niż w dotychczas przekazywanej intuicji. Zbiory zgrubnie równoważne mogą wyglądać nieco inaczej nawet z dalekiej perspektywy, byle tylko miały podobny globalny kształt.

Ze zgrubnego punktu widzenia ograniczone zaburzenia danego zbioru są nieistotne. Mówi o tym poniższy fakt.

Fakt 4. *Dla dowolnego nieograniczonego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}^n$, dowolnej kuli $K \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz zbioru $B \subseteq K$ zbiory X oraz $(X \setminus K) \cup B$ są zgrubnie równoważne.*

Konsekwencją powyższego faktu jest stwierdzenie, że płaszczyzna oraz płaszczyzna z wyciętą kulą (kołem) np. o promieniu 10^{16} są zgrubnie równoważne.

Kolejną operacją na zbiorze, która nie wpływa na jego zgrubne własności, jest „powiększanie punktów”. Zamiast każdego punktu zbioru wstawiamy dowolny niepusty i ograniczony zbiór. Ścisłej jest to sformułowane poniżej.

Fakt 5. *Rozważmy dowolne $R > 0$, dowolny zbiór $X \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz rodzinę zbiorów $\{B_x\}_{x \in X}$ – po jednym zbiorze dla każdego punktu w X . Załóżmy, że po pierwsze, dla każdego $x \in X$ zbiór B_x jest niepusty, a po wtóre, że $B_x \subseteq K(x, R)$. Wtedy zbiory X oraz $\bigcup_{x \in X} B_x$ są zgrubnie równoważne.*

Zastosujmy ten fakt dla $R = 1$, X będącego prostą oraz zbiorów $B_x = K(x, 1)$. Wtedy założenia są spełnione, a zbiór $\bigcup_{x \in X} B_x$ to pas o szerokości dwa. Dowodzi to, że prosta i pas szerokości dwa są zgrubnie równoważne.

Osobom zainteresowanym zgrubną geometrią polecam książkę [1]. Ponadto pewnym rozszerzeniem powyższego artykułu są referaty [2].

Literatura

- [1] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series 31, American Mathematical Society (2003).
- [2] M. Skrzypczak, *Zgrubne spojrzenie na przestrzenie metryczne, Wprowadzenie do zgrubnej geometrii*, <http://students.mimuw.edu.pl/~mskrzypczak/dokumenty/>

Prawa Cassiniego

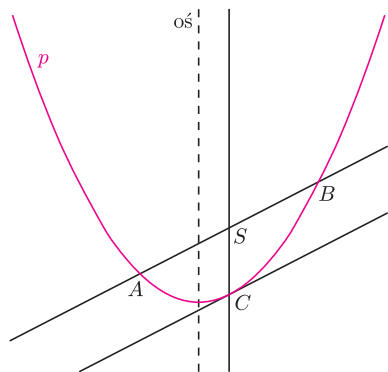
Są to trzy prawa ruchu Księżyca, odkryte przezeń obserwacyjnie:

1. Księżyc obraca się wokół stałej w nim osi ze stałą prędkością kątową równą średniej prędkości ruchu orbitalnego – jest to intuicyjnie zrozumiałe jako zasada zachowania momentu pędu przy obrocie bryły sztywnej.
2. Nachylenie księżycowego równika do ekliptyki jest stałe – j.w.
3. Oś obrotu Księżyca, oś orbity Księżyca i oś ekliptyki mają wspólny kierunek prostopadły. Otóż dość skomplikowanym rachunkiem można wykazać, że rzeczywiście tak musi być, ale dla autora tej notatki pozostaje niezgłębioną tajemnicą, jak w XVII w. można było ten fakt zaobserwować. Odkrycie przez Cassiniego czterech satelitów Saturna oraz skomplikowanej budowy jego pierścieni (np. przerwy Cassiniego) czy obrotu Jowisza wydaje się przy tym zupełną błahostką.

T.K.

Od własności paraboli do równania funkcyjnego

Tomasz TKOCZ*



Tytułowa własność paraboli

Własność, o którą chodzi w tytule, jest następująca:

(*) Jeśli S jest środkiem cięciwy AB paraboli p , C zaś – punktem przecięcia paraboli p i prostej równoległej do jej osi przechodzącej przez S , to styczna do paraboli p w punkcie C jest równoległa do jej siecznej AB .

Tę przyjemną własność znalazł już Archimedes (wykorzystał ją np. w swojej pracy *Kwadratura paraboli*, obliczając pole odcinka paraboli – por. [2]). Geometryczny dowód powyższego faktu może być bardzo ciekawym i pouczającym zadaniem. Analitycznie zaś możemy próbować rozumować, jak następuje. Niech nasza parabola p będzie wykresem funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Współrzędnymi punktów A i B niech będą odpowiednio $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. Wtedy $C = (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$, więc wystarczy sprawdzić, że (łatwy rachunek)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f' \left(\frac{a + b}{2} \right), \quad \text{dla dowolnych } a, b \in \mathbb{R}, a \neq b.$$

Ci, co znają twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej, zapewne pomyślał sobie teraz: *aha, punkt średni z tezy tego twierdzenia dla funkcji kwadratowej okazuje się być zawsze środkiem przedziału (a, b) !* Można jednak teraz zapytać odwrotnie: dla jakich innych funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ punkt średni będzie zawsze środkiem przedziału? Równoważnie, wykresy jakich funkcji mają tę własność, że sieczna będzie równoległa do stycznej poprowadzonej akurat w punkcie o odciętej będącej środkiem przedziału? Jesteśmy zatem ciekawi, czy są jakieś inne krzywe o własności (*), czy może parabola jest wyjątkowa.

Aby dać odpowiedź, wystarczy rozwiązać równanie funkcyjne

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f' \left(\frac{a + b}{2} \right), \quad a \neq b,$$

albo, ogólniej (żeby nie zakładać różniczkowalności f), zadanie jest takie: znaleźć $f, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, takie że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = h \left(\frac{a + b}{2} \right), \quad a \neq b.$$

Przystąpmy do rozwiązania: niech f, h spełniają powyższe równanie. Przede wszystkim zauważmy, że możemy uwolnić się od warunku $a \neq b$, gdyż zachodzi oczywiście

$$(**) \quad f(b) - f(a) = (b - a)h \left(\frac{a + b}{2} \right), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Kładąc $a = 0$, możemy wyrazić f za pomocą h

$$f(b) = bh \left(\frac{b}{2} \right) + f(0).$$

Zatem z (**) możemy zrobić równanie z tylko jedną niewiadomą funkcją, otrzymując

$$bh \left(\frac{b}{2} \right) - ah \left(\frac{a}{2} \right) = (b - a)h \left(\frac{a + b}{2} \right).$$

Wprowadźmy dla ułatwienia pomocniczą funkcję $g(x) := h(\frac{x}{2}) - h(0)$. Mamy

$$bg(b) - ag(a) = (b - a)g(a + b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Podstawiając $b = -a$, wobec $g(0) = 0$, dostajemy $g(a) = -g(-a)$. Teraz, zamieniając a na $-a$, mamy

$$(a + b)g(b - a) = bg(b) + ag(-a) = bg(b) - ag(a) = (b - a)g(a + b),$$

czyli dla takich a, b , że $a + b \neq 0$, $b - a \neq 0$, jest

$$\frac{g(b - a)}{b - a} = \frac{g(a + b)}{a + b}.$$



*student, Wydział Fizyki i Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wstawiając więc np. $b = \frac{x+1}{2}$, $a = \frac{-x+1}{2}$, otrzymujemy $\frac{g(x)}{x} = g(1)$, dla $x \neq 0$, czyli mamy wyznaczone g

$$g(x) = \alpha x,$$

gdzie α jest pewną stałą. Stąd

$$h(x) = 2\alpha x + \beta, \quad f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

dla pewnych stałych α, β, γ .

Z drugiej strony, bez trudu sprawdzamy, że powyższe funkcje spełniają wyjściowe równanie. Zatem parabola (w zdegenerowanym przypadku $\alpha = 0$ – prosta) jest jedyną krzywą o dyskutowanej własności. Zadziwiające, że udało nam się do tego dojść zupełnie elementarnie.

Podsumowując, stwierdziliśmy, że własność (*) w pełni charakteryzuje parabolę. Możemy jeszcze pokusić się o interpretację fizyczną tej charakterystyki. Otóż, nigdy niekończący się i nigdy niezaczynający się ruch ciała wzdłuż prostej ma własność *w każdym przedziale czasu $[t, t']$ prędkość średnia w tym przedziale jest równa prędkości w chwili $\frac{t+t'}{2}$ – będącej środkiem tego przedziału czasu*, wtedy i tylko wtedy, gdy jest to ruch jednostajnie przyspieszony.

Istotnie, rozwiązaniem równania

$$\frac{x(t') - x(t)}{t' - t} = v\left(\frac{t+t'}{2}\right), \quad t < t',$$

z niewiadomymi funkcjami położenia i prędkości od czasu $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są, jak widzieliśmy, $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$, $v(t) = v_0 + g t$. Co ciekawe, to fizyczne podejście do geometrycznej własności paraboli może pchać nas dalej i motywować do rozwiązywania innych równań funkcyjnych, gdyż pytać możemy np., dla jakich ruchów ciała po prostej jego prędkość średnia w każdym przedziale czasu zależy tylko od długości tego przedziału. Odpowiedź przyniesie rozwiązanie równania

$$\frac{x(t') - x(t)}{t' - t} = v(t' - t), \quad t < t',$$

ale to już inna historia.

Powyższe rozwiązanie naszego równania funkcyjnego pochodzi od J. Aczéli – por. [1].

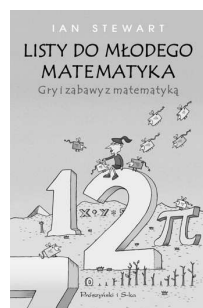


Literatura

- [1] J. Aczél, *A mean value property of the derivative of quadratic polynomials—without mean values and derivatives*, Mathematics Magazine 58 (1985), nr 1, 42–45.
 [2] M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Script, Warszawa 2006.

Spotkanie z matematykiem

Osoby stojące przed wyborem studiów i biorące pod uwagę kierunek *matematyka* zastanawiają się zapewne, jak takie studia wyglądają i czym się różnią od innych. Jeśli dodatkowo przeczuwają, że mogą związać się zawodowo z matematyką na całe życie, to chciałyby wiedzieć, jak to życie będzie wyglądać.



Rozmowa z kimś, kto większość tej drogi przebył i może podzielić się swoim doświadczeniem, ułatwia wyobrażenie sobie nie tylko zrębów matematycznej kariery, ale i tego, jak matematyka formuje sposób myślenia i postrzegania świata. Lekturę książki Iana Stewarta pt. *Listy do młodego matematyka* można traktować jako osobiste spotkanie z przyjaźnie nastawionym profesorem matematyki. Tematów do rozmów jest wiele, bo korespondencja rozpoczyna się w momencie, gdy Meg – książkowa odbiorczyni listów – rozważa właśnie, czy studiować matematykę, a kończy się, gdy sama zostaje profesorem.

Są zatem i wskazówki, jak się uczyć matematyki, a potem, jak uczyć jej innych. Autor wie także, że każdy adept matematyki zastanawia się, ile tej matematyki jest, czy pozostało jeszcze coś do udowodnienia, którą dziedziną się zajmować i co robić, gdy przychodzi czas znużenia tymi wszystkimi twierdzeniami i abstrakcją. Z pomocą anegdot Stewart przybliżył nam ponadto sposób pracy matematyka i zmagania się z nowymi problemami, przedstawia społeczność tych uczonych – co o niej jest stereotypem, a co prawdą. Oprócz udzielania dobrych rad pozwala też sobie na rozważania filozoficzne, ostatni list zatytułowany jest bowiem *Czy Bóg jest matematykiem?* Wiedza matematyczna jest przekazywana w książce w znikomym stopniu. Przedstawienie treści jakiegoś twierdzenia pojawia się w odpowiedziach na zadawane pytania, na przykład: po co są dowody? Oprócz tego profesor przekonuje nas, że dowód to *opowieść, którą matematycy opowiadają innym matematykom, wyrażona w ich wspólnym języku*.

Zachęcam wszystkich „młodych matematyków” – osób na początku matematycznej przygody – do spotkania ze Stewartem. Przecież dobrze jest przed wyprawą przeczytać odpowiedni przewodnik.

M.H.

Ian Stewart, *Listy do młodego matematyka*, tłum. Paweł Strzelecki, Prószyński i S-ka, 2008

Kosmiczna linijka

3. Procjon: zagadkowy układ podwójny; odległość 3,5 pc (4 pc na linijce)

Słońce jest gwiazdą pojedynczą, lecz spróbujmy sobie wyobrazić, jak wyglądałoby życie na Ziemi, gdyby zamiast jednego Słońca były dwa, to drugie, na przykład, w innym kolorze... Pomyśl, wbrew pozorom, nie jest ekstrawagancki, ponieważ gwiazdy często występują w parach – jako gwiazdy podwójne – a czasami nawet w trójkach (układy potrójne).

Przykładem gwiazdy podwójnej jest Procjon. Leży on w odległości 11,3 roku świetlnego od Ziemi i jest widoczny na niebie zimowym naszej półkuli w gwiazdozbiorze Małego Psa (*Alpha Canis Minoris*). Jest to ósma z najjaśniejszych gwiazd, o jasności widomej 0,38 magnitudo. Jej nazwa oznacza (z języka greckiego) „Przed Psem” i jest związana z tym, że na niebie gwiazda ta wschodzi przed Syriuszem, czyli „Psią Gwiazdą” (*Alpha Canis Maioris*).

Już w połowie XIX wieku na podstawie ruchów Procjona przypuszczano, że jest on gwiazdą podwójną. Potwierdziły to obserwacje teleskopowe wykonane w 1896 roku w Obserwatorium Licka przez J. M. Schaberlego. Procjon A jest gwiazdą ciągu głównego, o typie widmowym F i jasności absolutnej 7,3 raza większej od jasności Słońca. Procjon B, jej towarzysz, jest gwiazdą 11 wielkości. Gwiazdy obiegają się wzajemnie po ekscentrycznej orbicie, w średniej odległości około 15 j.a., okres orbitalny układu wynosi zaś 41 lat. Masa towarzysza, jak można oszacować na podstawie III prawa Keplera, to około 0,65 masy Słońca. Natomiast jego promień jest bardzo mały: zmierzona wysoka temperatura powierzchniowa gwiazdy (około 7700 K), w połączeniu z niewielką jasnością widomą, daje promień rzędu 1,3 promienia Ziemi!

