





## SPIS TREŚCI NUMERU 8 (411)

Miara ważności <i>Krzysztof Diks</i>	str. 1
Mebibajty i teraflopsy <i>Michał Adamaszek</i>	str. 2
Miara informacji <i>Eryk Kopczyński</i>	str. 3
Pole i objętość <i>Marek Kordos</i>	str. 4
 Zabawy z miarą <i>Wiktor Bartol</i>	str. 8
Miara liczebności <i>Leszek Kołodziejczyk</i>	str.10
Jak mierzymy odległości kosmiczne? <i>Tomasz Kwast</i>	str.12
Zbiory niemierzalne <i>Piotr Zakrzewski</i>	str.14
Pomiar kwantowy <i>Ewa Czuchry</i>	str.15
 Odległość, która nie jest metryką <i>Andrzej Walat</i>	str.16
Informatyczny kącik olimpijski (11) – szukamy pola areału <i>Filip Wolski</i>	str.18
Aktualności	str.19
 Wyznaczamy współczynnik lepkości cieczy <i>Stanisław Bednarek</i>	str.20
 Zadania	str.21
Klub 44	str.22
Patrz w niebo	str.24
Sierpień	str.24
Całkowanie po tuszy <i>Jerzy Tyszkiewicz</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Adamaszek, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nacz., Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Andrzej Walat, Piotr Zalewski – z-ca red. nacz. Okładki i rysunki: Emilia Bojańczyk. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-402.

Skład systemem TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)  
internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2008 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2008 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 0-804-200-600

Cena prenumeraty w 2008 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):  
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

W następnym numerze:  
Ryzyko na giełdzie

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

## Miara ważności

Krzysztof DIKS\*

Czy zastanawiałeś się, drogi Czytelniku, dlaczego wyszukiwarka wyświetla adresy stron będących odpowiedzią na Twoje zapytanie właśnie w takiej, a nie innej kolejności? Zanim zacząłem pisać tę krótką notkę, zażądałem od wyszukiwarki google.pl odpowiedzi na pytanie „matematyka”. Pierwszych pięć adresów do stron, które otrzymałem w odpowiedzi, to (1) [www.matematyka.org](http://www.matematyka.org), (2) [www.matematyka.pl](http://www.matematyka.pl), (3) [www.math.edu.pl](http://www.math.edu.pl), (4) [pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka](http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka), (5) [www.freewebs.com/podmatematyka](http://www.freewebs.com/podmatematyka).

Google „pochwalił się”, że wybrał je spośród 2 810 000 kandydatów. Dlaczego właśnie te uznano za najważniejsze? Jaka jest miara ważności strony? Okazuje się, że podstawą analizy ważności stron w Google jest analiza połączeń w grafie Internetu. Graf Internetu jest grafem skierowanym, w którym węzłami są strony, a krawędzie odpowiadają dowiązaniom pomiędzy stronami – strona zawierająca adres internetowy innej strony jest początkiem krawędzi, a strona o danym adresie jej końcem. Czy można na podstawie grafu Internetu powiedzieć, które strony są ważniejsze, a które mniej? Strona ważna to strona interesująca. Strona interesująca to taka, do której łatwo dotrzeć, ponieważ wiele innych stron na nią wskazuje. Na dodatek wiele spośród stron wskazujących na ważną stronę też jest ważnych i interesujących, itd. Larry Page i Sergey Brin, twórcy Google, wyrazili to matematycznie w następujący sposób.

Załóżmy, że mamy  $n$  stron  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Niech  $w(S_i)$  będzie liczbą rzeczywistą dodatnią mierzącą ważność strony  $S_i$ . Wówczas żądamy, żeby

$$w(S_i) = \sum_{S_j \in We(S_i)} \frac{w(S_j)}{|S_j|},$$

gdzie  $We(S_i)$  to zbiór stron zawierających adres strony  $S_i$  (czyli zbiór początków krawędzi prowadzących do  $S_i$ ), zaś  $|S_j|$  jest liczbą odnośników (krawędzi) wychodzących ze strony  $S_j$ . Wzór ten oznacza, że ważność strony mierzy się ważnością stron na nią wskazujących. Jeżeli przyjmiemy na początek, że wszystkie strony są jednakowo ważne i dla każdej z nich  $w(S_i) = \frac{1}{n}$ , gdzie  $n$  to liczba wszystkich stron, to ważność stron można obliczyć za pomocą następującej metody iteracyjnej:

$$w_{k+1}(S_i) = \sum_{S_j \in We(S_i)} \frac{w_k(S_j)}{|S_j|}.$$

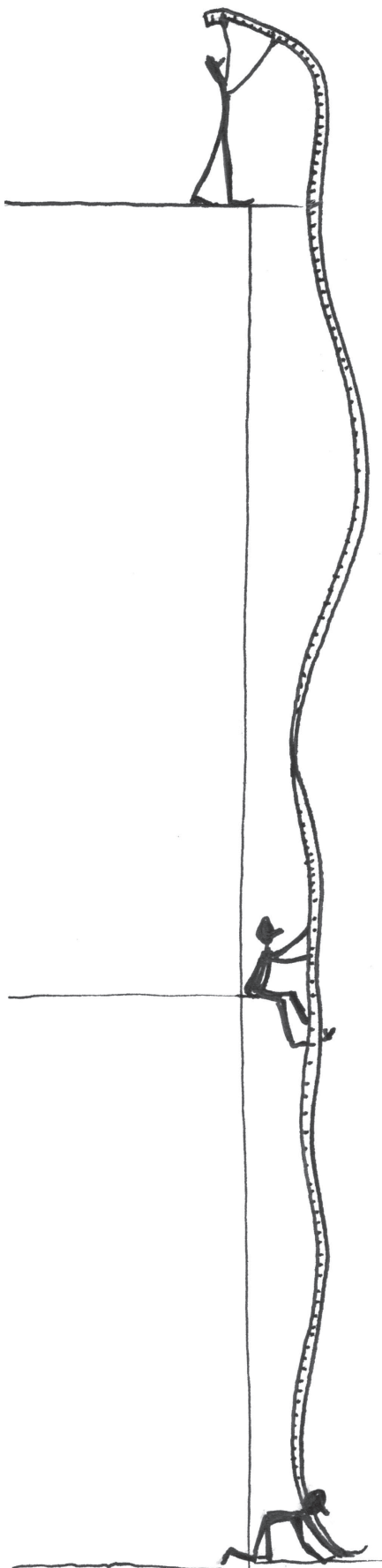
Na powyższy proces można spojrzeć jak na błądzenie losowe po grafie Internetu. Rozpoczynamy z dowolnej strony, a następnie z każdej oglądanej strony ruszamy losowo do jednej ze stron, do których adresy umieszczono na tej stronie. Jeśli nasz proces będziemy powtarzali bardzo długo, to pewnie ze stron będziemy oglądali częściej niż inne. Strony oglądane częściej są ważniejsze.

Niestety, może się zdarzyć, że serfując po stronach, natrafimy na takie, z których nie ma wyjścia, np. strony zawierające zdjęcia. W takim przypadku zakładamy, że w następnym kroku wybierzemy losowo dowolną ze stron w Internecie. Teraz nasz proces iteracyjny wygląda następująco:

$$w_{k+1}(S_i) = \sum_{S_j \in We(S_i)} \frac{w_k(S_j)}{|S_j|} + \sum_{S_j \in K} \frac{w_k(S_j)}{n}$$

gdzie  $K$  oznacza zbiór wszystkich stron końcowych, czyli takich, które nie zawierają dowań do żadnych innych stron. Jesteśmy już blisko algorytmu Google ustalania miary ważności stron.

Brin i Page obserwując zachowanie użytkowników Internetu, zauważyli, że czasami porzucają oni bieżące przeszukiwanie i rozpoczynają nowe od (losowo) wybranej strony. Dlatego zmodyfikowali swój proces iteracyjny, wprowadzając parametr  $\alpha$  o wartości z przedziału  $(0, 1)$ .



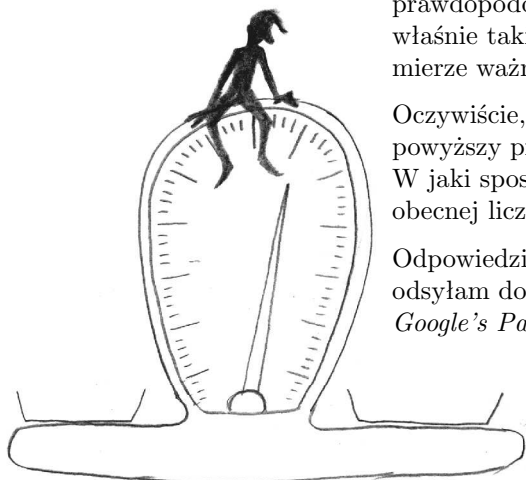
W każdej iteracji z prawdopodobieństwem  $\alpha$  aktualne przeszukiwanie jest kontynuowane, natomiast z prawdopodobieństwem  $1 - \alpha$  rozpoczynane jest nowe przeszukiwanie. Ostatecznie postać każdej iteracji jest następująca:

$$w_{k+1}(S_i) = \alpha \left( \sum_{S_j \in We(S_i)} \frac{w_k(S_j)}{|S_j|} + \sum_{S_j \in K} \frac{w_k(S_j)}{n} \right) + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^n \frac{w_k(S_j)}{n}$$

Bardziej doświadczeni Czytelnicy pewnie już spostrzegli, że nasz proces iteracyjny jest procesem stochastycznym zbieżnym do stacjonarnego rozkładu prawdopodobieństwa. Celem kolejnych modyfikacji procesu było zapewnienie właśnie takiej zbieżności. Końcowy rozkład prawdopodobieństwa odpowiada mierze ważności stron.

Oczywiście, jest jeszcze wiele pytań, które pozostają bez odpowiedzi: Jak szybko powyższy proces zbiega do końcowego rozkładu? Jak dobrać parametr  $\alpha$ ? W jaki sposób przeprowadzać obliczenia na grafie Internetu, który w chwili obecnej liczy blisko 100 000 000 domen?

Odpowiedzi na te pytania to już inna historia. Wszystkich zainteresowanych odsyłam do wspaniałej książki autorstwa Amy N. Langville i Carla D. Meyera, *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*.



## Mebibajty i teraflopsy

Także w świecie komputerów posługujemy się różnymi miarami. Podstawową jednostką mierzącą ilość danych jest bajt (B). Jest to porcja danych złożona z 8 bitów (b), a więc mogąca przechować  $2^8$ , czyli 256 różnych wartości. Także większe układy pamięciowe buduje się z cegiełek o wielkościach będących potęgami dwójki, a nie dziesiątki (nie znajdziemy komputera mającego 500 MB pamięci, za to 512 MB – owszem). Ponieważ jednak pewne potęgi liczb 2 i 10 różnią się bardzo nieznacznie (np.  $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$ ), więc przyjęło się używać przy mierzeniu pojemności tych samych przedrostków SI, które znamy z systemu dziesiętnego. I tak mówimy, na przykład, o 1 kB (kilobajcie), mając na myśli 1024 B, a nie 1000 B. Podobnie, 1 MB oznacza zwyczajowo  $2^{20} = 1\,048\,576$  bajtów, czyli o 4,86% więcej niż  $10^6$  bajtów. Przy przedrostku T (tera) różnica sięga prawie 10%.

Oczywiście, z punktu widzenia pedanta takie użycie przedrostków to błąd, dlatego powstał nowy zestaw przedrostków dla mnożnika 1024. I tak mamy kibibajty (1 KiB=1024 B), mebibajty (1 MiB=1024 KiB), dalej gibibajty (GiB), tebibajty (TiB), pebibajty (PiB)... Tak więc mój komputer ma 512 MiB, a nie 512 MB pamięci. Jak wszyscy wiemy z doświadczenia, ta nomenklatura póki co nie zyskała popularności i wygląda na to, że nadal w kontekstach związanych z komputerami królować będą przedrostki dziesiętne używane w roli binarnych.

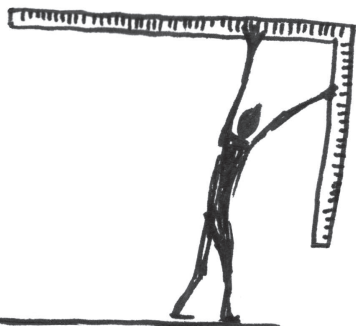
Innym ważnym parametrem jest prędkość, którą podaje się w Hz. Jeśli, na przykład, procesor ma prędkość 1 GHz, to znaczy, że bramki logiczne w tym procesorze mogą zmieniać stan  $10^9$  razy na sekundę. Nie jest to bardzo miarodajna informacja, ponieważ różne instrukcje wykonują się w różnej liczbie cykli, a nowe technologie budowy procesorów (superskalarne, wektorowe, wielordzeniowe) pozwalają na upakowanie kilku operacji w jednym cyklu. Jeszcze mniej sensu ma ta jednostka w odniesieniu do farm obliczeniowych złożonych z wielu maszyn czy superkomputerów, wykonujących, na przykład, obliczenia z zakresu biomedycyny lub prognozowania pogody. Prędkość maszyn używanych do masowego przeprowadzania takich obliczeń mierzy się najczęściej we FLOPS-ach, czasem w MIPS-ach. Te skróty oznaczają, odpowiednio, Floating-point Operations per Second, czyli liczbę wykonywanych operacji zmiennoprzecinkowych na sekundę, oraz Million Instructions per Second, czyli miliony operacji na sekundę. Najszybsze superkomputery na świecie osiągają wydajność rzędu setek TFLOPS, czyli setek bilionów ( $10^{12}$ ) operacji arytmetycznych na sekundę. Z kolei rozproszony projekt obliczeniowy Folding@Home (symulacje związania aminokwasów), w którym bierze udział około 250 000 procesorów w komputerach oraz – uwaga! – konsolach do gier z całego świata, przekroczył barierę 1 PFLOPS (petaFLOPS,  $10^{15}$  operacji na sekundę). Nowoczesny komputer domowy ma w tych jednostkach moc rzędu kilku GFLOPS ( $10^9$  operacji).

Michał ADAMASZEK

# Miara informacji

Eryk KOPCZYŃSKI\*

\*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski



Jak wiadomo, komputery traktują wszystkie dane, na których działają, jako ciągi bitów, z których każdy może mieć dwie wartości (0 lub 1). Przykładowo, ten tekst jest zapisany w ten sposób, że każdej z liter i pozostałych znaków odpowiada ciąg 8 bitów. Daje to  $2^8$ , czyli 256 możliwości, co w zupełności wystarcza do zapisania wszystkich potrzebnych znaków. Jednak w rzeczywistości różnych znaków występujących w tekście jest mniej. Problem jest więc taki: jak zapisać tekst tak, żeby na każdą jego literę przypadało jak najmniej bitów?

Załóżmy dla przykładu, że w naszym alfabecie są 3 litery: **A**, **B** i **C**.

Najprostszy sposób kodowania jest następujący – każdą z liter kodujemy ciągiem dwóch bitów, powiedzmy **A** = 01, **B** = 10, **C** = 11. Ten sposób zapisu (nazwijmy go (1)) daje 2 bity na każdą literę.

Łatwo zauważyć, że powyższy kod da się poprawić: jeśli pierwszym bitem kodu litery jest 0, to już nie musimy pisać drugiego bitu 1. Jeśli założymy, że nasze litery występują tak samo często, to okaże się, że nasz nowy sposób zapisu (2) używa  $5/3 = 1,666\dots$  bitów na każdą literę (co trzecia litera wymaga tylko jednego bitu). Są też możliwe bardziej skomplikowane kody. Czytelnikowi zostawiamy kodowanie (3) o „efektywności”  $8/5 = 1,6$  bitów na literę (podpowiedź: kodujemy bloki 5 znaków).

Teraz zwróćmy uwagę na powyższe założenie: *litery występują tak samo często*. A co, jeśli, na przykład, litera **A** występuje z prawdopodobieństwem  $1/2$ , a **B** i **C** z prawdopodobieństwem  $1/4$ ? W sposobach zapisu (1) i (3) nic się nie zmienia, ale sposób (2) jest teraz w stanie używać średnio tylko  $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 3/2 = 1,5$  bitów na literę!

Jaka jest najmniejsza możliwa średnia liczba bitów potrzebnych do zapisania ciągu znaków, które występują (niezależnie) z podanym rozkładem prawdopodobieństwa? Odpowiedzi na to pytanie dostarcza teoria informacji Shannona: najmniejszą możliwą średnią liczbą bitów na jeden znak jest *entropia* rozkładu prawdopodobieństwa, zadana wzorem

$$H = - \sum_{i=1, \dots, n} p_k \log_2 p_k,$$

gdzie  $p_1, \dots, p_n$  są prawdopodobieństwami kolejnych znaków.

Przykładowo, entropia naszego pierwszego rozkładu (3 litery z równym prawdopodobieństwem) wynosi  $\log_2 3 = 1,58496\dots$  (Jeśli wymyślony przez Czytelnika sposób kodowania 5 znaków w 8 bitach jest taki sam, jak Autora, to łatwo go poprawiać, zbliżając się do granicy.) Entropia naszego drugiego rozkładu (**A** występuje 2 razy częściej) to 1,5, czyli nasz sposób kodowania jest optymalny. Czytelnikowi zostawiamy obliczenie entropii rozkładu, w którym są dwie litery, **A** i **B**, przy czym **B** występuje bardzo rzadko – powiedzmy, raz na  $2^{10}$  liter – i znalezienie odpowiedniego sposobu kodowania, który pozwoli nam się zbliżyć do otrzymanej entropii, np. wymagającego średnio 12 bitów na  $2^{10}$  znaków.

