







SPIS TREŚCI NUMERU 4 (407)

Laboratorium Tatrzańskie <i>Grzegorz Derfel</i>	str. 1
Powierzchnia Boya <i>Zdzisław Pogoda</i>	str. 4
O prezentach i dyskrecji <i>Tomasz Konrad Kujawa</i>	str. 6
Następnik <i>Michał Adamaszek</i>	str. 7
Błękitni maruderzy <i>Marcin Kiraga</i>	str. 8
 Zadania	str.10
 Zadania od mmm	str.11
 motyw  O zmiennych losach losowości w informatyce <i>Andrzej Walat</i>	str.13
Równanie Bellmana <i>Wojciech Kryński</i>	str.14
Wykorzystanie inwersji względem okręgu w dowodzie twierdzenia o $n + 2$ okręgach stycznych <i>Mateusz Pluta</i>	str.16
 Budujemy generator samodławny <i>Stanisław Bednarek</i>	str.18
Aktualności	str.20
Informatyczny kącik olimpijski (7) – gra Penneya jeszcze inaczej <i>Filip Wolski</i>	str.21
Klub 44	str.22
Patrz w niebo	str.24
Kwiecień	str.24
 Prawo arcusa sinusa <i>Rafał Sztencel</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Adamaszek, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Andrzej Walat, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i rysunki: Emilia Bojańczyk.
Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-402.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)
internet: www.amos.waw.pl , e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2008 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2008 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 0-804-200-600

Cena prenumeraty w 2008 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5 każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

W następnym numerze:
Mrówki w komputerze

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł



Otoczający świat nieustannie demonstruje nieskończoną złożoność zjawisk fizycznych. Dla zrozumienia podstaw tych zjawisk nauki przyrodnicze, a przede wszystkim fizyka, budują uproszczone modele zajmujące się wybranymi aspektami rzeczywistości. Dla ich sprawdzenia przeprowadza się specjalnie zaaranżowane doświadczenia w sztucznych warunkach stworzonych w laboratoriach.

W warunkach naturalnych spotykanych na co dzień w przyrodzie także można czasem dostrzec efekty, które swą prostotą wyróżniają się w natłoku złożonych procesów i potwierdzają prawa ustalone wcześniej w warunkach laboratoryjnych. W tym artykule opisane są fizyczne podstawy kilku takich zjawisk zaobserwowanych w szczególnym laboratorium przyrody – Laboratorium Tatrzańskim.

*Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

Gorący potok

Zdarza się, że po dłuższych opadach, gdy lasy ociekają wodą, nad taflą potoku kłębi się „para”. Odnosi się nieodparte wrażenie, że woda w potoku musi być gorąca, gdyż ten obłok przypomina „parę” widoczną nad dzióbkiem czajnika, w którym gotuje się woda.

Słowo „para” użyte jest tu w znaczeniu potocznym. Fizyczny termin „para” oznacza lotny stan materii i jest synonimem terminu „gaz”. Para wodna, czyli woda w stanie lotnym, jest niewidoczna, podobnie jak większość gazów. To, co widzimy nad czajnikiem lub opisywanym potokiem, to ciekła woda w postaci drobnych kropelek. Aby mogła ona powstać z pary wodnej zawartej w powietrzu, para ta musi osiągnąć stan nasycenia. Oznacza to, że jej gęstość w danej temperaturze jest maksymalna, tj. masa wody w stanie lotnym jest w danej objętości największa z możliwych. (Stan ten charakteryzuje parę pozostającą w równowadze dynamicznej ze swoją cieczą: ilość cząsteczek opuszczających ciecz w jednostce czasu jest równa ilości cząsteczek powracających z pary do cieczy.) Jeśli gęstość pary jest mniejsza od maksymalnej, nazywamy ją nienasyconą. Jeśli masa wody zawarta w danej objętości przewyższa masę nasycającą tę objętość, to część wody pozostaje ciekła, a para z nią współistniejąca jest nasycona.

Gęstość pary nasyconej, ρ_{nas} , rośnie z temperaturą. A więc para o danej gęstości ρ_1 , która była nienasycona w wysokiej temperaturze T_2 , po ochłodzeniu może stać się parą nasyconą, gdy osiągnie temperaturę T_1 , w której jej gęstość okaże się równa $\rho_{nas}(T_1)$. Przy dalszym ochładzaniu jeszcze mniej pary wystarcza do nasycenia danej objętości, a więc jej nadmiar musi się skroplić.

Właśnie w ten sposób powstaje mleczny opar nad potokiem. Po deszczach para w powietrzu ma dużą gęstość ρ_1 . Nad potokiem temperatura maleje ze spadkiem wysokości, ponieważ woda w potoku oziębia powietrze w pobliżu powierzchni. Na pewnej wysokości h_1 panuje taka temperatura T_1 , w której para staje się nasycona, $\rho_1 = \rho_{nas}(T_1)$. Poniżej h_1 następuje skroplenie części pary, czyli powstanie mgiełki.

Przemiana izotermiczna w butelce

Konieczność uzupełniania płynów w organizmie podczas górskiej wycieczki jest oczywista. Nabieramy więc wody ze źródła w dolinie do plastikowej butelki. Szczelnie zakręcona butelka oprócz wody zawiera nieco powietrza. Kiedy wyjmujemy ją z plecaka tysiąc lub półtora tysiąca metrów wyżej, stwierdzamy, że butelka jest twarda, jakby silnie napompowana. Przy otwieraniu słychać syk wychodzącego z niej powietrza. Jest to widomy przejaw różnicy ciśnień atmosferycznych panujących na różnych wysokościach nad poziomem morza.

Weźmy pod uwagę powietrze o ustalonej masie m zamknięte w butelce. Jego przemiany można opisać prawem Clapeyrona dla gazu doskonałego: $pV = (m/\mu)RT$ (gdzie μ jest masą cząsteczkową; dla powietrza $\mu = 29$). Przyjmijmy dla uproszczenia, że temperatura powietrza w butelce nie zmienia się, co uprawnia nas do uznania, iż przemiana, jakiej ulega powietrze nad wodą, jest przemianą izotermiczną opisaną prawem Boyle’a i Mariotte’a: $pV = \text{const}$. W dolinie stan tego powietrza określony jest ciśnieniem atmosferycznym tam panującym, p_1 , objętością V_1 i temperaturą T . Na szczycie panuje ciśnienie $p_2 < p_1$. (Ciśnienie powietrza maleje z wysokością h . Przy stałej temperaturze zależność tę podaje wzór barometryczny: $p_2 = p_1 \exp(-\mu gh/RT)$. Dla niewielkich h można użyć przybliżenia $p_2 = p_1 - \rho gh$, gdzie ρ jest gęstością powietrza. Przy różnicach poziomów występujących w Tatrach, ρgh nie przekracza około 200 hPa.) Powietrze w zamkniętej butelce zwiększa odrobinę swoją objętość, tak jak na to pozwala ograniczona sprężystość plastikowej butelki, a jego ciśnienie nieco spada. Jest ono równoważone przez naprężenie ścianek i ciśnienie zewnętrzne. Po otwarciu butelki powietrze zyskuje ciśnienie równe zewnętrznemu, p_2 , a jego objętość znacząco rośnie do wartości $V_2 = p_1 V_1 / (p_1 - \rho gh)$. Jego część wylatuje z butelki, czemu towarzyszy syczący dźwięk.

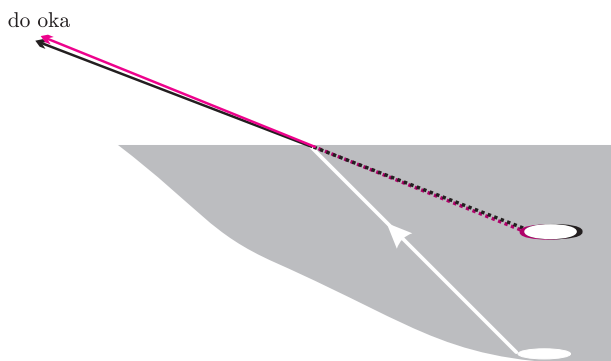
Ugasiwszy pragnienie, zamykamy na szczycie pustą butelkę. Po zejściu na dół stwierdzamy, że jest paskudnie wgnieciona. To również wynik przemiany izotermicznej. Powietrze, które wypełniło butelkę

na szczycie, miało ciśnienie p_2 i objętość V_3 , dlatego na dole pod ciśnieniem p_1 przyjmuje mniejszą objętość V_4 , przy czym $p_2V_3 = p_1V_4$. Jest to możliwe, ponieważ butelka nie jest sztywna, lecz podatna na zgniecenie.

Tęczowe pieniądze

Rozpanoszył się drażniący zwyczaj zaśmiecania toni górskich stawów monetami. Całe ich lawice widoczne są z brzegu. Można zauważyć, że nie są one po prostu srebrzyste, lecz tęczowe. Widać, że jeden skrawek monety jest czerwony, a przeciwległy – niebieski.

Oczywiście, przyczyną zabarwienia jest dyspersja, czyli zależność współczynnika załamania światła od długości fali, a więc od barwy. W wodzie dla światła czerwonego mamy $n_{cz} = 1,3311$, a dla niebieskiego $n_{nieb} = 1,3443$ (przy 15°C). Światło dochodzące z różnych kierunków do monety odbija się także w różnych kierunkach. Rozważmy promienie wychodzące z wybranego punktu i dochodzące do oka obserwatora stojącego na brzegu. Doznają one załamania na powierzchni jeziora. Obserwator odnosi wrażenie, że przedmiot znajduje się na przedłużeniu promieni załamanych. Jezioro wydaje się płytsze, niż jest w rzeczywistości. Wskutek dyspersji promienie światła różnych barw przebiegają po nieco różniących się drogach i do oka wpadają z nieco różniących się kierunków. Tworzą one różnie zabarwione obrazy monet, które wydają się leżeć w różnych miejscach. Różnica kątów, pod jakimi widać obrazy o skrajnych barwach, zależy od głębokości, na jakiej spoczywa moneta i od odległości od obserwatora. Zwykle jest ona niewielka – mniejsza od rozmiarów kątowych monety, wskutek czego obrazy częściowo się nakładają. Środek widocznej monety jest biały, a jej przeciwległe krawędzie pozostają kolorowe – na bliższej dominuje barwa czerwona, na dalszej niebieska. Zjawisko to w uproszczeniu przedstawione jest na rysunku.



Dokładniejsza analiza przekonuje, że nawet jeśli powierzchnia wody jest idealnie płaska, to załamujemy promienie tak, że ich przedłużenia nie przecinają się w jednym punkcie. Tak więc nie istnieje punkt, w którym powstałby obraz pozorny doskonale odwzorowujący punkt na monecie. Monety (jak również dno, pstrągi i wszelkie przedmioty zanurzone) wydają się nieco nieostre.

Głośny potok

Wspinając się po zboczach doliny, której dnem płynie potok, słyszymy jego szum. Oczywiście, im dalej od niego się znajdujemy, tym słabszy dźwięk do nas dochodzi. Jednak można odnieść wrażenie, że spadek jego natężenia następuje powoli, wolniej niż w przypadku źródeł dźwięku znanych z codziennego doświadczenia, które mają zwykle ograniczone rozmiary (głośnik, silnik samochodu).

Szumiący po kamieniach potok jest rozciągląym źródłem dźwięku, w przeciwieństwie do praktycznie punktowego, jakim byłby odległy wodospad. W tym ostatnim przypadku natężenie byłoby odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości. Natomiast potok można rozpatrywać – w grubym przybliżeniu – jak źródło liniowe o nieskończonej długości. Czoło fali dźwiękowej ma wtedy kształt walca. Niech odcinek źródła o długości h emituje w czasie t energię E . W odległości r_1 energia drgań powietrza, przypadająca na jednostkę powierzchni, wynosi więc $I_1 = E/2\pi r_1 h t$. Jeśli pominiemy straty związane z tarcieniem, to w odległości $r_2 > r_1$ energia E przypada na większą powierzchnię i $I_2 = E/2\pi r_2 h t$. A więc natężenie dźwięku jest odwrotnie proporcjonalne do odległości, a nie do jej kwadratu, spada więc wolniej.

Srebrzyste brzoskwinie

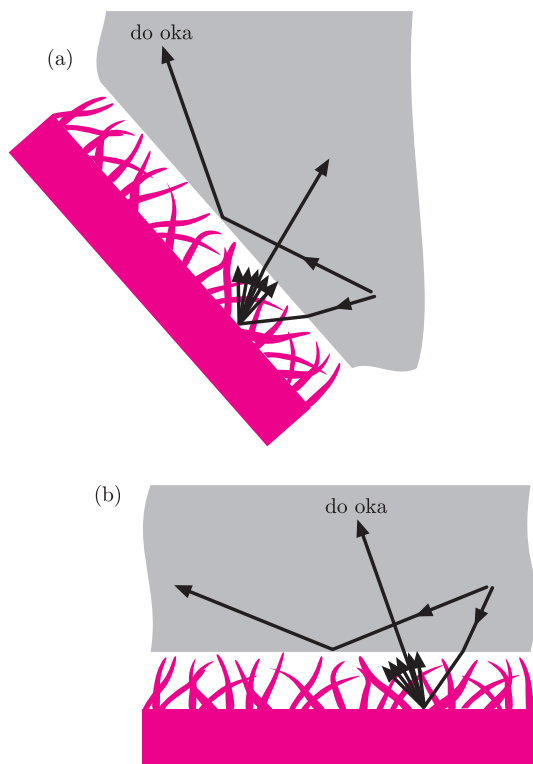
Płuczemy w potoku kupione na straganie brzoskwinie. Widać wtedy, że w niektórych miejscach, tam gdzie powierzchnia owoców jest widziana z ukosa, skórka lśni srebrzyście. Wrażenie to wywołane jest odbijaniem się światła dochodzącego z dołu i z boku. Jeśli te same miejsca oglądane są z góry, widoczny jest naturalny kolor skórki.

Lustrzany połysk jest wynikiem zjawiska całkowitego wewnętrznego odbicia światła. Jeśli światło pada na granicę dwóch ośrodków (o współczynnikach załamania n_1 i n_2), to jego część odbija się, a reszta, załamując się, przechodzi do drugiego ośrodka. Jeśli ośrodek, z którego światło pada, ma większy współczynnik załamania, $n_1 > n_2$, to kąt załamania jest większy od kąta padania. Nie może jednak przewyższyć wartości 90° , która jest osiągnięta przy pewnym granicznym kącie padania α_{gr} , takim, że $\sin \alpha_{gr} = n_2/n_1$. Jeśli kąt padania przekracza α_{gr} , to światło nie przechodzi do drugiego ośrodka, lecz w całości ulega odbiciu w pierwszym ośrodku.

Brzoskwinie pokryte są delikatnym meshkiem, którego woda nie zwilża. Między włoskami utrzymuje się cienka warstewka powietrza przylegająca do powierzchni owocu. Całkowite wewnętrzne odbicie zachodzi na granicy tego powietrza ($n_2 = 1$) i wody ($n_1 = 1,33$). Ulega mu światło padające pod dostatecznie dużymi kątami, tj. takie, które dochodzi do oka z miejsc widzianych z ukosa.

Z miejsc tych do oka docierają promienie, które doznały całkowitego wewnętrznego odbicia i nie oświetliły

powierzchni brzoskwini. Niosą one obraz otoczenia, co sprawia, że brzoskwinia wydaje się mieć lustrzaną powierzchnię. W tych samych miejscach promienie, które dotarły do skórki i zostały przez nią rozproszone, nie trafiają do oka, ponieważ ich kierunki tworzą z normalną kąty mniejsze niż α_{gr} .