Gwiazda Procjon B ma zatem ogromną gęstość, sięgającą miliardów kg/m^3 . Przy takiej gęstości cząstki muszą być niezwykle gęsto upakowane i tworzą materię zdegenerowaną. Jony są zbyt duże, aby mogły się swobodnie poruszać, uтыkają więc w strukturze krystalicznej, natomiast elektrony poruszają się swobodnie, tworząc gaz elektronowy. Ciśnienie takiego gazu ma tę właściwość, że nie zależy od temperatury, a jedynie od liczby cząstek i ciasnoty ich upakowania. Gwiazda, w której doszło do całkowitego wyczerpania paliwa jądrowego, zaczyna stygnąć, a jedynym, co powstrzymuje jej zapadnięcie się pod wpływem własnej grawitacji, jest ciśnienie zdegenerowanego gazu. Taka gwiazda jest zwana białym karłem z powodu swojej barwy (choć znajduje się także białe karły koloru żółtego...).

Ostatnio Procjonem A interesują się głównie asteroseismologowie w celu porównania jego własności z własnościami Słońca. Badają oni rozchodzenie się fal sejsmicznych we wnętrzu gwiazdy poprzez obserwacje oscylacji na jej powierzchni, co pozwala na prawie bezpośrednią analizę budowy gwiazdy. Słońce wykazuje takie oscylacje, a ich badanie doprowadziło do odkrycia problemu brakujących neutrin słonecznych (zostało to następnie wyjaśnione, dzięki eksperymentom fizyków, jako przemiany neutrin elektronowych w mionowe i odwrotnie).

Co do Procjona, to niemal 32-dniowe ciągłe obserwacje, przeprowadzone przez satelitę MOST, nie wykazały oczekiwanych oscylacji. Była to więc nie lada zagadka. Jednak późniejsze obserwacje, wykonane spektrografem zainstalowanym przy naziemnym teleskopie w La Silla w Chile, a następnie specjalna kampania obserwacyjna prowadzona za pomocą 11 teleskopów naziemnych, pokazały, że Procjon jednak oscyluje podobnie jak Słońce, lecz nie tak mocno, jak wcześniej sądzono.

Bożena CZERNY, Agnieszka JANIUK

Konkurs zadań astronomicznych

Na rozwiązanie zadań A 5 i A 6 czekamy do 1 kwietnia 2009 r. (decyduje data stempla pocztowego) pod adresem:

Centrum Astronomiczne
im. Mikołaja Kopernika
ul. Bartycka 18
00-716 Warszawa

Rozwiązania zadań z numeru 1/2009

A 1. Aby jakkolwiek fragment Krzyża Południa mógł być widoczny, biegun południowy nieba musi znajdować się nie głębiej pod horyzontem niż 34° , co odpowiada szerokości geograficznej 34° . Zatem z tej szerokości oraz z szerokości bardziej północnych Krzyża Południa nie widać w ogóle. Natomiast z szerokości 25° i bardziej południowych gwiazdozbiór może być widoczny w całości.

A 5. Ile czasu musiałyby być nasłonecznione (Słońce w zenicie) boisko piłkarskie o rozmiarach $100 \text{ m} \times 70 \text{ m}$, aby pochłonęło energię równą energii wytworzonej przez 1-megatonową bombę jądrową? Przyjąć, że 1 Mt bomba wytwarza $4 \cdot 10^{15} \text{ J}$, a stała słoneczna (ilość energii słonecznej padającej na jednostkę powierzchni Ziemi w jednostce czasu) to $S = 1360 \text{ J}/(\text{m}^2\text{s})$. [1 pkt]

A 6. Mgławica planetarna ma średnicę kątową $72'$ i leży w odległości 5000 lat świetlnych. Przesunięcie dopplerowskie linii widmowych świadczy o tym, że mgławica ekspanduje z prędkością 15 km/s . Ile lat ma mgławica? [2 pkt]

A 2. Niech ω oznacza prędkość kątową obrotu Ziemi, a ω_\odot średnią prędkość kątową Ziemi na orbicie. Doba aktualna to $24^h = 2\pi/(\omega + \omega_\odot)$, a nowa доба z zadania to $x = 2\pi/(\omega - \omega_\odot)$. Zatem

$$\frac{x}{24} = \frac{\omega + \omega_\odot}{\omega - \omega_\odot} \approx (1 + \omega_\odot/\omega)^2 \approx 1 + \frac{2\omega_\odot}{\omega}$$

Ale $\omega_\odot/\omega = 1/365,25$, bo jest średnio 365,25 dni w roku. Wobec tego nowa доба z zadania wynosiłaby $24^h \cdot 1,005476 = 24^h 7^m 53^s$.

Kolorowa biofizykochemia

Do przodu żyj, żyj kolorowo, marzenia najbarwniejsze miew, śpiewała Ewa Bem, ale piosenki tej nie mógł znać Osamu Shimomura, gdy pół wieku temu z pomocą rodziny i przyjaciół przerabiał tony odławianych meduz *Aequorea victoria* w celu wyodrębnienia substancji powodującej zieloną fluorescencję zgrubień na jej brzegu po podrażnieniu. Prawdopodobnie nie przypuszczał, jak wielka rewolucja w badaniach biochemicznych dokona się dzięki odkrytemu przez niego zielonemu białku fluoryzującemu GFP (*green fluorescent protein*). Czy marzyło mu się otrzymanie Nagrody Nobla z Chemii za swój rybacki trud? Nie można tego wykluczyć. Żeby marzenia mogły się spełnić, trzeba je mieć.

Shimomura nie był jedynym zajmującym się świecąca meduzą. Pracował już wtedy na Uniwersytecie w Princeton, gdzie przybył na zaproszenie Franka Johnsona. Wyodrębnienie świecącej substancji nikomu się jednak nie udawało, co świadczyło o tym, że fluorescencja nie chciała zachodzić *in vitro*. Pomógł przypadek. Shimomura zaobserwował fluorescencję, gdy kiedyś wrzucił trochę przecieru z meduz do zlewu, w którym była morska woda. Błysk był jednak niebieski, a nie zielony. Później doszedł do tego, że to jony wapnia powodują reakcję. Wspólnie z Johnsonem, po kilku miesiącach pracy, otrzymali kilka miligramów białka, które nazwali aequorin. W publikacji wspomnieli również o uzyskaniu jeszcze mniejszej ilości innego białka, które świeciło na zielono po oświetleniu ultrafioletem. Był to pierwszy opis proteiny nazwanej później GFP, która miała zrewolucjonizować mikrobiologię.

Na razie nie bardzo było wiadomo, dlaczego bioluminescencja daje kolor zielony, podczas gdy aktywacja wapniem powoduje świecenie na niebiesko. Inaczej mówiąc, dlaczego (i jak) *in vivo* aktywowane jest GFP zamiast aequorinu. Na początku lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku Shimomura wraz ze współpracownikami (i konkurentami) doszli do wniosku, że niebieska luminescencja aequorinu ($\lambda = 470$ nm) odpowiada długości fali powodującej ekscytację GFP, a następnie emisję światła zielonego ($\lambda = 510$ nm). W 1974 roku Shimomura wraz ze współpracownikami wykazał, że luminescencja aequorinu może powodować luminescencję GFP, a sprzężenie zależy od wzajemnej odległości protein.

Choć Shimomura był bardziej zainteresowany aequorinem (o czym świadczy chociażby zapożyczenie nazwy właśnie tego białka od nazwy meduzy), między innymi, jako potencjalnym indykatozem wapnia, to nie zaprzestał badań GFP. W 1979 roku, po potraktowaniu GFP papainą (enzymem wstępnie trawiącym białka, otrzymywanym, między innymi, z papai), co zatrzymało fluorescencję białka, odnalazł peptyd o tym samym spektrum absorpcji co nienaruszone GFP. Badając ten peptyd, niemal bezbłądnie określił budowę chromoforu GFP.

Rozległych zastosowań GFP oraz jego pochodnych nie mielibyśmy, lub przynajmniej nie mielibyśmy tak prędko, bez prac Douglasa Prashera, wielkiego przegranego zeszłorocznej Nagrody Nobla. Jego prace doprowadziły w 1992 roku do wyizolowania genu odpowiedzialnego za tworzenie GFP. On sam jednak podzielał opinię środowiska o luminescencyjnej nieaktywności proteiny GFP pozbawionej enzymatycznego środowiska rodzimej meduzy. Możliwe, że właśnie ta zachowawcza opinia pozbawiła go zeszłorocznej Nagrody.

Dostał ją natomiast Martin Chalfie, który po jej przyznaniu powiedział: „Mogli równie dobrze dać nagrodę Douglasowi zamiast mnie”. Martinowi zamarzyło się wprowadzenie genu GFP do nicienia *Caenorhabditis elegans* (ulubionego robaczka genetyków), jeszcze zanim Douglasowi udało się sekwencjonować genu GFP. Oba panowie utrzymywali kontakt i dzięki temu, zaraz po szczęśliwym odtworzeniu genu, Martin mógł poinstruować doktorantkę Gnię Euskirchen, jak wprowadzić go do pałeczki okrężnicy (*Escherichia coli*). Po miesiącu udało się bardziej niż Chalfie mógł się spodziewać. Pałeczki wyhodowane przez Euskirchen, po oświetleniu ultrafioletem, świeciły na zielono! To niespodziewane odkrycie braku potrzeby jakiegokolwiek enzymatycznej maszyny do aktywowania GFP jest podstawą wszystkich współczesnych zastosowań tego typu świecących protein.

Ostatnim z laureatów został Roger Tsien, któremu udało się zmodyfikować GFP tak, żeby świecenie było mocniejsze i dawało inne barwy. Wyjątkowo trudne okazało się uzyskanie koloru czerwonego, który jest szczególnie użyteczny ze względu na lepszą penetrację żywej tkanki. Udało się tego dokonać poprzez odchudzenie podobnych do GFP protein znalezionych we fluorescencyjnych koralach przez Michaiła Maca i Siergieja Łukianowa.

GFP i jemu podobne proteiny pozwalają obecnie na przestrzenne i czasowe monitorowanie rosnącej liczby zjawisk w żywych organizmach. Jest to możliwe dzięki rozwojowi metod detekcji i sposobów zastosowania kombinacji protein o odpowiednio dobranych częstościach absorpcji i emisji, ale przede wszystkim dzięki łatwości tworzenia genetycznych znaczników zawierających instrukcje tworzenia GFP w interesujących badaczy miejscach i czasie.

Działalność ta jest *par excellence* interdyscyplinarna. Podobnie jak nowe kierunki studiów na Wydziale Fizyki UW, o czym można i warto przeczytać na tylnej okładce.

Piotr ZALEWSKI

Na podstawie materiałów Komitetu Noblowskiego (www.nobel.se).

Zobacz również:

Robert E. Campbell, *Fluorescent proteins*, Scholarpedia (2008), www.scholarpedia.org/article/Fluorescent_proteins

Combinatorial Nullstellensatz w kombinatoryce przestrzennej

Jest to skrót pracy nagrodzonej brązowym medalem w XXX Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2008 roku.

Mikołaj BIŃKOWSKI*

Metodę Combinatorial Nullstellensatz opublikował w 1999 r. Noga Alon. Opiera się ona na dwóch twierdzeniach będących szczególnymi przypadkami twierdzenia Hilberta o zerach. W mojej pracy korzystałem z jednego z nich.

Twierdzenie 1 (Combinatorial Nullstellensatz). Niech $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ będzie wielomianem określonym nad dowolnym ciałem \mathbb{F} . Jeżeli w wielomianie f współczynnik przy jednomianie $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_k^{t_k}$ jest różny od 0 i $\deg(f) = t_1 + t_2 + \dots + t_k$, to dla dowolnych zbiorów $S_1, S_2, \dots, S_k \subset \mathbb{F}$, takich że $|S_i| > t_i$ dla $1 \leq i \leq k$, istnieją $c_i \in S_i$ spełniające warunek

$$f(c_1, c_2, \dots, c_k) \neq 0.$$

W mojej pracy zająłem się uogólnieniem problemu, który został postawiony w jednym z zadań na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Hanoi w 2007 r.

Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną. Rozpatrzmy zbiór

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

złożony z $(n+1)^3 - 1$ punktów w przestrzeni trójwymiarowej. Wyznaczyc najmniejszą możliwą liczbę płaszczyzn, których suma zawiera S , ale nie zawiera punktu $(0, 0, 0)$.

Powyższy problem można przeformułować jako pytanie o najmniejszą liczbę płaszczyzn potrzebnych do pokrycia punktów kratowych kostki $n \times n \times n$ poza jednym z wierzchołków. Warto się zastanowić, jak uogólnić to zagadnienie na wyższe wymiary i jakimi obiektami zastąpilibyśmy wówczas pokrywane punkty kratowe danej figury. Ponadto możemy zapytać, czy ta figura musi mieć krawędzie równej długości. Następujące twierdzenie prezentuje uzyskane przeze mnie wyniki. Terminem k -hiperprostopadłościan określamy figurę będącą k -wymiarowym odpowiednikiem prostokąta i prostopadłościanu. Hiperpłaszczyzną w przestrzeni \mathbb{R}^k nazywamy zbiór dający się opisać jednym równaniem liniowym, czyli przestrzeń $(k-1)$ -wymiarową zawartą w wyjściowej.

Twierdzenie 2. Rozważmy k -hiperprostopadłościan w \mathbb{R}^k o wymiarach $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$, gdzie $n_i \in \mathbb{N}$, dla $1 \leq i \leq k$, i zbiór jego punktów kratowych $S = \{0, 1, \dots, n_1\} \times \{0, 1, \dots, n_2\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, n_k\}$. Niech $O = (0, 0, \dots, 0)$ będzie środkiem układu współrzędnych. Wówczas liczba hiperpłaszczyzn, których suma zawiera zbiór $S \setminus \{O\}$ i nie zawiera punktu O , musi być równa przynajmniej $n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że minimalna liczba m , spełniająca warunki zadania, jest mniejsza od $\sum n_i$. Mamy m hiperpłaszczyzn, spełniających warunki zadania, opisanych równaniami $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k = b_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$. Wówczas wszystkie b_i są różne od zera, gdyż hiperpłaszczyzny te nie zawierają punktu O . Rozważmy wielomian

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k) = A \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} (x_i - j) + \prod_{i=1}^m (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k - b_i),$$

gdzie

$$A = (-1)^{-(\sum n_i) + m + 1} \prod_{i=1}^k \frac{b_i}{n_i!}.$$

Wielomian P został zdefiniowany tak, aby jego miejscami zerowymi były wszystkie punkty zbioru S . Istotnie, oba iloczyny zerują się na punktach zbioru $S \setminus \{O\}$, natomiast współczynnik A jest dobrany tak, by otrzymać $P(0, \dots, 0) = 0$.

Ponieważ b_i są niezerowe, to także $A \neq 0$. Popatrzmy na jednomian $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ – pojawia się on tylko w pierwszym iloczynie w definicji wielomianu P , co wynika z założenia, że $m < \sum n_i$. Wobec tego współczynnik w P przy tym jednomianie jest równy A , więc różny od zera. Stąd $\deg(P) = \sum n_i$.