Entropię można rozumieć jako pewnego rodzaju miarę informacji, w naszym przypadku informacji niesionej przez 1 znak w naszym alfabecie. A teoria informacji, poza omówioną wyżej kompresją, ma również zastosowanie w innych dziedzinach informatyki (kryptografia – jak zaszyfrować tekst, by osoba podglądająca nie dostała na jego temat żadnej informacji; generowanie liczb pseudolosowych) i nie tylko (np. fizyka, badanie języka naturalnego)...



## Rozwiązanie zadania F 721.

Z założenia o całkowitym zwilżaniu szkła przez wodę wynika, że promień krzywizny warstwy wody między płytkami jest równy połowie grubości warstwy wody:  $R = l/2$ . Zatem nadwyżka ciśnienia zewnętrznego działającego na płytki wynosi

$$p = \frac{\alpha}{R} = \frac{2\alpha}{l}.$$

Wobec tego siła potrzebna do oderwania płytek wynosi

$$F = pS = \frac{2\alpha}{l},$$

gdzie powierzchnia płytek  $S = \frac{m}{\rho l}$ . Stąd  $F = \frac{2\alpha m}{\rho l^2} \approx 800$  N.

# Pole i objętość

Marek KORDOS

W numerze poświęconym mierze nie sposób pominąć tych pierwszych, czyli zwykłych miar geometrycznych (zważmy, że geometria ma miarę w swojej nazwie). Wydaje się, że wiemy o nich wszystko, bo przecież stykaliśmy się z nimi niemal od zerówki. Okazuje się jednak, że i na ich temat można postawić pytania o nieoczywistych odpowiedziach.

Rozważmy tu dwa takie pytania. Pierwsze z nich to: czy polem prostokąta musi być iloczyn długości jego boków?

Pisząc szerzej: czy można byłoby, bez rezygnacji z naturalnych własności miary, tak zdefiniować pole, by przyjmowało ono jakieś inne wartości? W oczywisty sposób to samo pytanie można postawić odnośnie objętości prostopadłościanu.

Znakomity artykuł o równaniach funkcyjnych autorstwa Marka Kuczmy zamieściliśmy w *Delcie* 1(37)1977; w tym tekście jest wiele zapożyczeń z tego artykułu.

## Równanie Cauchy'ego

W badaniu problemów związanych z miarą kluczową rolę odgrywa równanie funkcyjne, zwane *równaniem Cauchy'ego*. Równanie funkcyjne to problem, w którym poszukujemy nie liczby, ale funkcji spełniającej określone warunki. W przypadku równania Cauchy'ego chodzi o następujący warunek:

$$(1) \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$$

dla dowolnych rzeczywistych  $x$  i  $y$ .

Oczywiście, każdy bez trudu wskaże rozwiązanie tego równania: są to funkcje postaci  $f(x) = \alpha \cdot x$  dla dowolnej stałej  $\alpha$ . Augustyn Cauchy, który odkrył znaczenie tego równania w teorii miary, zauważył, iż nie umie odpowiedzieć na pytanie, czy jest to rozwiązanie jedyne. Odpowiedź na takie pytanie przyszła dopiero w 1903 roku, a do jej sformułowania potrzebne były nieistniejące w czasach Cauchy'ego (pierwsza połowa XIX wieku) pojęcia matematyczne.

Zacznijmy rozwiązywać to równanie. Bez trudu stwierdzamy, że

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0), \quad \text{czyli} \quad f(0) = 0.$$

Podobnie, indukcyjnie dowodzimy dla dowolnego  $a$ , że  $f(a \cdot n) = n \cdot f(a)$ , bo

$$f(a \cdot (k + 1)) = f(a \cdot k) + f(a) = k \cdot f(a) + f(a) = (k + 1) \cdot f(a).$$

Dalej  $f\left(\frac{a}{m}\right) = \frac{1}{m} \cdot f(a)$ , bo

$$f(a) = f\left(m \cdot \frac{a}{m}\right) = m \cdot f\left(\frac{a}{m}\right),$$

Wreszcie  $f(-a) = -f(a)$ , bo

$$f(a) + f(-a) = f(a - a) = f(0) = 0.$$

Podsumowując, dla dowolnej liczby wymiernej  $w$  (i dowolnej liczby rzeczywistej  $a$ ) mamy więc

$$(2) \quad f(w \cdot a) = w \cdot f(a).$$

Może od razu spiszmy te naturalne własności miary.

- I. Figury przystające mają równe miary.
- II. Jeśli dwie figury mają wspólny co najwyżej brzeg, to miara ich sumy jest równa sumie ich miar.
- III. Miara kostki jednostkowej (kwadratu, sześcianu) jest równa 1.
- IV. Miara każdej figury jest nieujemna.

W szkole poznajemy wzory na miary różnych figur płaskich i przestrzennych. Drugie pytanie to: czy do ścisłego obliczania pól wielokątów i objętości wielościanów konieczna jest jakaś wyższa matematyka? Wyrażając się precyzyjniej: czy odpowiednie wzory można uzyskać elementarnie, to jest bez użycia jakichś pojęć związanych z nieskończonością (ciągu, szeregu, granicy itp.)?

Dla niedoceniających tych pytań dodajmy, że pełne odpowiedzi na nie matematycy uzyskali na początku XX wieku, czyli dopiero sto lat temu. Droga wiodła przez równania funkcyjne.

Oznaczając  $f(1) = \alpha$ , mamy

$$(3) \quad f(w) = \alpha \cdot w.$$

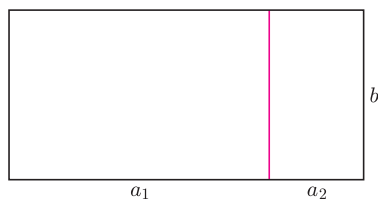
Okazuje się jednak, że w tym miejscu trop się kończy – nie ma sposobu, by na tej podstawie określić konkretną wartość  $f(x)$  dla niewymiernego  $x$ .

Możemy jednak myśleć tak: oznaczmy  $f(\sqrt{2}) = \beta$ . Wówczas na mocy (2) otrzymamy  $f(w\sqrt{2}) = w \cdot \beta$ , co więcej – wobec (1) – dla dowolnych wymiernych  $w$  i  $v$

$$f(w + v\sqrt{2}) = f(w) + f(v\sqrt{2}) = \alpha \cdot w + \beta \cdot v.$$

Oczywiście, dla  $\alpha = \beta$  otrzymamy zwykłą funkcję liniową, ale nie musimy czynić takiego założenia –  $\sqrt{2}$  nie jest liczbą wymierną, więc nie nastąpi kolizja w warunkiem (3). Co więcej, postępowanie to możemy kontynuować, deklarując kolejno wartości funkcji  $f$  dla nowych wartości – nowych, to znaczy takich, których nie da się uzyskać przez kombinację liniową liczb, dla których wartości funkcji zadeklarowaliśmy już wcześniej (w powyższym przypadku kolejną liczbą, dla której obierzemy dowolnie wartość funkcji  $f$ , musi być liczba niedająca się przedstawić w postaci  $w + v\sqrt{2}$  dla wymiernych  $w$  i  $v$ , np.  $\pi$ ).

Powstaje pytanie, czy postępowanie to daje się rozszerzyć tak, by określić wartości  $f$  dla wszystkich liczb rzeczywistych. Odpowiedź nie jest oczywista, bo przez kolejne przyłączanie coraz nowych liczb nie da się dojechać „do końca” (liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalnie wiele). Jednak silne środki teorii mnogości (np. pewnik wyboru) pozwalają na taką operację – wykonał ją jako pierwszy Georg Hamel (ciekawych odsyłam do hasła *baza Hamela*). Nam jednak dalej wystarczą rozwiązania równania (1) uzyskane taką metodą, jak dla liczb postaci  $w + v\sqrt{2}$ , użytą tylko skończoną liczbę razy, czyli określone tylko dla niektórych liczb. Wspomnijmy, iż okazało się, że wszystkie rozwiązania równania Cauchy'ego, poza liniowym, są bardzo paskudnymi funkcjami: nie są ciągłe, ani w żadnym przedziale monotoniczne itd.



Rys. 1

## Pole prostokąta

Z podanej na początku własności I miary wynika, że pole prostokąta jest funkcją długości jego boków (bo gdy dwa prostokąty mają równe boki, to są przystające). Oznaczmy tę funkcję przez  $m(a, b)$ , gdzie  $a$  i  $b$  to długości boków. Ponieważ podział prostokąta odcinkiem równoległym do jego boków (rys. 1) daje nam dwa prostokąty, więc mamy – na mocy II – równanie funkcyjne

$$m(a, b) = m(a_1, b) + m(a_2, b).$$

Ustalmy na pewien czas  $b$  i oznaczmy  $m(p, b) =: g_b(p)$ . Mamy zatem

$$g_b(a_1 + a_2) = g_b(a) = g_b(a_1) + g_b(a_2)$$

– funkcja  $g_b$  spełnia równanie Cauchy'ego. Wobec tego możemy skorzystać z uzyskanych wyżej wzorów: mamy dla wymiernego  $a$

$$g_b(a) = \alpha(b) \cdot a, \quad \text{przy czym na mocy III} \quad \alpha(1) = 1.$$

Powtarzając rozumowanie ze wspomnianego artykułu Marka Kuczmy, rozważmy funkcję  $h(x) := g_b(x) - \alpha(b) \cdot x$  – wykażemy, że jest ona stała i dla każdego  $x$  równa 0.

1°  $h$  spełnia równanie Cauchy'ego:

$$\begin{aligned} h(x + y) &= g_b(x + y) - \alpha(b) \cdot (x + y) = g_b(x) + g_b(y) - \alpha(b) \cdot x - \alpha(b) \cdot y = \\ &= g_b(x) - \alpha(b) \cdot x + g_b(y) - \alpha(b) \cdot y = h(x) + h(y). \end{aligned}$$

2°  $h$  jest okresowa z okresem 1:

$$h(x + 1) = h(x) + h(1) = h(x) + g_b(1) - g_b(1) \cdot 1 = h(x).$$

3°  $h$  jest ograniczona z dołu; tu skorzystamy z niewykorzystanej dotąd własności IV – w naszych oznaczeniach głosi ona, że dla  $x \geq 0$  mamy  $g_b(x) \geq 0$ , w szczególności  $\alpha(b) \geq 0$ . Na mocy 2° wystarczy rozpatrzeć wartości przyjmowane przez funkcję w przedziale  $\langle 0; 1 \rangle$ :

$$h(x) = g_b(x) - \alpha(b) \cdot x \geq 0 - \alpha(b) \cdot x \geq -\alpha(b).$$

4° Dla każdego  $x$  jest  $h(x) = 0$ . Przypuśćmy, że znaleźliśmy w przedziale  $\langle 0; 1 \rangle$  taką liczbę  $p$ , że  $h(p) \neq 0$ . Zatem  $h(p) < 0$  lub  $h(p) > 0$ . W pierwszym przypadku zauważamy, że wobec 1° i (3) mamy  $h(n \cdot p) = n \cdot h(p)$ , co pozwala przez dobór odpowiednio dużego  $n$  uczynić tę liczbę dowolnie małą, co jest sprzeczne z 3°. W drugim przypadku zauważmy, że wówczas  $h(1 - p)$  jest mniejsze od zera, bowiem, wobec 1°,

$$h(p) + h(1 - p) = h(p + 1 - p) = h(1) = 0.$$

Powtarzając poprzednie rozumowanie, stwierdzamy, że teraz  $h(n(1 - p))$  może być dowolnie małe. Zatem w każdej sytuacji dochodzimy do sprzeczności, czyli nasze przypuszczenie było błędne – funkcja  $h$  jest stale zerem, skąd mamy wniosek, że

$$\text{dla dowolnego } x \quad g_b(x) - \alpha(b) \cdot x = h(x) = 0,$$

czyli dla dowolnego  $x$  mamy  $g_b(x) = \alpha(b) \cdot x$ .

Powróćmy do prostokąta. Wiemy teraz, że jego pole to

$$m(a, b) = g_b(a) = \alpha(b) \cdot a, \quad \text{gdzie} \quad \alpha(1) = 1.$$

Skorzystajmy z tego, że prostokąt można podzielić na dwa prostokąty również odcinkiem równoległym do drugiej pary boków (rys. 2). Wtedy będzie

$$m(a, b_1 + b_2) = m(a, b_1) + m(a, b_2),$$

czyli

$$\alpha(b_1 + b_2) \cdot a = \alpha(b_1) \cdot a + \alpha(b_2) \cdot a.$$

Biorąc np.  $a = 1$ , otrzymujemy

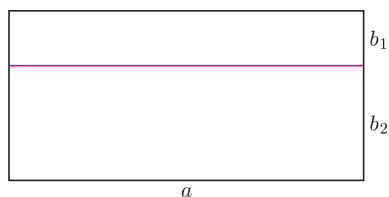
$$\alpha(b_1 + b_2) = \alpha(b_1) + \alpha(b_2)$$

– funkcja  $\alpha$  spełnia równanie Cauchy'ego! Wobec tego stosuje się do niej przeprowadzone przed chwilą rozumowanie, co daje, dla pewnej stałej  $\lambda$

$$\alpha(x) = \lambda \cdot x, \quad \text{a wobec } \alpha(1) = 1 \text{ mamy } \alpha(x) = x.$$

Ostatecznie więc wykazaliśmy, że musi być

$$m(a, b) = \alpha(b) \cdot a = ab.$$



Rys. 2

Nie wątpię, że Czytelnik bez większych kłopotów rozszerzy to rozumowanie tak, by okazało się, że jedyną możliwością dla objętości prostopadłościanu to  $m(a, b, c) = abc$ .

## Pole wielokąta, objętość wielościanu

W *Malej Delcie* jest dowód, że dowolny wielokąt można pociąć na części, z których ułoży się prostokąt (a nawet kwadrat) – mówimy, że dowolny wielokąt jest *równoważny przez pocięcie* z prostokątem. Stąd sposób obliczania pola dowolnego wielokąta jest wyznaczony jednoznacznie. Powstaje pytanie, czy można dowolny wielościan pociąć na skończoną liczbę mniejszych wielościanów, z których ułoży się prostopadłościan. Metody takiej nie przekazali nam Starożytni, ale i potem nie umieliśmy jej znaleźć, aż w 1900 roku David Hilbert umieścił pytanie, czy to w ogóle da się zawsze wykonać, w rzędzie 23 najważniejszych problemów na nadchodzący wiek XX. Odpowiedź przyszła szybko – jeszcze w tym samym 1900 roku Max Dehn udowodnił, że nie jest to możliwe.

Dokładniej, Dehn wskazał, które pary wielościanów nie są równoważne przez pocięcie. Pięćdziesiąt dziewięć lat później Jean Paul Sydler uzupełnił ten dowód, wskazując, że wszystkie inne pary już są równoważne przez pocięcie. Okazuje się, że również w tej sprawie interweniuje równanie Cauchy’ego.

Kluczem do sprawy jest *niezmiennik Dehna*. Dla dowolnego wielościanu  $W$  obliczamy go tak. Numerujemy wszystkie jego krawędzie  $l_i$  (od 1 do  $n$ ) i tym samym numerem oznaczamy kąty dwuścienne  $\alpha_i$  przy tych ścianach. Bierzemy następnie jakąś funkcję  $f$  spełniającą równanie Cauchy’ego i na dodatek spełniającą warunek  $f(\pi) = 0$  (a więc także  $f(w \cdot \pi) = 0$  dla dowolnej liczby wymiernej  $w$ ) – taką funkcję nazywamy *funkcją Dehna*. Niezmiennik Dehna dla funkcji  $f$  to liczba

$$D_f(W) = l_1 \cdot f(\alpha_1) + l_2 \cdot f(\alpha_2) + \dots + l_n \cdot f(\alpha_n).$$

Twierdzenie Dehna orzeka:

*Jeśli wielościany są równoważne przez pocięcie, to ich wszystkie niezmienniki Dehna są równe* (wszystkie, to znaczy dla dowolnej funkcji Dehna).

Na pomysł takiego niezmiennika wpaść jest trudno, natomiast udowodnić twierdzenie Dehna już trudno nie jest.

Wystarczy wykazać, że wartość dowolnie ustalonego niezmiennika Dehna dla wielościanu  $W$  jest równa sumie tych samych niezmienników wielościanów, na które go potniemy. W tym celu rozważmy wszystkie krawędzie wszystkich wielościanów uzyskanych z pocięcia. Niektóre z nich (niech taka będzie np. krawędź  $k$  z wielościanów  $W_1, \dots, W_m$ , gdzie kąty dwuścienne przy niej to odpowiednio  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ) znajdowały się we wnętrzu wielościanu  $W$  – jeśli tak, to teraz w sumie niezmienników  $k$  nie wystąpi, bo

$$\begin{aligned} k \cdot f(\alpha_1) + \dots + k \cdot f(\alpha_m) &= k \cdot (f(\alpha_1) + \dots + f(\alpha_m)) = \\ &= k \cdot f(\alpha_1 + \dots + \alpha_m) = k \cdot f(2\pi) = 0 \end{aligned}$$

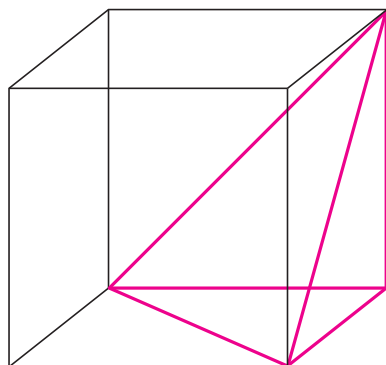
– przecież ta krawędź była „otoczona” wielościanem  $W$ . Podobnie nie wystąpi w sumie niezmienników żadna nowa krawędź, która leżała we wnętrzu ścian wielościanu  $W$  – tutaj kąty zsumują się do  $\pi$ . Tak więc w sumie niezmienników Dehna wielościanów, na jakie pocięliśmy wielościan  $W$ , wystąpią tylko fragmenty krawędzi wielościanu  $W$ , przy czym (rozumujemy podobnie jak poprzednio) przy każdym takim fragmencie  $l_{i_j}$  (gdzie, powiedzmy,  $j = 1, 2, \dots, m$ ) krawędzi  $l_i$  wystąpi po zsumowaniu funkcja całego kąta  $\alpha_i$ . Będziemy więc mieli

$$l_{i_1} \cdot f(\alpha_i) + \dots + l_{i_m} \cdot f(\alpha_i) = (l_{i_1} + \dots + l_{i_m}) \cdot f(\alpha_i) = l_i \cdot f(\alpha_i).$$

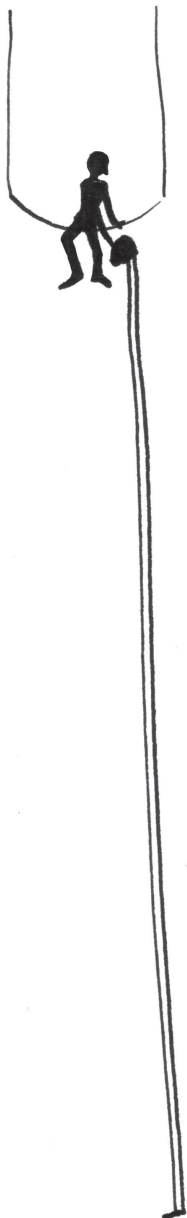
Ale przecież niezmiennik Dehna wielościanu  $W$  to właśnie suma takich wyrażień.