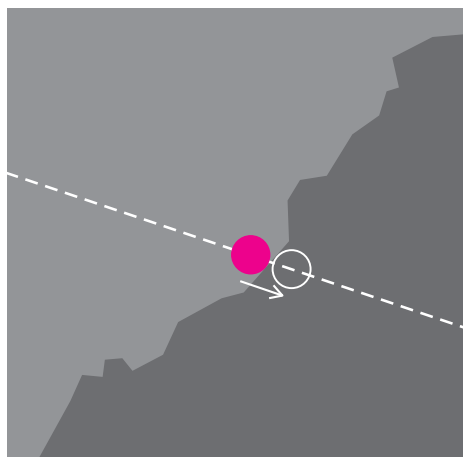
Z miejsc obserwowanych z góry dochodzi do oka światło, którego pierwotny kierunek padania umożliwił załamanie i dotarcie do powierzchni, a więc takie, które oświetliło skórki i rozproszyło się na niej. Światło rozproszone przechodzi do wody i dalej do obserwatora, niosąc widok naturalnej barwy owocu. Światło doznające zwykłego odbicia od granicy woda-powietrze (które do skórki nie dociera) ma bardzo niewielkie natężenie i jest niewidoczne. Promienie ulegające całkowitemu odbiciu mają inny kierunek i nie wpadają do oka, a więc nie widzimy srebrzystego lśnienia.

Zakrycie planety przez górę

Gdy spoglądamy na rozgwieżdżone niebo gołym okiem, to na podstawie samego wyglądu nie potrafimy odróżnić planet od jasnych gwiazd. W obu przypadkach widzimy bowiem jasne punkty. Już amatorski teleskop lub dobra lornetka ukazują różnicę: planety zyskują postać tarczki, podczas gdy gwiazdy pozostają punktami.

W górskich kotlinach otoczeni wyniosłymi szczytami mamy sposobność przekonania się o tej różnicy między planetą a gwiazdą, nie stosując żadnych przyrządów optycznych. Zdarza się bowiem, że w pobliżu grani rysującej się na tle wieczornego nieba widoczna jest planeta (najprawdopodobniej jest to Jowisz, Saturn lub Mars) i jakieś gwiazdy. Jeśli ustawimy się odpowiednio i zastygniemy nieruchomo, możemy być świadkami „zakrycia” gwiazdy lub planety przez górski grzbiet.

Łatwo wtedy przekonać się, że zakrycie planety trwa zauważalny czas, a zakrycie gwiazdy jest natychmiastowe. Najwyraźniejszy efekt zaobserwujemy w przypadku Jowisza, którego minimalna średnica kątowa wynosi około $0,5'$. Ziemia obraca się o taki kąt w ciągu około 2 sekund i co najmniej tyle czasu Jowisz chowa się za górę. Czas ten może być dłuższy, jeśli grani nie jest prostopadła do linii, wzdłuż której pozornie przesuwa się planeta po sklepieniu niebieskim.



W zasadzie taką obserwację można by przeprowadzić także w mieście, gdzie nie brak zasłaniających niebo budynków. Ponieważ jednak takie obiekty znajdują się stosunkowo blisko, niezbędne jest bardzo dokładne unieruchomienie głowy, co może nastęrczać trudności. W przypadku odległej grani drobne drgnięcia głowy nie wykluczają zaobserwowania opisywanego efektu.

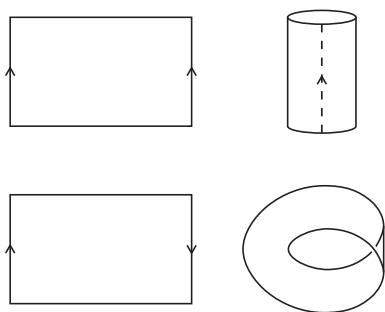
Z trzmielom i bez trzmielom

Przysiadamy na chwilę na łące u wylotu doliny. Owady rozbudzone porannym słońcem skwapliwie krzątają się wokół bogatych ziołorośli. Kosmaty trzmiel co chwila przysiąda na żółtych kwiatach. Niewysoka łodyga ugina się pod jego ciężarem i wykonuje kilka powolnych drgań.

Zainteresowanie trzmielom tym kwiatem trwa krótko i owad odlatuje. Uwolniona roślina podnosi się i zanim zniuruchomieje, drga niemal dwa razy szybciej niż przedtem. Różnica częstości drgań w obu przypadkach jest uderzająca.

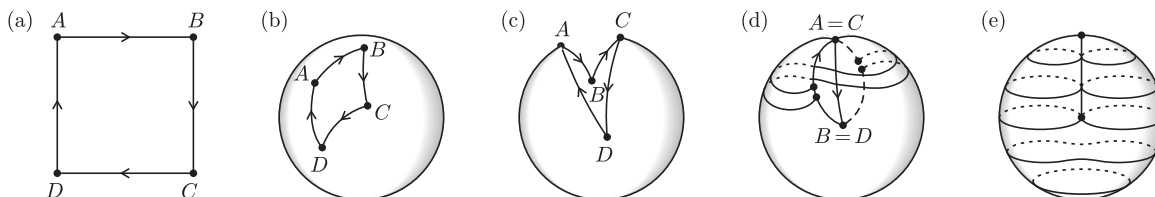
Widzimy tu przykład zależności częstości drgań układu drgającego od jego masy. Modelem kwiatu nęcącego owada jest obciążnik o masie m zawieszony na sprężynie o współczynniku sprężystości k (łodyżka wykazuje pewną sprężystość, jeśli nie jest nadmiernie zgięta). Częstość kołowa drgań wynosi wtedy $\omega_1 = \sqrt{k/m}$. Jeśli masa obciążnika wzrasta o M , to częstość maleje: $\omega_2 = \sqrt{k/(m + M)}$. Efekt jest wyraźnie widoczny, ponieważ masa trzmielom jest większa niż masa główki kwiatu.

Na zakończenie zauważmy, że większość z opisanych tu zjawisk można z powodzeniem zaobserwować w innych okolicznościach niż wycieczka w Tatry, ale przecież warto łączyć przyjemności...



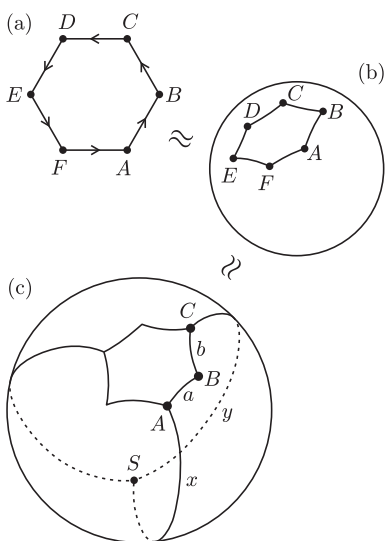
Rys. 1

Sklejanie kojarzy się z zabawą. Tak można robić nie tylko zabawki z papieru lub kartonu, ale także wykonywać modele powierzchni. Operację sklejania, czyli utożsamiania różnych punktów, wykorzystuje się bardzo często w topologii do rozmaitych konstrukcji. Sklejając odpowiednio przeciwległe boki prostokąta, można otrzymać walec (dokładniej powierzchnię boczną walca) albo wstęgę Möbiusa (rys. 1). Oznaczone strzałkami boki sklejamy tak, żeby strzałki się pokrywały. Czyli w drugim przypadku musimy obrócić jedną ze sklejanych krawędzi o 180 stopni, aby strzałki przy sklejaniu miały ten sam zwrot. Gdy utożsamimy w ten sposób pozostałe dwa boki prostokąta, powstanie torus, butelka Kleina, względnie powierzchnia nazwana czapą krzyżową (rys. 2). W ostatnim przypadku opis formalny nie jest trudny, gorzej z intuicją. Nie da się tej powierzchni, podobnie jak butelki Kleina, umieścić w przestrzeni trójwymiarowej bez samoprzecięć. Spróbujmy się przyjrzeć bliżej tej konstrukcji.



Rys. 2

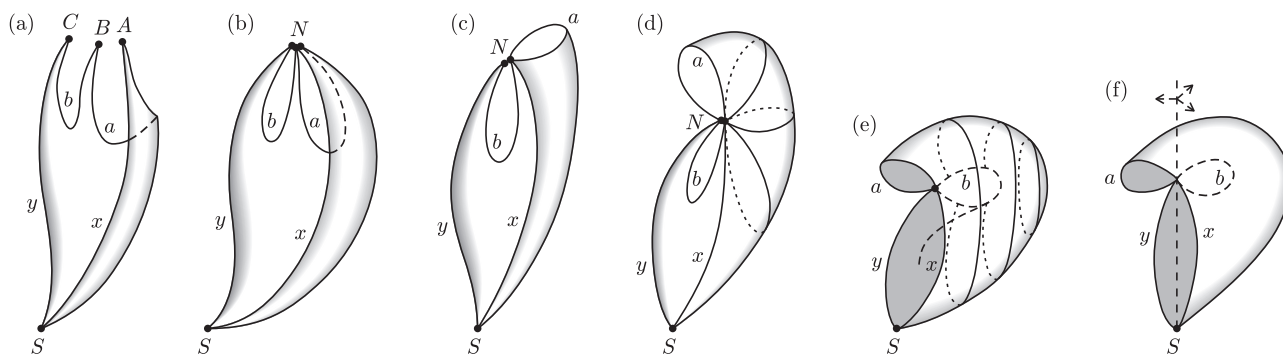
Jeśli wyobrazimy sobie, że powierzchnia kwadratu zrobiona jest z takiej specjalnej „topologicznej”, elastycznej gumy, to, postępując ostrożnie, krok po kroku możemy śledzić proces sklejania. Najpierw deformujemy powierzchnię kwadratu tak, by otrzymać „kwadratową” dziurę w sferze (rys. 2a-c). Następnie sklejamy parę przeciwległych boków AB i CD zgodnie zorientowanych (rys. 2d). Przy sklejaniu drugiej pary boków nie obejdzie się bez przenikania powierzchni właśnie wzdłuż już sklejonych. Opisana konstrukcja (rys. 2e) przedstawia czapę krzyżową (gdyż fragmenty powierzchni się krzyżują), która jest jednym z wielu topologicznych modeli tworzącego płaszczyznę rzutową (będzie ona dokładniej opisana nieco później). Czapę krzyżową jest obiektem raczej znanym. Rzadziej wspomina się o innym „obliczu” płaszczyzny rzutowej – powierzchni Boya.



Rys. 3

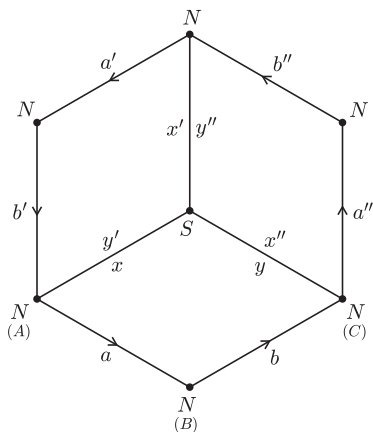
Tym razem sklejając będziemy przeciwległe boki sześciokąta $ABCDEF$ przeciwnie zorientowane (rys. 3a). Rozpoczynamy, podobnie jak poprzednio, od deformacji powierzchni sześciokąta do sfery z sześciokątną dziurą (rys. 3b). Rozkładamy następnie tę dziurawą sferę na trzy przystające części, na brzegu których są dwa sąsiednie boki sześciokąta (rys. 3c). Każdą z części poddamy dalszej obróbce, by później złożyć je w całość. Skoncentrujemy się na jednym fragmencie ograniczonym łukami $SA = x$, $AB = a$, $BC = b$ i $CS = y$. Z pozostałymi kawałkami postąpimy dokładnie tak samo.

„Ciągniemy” najpierw za wyróżnione punkty A , B i C tak, by zeszyły się w punkcie N – odpowiedniku bieguna północnego sfery, w której wycięty został sześciokątny otwór (rysunek 4a-b). Wygięty w pętlę bok a obracamy ku górze,



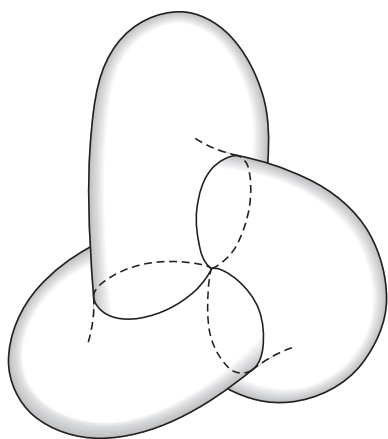
Rys. 4

aż do położenia jak na rysunku 4c–e. Zakładamy przy tym, że pozostałe łuki pozostają nieruchome; deformacji ulega jedynie powierzchnia. Następnie obracamy pętlę b na prawo w górę, żeby zajęła miejsce z tyłu powierzchni zgodnie z rysunkiem 4f.

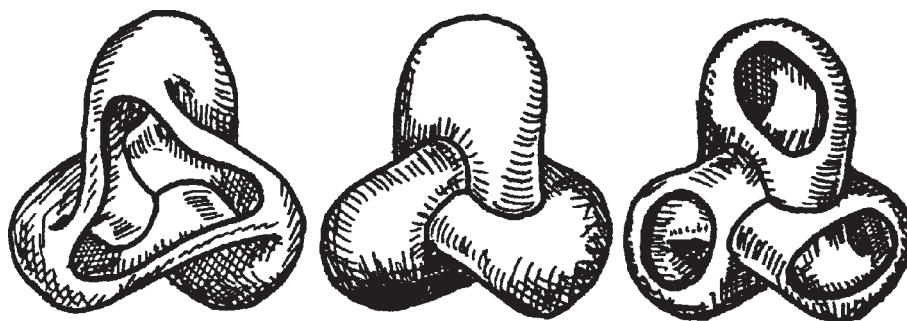


Rys. 5

Całą operację wykonujemy tak, żeby łuk x był przystający do łuku y , a pętla a do pętli b . Ponadto po obrocie o kąt $2\pi/3$ wokół osi przechodzącej przez punkty S i N łuk x powinien zająć miejsce łuku y , a pętla b powinna przejść na a . Weźmy teraz drugi egzemplarz tak spreparowanej powierzchni. Oznaczmy jego łuki podobnie, tylko z primami, czyli a' , b' , x' , y' . Przyłożmy go tak, żeby y' pokryło się z x , a więc konsekwentnie a' nałoży się na b . Trudno to przejrzysto narysować, ale można obejrzeć na sześciokątnym schemacie (rys. 5), gdzie każdy z rombów reprezentuje odpowiednią część deformowaną zgodnie z powyższym opisem (oznaczenia literowe boków wskazują na zależności z łukami). Aby otrzymać powierzchnię Boya, trzeba jeszcze dokleić trzeci przystający fragment. Ze schematu widać, że teraz y sklei się z x'' , pętla a z b'' , b' z a'' i wreszcie x' z y'' . Powierzchnia Boya przenika się wzdłuż trzech pętli schodzących się w punkcie N . Jak wynika z konstrukcji, ma ona trzykrotną oś obrotu (to znaczy, że obracając ją o kąt $2\pi/3$ lub jego wielokrotność, dostaniemy znowu to samo). Jest bardziej skomplikowanym obrazem płaszczyzny rzutowej w naszej przestrzeni. W przeciwieństwie jednak do czapy krzyżowej, która ma dwa punkty osobliwe – końce odcinka, wzdłuż którego się przenika – powierzchnia Boya nie ma takich kłopotliwych punktów. Po raz pierwszy została opisana przez Wenera Boya w 1903 roku w związku z badaniami autora nad reprezentacją płaszczyzny rzutowej w przestrzeni trójwymiarowej bez punktów osobliwych.



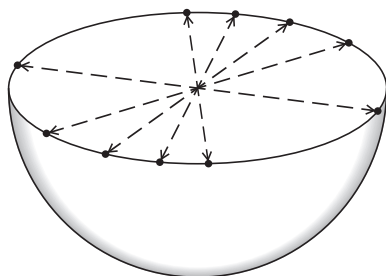
Rys. 6



Rys. 7

Czytelnik, który dotychczas nie zetknął się z płaszczyzną rzutową, zapewne zdziwi się, że tak powykręcany twór, jak powierzchnia Boya, jest modelem czegoś, co nosi miano płaszczyzny. Już malarze Odrodzenia zauważyli, że pewne proste równoległe na płaszczyźnie postrzegamy jako zbiegające się na horyzoncie. Można się zatem umówić, że do zwykłej płaszczyzny dołączamy dodatkowe punkty, „horyzont”, w których będą się przecinały proste równoległe wyznaczające jeden kierunek. Do każdej prostej dokładamy po jednym punkcie nazywanym punktem w nieskończoności albo punktem niewłaściwym.