* uczeń, II LO im. Króla Jana Sobieskiego w Krakowie

Niech $S_i = \{0, 1, \dots, n_i\}$, dla $1 \leq i \leq k$. Wówczas $|S_i| = n_i + 1 > n_i$ oraz $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k$. Możemy więc skorzystać z *Combinatorial Nullstellensatz* dla $t_i = n_i$ oraz uprzednio zdefiniowanych S_i . Wnosimy, że istnieje taki punkt $(c_1, c_2, \dots, c_k) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k$, dla którego $P(c_1, c_2, \dots, c_k) \neq 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi słuszności tezy. \square

Okazuje się, że otrzymane oszacowanie jest optymalne. Aby to wykazać, wystarczy rozważyć zbiór $n_1 + \dots + n_k$ hiperpłaszczyzn o równaniach $x_i = j$, dla $j = 1, 2, \dots, n_i$ oraz $i = 1, 2, \dots, k$.

W podobny sposób możemy udowodnić nieco ogólniejsze twierdzenie, w którym wyłączany punkt jest dowolnym punktem kratowym k -hiperprostokądnianu (niekoniecznie wierzchołkiem). Dowód różni się od powyższego nieco bardziej skomplikowaną postacią konstruowanego wielomianu.

Powyższe twierdzenie daje także optymalne oszacowania dla kilku innych problemów, które rozważałem w mojej pracy. Dotyczyły one analogicznego pokrycia hiperpłaszczyznami punktów kratowych k -wymiarowej kostki, a także k -hiperprostokądnianu z wyłączeniem dwóch przeciwległych wierzchołków lub wszystkich wierzchołków.

Warto także zastanowić się nad minimalną liczbą hiperpłaszczyzn potrzebnych do pokrycia wszystkich punktów kratowych kostki $\{0, 1, \dots, n\}^k$ z wyłączeniem wszystkich punktów znajdujących się na jednej z głównych przekątnych. Udało mi się uzyskać wyniki tylko dla kwadratu, tj. przypadku dwuwymiarowego. Może Czytelnik spróbuje rozwiązać ten problem?



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 735. Promień światła pada pod kątem α na stos płaskich przezroczystych płytek jednakowej grubości. Współczynnik załamania każdej z nich jest k razy mniejszy niż poprzedniej. Dla jakiego najmniejszego kąta padania promień nie przejdzie przez stos N płytek? Współczynnik załamania wierzchniej płytki wynosi n .

Rozwiązanie na str. 12

F 736. W ośrodku o współczynniku załamania $n = 1,3$ rozchodzi się wąska równoległa wiązka świetlna o przekroju kołowym. Wiązka ta pada centralnie na wydrążenie sferyczne o promieniu dużo większym od promienia przekroju wiązki. Ile razy szersza będzie wiązka po przejściu przez wydrążenie?

Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Waldemar POMPE

M 1234. Do pokrycia pewnego prostokąta zużyto k kwadratów 2×2 oraz m prostokątów o wymiarach 1×4 . Żadne dwie pokrywające figury nie nakładają się ani nie wystają na zewnątrz prostokąta. Udowodnić, że tego samego prostokąta nie da się pokryć, używając $k - 1$ kwadratów wymiaru 2×2 oraz $m + 1$ prostokątów o wymiarach 1×4 .

Rozwiązanie na str. 20

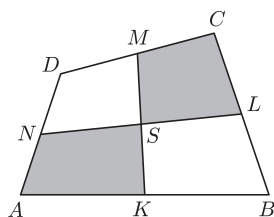
M 1235. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki KM i NL przecinają się w punkcie S (rysunek). Wykazać, że suma pól czworokątów $AKSN$ i $SLCM$ jest równa sumie pól czworokątów $KBLS$ i $NSMD$.

Rozwiązanie na str. 19

M 1236. Dana jest taka liczba naturalna $n \geq 4$, dla której liczba $n + 1$ jest podzielna przez $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$. Dowieść, że liczba $(n - 1)(n - 3)$ jest podzielna przez $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$.

Uwaga: $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od a .

Rozwiązanie na str. 24





mała delta

Czy komputer zna się na matematyce?

Myślisz, że komputer potrafi liczyć? – Możesz się przeliczyć!

Wojtek Pytalski jest zachwycony możliwościami komputerów. Nie widzi nic dziwnego w tym, że używa się ich wszędzie, od dziecięcego pokoju, przez poważne instytucje finansowe, aż po mury wyższych uczelni. Jest przekonany, że są niezawodne i znacznie sprawniejsze w rachunkach niż człowiek i z pewnością nie mylą się w obliczeniach tak, jak to niejednokrotnie zdarza się (zawsze nieco roztargnionym) matematykom.

Czy komputer potrafi liczyć?

Starszy brat, który już od dwóch lat studiuje matematykę, z politowaniem popatrzył na Wojtkę. „Nie ma czym się zachwycać” – ziewnął. – „Zrób test Kahana: komputer nawet nie umie dokładnie obliczyć, ile to jest $(4/3 - 1) \cdot 3 \dots$ ”.



Wojtek spojrział z niedowierzaniem – czy czasem brat nie chce z niego znowu zadrwić? – więc niewiele myśląc, szybko zasiadł do klawiatury, aby przekonać się, jak jest naprawdę. W szkole nauczyli się programować w języku C, więc bez trudu uruchomił następujący programik:

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main(void)
4 {
5     float x;
6
7     x = (4.0/3.0-1.0)*3.0;
8     printf("Wynik: \n%f\n", x);
9
10    return(0);
11 }
```

Wojtek już wiedział, że gdyby napisał po prostu $x = (4/3-1)*3$, dostałby w wyniku 0 (a czy Ty wiesz dlaczego?). Uruchomił szybciotko program i triumfalnie oznajmił starszemu bratu: „Nieprawda, nie dałem się nabrać: co jak co, ale takie proste obliczenia komputer wykonuje bezbłądnie! Zresztą, sam popatrz na monitor:”

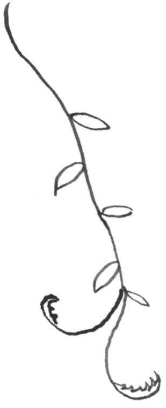
Wynik: 1

„Ech, maluchu, maluchu...” – z politowaniem westchnął brat – „lepiej sprawdź, czy $(4/3 - 1) \cdot 3 - 1$ wyjdzie Ci zero...”. Wojtek zastanowił się – bo niby na czym miałyby polegać różnica? – ale szybko zmienił siódmą linię programu na