Tak więc, jeśli znajdziemy taki niezmiennik Dehna, który przyjmuje inną wartość dla wielościanu  $W_1$  niż dla wielościanu  $W_2$ , będzie to dowód, że nie są one równoważne przez pocięcie. A oto przykład: czworościan  $Q$  z rysunku 3 (naroże sześciianu) nie jest równoważny przez pocięcie z żadnym prostopadłościanem. Udowodnimy to.

Najpierw zauważmy, że wszystkie niezmienniki Dehna dla prostopadłościanu są równe 0 – istotnie, wszystkie kąty dwuścienne prostopadłościanu są proste,



Rys. 3



czyli równe  $\frac{\pi}{2}$ , a dla każdej funkcji Dehna  $f$  mamy  $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ . Wystarczy więc wskazać taki niezmiennik, który dla  $Q$  przyjmuje wartość niezerową. Niezmienniki  $Q$  mają postać

$$3 \cdot 1 \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot f(\varphi) = 3\sqrt{2} \cdot f(\varphi),$$

gdzie  $\varphi$  to kąt dwuścienny przy dłuższych krawędziach czworościanu. Powstaje wobec tego pytanie, czy istnieje taka funkcja Dehna, która dla  $\varphi$  jest różna od zera.

W części poświęconej równaniu Cauchy'ego stwierdziliśmy, że wartość funkcji  $f$  możemy obracać dowolnie wtedy i tylko wtedy, gdy  $\varphi$  nie jest wymierną wielokrotnością  $\pi$  (bo na razie tylko dla wymiernych wielokrotności  $\pi$  mamy zadane wartości  $f$ ).

Okazuje się, że spostrzeżenie (które zapewne nie sprawi kłopotu Czytelnikowi), iż  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , wystarcza, aby to udowodnić. Najpierw zauważmy, że:

$\cos n\varphi = \frac{a_n}{\sqrt{3^n}}$ , gdzie  $a_n$  jest liczbą całkowitą niepodzielną przez 3.

Dowód jest indukcyjny. Dla  $n = 1$  zgadza się:  $a_1 = 1$ . Dla  $n = 2$  mamy

$$\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1 = \frac{-1}{3},$$

czyli też dobrze:  $a_2 = -1$ . Teraz krok indukcyjny: ze znanego wzoru mamy

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2 \cos \varphi \cdot \cos n\varphi,$$

a wobec tego

$$\cos(n+1)\varphi = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a_n}{\sqrt{3^n}} - \frac{a_{n-1}}{\sqrt{3^{n-1}}} = \frac{2a_n - 3a_{n-1}}{\sqrt{3^{n+1}}},$$

a więc też dobrze – mianownik się zgadza, a liczba  $2a_n - 3a_{n-1}$  nie dzieli się przez 3, skoro  $a_n$  się nie dzieli.

Teraz już łatwo dowodzimy, że  $\varphi$  nie jest wymierną wielokrotnością  $\pi$ . Gdyby bowiem było przeciwnie, to znaczyłoby dla całkowitych  $p$  i  $q$  było

$$\varphi = \frac{p}{q}\pi, \quad \text{czyli} \quad 2p\pi = 2q\varphi,$$

to mielibyśmy

$$1 = \cos 2p\pi = \cos 2q\varphi = \frac{a_{2q}}{3^q},$$

co jest niemożliwe, bo  $a_{2q}$  przez 3 się nie dzieli.

Zatem możemy wybrać sobie funkcję Dehna  $\bar{f}$  przyjmującą dowolnie obraną przez nas wartość dla  $\varphi$ , np. 1. Otrzymamy wówczas  $D_{\bar{f}}(Q) = 3\sqrt{2}$ , co wobec twierdzenia Dehna dowodzi, że nie da się pociąć  $Q$  na takie wielościany, z których da się uskładać prostopadłościan.

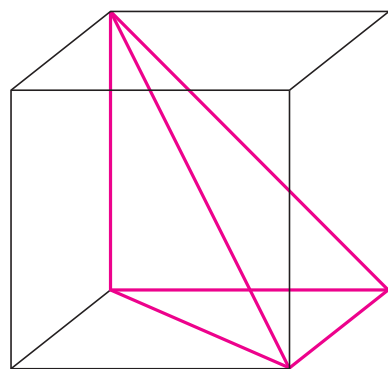
Morał z tego taki, że jeśli ktoś nam pokazuje sposób na uzyskanie wzoru na objętość czworościanu  $\frac{1}{3}hP$  bez jakiegoś przejścia granicznego, to nas oszukuje (choć, być może, robi to bardzo sprytnie).

Twierdzenie Sydlera z kolei głosi, że

*Jeśli wielościany mają wszystkie niezmienniki Dehna równe, to są równoważne przez pocięcie.*

Nie będziemy go dowodzili, ale proponujemy Czytelnikowi wynikające z niego zadania.

1. Wykazać, że czworościan z rysunku 4 jest równoważny przez pocięcie z prostopadłościanem.
2. Znaleźć odpowiedni rozkład.
3. Wykazać, że każdy graniastosłup jest równoważny przez pocięcie z prostopadłościanem (można analitycznie, ale można też sprytnie wykorzystać twierdzenie Bolyaia–Gerwiena z *Małej Deltą*).



Rys. 4





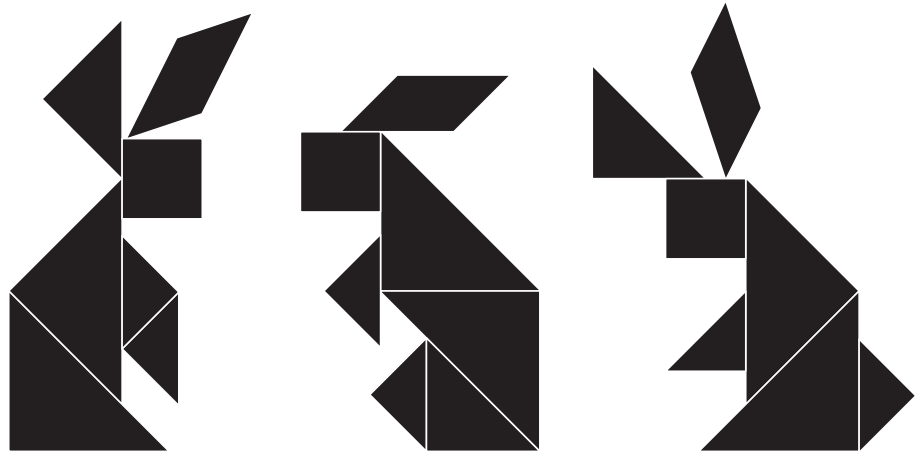
# mała delta

## Zabawy z miarą

Tangram to stara chińska zabawa, polegająca na układaniu zadanych figur z siedmiu klocków, ułożonych na rysunku 1 w kwadrat.



Rys. 1

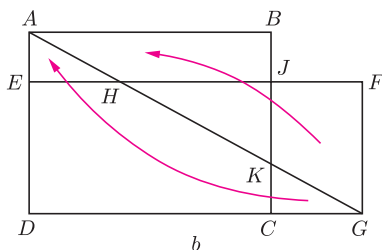


Rys. 2

Rysunek 2 ukazuje (w różnych pozach) zajęczka, utworzonego z tych klocków.

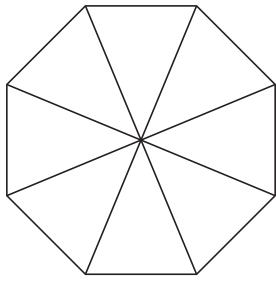
Oczywiście, pole kwadratu jest równe polu zajęczka, ściślej, wielokąta w kształcie zajęczka. Dlaczego? Ponieważ obie figury składają się z przystających części, które w każdej z nich stykają się tylko brzegami. Wiemy, że figury przystające mają równe pola, oraz że jeśli figura składa się z mniejszych figur, które stykają się tylko brzegami, to pole całej figury jest sumą pól owych mniejszych figur składowych.

Można ten fakt wyrazić inaczej: kwadrat i zajęczek mają równe pola, gdyż pocięliśmy kwadrat na kawałki, z których ułożyliśmy zajęczka. Nasuwa się w takim razie naturalne pytanie odwrotne: czy, mając dwie figury o równych polach, możemy pociąć jedną z nich na kawałki, tak aby można z nich było złożyć drugą figurę?

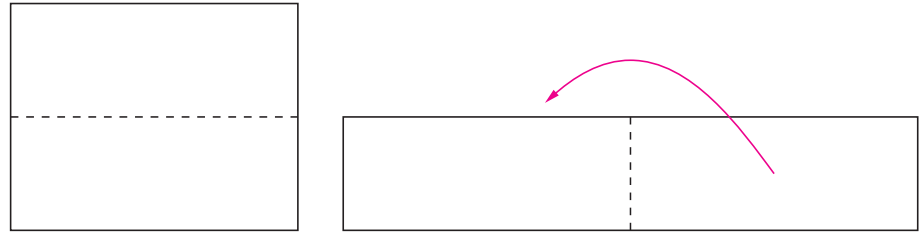


Rys. 3

Na początek spróbujmy naszych sił na dwóch prostokątach o równych polach, ale różnych bokach (rysunek 3):  $|AB| \cdot |BC| = |EF| \cdot |FG|$ , przy czym  $|EF| \neq |AB| \neq |FG|$  (więc i  $|EF| \neq |BC| \neq |FG|$ ). Poprowadźmy odcinek łączący lewy górny wierzchołek  $A$  pierwszego prostokąta z prawym dolnym wierzchołkiem  $G$  drugiego prostokąta. Oznaczając odpowiednie punkty przecięcia tak jak na rysunku 3, stwierdzamy, że trójkąty  $ABK$  i  $HFG$  są przystające (Dlaczego? Tu może się przydać warunek równości pól, a nawet znajomość twierdzenia Talesa). Przesuwając zatem ten drugi wzdłuż odcinka  $AG$  (a trójkąt  $KCG$  na przystający do niego trójkąt  $AEH$ ), pokryjemy cały prostokąt  $ABCD$  kawałkami składającymi się na prostokąt  $EFGD$ .

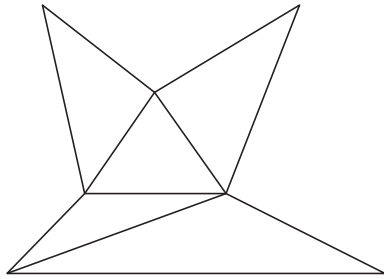


Jest tylko jeden szkopuł. Przecież nie zawsze odcinek  $AG$  przetnie dolny prostokąt z lewej strony punktu  $J$ . Aby tak było, musi być spełniony warunek  $|EF| < 2|AB|$ . Ale cóż prostszego, jak pociąć prostokąt, który tego warunku nie spełnia, na taki, który go spełnia! Wystarczy powtarzać cięcie pokazane na rysunku 4 aż do skutku.



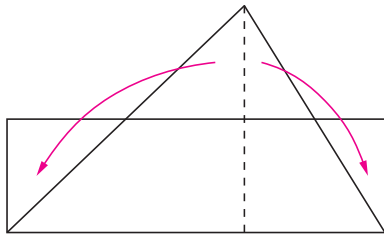
Rys. 4

Tak więc każdy prostokąt można tak pociąć, żeby z kawałków złożyć dowolny inny prostokąt o tym samym polu.



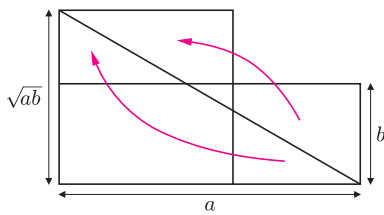
Rys. 5

Możemy teraz zająć się dowolnymi wielokątami. Zapewne Czytelnik zgodzi się, że jeśli potrafimy pociąć każdy z dwóch wielokątów o tym samym polu na kawałki, z których można złożyć jeden (siłą rzeczy, taki sam dla obu) kwadrat, to potrafimy także pociąć jeden z tych wielokątów, tak by z otrzymanych kawałków złożyć drugi. Zajmiemy się zatem pocięciem wielokąta na kwadrat. Zauważmy, że:



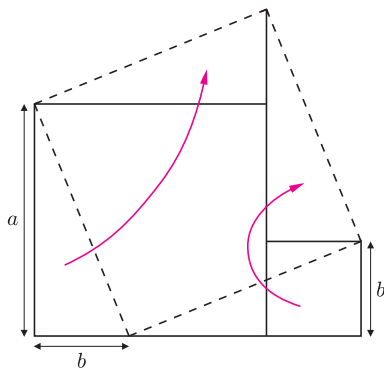
Rys. 6

1. każdy wielokąt można pociąć na trójkąty (rysunek 5);
2. każdy trójkąt można pociąć na kawałki, z których da się ułożyć prostokąt (rysunek 6) ...
3. ... a każdy prostokąt można pociąć tak, by złożyć z niego dowolny inny prostokąt o tym samym polu – na przykład kwadrat (rysunek 7).



Rys. 7

W ten sposób udało nam się pokroić wielokąt, od którego zaczęliśmy zabawę, na pewną liczbę kwadratów o łącznym polu równym polu tego wielokąta. Chcieliśmy jednak otrzymać jeden kwadrat. Przywołajmy więc na pomoc twierdzenie Pitagorasa, które pozwala z dwóch kwadratów zrobić jeden o tym samym polu. Jak? Pokazuje to rysunek 8.

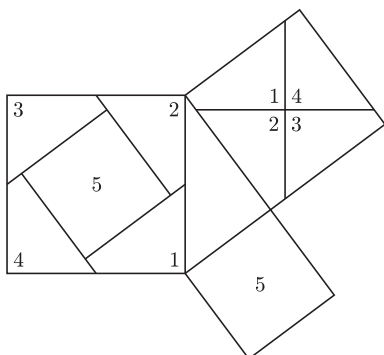


Mamy zatem brakujące ogniwo:

4. z otrzymanych kwadratów można złożyć jeden kwadrat, którego pole jest równe polu wyjściowego wielokąta.

Nazwijmy dwa wielokąty *równoważnymi przez pocięcie*, jeśli jeden z nich można pociąć na kawałki, z których można złożyć drugi. Udowodniliśmy następujące twierdzenie, znane od początków XIX wieku.

**Twierdzenie Bolyaia–Gerwiena.** Dwa wielokąty są równoważne przez pocięcie wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe pola.



Rys. 8

Chciałoby się powiedzieć: nic bardziej naturalnego. Jakże mogłoby być inaczej? Okazuje się jednak, że problem znacznie się komplikuje, gdy przejdziemy do przestrzeni trójwymiarowej. W początkach XX wieku wykazano, że istnieją bryły trójwymiarowe (na przykład, dwa czworościany) o równych objętościach, takie że żadnej z nich nie można otrzymać z drugiej przez pocięcie (tym razem, na „kawałki” trójwymiarowe). Ale to już zupełnie inna sprawa (patrz artykuł na stronie 6).

*Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL*

Jednym z podstawowych sposobów mierzenia zbioru jest liczenie jego elementów. Liczenie ma jednak jasny sens tylko dla zbiorów skończonych. Wiadomo, co to znaczy, że jakiś zbiór ma 5, 31 czy 1612 elementów. W przypadku zbiorów nieskończonych sytuacja jest natomiast znacznie mniej oczywista. Czy zbiorowi nieskończonemu da się w ogóle przypisać liczbę elementów sensowniej niż przez uznanie, że wynosi ona zawsze „nieskończoność”?

Punktem wyjścia do poszukiwania odpowiedzi jest następująca obserwacja: zbiory  $X$  i  $Y$  można uznać za równoliczne, jeśli istnieje bijekcja  $f : X \rightarrow Y$ , czyli taka różnowartościowa funkcja z  $X$  w  $Y$ , której zbiorem wartości jest całe  $Y$ . Okazuje się, że jest to bardzo trafna definicja równoliczności, mimo że w zastosowaniu do zbiorów nieskończonych prowadzi do zaskakujących wniosków. Zbiór nieskończony może być, między innymi, równoliczny ze swoim właściwym podzbiorem: przykładowo, zbiory  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{N}$  i  $2\mathbb{N}$  są równoliczne.