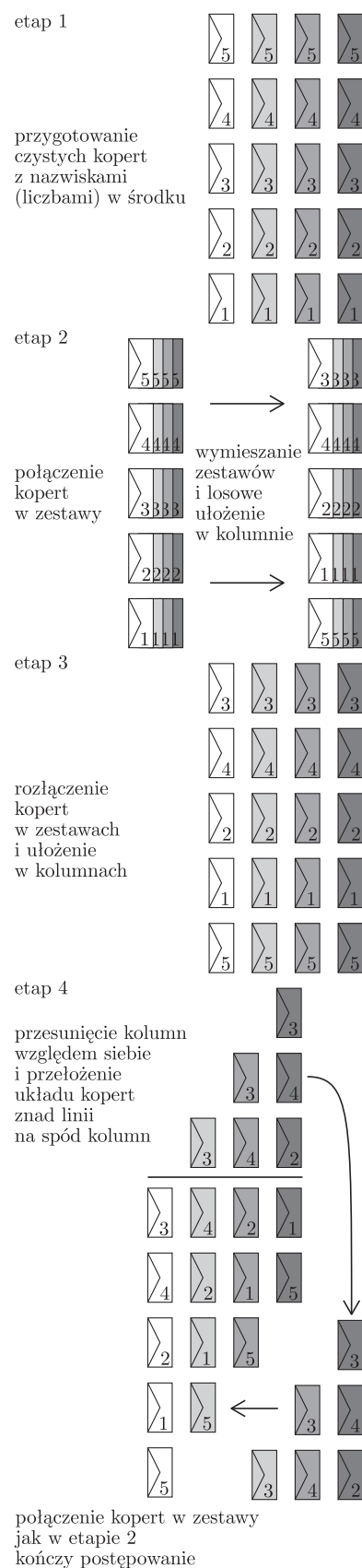
Wyobraźmy sobie, że stoimy na ogromnej równinie. Gdy obracamy się, cały czas widzimy linię horyzontu; proste równoległe (tory kolejowe lub brzegi prostej drogi) naturalnie zbiegają się na horyzoncie. Jeśli obrócimy się do tyłu, to te same proste równoległe znowu będą się schodziły, tym razem po przeciwnej stronie. Nie jest dobrze, aby różne proste miały więcej niż jeden punkt przecięcia, dlatego umówiono się, że punkt na horyzoncie i jego przeciwległy odpowiednik to ten sam punkt. Można więc sobie wyobrazić, że płaszczyzna rzutowa powstaje z koła przez utożsamienie przeciwległych punktów brzegu albo, co na jedno wychodzi, przez sklejenie przeciwległych punktów brzegu półsfery (rys. 8). Czy będziemy sklejać pracowicie punkt po punkcie, czy – jak w przypadku czapy krzyżowej i powierzchni Boya – odcinki, powstaje ten sam twór, tylko za każdym razem inaczej przedstawiony w naszej przestrzeni. Można to porównać do sytuacji, gdy obserwujemy różne cienie skomplikowanej powierzchni obracanej w przestrzeni. A płaszczyzna rzutowa ma jeszcze inne niezwykle reprezentacje...



Rys. 8

O prezentach i dyskrecji

Tomasz Konrad KUJAWA *



Na czym polega kłopot? Zdarza się od czasu do czasu, że obdarowujemy się prezentami. Ile z tym kłopotu, wie każdy, kto choć raz musiał wybrać podarek dla bliskiej osoby lub znajomego. Oczywiście, ten ważny problem nie ma szans na zadowalające rozwiązanie, więc zajmiemy się innym, okazuje się, nie mniej istotnym. Otóż bywa, że dając komuś prezent, chcemy zachować swoją anonimowość. Niby łatwa rzecz, można nająć posłańca albo zamówić prezent z wysyłką do beneficjenta w odpowiednim sklepie internetowym. Jednak są sytuacje, w których takich rozwiązań nie da się zastosować z różnych powodów. Przykładem może być tutaj klasa szkolna, która organizuje mikołajki. Z tej okazji uczniowie przygotowują dla siebie nawzajem prezenty. Nie trzeba zaznaczać, że wszystkim uczestnikom zabawy zależy na dyskrecji: oczekują, że żadnego prezentu nie będzie można skojarzyć z ofiarodawcą. Ponadto uzgadniają, że każdy uczeń przygotowuje prezent dla jednej osoby i każdy powinien zostać obdarowany.

Spróbujmy im pomóc.

Jakie to proste... Najpierw zastanówmy się, jakie dokładnie warunki muszą zostać spełnione, aby zabawa odpowiadała oczekiwaniom. Poniżej wymieniamy takie warunki bez komentarza, ufając, że Czytelnik sam znajdzie dla nich uzasadnienie:

1. Każdy przygotowuje prezent dla jednej osoby.
2. Wyklucza się możliwość zdarzenia, że jakaś osoba będzie musiała przygotować prezent dla siebie.
3. Każdy zostaje obdarowany.
4. Każdy powinien znać nazwisko osoby, dla której przygotowuje prezent...
5. ...i tylko taka informacja jest dostępna uczestnikom (co nie ma miejsca, gdy są tylko dwie lub trzy osoby).
6. Skojarzenie każdej pary ofiarodawca-beneficjent jest losowe. Dokładniej: dla każdej osoby A prawdopodobieństwo tego, że wręczy ona prezent każdej z pozostałych osób B , jest takie samo (równe, na mocy wymagania 2, $1/(n-1)$, gdzie n to liczba osób).
7. Osoba przeprowadzająca losowanie nie posiada żadnej wiedzy o wylosowanych skojarzeniach (chyba że sama będzie uczestnikiem, wtedy jej wiedza ograniczy się tylko do tej z pkt. 4.).

Wydaje się, że sprostanie tym wymaganiom może okazać się trudne, a już na pewno będzie skomplikowane. Otóż nie! Przedstawimy proste postępowanie, które doprowadzi do pożądanego wyniku. A mianowicie:

1. Przygotowujemy n par kopert. W każdej parze znajduje się koperta biała i szara.
2. Do obu kopert każdej pary wkładamy karteczkę z tym samym nazwiskiem jednej z n osób tak, żeby każdej parze odpowiadało inne nazwisko.
3. W każdej parze łączymy koperty w zestaw.
4. Mieszamy zestawy.
5. Losowo układamy zestawy w kolumnie.
6. Rozłączamy koperty, układamy je w dwóch kolumnach w taki sposób, że w jednej kolumnie są wszystkie białe koperty, a w drugiej – wszystkie szare i w każdym wierszu znajdują się koperty z tego samego zestawu (pary).
7. Wszystkie koperty szare przesuwamy o jeden wiersz w górę (cyklicznie, tzn. kopertę z samej góry przenosimy na dół).
8. W każdym wierszu ponownie łączymy białą i szarą kopertę w zestaw.
9. Po otwarciu wszystkich białych kopert wręczamy każdy zestaw osobie, której nazwisko zawiera biała koperta. Osoba ta znajdzie w szarej kopercie nazwisko swojego beneficjenta.

*BIUST, Biuro Usług Statystycznych, Wrocław

Błękitni maruderzy

Okres, w którym źródłem energii gwiazdy są zachodzące w jej jądrze reakcje termojądrowe, gdzie wodór zamieniany jest w hel, należy do najdłuższych i najspokojniejszych w trakcie jej ewolucji. Stosunkowo nieliczne gwiazdy potrafią ten okres młodości w znaczący sposób przedłużyć. Szczególnie widoczne są one w gromadach gwiazdowych, gdzie odróżniają się większą jasnością i temperaturą powierzchniową od większości gwiazd spalających wodór. Ich wyższa temperatura i „niechęć” do przejścia na następne etapy ewolucji spowodowały, że nadano im nazwę błękitnych maruderów (BM). Aby łatwiej było zrozumieć, czym się wyróżniają, jak powstają i co się z nimi później stanie, warto przypomnieć kilka podstawowych informacji dotyczących ewolucji gwiazd.

Dużą rolę w jej zrozumieniu miało wprowadzenie na początku XX wieku tak zwanego diagramu Hertzsprunga–Russela (diagramu H-R), na którym naniesione są typy widmowe i jasności gwiazd, dla których te parametry mogą być zmierzone. Obecnie, kiedy znamy lepiej kalibrację niektórych obserwowanych wielkości, często zamiast typu widmowego podaje się kolor (różnicę jasności w dwóch różnych barwach) lub temperaturę efektywną (trudniejszą do określenia na podstawie obserwacji, za to będącą parametrem bezpośrednio otrzymywanym z modeli teoretycznych).

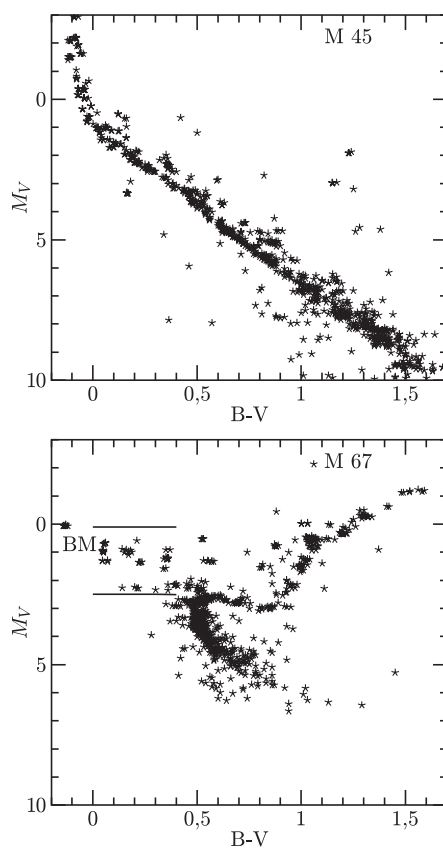
Na diagramie H-R szczególnie dużo gwiazd znajduje się na tak zwanym ciągu głównym. Jak wiemy, są to gwiazdy, których energia pochodzi ze stabilnych reakcji termojądrowych zamiany wodoru w hel. Własności tych gwiazd silnie zależą od ich masy. Im gwiazda jest masywniejsza, tym wyższa temperatura panuje w jej centrum, tym szybciej zachodzą tam reakcje termojądrowe i w rezultacie – ma większą jasność. Na przykład, dla gwiazd o masach pomiędzy 1 a 10 mas Słońca zależność między jasnością L a masą M ma wykładnik w przybliżeniu równy 4, czyli $L \sim M^4$. Wynika z tego, że im masywniejsza jest gwiazda, tym krócej żyje na ciągu głównym, gdyż zapas paliwa do reakcji termojądrowych jest w przybliżeniu proporcjonalny do masy gwiazdy, a tempo jego zużywania do jasności gwiazdy. I tak czas życia Słońca na ciągu głównym wynosi około 10 mld lat, natomiast gwiazdy o masie dwa razy większej tylko około 1 mld lat.

Gdy we wnętrzu gwiazdy wyczerpie się wodór, powstaje jądro złożone głównie z helu, które otoczone jest warstwą, gdzie w dalszym ciągu spalany jest wodór. Rosnąca masa jądra, w którym nie zachodzą reakcje termojądrowe, powoduje, że zaczyna się ono kurczyć, czemu towarzyszy rozszerzanie zewnętrznych obszarów gwiazdy i spadek temperatury powierzchniowej. Taka gwiazda wkracza na gałąź czerwonych olbrzymów, odchodząc od ciągu głównego w stronę niższych temperatur powierzchniowych i większych jasności (o ile

*Marcin KIRAGA**

nie jest to gwiazda bardzo jasna i bardzo masywna, gdyż takie, odchodząc od ciągu głównego, niewiele zmieniają swoją jasność).

Efekty ewolucji widać szczególnie wyraźnie w gromadach gwiazd. Gwiazdy w gromadzie mają ten sam wiek i skład chemiczny (a przynajmniej tak zakładamy). Jeżeli gromada jest bardzo młoda, to jej ciąg główny sięga do gwiazd bardzo jasnych i gorących, gdyż najmasywniejsze gwiazdy gromady są jeszcze na ciągu głównym. Z upływem czasu efekty ewolucji są dla nich najbardziej widoczne i odchodzą one w stronę gwiazd chłodniejszych. Stopniowo wypalają wodór w swoich wnętrzach gwiazdy o coraz mniejszych masach. Im więc starsza jest gromada, tym „krótszy” jest jej ciąg główny. Ilustruje to rysunek, na którym pokazane są diagramy H-R dla dwóch gromad otwartych dość wyraźnie różniących się wiekiem (M 45 – Plejady i M 67).



Diagramy H-R dla dwóch gromad otwartych. Na górnym rysunku mamy dość młodą gromadę Plejady (M45), której wiek wynosi około 100 milionów lat, a poniżej dużo starszą M 67, która liczy około 4 miliardów lat. Kolor B-V jest miarą powierzchniowej temperatury gwiazd (im większa wartość B-V, tym gwiazda chłodniejsza), a M_V jest absolutną wielkością gwiazdową w filtrze V (im mniejsza wartość M_V , tym jaśniejsza gwiazda). Widać, że w Plejadach nie ma czerwonych olbrzymów, a ciąg główny zawiera gwiazdy gorętsze i jaśniejsze niż w gromadzie M 67. W gromadzie M 67 najliczniejsze są gwiazdy ciągu głównego, ale dużo jest w niej gwiazd na gałęzi czerwonych olbrzymów i występują dość licznie błękitni maruderzy (BM – gwiazdy gorętsze i jaśniejsze niż gwiazdy odchodzące od ciągu głównego na gałąź czerwonych olbrzymów).

*Obserwatorium Astronomiczne, Uniwersytet Warszawski

Na gałęzi olbrzymów znajdują się obiekty o masie niewiele większej niż jej najmaszywniejsze w danym czasie gwiazdy ciągu głównego. W najstarszych znanych gromadach, takich jak gromady kuliste naszej Galaktyki, które liczą już kilkanaście miliardów lat, najmaszywniejsze gwiazdy ciągu głównego mają masy trochę mniejsze od słonecznej, a ich jasność i temperatura powierzchniowa jest podobna jak obecnego Słońca. Jest to zgodne z modelem ewolucji pojedynczej gwiazdy ciągu głównego. Jednak w gromadach można znaleźć gwiazdy jaśniejsze i gorętsze od tych, które zeszyły już z ciągu głównego. Wydają się pozostawać na ciągu głównym dłużej niż większość gwiazd, która już przeszła na dalszy etap ewolucji. Te właśnie gwiazdy nazywamy błękitnymi maruderami (BM).

Ich położenie na diagramie kolor-jasność może sugerować, że są młodsze niż pozostałe gwiazdy gromady. Jedną z hipotez tłumaczących ich istnienie wskazywała na możliwość przechwycenia przez gromadę gwiazd młodszych niż te, które ją tworzą. Jest to jednak bardzo mało prawdopodobne, bo gromady raczej tracą swoich członków, a nie zyskują nowych.

Problem BM pojawił się w 1953 roku. Ich obecność po raz pierwszy stwierdził Sandage w gromadzie kulistej M3. Później wykryto je również w gromadach otwartych. Po wprowadzeniu do obserwacji astronomicznych detektorów CCD liczba znanych BM zaczęła szybko rosnąć, a szczególnie istotny postęp dokonał się po uruchomieniu Teleskopu Hubble'a. Jego wysoka zdolność rozdzielcza umożliwiła na tyle dokładne obserwacje centralnych części gromad kulistych, że możliwe stało się stwierdzenie obecności tam BM. Okazało się, że można je spotkać w każdej odpowiednio dokładnie zbadanej gromadzie kulistej i w większości starszych gromad otwartych (liczących prawie kilkaset milionów lat). Liczba BM jest dość znaczna. W starszych gromadach otwartych mamy zazwyczaj od kilku do kilkudziesięciu gwiazd tego typu, w gromadach kulistych, które zawierają znacznie większą liczbę gwiazd, występuje zazwyczaj od kilkudziesięciu do kilkuset BM. Jak na razie, znanych jest około 3000 BM w gromadach kulistych i blisko 2000 w gromadach otwartych. Co ciekawe, istnienie gwiazd o zbyt długim okresie życia na ciągu głównym nie ogranicza się tylko do gromad (choć w nich najłatwiej jest stwierdzić ich obecność). Istnieją bowiem gwiazdy nazywane niebieskimi gwiazdami o małej metaliczności, tj. zawierające mało pierwiastków cięższych od helu. Część ich ma własności kinematyczne i skład chemiczny odpowiadający gwiazdom bardzo starym, takim, jakie tworzą gromady kuliste. Są jednak gorętsze i jaśniejsze niż mające taki sam wiek gwiazdy ciągu głównego i można je uznać za odpowiedniki BM, tylko niezwiązane obecnie z żadną gromadą.