```
x = (4.0/3.0-1.0)*3.0-1.0;
```

i uruchomił:

Wynik: -2.22045e-16



Gdy zobaczył ten wynik, zawstydził się, gdyż natychmiast zrozumiał, co przeoczył poprzednio i dlaczego zamiast zera pojawiło się $-2.22045 \cdot 10^{-16}$. No tak, zupełnie zapomniał o tym (a przecież uczyli się tego kiedyś na informatyce), że wyniki obliczeń komputera są zaokrąglane z pewną dokładnością. Na pewno komputer nie jest w stanie obliczyć z absolutną precyzją wyniku dzielenia $4/3 = 1,333333\dots$ (liczba $4/3$ ma nieskończone rozwinięcie, więc trzeba je w pewnym momencie „urwać”). W takim razie i pozostałe obliczenia cierpią z powodu tego zaokrąglenia! Dlatego dla komputera $4/3 - 1$ jest tylko *prawie* równe $1/3$ i w konsekwencji $(4/3 - 1) \cdot 3$ jest tylko *prawie* równe 1; to „prawie”, jak wynika z testu, jest równe mniej więcej $2 \cdot 10^{-16}$ – jest więc bardzo małe, ale nie zerowe.

„Gdyby więc pozbyć się dzielenia i wykonywać obliczenia wyłącznie na zadanych, prostych liczbach, komputer musi dać poprawny wynik!” – wrzasnął uradowany tak głośno, że dotychczas spokojnie śpiący Mruczek zeskoczył ze swojego ulubionego miejsca na regale. „No, staruszkule, popatrz!” – odwrócił się do brata – „Wystarczy obliczać

$$(1,1 - 1) \cdot 10 - 1 = 0$$

– w tym wyrażeniu wszystkie liczby są tak proste, że nie ma mowy o błędach...”. W okamgnieniu jeszcze raz zmienił siódmą linijkę swojego kodu na

$x = (1.1-1)*10-1.0;$

i ponownie uruchomił program:

Wynik: 8.88178e-16

Bracia popatrzyli po sobie skonsternowani... Co się dzieje?! Dalej niedokładnie?! Starszy szybko wyciągnął z szuflady wysłużony kalkulator (po ostatnim kolokwium z większym krytycyzmem podchodził do swoich możliwości rachunkowych) i wstukał na klawiaturze:

1 . 1 - 1 = * 1 0 - 1 =

Wyszło równo ZERO.

Więc jak to jest – pomyślał Wojtek – ich wspólny wypasiony komputer z najnowszym procesorem Intela nie umie wykonać bezbłędnie nawet tak banalnego działania, które z drugiej strony ani dla nich samych – ani dla leciwego, dziesięcioletniego kalkulatora – nie jest żadnym problemem? Fakt, na komputerze błąd dalej był malutki – około 0,0000000000000009, ale... dlaczego w ogóle tam był *jakikolwiek* błąd?!

Wszystko wskazywało na to, że – w przeciwieństwie do starego kalkulatora – komputer nie używał dokładnej wartości liczby 1,1, tylko jakiegoś jej przybliżenia... Może więc odkryli poważny defekt w konstrukcji procesora?

Z wypiekami na twarzy zaczęli bardziej systematyczne badania. Wojtek zajął się dalszymi eksperymentami. Starszy brat sięgnął po fachową literaturę i wkrótce natrafił na informację, że liczba 1,1 ma *nieskończone* rozwinięcie dwójkowe. Rzeczywiście, przecież łatwo sprawdzić, sumując szeregi geometryczne, że

$$1,1 = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{4i}} + \frac{1}{2^{4i+1}} \right).$$

To zaś znaczy, że liczba 1,1 zapisana w systemie dwójkowym ma postać:

$$(1,000\ 1100\ 1100\ 1100\ 1100\ \dots)_2.$$





Rozwiązanie zadania F 735.
Zapisując prawo załamania po kolei dla każdej płytki, otrzymujemy w końcu kąt padania odpowiadający kątowi całkowitego wewnętrznego odbicia.

Wtedy:
 $\sin \alpha_{\min} = n/k^{N-1}$,
zatem $\alpha_{\min} = \arcsin(n/k^{N-1})$.



Komputer przechowuje liczby właśnie w systemie dwójkowym i oczywiście nie jest w stanie zachować w pamięci nieskończenie wielu cyfr rozwinięcia! Dokładniej, procesor ich komputera, pracujący pod kontrolą 64-bitowego systemu operacyjnego Linux, może pamiętać jedynie 52 cyfry po przecinku binarnego rozwinięcia liczby 1,1 – a więc wszystkie działania prowadzi nie na 1,1 (jak wcześniej myśleli), ale na liczbie

$$(1, \underbrace{000\ 1100\ 1100\ 1100\ 1100\ 1100\ 1100\ 1100\ 1100\ 1100\ 1100\ 11010}_{52 \text{ cyfry}})_2$$

– która różni się od wyjściowej wartości 1,1 o około 10^{-16} . Dalszego ciągu łatwo się domyślić.

Tak więc rzeczywiście, nie tylko liczba $4/3$, ale też 1,1 jest reprezentowana w sposób przybliżony w procesorze komputera. . . Z drugiej strony, kalkulatory zwykle korzystają z reprezentacji liczb w systemie dziesiętnym (a nie dwójkowym) – właśnie dlatego, by nie sprawiać ludziom niespodzianek podobnych do powyższych – i to tłumaczy dokładny wynik obliczenia $(1,1 - 1) \cdot 10 - 1$ na kalkulatorze.

Szukając więcej informacji na ten temat, Wojtek dowiedział się, że nie tylko oni padli ofiarą nadmiernej ufności w precyzję komputerowych obliczeń. To właśnie fałszywe przekonanie wojskowych inżynierów, że komputer (wystarczająco) dokładnie wykonuje obliczenia na całkowitych wielokrotnościach liczby 0,1, było przyczyną zagadkowego zachowania się amerykańskiego systemu antyrakietowego Patriot, który po kilkudziesięciu godzinach bezczynności (tak!) kompletnie tracił celność, co swego czasu umożliwiło skuteczny atak rakietowy wojsk irackich podczas operacji „Pustynna Burza”.

Małą Deltę przygotował Piotr KRZYŻANOWSKI



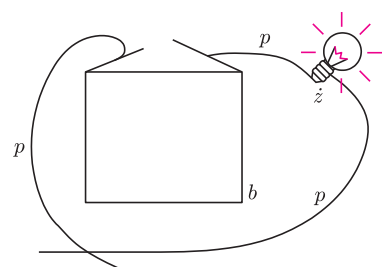
Przeprowadzamy elektrolizę

Stanisław BEDNAREK

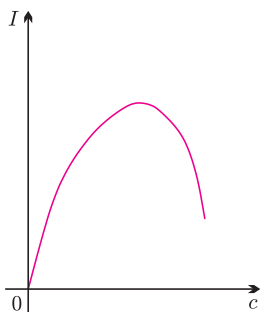
Tematem naszych doświadczeń będzie dzisiaj elektroliza. W ogólnym przypadku elektrolizą nazywamy zespół reakcji chemicznych i procesów fizycznych, zachodzących podczas przepływu prądu elektrycznego przez elektrolity. Elektrolitami są wodne roztwory kwasów, zasad i soli.

Na początek zbadamy przepływ prądu przez dwa elektrolity – wodny roztwór soli kuchennej i kwasu octowego. W tym celu potrzebne będą: niewielki słoik, czysta, najlepiej destylowana woda, sól kuchenna, ocet, cukier, bateria płaska, żaróweczka do latarki kieszonkowej z oprawką, łyżeczka, trzy kawałki miedzianego przewodu z odizolowanymi końcami. Zamiast żaróweczki możemy użyć uniwersalnego miernika elektrycznego lub miliamperomierza. Żaróweczkę łączymy przewodami z baterią w sposób pokazany na rysunku 1. Zwieramy odizolowane końce przewodów i sprawdzamy, czy żaróweczka świeci. Jeżeli tak, to znaczy, że bateria oraz żaróweczka są sprawne i możemy przystąpić do dalszej części eksperymentów.

Odizolowane końce przewodów wkładamy do kopczyka z soli kuchennej, usypanego na kartce papieru i sprawdzamy, czy żaróweczka świeci? Jeżeli tylko nie zwarliśmy końców przewodów, to okazuje się, że żaróweczka nie świeci. Następnie do słoika nalewamy czystej wody. Zanurzamy w niej odizolowane końce przewodów i sprawdzamy świecenie żaróweczki. Okazuje się, że i tym razem pozostaje ona ciemna. Jeżeli zamiast żaróweczki użyliśmy miernika elektrycznego i zwykłej wody zamiast destylowanej, to może okazać się, że miernik pokazuje przepływ niewielkiego prądu o natężeniu nieprzekraczającym kilku lub kilkunastu miliamperów.



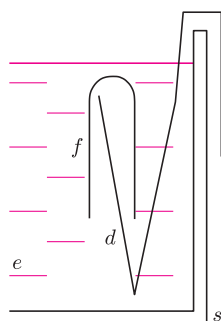
Rys. 1. Sposób połączenia obwodu elektrycznego do sprawdzenia przepływu prądu; *b* – bateria płaska, *z* – żaróweczka w oprawce, *p* – przewód.



Rys. 2. Zależność jasności świecenia żaróweczki lub natężenia prądu płynącego przez elektrolit I od stężenia c rozpuszczonej w elektrolicie substancji.

Następnie wylewamy roztwór ze słoika, słoik starannie płuczemy i nalewamy do niego czystej wody. Podobnie jak poprzednio, sprawdzamy jasność świecenia żaróweczki lub mierzymy natężenie prądu. Między kolejnymi sprawdzeniami będziemy wlewali do słoika łyżeczkę octu i starannie mieszały. Stwierdzamy, że tym razem jasność świecenia żaróweczki lub natężenie prądu systematycznie rosną wraz z ilością wlanego octu. Dzieje się tak dlatego, że ocet jest pięcio- lub dziesięcioprocentowym wodnym roztworem kwasu octowego i dolewając go do wody, zwiększamy, co prawda, stężenie, ale nie osiągamy takiego stężenia, przy którym występuje maksimum przewodności elektrycznej. Ponadto, kwas octowy miesza się z wodą w każdym stosunku i przez to nie można uzyskać roztworu nasyconego. Powtarzamy jeszcze raz doświadczenie, używając cukru zamiast soli i octu. Tym razem okazuje się, że ani postać krystaliczna, ani roztwór cukru o dowolnym stężeniu nie przewodzą prądu elektrycznego.

Po tych doświadczeniach przyszedł czas na wyjaśnienie, dlaczego czysta woda oraz czyste sole, kwasy i zasady nie przewodzą prądu elektrycznego, natomiast przewodzą ich roztwory wodne i dlaczego istnieją maksimum przewodności. Wyjaśnienie tego zjawiska jest następujące. Żeby substancja przewodziła prąd elektryczny, muszą w niej istnieć nośniki prądu



Rys. 3. Sposób wykonania elektrody przeznaczonej do zbierania gazów podczas elektrolizy; f – fiolka lub probówka, d – odizolowany drut, s – słoik, e – elektrolit.

Sporządzamy teraz wodny roztwór soli kuchennej. W tym celu do wody znajdującej się w słoiku wsypujemy łyżeczkę soli i starannie mieszaemy. Po całkowitym rozpuszczeniu się soli zanurzamy w roztworze odizolowane końce przewodów i obserwujemy żaróweczkę. Dosypywanie soli i mieszanie powtarzamy jeszcze kilka lub kilkanaście razy, w zależności od wielkości słoika, tak długo, aż sól przestanie się rozpuszczać w wodzie i zacznie opadać na dno słoika. W słoiku będzie się wówczas znajdował nasycony roztwór soli, to jest taki, który ma maksymalne stężenie i maksymalną zawartość soli. Po każdym dosypaniu soli przepuszczamy prąd przez roztwór i porównujemy jasność świecenia żaróweczki lub mierzymy natężenie prądu. Okazuje się, że początkowo jasność świecenia rosła, a następnie zaczęła maleć. Tak samo zachowywało się natężenie prądu. Możemy sporządzić przybliżony wykres jasności świecenia żaróweczki od zawartości soli. Otrzymamy wówczas krzywą, podobną do tej, którą przedstawiono na rysunku 2.

w postaci swobodnych elektronów lub jonów. W czystej wodzie oraz w czystych solach, kwasach i zasadach takich nośników po prostu nie ma. Kiedy cząsteczka soli, kwasu lub zasady znajdzie się w wodzie, wówczas siły działające między tworzącymi ją atomami ulegają osłabieniu. Pod wpływem chaotycznych ruchów cieplnych cząsteczki rozpadają się na jony naładowane ujemnie, czyli aniony, i jony naładowane dodatnio, czyli kationy. Nazywamy ten proces dysocjacją elektrolityczną, a wodne roztwory kwasów, zasad i soli – elektrolitami.

Wzrost ilości soli, kwasu lub zasady w wodzie powoduje zwiększenie ilości cząsteczek, które ulegają dysocjacji i mogą stać się nośnikami prądu elektrycznego. Stąd też, przez taki elektrolit może przepływać prąd elektryczny o większym natężeniu i żaróweczka jaśniej świeci, co obserwowaliśmy w naszych doświadczeniach. W jaki sposób wytłumaczyć jednak, że po przekroczeniu pewnej zawartości substancji rozpuszczonej natężenie prądu maleje? Możemy to wyjaśnić, zakładając, że pewna liczba różnoimiennych jonów się spotyka i ponownie łączy w elektrycznie obojętne cząsteczki. Proces ten nazywany jest rekombinacją jonów. Zwiększenie zawartości substancji rozpuszczonej powoduje wzrost prawdopodobieństwa rekombinacji i ubytek nośników prądu elektrycznego. W ten sposób dostępna ilość nośników prądu elektrycznego w elektrolicie jest wynikiem dwóch przeciwstawnych procesów – dysocjacji i rekombinacji.

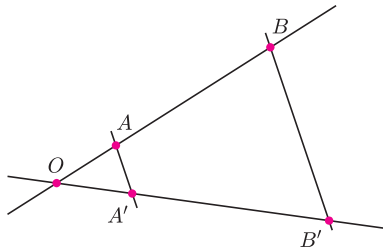
Przeprowadzimy teraz elektrolizę wodnego roztworu soli kuchennej. Żeby tego dokonać, przygotowujemy w słoiku roztwór soli o stężeniu, przy którym przewodnictwo prądu było maksymalne. Odizolowane końce drutów, zanurzone w roztworze, zaginamy w kształcie litery V. Jeżeli mamy dwie małe probówki lub fiolki od aromatu do ciast, to nakładamy je na odgięte końce drutów tworzące elektrody (rys. 3). Na ściance słoika zaznaczamy wodoodpornym pisakiem początkowy poziom roztworu. Włączamy przepływ prądu elektrycznego i obserwujemy zachowanie się roztworu.

Co dzieje się wewnątrz fiolek lub probówek? Jak zmienia się po upływie kilku godzin poziom roztworu? Po pewnym czasie zauważamy, że poziom roztworu ulega obniżeniu, a w pobliżu elektrod wydzielają się pęcherzyki gazów, przy czym ich objętości są jednakowe. Na elektrodzie dodatniej, czyli anodzie, wydzielają się atomy chloru, a na elektrodzie ujemnej, czyli katodzie, początkowo wydzielają się atomy sodu. Sód jednak szybko wchodzi w reakcję z wodą, dając wodorotlenek sodu, przy tym uwalnia się wodor, który otrzymujemy na katodzie. W ten sposób elektroliza znajduje praktyczne zastosowanie do rozkładu związków chemicznych i otrzymywania gazów.

O robieniu wykresów

Adam KOLANY*

W szkołach uczą nas, jak mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, „wykonać” wykres funkcji postaci $y = c \cdot f(a \cdot x + b) + d$ dla zadanych a, b, c i d , ale nikt nie uczy nas, jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ uzyskać (choćby w przybliżeniu) wykres funkcji $y_1 = 1/f(x)$ czy $y_2 = (f(x))^2$. W szczególności, chciałoby się wiedzieć, jak naszkicować przybliżenie funkcji $y = 1/x$ czy $y = x^2$. Żeby zaś dostać wykres funkcji $y = x^3$, byłoby dobrze wiedzieć, jak z wykresów funkcji f i g dostać wykres funkcji $f \cdot g$. Podobnie, gdybyśmy umieli wyznaczyć wykres $h = f/g$ dla znanych wykresów funkcji f i g , rozwiązalibyśmy problem wspomnianej wcześniej funkcji y_1 .

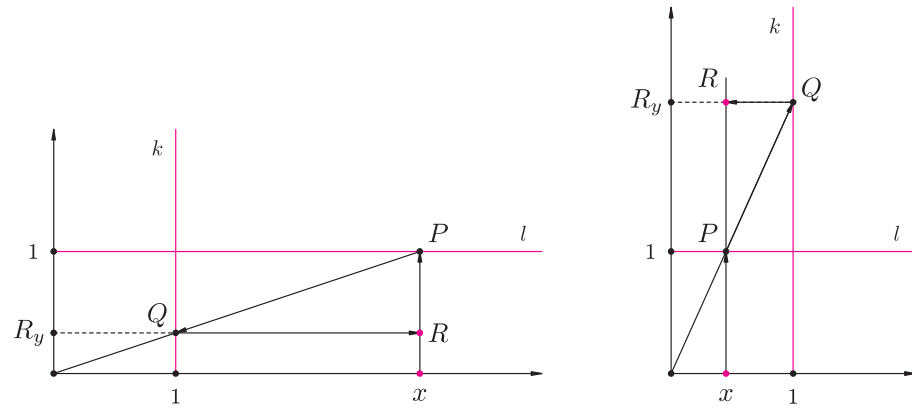


Rys. 1

Zadanie nasze stanie się łatwiejsze, gdy przyjrzymy się znanemu skądinąd twierdzeniu Talesa (rys. 1):

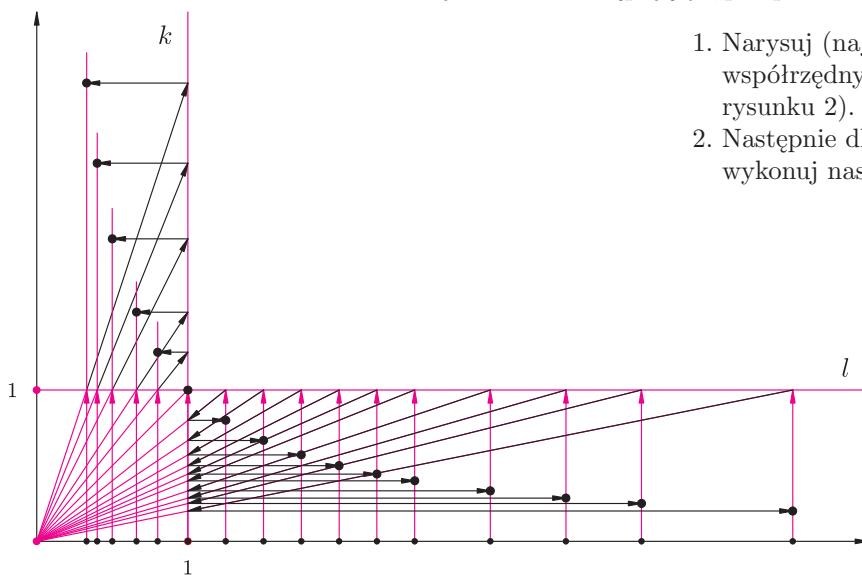
$$\text{Jeśli } AA' \parallel BB', \text{ to } \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$

I tak, zabierając się do szkicowania wykresu funkcji $y = 1/f(x)$, zauważmy, że na rysunku 2 punkt R leży na wysokości równej $1/x$.



Rys. 2

Daje to nam następujący „przepis” na wykres funkcji $y = 1/x$.



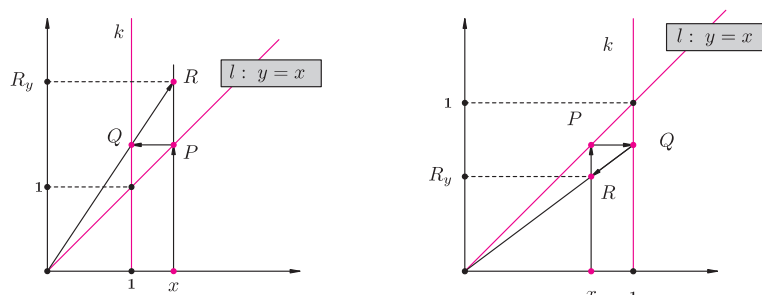
Rys. 3

1. Narysuj (najlepiej na papierze milimetrowym) układ współrzędnych oraz pomocnicze proste k i l (jak na rysunku 2).
2. Następnie dla x z danego przedziału, np. co 2 mm, wykonuj następujące kroki:

- 2.1. Z punktu $(x, 0)$ wystaw prostą prostopadłą do OX i znajdź punkt P jej przecięcia z prostą l .
- 2.2. Następnie znajdź punkt Q przecięcia prostej k z prostą łączącą $(0, 0)$ z P .
- 2.3. Przesuń punkt Q równoległe do osi odciętych nad punkt o odciętej x .
- 2.4. Otrzymany punkt R jest punktem wykresu funkcji $y = 1/x$.

Jak to działa, widać na rysunku 3.

Przejdźmy teraz do wykresu funkcji kwadratowej. Tutaj pomoże nam następujący rysunek.

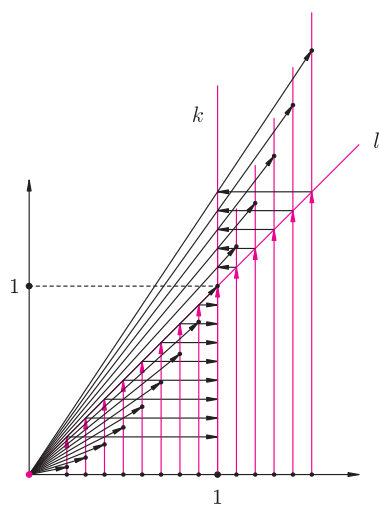


Rys. 4

Zauważmy, że rzędna R_y punktu R wynosi tutaj x^2 .

Dostajemy tym samym sposób wyznaczania wykresu funkcji kwadratowej.

- Narysuj układ współrzędnych oraz pomocnicze proste k i l (jak na rysunku 4).
- Następnie dla x z zadanego przedziału, podobnie jak poprzednio, wykonuj następujące kroki:
 - Z punktu $(x, 0)$ wystaw prostą prostopadłą do OX i znajdź punkt P jej przecięcia z prostą l .
 - Następnie przesuń równolegle do osi odciętych punkt P aż do przecięcia z k , otrzymując Q .
 - Teraz znajdź punkt wspólny prostej łączącej $(0, 0)$ i Q z prostą prostopadłą do osi odciętych przechodzącą przez punkt o współrzędnych $(x, 0)$.
 - Otrzymany punkt R jest punktem wykresu funkcji $y = x^2$.



Rys. 5

Jak to działa? Zobaczmy na rysunku 5. Mnie się podoba.

W takim razie co z $y = x^3$?

W tym celu zajmijmy się najpierw bardziej ogólnym zagadnieniem: jak, mając wykresy funkcji f i g , uzyskać wykres funkcji $f \cdot g$. Rozważmy w tym celu rysunek 6. I co my tu widzimy? Niech S_y będzie rzędną S . Z rysunku widać, że

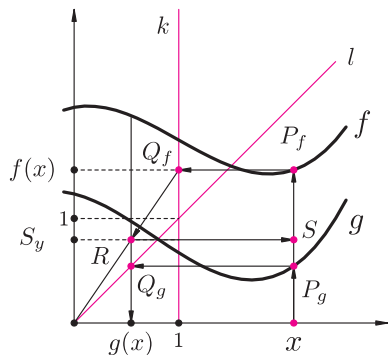
$$S_y : g(x) = f(x) : 1,$$

skąd

$$S_y = f(x) \cdot g(x),$$

czyli rzędna punktu S jest równa $f(x) \cdot g(x)$.

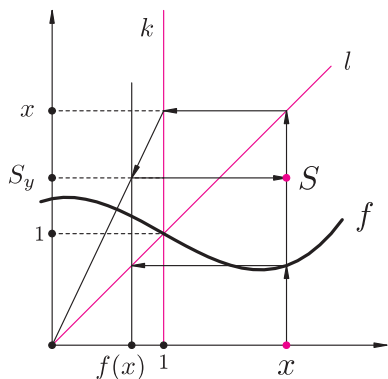
Tym sposobem dostajemy przepis na konstrukcję wykresu $y = f(x) \cdot g(x)$ z wykresów f i g .



Rys. 6

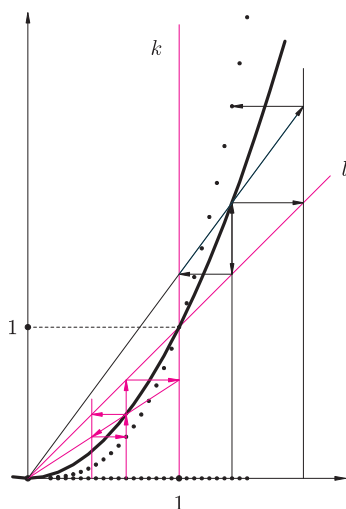
- Narysuj układ współrzędnych oraz pomocnicze proste k i l .
- Następnie dla x z zadanego przedziału wykonuj następujące kroki:
 - Z punktu $(x, 0)$ wystaw prostą prostopadłą (do OX) i znajdź punkt P_f jej przecięcia z wykresem f oraz punkt P_g jej przecięcia z wykresem g .
 - Przesuń równolegle do osi odciętych punkt P_f do przecięcia z k , otrzymując Q_f .
 - Przesuń równolegle do osi odciętych punkt P_g do przecięcia z l , otrzymując Q_g .
 - Znajdź punkt R przecięcia prostej prostopadłej do OX przechodzącej przez punkt Q_g oraz prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i punkt Q_f .
 - Przesuń teraz R równolegle do osi odciętych nad punkt $(x, 0)$.
 - Otrzymany punkt S jest punktem wykresu funkcji $y = f(x) \cdot g(x)$.

Nieco prościej wygląda sprawa, gdy jedna z funkcji jest identyczościowa, czyli wyznaczanie wykresu $y = x \cdot f(x)$ przy danym wykresie f . Popatrzmy na rysunek 7. Tutaj rzędna S równa jest iloczynowi $x \cdot f(x)$. Jako proste ćwiczenie proponuję sformułować stosowny przepis.



Rys. 7

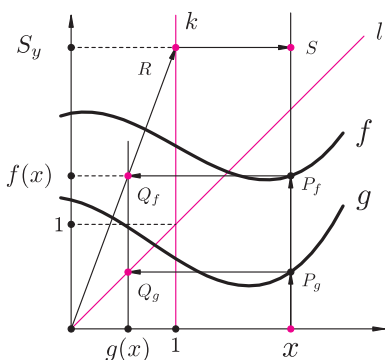
Niestety, jak widać z rysunku 8, przy większej ilości punktów obraz staje się nieco zagmatwany – ale mimo to przekonujący.



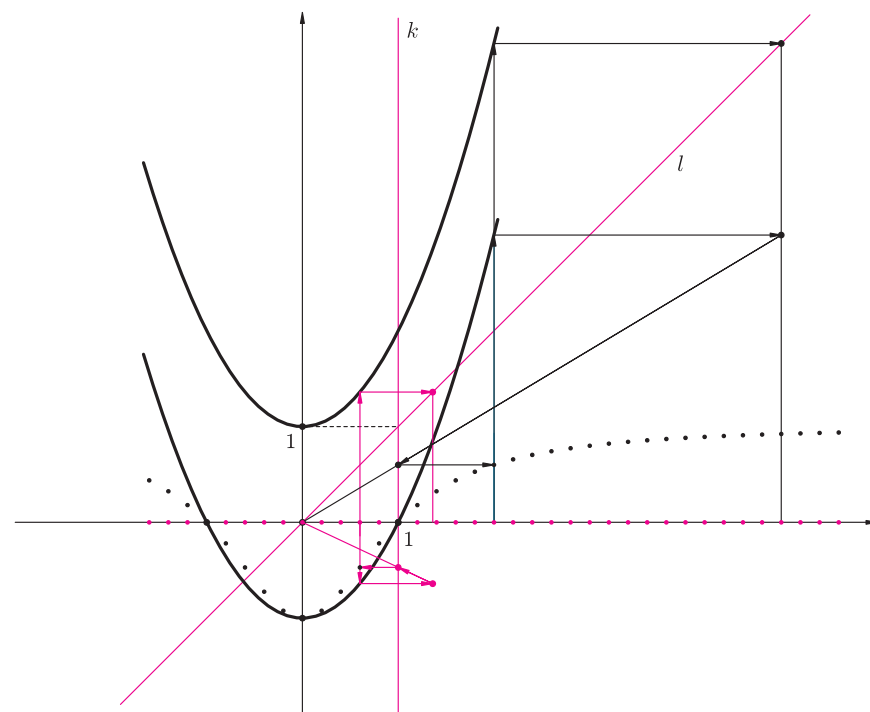
Rys. 8

Aby postawić kropkę nad „i”, zastanówmy się jeszcze, jak z zadanych wykresów f i g wyznaczyć wykres funkcji $y = f(x)/g(x)$. Znowu popatrzymy na rysunek (rys. 9). Wykazanie, że rzędna punktu S jest równa ilorazowi $f(x)/g(x)$, pozostawiamy Czytelnikowi. Stąd już nietrudno odczytać odpowiednią procedurę.

Dla przykładu, znajdziemy wykres funkcji $y = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$.



Rys. 9



Rys. 10

Ładny?

Komentarz

Czesław Bagiński i Edmund R. Puczyłowski w artykule *Zmodyfikowane wielomiany i twierdzenie Erdősa* (Delta 9/2008, str. 18–19) przedstawili dowód następującego twierdzenia Erdősa:

Twierdzenie 1. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to z dowolnego zbioru $2p - 1$ liczb całkowitych można wybrać p liczb, których suma jest podzielna przez p .*

Uzupełnijmy ten tekst uwagą, że wspomniane twierdzenie jest prawdziwe również, gdy zamiast liczby pierwszej weźmiemy dowolną liczbę naturalną $n \geq 1$.

Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste, załóżmy więc, że $n \geq 2$. Wówczas n możemy rozłożyć jednoznacznie na czynniki pierwsze. Chcemy wykazać, że z prawdziwości twierdzenia dla liczb naturalnych a i b , większych od 1, wynika, że twierdzenie zachodzi również dla ich iloczynu. Wtedy, korzystając z rozkładu na czynniki pierwsze i twierdzenia 1, przez indukcję otrzymujemy uogólnione twierdzenie.

Rozważmy więc zbiór $ab - 1$ liczb całkowitych. Ponieważ $ab - 1 \geq 2b - 1$, na mocy twierdzenia 1 możemy wybrać z tego zbioru b liczb, których suma jest podzielna przez b . Oznaczamy tę sumę przez bS_1 . Wyrzucamy wybrane liczby ze zbioru — zostaje nam $(a - 1)b - 1$ elementów. Postępowanie to powtarzamy do chwili, gdy w zbiorze pozostanie $b - 1$ liczb. W ten sposób utworzymy $((2ab - 1) - (b - 1))/b = 2a - 1$ zbiorów b -elementowych.

W efekcie mamy $2a - 1$ sum: $bS_1, bS_2, \dots, bS_{2a-1}$. Z założenia prawdziwości twierdzenia dla a , spośród liczb S_1, \dots, S_{2a-1} można wybrać a liczb, których suma jest podzielna przez a . Szukany zbiór jest sumą zbiorów b -elementowych odpowiadających wybranym S_i — ma on ab elementów, które sumują się do liczby podzielnej przez ab .

Witold BEDNAREK

Więcej o uogólnieniach twierdzenia Erdősa w następnych numerach!

W lutowym odcinku Logomotyw podałem przykład procedury kreślącej wariację islamskiego wzoru – pięciu białych kwadratów na czerwonym tle. Kultura islamu, a także współczesne wzornictwo i XX-wieczna sztuka abstrakcyjna mogą być źródłem inspiracji do wielu innych podobnych projektów z zakresu programowania grafiki. Ich rezultaty sprawiają zwykle wielką przyjemność zarówno autorom programów, jak i postronnym widzom.

Czasem jednak pozostawiają uczucie niedosytu. Odbiorcy tej komputerowej produkcji artystycznej po obejrzeniu serii obrazów utworzonych z wielokątów, odcinków prostoliniowych i ewentualnie łuków okręgu, zaczynają się skarżyć, że mają już dość geometrii; woleliby oglądać obrazy bardziej naturalne, na przykład, kwiatków i obłoków, a nie ciągle tylko kwadratów, trójkątów i kół. W tym odcinku pokażę więc przykład programowania „niematematycznych” obrazków podobnych do kwiatków i innych tworów natury. Napiшем procedurę tworzącą losowe, postrzępione kształty kwiatków, takie jak na rysunku 1 – dzięki i bardziej naturalne niż kwiaty w naturze, które, jak wiadomo, mają często symetryczne układy płatków.

Zacniemy od prostszej procedury, która tworzy na ekranie zarys kwiatka, jeśli ma dany jego kod.