Gdy dwa zbiory skończone są równoliczne, to jest tak dlatego, iż istnieje taka liczba naturalna  $n$ , że oba zbiory mają po  $n$  elementów. Chcielibyśmy również zbiorom nieskończonym przyporządkować takie kanoniczne obiekty, które wskazywałyby na to, że dany zbiór należy do danej klasy równoliczności. Okazuje się, że nasz cel da się zrealizować: z każdym zbiorem  $X$  można związać pewien zbiór  $card(X)$ , równoliczny z  $X$ , w taki sposób, że  $card(X) = card(Y)$  dokładnie wtedy, gdy  $X$  i  $Y$  są równoliczne. Dla  $X$  skończonego  $n$ -elementowego  $card(X)$  jest po prostu liczbą naturalną  $n$ , identyfikowaną ze zbiorem  $\{0, \dots, n-1\}$ . Zbiór  $card(X)$  nazywamy mocą zbioru  $X$  (a czasem liczbą elementów  $X$ ), a wszystkie możliwe moce nazywamy liczbami kardynalnymi. Liczby kardynalne oznaczamy najczęściej literami  $\kappa$ ,  $\lambda$ .

Definiujemy:  $\kappa \leq \lambda$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja różnowartościowa z  $\kappa$  w  $\lambda$  (a zatem,  $card(X) \leq card(Y)$  dokładnie wtedy, gdy  $X$  jest równoliczny z podzbiorem  $Y$ ). Zachodzi oczekiwany, ale bardzo ważny fakt: jeśli  $\kappa \leq \lambda$  i  $\lambda \leq \kappa$ , to  $\kappa = \lambda$  (twierdzenie Cantora–Bernsteina). Możemy więc przyjąć:  $\kappa < \lambda$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\kappa \leq \lambda$  i  $\kappa \neq \lambda$ .

Czytelnik bez wątpienia zauważył, że nie podaliśmy definicji  $card(X)$ . Było to zaniebdanie celowe: zdefiniowanie liczb kardynalnych, a zwłaszcza wyjaśnienie sensu definicji, to proces dość żmudny. Z naszego punktu widzenia ważniejsza od dokładnej definicji jest zresztą struktura liczb kardynalnych. Okazuje się na przykład, że dla dowolnych zbiorów  $X, Y$  zachodzi  $card(X) \leq card(Y)$  lub  $card(Y) \leq card(X)$ , a ponadto w każdym niepustym zbiorze liczb kardynalnych istnieje najmniejsza. Największej liczby kardynalnej nie ma, o czym się wkrótce przekonamy. Najmniejszymi są liczby kardynalne skończone, czyli po prostu liczby naturalne. Najmniejszą liczbą nieskończoną jest moc zbioru liczb naturalnych, oznaczana symbolem  $\aleph_0$ . Zbiory równoliczne z  $\mathbb{N}$  nazywamy przeliczalnymi. Następną po  $\aleph_0$  liczbą kardynalną jest... ale o tym za chwilę.

Na liczbach kardynalnych można wykonywać niektóre szkolne działania arytmetyczne: dodawanie, mnożenie, potęgowanie. Jeśli  $\kappa$  i  $\lambda$  są liczbami kardynalnymi, to  $\kappa + \lambda$  jest mocą sumy dwu rozłącznych zbiorów, z których jeden ma moc  $\kappa$ , a drugi  $\lambda$ ;  $\kappa \cdot \lambda$  jest mocą iloczynu kartezyjskiego zbioru mocy  $\kappa$  i zbioru mocy  $\lambda$ ; wreszcie  $\kappa^\lambda$  jest mocą zbioru wszystkich funkcji ze zbioru mocy  $\lambda$  w zbiór mocy  $\kappa$ . W szczególności,  $2^\lambda$  jest mocą zbioru wszystkich podzbiorów zbioru mocy  $\lambda$ .

Dodawanie i mnożenie liczb nieskończonych to wyjątkowo proste operacje. Jeśli choć jedna z liczb  $\kappa, \lambda$  jest nieskończona, to  $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$ . Pokażmy dla przykładu, że  $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ . Jeśli  $X = \{x_0, x_1, \dots\}$  i  $Y = \{y_0, y_1, \dots\}$  są zbiorami przeliczalnymi, to funkcja  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{N}$  zadana wzorem  $f(\langle x_n, y_m \rangle) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m$  jest bijekcją między  $X \times Y$  a  $\mathbb{N}$ . Czytelnik być może zechce nie tylko uzupełnić szczegóły tego rozumowania, ale i zastanowić się nad „geometrycznym sensem” funkcji  $f$  (chodzi o ponumerowanie liczbami naturalnymi macierzy o przeliczalnie wielu wierszach, z których każdy jest przeliczalny).



Symbol  $2\mathbb{N}$  oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych parzystych.



Każdy podzbiór zbioru  $X$  można utożsamić z funkcją  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ , przyjmującą wartość 1 na elementach, które do podzbioru należą, i wartość 0 na pozostałych.

Sam zapis  $X = \{x_0, x_1, \dots\}$  już wskazuje, że zbiór  $X$  jest przeliczalny. W takiej notacji  $x_n$  to element przyporządkowany liczbie naturalnej  $n$ .

\*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

Przypisując każdemu elementowi  $x$  zbioru  $X$  jednoelementowy podzbiór  $\{x\}$ , stwierdzamy równoliczność zbioru  $X$  ze zbiorem jego jednoelementowych podzbiorów.

Z nierówności  $2^\lambda > \lambda$  wynika, że – jak już wspominaliśmy – nie ma największej liczby kardynalnej. Nawiąsem mówiąc, jest to w pewnym sensie jedyny powód, dla którego musi istnieć więcej niż jedna nieskończona liczba kardynalna. „W pewnym sensie” znaczy tyle: jeśli ze standardowej listy aksjomatów teorii mnogości skreślić aksjomat mówiący, że dla każdego zbioru istnieje zbiór wszystkich jego podzbiorów, to pozostała teoria jest niesprzeczna ze zdaniem „wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne”.

Z potęgowaniem liczb kardynalnych nie jest już tak prosto. Udowodnimy, że już  $2^\lambda$  musi być zawsze ostro większe od  $\lambda$ . Dowód  $2^\lambda \geq \lambda$  jest łatwy, wystarczy zatem sprawdzić, że żaden zbiór  $X$  nie może być równoliczny ze zbiorem wszystkich podzbiorów  $X$ , oznaczanym przez  $\mathcal{P}(X)$ . Przypuśćmy, że  $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  jest bijekcją i rozważmy zbiór  $Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ . Oczywiście  $Y \in \mathcal{P}(X)$ , a zatem istnieje taki  $x \in X$ , że  $f(x) = Y$ . Zapytajmy teraz, czy  $x \in Y$ . Chwila zastanowienia pozwala stwierdzić, że każda z dwu możliwych odpowiedzi prowadzi do sprzeczności.

Tak więc, funkcja wykładnicza  $2^\lambda$  zawsze zwiększa swój argument. Dalej jednak sprawy stają się bardziej zagmatwane. Oznaczmy następną po  $\aleph_0$  liczbę kardynalną przez  $\aleph_1$  i zadajmy naturalne pytanie: czy  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ? Pozytywna odpowiedź, w którą wierzył Cantor, nazywa się hipotezą continuum,  $CH$  („continuum” bywa czasem określeniem zbioru liczb rzeczywistych, a  $\text{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$ ). Problem rozstrzygnięcia hipotezy continuum był pierwszy na słynnej liście problemów otwartych przedstawionej przez Hilberta na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 1900 r.

A zatem: czy  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ? W 1938 r. Kurt Gödel pokazał, że przy założeniu niesprzeczności zwykłych aksjomatów teorii mnogości niesprzeczna z nimi jest nie tylko  $CH$ , ale nawet tak zwana uogólniona hipoteza continuum,  $GCH$ , czyli zdanie mówiące, że dla każdej nieskończonej  $\lambda$ ,  $2^\lambda$  jest następną liczbą po  $\lambda$ . Metoda Gödla polegała na wybraniu z uniwersum wszystkich zbiorów „tylko tych, których istnienie jest wymuszone przez aksjomaty” (tzw. zbiorów konstruowalnych) i pokazaniu, że w tak ograniczonej strukturze  $GCH$  jest spełniona. W 1963 r. natomiast Paul Cohen wprowadził tzw. metodę forcingu (która dla odmiany polega na dodawaniu nowych elementów do istniejących struktur) i za jej pomocą udowodnił, że również negacja  $CH$  jest niesprzeczna z aksjomatami.

Hipoteza continuum jest więc nierozstrzygalna: nie da się jej ani udowodnić, ani obalić w oparciu o standardowo przyjmowane aksjomaty. Interpretacja tego rezultatu jest sporna. Dla jednych zamyka on problem, a może świadczy nawet o tym, że  $CH$  jest pozbawiona wartości logicznej czy „z przyczyn zasadniczych niejasna”. Dla innych  $CH$  pozostaje wartym badania problemem, rodzącym m. in. pytania o ewentualne nowe aksjomaty.

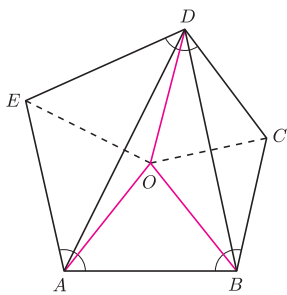
Tak czy inaczej, wynik Cohena zamknął pewną epokę w dziejach teorii liczb kardynalnych: podstawy pojęciowe teorii były już dawno ustalone, a jej najsłynniejszy problem otwarty okazał się nierozstrzygalny. Z drugiej jednak strony, stworzone przez Cohena metody spowodowały bujny rozwój teorii mnogości, umożliwiając rozwiązanie wielu klasycznych problemów oraz postawienie (i rozwiązanie) wielu nowych. Na zakończenie wspomnijmy więc pokrótce o dwu kierunkach badań, które odegrały znaczącą rolę w ostatnich kilku dziesięcioleciach.

Skoro wiadomo już było, jaki jest status  $CH$ , ważne stawało się ogólne pytanie o możliwe zachowanie funkcji  $2^\lambda$ . Dość szybko odkryto, że dla „typowych” liczb kardynalnych (w tym dla wszystkich liczb nieskończonych, które są bezpośrednimi następnikami innych liczb) dowolność jest prawie całkowita. W. Easton udowodnił w 1970 r., że dla takich liczb dowolny przebieg funkcji wykładniczej zgodny z dwoma elementarnymi warunkami (funkcja  $2^\lambda$  musi być niemalejąca i spełniać pewne wzmocnienie warunku  $2^\lambda > \lambda$ ) jest niesprzeczny z aksjomatami. W szczególności, na nieskończonych argumentach funkcja wykładnicza nie musi być ściśle rosnąca. Dla „nietypowych” liczb (tzw. singularnych) dowolność przebiegu funkcji wykładniczej jest znacznie mniejsza. Tu badania trwały dużo dłużej i nie przyniosły eleganckiego ogólnego wyniku w rodzaju twierdzenia Eastona.

Inny ważny przedmiot badań to tzw. duże liczby kardynalne. Mówiąc w uproszczeniu, duża liczba to taka, która ma pewne własności kombinatoryczne sprawiające, że musi być „znacznie większa” od liczb ją poprzedzających (mniej więcej w takim sensie, w jakim liczba  $\aleph_0$  jest znacznie większa od wszystkich liczb skończonych). Przykładem stosunkowo małych dużych liczb kardynalnych

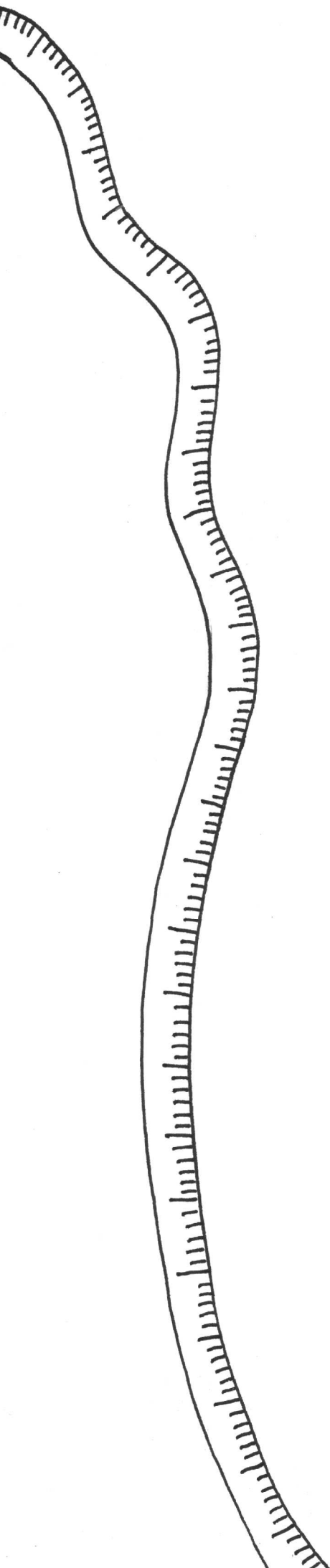


**Rozwiązanie zadania M 1214.**  
Oznaczmy przez  $O$  punkt przecięcia dwusiecznych kątów  $AED$  i  $BCD$ .



Wykażemy, że punkt  $O$  leży na dwusiecznych kątów  $BAE$ ,  $ABC$  i  $CDE$ , co zakończy rozwiązanie zadania.

Proste  $OC$  i  $OE$  są symetrycznymi odpowiednio odcinków  $BD$  i  $DA$ , a więc punkt  $O$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABD$ . Zatem  $OA = OB = OD$ . Wobec tego trójkąty  $AOE$  i  $DOE$  są przystające (cecha bok-bok-bok), skąd  $\sphericalangle EAO = \sphericalangle EDO = \alpha$ . Analogicznie otrzymujemy  $\sphericalangle CBO = \sphericalangle CDO = \beta$ . Ponadto  $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = \gamma$ . Stąd korzystając z danych w treści zadania równości kątów, wnioskujemy, że  $\alpha = \beta = \gamma$ . Zależności te z kolei dowodzą, że punkt  $O$  leży na dwusiecznych kątów  $BAE$ ,  $ABC$  i  $CDE$ .



są liczby nieosiągalne, tj. takie  $\kappa$ , że ilekroć  $\lambda < \kappa$ , to również  $2^\lambda < \kappa$ , a ponadto żaden zbiór mocy  $\kappa$  nie jest sumą mniej niż  $\kappa$  zbiorów mocy mniejszej niż  $\kappa$ .

Duże liczby kardynalne mają dość specyficzny status logiczny. Można pokazać, że ich nieistnienie jest niesprzeczne ze zwykłymi aksjomatami teorii mnogości, oczywiście zakładając niesprzeczność samych aksjomatów. Domniemujemy, że istnienie dużych liczb kardynalnych jest również niesprzeczne z aksjomatami, ale tego dla odmiany nie można udowodnić – w przeciwnym przypadku popadlibyśmy w sprzeczność z drugim twierdzeniem Gödla. Mimo to wielu badaczy zajmujących się teorią mnogości ma dość przychylny stosunek do aksjomatów o istnieniu dużych liczb. Co więcej, aksjomaty takie bywają wykorzystywane i w głównonurtowej matematyce (np. w geometrii algebraicznej i topologii algebraicznej używa się czasem liczb nieosiągalnych w postaci tzw. uniwersów Grothendiecka). Niewykluczone, że któreś z tych aksjomatów zostaną kiedyś powszechnie przyjęte, choć na pewno nie odbędzie się to bez kontrowersji.

## Jak mierzymy odległości kosmiczne?

*Tomasz KWAST*

Jedną z najważniejszych, jeśli nie najważniejszą umiejętnością astronoma jest umiejętność mierzenia (wyznaczania) odległości obserwowanych obiektów. Bez poznania odległości obiektu dyskusja o jego fizycznej naturze jest bezprzedmiotowa. Wszak np. z daleka gwiazda jasna (mówimy: o dużej jasności absolutnej) będzie wyglądać tak, jak słaba z bliska. Słońce i Księżyc mają niemal identyczne rozmiary kątowe, ale Słońce jest 400 razy dalej, a więc tyleż razy większe, jest więc zapewne ciałem o zupełnie innej naturze niż Księżyc itd. Jak doszło do poznania odległości ciał, z których tylko nieliczne najbliższe człowiek zdołał osiągnąć?

Odległości ciał najbliższych mierzy się „najuczciwiej” w tym sensie, że nie trzeba do tego żadnych założeń, np. co do natury danego ciała. Pomińmy metody laserowe i radarowe ze względu na ich dość ograniczone możliwości. Standardowo natomiast korzysta się (korzystało) z tego, że badany obiekt, oglądany z dwóch miejsc, jest widoczny w nieco różnych miejscach tła. W przypadku oczu nazywa się to efektem stereoskopowym. W zasięgu kilkudziesięciu metrów automatycznie rozróżniamy, co jest bliżej, a co dalej. Jeżeli oczy sztucznie rozsunie na większą odległość, np. budując dalmierz, to stereoskopowe widzenie sięgnie kilku kilometrów. Mierzy się tu kąt między kierunkami na obiekt z jednego i drugiego „oka”. Znając bazę, czyli rozstaw oczu (lub obiektywów dalmierza, lub dwóch obserwatoriów), można na podstawie prostej geometrii ocenić odległość obserwowanego obiektu. Kąt, pod jakim z obiektu byłoby widać promień Ziemi, nazywa się paralaksą geocentryczną tego obiektu. Jej znajomość jest równoważna znajomości odległości ciała.