Aby badać, w jaki sposób BM mogą powstawać, warto określić względną częstość ich występowania.

Przykładowo w największej z gromad kulistych naszej Galaktyki, ω Cen znamy około 300 BM, a jedna gwiazda tego typu przypada na około 100 gwiazd gałęzi czerwonych olbrzymów i na 12 gwiazd gałęzi horyzontalnej, tj. starych gwiazd o małej metaliczności, które w swoich wnętrzach stabilnie spalają hel. Okazało się, co było pewnym zaskoczeniem, że im maszywniejsza i gęstsza jest gromada, tym częstość występowania BM jest mniejsza. W najmniej maszywnych gromadach kulistych i w starych gromadach otwartych częstość występowania BM jest kilkadziesiąt razy większa niż w ω Cen i jest praktycznie taka sama jak częstość występowania niebieskich gwiazd o małej metaliczności. Wydaje się więc, że w maszywnych i gęstych gromadach kulistych występują czynniki hamujące powstawanie BM.

Istotne informacje o pochodzeniu BM może dać również ich położenie w gromadzie gwiazd. W większości gromad kulistych najwięcej BM jest w centrum gromady, a ich liczba spada ze wzrostem odległości od niego.

Zapewne duża część BM w gromadach kulistych i większość BM w starych gromadach otwartych powstaje więc w wyniku zlewania się ciasnych układów podwójnych. Z kolei, w gęstych jądrach gromad kulistych, gdzie gęstość gwiazd jest rzędu 10^5 na parsek sześcienny, tj. około miliona razy większa niż w okolicy Słońca, możliwe są zderzenia gwiazd lub zderzenia składników układu podwójnego spowodowane bardzo bliskim przejściem innej gwiazdy.

Pozycja BM na diagramie HR wydaje się więc potwierdzać hipotezę, że powstają one na skutek łączenia się gwiazd. Jasność najjaśniejszych BM odpowiada masie gwiazd ciągu głównego około dwa razy większej niż tych gwiazd gromady, które kończą ewolucję na ciągu głównym. W przypadku gromad kulistych BM często mają masy około $1,3 M_{\odot}$.

Większość niebieskich gwiazd o małej metaliczności znajduje się w układach podwójnych, z których część jest w układach o dużych okresach orbitalnych (powyżej 1000 dni), gdzie drugi składnik nie jest obserwowany. Można przypuszczać, że swoją dużą jasność zawdzięczają materii, którą otrzymały od towarzyszącej im gwiazdy, gdy była w stadium czerwonego olbrzyma. A układy o długich okresach w gromadach kulistych są szybko niszczone, więc nie stają się tam źródłem powstawania BM.

Jednak określenie BM jako gwiazdy należącej do gromady i znajdującej się na diagramie HR na przedłużeniu ciągu głównego może obejmować gwiazdy o różnym pochodzeniu.

Obecność BM w stosunkowo młodych gromadach (o wieku poniżej miliarda lat) może tłumaczyć hipoteza efektywnego mieszania wodoru we wnętrzach gwiazd szybko rotujących. Dzięki temu gwiazda miałaby do dyspozycji więcej paliwa niż gwiazda wolno rotująca. Mechanizm ten jest istotny dla gwiazd o masach

większych niż $1,5 M_{\odot}$, których obrót nie jest hamowany przez wiatr gwiazdowy będący wynikiem aktywności magnetycznej.

Jak widać, gwiazdy, które nazywamy BM, mogą powstawać na różne sposoby. „Klasyczne” BM powstały w wyniku oddziaływania dwóch lub większej liczby gwiazd, z tym że możliwe są tu procesy bardzo różne: przepływ masy w układzie podwójnym, zlanie się składników ciasnego układu podwójnego, zderzenie gwiazd układu podwójnego na skutek bliskiego przejścia innej gwiazdy czy też zderzenie dwóch gwiazd pojedynczych w gęstym centrum gromady kulistej. Tak więc zagadnienie powstawania BM z pewnością

jeszcze długo będzie przedmiotem zainteresowania astronomów.

A przyszłość BM? Wszystko na to wskazuje, że podlegają tym samym prawom ewolucji, co pozostałe gwiazdy. Kiedy skończą palić w centrum wodoru, staną się chłodniejsze, zwiększą swoje rozmiary (odejdą na gałąź olbrzymów) i choć będą jaśniejsze niż obecnie, to najprawdopodobniej nie będą się wydawały już tak intrygujące. O ich nietypowej przeszłości można będzie wtedy się dowiedzieć za pomocą dokładnych obserwacji spektroskopowych, które mogą wykazać niezwykle skład chemiczny będący wynikiem zlania się dwóch gwiazd lub też większej niż zazwyczaj prędkości rotacji.



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 713. W próżni umieszczono kulisty balonik o promieniu R_1 wypełniony gazem. Wewnątrz tego balonika znajduje się inny balonik, o promieniu R_2 , wypełniony tym samym gazem. Jaki będzie promień zewnętrznego balonika po pęknięciu tego wewnętrznego, jeśli temperatura gazu nie zmieni się? Przyjąć, że powierzchnia balonika wywiera na gaz ciśnienie odwrotnie proporcjonalne do jego promienia.

Rozwiązanie na str. 16

F 714. W długiej wąskiej probówce, wypełnionej powietrzem, znajduje się kropla rtęci. Gdy rurka leży poziomo, rtęć znajduje się w odległości l_1 od końca probówki, a gdy jest pionowa – w odległości l_2 . W jakiej odległości znajdzie się kropla rtęci po odwróceniu probówki „do góry nogami”?

Rozwiązanie na str. 21

Redaguje Waldemar POMPE

M 1201. Dowieść, że dla każdych dodatnich liczb całkowitych a, b, c spełniona jest nierówność

$$\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c} \leq \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}.$$

Rozwiązanie na str. 7

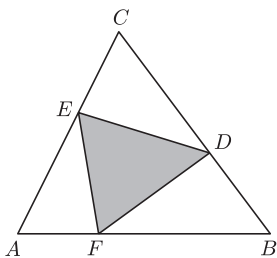
M 1202. Rozstrzygnąć, czy istnieje takich 100 różnych liczb całkowitych dodatnich, z których każda jest dzielnikiem sumy pozostałych 99 liczb.

Rozwiązanie na str. 14

M 1203. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC (rysunek). Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC wynosi R . Wykazać, że pole trójkąta DEF jest równe

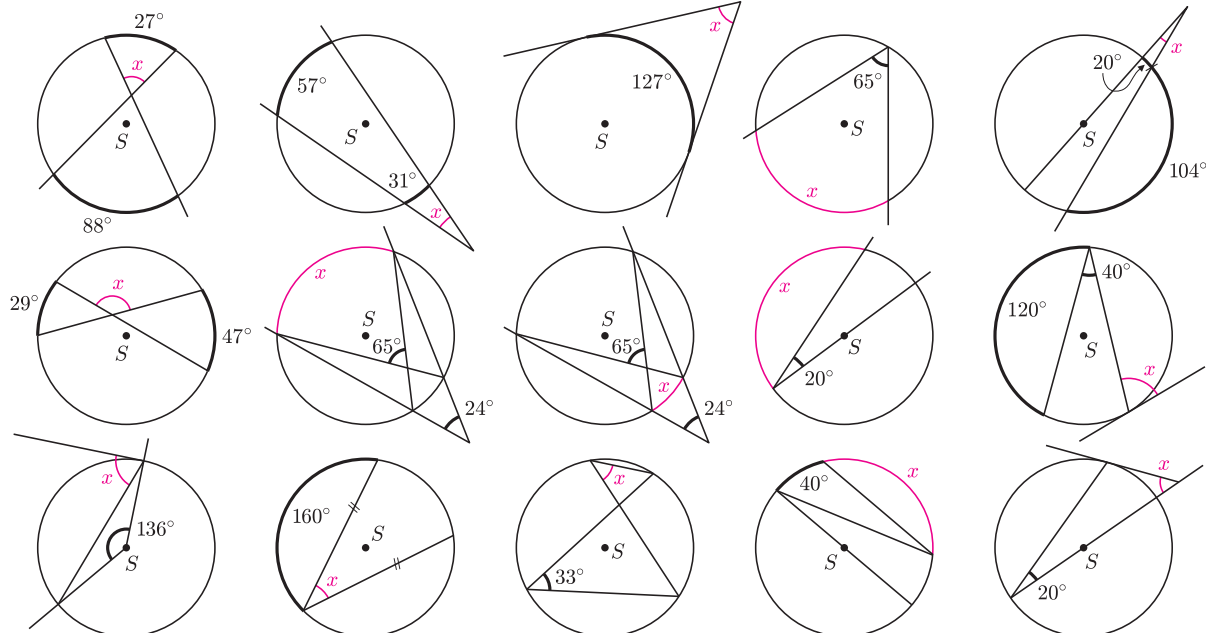
$$\frac{1}{4R}(BD \cdot CE \cdot AF + DC \cdot EA \cdot FB).$$

Rozwiązanie na str. 15



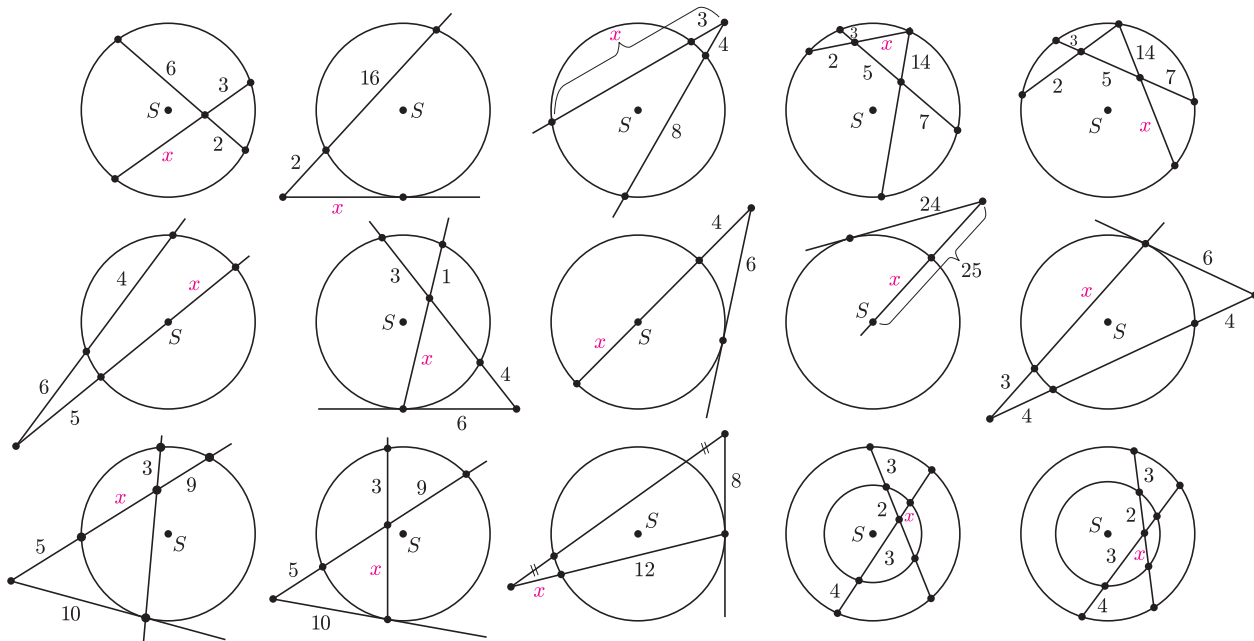
Zadania od mmm*

1. Jaka jest rozwartość kąta x na każdym z rysunków?



Na rysunkach przyjęto konwencję, że miara przypisana łukowi oznacza miarę kąta środkowego opartego na tym łuku.

2. Jaka jest długość odcinka x na każdym z rysunków?



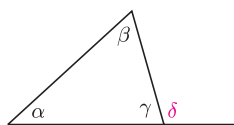
Liczba oznacza długość odcinka między sąsiednimi punktami.

* mmm – magazyn miłośników matematyki; <http://www.mmm.uni.wroc.pl>

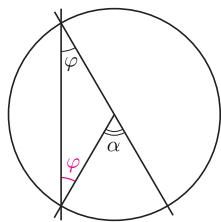
Spróbuj odpowiedzieć sam, ale w razie czego na następnej stronie znajdziesz wskazówki.

Wskazówki

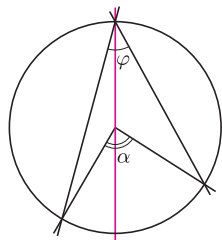
Ponieważ suma kątów w trójkącie to 180° , więc kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych. Wynika z tego od razu, że w okręgu kąt wpisany (czyli między cięciwami o wspólnym końcu) i kąt dopisany (czyli między cięciwą i styczną w jednym z jej końców) są równe połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Dowód pierwszego faktu demonstrują rysunki – na rysunku 2 mamy $2\varphi = \alpha$, w innych przypadkach kąty te dają się przedstawić jako suma (rys. 3) bądź jako różnica (rys. 4) sytuacji z rysunku 2. Do dowodu drugiego potrzeba jeszcze wiedzieć, że kąty o ramionach odpowiednio prostopadłych są równe (rys. 5).



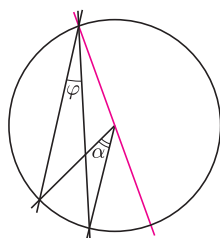
Rys. 1. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = \gamma + \delta$, więc $\alpha + \beta = \delta$.



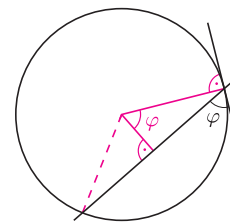
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

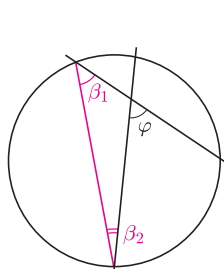


Rys. 5

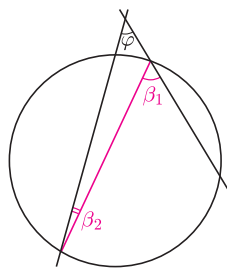
Mniej znany jest fakt, że te zależności są szczególnymi przypadkami twierdzenia

kąt, którego ramiona są zawarte w siecznych lub stycznych do okręgu, jest połową sumy (jeśli wierzchołek kąta jest wewnątrz albo na okręgu) lub różnicy (jeśli jest na zewnątrz) kątów środkowych opartych na łukach, które ten kąt wyznaczają.

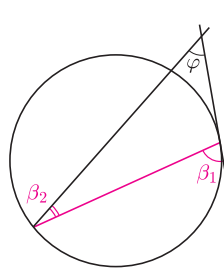
Dowód jest przedstawiony na rysunkach 6, 7, 8 i 9.



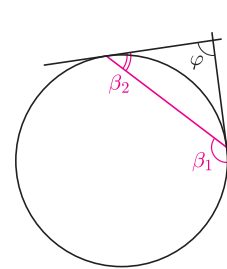
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



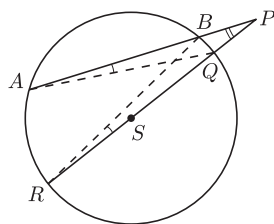
Rys. 9

To twierdzenie pozwala rozwiązać bez kłopotu zadanie 1. Aby rozwiązać zadanie 2, wygodnie jest znać twierdzenie

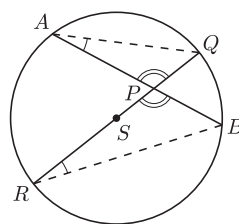
jeśli sieczna przechodząca przez P przecina okrąg o środku S i promieniu r w punktach A i B (może też być $A = B$), to $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = PS^2 - r^2$.