```
oto zarysKwiatka :kodKwiatka
kreśl wygładź :kodKwiatka
już
```

Daną procedury musi być lista współrzędnych odpowiedniego pęku wektorów, spełniająca następujące warunki:

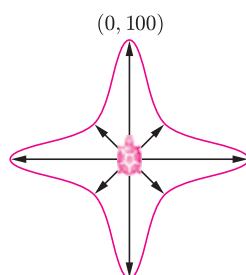
1. Pierwszy wektor na liście musi mieć kierunek 0 – „na północ”.
2. Kierunki kolejnych wektorów, aż do przedostatniego, muszą tworzyć ciąg rosnący o wyrazach mniejszych niż 360.
3. Ostatni wektor musi być identyczny z pierwszym.

Na przykład dla listy wektorów $[[0\ 100]\ [30\ 30]\ [100\ 0]\ [30\ -30]\ [0\ -100]\ [-30\ -30]\ [-100\ 0]\ [-30\ 30]\ [0\ 100]]$ otrzymamy zarys kwiatka, przedstawiony na rysunku 2.

Jest on dość symetryczny; żeby tworzyć „bardziej naturalne” kształty, musimy mieć procedurę, nazwijmy ją `lkwk`, która dla danej liczby wektorów (płatków) oraz ograniczenia dolnego i górnego ich długości tworzy losowy kod wektorowy kwiatka spełniający warunki 1–3.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zdefiniowanie jej pozostawiam Czytelnikom (rozwiązanie w aneksie na stronie WWW *Delty*).

Mając `lkwk`, możemy zdefiniować procedurę tworzącą kolorowe kształty kwiatków, takie jak na rysunku 1, w następujący sposób:

```
oto kształtKwiatka :kolor :n :a :b
ukp :kolor
zarysKwiatka lkwk :n :a :b
zamaluj
już
```

Jednak obraz naturalnego kwiatka nie jest tylko nieregularną kolorową plamą. Powinien być trochę bardziej złożony. Bogatszy obraz uzyskamy, nakładając plamę na plamę. Możemy, na przykład, zdefiniować procedurę, która mając dany kod wektorowy kwiatka, tworzy obraz układu n coraz mniejszych plam nałożonych jedna na drugą. Nazwijmy ją `krotka`, bo to dobra nazwa dla kwiatka.