W ten sposób zmierzono odległości stosunkowo bliskich ciał: Księżyca, planet, planetoid. Metoda ta do gwiazd nie sięga, bo Ziemia jest za mała. Udało się jednak wykorzystać fakt, że w odstępie pół roku Ziemia przemieszcza się do miejsca odległego o średnicę okołosłonecznej orbity od miejsca startowego. A jest to – jak by nie było – 300 mln km. Taki „rozstaw oczu” umożliwił zmierzenie tzw. paralaks heliocentrycznych wielu gwiazd. Okazało się (w 1838 roku), że paralaksa heliocentryczna (dokładniej: to kąt, pod jakim z gwiazdy byłoby widać promień ziemskiej orbity) najbliższej gwiazdy jest kątem mniejszym od sekundy łuku. Dlatego pomiaru tego dokonano tak późno. Gwiazdy okazały się znacznie bardziej odległe, niż się ówczesnym astronomom zdawało. Odległość odpowiadająca paralaksie heliocentrycznej równej  $1''$  to tzw. parsek (pc; łatwo

zgodną, skąd się ta nazwa wzięła). Wynosi on ponad 200 000 j.a. (tj. promieni ziemskiej orbity), albo w przybliżeniu  $3 \times 10^{16}$  m, albo 3,26 roku świetlnego. Z powierzchni Ziemi mierzono paralaksy do 0,01 sekundy łuku, czyli odległości gwiazd do 100 pc. Satelita Hipparcos (od ang. *High Precision Parallax Collecting Satellite*) był w stanie mierzyć paralaksy do 0,001 sekundy łuku (bo spoza atmosfery), a więc odległości do 1 kpc.

Dalej geometria nie sięga, bo orbita Ziemi jest za mała. Ale przy okazji tych pomiarów poznano cechy fizyczne mnóstwa gwiazd, w szczególności ich jasności absolutne. Bo jasność obserwowana  $m$ , którą mierzy się przy każdej okazji, zależy od jasności absolutnej  $M$  i odległości gwiazdy  $r$  według wzoru

$$m - M = 5 \log r - 5$$

(odległość jest tu wyrażona w parsekach). Jeżeli dla wielu gwiazd zmierzyc odległości za pomocą paralaksy, to mając ich jasności  $m$ , można wyznaczyć ich jasności absolutne  $M$  i sporządzić np. diagram Hertzsprunga-Russella, co zostało zrobione na początku XX wieku. Przyjmując, że odległe gwiazdy są takie, jak w pobliżu Słońca, można wzór wykorzystać inaczej. Teraz znając  $M$  na podstawie widma gwiazdy (i  $m$  jak zawsze – z pomiaru jasności), oblicza się odległość  $r$  gwiazdy. Nazywa się to wyznaczeniem paralaksy spektroskopowej (bo  $M$  określa się z widma). Domyślamy się, że ten w zasadzie łatwy sposób wyznaczania odległości komplikuje materia międzygwiazdowa. Wzór powyższy jest słuszny, jeżeli przestrzeń między obiektem a obserwatorem jest pusta, czyli gdy nie ma po drodze od obiektu strat światła. Wiadomo, że te straty są i wiadomo, jak je uwzględnić. Jednak nie będziemy się tą sprawą tu zajmować.

Przytoczony tu wzór można zastosować do dowolnych kosmicznych źródeł światła, jeżeli tylko skądinąd znamy ich moc, czyli jasność absolutną. Wzór ten zaowocował wyznaczeniem odległości pobliskich galaktyk na podstawie pomiaru jasności różnych wybranych gwiazd w tych galaktykach (cefeid, nowych, supernowych). Wreszcie  $m$  i  $M$  mogą w tym wzorze równie dobrze oznaczać jasność (obserwowaną i absolutną) całej galaktyki, gdyż z obserwacji ich gwiazd udało się ocenić jasności absolutne niezbyt odległych galaktyk.

Natura podsunęła inny niezależny sposób oceniania odległości galaktyk. Edwin Hubble na początku XX wieku odkrył mianowicie, że im odleglejsza (sądząc po jasności  $m$ ) jest galaktyka, tym szybciej od nas się oddala. Prędkości (radialne) wyznacza się na podstawie obserwowanego przesunięcia widma galaktyki. Bowiem zjawisko Dopplera powoduje, że wszelkie linie w widmie oddalającej się galaktyki wypadają nieco bardziej ku czerwieni, niż gdyby obserwowana galaktyka nie poruszała się. Przyczyną tej „ucieczki galaktyk” jest ekspansja całego Wszechświata, a w każdym razie tak ją zinterpretowano i o tym przekonana jest większość astronomów. Sam Hubble stwierdził (w 1929 roku)

proporcjonalność prędkości ucieczki  $v_r$  do odległości  $r$  galaktyki:

$$v_r = Hr,$$

gdzie  $H$  jest współczynnikiem proporcjonalności, nazwanym później stałą Hubble’a.

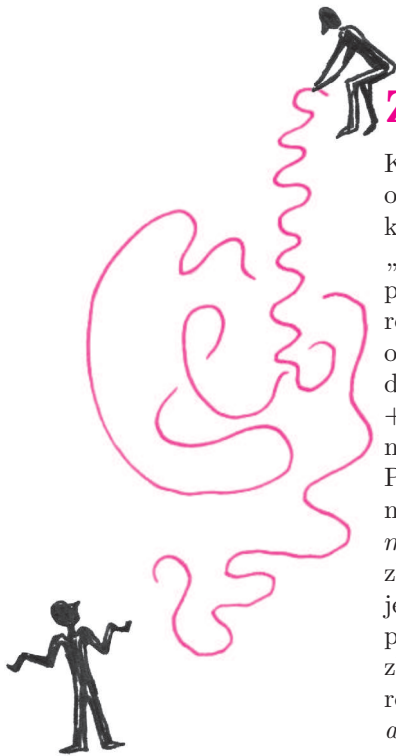
Z czasem prawo Hubble’a z odkrycia stało się narzędziem do wyznaczania odległości galaktyk. Mierzy się owo przesunięcie ku czerwieni

$$z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0 = v_r/c,$$

gdzie  $\lambda$  oznacza obserwowaną długość fali, a  $\lambda_0$  długość fali, gdyby galaktyka była nieruchoma. Ono ostatecznie określa odległość  $r$ , ale... Otóż przeliczenie  $z$  na prędkość i dalej na odległość jest tak proste jedynie dla niezbyt wielkich  $z$ ,  $v_r$  i  $r$ . Dla dużych wartości – po pierwsze – należy stosować wzory zgodne z teorią względności (bo jeśli nie, to duże  $z$  dawałoby prędkość galaktyki większą od prędkości światła, a obecnie obserwuje się galaktyki, których  $z = 7$ ), po drugie – sposób przeliczania  $z$  na odległość zależy od modelu Wszechświata (np. charakteru ekspansji), wreszcie – po trzecie – dla obiektów odległych pojawiają się problemy z samym zdefiniowaniem odległości. Bo przecież dobrze by było, żeby kątowe rozmiary obiektu były odwrotnie proporcjonalne do jego odległości, a zarazem strumień jego promieniowania był odwrotnie proporcjonalny do kwadratu odległości (byłaby to tzw. odległość fotometryczna). Tymczasem we Wszechświecie, ekspandującym i „powyginanym” przez pole grawitacyjne zawartej w nim materii, nie ma takiej uniwersalnej odległości. Najczęściej mówi się o odległości fotometrycznej, bo w zasadzie można ją określić na podstawie jasności  $m$  galaktyki, o ile zna się niezbędne parametry Wszechświata. Żeby uniknąć tych dylematów, za „odległość” uważa się po prostu zmierzoną wartość  $z$ ; w każdym razie tak robią obserwatorzy, zostawiając interpretację teoretykom.

Ilustracja zależności  $z$  od jasności obserwowanej  $m$  galaktyk nazywa się diagramem Hubble’a. Dopasowywanie teoretycznych przewidywań do tego diagramu pozwala na testowanie konkurencyjnych modeli Wszechświata. Niestety, obserwacje skrajnie odległych galaktyk są trudne, a ich wyniki niepewne. A przecież Wszechświat rozciąga się poza  $z = 7$ . Gdzieś tam w niezbadanych dotąd obszarach (żeby nie powiedzieć patetycznie – otchłaniach), odległych od nas o gigaparseki, powinny znajdować się protogalaktyki, kwazary, zgęszczenia materii, z których promieniowanie reliktowe już bez przeszkód do nas dotarło, miejsca, gdzie z protonów i elektronów powstał pierwotny wodór. Promieniowanie reliktowe, odpowiadające w przybliżeniu  $z = 1000$ , obserwujemy, ale nie sposób dziś przewidzieć, czy obszary pośrednie ( $10 \lesssim z \lesssim 1000$ ) lub jeszcze dalsze ( $z > 1000$ ) zostaną kiedykolwiek poznane obserwacyjnie, czy sięgniemy do nich tylko teorią.

Odległościom kosmicznym poświęcona była *Delta* 10/2001.



## Zbiory niemierzalne Piotr ZAKRZEWSKI\*

Korzenie teorii miary sięgają tak podstawowych pojęć, jak długość (np. odcinka), pole (np. koła) i objętość (np. kuli). Wraz z rozwojem matematyki konieczne stało się uogólnienie tych pojęć w taki sposób, żeby dało się „zmierzyć” coraz bardziej skomplikowane podzbiory danej przestrzeni – na przykład prostej rzeczywistej  $\mathbb{R}$ , do której w tym artykule ograniczymy nasze rozważania. Takie uogólnienie, czyli właśnie miara, ma więc być funkcją  $m$ , określoną na pewnej rodzinie  $\mathcal{A}$  podzbiorów prostej (tych, które z jej pomocą dadzą się „zmierzyć”) i przypisującą im wartości rzeczywiste nieujemne oraz  $+\infty$ . Oczywiście, chcielibyśmy przy tym, żeby mało skomplikowane zbiory, np. odcinki, należały do rodziny  $\mathcal{A}$  i miara  $m$  przypisywała im ich długości. Ponadto, miara zbioru nie powinna zależeć od jego położenia na prostej, tzn. miara zbioru nie powinna się zmienić po jego przesunięciu; mówimy wówczas, że  $m$  jest *niezmiennicza na przesunięcia*. Wreszcie, miara sumy dwóch rozłącznych zbiorów powinna być równa sumie ich miar; mówimy wówczas, że funkcja  $m$  jest *skończenie addytywna*. Z uwagi na zastosowania w teorii całki i rachunku prawdopodobieństwa żąda się od miary więcej: miara sumy dowolnego ciągu zbiorów, z których każde dwa są rozłączne (czyli zbiorów *parami rozłącznych*), równa jest sumie miar tych zbiorów; tę własność miary nazywamy *przeliczalną addytywnością*.

W roku 1902 Lebesgue wprowadził pojęcie miary, powszechnie uznawane za satysfakcjonujące narzędzie, pozwalające „mierzyć” zbiory, pojawiające się w analizie matematycznej. *Miara Lebesgue’a* określona jest na rodzinie  $\mathcal{L}$  *zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue’a*, która jednak nie obejmuje wszystkich podzbiorów prostej: istnieją zbiory *niemierzalne w sensie Lebesgue’a*. Co więcej – i to jest znacznie bardziej zaskakujące – dla dowolnej miary  $m$  o dziedzinie  $\mathcal{A}$  (spełniającej powyższe warunki) istnieje zbiór taki  $A \subseteq \mathbb{R}$ , że  $A \notin \mathcal{A}$ .

Wynika to z następującego twierdzenia o paradoksalnym rozkładzie przedziału, udowodnionego przez Banacha i Tarskiego w roku 1924. *Przedział  $[0, 1]$  można podzielić na parami rozłączne zbiory  $A_0, A_1, A_2, \dots$  w taki sposób, że pewne ich przesunięcia  $t_0 + A_0, t_1 + A_1, t_2 + A_2, \dots$  też są parami rozłączne i w sumie dają przedział  $[0, 2]$* . Oczywiście, takie „cudowne podwojenie długości” nie byłoby możliwe, gdyby wszystkie zbiory  $A_i$  należały do  $\mathcal{A}$  – co najmniej jeden z nich jest więc *niemierzalny względem  $m$* .

Nie istnieje zatem miara, która mierzyłaby wszystkie podzbiory prostej, przypisując odcinkom ich długości i spełniając zarazem warunki przeliczalnej addytywności oraz niezmienniczości na przesunięcia. Sytuacja jest jednak inna, jeśli decydujemy się na osłabienie któregoś z tych warunków.

I tak, w roku 1923 Banach udowodnił, że istnieje niezmiennicza na przesunięcia i *skończenie addytywna* funkcja  $m$ , określona na rodzinie  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  wszystkich podzbiorów prostej i przypisująca każdemu zbiorowi, należącemu do  $\mathcal{L}$ , jego miarę Lebesgue’a (czyli *przedłużającą* miarę Lebesgue’a).

Z kolei, jeśli rezygnujemy z niezmienniczości na przesunięcia, to można rozważać hipotezę, że istnieje przeliczalnie addytywna miara określona na  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  i przedłużająca miarę Lebesgue’a. Hipoteza taka, eliminująca w pewnym sensie problem zbiorów niemierzalnych, jest bardzo ciekawa, a jej konsekwencje stanowią żywy przedmiot badań. W szczególności, pociąga ona za sobą negację pewnych innych hipotez, dotyczących wszystkich podzbiorów prostej, w tym, jak pokazali Banach i Kuratowski w roku 1929, hipotezy continuum.

Wchodzimy tu więc w obszar teorii zbiorów, czyli teorii mnogości. Nie powinno to budzić zdziwienia, skoro rozważania dotyczą *wszystkich* podzbiorów prostej – to właśnie od aksjomatów teorii mnogości zależy, istnienie jakich zbiorów uznajemy. W szczególności, w roku 1970 Solovay pokazał, że za istnienie zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue’a odpowiedzialny jest tzw. *aksjomat wyboru*. Rezygnując z aksjomatu wyboru, moglibyśmy radykalnie pozbyć się problemu zbiorów niemierzalnych, przyjmując po prostu, że każdy podzbiór prostej jest mierzalny w sensie Lebesgue’a. Ponieważ jednak aksjomat wyboru jest niezbędnym narzędziem w wielu działach matematyki, takie rozwiązanie jest nie do przyjęcia.

Przykładem zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue’a jest tzw. *zbiór Vitaliego*. Ma on dokładnie jeden element wspólny z każdym przesunięciem  $t + \mathbb{Q}$ , gdzie  $t \in \mathbb{R}$ , zbioru liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$ .

Gdyby wszystkie zbiory  $A_i$  należały do  $\mathcal{A}$ , to uzyskalibyśmy sprzeczność w następujący sposób:

$$\begin{aligned} 1 = m([0, 1]) &= m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} m(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} m(t_i + A_i) = \\ &= m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} (t_i + A_i)\right) = m([0, 2]) = 2. \end{aligned}$$

Więcej o hipotezie continuum można przeczytać w artykule *Miara liczebności* na str. 10.

Aksjomat wyboru mówi, że dla dowolnej rodziny zbiorów niepustych, parami rozłącznych, istnieje zbiór mający z każdym ze zbiorów tej rodziny dokładnie jeden element wspólny.

\*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

# Pomiar kwantowy

Ewa CZUCHRY

Układ kwantowy jest opisywany tak zwanym stanem kwantowym układu – jest to obiekt matematyczny zawierający pełną informację o układzie. Nie wszystkie parametry opisywane przez stan kwantowy mogą być zmierzone – te, które da się wyznaczyć za pomocą pomiaru, nazywa się obserwabliami. Może to być np. pęd czy położenie. W mechanice kwantowej obserwabli są reprezentowane przez operatory, którymi można podzielać na stan układu kwantowego.

Układ kwantowy znajduje się w stanie własnym operatora danej obserwabli, jeśli w wyniku działania tego operatora na stan kwantowy otrzymujemy jedną określoną liczbę charakteryzującą ten stan. Liczba ta jest wtedy wynikiem pomiaru.

Może się jednak zdarzyć i tak, że układ nie będzie w stanie własnym danego operatora. Można wtedy stan kwantowy tego układu zapisać w postaci sumy stanów własnych, pomnożonych przez współczynniki określające prawdopodobieństwo znalezienia się układu w danym stanie własnym. Jeśli na takim układzie przeprowadzimy pomiar kwantowy, otrzymamy wynik liczbowy, będący współczynnikiem stojącym przy jednym ze stanów własnych, oraz zmianę stanu układu, który zostanie zredukowany do tego jednego konkretnego stanu własnego. Na przykład, w przypadku pomiaru polaryzacji fotonu, o którym wiemy, że jest on z pewnym prawdopodobieństwem spolaryzowany pionowo, a z pewnym poziomo, otrzymamy jedną z tych dwu wartości. Jeśli wynik pomiaru wskaże na polaryzację poziomą, to od tej chwili foton będzie się znajdował w stanie polaryzacji poziomej, i każde następne sprawdzenie tego faktu da taki sam wynik.

Pomiar kwantowy jest zatem czymś więcej niż pasywną operacją dostarczającą informacji o stanie układu – taką, jaką jest pomiar klasyczny. Wynikiem jego działania są dwa rezultaty: klasyczny wynik pomiaru oraz dodatkowo przekształcenie samego układu poddawanego pomiarowi. Co więcej, nie jest to operacja deterministyczna: możemy mieć kilka układów o takim samym stanie początkowym, a w wyniku pomiaru otrzymać różne wartości liczbowe oraz różne stany przyjmowane przez ten układ. Na przykład, w wyniku pomiaru wspomnianej polaryzacji fotonu możemy otrzymać zarówno polaryzację pionową, jak i poziomą.