Dowód twierdzenia demonstrują rysunki 10, 11 i 12. Na każdym z nich przez P prowadzimy sieczną przez S i mamy z podobieństwa trójkątów PAQ i PRB

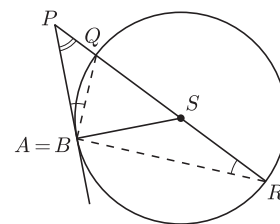
$$\frac{PA}{PQ} = \frac{PR}{PB}, \text{ czyli } \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PQ} \cdot \overline{PR} = (PS - r)(PS + r) = PS^2 - r^2.$$



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

Z tego wynika natychmiast, że dla dowolnych dwóch siecznych (lub stycznych) z P przecinających okrąg w punktach A_1 i B_1 oraz A_2 i B_2 mamy $PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$, co pozwala rozwiązać zadanie 2.

Zadania trudniejsze

3. Przez środek C łuku AB, na którym oparty jest kąt ostry wpisany, poprowadzono cięciwy CD i CE przecinające AB w punktach H i F. Wykaż, że na czworokącie DEFH można opisać okrąg.

4. W kąt wpisano dwa okręgi, przy czym A_1 i B_1 są punktami styczności pierwszego okręgu, a A_2 i B_2 – drugiego. Odcinek A_1B_2 przecina te okręgi w punktach C_1 i C_2 . Wykaż, że $A_1C_1 = A_2C_2$.

Rozwiązania wszystkich zadań można znaleźć na stronie 24.

motywy Logo



Literatura

Dijkstra E.W. (1985). *Umiejętność programowania*. Warszawa: WNT.

Mitzenmacher M., Upfal E. (2005). *Probability and Computing. Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press

Algorytm to w informatyce pojęcie fundamentalne, a te święte zasady, które określaliśmy jednym słowem **DOMEK**, stanowiły fundament gmachu informatyki. Musiało minąć trochę czasu, zanim kilku śmiałków odważyło się wyjść poza DOMEK i zaczęło rozważać również takie algorytmy, w których dopuszcza się rzucanie monetą. Nazywano je początkowo *algorytmami niedeterministycznymi* i miały one status trochę podobny jak *malarstwo abstrakcyjne* w początkowym okresie rozwoju. Malarz abstrakcyjny to człowiek, który pokrywa płótno farbą, ale trudno go uznać za prawdziwego artystę malarza. Ale już w latach siedemdziesiątych Edsger Dijkstra w znanej książce *Umiejętność programowania* napisał:

„Patrząc wstecz można zauważyć, że wiele problemów ... wynikało wyłącznie z uprzedzenia, każącego przypisywać nieuzasadnioną wagę determinizmowi obliczeń. Doszedłem w końcu do tego, że traktuję niedeterminizm jako sytuację normalną, determinizm zaś – jako niezbyt ciekawy przypadek szczególny”.

Współczesne podejście do losowości w informatyce dobrze wyrażają Mitzenmacher i Upfal (2005).

„W nauce w ciągu ostatniego XX stulecia zaakceptowaliśmy losowość, jako istotny element modelowania i analizowania natury. Na przykład w fizyce, prawa Newtona ukształtowały przekonania wielu ludzi, że świat jest deterministyczny, ale powstanie teorii kwantów sugeruje inny punkt widzenia. Zjawiska we wszechświecie przebiegają nadal według praw przyrody, ale kośćcem tych praw jest probabilistyka.

Zagadnienie losowości występuje we wszystkich naukach i we wszystkich los losowości jest bardzo podobny. Najpierw – często dość długo – była zagadnieniem marginalnym, z trudem akceptowanym jako poważne zagadnienie naukowe, a potem nagle znalazła się w centrum zainteresowania. Podobnie jest w informatyce. Kiedy byłem studentem, w latach sześćdziesiątych dwudziestego wieku, uczono mnie, że algorytm to ścisły przepis rozwiązania jakiegoś problemu, spełniający pięć podstawowych warunków: dyskretność, określoność, masowość, elementarność i kierunkowość.

Dyskretność oznacza, że algorytm dyktuje postępowanie „krokowe” – krok po kroku.

Określoność oznacza, że wynik każdego kroku musi być jednoznacznie zdeterminowany przez aktualny stan obliczeń, nie może zależeć od rzutu monetą.

Masowość oznacza, że algorytm nie jest przepisem obliczenia jakiegoś jednego konkretnego wyniku dla ustalonych danych, na przykład sumy dwóch liczb 12345 oraz 737215, lecz przepisem, jak rozwiązać pewien problem ogólny dla dowolnych danych z ustalonego zbioru, np. jak obliczyć sumę dowolnych dwóch liczb dziesiętnych.

Elementarność oznacza, że wykonawca algorytmu umie wykonywać pewne ustalone czynności (elementarne) bez dodatkowych wyjaśnień – jest określony zbiór operacji elementarnych.

Kierunkowość oznacza, że po wykonaniu kolejnego kroku obliczeń algorytm jednoznacznie określa kierunek dalszych obliczeń, tzn. jaka ma być następna operacja. Co trzeba robić dalej, nie może zależeć od rzutu monetą.

Losowość odgrywa kluczową rolę praktycznie w każdym obszarze nauki: w genetyce, w teorii ewolucji i w modelowaniu zmian cen w ekonomii wolnorynkowej. Informatyka nie jest wyjątkiem. W ostatnich dwóch dekadach nastąpił niebywały wzrost zastosowań metod probabilistycznych w nowoczesnej informatyce”.

We współczesnej informatyce powszechnie buduje się i stosuje algorytmy niedeterministyczne, ale mówiąc i pisząc o nich, zwykle nie czujemy potrzeby, by dodawać przymiotnik „niedeterministyczny” – bo to są normalne algorytmy. Praktycznie w każdym języku programowania występują funkcje pierwotne dające losowe wyniki. Na przykład w Logomocji jest to funkcja pierwotna `losowa :n`, która dla danej dodatniej liczby całkowitej n daje w wyniku losowo wybraną nieujemną liczbę całkowitą mniejszą niż n , oraz funkcja `los :lista`, która daje w wyniku losowo wybrany element danej listy. Tej pierwszej używałem wielokrotnie w opublikowanych odcinkach *Logomotywów*, tej drugiej użyję w przyszłości jeszcze nie raz.

To wszystko, co napisałem powyżej, jest rodzajem usprawiedliwienia faktu, że w pięciu spośród sześciu dotychczas opublikowanych odcinków kolumny *Logomotywy* tematem były problemy i algorytmy losowe. Losowość jest składnikiem otaczającej nas rzeczywistości, jak tlen jest składnikiem powietrza. W szkole żyjemy w specjalnych warunkach trochę pod kloszem, szczególnie w polskiej szkole prawie nie ma losowości, ale jeśli szkoła ma nas przygotować do życia, to musimy czasem wyrzeć poza ten szkolny domek.



Rozwiązanie zadania M 1202.
Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ istnieje n różnych liczb, z których każda jest dzielnikiem sumy $n-1$ pozostałych liczb.

Dla $n = 3$ liczby 1, 2, 3 spełniają powyższy warunek. Przyjmijmy więc, że spośród różnych liczb całkowitych dodatnich a_1, a_2, \dots, a_n każda jest dzielnikiem sumy pozostałych liczb. Warunek ten oznacza, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$, liczba a_i jest dzielnikiem liczby $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Rozpatrzmy $n + 1$ liczb:

$$(*) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Wykorzystując założenie indukcyjne wnioskujemy, że każda z tych liczb jest dzielnikiem sumy tych liczb, czyli liczby $2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$. Zatem każda spośród liczb $(*)$ jest dzielnikiem sumy pozostałych liczb. Dowód indukcyjny został zakończony.

W większości rzeczywistych przypadków nie istnieje ograniczenie na t , czyli horyzont czasowy jest nieskończony. Dodatkowo wprowadza się pewne czynniki, które deprecjonują zyski w odległej przyszłości. Zakłada się, że bardziej istotny jest zysk osiągany najszybciej (długoterminowe kalkulacje są też mniej pewne z powodu wielu nieprzewidywalnych czynników).

Wyobraźmy sobie Robinsona, który po katastrofie okrętu dostaje się na bezludną wyspę. Wśród wyrzuconych na brzeg przedmiotów znajduje skrzynię z ziarnem. Po kilku próbach udaje mu się opanować technologię wypieku chleba. Jednak ilość ziarna jest ograniczona, a Robinson zdaje sobie sprawę, że prawdopodobnie na wyspie pozostanie do końca życia. Dlatego postanawia, że co roku będzie dzielił zboże na dwie części. Jedną będzie siał, a drugą konsumował. Pragnie zrobić to w sposób dający mu największą korzyść.

Problem Robinsona jest jednym z typowych problemów występujących w ekonomii. Dane są zasoby, którymi należy dysponować w taki sposób, aby uzyskać jak największy zysk. Innymi słowy, należy zmaksymalizować wartość pewnej funkcji. Podstawową trudność stanowi długi okres, w jakim rozważany jest problem. Liczba zmiennych jest na tyle duża, że standardowe kryteria na maksimum funkcji, na przykład zerowanie się pochodnych, stają się nieefektywne. Aby lepiej zrozumieć problem, wróćmy do Robinsona.

Założmy, że z każdego zasianego kilograma zboża po roku można zebrać dwa kilogramy plonów. Dla uproszczenia pomijamy wszystkie czynniki zewnętrzne, takie jak możliwe susze i inne kłęski. Oznaczmy przez $x(t)$ ilość zboża, jaką posiada Robinson w roku t , a $u(t)$ niech będzie ilością zboża konsumowaną w tym roku. Zatem

$$x(t+1) = 2(x(t) - u(t))$$

i oczywiście spełnione jest ograniczenie $u(t) \in [0, x(t)]$. Ponadto przyjmujemy, że w znalezionej skrzyni było 100 kg zboża, czyli

$$x(0) = 100$$

(Robinson zaczyna liczyć lata od momentu przybycia na wyspę). Zakładamy też, że korzyść h , jaką czerpie Robinson z konsumowanego ziarna, zależy logarytmicznie od jego ilości. Dokładniej

$$h(u) = \ln(u).$$

Aby uprościć problem, zakładamy, że Robinson szacuje, iż będzie żył jeszcze 40 lat. Zatem naszym celem jest znalezienie takich $u(0), \dots, u(40)$, że suma

$$h(u(0)) + h(u(1)) + \dots + h(u(40))$$

jest maksymalna.

Prosta strategia rozwiązywania tego typu problemów została opracowana przez Richarda Bellmana w latach pięćdziesiątych dwudziestego wieku. Nazywa się ona *programowaniem dynamicznym* i opiera się na *zasadzie optymalności*, która w przypadku Robinsona przybiera następującą postać:

Jeśli szacowana długość życia Robinsona wynosi 40 lat, a ciąg $u(0), u(1), \dots, u(40)$ jest optymalny dla warunku początkowego $x(0)$, to dla każdego $t \in \{1, \dots, 40\}$ ciąg $u(t), u(t+1), \dots, u(40)$ jest optymalny dla warunku początkowego $x(t)$ i szacowanej długości życia $40 - t$.

Jest to konsekwencja następującego rozumowania. Gdyby ciąg $u(t), \dots, u(40)$ nie był optymalny dla warunku początkowego $x(t)$, to istniałby lepszy ciąg $v(t), \dots, v(40)$. Wówczas ciąg $u(0), \dots, u(t-1), v(t), \dots, v(40)$ byłby lepszy od ciągu $u(0), \dots, u(40)$, o którym zakładaliśmy, że jest optymalny. Czyli otrzymalibyśmy sprzeczność.

Z zasady optymalności wynika, że problem Robinsona można rozwiązywać „od końca” (Czytelnik proszony jest o zatrzymanie się w tym miejscu, jeśli nie jest pewny, że rozumie zasadę optymalności; jest ona naprawdę prosta). Oznaczmy przez $V_t(x)$ maksymalną korzyść, jaką Robinson może osiągnąć przez $40 - t$ lat z warunkiem początkowym x . Zatem

$$V_t(x) = \max_{u(t) \in [0, x(t)], \dots, u(40) \in [0, x(40)]} h(u(t)) + \dots + h(u(40)),$$

gdzie $x(t) = x$. W szczególności obliczając $V_0(100)$, otrzymujemy maksymalną korzyść Robinsona w wyjściowym problemie.



*Instytut Matematyczny PAN

Bardziej ogólnie równanie przybiera postać

$$V_t(x) = \max_{u \in U} V_{t+1}(f(x, u, t)) + h(x, u, t),$$

gdzie U to pewien zbiór ograniczeń, f to funkcja przejścia, a h to funkcja korzyści. Obie funkcje mogą zależeć od zasobów x , sterowania u i czasu t .

W dniach 26–27 września 2008 roku, na Wydziale Fizyki UAM w Poznaniu, pod patronatem Dziekana oraz Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, organizowany jest Ogólnopolski Festiwal **Nauki Przyrodnicze na Scenie 3**, który stanowi kontynuację bardzo udanych trzech poprzednich festiwali *Fizyka na Scenie*, dwóch festiwali *Nauki Przyrodnicze na Scenie* oraz trzech europejskich festiwali *Physics on Stage* i dwóch festiwali *Science on Stage*.

Występy zespołów będą oceniane w trzech kategoriach:

- demonstracje zjawisk,
- działania artystyczne związane z fizyką, naukami przyrodniczymi oraz astronomią i naukami o przestrzeni kosmicznej (przedstawienia teatralne, fotografie, rysunki, formy przestrzenne, wiersze itp.),
- pokazy multimedialne z zakresu nauk przyrodniczych i nauk o przestrzeni kosmicznej.

Do Poznania zaproszone zostaną osoby i zespoły (w sumie około 200 osób), wybrane przez Krajowy Komitet Organizacyjny, które do 3 czerwca 2008 roku zgłoszą propozycje występów.

Pełną informację o festiwalu można znaleźć na stronie <http://main3.amu.edu.pl/fizscena/>.

Przewodniczący KKO
Prof. Wojciech Nawrociak

Bezpośrednio z zasady optymalności dostajemy *równanie Bellmana*

$$V_t(x) = \max_{u(t) \in [0, x]} V_{t+1}(2(x - u(t))) + h(u(t)),$$

gdzie, tak jak wcześniej, wartość $2(x - u(t))$ jest ilością zboża w roku $t + 1$, o ile w roku t było x zboża. Zakładamy dodatkowo, że

$$V_{41}(x) = 0,$$

co oznacza, że po śmierci Robinson nie czerpie już żadnych korzyści ze zboża. Zauważmy też, że $u(t)$, które maksymalizują kolejne $V_{t+1}(2(x - u)) + h(u)$, dają szukaną strategię optymalną.

Przejdźmy teraz do rachunków. Mając V_{41} , chcemy obliczyć V_{40} , korzystając z równania Bellmana. Dostajemy

$$V_{40}(x) = \max_{u(40) \in [0, x]} V_{41}(2(x - u(40))) + h(u(40)) = \max_{u(40) \in [0, x]} \ln(u(40)).$$

Logarytm jest funkcją rosnącą, więc maksimum będzie na końcu przedziału. Mamy zatem $V_{40}(x) = \ln(x)$ oraz $u(40) = x(40)$. Wynika stąd, że przed śmiercią Robinson powinien spożyć całe zboże.