```
oto krotka :n :kodKwiatka
jeśli :n = 0 [stop]
ukp jld
zarysKwiatka :kodKwiatka
zamaluj
krotka :n - 1 0.7 * :kodKwiatka
już
```

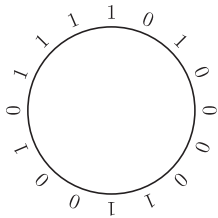
Polecenie `krotka 5 [[0 100] [20 20] [100 0] [[20 -20] [0 -100] [-20 -20] [-100 0] [-20 20] [0 100]]]` daje obraz pięciu plam, jak na rysunku 3.

Każda kolejna plama jest obrazem jednokładnym większej plamy w skali 0.7. Gdyby dany kod był losowy, to obraz byłby trochę mniej regularny, ale jeszcze większą naturalność moglibyśmy uzyskać, zastępując zwykłą jednokładność przekształceniem, które zmienia nie tylko wielkość plamy, lecz również trochę deformuje jej kształt. To otwiera przed nami nieograniczone możliwości tworzenia obrazów kwiatków „podobniejszych niż prawdziwe”, takich jak na okładce i w aneksie na stronie WWW *Delty*. Pokazywałem je wielu różnym gremiom. Zwykle bardzo się podobały. No i wreszcie nikt już nie narzekał na ich matematyczność.

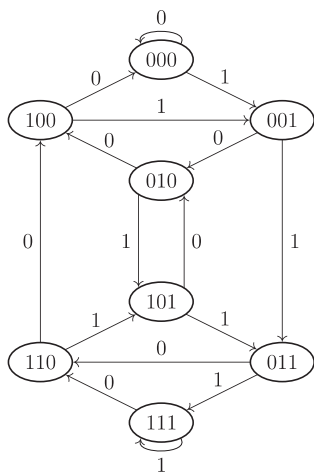
Ciągi de Bruijna

Jakub RADOSZEWSKI

Rozważa się także ciągi de Bruijna złożone z liter $0, 1, \dots, M$, dla $M > 1$. My nie będziemy się nimi zajmować, jednakże większość tego artykułu można łatwo uogólnić do ciągów tej postaci.



Rys. 1



Rys. 2. Graf de Bruijna G_4 .

Cykl Eulera to cykl przechodzący przez każdą krawędź grafu dokładnie raz. Więcej o cyklach Eulera można przeczytać np. w książce R. J. Wilsona „Wprowadzenie do teorii grafów”.

Okazuje się, że każdy cykl Hamiltona w G_n (czyli cykl przechodzący przez każdy wierzchołek dokładnie raz) odpowiada pewnemu ciągowi de Bruijna rzędu $n - 1$ (czy potrafisz to uzasadnić?). Ponieważ nie są znane efektywne metody wyznaczania cyklu Hamiltona (ten problem jest NP-zupełny), więc to spostrzeżenie jest interesujące jedynie z teoretycznego punktu widzenia.

Ciągiem de Bruijna rzędu n (oznaczenie: B_n) nazywamy słowo cykliczne długości 2^n złożone z „liter” 0 i 1, w którym każde n -literowe słowo zerojedynkowe występuje jako podsłowo (tzn. spójny fragment) dokładnie raz. Słowo cykliczne to ciąg liter bez wyróżnionego początku i końca – aby przekształcić zwykłe słowo w cykliczne, wystarczy je sobie wyobrazić jako zapisane wokół okręgu. Na przykład ciągiem de Bruijna rzędu 4 jest

1010000110010111,

który to ciąg można zapisać w postaci cyklicznej jak na rysunku 1.

Ciągi de Bruijna można wykorzystywać do efektywnego generowania wszystkich słów binarnych długości n , które z kolei można utożsamiać np. z podzbiorem zbioru n -elementowego lub z zapisami dwójkowymi liczb naturalnych od 0 do $2^n - 1$. Są one ciekawe także same w sobie – na pierwszy rzut oka w ogóle nie widać, czy istnieją ciągi de Bruijna wszystkich możliwych rzędów oraz w jaki sposób można by się zabrać za ich konstruowanie. W tym artykule spróbujemy więc rzucić trochę światła na ich strukturę.

Pokażemy najpierw, że ciągi te są mocno związane z tzw. grafami de Bruijna, G_n . Graf G_n ma 2^{n-1} wierzchołków, odpowiadających wszystkim zerojedynkowym słowom długości $n - 1$. Z wierzchołka v odpowiadającego słowu $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ wychodzą dokładnie dwie krawędzie skierowane:

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} \xrightarrow{0} a_2 \dots a_{n-1} 0 \quad \text{oraz} \quad a_1 a_2 \dots a_{n-1} \xrightarrow{1} a_2 \dots a_{n-1} 1,$$

etykietowane odpowiednio literami 0 i 1.

G_n zawiera łącznie 2^n krawędzi, czyli dokładnie tyle, ile liter ma ciąg de Bruijna rzędu n . Pokażemy, że nie jest to tylko przypadkowy zbieg okoliczności – otóż ciąg etykiet kolejnych krawędzi na dowolnym cyklu Eulera w G_n odpowiada pewnemu ciągowi de Bruijna rzędu n .

Na początku zastanówmy się, dlaczego w ogóle G_n zawiera jakikolwiek cykl Eulera. Dla grafów skierowanych jest na to proste kryterium: z każdego wierzchołka musi wychodzić dokładnie tyle krawędzi, ile do niego wchodzi, oraz graf musi być silnie spójny (tzn. z dowolnego wierzchołka musi się dać dojść – za pomocą krawędzi – do dowolnego innego wierzchołka). Sprawdzenie, że każdy graf G_n spełnia to kryterium, pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. Mała podpowiedź: aby pokazać, że druga część kryterium jest spełniona, wystarczy umieć explicite wskazać ścieżkę z dowolnego wierzchołka do dowolnego innego.

Niech więc $e = e_1, \dots, e_{2^n}$ będzie ciągiem etykiet kolejno odwiedzanych krawędzi na dowolnym cyklu Eulera w G_n . Aby uzasadnić, że e jest ciągiem de Bruijna, pokażemy, że dowolne dwa podsłowa długości n (cyklicznej wersji) słowa e są różne (dlaczego wystarczy to uzasadnić?). Niech $e_i e_{i+1} \dots e_{i+n-1}$ będzie dowolnym takim podsłowem. Zauważmy, że przejście z dowolnego wierzchołka G_n kolejno krawędziami o etykietach $e_i, e_{i+1}, \dots, e_{i+n-2}$ prowadzi zawsze do wierzchołka v odpowiadającego właśnie słowu $e_i e_{i+1} \dots e_{i+n-2}$. Z tego względu wystąpienie $e_i e_{i+1} \dots e_{i+n-2} e_{i+n-1}$ na cyklu jednoznacznie wyznacza krawędź odpowiadającą e_{i+n-1} jako jedyną wychodzącą z v o takiej etykietce. Gdyby więc pewne dwa podsłowa $e_i e_{i+1} \dots e_{i+n-1}$ oraz $e_j e_{j+1} \dots e_{j+n-1}$ słowa e były takie same (dla $i \neq j$), to dokładnie te same krawędzie odpowiadałyby e_{i+n-1} oraz e_{j+n-1} , co nie jest możliwe, gdyż e jest cyklem Eulera.

Ze związku między cyklami Eulera a ciągami de Bruijna wynika, między innymi, to, że istnieją ciągi de Bruijna wszystkich możliwych rzędów. Ponieważ znane są efektywne algorytmy wyznaczania cyklu Eulera, to otrzymaliśmy w ten sposób także metodę konstrukcji ciągów de Bruijna. Można pokazać, że za jej pomocą da się wygenerować dowolny możliwy ciąg de Bruijna, czyli że każdy ciąg de Bruijna odpowiada pewnemu cyklowi Eulera w G_n . (Czy potrafisz wskazać cykl Eulera w G_4 z rysunku 2 odpowiadający ciągowi de Bruijna z rysunku 1?)



Rozwiązanie zadania M 1235.

Wystarczy wykazać, że suma pól czworokątów $AKSN$ i $SLCM$ jest równa połowie pola czworokąta $ABCD$.

Oznaczmy przez \mathcal{F} pole figury \mathcal{F} . Czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem, gdyż na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$ oraz $KL = \frac{1}{2}AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$. Stąd wynika, że $[AKN] = \frac{1}{4}[ABD]$ oraz $[LCM] = \frac{1}{4}[BCD]$. Dodając stronami dwie ostatnie zależności, otrzymujemy

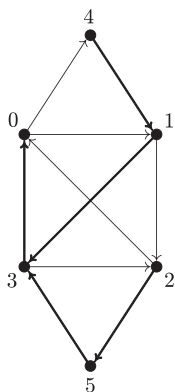
$$(1) \quad [AKN] + [LCM] = \frac{1}{4}[ABCD].$$

Analogicznie dowodzimy, że $[BLK] + [MDN] = \frac{1}{4}[ABCD]$, co w połączeniu z zależnością (1) daje $[KLMN] = \frac{1}{2}[ABCD]$.

Ponieważ czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem, więc

$$(2) \quad [KSN] + [LMS] = \frac{1}{2}[KLMN] = \frac{1}{4}[ABCD].$$

Dodając stronami równości (1) i (2), otrzymujemy tezę.



Rys. 3. Przykładowy sześciowierzchołkowy graf skierowany z zaznaczonym skierowanym drzewem rozpinającym ukorzenionym w $v_0 = 0$.

Czy w każdym grafie eulerowskim istnieje skierowane drzewo rozpinające? Jak takie drzewo wyznaczyć?

Mogłoby się wydawać, że problem mamy już całkowicie rozwiązany. Niestety, podany algorytm generowania ciągów de Bruijna jest stosunkowo skomplikowany jak na to, że ciągi te z założenia mają pozwalać na *szybkie* generowanie n -literowych słów zerojedynkowych. Z tego względu opiszemy teraz pewien pozornie zupełnie inny algorytm konstrukcji tych ciągów, który jest mniej ogólny (pozwala na wyznaczenie zaledwie jednego ciągu de Bruijna o ustalonym rzędzie n), ale za to dużo prostszy w zapisie.

Algorytm Forda