Z modyfikacją stanu kwantowego przez pomiar wiąże się zasada nieoznaczoności, mówiąca, że nie da się wyznaczyć jednocześnie dwóch wielkości fizycznych o różnych stanach własnych, np. pędu i położenia lub energii i czasu. Mierząc położenie fotonu, powodujemy, że jego stan kwantowy redukuje się do stanu własnego operatora położenia. Nie jest to jednak stan własny operatora pędu i nie można jednoznacznie określić jego wartości. Aby uzyskać jednoznaczną wartość pędu, trzeba w procesie pomiaru przekształcić stan fotonu (już zredukowany do stanu własnego położenia) w stan własny pędu, ale badamy wtedy już inny stan kwantowy niż ten początkowy, niezaburzony pierwszym pomiarem.

Wspomniane własności pomiaru kwantowego mogą budzić głęboki intuicyjny sprzeciw, nic dziwnego, że poświęcono mu wiele dyskusji i rozważań. Są też jednak i pozytywne strony aktywnego charakteru tego procesu. W rozwijającej się ostatnio dynamicznie kwantowej teorii informacji – znajdującej zastosowanie w kwantowej kryptografii czy budowie komputera kwantowego – pomiar kwantowy odgrywa bardzo ważną rolę, czasami wręcz dokonuje się pomiaru tylko po to, aby przekształcić stan układu, nie otrzymując o nim żadnej informacji.



## Rozwiązanie zadania F 722.

Postępując analogicznie jak w poprzednim zadaniu, otrzymujemy

$$F = pS = \frac{2\alpha}{l} S,$$

gdzie  $l$  jest grubością krążka rtęci, a  $S = \pi r^2$  jego polem. Mamy też, że

$$l = \frac{m}{\rho\pi r^2} \quad \text{i stąd} \quad F = \frac{2\pi^2 \rho \alpha r^4}{m} \approx 800 \text{ N.}$$

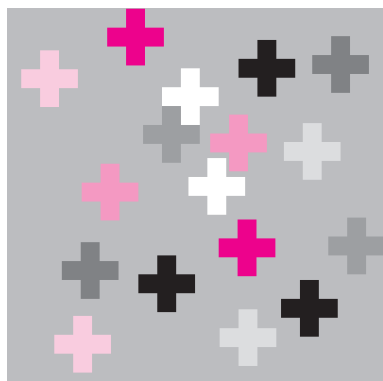


## Odległość, która nie jest metryką

Andrzej WALAT

Wiele lat temu ułożyłem zadanie na Warszawski Konkurs Informatyczny dla uczniów ośmioletniej wówczas szkoły podstawowej, które miało następującą treść.

Napisz procedurę o nazwie `dywan`, która rysuje losową liczbę  $n < 18$  małych krzyżyków o boku 20 pikseli i losowych kolorach rozrzuczonych losowo na tle kwadratu o boku 400 pikseli, jak na rysunku 1. Krzyżyki mogą się stykać bokami lub rogami, ale nie mogą na siebie nachodzić. Nie mogą również wystawać poza obszar kwadratu.



Rys. 1

W tym artykule omówię przykładowe rozwiązanie zadania, którego istotnym elementem będzie zdefiniowanie miary, która może posłużyć do oceny: czy jakiś dowolny punkt leży wystarczająco daleko od środków już istniejących krzyżyków, żeby można w nim było umieścić środek kolejnego krzyżyka. Rozwiązanie składa się z kilku krótkich procedur. Treść głównej procedury ma tylko dwa wiersze.

```
oto dywan
narysujKolorowyKwadrat
narysujKrzyżyki losowaListaKrzyżyków losowa 18
już
```

W pierwszym wierszu jest polecenie narysowania kolorowego kwadratu o żądanych rozmiarach. Oczywiście, nie jest to polecenie pierwotne Logo i musi być zdefiniowane.

W drugim wierszu jest polecenie narysowania krzyżyków z losowej listy o długości będącej losową liczbą naturalną mniejszą niż 18. Kluczowym elementem w tej konstrukcji jest funkcja o nazwie `losowaListaKrzyżyków`, która dla danej liczby naturalnej  $n$  generuje losową listę  $n$  punktów będących środkami nienachodzących na siebie krzyżyków. Jeśli  $n = 0$ , to wynikiem funkcji jest lista pusta. W przeciwnym przypadku wynikiem jest odpowiednie przedłużenie listy  $n - 1$  elementowej o jeden losowy punkt. Można to zapisać w Logo w następujący sposób.

```
oto losowaListaKrzyżyków :n
jeśli :n = 0 [wynik []]
wynik przedłużenie losowaListaKrzyżyków :n - 1 losPkt
już
```

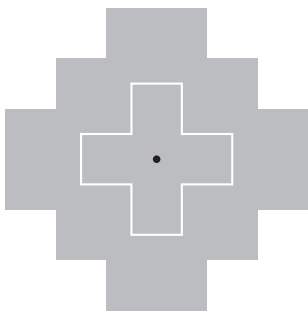
W powyższej definicji korzystamy z dwóch funkcji pomocniczych. Wynikiem funkcji `losPkt` jest losowo wybrany punkt z wnętrza kwadratu, leżący w odpowiedniej odległości od brzegu, aby krzyżyk o środku w tym punkcie nie wychodził poza kwadrat.

```
oto losPkt
wy [-170 -170] + losowa [341 341]
już
```

Funkcja `przedłużenie` dla danej listy `1Pkt` środków niekolidujących ze sobą krzyżyków oraz punktu `p` daje w wyniku przedłużenie tej listy o punkt `p`, jeśli nie koliduje on z punktami na liście, albo o jakiś inny losowo wybrany punkt niekolidujący z punktami na liście.

```
oto przedłużenie :1Pkt :p
jeśli brakKolizji? :p :1Pkt [wynik nap :p :1Pkt]
wynik przedłużenie :1Pkt losPkt
już
```

Musimy jeszcze zdefiniować funkcję logiczną `brakKolizji?`, której wynikiem jest prawda, w przypadku, gdy dany punkt `p` nie koliduje z żadnym punktem na danej liście `1Pkt`, albo – w przeciwnym przypadku – fałsz.



Rys. 2

```
oto brakKolizji? :pkt :lPkt
jeśli puste? :lPkt [wynik "prawda]
jeśli odległość :pkt pierw :lPkt < 3 [wynik "fałsz]
wynik brakKolizji? :pkt bp :lPkt
już
```

I tu wreszcie odwołujemy się do funkcji *odległość*. Punkt  $p_1$  koliduje z punktem  $p_2$ , gdy odległość  $p_1$  od  $p_2$  jest mniejsza niż 3. Ale nie chodzi w tym przypadku o zwykłą odległość euklidesową, tylko o odległość zdefiniowaną w następujący sposób.

```
oto odległość :p1 :p2
wynik (ilorazc abs ((pierw :p1) - (pierw :p2)) 20)
      + ilorazc abs ((ost :p1) - (ost :p2)) 20
już
```

Przyjmujemy, że dla danych dwóch punktów  $p_1$  i  $p_2$  ich odległość to suma ilorazów całkowitych różnic ich odpowiednich współrzędnych przez długość boku krzyżyka 20.

Rysunek 2 przedstawia koło o promieniu 3, tj. zbiór punktów, których odległość od punktu zaznaczonego kropką jest mniejsza niż 3.

Łatwo sprawdzić, że jest to właśnie to, o co nam chodzi. Jeśli umieścimy krzyżyk w zaznaczonym środku, to już w żadnym innym punkcie zacięniowanego obszaru nie można umieścić środka innego krzyżyka, natomiast każdy punkt poza tym obszarem jest akceptowalny.

Na koniec jeszcze jedna uwaga. Ścisłym matematycznym odpowiednikiem potocznego pojęcia odległości jest pojęcie metryki. Metryka to funkcja  $M$ , która każdej parze punktów  $p_1, p_2$  pewnej przestrzeni  $X$  przyporządkowuje nieujemną liczbę rzeczywistą  $M(p_1, p_2)$  spełniającą następujące warunki.

$$M(p_1, p_2) = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2$$

$$M(p_1, p_2) = M(p_2, p_1)$$

$$M(p_1, p_2) + M(p_2, p_3) \geq M(p_1, p_3)$$

Nasza odległość spełnia tylko jeden z trzech aksjomatów metryki, pomimo tego jest bardzo użyteczną miarą pozwalającą stwierdzać, czy dwa punkty są za blisko, czy wystarczająco daleko.

W aneksie do tego artykułu na stronie WWW *Delty* jest pełny zestaw procedur stanowiących kompletne rozwiązanie zadania i jeszcze kilku uwag odnoszących się do pytań, jakie może nasuwać przedstawiony powyżej problem i jego rozwiązanie, na przykład: skąd się wzięła w treści zadania magiczna liczba 18? I czy można ją zamienić na jakąś inną liczbę – powiedzmy, 25?



#### Rozwiązanie zadania M 1213.

Wykażemy, że taki podział nie jest możliwy. W tym celu wystarczy udowodnić, że liczby  $14 \cdot 14 = 196$  nie można przedstawić w postaci  $10a + 27b$ , gdzie  $a, b$  są liczbami całkowitymi nieujemnymi.

Z zależności  $196 = 10a + 27b$  wynika, że cyfrą jedności liczby  $27b$  jest 6. Jednak wtedy cyfra jedności liczby  $b$  wynosi 8. Stąd w szczególności otrzymujemy  $b \geq 8$ . Wobec tego  $196 \geq 27 \cdot b \geq 27 \cdot 8 = 216$ . Uzyskaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że żądany podział nie jest możliwy.



#### Rozwiązanie zadania M 1215.

Przypuśćmy, że  $3a \neq 2b$  i przyjmijmy  $n = |3a - 2b|$ . Wtedy  $n > 0$ , a więc liczby  $an + 2$  oraz  $bn + 3$  mają wspólny dzielnik  $d > 1$ . Zatem liczba  $d$  jest także dzielnikiem liczby

$$3(an + 2) - 2(bn + 3) = n(3a - 2b) = \pm n^2,$$

oraz liczby

$$(an + 2) - (bn + 3) = n(a - b) - 1.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, ponieważ liczby  $\pm n^2$  i  $n(a - b) - 1$  są względnie pierwsze: każdy dzielnik pierwszy  $p$  liczby  $n^2$  jest także dzielnikiem liczby  $n$ , a więc  $p$  nie może być dzielnikiem liczby  $n(a - b) - 1$ . Wobec tego  $3a = 2b$ .

## Informatyczny kącik olimpijski (11) – szukamy pola arealu



Weźmy macierz  $A_0$  równą

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i zdefiniujemy rekurencyjnie ciąg macierzy, z których każda następna powstaje zgodnie ze wzorem:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & -A_n \end{pmatrix}.$$

Zatem  $A_1$  jest wymiaru  $4 \times 4$ ,  $A_2 - 8 \times 8$  i tak dalej. Kontynuując dostawianie macierzy, w ten sposób otrzymamy nieskończoną macierz, którą oznaczamy  $A_\infty$ .

Zdefiniujemy *areal* jako spójny (w sensie sąsiedztwa wzdłuż boków, nie tylko w wierzchołkach), maksymalny (tj. niedający się powiększyć) zbiór pól macierzy o tych samych wartościach. W naszym zadaniu mamy dane współrzędne pola w macierzy  $A_\infty$  (wiersze i kolumny numerujemy od 0). Należy obliczyć rozmiar *arealu* zawierającego to pole (możliwe, że jest on nieskończony).

Głównym problemem w tym zadaniu jest wyobraźnia – najpierw należy wyobrazić sobie, jak właściwie wygląda macierz  $A_\infty$ , potem trzeba wyobrażać sobie kształty i rozmiary *arealów*.

„Wycięty” z  $A_\infty$  kwadrat o boku 2 (zawierający pole  $(0,0)$ ) jest równy macierzy  $A_0$ . Jeśli kwadrat będzie miał bok 4, to będzie równy  $A_1$ , itd. Co więcej, wszystkie pola  $(0,i)$  oraz  $(i,0)$  mają w  $A_\infty$  wartość  $+1$ .

Jak więc wyglądają *arealy*? Na pewno jest jeden *areal* nieskończony, zawierający punkt  $(0,0)$  – choćby dlatego, że należą do niego wszystkie pola  $(0,i)$  oraz  $(i,0)$ .

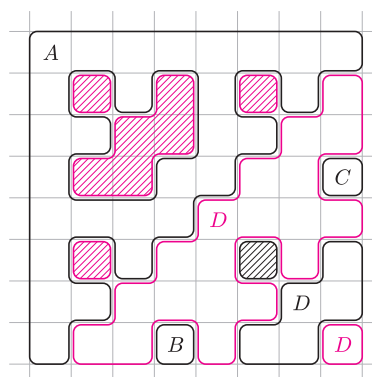
Weźmy teraz *areal*, do którego należy punkt  $(i,j)$ . Niech  $i, j < 2^n$ , dla pewnego  $n$ . Wtedy pole  $(i,j)$  należy do  $A_{n-1}$  (ponieważ wymiar tej macierzy to  $2^n \times 2^n$ ). Ale kiedy tworzymy  $A_n$ , to na wszystkich polach  $(2^n, x)$  i  $(x, 2^n)$ , dla  $x < 2^n$ , łąduje wartość 1. W takim razie albo cały poszukiwany *areal* zawiera się w  $A_{n-1}$ , albo łączy z tym samym *arealem*, do którego należy  $(0,0)$ . Jest więc tylko jeden *areal* nieskończony.

Mamy już pewien zbiór spostrzeżeń, spróbujmy więc podejść do rozwiązania zadania. Definicja  $A_\infty$  jest rekurencyjna – skorzystajmy więc z tej samej techniki. Niech polem, którego *arealu* poszukujemy, będzie pole  $(i,j)$ . Na początek znajdziemy takie  $n$ , że  $i, j < 2^n$ . Nasze obliczenia możemy zamknąć w macierzy  $A_{n-1}$ , ponieważ (zgodnie z poprzednimi stwierdzeniami) pole  $(i,j)$  będzie albo należeć do jednego nieskończonego *arealu*, albo jego *areal* będzie w całości zawarty w  $A_{n-1}$ .

Na początek sprawdzimy, do której ćwiartki macierzy  $A_{n-1}$  należy  $(i,j)$ , i dla tej ćwiartki wywołajmy poszukiwania rekurencyjnie (tj. weźmy  $i' = i \bmod 2^{n-1}$ ,  $j' = j \bmod 2^{n-1}$ ,  $n' = n - 1$ ).

Wyróżnijmy pewne rodzaje *arealów*, z którymi mamy do czynienia przy obsłudze podmacierzy kwadratowej w  $A_\infty$ . Niektóre z nich nie stykają się z krawędziami tej macierzy – takie *arealy* są „zamknięte” i nie zostaną już powiększone. Pozostałe możemy podzielić na cztery klasy:

- A** – *areal* zawierający lewy górny róg
- B** – *areal* zawierający pole(a) na „dolnej” krawędzi macierzy
- C** – *areal* zawierający pole(a) na „prawej” krawędzi macierzy
- D** – *areal* spełniający **B** oraz **C**.



Macierz  $A_2$ . W obszarach obwiedzionych linią czarną znajdują się wartości  $+1$ , a kolorową  $-1$ . Zakreskowane arealy są już zamknięte.

Wynikiem funkcji rekurencyjnej będzie wartość pola wraz z typem *arealu* w podmacierzy, do którego to pole należy. I to już nam wystarczy, bo z tych danych możemy odtworzyć wartość pola i typ jego *arealu* względem dwukrotnie większej macierzy. Na przykład, jeśli wywołanie rekurencyjne dla prawej-dolnej ćwiartki dało w wyniku wartość 1 w *areale* typu **A**, to względem większej macierzy jest to pole o wartości  $-1$  typu **D**. Podobnie trzeba obsłużyć inne przejścia.

W trzech przypadkach – gdy w lewej-górnej ćwiartce otrzymamy  $-1$  dowolnego typu, w prawej-górnej ćwiartce otrzymamy 1 typu **B**, lub w lewej-dolnej ćwiartce otrzymamy 1 typu **C** – możemy zakończyć dalsze obliczenia. Wówczas otrzymujemy *areal* zamknięty, który zawiera się całkowicie w aktualnej macierzy.

Tym razem ćwiczeniem dla Czytelnika pozostanie stwierdzenie, z ilu pól właściwie ten zamknięty *areal* się składa...

Filip WOLSKI

## 25-wyrazowy postęp arytmetyczny liczb pierwszych

Wkrótce po znalezieniu przez mnie pierwszego znanego 24-wyrazowego postępu arytmetycznego liczb pierwszych w styczniu 2007 r. Raanan Chermoni zaoferował mi pomoc w dalszych poszukiwaniach poprzez zaprzęgnięcie do pracy dostępnych mu komputerów.

Współpraca ta zaowocowała siedmioma dalszymi przykładami postępów 24-wyrazowych, a 17 maja 2008 r. komputery Raanana ustanowiły nowy rekord w postaci pierwszego znanego 25-wyrazowego postępu arytmetycznego złożonego z liczb pierwszych:

$$a_n = 6171054912832631 + 366384 \cdot 23\# \cdot n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots, 24,$$

gdzie  $23\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = 223092870$ .

Największy wyraz postępu to  $a_{24} = 8132758706802551$ , a każdy z wyrazów ma 16 cyfr.

Dane zebrane w czasie poszukiwań wskazują, że nie możemy mówić ani o szczęściu, ani o pechu. Postęp 25-wyrazowy pojawił się po z grubsza takim czasie, po jakim średnio należałoby go oczekiwać, biorąc pod uwagę wydajność programu i dostępną moc obliczeniową.

*Jarosław WRÓBLEWSKI*

Zainteresowanych śledzeniem rezultatów związanych z postęпами arytmetycznymi liczb pierwszych odsyłam na stronę

<http://hjem.get2net.dk/jka/math/aprecords.htm>

## Superstar uchwycona w kadrze

Utrwalenie bardzo rzadkiego zdarzenia wymaga fartu. Przypadki takie zdarzają się coraz częściej, bo coraz więcej potencjalnych obserwatorów ma odpowiednie wyposażenie, np. telefon komórkowy z wbudowaną kamerą.