Obliczamy następnie V_{39} , ponownie stosując równanie Bellmana.

$$V_{39}(x) = \max_{u(39) \in [0, x]} \ln(2(x - u(39))) + \ln(u(39)) = \max_{u(39) \in [0, x]} \ln(2(x - u(39))u(39)).$$

Jak wcześniej, korzystamy z faktu, że logarytm jest funkcją rosnącą i wnioskujemy, że szukane $u(39)$ będzie punktem maksimum funkcji kwadratowej

$$\varphi(u) = 2(x - u)u$$

na przedziale $[0, x]$. Bez trudu obliczymy, że jest ono przyjmowane dla $u = \frac{1}{2}x$. Zatem $V_{39}(x) = \ln(\frac{1}{2}x^2)$ oraz $u(39) = \frac{1}{2}x(39)$. Proces ten możemy kontynuować. Jako ćwiczenie pozostawiamy indukcyjny dowód, że dla $t \leq 39$

$$V_t(x) = \ln\left(\frac{2^{(41-t)}}{(41-t)^{40-t}} x^{41-t}\right)$$

oraz $u(t) = \frac{1}{41-t}x(t)$.

Podsumowując, wnioskujemy, że optymalna strategia Robinsona, przy przyjętych założeniach, powinna wyglądać następująco. W pierwszym roku powinien przeznaczyć on na spożycie $\frac{1}{41}$ zboża, które posiada, w kolejnym roku $\frac{1}{40}$, potem $\frac{1}{39}$ etc. ad mortem... Zauważmy jednak, że w rozważanym modelu, jeśli wydłużymy czas życia Robinsona, to ilość wyhodowanego zboża będzie rosnać do nieskończoności. Jest to, oczywiście, fizycznie niemożliwe. Rozsądnie jest więc wprowadzić ograniczenie na x w postaci

$$x(t+1) = \min\{2(x(t) - u(t)), x_{MAX}\}.$$

Stosując równanie Bellmana, można bez trudu pokazać, że dla takiego problemu optymalna strategia Robinsona, aż do osiągnięcia x_{MAX} , wygląda tak, jakby nie było ograniczeń. Natomiast, gdy krytyczna wartość zostanie osiągnięta, optymalna ilość zboża przeznaczonego do konsumpcji wynosi $\frac{1}{2}x_{MAX}$.



Rozwiązanie zadania M 1203.

Niech $x = BD$, $y = CE$, $z = AF$ oraz $p = DC$, $q = EA$, $r = FB$. Oznaczmy przez $[F]$ pole figury F . Wówczas

$$[ABC] = \frac{(x+p)(y+q)(z+r)}{4R} \quad \text{oraz} \quad \frac{[AEF]}{[ABC]} = \frac{zq}{(y+q)(z+r)},$$

skąd uzyskujemy

$$[AEF] = \frac{zq(x+p)}{4R}.$$

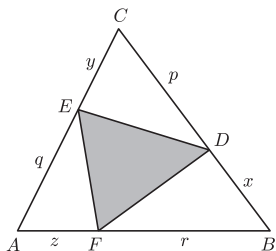
Analogicznie dowodzimy równości

$$[BFD] = \frac{xr(y+q)}{4R} \quad \text{oraz} \quad [CDE] = \frac{yp(z+r)}{4R}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} [DEF] &= [ABC] - [AEF] - [BFD] - [CDE] = \\ &= \frac{1}{4R} \left((x+p)(y+q)(z+r) - zq(x+p) - xr(y+q) - yp(z+r) \right) = \frac{1}{4R} (xyz + pqr), \end{aligned}$$

co należało wykazać.



Wykorzystanie inwersji względem okręgu w dowodzie twierdzenia o $n+2$ okręgach stycznych

Jest to skrót pracy nagrodzonej srebrnym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2007 roku.

Mateusz PLUTA

W swojej pracy podjąłem próbę zbadania pewnych ciekawych własności przekształcenia geometrycznego, jakim jest inwersja względem okręgu, oraz wykorzystania ich w dowodzie tytułowego twierdzenia.

Na początek przypomnienie podstawowych faktów dotyczących inwersji i potęgi punktu względem okręgu.

Inwersja względem okręgu o środku O i promieniu r to przekształcenie, które każdemu punktowi $P \neq O$ przyporządkowuje punkt P' leżący na półprostej OP i spełniający warunek $OP \cdot OP' = r^2$. Inwersja jest przekształceniem, które jest odwrotne samo do siebie, przeprowadza przecinające się krzywe na krzywe przecinające się pod tym samym kątem, przeprowadza okręgi przechodzące przez O na proste, a nieprzechodzące przez O na okręgi. Z tego, że inwersja zachowuje kąty, natychmiast wynika, iż okręgi przecinające okrąg inwersyjny pod kątem prostym (ortogonalne do niego) przechodzą w inwersji same na siebie. Wobec tego okrąg o średnicy PP' jest ortogonalny do okręgu inwersyjnego. Ponadto każdy z punktów przecięcia dwóch okręgów ortogonalnych do okręgu inwersyjnego jest obrazem inwersyjnym drugiego, co pozwala wyrazić definicję inwersji jedynie za pomocą pojęcia ortogonalności.

Potęgą punktu P względem okręgu o środku O i promieniu r to liczba $OP^2 - r^2$ (jest o tym mowa także na stronie 12 – warto zajrzeć) – jest ona zatem dodatnia dla punktów leżących poza kołem ograniczonym tym okręgiem i ujemna wewnątrz. Gdy jest dodatnia, jest kwadratem długości odcinka stycznej z punktu P do punktu styczności do okręgu. Wynika stąd od razu konstrukcja okręgu ortogonalnego do okręgu inwersyjnego, mającego środek na zewnątrz – jego promień to pierwiastek potęgi jego środka. Ważną własnością potęgi jest fakt, że zbiór punktów mających jednakową potęgę względem dwóch niekoncentrycznych okręgów α i β jest prostą (*prosta potęgowa* – oznaczam ją $\uparrow_{\alpha}^{\beta}$). Każdy punkt tej prostej leżący na zewnątrz tych okręgów jest wobec tego środkiem okręgu ortogonalnego do obu z nich. Dla trzech okręgów o niewspółliniowych środkach proste potęgowe każdej z par przecinają się w jednym punkcie (*środek potęgowy*) – gdy leży on na zewnątrz okręgów, jest środkiem (jedyne) okręgu ortogonalnego do wszystkich trzech.

Udowodnijmy najpierw

Lemat o 3 + 2 okręgach stycznych. Niech α i β będą ustalonymi okręgami o nierozłącznych wnętrzach. Niech v_1, v_2, v_3 będą okręgami stycznymi do jednego z danych okręgów zewnątrz, a do drugiego wewnątrz. Niech A_i oraz B_i (dla $i = 1, 2, 3$) będą punktami styczności v_i odpowiednio do okręgów α i β . Wtedy proste A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 oraz $\uparrow_{v_2}^{v_1}, \uparrow_{v_3}^{v_2}, \uparrow_{v_1}^{v_3}$ przecinają się w jednym punkcie (rysunek 1 przedstawia dwie takie sytuacje).



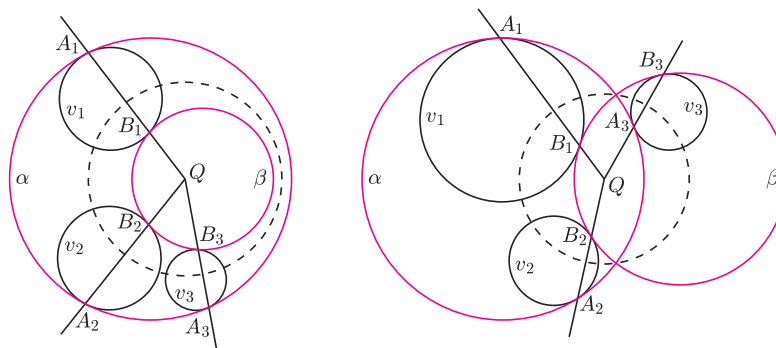
Rozwiązanie zadania F 713.

Ciśnienie w pierwszym baloniku jest równe $p_1 = \alpha/R_1$, a w drugim $p_2 = p_1 + \alpha/R_2$. Po pęknięciu drugiego balonika ciśnienie będzie równe $p = \alpha/R$. Z prawa Boyle'a-Mariotte'a mamy, że

$$p_1 V_1 + p_2 V_2 = pV,$$

gdzie $V_1 = 4\pi(R_1^3 - R_2^3)/3$, $V_2 = 4\pi R_2^3/3$, $V = 4\pi R^3/3$. Stąd otrzymujemy

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$



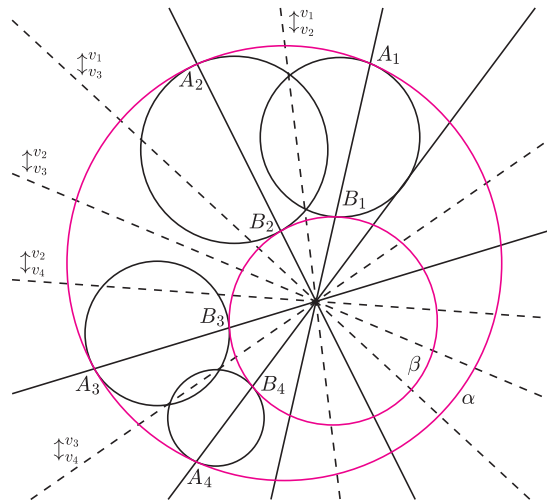
Rys. 1

Okręgi v_1, v_2, v_3 zostały tak zdefiniowane, że ich środek potęgowy (oznaczymy go przez Q) leży na zewnątrz każdego z nich. Wobec tego istnieje okrąg ortogonalny jednocześnie do okręgów v_1, v_2 oraz v_3 , nazwijmy go $\phi_{\perp v_1 v_2 v_3}$. Jak będzie wyglądał ten układ 3 + 2 okręgów stycznych w inwersji względem $\phi_{\perp v_1 v_2 v_3}$? Ponieważ okrąg $\phi_{\perp v_1 v_2 v_3}$ jest ortogonalny do okręgów v_1, v_2 oraz v_3 , więc te ostatnie przejdą same na siebie. Okrąg α przejdzie na okrąg styczny do obrazów okręgów v_1, v_2, v_3 , czyli na okrąg styczny do v_1, v_2, v_3 , lecz wewnętrzna styczność zmieni się na zewnętrzną i odwrotnie. Taki okrąg jest tylko jeden i jest nim okrąg β . Zatem okręgi α i β są obrazami odpowiednio okręgów β i α w tej

inwersji. Stąd wynika, że punkty A_i oraz B_i są obrazami odpowiednio punktów B_i oraz A_i . Co za tym idzie, proste A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 przejdą w tej inwersji na proste A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 . Skąd już wniosek, iż wszystkie one muszą przechodzić przez środek okręgu inwersyjnego. A przecież jest to punkt wspólny prostych $\uparrow_{v_2}^{v_1}, \uparrow_{v_3}^{v_2}, \uparrow_{v_1}^{v_3}$, jako że jest to środek okręgu $\phi_{\perp v_1 v_2 v_3}$, co kończy dowód lematu.

Możemy teraz przejść do tytułowego twierdzenia.

Twierdzenie o $n + 2$ okręgach stycznych. Niech α i β będą ustalonymi okręgami o nierozłącznych wnętrzach. Niech v_1, v_2, \dots, v_n będą okręgami stycznymi do jednego z dwóch danych okręgów zewnętrznie, a do drugiego wewnętrznie. Niech A_i oraz B_i będą punktami styczności v_i odpowiednio do okręgów α i β . Wtedy proste $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ oraz $\uparrow_{v_j}^{v_i}$ dla $i \neq j$ (gdzie $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$) przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 2

Na mocy lematu zastosowanego do trójki okręgów v_1, v_2 oraz v_3 wiemy, iż proste A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 i $\uparrow_{v_2}^{v_1}, \uparrow_{v_3}^{v_2}, \uparrow_{v_1}^{v_3}$ przetną się w jednym punkcie, nazwijmy go Q . Jednakże na mocy tego samego lematu zastosowanego dla okręgów v_1, v_2 oraz v_k (dla dowolnego $k \in \{4, 5, \dots, n\}$) wiemy, że proste A_1B_1, A_2B_2, A_kB_k i $\uparrow_{v_2}^{v_1}, \uparrow_{v_k}^{v_2}, \uparrow_{v_1}^{v_k}$ przetną się w punkcie $Q' = Q$, gdyż proste A_1B_1, A_2B_2 przecinają się w punkcie Q . A to kończy dowód twierdzenia.

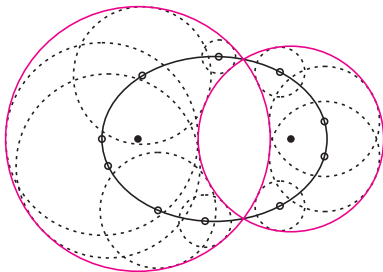
Przytoczę teraz kilka innych udowodnionych przeze mnie faktów.

Punkt, przez który przechodzą „wszystkie proste” z **Twierdzenia o $n + 2$ okręgach stycznych**, jest środkiem jednokładności wewnętrznej okręgów α i β . Wystarczy skorzystać z definicji inwersji względem okręgu i tak przekształcić wzór, aby uzyskać definicję środka jednokładności wewnętrznej dwóch okręgów.

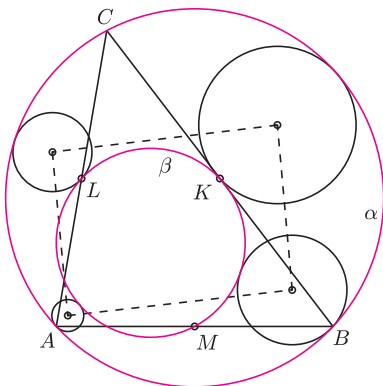
Środki okręgów z **Twierdzenia o $n + 2$ okręgach stycznych**, które są styczne do okręgów α i β , leżą na jednej elipsie. Ogniskami tej elipsy są środki okręgów α i β , a suma odległości dowolnego jej punktu od ognisk tej elipsy jest równa sumie długości promieni okręgów α i β (rys. 3).

Trzy okręgi: dwa zadane i okrąg, w inwersji względem którego jeden z zadanych okręgów jest obrazem drugiego, mają wspólną oś potęgową oraz wspólną rodzinę okręgów ortogonalnych.

Na koniec – zadanie mojego autorstwa, w rozwiązaniu którego przydają się twierdzenia i własności przytoczone powyżej. Dany jest ostrokątny trójkąt ABC , a punkty K, L oraz M są środkami odpowiednio boków BC, CA oraz AB . Niech α i β będą okręgami opisanymi odpowiednio na trójkątach ABC i KLM . Dowieść, że środki czterech okręgów stycznych równocześnie do α i β – przy czym dwa z nich są styczne w punktach A i B do α , a pozostałe dwa w punktach K i L do β – są wierzchołkami równoległoboku (rys. 4).



Rys. 3



Rys. 4

Budujemy generator samodławny

Stanisław BEDNAREK

Nazwa tego generatora nie brzmi może zbyt sympatycznie. Mimo to generator samodławny charakteryzuje się bardzo prostą konstrukcją i zasadą działania. Dlatego też warto go zbudować, nawet jeżeli jest się osobą, która dotychczas z elektroniką nie miała wiele wspólnego.

Schemat elektryczny generatora samodławnego przedstawia rysunek 1. Widzimy tutaj jeden tranzystor T , dwie cewki L_1 i L_2 oraz diodę D . Cewka L_1 ma większą liczbę zwojów i została włączona w obwodzie emitera tranzystora. Cewka L_2 – o mniejszej liczbie zwojów, włączona jest w obwodzie bazy. Obie cewki umieszczone są na wspólnym rdzeniu ferromagnetycznym R . W pobliżu końca rdzenia może poruszać się niewielki magnes M . Bieguny źródła zasilania przyłączone są w ten sposób, że tranzystor, jak mawiają elektronicy, jest zatkany. Oznacza to, że oba obwody – emitera i bazy, spolaryzowane są zaporowo i nie płynie w nich prąd elektryczny.