```
u := 11...1; /* n jedynek */
while (true) do begin
  v := u2u3...un;
  if (było[v0]) then u := v1;
  else u := v0;
  if (było[u]) then break;
  było[u] := true;
  pisz(u_n);
end;
```

W algorytmie Forda konstruujemy ciąg literka po literce, wybierając zawsze najmniejszą możliwą literę, tak aby żadne podślowo długości n się nie powtórzyło. Okazuje się, że ciąg kolejno dokładanych literek tworzy pewien ciąg de Bruijna rzędu n . Na przykład wykonanie algorytmu Forda dla $n = 4$ prowadzi do otrzymania ciągu de Bruijna

0000100110101111.

Fakt, że opisany algorytm jest rzeczywiście poprawny, jest dosyć zaskakujący. Zastanawiające wydaje się już chociażby to, dlaczego akurat zaczynamy całe postępowanie od słowa złożonego z samych jedynek, a nie, na przykład, z samych zer – co ciekawe, rozpoczęcie algorytmu od słowa złożonego z samych zer *nie prowadzi* do wygenerowania ciągu de Bruijna, co Czytelnik może łatwo sprawdzić chociażby dla $n = 4$. Dalej, Czytelnicy zaznajomieni ze standardowym algorytmem wyznaczania cyklu Eulera w grafie mogą zauważyć, że algorytm Forda jest w gruncie rzeczy do niego bardzo podobny, lecz różni się od niego w jednym istotnym względzie: w oryginalnym algorytmie na początku wybierany jest jeden dowolny cykl, a następnie do niego doklejane są kolejne, rekurencyjnie wyznaczone cykle, tymczasem w opisanej właśnie metodzie zakładamy, że na pewno „będziemy mieli szczęście”, czyli że już w pierwszym przebiegu skonstruowany cykl będzie na pewno cyklem Eulera. Pokażemy jednak, że opisany algorytm nie jest aż tak „magiczny”, jak by się mogło wydawać.

Uzasadnienie rozpoczniemy od trochę mniej znanego algorytmu wyznaczania cyklu Eulera w dowolnym grafie $G = (V, E)$. Powiemy, że podgraf T grafu G jest jego *skierowanym drzewem rozpinającym* ukorzenionym w v_0 , jeżeli:

- T zawiera $|V| - 1$ krawędzi;
- dla każdego wierzchołka $v \in V \setminus \{v_0\}$ w T istnieje dokładnie jedna krawędź, która wychodzi z v ;
- z v_0 nie wychodzi żadna krawędź;
- z każdego wierzchołka $v \in V \setminus \{v_0\}$ można dojść do v_0 , wykorzystując tylko krawędzie z T .

Okazuje się, że na podstawie dowolnego skierowanego drzewa rozpinającego T grafu eulerowskiego można skonstruować cykl Eulera w G . Budowę cyklu rozpoczynamy w v_0 . Następnie wędrujemy po kolejnych (parami incydenentnych oczywiście) krawędziach grafu, traktując krawędzie z T jako „zakazane”, tzn. wybierając je najpóźniej, jak tylko się da. Dla grafu z rysunku 3 można w ten sposób otrzymać np. cykl

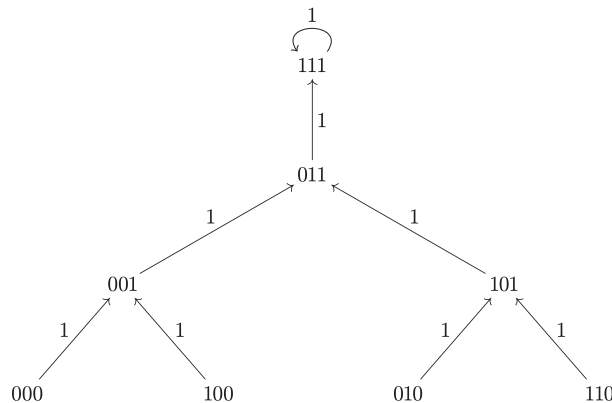
$$0 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 0.$$

Dlaczego to działa? G jest eulerowski, więc z każdego wierzchołka wychodzi dokładnie tyle krawędzi, ile do niego wchodzi. Stąd, po wejściu do dowolnego

wierzchołka $v \neq v_0$ zawsze pozostaje jakaś niewykorzystana krawędź wychodząca z v , co pokazuje, że ścieżka S konstruowana zgodnie z opisanym kryterium może się skończyć jedynie w v_0 , czyli jest cyklem. Aby udowodnić, że jest to także cykl Eulera, wystarczy pokazać, że wszystkie krawędzie z T leżą na S (dlaczego?). Aby S mogła skończyć się w v_0 , wszystkie krawędzie wychodzące z v_0 muszą leżeć na S , co na mocy własności grafu G oznacza, że również wszystkie krawędzie wchodzące do v_0 muszą leżeć na S . W szczególności dotyczy to wszystkich krawędzi $(w, v_0) \in T$ (np. krawędzi $3 \rightarrow 0$ dla grafu z rysunku 3). Dalej, każda krawędź $(w, v_0) \in T$ zostaje wykorzystana w algorytmie jako ostatnia wychodząca z w . To oznacza, że przed tym, jak taka krawędź znajdzie się na S , wszystkie krawędzie wchodzące do w musiały już się na tej ścieżce znaleźć, w tym wszystkie krawędzie postaci $(u, w) \in T$ (na rysunku 3: $1 \rightarrow 3$ i $5 \rightarrow 3$) itd. Ze względu na warunek d) z definicji skierowanego drzewa rozpinającego kontynuując to rozumowanie, w końcu dojdziemy do liści grafu T , czyli do wierzchołków, do których nie wchodzi już żadna krawędź z T . To kończy uzasadnienie tego, że rzeczywiście S zawiera wszystkie krawędzie z T .

Można pokazać, że cykle Eulera w grafie skierowanym odpowiadają wzajemnie jednoznacznie skierowanym drzewom rozpinającym. Na podstawie tego faktu można wyprowadzić wzór na liczbę cykli Eulera w danym grafie, z którego wynika m.in. wzór na liczbę ciągów de Bruijna rzędu n : $2^{2^n - 1}$.

Opisany algorytm jest może ciekawy sam w sobie, ale jaki ma on związek z generowaniem ciągów de Bruijna, a w szczególności z algorytmem Forda? Rozważmy podgraf H grafu de Bruijna G_n , złożony z krawędzi o etykiecie 1. Jak łatwo zauważyć, jest to drzewo skierowane z dołączoną pętlą w korzeniu: na najniższym poziomie drzewa mamy wierzchołki odpowiadające słowom zakończonym zerem, dalej – wierzchołki zakończone jedną jedyneką, potem dwiema, itd. aż do korzenia odpowiadającego słowu $11 \dots 1$.



Rys. 4. Struktura podgrafu H grafu G_4 .

Wyrzucmy pętlę z H , a resztę potraktujmy jako skierowane drzewo rozpinające G_n , ukorzenie w $11 \dots 1$. Zauważmy, że poszukiwanie cyklu Eulera w oparciu o to drzewo odpowiada każdorazowemu wyborowi niewykorzystanej krawędzi o najmniejszej możliwej etykiecie. Ponieważ, jak już wcześniej zauważyliśmy, n -literowe słowa binarne jednoznacznie odpowiadają krawędziom grafu G_n (a dokładniej parom postaci: (wierzchołek, etykieta krawędzi wychodzącej z wierzchołka)), więc otrzymany algorytm jest tak naprawdę... dokładnie algorytmem Forda!

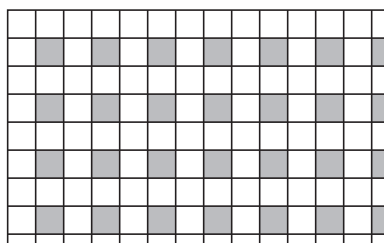


Na koniec dodajmy, że algorytm Forda ma jeszcze jedną zaletę: można zauważyć, że generowany w nim ciąg jest najmniejszym alfabetycznie (tj. słownikowo) spośród wszystkich ciągów de Bruijna danego rzędu.



Rozwiązanie zadania M 1234.

Podzielmy dany prostokąt na kwadraty 1×1 (które będziemy nazywać polami) oraz pokolorujmy niektóre z nich tak, jak pokazano na rysunku. Przyjmijmy, że liczba pomalowanych pól wynosi p .



Każdy kwadrat 2×2 zawiera dokładnie jedno pokolorowane pole, a każdy prostokąt 1×4 pokrywa parzystą liczbę pokolorowanych pól (zero lub dwa). Stąd wynika, że liczby k oraz p są tej samej parzystości.

Gdyby żądane pokrycie było możliwe, to rozumując analogicznie, doszlibyśmy do wniosku, że liczby $k - 1$ oraz p są tej samej parzystości. Uzyskaliśmy sprzeczność.

Powszechne wśród nauczycieli szkół wszystkich typów jest narzekanie na obniżający się poziom edukacji matematycznej. Niepokoi to szeroko rozumiane środowisko matematyczne, co można traktować jako naturalny niepokój korporacyjny, którym można by się nadmiernie nie przejmować. Wydaje się jednak, że w nieco dalszej perspektywie ten stan może przynieść znacznie poważniejsze negatywne skutki. Już spada zainteresowanie studiami matematyczno-technicznymi. Podobna sytuacja ma miejsce w innych krajach, gdzie zjawisko to jest nawet bardziej powszechne. Zaczyna się tam już wprowadzać programy naprawcze. Może więc nie należy czekać na to, co się wydarzy, tylko już zacząć myśleć i działać, by temu negatywnemu, jak pokazują przykłady innych krajów, zjawisku przeciwdziałać. Pojawia się więc pytanie, kto i co powinien robić. Naturalnym adresatem tego pytania jest, oczywiście, resort edukacji, który odpowiada za politykę edukacyjną państwa. Można by więc powiedzieć „to oni” i nie zawracać tym sobie głowy. Czy jednak samo środowisko matematyczne nie powinno podejmować inicjatyw, które mogą pomóc odwrócić niekorzystny trend?

Przecież zwyczajnie leży to w jego dobrze pojętym interesie, który chyba nie jest sprzeczny z szerszym interesem. Potrzebna jest do tego konsolidacja środowiska. Od czegoś trzeba zacząć. Temu ma służyć działalność Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej (SEM), które zostało powołane w lipcu 2008 roku. Inicjatorami powołania jest grupa aktywnych nauczycieli i pracowników wyższych uczelni, którzy zajmują się popularyzacją matematyki i pracą z uzdolnioną matematycznie młodzieżą. Na ile ta inicjatywa okaże się skuteczna, zdecyduje to, jak szerokie środowisko matematyczne uzna ją za pożyteczną, i na ile czynnie się w nią włączy. Program i konkretne działania SEM ukształtują jego członkowie. Efekty dotychczasowej działalności to:

- współorganizacja konferencji *Konkursy matematyczne w Polsce*;
- prowadzenie Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów;
- opracowanie i wydanie broszury *I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*.

Podejmowane są inicjatywy dalszych działań.

Zarząd SEM

Matematyku – zrób to lepiej!

W broszurce poświęconej I Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów podane są rozwiązania zadań konkursowych. Idea przyświecająca układającym zadania jest taka, aby do ich rozwiązania potrzebna była (w miarę możliwości) jedynie matematyczna przemyślność, a w mniejszym stopniu erudycja uczestnika. Jednak prezentujący rozwiązania są już skażeni matematyczną wiedzą i najprostszych rozwiązań mogą nie dostrzegać.

Dlatego proponujemy nieustające zawody: znaleźć prostsze rozwiązania zadań olimpijskich od podanych przez autorów broszurki.

Może poniższe rozwiązanie jest dobrym przykładem?

Zadanie. W przestrzeni danych jest n takich punktów ($n \geq 4$), że żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem niebieskim lub czerwonym. Udowodnij, że można tak wybrać jeden z tych kolorów, aby każde dwa punkty były połączone odcinkiem lub łamaną wybranego koloru.

Rozwiązanie. Jeśli jakieś punkty A i B nie dają się połączyć łamaną czerwoną, to znaczy, że łączący je odcinek jest niebieski. Wynika z tego, że każde dwa punkty można połączyć łamaną niebieską. Gdyby bowiem istniał punkt C , którego nie dałoby się połączyć niebieską łamaną z A lub B , to odcinki AC i BC byłyby czerwone – ale wtedy czerwona łamana ACB łączyłaby punkty A i B wbrew początkowemu przypuszczeniu.

Albo więc nie można znaleźć takich punktów A i B (i wtedy dowolne dwa punkty są połączone łamaną czerwoną), albo też można i wtedy dowolne dwa punkty można połączyć łamaną niebieską.

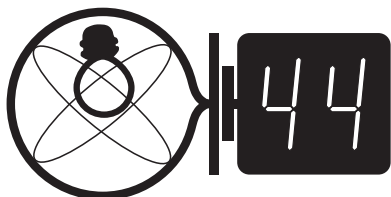
Czy to rozwiązanie jest poprawne? A jeśli tak, to czy jest lepsze od przedstawionego w broszurce?

Piszcie do nas.

Komitet Główny
Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

o Olimpiadzie można poczytać na stronie <http://www.om.edu.pl/omg>

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2009

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
462 ($WT = 3,70$) i 463 ($WT = 3,18$)
z numeru 9/2008

Krzysztof Magiera	Łosiów	27,27
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	26,00
Tomasz Wietecha	Tarnów	24,63
Andrzej Idzik	Bolesławiec	24,36
Radosław Poleski	Kołobrzeg	22,24

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z fizyki nr 474, 475

Redaguje Jerzy B. BROJAN

474. Za pomocą soczewki skupiającej wytworzono obraz pozorny trzykrotnie powiększony. Nie zmieniając położenia przedmiotu, przesuwno ekran po drugiej stronie soczewki i zaobserwowano bardzo słaby obraz rzeczywisty dwukrotnie zmniejszony. Jak powstał ten obraz? Ile wynosi współczynnik załamania szkła soczewki? Grubość soczewki jest mała w porównaniu z odległością przedmiotu i obrazów.

475. Płaska warstwa o grubości d i stałej dielektrycznej równej 1 zawiera jednorodnie rozmieszczony ładunek dodatni o gęstości objętościowej ρ i styka się z drugą warstwą o identycznych parametrach, ale zawierającą ładunek ujemny. Obliczyć różnicę potencjałów między zewnętrznymi powierzchniami warstw.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2008

Przypominamy treść zadań:

466. Stojący na peronie pasażer włączył stoper w chwili, gdy minął go przód hamującego pociągu metra. Gdy minął go przód drugiego wagonu, stoper pokazał czas $t_1 = 1,82$ s, a gdy minął go przód trzeciego wagonu, stoper pokazał czas $t_2 = 4,05$ s. Jeśli pociąg hamuje ze stałym przyspieszeniem, to w jakiej chwili t_3 minie pasażera przód czwartego wagonu?

467. Chmura o kształcie długiego walca o promieniu R składa się z elektronów krążących wokół osi walca w polu magnetycznym o indukcji B skierowanym wzdłuż tej osi. Liczba elektronów na jednostkę objętości n jest stała wewnątrz chmury, a na zewnątrz niej jest próżnia. Znaleźć możliwe prędkości kątowe ω obrotu chmury, oraz maksymalną wartość n , dla której taki ruch elektronów jest możliwy (przy ustalonych pozostałych parametrach). Założyć, że prędkość elektronów jest znacznie mniejsza od prędkości światła.

466. Spełnione są równania

$$d = v_0 t_1 - at_1^2/2, \quad 2d = v_0 t_2 - at_2^2/2, \quad 3d = v_0 t_3 - at_3^2/2,$$

gdzie d jest długością wagonu, v_0 – prędkością pociągu w chwili włączenia stopera, a a – opóźnieniem (przyspieszeniem ujemnym). Po wyeliminowaniu v_0 i a otrzymujemy równanie kwadratowe na t_3

$$t_3^2(t_2 - 2t_1) + t_3(2t_1^2 - t_2^2) + 3t_1 t_2(t_2 - t_1) = 0.$$

Analityczna postać rozwiązania jest tak „niewygodna”, że ją pominiemy i podamy jedynie wynik liczbowy $t_3 = 7,24$ s. Należy wybrać mniejszy z dwóch wyników, gdyż większy odpowiada nierealnemu „powrotowi” pociągu po jego zatrzymaniu.

467. Chmura wytwarza radialne pole elektryczne, którego natężenie w odległości r od osi walca można

obliczyć, stosując prawo Gaussa do współosiowego walca o promieniu r . Dla $r < R$ otrzymujemy

$$E(r) = \frac{rne}{2\epsilon_0}.$$

Przyrównujemy różnicę siły Lorentza i siły oddziaływania elektrostatycznego do siły dośrodkowej

$$e\left(\omega r B - \frac{rne}{2\epsilon_0}\right) = m\omega^2 r \quad (m - \text{masa elektronu}).$$

Jak widać, prędkość kątowa ω nie zależy od r , czyli chmura obraca się „sztywno”. Po wprowadzeniu oznaczeń $\omega_c = eB/m$ (częstość cyklotronowa) i $\omega_p = \sqrt{e^2 n/m\epsilon_0}$ (częstość plazmowa Langmuira) równanie powyższe można zapisać w postaci

$$\omega^2 - \omega_c \omega + \frac{1}{2}\omega_p^2 = 0.$$

Zatem

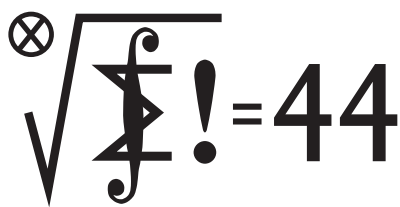
$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_p^2}).$$

Utrzymanie chmury w opisanym ruchu przestaje być możliwe, gdy $2\omega_p^2$ przekroczy wartość ω_c^2 , tzn.

$$n_{\max} = \frac{B^2 \epsilon_0}{2m}.$$

Logiczna spójność rozwiązania wymaga jeszcze rozważenia pola magnetycznego wytworzonego przez ruch ładunku chmury. Okazuje się, że pochodząca od tego pola magnetycznego siła Lorentza jest mniejsza od siły elektrostatycznej o czynnik rzędu v^2/c^2 , czyli wobec założonej nierelatywistycznej prędkości elektronów można tę siłę pominąć.