Liczba podglądaczy kosmosu również stale rośnie, jednak obserwacji z 9. stycznia br. mogły dokonać tylko dwa satelitarne obserwatoria promieniowania rentgenowskiego Swift i Chandra. Szczęście mieli astronomowie używający pierwszego z nich. Udało im się, po raz pierwszy w historii, obserwować wybuch supernowej od samego początku [1]. Tego dnia wykonywana była obserwacja innej supernowej SN 2007uy znajdującej się w tej samej galaktyce NGC2770. O godzinie 13:32:49 UT, w odległości kątowej około 1,5' od SN 2007uy zarejestrowano początek bardzo jasnego błysku rentgenowskiego XRO 080109, którego intensywność narastała przez około 70 sekund, a następnie wykładniczo malała przez dalsze 300 sekund. Nie zarejestrowano ani jednoczesnego błysku gamma, ani jednoczesnego optycznego lub nadfioletowego odpowiednika. Znajdujący się na pokładzie Swifta teleskop UVOT (Ultraviolet/Optical Telescope) wykrył poświatę, ale ponad półtorej godziny później.

Niecałe dwie doby później, za pomocą ośmiometrowego teleskopu Gemini North, przeprowadzono pierwsze badania spektroskopowe odpowiednika. Uzyskano m.in. potwierdzenie, że supernowa wybuchła w galaktyce NGC2770. Ze względu na brak wodorowych linii spektralnych i słabe linie krzemowe jej typ określono jako Ibc. Otrzymała ona nazwę SN 2008D. Biorąc pod uwagę cały, niezwykle bogaty materiał obserwacyjny, uznano, że prekursorem wybuchu była gwiazda Wolfa-Rayeta otoczona gazem rozdmuchanym silnym stałym wiatrem gwiazdowym. Tego typu gwiazdy są również podejrzewane o powodowanie błysków gamma, ale w tym przypadku stwierdzono zwykły, sferycznie symetryczny, nierelatywistyczny wybuch. Pracę [1] kończy szacowanie częstości wykrywania podobnych wybuchów za pomocą urządzenia monitorującego całe niebo w promieniach rentgenowskich. Takich przypadków powinno być kilkaset rocznie. Ich wykrycie pozwoliłoby nie tylko na głębsze zrozumienie mechanizmu wybuchu supernowych, ale również ułatwiłoby wydobycie z tła sygnałów neutrinowych i fal grawitacyjnych generowanych przez te kataklizmy.

*Piotr ZALEWSKI*

[1] *An extremely luminous X-ray outburst at the birth of a supernova*, A.M. Soderberg i inni, *Nature* **453**(22/05/2008)469

# Wyznaczamy współczynnik lepkości cieczy



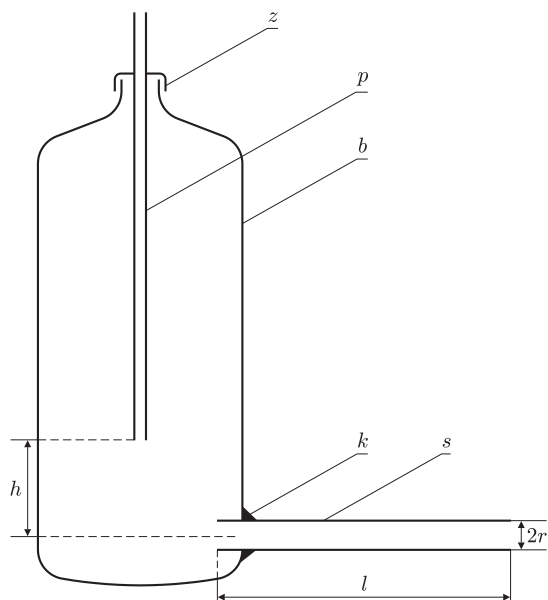
Stanisław BEDNAREK

Ruch dowolnego ciała w cieczy napotyka opór, który zależy od kształtu i wielkości ciała, jego prędkości oraz rodzaju cieczy. Parametrem charakteryzującym rodzaj cieczy w sposób ilościowy jest współczynnik lepkości. Współczynnik ten decyduje również, jaka objętość cieczy przepłynie przez rurkę o danym promieniu przy określonej różnicy ciśnień i w zadanym czasie. Żeby obliczyć tę objętość  $\Delta V$ , należy skorzystać ze wzoru Hageny–Poiseuille’a:

$$(1) \quad \Delta V = \frac{\pi r^4 \Delta p \Delta t}{8l\eta}.$$

We wzorze tym  $r$  oznacza promień wewnętrzny rurki,  $l$  jej długość,  $\Delta p$  – różnicę ciśnień na końcach rurki,  $\Delta t$  – czas przepływu, natomiast  $\eta$  jest współczynnikiem lepkości, który postaramy się dzisiaj wyznaczyć doświadczalnie.

Do przeprowadzenia doświadczenia potrzebne będą: przezroczysta butelka, np. od wody mineralnej o pojemności 1, 5 l z zakrętką, dwa długie kawałki rurki do picia napojów, woda, olej roślinny, linijka z podziałką milimetrową lub lepiej suwmiarka, szybkowiążący klej epoksydowy, np. Poxipol, niewielkie kartonowe pudełko od soku o pojemności 200 ml, stoper, plastelina.



Wygląd butelki Mariotte’a do wyznaczania współczynnika lepkości cieczy:  $b$  – przezroczysta butelka plastikowa,  $z$  – zakrętka,  $p$  – słomka (rurka) pionowa,  $s$  – słomka dolna,  $k$  – klej,  $h$  – wysokość dolnego końca słomki pionowej nad osią dolnej słomki,  $l$  – długość dolnej słomki,  $r$  – promień wewnętrzny tej słomki.

W plastikowej zakrętce od butelki wiercimy niewielki otwór. W ten otwór wkładamy słomkę do napojów. Otwór powinien być tej wielkości, żeby słomkę można było dość ciasno przesuwac w zakrętce. Następnie wiercimy niewielki otwór w bocznej ścianie w pobliżu dna butelki. W tym otworze umieszczamy drugą słomkę. Miejsce przejścia słomki przez otwór uszczelniamy szybkowiążącym klejem epoksydowym. Zwracamy przy tym uwagę na to, żeby słomka ustawiona była poziomo. Wylot poziomej słomki zamykamy niewielkim korkiem z plasteliny.

W ten sposób przygotowaliśmy tzw. butelkę Mariotte’a. Jej zaletą jest to, że przez pewien czas prędkość wypływu cieczy z butelki jest stała. Do butelki nalewamy prawie do pełna wody. Butelkę zamykamy zakrętką z przechodzącą przez nią słomką i ustawiamy na dowolnej podstawie tak, żeby można było podstawić naczynie na wodę pod wylot poziomej słomki. Gdy podstawimy to naczynie, wyjmujemy plastelinowy korek i obserwujemy wypływ wody. Prędkość tego wypływu jest stała tak długo, aż poziom wody w butelce opadnie poniżej dolnego końca pionowej słomki przechodzącej przez zakrętkę.

Można łatwo wykazać, że wartość tej prędkości wyraża się wzorem

$$(2) \quad v = \sqrt{2gh},$$

gdzie  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim. Prędkość wypływu wody możemy regulować przez przesunięcie pionowej słomki w zakrętce. Im wyżej będzie znajdował się koniec tej słomki, tym większa będzie prędkość wypływu, ale tym krócej prędkość ta będzie stała.

Wróćmy teraz do współczynnika lepkości. Wzór (1) przekształcamy do postaci

$$(3) \quad \eta = \frac{\pi r^4 \Delta p \Delta t}{8l \Delta V}.$$

Występująca we wzorze (3) różnica ciśnień  $\Delta p$  wyraża się wzorem

$$(4) \quad \Delta p = \rho gh,$$

w którym  $\rho$  oznacza gęstość cieczy.

Dla wody  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  
dla oleju  $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$ .

Po podstawieniu wzoru (4) do wzoru (3) otrzymujemy równanie

$$(5) \quad \eta = \frac{\pi r^4 \rho g h \Delta t}{8 l \Delta V},$$

z którego można obliczyć współczynnik lepkości  $\eta$ .

Z równania (5) wynika, że lepkość silnie zależy od wewnętrznego promienia dolnej słomki. Dlatego promień ten należy zmierzyć możliwie jak najdokładniej. Najlepiej byłoby użyć do tego celu suwmiarki. Wówczas dokładność pomiaru wynosiłaby co najmniej 0,1 mm. Jeżeli nie dysponujemy suwmiarką, to pozostaje nam kilkakrotny pomiar linijką i obliczenie średniej arytmetycznej.

Długość  $l$  dolnej słomki oraz wysokość  $h$  dolnego końca pionowej słomki nad osią dolnej słomki łatwo zmierzmy linijką. Pozostaje nam jeszcze do zmierzenia objętość  $\Delta V$  wody, która przepłynęła przez dolną słomkę i czas  $\Delta t$  jej przepływu. Do pomiaru objętości wykorzystamy kartonowe pudełko od soku, które pozbawiamy górnej pokrywy tak, żeby nie zmienić jego pojemności. Puste pudełko podstawiamy pod wylot dolnej słomki. Butelkę uprzednio napełniamy wodą. Wyjmujemy plastikowy korek z wylotu dolnej słomki. Stoperem mierzymy czas, w którym woda wypełni pudełko.

Po wykonaniu pomiarów wszystkich wielkości występujących we wzorze (5) podstawiamy ich wyniki do tego wzoru i obliczamy współczynnik lepkości  $\eta$ . Porównujemy obliczoną wartość z podanym w tablicach fizycznych wynikiem dla wody:  $\eta = 1,0021 \cdot 10^{-3}$  (Ns)/m<sup>2</sup> (w temperaturze 18°).

Po całkowitym opróżnieniu butelki z wody napełniamy ją olejem roślinnym i powtarzamy pomiar czasu wypływu dla określonej objętości oleju wypełniającego pudełko od soku. Ponownie podstawiamy wyniki do wzoru (5) i obliczamy współczynnik lepkości oleju. Porównujemy obliczoną wartość z wynikiem podanym w tablicach fizycznych dla oleju:  $\eta = 84 \cdot 10^{-3}$  (Ns)/m<sup>2</sup>. Na koniec zastanówmy się, jakie czynniki wpływają na rozbieżność lub zgodność uzyskanych przez nas rezultatów z wynikami podanymi w tablicach fizycznych.



## Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 721.** Kropla wody o masie  $m = 0,4$  g została umieszczona między dwiema płaskimi i równoległymi płytkami szklanymi, całkowicie zwilżalnymi wodą. Jaka jest siła przyciągania między tymi płytkami, jeśli znajdują się one w odległości  $l = 2 \cdot 10^{-4}$  cm? Współczynnik napięcia powierzchniowego wody wynosi  $\alpha = 0,073$  N/m.

Rozwiązanie na str. 3

**F 722.** Między dwiema płaskimi płytkami szklanymi umieszczono 8 gramów rtęci. Jaką siłę należy przyłożyć do górnej płytki, aby rtęć miała postać krążka jednakowej grubości o promieniu  $r = 10$  cm? Zakładamy, że rtęć w sposób doskonały nie zwilża szkła, tzn. kąt między brzegiem powierzchni rtęci a szklaną płytką jest równy zeru. Współczynnik napięcia powierzchniowego rtęci wynosi  $\alpha = 0,5$  N/m.

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Waldemar POMPE

**M 1213.** Rozstrzygnąć, czy kwadrat o wymiarach  $14 \times 14$  można rozciąć na prostokąty o wymiarach  $2 \times 5$ ,  $1 \times 10$  oraz  $3 \times 9$ .

Rozwiązanie na str. 17

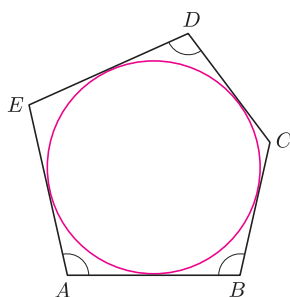
**M 1214.** Dany jest pięciokąt wypukły  $ABCDE$ , w którym  $BC = CD$ ,  $DE = EA$  oraz  $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle CDE$  (rysunek). Wykazać, że w pięciokąt  $ABCDE$  można wpisać okrąg.

Rozwiązanie na str. 11

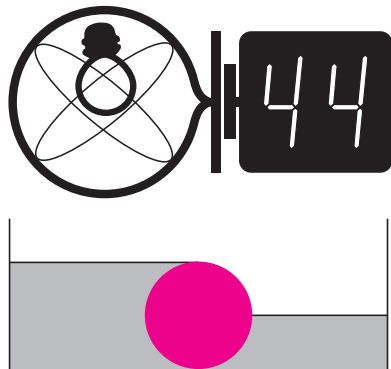
**M 1215.** Dane są liczby całkowite dodatnie  $a$ ,  $b$  o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $k$  liczby  $ak + 2$  oraz  $bk + 3$  nie są względnie pierwsze.

Udowodnić, że  $3a = 2b$ .

Rozwiązanie na str. 17



## Klub 44



Rys. 1

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2008

**456.** W płaskim naczyniu położono walec i nalano cieczy z jednej jego strony do wysokości równej średnicy walca, a innej cieczy nalano z drugiej strony do wysokości równej promieniowi walca (rys. 1). Przepływ cieczy wokół podstaw walca jest uniemożliwiony barierami, które nie przeszkadzają walcowi toczyć się w lewo lub w prawo. Jeśli gęstość walca jest równa  $\rho$ , w opisanej sytuacji pozostaje on w równowadze, a jego nacisk na dno naczynia jest równy połowie jego ciężaru, to ile wynosi gęstość cieczy z lewej strony walca, a ile – z prawej?



Rys. 2

**456.** Rozważmy przeciętą pionowo połówkę walca w naczyniu, do którego nalano z obu stron jednakowej cieczy (rys. 2). Łatwo wykazać, że siły działające wzdłuż osi poziomej na taką połówkę się równoważą (inaczej wypadkową można by zaprząć do napędu perpetuum mobile). Dlatego poziomą składową siły  $F_{lpoz}$  wywieranej na walec od lewej strony można obliczyć tak, jakby działała na ściankę pionową. Ponieważ ciśnienie zmienia się proporcjonalnie do głębokości, więc powierzchnię ścianki  $2rh$  pomnożymy przez ciśnienie w połowie głębokości, równe  $\rho_l gr$ :

$$F_{lpoz} = 2\rho_l gr^2 h,$$

gdzie  $r$  – promień walca,  $h$  – jego wysokość (tu długość),  $\rho_l$  – gęstość cieczy z lewej strony. Podobny argument zastosowany do ćwiartki walca pozwala obliczyć poziomą składową siły wywieranej na walec od prawej strony

$$F_{ppoz} = \frac{1}{2}\rho_p r^2 h.$$

Widzimy, że walec nie będzie się toczył w żadną stronę, jeśli  $\rho_p = 4\rho_l$ .

Aby obliczyć składową pionową  $F_{lpion}$  siły działającej z lewej strony, rozważmy walec zanurzony obustronnie w jednakowej cieczy. Siła wyporu równa jest ciężarowi wypartej cieczy, a z drugiej strony jest ona równa  $2F_{lpion}$  (z symetrii). Stąd

$$F_{lpion} = \frac{1}{2}\rho_l g \pi r^2 h.$$

Do wyznaczenia  $F_{ppion}$  należy analogicznie rozpatrzyć siłę wyporu działającą na dolną połówkę walca. Wynikiem jest

$$F_{ppion} = \frac{1}{4}\rho_p g \pi r^2 h$$

Skoro nacisk walca na dno naczynia jest równy połowie jego ciężaru  $P$ , to

$$\frac{1}{2}P = F_{lpion} + F_{ppion}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{2}\rho = \frac{1}{2}\rho_l + \frac{1}{4}\rho_p$$

Zatem  $\rho_l = (1/3)\rho$ ,  $\rho_p = (4/3)\rho$ .

**457.** Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu

$$(I + mr_1^2)\omega_1 = (I + mr_2^2)\omega_2$$

gdzie  $I$  jest momentem pędu Ziemi,  $m$  – łączną masą samochodów wraz z pasażerami i bagażem,  $r_1 = R \cos \varphi_1$  – przybliżoną odległością Polski od osi Ziemi ( $R$  – promień Ziemi,  $\varphi_1$  – szerokość geograficzna),  $r_2$  – analogiczną odległością dla Grecji,  $\omega_1$  i  $\omega_2$  – prędkościami kątowymi. Szukane wydłużenie doby jest dane wyrażeniem

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{2\pi}{\omega_2} - \frac{2\pi}{\omega_1} \approx T_1 \frac{m(r_2^2 - r_1^2)}{I} = T_1 \frac{mR^2(\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_1)}{I}.$$

Podstawiamy  $T_1 = 24 \text{ h} \approx 8,6 \cdot 10^4 \text{ s}$ ,  $m \approx 30 \text{ ton} = 3 \cdot 10^4 \text{ kg}$ ,  $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ ,  $\varphi_1 \approx 52^\circ$ ,  $\varphi_2 \approx 38^\circ$ ,  $I \approx 8 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  (wg tablic astronomicznych). Otrzymujemy  $\Delta T \approx 3 \cdot 10^{-16} \text{ s}$ . No cóż, jeśli to nie wystarcza, można zawrzeć taktyczny sojusz z Amerykanami i Chińczykami...