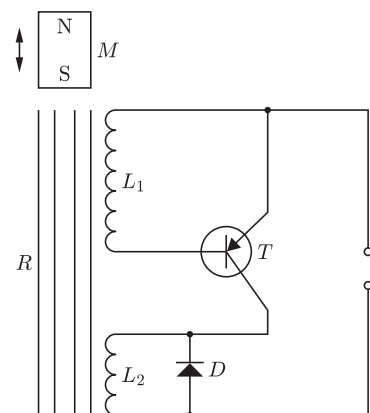
Zasada działania generatora samodławnego jest następująca. Kiedy jeden z biegunów magnesu M zbliża się do cewki L_1 , wówczas indukuje on dodatkowe napięcie w obwodzie emitera. W wyniku tego potencjał bazy ulega zmianie i tranzystor przechodzi do stanu przewodzenia. W tym stanie w obwodzie kolektora pojawia się impuls prądu, który przepływa przez cewkę L_2 i wytwarza pole magnetyczne odpychające magnes M . Stan przewodzenia tranzystora utrzymuje się tylko w krótkim okresie czasu – trwającym zwykle kilka milisekund, kiedy zbliżający się magnes indukuje napięcie w obwodzie bazy. Podobny czas trwania ma impuls w obwodzie kolektora. W ten sposób generator dostarcza do poruszającego się magnesu dodatkową energię pobieraną ze źródła zasilania i uzupełniająca straty energii spowodowane oporami ruchu magnesu. Dioda D służy tylko do zabezpieczenia generatora przed wzbudzeniem się niepożądanych oscylacji w obwodzie kolektora i jej zastosowanie może okazać się niekonieczne.

Do zbudowania generatora samodławnego niezbędny jest dowolny tranzystor średniej mocy, małej częstotliwości, np. typu BD 127-129, BD 135-140, BD 354. Z dobrym skutkiem można wykorzystać starsze tranzystory germanowe TG 50-55, TG 70-72 lub ADP 365. Dla zabezpieczenia generatora przed ewentualnym wzbudzeniem należy zastosować dowolną diodę prostowniczą małej mocy, np. typu BYP 150-50, BYP 150-100, BYP 150-225, BYP 150-300 lub BYP 135-50, a także starsze diody germanowe DZG 5-7. Odpowiedni tranzystor i diodę można kupić za kilka złotych w sklepie z podzespołami elektronicznymi lub wymontować ze starego urządzenia elektronicznego.

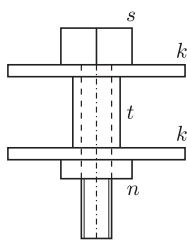
Do zasilania generatora potrzebne jest napięcie 9–12 V. Najprostszym rozwiązaniem jest zastosowanie dwóch szeregowo połączonych baterii płaskich lub jednej baterii 9 V typu 6F22. Na podanym schemacie elektrycznym zaznaczono tranzystor p-n-p. W przypadku zastosowania tranzystora n-p-n należy zamienić miejscami bieguny źródła zasilania.

Cewki generatora trzeba będzie nawinąć samodzielnie. Cewka w obwodzie emitera L_1 składa się z około 3000 zwojów drutu miedzianego izolowanego emalią o średnicy około 0,1 mm. Cewka w obwodzie kolektora L_2 liczy około 400 zwojów drutu miedzianego, również izolowanego emalią, o średnicy około 0,4 mm. Odpowiednie druty miedziane można uzyskać po rozmontowaniu starego transformatora. Obie cewki umieszczone są na wspólnym rdzeniu ferromagnetycznym R .

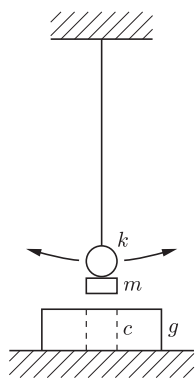
Jako rdzeń ferromagnetyczny można wykorzystać stalową śrubę z gwintem M6 o długości około 50 mm (rys. 2). Na śrubę należy wkręcić dwa krążki k o średnicy około 40 mm z otworem o średnicy 5,5 mm, wycięte z twardej tektury. Krążki umieszczamy w odległości około 30 mm od siebie i zabezpieczamy przed przesunięciem, wkręcając na śrubę nakrętkę n . Powierzchnię śruby między krążkami trzeba owinać kilkakrotnie taśmą



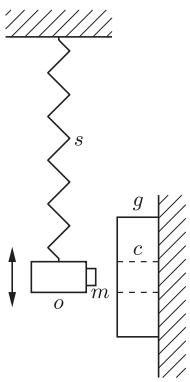
Rys. 1. Schemat elektryczny generatora samodławnego.



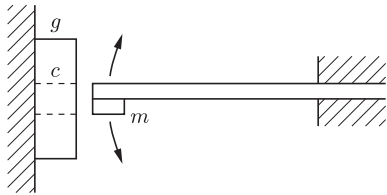
Rys. 2. Wygląd rdzenia cewek ze szpulką.



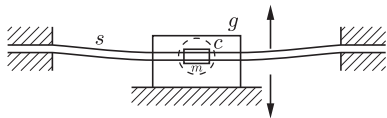
Rys. 3. Zastosowanie generatora samodławnego do napędu wahadła matematycznego.



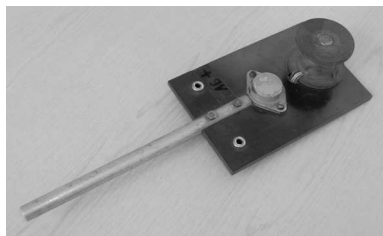
Rys. 4. Wykorzystanie generatora samodławnego do pobudzenia drgań sprężyny spiralnej.



Rys. 5. Zastosowanie generatora samodławnego do podtrzymania drgań sprężyny płaskiej.



Rys. 6. Wykorzystanie generatora samodławnego do pobudzenia drgań struny lub gumki.



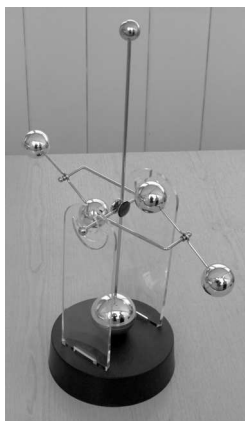
Fot. 1. Wygląd zmontowanego generatora samodławnego.

izolacyjną t lub poloplastem. W ten sposób otrzymujemy szpulkę z przedłużoną osią. W jednym z krążków wykonujemy cztery otworki o średnicy 1 mm, przeznaczone do przełożenia końców drutu tworzącego cewki. Wystający poza nakrętkę koniec śruby posłuży nam do zamocowania szpulki w uchwycie wiertarki o regulowanej prędkości obrotów. Wiertarkę należy umocować w stojaku lub imadle i nastawić na małą szybkość obrotów, które łatwo można będzie liczyć. Użycie opisanej szpulki i wiertarki pozwoli nam łatwo i szybko nawinąć cewki oraz uniknąć straty czasu na ręczne wykonywanie tej czynności. Obie cewki nawijamy w tym samym kierunku.

Nawinięte cewki oraz pozostałe elementy generatora należy umieścić na niewielkiej płytce izolacyjnej i połączyć ich końcówki przez zlutowanie według schematu elektrycznego z rysunku 1. Płytkę izolacyjną korzystnie jest zaopatrzyć w pręt ułatwiający mocowanie generatora w dowolnej pozycji i dwa gniazdka radiowe przeznaczone do przyłączenia źródła zasilania (fot. 1).

Zmontowany generator samodławný bardzo dobrze nadaje się do podtrzymywania ruchu różnych elementów drgających. Na rysunku 3 pokazano zastosowanie tego generatora do pobudzenia drgań wahadła matematycznego. Wahadło matematyczne możemy sporządzić z niewielkiej kulki plastelinowej k zawieszanej na nitce o długości kilkudziesięciu centymetrów. Od dołu do kulki przyklejamy niewielki magnes m . Pod magnesem umieszczamy generator samodławný g , tak żeby jego cewki c znalazły się pod swobodnie zwisającą kulką z magnesem. Mocując generator w płaszczyźnie pionowej obok poruszającego się magnesu, możemy go zastosować do pobudzenia drgań wahadeł sprężynowych, (rys. 4 i 5) oraz do podtrzymywania ruchu drgającej gumy lub struny (rys. 6). W każdym z tych układów do drgającego elementu należy przymocować niewielki magnes trwały m , a generator g umocować tak, żeby jego cewki c znalazły się w pobliżu drgającego magnesu.

Na zakończenie warto zwrócić uwagę na jeszcze jeden efektowny przypadek zastosowania generatora samodławnego. Są nim wahadła o wielu stopniach swobody, składające się z obręczy, prętów i kulek, mogących wykonywać niezależne ruchy (fot. 2–4). Ze względu na wielość stopni swobody w ruchu tych wahadeł występuje chaos deterministyczny, przejawiający się m.in. w nieoczekiwanych, gwałtownych zmianach rodzaju ruchu poszczególnych elementów. Co ciekawe, mimo występowania tarcia ruch tych wahadeł nie ustaje i sprawiają one wrażenie perpetum mobile. Czy widząc takie wahadła na witrynie sklepowej lub w sklepie z pamiątkami, zadawaliśmy sobie pytanie, co jest przyczyną ich nieustającego ruchu? Właśnie generator samodławný ukryty w podstawie takich wahadeł wraz z zasilającą go niewielką, dziewięciowoltową baterijką służy do podtrzymywania ich ruchu. Wahadła takie są łatwo rozbieralne i dzięki temu podstawę z generatorem można odłączyć od pozostałych elementów, wyjmując po prostu wsporniki z podstawy. Jeżeli mamy takie wahadło, to jesteśmy w posiadaniu generatora samodławnego, który możemy z powodzeniem wykorzystać do pobudzenia ruchu drgającego różnych układów.



Fot. 2-4. Przykłady wahadeł chaotycznych napędzanych generatorem samodławnym.

Pierwotna antycypacja

Czy zdolność przewidywania świadczy o myśleniu, o świadomości? Pytanie to pewnie nigdy nie znajdzie ostatecznej odpowiedzi. Dlatego ciekawsze jest zastanowienie się nad tym, co rozumiemy przez myślenie lub świadomość. Zostawiając z boku rozważania teologiczne, można przyjąć, że posiadanie centralnego układu nerwowego, nawet jeżeli nie wystarcza do świadomego myślenia, to jednak u większości nim obdarzonych raczej nie przeszkadza. Od ponad wieku wiadomo, że odruchy warunkowe, w tym takie, które można uważać za formę reagowania z wyprzedzeniem, daje się wykształcić u zwierząt wyższych. Reklamy telewizyjne są tego najlepszym, bo ekonomicznym, dowodem.

Jak prosty organizm może być zdolny do przewidywania? Tego też na razie nie wiadomo, ale można zacząć od czegoś naprawdę prostego. Dlaczego nie od pierwotniaków? Układu nerwowego nie mają, to czym miałyby przewidywać?

Treningiem takich sympatycznych żyjątek zajęła się grupa fizyków z Japonii [1]. Właściwie to organizm, który wzięli pod lupę, jeszcze niedawno był zaliczany do grzybów, ale ostatnio wylądował w supergrupie *Amoebozoa* (amebowate?). Konkretnie chodziło o *Physarum polycephalum*, czyli gatunek śluzni (lub śluzorośli). Organizm taki jest bardzo łatwo wyhodować na pożywce z agaru-agaru. Występuje w postaci wielojądrowej śluzni i wygląda jak skrzyżowanie pleśni i liścia. Porusza się jak ameba, zwłaszcza jeżeli uszczknie się jej tylko kawałek. Naukowcy zbudowali tor wyścigowy dla tak wyhodowanych ameb. Najpierw każdemu zawodnikowi pozwalali się przez kilka godzin rozgrzać w referencyjnych warunkach o temperaturze 26°C i wilgotności 90%. Średnia prędkość poruszania się badanych organizmów w tych warunkach wynosiła 0,2 mm/10 min. Ruch był monitorowany za pomocą kamer CCD przy podczerwonym podświetleniu. Następnie warunki periodycznie zmieniano na chłodniejsze i mniej wilgotne: 23°, wilgotność 60%. Zmiany dokonywano trzy razy na 10 minut w określonym odstępie T , który wynosił od 30 do 90 minut dla różnych zawodników. Za każdą zmianą ruch ameb spowalniał się.

Najciekawsze jest jednak to, że spowolnienie obserwowano dla prawie połowy ameb po upływie jednego, dwóch lub nawet trzech kolejnych okresów, pomimo zaprzestania zmiany warunków. Dla okresu $T = 60$ minut zaobserwowano również, że wystarczy jeden epizod przypominający posuchę, żeby niektóre badane ameby nieruchomiały po kolejnym okresie, któremu już nie towarzyszyła zmiana warunków.

[1] T. Saigusa, A. Tero, T. Nakagaki i Y. Kuramoto, *Amoebae Anticipate Periodic Events*, Phys. Rev Lett. **100**(2008)018101

Nie chciałbym nikogo pozbawiać możliwości osobistej kontemplacji wniosków płynących z opisywanej obserwacji. Wypada jednak przynajmniej wyjaśnić, dlaczego to fizycy wzięli się za trenowanie ameb i, co może jeszcze bardziej ciekawe, dlaczego wyniki opublikował periodyk, uważany przez fizyków za najbardziej prestiżowy.

Skoro do przewidywania nie jest potrzebna żadna forma organizacji wewnętrznej, bo takiej badane ameb nie mają, to czym wytłumaczyć zadziwiające zdolności antycypacyjne? Autorzy zaproponowali prosty model dynamiczny o takich samych własnościach oparty o przesłanki fizjologiczne. Ruch ameby jest związany z działaniem szeregu oscylatorów chemicznych. Rozkład częstości f tych oscylatorów jest typu $1/f$ dla okresów od sekundy do doby. Ponieważ badane zarodźce były dość duże, więc powinny zawierać wiele oscylatorów o tej samej częstości. Zewnętrzny periodyczny bodziec

może doprowadzić do synchronizacji fazy drgań grupy oscylatorów, która może utrzymywać się po wygaśnięciu wymuszającego bodźca. Porządek ten może zostać do pewnego stopnia zachowany nawet wtedy, gdy nie widać już żadnej periodyczności ruchu badanego organizmu. Wtedy ponowna pojedyncza stymulacja może odnowić periodyczność zachowania.

Bez względu na to, jaki jest konkretny mechanizm stojący za obserwowanym zachowaniem badanych ameb, można stwierdzić, że wykazują one proste cechy działalności mózgowej, mianowicie pamięć i reakcję na prawdopodobną zmianę warunków. To z kolei oznacza, że nieliniowe układy dynamiczne mogą być użyte do wyjaśnienia znacznie większej liczby zachowań żywych organizmów, niż nam się do tej pory wydawało.

Piotr ZALEWSKI

Informatyczny kącik olimpijski (7) – gra Penneya jeszcze inaczej



Alicja i Bob, jak wszyscy wiemy, lubią nie tylko szyfrować swoją korespondencję – drugą ich pasją jest granie w przeróżne gry. Tym razem chcą zagrać w grę Penney'a, opisaną w *Logomotywach* (*Delta* 2/2008) i chcieliby obliczyć szanse swojego zwycięstwa.

Przypominamy zasady: na początku każdy gracz wybiera pewne słowo zero-jedynkowe – swój wzorzec (wzorzec Alicji to A , a Boba – B). Następnie gracze zaczynają rzucać monetą. Kiedy wypada reszka, dopisują na osobnej kartce (do początkowo pustego ciągu) 0, kiedy orzeł – 1. Wygrywa ten z graczy, którego wzorzec pierwszy znajdzie się jako podsłowo w tak losowanym ciągu.

Możemy przyjąć, że żaden ze wzorców nie jest sufiksem drugiego wzorca, żeby uniknąć remisów.