Redaguje Marcin E. KUCZMA



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2009

577. Dwusieczna kąta ABC trójkąta ABC przecina bok AC w punkcie E oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D . Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AE i CD . Dowieść, że punkty M, B, C, N leżą na jednym okręgu.

578. Wykazać zbieżność i obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazach

$$a_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}$$

Zadanie 578 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2008

Przypominamy treść zadań:

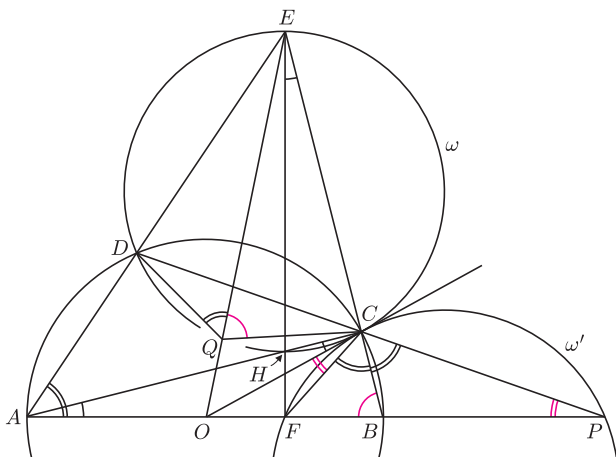


569. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O ; odcinek AB jest średnicą tego okręgu. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P . Okręgi opisane na trójkątach OBC i ODA przecinają się w punktach O i Q . Dowieść, że $OQ \perp PQ$.

570. Znaleźć wszystkie funkcje f , określone w zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych, o wartościach w tym samym zbiorze, ciągle prawostronnie w punkcie 0 i spełniające nierówność

$$f\left(\frac{x+y}{1+x+y}\right) \geq f(x) + f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y \geq 0.$$

569. Nie tracąc ogólności, przyjmijmy że punkt B leży między A i P .



Niech E będzie punktem przecięcia prostych AD i BC , i niech EF będzie wysokością w trójkącie ABE ; pozostałe dwie wysokości to AC i BD . Przecinają się one w punkcie H ; odcinek EH jest średnicą okręgu ω , przechodzącego przez punkty C i D . Ponieważ $|\sphericalangle OCH| = |\sphericalangle OAC| = |\sphericalangle CEH|$, okrąg ω jest styczny do prostej OC .

Zachodzi ponadto równość $|ED| \cdot |EA| = |EC| \cdot |EB|$, z której wynika, że punkt E leży na osi potęgowej okręgów (ODA) i (OBC) , czyli na prostej OQ .

Każdy z czworokątów $OQDA$ i $OQCB$ ma (z założenia) okrąg opisany. Wobec tego $|\sphericalangle DQE| = |\sphericalangle EAB|$ oraz $|\sphericalangle CQE| = |\sphericalangle EBA|$, skąd przez dodanie stronami

$$|\sphericalangle CQD| = |\sphericalangle EAB| + |\sphericalangle EBA| = 180^\circ - |\sphericalangle BEA|.$$

To zaś oznacza, że okrąg ω przechodzi też przez punkt Q .

Dalej, każdy z czworokątów $AFCE$ i $ABCD$ ma okrąg opisany, więc mamy równości

$$|\sphericalangle BCF| = |\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle BCP|.$$

To pozwala na dwa sposoby wyrazić miarę kąta ABC :

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ABC| &= |\sphericalangle OCB| = |\sphericalangle OCF| + |\sphericalangle BCF| = \\ &= |\sphericalangle OCF| + |\sphericalangle DAB|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ABC| &= 180^\circ - |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle BCP| = \\ &= |\sphericalangle FPC| + |\sphericalangle DAB|. \end{aligned}$$

Z przyrównania prawych stron dostajemy równość $|\sphericalangle OCF| = |\sphericalangle FPC|$, prowadzącą do wniosku, że okrąg ω' , opisany na trójkącie CFP , jest styczny do prostej OC .

Zatem prosta OC jest wspólną styczną do okręgów ω i ω' – jest więc ich osią potęgową. W takim razie $|OF| \cdot |OP| = |OQ| \cdot |OE|$ i w konsekwencji czworokąt $EQFP$ jest wpisany w okrąg. Skoro zaś kąt AFP jest prosty, wynika stąd, że i kąt EQP jest prosty.

570. Niech f będzie jedną z szukanych funkcji. Wszystkie jej wartości są liczbami nieujemnymi. Dla $x = y = 0$ mamy $f(0) \geq 2f(0)$, skąd $f(0) = 0$. Podstawiając w danej nierówności $y = 0$, otrzymujemy zależność

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right) \geq f(x) \quad \text{dla } x \geq 0.$$

Ustalmy liczbę $x_0 > 0$ i weźmy pod uwagę ciąg liczb dodatnich (x_n) określony rekurencyjnie:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Jest on malejący, więc zbieżny. Jego granica λ spełnia równanie $\lambda = \lambda/(1+\lambda)$, którego jedynym pierwiastkiem jest $\lambda = 0$. Tak więc $\lim x_n = 0$.

Nierówność spełniona przez funkcję f pokazuje, że $f(x_{n+1}) \geq f(x_n)$. Zatem ciąg $(f(x_n))$ jest niemalejący, skąd wniosek, że

$$f(x_0) \leq f(x_n) \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Przechodząc do granicy ($n \rightarrow \infty$) i korzystając z założenia ciągłości funkcji f w punkcie 0, stwierdzamy, że $f(x_0) = 0$. A ponieważ liczba x_0 była wybrana dowolnie, znaczy to, że f jest funkcją równą tożsamościowo zero. Oczywiście spełnia ona wyjściową nierówność – jest więc jej jedynym rozwiązaniem.



Rozwiązanie zadania M 1236.

Niech $\sqrt{n} = t$. Wówczas $t^2 \leq n < t^2 + 2t + 1$, a zatem $t^2 + 1 \leq n + 1 < t^2 + 2t + 1$. Stąd uzyskujemy

$$t - 1 < \frac{t^2 + 1}{t + 1} \leq \frac{n + 1}{t + 1} \leq t + 1.$$

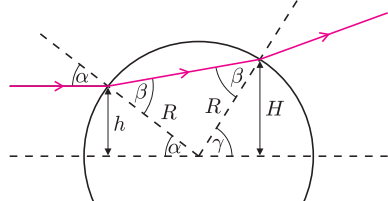
Ponieważ liczba $\frac{n+1}{t+1}$ jest całkowita, więc musi być ona równa t lub $t + 1$. Wobec tego $n + 1 = t(t + 1)$ lub $n + 1 = (t + 1)^2$.

W pierwszym przypadku liczba $n - 1 = t^2 + t - 2 = (t - 1)(t + 2)$ jest podzielna przez $t - 1$, natomiast w drugim przypadku liczba $n - 3 = t^2 + 2t - 3 = (t - 1)(t + 3)$ jest podzielna przez $t - 1$.



Rozwiązanie zadania F 736.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Zakładając, że wszystkie kąty padania są małe, mamy:

$$H = R \sin \gamma \approx R\gamma,$$

$$h = R \sin \alpha \approx R\alpha.$$

Z prawa załamania mamy, że $\beta \approx n\alpha$, ponadto

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\beta) = \\ &= 2\beta - \alpha = (2n - 1)\alpha. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy, że

$$H/h \approx \gamma/\alpha = 2n - 1 = 1,6.$$

A więc wiązka zwiększy swoją szerokość 1,6 razy.

Patrz w niebo

Zaczyna się podejrzewać, że gromady kuliste gwiazd są wylęgarniami wszelkiego rodzaju niezwyklej obiektów, takich jak milisekundowe pulsary, błękitni maruderzy, nawet średnio masywne czarne dziury. Ostatnio do tej listy chyba można dodać mikrokwazary, jak nazwano układy podwójne gwiazd, wystrzeliwujące strugi materii niemal z prędkością światła. W galaktycznej przestrzeni mogą one znaleźć się dopiero po wyrzuceniu z gromady kulistej. W samych gromadach, tj. w przestrzeni wypełnionej gwiazdami o rzędy wielkości gęściej niż w okolicy Słońca, bliskie spotkania gwiazd, bardzo tam częste, prowadzić mogą zarówno do intensywnego powstawania i niszczenia układów podwójnych, jak i do częstego wyrzucania z gromad tych wszystkich osobliwych obiektów.

Najjaśniejszym rentgenowsko obiektem na niebie jest źródło Scorpius X-1, położone w odległości 2800 pc. Odkryto go w 1962 r. w wyniku obserwacji prowadzonych jeszcze z raket. Obecnie wiadomo, że jest to ciasny układ podwójny, którego jednym ze składników jest gwiazda neutronowa. Materia tracona przez drugą, zwykłą gwiazdę, opada na gwiazdę neutronową, ogrzewa się przy tym do milionów stopni, co powoduje, że staje się silnym źródłem promieniowania rentgenowskiego. Od czasu do czasu obiekt wystrzeliwuje strugi materii z prędkościami bliskimi prędkości światła, przez co właśnie zalicza się go do mikrokwazarów, z jedną jednak poprawką: w większości mikrokwazarów centralnym obiektem jest czarna dziura, a tu – gwiazda neutronowa. Na podstawie zmierzonego ruchu tego źródła i znanego rozkładu pola grawitacyjnego Galaktyki kilku badaczy pokusiło się o odtworzenie toru źródła w Galaktyce w ciągu ostatnich – powiedzmy – stu milionów lat. Wynik jest, oczywiście, wysoce niepewny, choćby dlatego, że nie sposób dowiedzieć się, ile i jakich spotkań z innymi obiektami doznał w tym czasie Scorpius X-1. Niemniej okazało się, że gdyby mu nic nie przeszkadzało, to miałby tor zbliżony do toru gromady kulistej M4, której ruch w Galaktyce akurat również udało się określić. Może więc rzeczywiście w niej powstał...

Tomasz KWAST

Marzec

Kończy się zima, co na nocnym niebie widać po tym, że wieczorem Orion jest już wyraźnie przesunięty ku zachodowi. Widoczna za to w całej okazałości Droga Mleczna przebiega w południowej części między dwiema bardzo jasnymi gwiazdami: Syriuszem, tj. alfą Wielkiego Psa, najjaśniejszą gwiazdą nieba, a Procyonem, alfą Małego Psa, o której to gwiazdzie jest więcej w tym numerze *Delty*. Obie gwiazdy leżą stosunkowo blisko, obie są gorętsze od Słońca i obie mają za towarzysza białego karła. Towarzysz Syriusza to w ogóle pierwszy rozpoznany biały karzeł. Odkrył go F. W. Bessel w 1862 roku, przy czym odkrycie polegało na zauważeniu, że położenie samego Syriusza na niebie okresowo się waha, co dowodzi, że gwiazda ma ciężkiego satelitę. Bessel nie znał jeszcze natury odkrytego przez siebie obiektu, wykrył tylko, że obiekt ten istnieje. Bezpośrednio zobaczono tego satelitę dużo później i dopiero wtedy można było go poddać badaniom astrofizycznym. Białe karły to gwiazdy „dość gęste”, choć daleko im pod tym względem do gwiazd neutronowych. Średnia gęstość tego najsłynniejszego białego karła 125 000 razy przekracza gęstość wody.

Wenus jest w Rybach, bardzo blisko Słońca, więc jej nie widać. Mars jest w Wodniku, więc również za blisko, by go zobaczyć. Jowisz jest w Koziorożcu i widać go przed wschodem Słońca. Jedynie Saturna można wygodnie i długo obserwować, znajduje się bowiem we Lwie i widać go przez całą noc; 8 III będzie jego opozycja. Pełnia Księżyca wypada 11 III, a nów 26 III. Z jasnych obiektów Księżyc w marcu zakryje jedynie Antaresa 17 III, co zobaczą mieszkańcy Południowej Ameryki i Afryki. Nie przewiduje się też żadnego okresowego roju meteorów. Tak więc pod względem zjawisk na niebie marzec będzie bardzo skromny, z pewnością zaś ucieszymy się z faktu, że 20 III zacznie się wiosna.

T. K.



Wszelkie skojarzenia z omawianą tu miesiąc temu zasadą szufladkową Dirichleta są jak najbardziej słuszne!

Jaś układa na biurku kartki. Mogą one częściowo nakładać się, ale nie mogą wystawać poza brzeg biurka. Oznaczmy przez K łączne pole wszystkich kartek, zaś przez B powierzchnię biurka. Jeśli $K < B$, to Jaś nie zdoła przykryć całego biurka, pewien punkt zawsze będzie wystawał spod kartek. Jeśli $K > B$ i Jaś uprze się, żeby kartki jednak nie nakładały się, to nie uda mu się w ogóle ich na biurku pomieścić. Zmieszczą się, o ile niektóre będą się nakładać, wtedy pewien punkt biurka będzie przykryty co najmniej dwiema kartkami. Jeśli $K > 2B$, to znajdzie się nawet punkt biurka przykryty co najmniej trzema kartkami.

Te i tym podobne proste obserwacje okazują się całkiem przydatne przy rozwiązywaniu niektórych zadań. Oto kilka przykładów.

1. Wewnątrz kwadratu o boku 1 znajduje się pewna liczba kół. Suma ich obwodów jest równa 10. Wykaż, że istnieje prosta prostopadła do któregoś z boków kwadratu i mająca punkty wspólne z co najmniej czterema kołami.

R. Suma długości rzutów wszystkich kół na bok AB kwadratu to suma ich średnic, czyli $10/\pi > 3$. Zatem istnieje taki punkt X na AB , na który rzutowane są co najmniej cztery koła. Szukana prosta to prosta przechodząca przez X , prostopadła do AB . \square

2. Na nieograniczonej łące jest nieskończenie wiele modliszek, początkowo każde dwie oddalone są o co najmniej 2 metry. Każda modliszka porusza się z prędkością do 5 metrów na minutę. Jeśli spotkają się dwie żywe modliszki, to jedna może zjeść drugą. Modliszka umiera z głodu i rozpaczy, jeśli przez minutę nie zje żadnej innej żywej modliszki. Udowodnij, że po kwadransie wszystkie modliszki będą martwe.

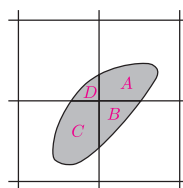
R. Przyjmijmy, że na początku każda modliszka waży M i po zjedzeniu innej modliszki jej waga powiększa się o wagę modliszki zjedzonej. Wobec tego po minucie każda żywa modliszka waży co najmniej $2M$, po dwóch minutach – co najmniej $4M$ i tak dalej, po kwadransie każda żywa modliszka waży co najmniej $2^{15}M$.

Ponieważ modliszki mogą zbliżać się z prędkością co najwyżej 10 m/min, więc wszystkie modliszki, których waga składałaby się na te $2^{15}M$, musiałyby pierwotnie znajdować się w kole o promieniu 150 metrów.

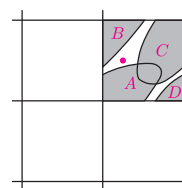
Początkowo wokół każdej modliszki był jej własny kawałek łąki o promieniu jednego metra. Zatem 2^{15} rozłącznych kół o polu π mieściło się w dużym kole o polu $\pi \cdot 151^2$ (koła wokół modliszek mogą wystawać o metr poza duże koło). Jednak $151^2 < 32000 < 32 \cdot 1024 = 2^{15}$, więc nie mogły się mieścić. Otrzymaliśmy sprzeczność, czyli żadna modliszka nie mogła przeżyć kwadransa. \square

3. Na dużym kraciastym obrusie chcemy zrobić plamę o z góry zadanym kształcie i o polu mniejszym od pola pojedynczej kratki. Wykaż, że można tak umieścić plamę, aby nie przykryła ona żadnego węzła kraty.

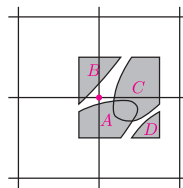
R. Przyjmijmy, że bok pojedynczej kratki ma 1 cm. Umieścimy najpierw szablon w kształcie plamy gdziekolwiek na obrusie. Jeśli przykrywa jakiś węzeł kraty, to potnijmy go zgodnie z liniami podziału kratki (rys. 1). Następnie wszystkie otrzymane części poprzesuujemy w pionie lub w poziomie o całkowite liczby centymetrów, aż trafią do jednej, z góry ustalonej kratki (rys. 2). Ponieważ plama ma pole mniejsze niż 1 cm^2 , to poukładane w ten sposób fragmenty szablonu nie zasłonią całej wyróżnionej kratki. Wybierzmy dowolny z niezakrytych punktów i wszystkie części szablonu przesuniemy jednakowo tak, aby w tym punkcie znalazł się jakiś węzeł kraty (rys. 3). Następnie poprzesuujemy fragmenty szablonu z powrotem tak, żeby znów utworzyły całość, ale w nowym miejscu (rys. 4). Skoro żaden z fragmentów szablonu nie przykrywał wybranego węzła kraty, to po przesunięciu o całkowite liczby centymetrów nie przykryje też żadnego innego, więc poskładany na nowo szablon wskazuje dobre miejsce do umieszczenia plamy. \square



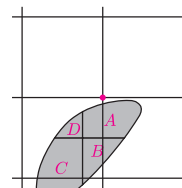
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Na koniec trzy zadania do samodzielnego rozwiązania.

4. W kole o promieniu 10 wybrano 99 punktów. Udowodnij, że wewnątrz koła istnieje punkt odległy od każdego z wybranych punktów o więcej niż 1.

Zadanie pochodzi z I etapu I Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, rozwiązanie dostępne jest m.in. na stronie <http://www.om.edu.pl/omg> oraz w broszurce I OMG.

5. W kole o promieniu 10 wybrano 372 punkty. Wykaż, że istnieje pierścień o promieniach 2 i 3, który zawiera nie mniej niż 12 spośród tych punktów.

6. W okrąg o obwodzie 24 wpisano trójkąt równoboczny oraz kwadrat, które nie mają wspólnych wierzchołków. Wykaż, że co najmniej jeden z 7 łuków, na które wierzchołki podzieliły okrąg, ma długość nie większą niż 1.