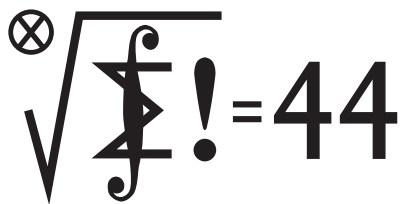
Czołówka ligi zadaniowej

#### Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
**448** ( $WT = 2,65$ ) i **449** ( $WT = 3,25$ )  
z numeru 12/2007

Konrad Kapcia	–	Częstochowa	41,36
Jerzy Witkowski	–	Radlin	34,65
Radosław Poleski	–	Kołoźrzeg	20,97
Krzysztof Magiera	–	Łosiów	14,85

## Klub 44



Czołówka ligi zadaniowej

### Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

551 (WT = 4,00) i 552 (WT = 1,19)  
z numeru 12/2007

Paweł Kubit	–	Kraków	43,21
Grzegorz Karpowicz	–	Wrocław	42,39
Jerzy Cisło	–	Wrocław	40,34
Tomasz Tkocz	–	Rybnik	38,96
Jerzy Witkowski	–	Radlin	36,89

Zadanie 551 okazało się „nieskończenie trudne” (WT = max). Całą winę za ten stan rzeczy ponosi redaktor ligi: treść zadania w numerze 12/2007 została podana z błędem – w jednym miejscu zamiast  $i$  miało być 1. W numerze 4/2007 treść „przypomniano” z tym samym błędem, po czym podano rozwiązanie *innego zadania* – tego zamierzonego.

Cóż możemy powiedzieć Czytelnikom oprócz solennego **Przepraszamy?**

Od dwóch Czytelników dostaliśmy listy z interesującymi komentarzami. Wrócimy do nich w rocznym omówieniu.

3.1°. Gdy istnieje kolumna różna od  $k$ , w której zajęte są dwa pola – w tym jedno w wierszu  $w$  – to (podobnie jak w przypadku 2°) te dwa pola wraz z polem  $p$  są trzema narożnikami prostokąta, w którego czwartym narożniku jest wolne pole (warunek (b)); zajmując to pole, gracz  $G'$  wygrywa.

3.2°. Gdy wszystkie zajęte pola wiersza  $w$  są jedynymi zajętymi polami w swoich kolumnach, wówczas korzystamy znów z warunku (a), zapewniającego, że przed ruchem  $G$  istniała jeszcze co najmniej jedna pusta kolumna. Gracz  $G'$  zajmuje pole w tej kolumnie, w wierszu  $w$ . Liczba pustych wierszy nie zmienia się, liczba pustych kolumn zmniejsza się o 2. Powstała sytuacja i tym razem jest strategiczna.

Gracz  $G'$  może więc uniknąć porażki, stale lokując gracza  $G$  w sytuacji strategicznej, dopóki nie zdarzy się przypadek 2° lub 3.1° – co musi nastąpić, bowiem gra jest skończona i prostokąt na planszy pojawić się musi.

Gdy  $n > 1$  jest liczbą nieparzystą, gracz rozpoczynający zajmuje na starcie dowolne pole i tworzy sytuację strategiczną, stawiając przeciwnika w roli gracza  $G$ . Stosując następnie opisane postępowanie, rozpoczynający zapewni sobie zwycięstwo. Gdy zaś  $n$  jest liczbą parzystą, to już sytuacja wyjściowa (pusta plansza) jest strategiczna i role się odwracają – rozpoczynający przegrywa.

560. Załóżmy, że  $m$  jest taką liczbą, dla której badana nierówność

$$(1) \quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{m+1} > \cos x$$

Redaguje Marcin E. KUCZMA

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2008

Przypominamy treść zadań:

559. Na wolnych polach kwadratowej planszy o rozmiarach  $n \times n$  dwaj gracze na przemian stawiają pionki (nierozróżnialne). Wygrywa gracz, po którego ruchu znajdują się cztery pionki na dowolnych czterech polach, będących narożnikami prostokąta o bokach równoległych do krawędzi planszy. Rozstrzygnąć (w zależności od  $n$ ), który z graczy ma strategię zwycięską – rozpoczynający czy jego przeciwnik.

560. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste  $m$ , dla których nierówność  $(\sin x)^m \operatorname{tg} x > x^{m+1}$  jest spełniona dla  $x \in (0; \pi/2)$ .

559. Gdy  $n = 1$ , nikt nie może wygrać. Dalej zakładamy, że  $n > 1$ . Rząd pionowy (kolumnę) lub poziomy (wiersz), którego wszystkie pola są wolne, nazwiemy *pustym*. Przypuśćmy, że w pewnym momencie niezakończony gry sytuacja na planszy spełnia następujące warunki:

- liczba pustych wierszy jest parzysta oraz liczba pustych kolumn jest parzysta;
- jeśli w pewnym wierszu [kolumnie] co najmniej dwa pola są zajęte, to są one jedynymi zajętymi polami w swoich kolumnach [wierszach].

Taką sytuację będziemy nazywać *strategiczną*.

Z warunku (b) wynika, że gracz  $G$ , do którego należy ruch, nie jest w stanie w tym ruchu wygrać. Zajmuje jakieś pole  $p$ . Wskażemy taktykę dla gracza  $G'$  (jego przeciwnika), rozważając trzy przypadki.

1°. Jeżeli pole  $p$  leży na przecięciu wiersza i kolumny, które do tego momentu były puste, to  $G'$  zajmuje pole leżące na przecięciu innego wiersza i innej kolumny, które nadal są puste (a istnieją, w myśl warunku (a)). Liczba pustych wierszy oraz liczba pustych kolumn zmniejszają się o 2. Nowa sytuacja jest znów strategiczna.

2°. Jeżeli pole  $p$  leży na przecięciu wiersza i kolumny, które przed ruchem gracza  $G$  były niepuste, to jest ono – po ruchu  $G$  – jednym z trzech zajętych narożników pewnego prostokąta; pole w czwartym narożniku jest wolne (co wynika z warunku (b)); zajmując teraz to pole, gracz  $G'$  wygrywa.

3°. Jeżeli pole  $p$  leży na przecięciu pustej (do tej pory) kolumny  $k$  i niepustego wiersza  $w$  (lub odwrotnie; przyjmijmy, że właśnie tak), to rozważamy podprzypadki:

zachodzi dla wszystkich  $x \in (0; \pi/2)$ . Wiadomo, że  $\sin x = x - (x^3/6) + o(x^3)$  przy  $x \rightarrow 0+$ . Jeśli więc  $d$  jest dowolną liczbą większą od 6, to dla  $x$  dodatnich, bliskich 0, mamy  $\sin x < x - (x^3/d)$ . Ponadto,  $\cos x > 1 - (x^2/2)$  dla  $x > 0$ . Zatem

$$1 - \frac{x^2}{2} < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{m+1} < \left(1 - \frac{x^2}{d}\right)^{m+1} = 1 - \frac{m+1}{d}x^2 + o(x^2)$$

przy  $x \rightarrow 0+$ . Stąd  $2(m+1) < d$  dla każdego  $d > 6$ , czyli  $2(m+1) \leq 6$ , czyli  $m \leq 2$ .

Wykażemy, że i na odwrót, jeśli  $m \leq 2$ , to nierówność (1) zachodzi dla  $x \in (0; \pi/2)$ . Gdy  $m \leq 2$ , to  $(\sin x/x)^{m+1} \geq (\sin x/x)^3$ ; wystarczy więc udowodnić nierówność (1) dla wykładnika  $m+1 = 3$ . Można ją wówczas przepisać w postaci

$$(2) \quad \frac{(\operatorname{tg} x)^3}{1 + (\operatorname{tg} x)^2} > x^3 \quad \text{dla } x \in (0; \pi/2)$$

– lub równoważnie:

$$(3) \quad \frac{t}{(1+t^2)^{1/3}} > \operatorname{arctg} t \quad \text{dla } t > 0.$$

Funkcja  $f(t) = t(1+t^2)^{-1/3} - \operatorname{arctg} t$ , określona dla  $t \geq 0$  i ciągła w punkcie 0, ma pochodną

$$f'(t) = (1+t^2)^{-4/3} \left(1 + \frac{t^2}{3} - (1+t^2)^{1/3}\right) > 0.$$

Zatem  $f(t) > 0$  dla  $t > 0$ , co dowodzi nierówności (3) i równoważnej jej nierówności (2).

Odpowiedź: Szukane liczby  $m$  to wszystkie liczby  $m \leq 2$ .



## Patrz w niebo

Pogląd, że czarne dziury powstają w wyniku zapaści jądra masywnej gwiazdy, obecnie wydaje się już dobrze ugruntowany. Zapaści tej towarzyszy zresztą eksplozja supernowej, której wszakże nie można mieć na zawołanie. Można natomiast pośrednio wnioskować o zajściu eksplozji w przeszłości, obserwując – uwaga! – ruch, i to nawet nie samej czarnej dziury (bo jej nie widać), lecz gwiazdy towarzyszącej czarnej dziurze. Takich układów podwójnych jest mało, mimo to dostarczyły pośredniego dowodu na katastroficzne powstawanie czarnych dziur, co obecnie wydaje się wyważaniem otwartych drzwi. A było to tak.

W połowie lat 1990. przebadano szczegółowo położone w Skorpionie źródło promieniowania rentgenowskiego i gamma (a więc zawierające najprawdopodobniej czarną dziurę) o numerze katalogowym GRO J1655-40. Stwierdzono, że porusza się ono ku Ziemi z wyjątkowo wielką prędkością 140 km/s. Zarazem położenie tego obiektu zostało precyzyjnie określone dwukrotnie za pomocą Teleskopu Hubble'a w odstępie sześciu lat, co dało wynik 5,2 milisekund łuku na rok. Te dane, wraz z oceną odległości obiektu, doprowadziły do wniosku, że porusza się on względem Galaktyki po silnie eliptycznej orbicie, co jest nietypowe dla obiektów należących do dysku Galaktyki. Jediną przyczyną zmiany oczekiwanej orbity kołowej na eliptyczną mógł być, według badaczy, wybuch supernowej. Być może wybuch był nie całkiem symetryczny, ale nie jest to ważne, gdyż nawet wybuch symetryczny, któremu przecież towarzyszy gwałtowny ubytek masy wybuchającej gwiazdy, może spowodować gwałtowne przesunięcie się środka masy układu, takie że zacznie się on poruszać po orbicie mocno odbiegającej od dotychczasowej. Warto tu zwrócić uwagę, że eksplozja nie prowadzi do rozerwania układu podwójnego. Najważniejsze, że teraz dane astrofizyczne (np. ukazujące w widmie zwykłego składnika linie pierwiastków możliwych do powstania tylko podczas wybuchu) oraz przedstawione tu dane kinematyczne składają się na spójny obraz układu podwójnego GRO J1655-40.

*Tomasz KWAST*

## Sierpień

W sierpniowe wieczory wysoko na niebie widać Herkulesa. Jego gwiazdy nie są specjalnie jasne, ale z pomocą mapki nieba bez trudu można go wyróżnić z tła. Jego północna część w Polsce nigdy nie zachodzi, a w części południowej znajduje się alfa gwiazdozbioru. Jest to w istocie układ trzech gwiazd. Jaśniejsza z nich jest zmienną półregularną, o rozmiarach niemal 700 razy przekraczających rozmiary Słońca, zatem jej średnica sięga – uwaga! – okrągło miliarda kilometrów. Drugi składnik jest też olbrzymem, a obiega go trzeci, bardzo słaby. Cały układ leży w odległości 210 pc. Ku Herkulesowi biegnie Słońce z całym układem planetarnym z prędkością 20 km/s względem okolicznych gwiazd.

Widoczność planet jest teraz wyjątkowo zła. Słońce jest we Lwie i w tym samym gwiazdozbiornie są też Wenus, Mars i Saturn. Widać jedynie Jowisza, który jest akurat w Strzelcu, a więc wieczorem jest dość nisko nad południowym horyzontem. Mamy za to Drogę Mleczną przecinającą niebo od północy na południe, a w niej mnóstwo gromad otwartych, które można podziwiać nawet przez lornetkę. Now Księżyca będzie w sierpniu dwukrotnie: 1 i 30 VIII, pełnia 16 VIII. Podczas pierwszego nowiu (1 VIII) nastąpi (przed południem) całkowite zaćmienie Słońca, co zobaczą mieszkańcy północnej części Ameryki Północnej, północnej Europy i północnej Azji. Podczas pełni (16 VIII) nastąpi wieczorem częściowe zaćmienie Księżyca, co jest zjawiskiem mało widowiskowym. Księżyc ponadto 10 VIII zakryje Antaresa, co będzie widać w centrum Ameryki Południowej i na południowym krańcu Afryki. Gdyby nie skupienie się planet przy Słońcu, to 13 VIII można by widzieć zbliżenie Wenus i Saturna na ułamek stopnia. Około 12 VIII można spodziewać się Perseidów, jednego z najobfitszych rojów meteorów.

*T. K.*

## Całkowanie po tuszy *Jerzy TYSZKIEWICZ*

Chcę dziś napisać o pewnej odmianie trójwymiarowej całki Riemanna, którą jest całka po tuszy. Wypadałoby najpierw zdefiniować najważniejsze pojęcia, które pojawiają się w artykule. Pochodzą one z Rozporządzenia Rady EWG Nr 3220/84 z 13 listopada 1984 r., z późniejszymi zmianami.

Klasy mięsności tusz wieprzowych w klasyfikacji EUROP:

S powyżej 60% mięsności  
E 55–60% mięsności  
U 50–55% mięsności  
R 45–50% mięsności  
O 40–45% mięsności  
P poniżej 40% mięsności

Wiadomość w portalu <http://ceny.rolnicy.com>, wtorek, 16 października 2007:

W ostatnim czasie nadal tanieją tuczniki. Obecnie płaci się średnio 3 złote 30 groszy za kilogram żywca. Dodatkowo dociera do Polski import półtuszy.  
1. tuczniki wg wagi bitej ciepłej zł/kg  
S 4,90–5,30  
E 4,75–5,00  
U 4,55–4,75  
R 4,30–4,35  
O 3,80–4,05  
P 3,40–3,85

*Tusza wieprzowa* oznacza ciało ubitej świni, wykrwawione i wypatroszone, całe lub podzielone wzdłuż linii środkowej, bez języka, szczeciny, racic, genitaliów, tłuszczu okołonerkowego, nerek i przepony.

*Zawartość chudego mięsa w tuszy wieprzowej* to iloraz całkowitej masy czerwonych mięśni poprzecznie prążkowanych, pod warunkiem, że można je oddzielać nożem, do wagi tuszy.

Problemem, którego rozwiązaniu zamierzamy się przyjrzeć, jest kwestia obliczania zawartości chudego mięsa w tuszach, co ma znaczny wpływ na ich wartość rynkową. Jest to związane z klasyfikacją EUROP, również wprowadzoną we wspomnianym Rozporządzeniu – dane na marginesie.

Zdefiniujmy dwie funkcje określone na danej tuszy wieprzowej:

$$m(x) = \begin{cases} \text{ciężar właściwy tuszy w punkcie } x, & \text{gdy punkt } x \text{ jest położony w mięsie chudym} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

i

$$c(x) = \text{ciężar właściwy tuszy w punkcie } x.$$

Mięsność tuszy wyrażona jest wówczas stosunkiem

$$\frac{\iiint_{\text{tusza}} m \, dV}{\iiint_{\text{tusza}} c \, dV},$$

którego postać uzasadnia nasze zainteresowanie całkowaniem po tuszy.

Interesujące jest tylko obliczanie całki w liczniku, bo tę z mianownika wyznacza się, ważąc tuszę, co jest dużo prostsze niż odwołanie się wprost do definicji. Jeśli chodzi o tę z licznika, to matematycznie problem jej obliczenia ma oczywiste rozwiązanie: należy, zgodnie z przepisem definicji Riemanna, tuszę dzielić na coraz mniejsze kawałki, rozsortowując je na chude mięso i resztę. Dla każdego podziału należy obliczyć sumę całkową Darboux, która, jak łatwo się przekonać, jest równa dokładnie wadze kawałków zakwalifikowanych jako mięso chude. W zasadzie powinniśmy robić tak w nieskończoność, ale racjonalny prawodawca zwolnił nas z tego obowiązku w definicji chudego mięsa, postanawiając zaliczyć do niego tylko te kawałki, które dadzą się oddzielić nożem od innych składników tuszy. Zatem po uzyskaniu kawałków o dostatecznie małych rozmiarach liniowych (np. 1 mm) możemy być pewni, że waga wyciętego dotychczas chudego mięsa jest dokładnie tym, czego szukaliśmy i całka została obliczona.

Tu jednak miłośnicy golonki zakrzykną ze zgrozą, bo po takiej procedurze oceny mięsności tusz w punktach skupu ich ulubione danie odeszłoby w niepamięć, wyparte całkowicie przez kotlety mielone.

W obronie tradycji kuchni europejskiej należało więc podjąć kroki w celu znalezienia nieniszczących metod całkowania po tuszy, choćby były one tylko przybliżone. Aktualnie dopuszczone do użytku jest kilka takich metod, opartych na wykonywaniu od kilku do kilkudziesięciu pomiarów za pomocą albo ultrasonografu, albo specjalnej długiej igły ze skanerem rejestrującym barwę otoczenia na końcu. Średnia ważona wyników tych pomiarów jest oficjalnym wynikiem całkowania. Wagi w stosownym wzorze są urzędowo zatwierdzane w każdym kraju członkowskim UE zgodnie ze specjalnymi procedurami, a państwo zawiadamia Komisję Wspólnot Europejskich w drodze protokołu o postaci stosowanego wzoru i jego uzasadnieniu.

W ten to sposób problem całkowania (po tuszy) znalazł swoje miejsce w przepisach prawa, a związane z nim wzory matematyczne wymagają przeprowadzania procedur prawnych dla swego obowiązywania. O czym pewnie Euklidesowi się nie śniło.