Rzadko kiedy podejście bezpośrednie będzie rozwiązaniem takiego zadania, ale przemyślmy je. Nie możemy przejrzeć wszystkich możliwych losowanych ciągów – jest ich nieskończenie wiele. Ale przyjmijmy, że mamy jeden z nich – czyli wiemy, co kolejno wypadnie – i zobaczymy, jak wyglądałaby gra. W każdym momencie łatwo sprawdzić, czy gra właśnie się kończy – wystarczy sprawdzić, czy któryś ze wzorców właśnie stał się podsłowem (a zatem sufiksem) losowanego ciągu. Zastanówmy się też, czy musimy pamiętać cały losowany ciąg. Skoro wzorce porównujemy tylko z sufiksami ciągu, to wystarczy nam na pewno znać ostatnich $\max(\|A\|, \|B\|)$ znaków ciągu. Znajomość algorytmu Knutha–Morrisa–Pratta wyszukiwania wzorca w tekście może zasugerować następny krok: tak naprawdę nie musimy znać wszystkich tych znaków ciągu, wystarczy nam znajomość dwóch liczb: k_A i k_B , będących największymi liczbami spełniającymi:

$$F[\|F\| - k_X + 1, \dots, \|F\|] = X[1, \dots, k_X],$$

gdzie F jest losowanym ciągiem, a X to A lub B . Oczywiście, $k_A \leq \|A\|$ i $k_B \leq \|B\|$. Innymi słowy, k_A i k_B są długościami najdłuższych prefiksów A i B będących jednocześnie sufiksami F . Te liczby nam mówią, ile ostatnich znaków F „pasuje” do A i B . Jeśli nowy znak pasuje do X , to k_X rośnie o 1, a jeśli nie – maleje o pewną wartość. Oznaczmy przez $f_X(k_X, \alpha)$ nową wartość k_X , gdy następnym znakiem w ciągu będzie $\alpha \in \{0, 1\}$. Wszystkie wartości tej funkcji możemy obliczyć i np. stabilizować w czasie $O(\max(\|A\|, \|B\|))$, używając wspomnianego już algorytmu KMP, lub w czasie $O(\max(\|A\|, \|B\|)^2)$ bardziej łopatologicznie, co w zupełności dla naszych zastosowań wystarczy.

Wiedząc trochę więcej, zastanówmy się, jak teraz reprezentować stan gry? Zaczęliśmy od pełnego wylosowanego ciągu, potem chcieliśmy pamiętać tylko jego część, aż w końcu ograniczyliśmy się do dwóch liczb. W takim razie wszystkich stanów w grze będzie $\|A\|\|B\| + 2$ (wszystkie pary (k_A, k_B) plus jeszcze dwa stany – „Alicja wygrała” i „Bob wygrał”).

Z każdego stanu (k_A, k_B) , poza końcowymi, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ przejdziemy do każdego ze stanów $(f_A(k_A, \alpha), f_B(k_B, \alpha))$, gdzie $\alpha = 0$ lub 1. Jeśli dojdziemy do stanu z $k_A = \|A\|$ lub $k_B = \|B\|$, to zakończyliśmy grę.

W tym momencie mamy graf, w którym wierzchołkami są stany gry, a krawędziami – możliwe przejścia między nimi, etykietowane prawdopodobieństwami tych przejść. Stajemy więc przed następnym zadaniem – jak w takiej reprezentacji gry obliczyć prawdopodobieństwa wygranej Alicji i Boba, czyli prawdopodobieństwa dojścia ze stanu $(0, 0)$ do stanów końcowych? Odpowiedź byłaby banalnie prosta, gdyby nie było żadnych innych stanów. Możemy jednak usuwać stany pośrednie, które nas nie interesują. Niech v będzie stanem pośrednim, i niech $T_{i,j}$ będzie prawdopodobieństwem tego, że ze stanu i przejdziemy do stanu j . Jeśli z i nie ma krawędzi do j , to $T_{i,j} = 0$. Jak łatwo zauważyć, po usunięciu stanu v mamy

$$\begin{aligned} T'_{i,j} &= T_{i,j} + T_{i,v}T_{v,j}(1 + T_{v,v} + T_{v,v}^2 + \dots) = \\ &= T_{i,j} + \frac{T_{i,v}T_{v,j}}{1 - T_{v,v}}, \end{aligned}$$

dla $i, j \neq v$. Dlaczego? $T_{i,v}T_{v,j}$ jest prawdopodobieństwem tego, że ze stanu i przejdziemy do v , a następnie do j , zaś $T_{i,v}T_{v,v}^k T_{v,j}$ odpowiada k -krotnemu kręceniu się po drodze pętלקą w v .

W ten sposób, w czasie potrzebnym na przekształcenie T w T' , a więc $O(N^2)$, gdzie N jest ilością stanów, możemy usunąć pojedynczy wierzchołek – a więc w czasie $O(N^3)$ zredukujemy graf do trójki wierzchołków. I wtedy już wiemy, kto ma większe szanse wygrać. Na koniec dodajmy, że podane tu rozwiązanie bez kłopotu przenosi się na przypadek alfabetu więcej niż dwuelementowego.

Filip WOLSKI

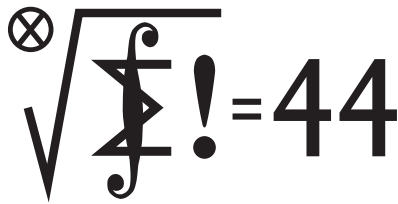


Rozwiązanie zadania F 714.

Z warunku równowagi otrzymujemy $p_0 l_1 S = (p_0 + \Delta p) l_2 S = (p_0 - \Delta p) X S$, gdzie Δp jest zmianą ciśnienia powietrza wewnątrz próbówki podczas jej obrotu. Otrzymujemy zatem

$$X = \frac{l_1 l_2}{2l_2 - l_1}, \quad l_2 < l_1 < 2l_2$$

(jeśli będzie $l_1 \geq 2l_2$, rtęć wypadnie).



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2008

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 559, 560

559. Na wolnych polach kwadratowej planszy o rozmiarach $n \times n$ dwaj gracze na przemian stawiają pionki (nierozróżnialne). Wygrywa gracz, po którego ruchu znajdą się cztery pionki na dowolnych czterech polach, będących narożnikami prostokąta o bokach równoległych do krawędzi planszy. Rozstrzygnąć (w zależności od n), który z graczy ma strategię zwycięską – rozpoczynający czy jego przeciwnik.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2007 Przypominamy treść zadań:

551. W zespole folklorystycznym jest n chłopców i $2n - 1$ dziewcząt. Zostały im przydzielone odpowiednio numery od 1 do n oraz od 1 do $2n - 1$. W przygotowaniach do programu, w którym ma wystąpić r par, tancerz o numerze i trenował tylko z tancerkami o numerach od i do $2i - 1$ ($i = 1, \dots, n$). Ile jest możliwości zestawienia tych r par tak, by w każdej parze znalazły się osoby mające za sobą wspólny trening?

551. Oznaczmy liczbę możliwych zestawień przez $F(n, r)$. Wyprowadzimy zależność rekurencyjną. Gdy $r = 0$ (występ z udziałem 0 par), przygotowanie do występu jest „pracą pustą”, którą można wykonać tylko w jeden sposób. Gdy $r > 0$, ale $n = 0$, to mamy zero możliwości zestawienia r par. Stąd wartości brzegowe:

$$F(n, 0) = 1 \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$F(0, r) = 0 \quad \text{dla } r = 1, 2, 3, \dots$$

Ustalmy $n, r > 0$. Tancerzowi o numerze n dajmy na imię Jasiek.

Jakby Jasiek chciał tańcować tobym z Jaśkiem tańcowała – ?
(Stanisław Wyspiański, *Wesele*)

Możemy ustawić r par, nie zapraszając Jaśka w ogóle; to się da zrobić na $F(n-1, r)$ sposobów. Teraz liczymy ustawienia, gdzie Jasiek wchodzi do jednej z par. Najpierw zestawiamy $r-1$ par, w których wystąpią pozostali chłopcy (o numerach od 1 do $n-1$); te pary możemy zestawić na $F(n-1, r-1)$ sposobów. Zostaje $(2n-1) - (r-1) = 2n - r$ wolnych tancerek, z których każda może być partnerką Jaśka. Dostajemy wzór

$$F(n, r) = F(n-1, r) + (2n - r)F(n-1, r-1)$$

(rozumowanie działa także w przypadku, gdy któraś z liczb $n-1, r-1$ jest zerem).

Wyprowadzony wzór rekurencyjny oraz warunki brzegowe wyznaczają wszystkie wartości $F(n, r)$. Obliczając te wartości dla niewielkich n, r wnet zauważymy, że uzyskiwane liczby $F(n, r)$ dzielą się przez $r!$. Wypisując następnie tabelkę wartości $F(n, r)/r!$, rozpoznajemy w jej elementach kwadraty liczb z trójkąta Pascala.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

560. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste m , dla których nierówność $(\sin x)^m \operatorname{tg} x > x^{m+1}$ jest spełniona dla $x \in (0; \pi/2)$.

Zadanie 560 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

552. Niech $a_n \geq 1$ oraz $b_n = \sqrt{a_n + \sqrt{a_n}} - \sqrt{a_n - \sqrt{a_n}}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Wykazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.

To sugeruje wynik:

$$F(n, r) = (r!) \binom{n}{r}^2,$$

gdzie jak zwykle $\binom{n}{r} = 0$ dla $r > n$. Aby uzasadnić, że istotnie jest to prawidłowy wynik, wystarczy sprawdzić, że odgadnięte liczby $F(n, r)$ spełniają uzyskane wcześniej warunki brzegowe oraz wzór rekurencyjny. Nietrudne sprawdzenie zostawiamy Czytelnikowi.

552. Z równości

$$b_n = \frac{2\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n + \sqrt{a_n}} + \sqrt{a_n - \sqrt{a_n}}} = \frac{2}{\sqrt{1 + a_n^{-1/2}} + \sqrt{1 - a_n^{-1/2}}}$$

widać, że jeśli $a_n \rightarrow \infty$, to $b_n \rightarrow 1$.

Dla dowodu implikacji przeciwnej podnosimy równość

$$b_n + \sqrt{a_n - \sqrt{a_n}} = \sqrt{a_n + \sqrt{a_n}}$$

stronami do kwadratu. Po redukcji dostajemy kolejną równość

$$2b_n \sqrt{a_n - \sqrt{a_n}} = 2\sqrt{a_n} - b_n^2,$$

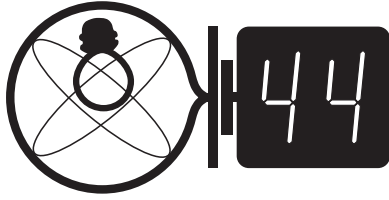
którą także podnosimy do kwadratu, otrzymując po przekształceniu zależność

$$4a_n(b_n^2 - 1) = b_n^4.$$

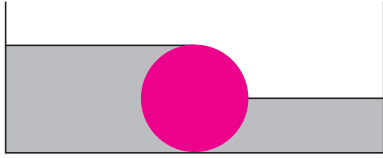
Wynika z niej, że $b_n^2 > 1$ oraz

$$a_n = \frac{b_n^4}{4(b_n^2 - 1)}.$$

Jeśli więc $b_n \rightarrow 1$, to $a_n \rightarrow \infty$.



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2008



456. W płaskim naczyniu położono walec i nalano cieczy z jednej jego strony do wysokości równej średnicy walca, a innej cieczy nalano z drugiej strony do wysokości równej promieniowi walca (rysunek). Przepływ cieczy wokół podstaw walca jest uniemożliwiony barierami, które nie przeszkadzają walcowi toczyć się w lewo lub w prawo. Jeśli gęstość walca jest równa ρ , w opisanej sytuacji pozostaje on w równowadze, a jego nacisk na dno naczynia jest równy połowie jego ciężaru, to ile wynosi gęstość cieczy z lewej strony walca, a ile – z prawej?

457. Pan Nowak wybiera się samochodem na urlop na południe i namawia do tego samego znajomych. Ma w tym pewien interes – oczekuje pewnego wydłużenia doby, a więc wydłużenia wakacji (przy niezmienionej cenie noclegów!). Udało mu się zebrać grupę 20 rodzin, którym skutecznie przedstawił przewagę Grecji nad Norwegią jako miejsca letniego wypoczynku. O ile wydłuży się doba wskutek tej wyprawy?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2007

448. Przepływ ciepła od wewnętrznej do zewnętrznej szyby okiennej wynika głównie z konwekcji powietrza (lub innego gazu) w obszarze między szybami. Ktoś zaproponował, żeby podzielić ten obszar poziomymi przegrodami na mniejsze komórki, ograniczając w ten sposób konwekcję, czyli polepszając izolację cieplną. Ktoś inny uważa, że skutek będzie odwrotny, gdyż skróci się droga przejścia gazu od kontaktu z jedną szybą do kontaktu z drugą. Który z dyskutantów ma rację? Pominąć przepływ ciepła przez przegrody. Dopuszczalne jest oparcie odpowiedzi na przeprowadzonym doświadczeniu.

448. Przy ustalonych temperaturach szyb ustalona jest też gęstość gazu przy jednej i przy drugiej szybie. Ciśnienie słupa gazu jest proporcjonalne do jego wysokości, zatem różnica ciśnień zimnego i ciepłego gazu jest proporcjonalna do wysokości komórki h . Aby obliczyć siłę napędzającą konwekcję, należy tę różnicę ciśnień pomnożyć przez powierzchnię, którą trudno dokładnie sprecyzować ze względu na zmienność temperatury i gęstości gazu. Z grubsza rzecz biorąc, jest to połowa przekroju poziomego obszaru między szybami, a w każdym razie jest to wielkość niezależna od h . Jeśli przepływ jest laminarny (bez zawirowań), to siła ta jest równoważona przez wynikającą z lepkości siłę tarcia warstw gazu. Ta siła jest proporcjonalna do powierzchni tych warstw, czyli do h , a ponadto zależy od prędkości krążenia i odległości szyb. Ponieważ zależność od h skracca się po obu stronach warunku równowagi, więc dochodzimy do wniosku, że prędkość krążenia będzie jednakowa w komórkach wyższych i niższych. W tej sytuacji argument drugiego dyskutanta jest rozstrzygający: gaz w mniejszej komórce szybciej przejdzie od kontaktu z jedną szybą do kontaktu z drugą, czyli wprowadzenie przegród pogorszy izolację cieplną.

Uważny Czytelnik dostrzeże bez trudu kilka niepewnych punktów powyższego rozumowania, np.
– czy przepływ jest rzeczywiście laminarny?
– czy skrócenie kontaktu gazu z szybą nie spowoduje, że wyrównanie temperatury będzie niepełne, co z kolei może zaowocować zmniejszeniem różnicy ciśnień napędzającej konwekcję?

Sądźmy, że te kwestie nie zmieniają podanej wyżej odpowiedzi, ale z zainteresowaniem czekamy na listy. Może Czytelnicy potraktują powyższe rozwiązanie jako „wypowiedź trzeciego dyskutanta” i nadesłają kolejne wypowiedzi polemiczne? Jakie będą wyniki doświadczeń? Ciekawsze głosy przedstawimy w podsumowaniu rocznym (w numerze lutowym 2009 r.).

Przypominamy treść zadań:

449. Dwa statki kosmiczne o jednakowej masie m zbliżają się do siebie z względną prędkością $2v_0$. Gdy ich odległość wynosiła l_0 , jeden ze statków wysłał w stronę drugiego impuls laserowy o energii E_0 , który odbił się od zwierciadła na drugim statku, następnie od zwierciadła na pierwszym itd., przy czym w każdym kolejnym odbiciu całość impulsu została odbita w opisany sposób. Ile będzie wynosiła minimalna odległość zbliżenia statków? Jeśli długość fali impulsu początkowego wynosiła λ_0 , to ile będzie wynosiła w chwili minimalnego zbliżenia? Pominąć grawitacyjne oddziaływanie statków i przyjmując $v_0 \ll c$, $E_0 \ll mvc$.

449. Oznaczmy prędkość każdego ze statków w układzie ich środka masy jako v . Na podstawie zasady zachowania pędu zmiana prędkości statku podczas odbicia impulsu spełnia równanie

$$m\Delta v = -2p = -2E/c,$$

gdzie p jest pędem impulsu. Pominięcie zmiany wartości p (uwzględnienie tylko zmiany zwrotu) jest uzasadnione na mocy podanych założeń; ponadto z drugiego z nich wynika, że zmiana prędkości jest niewielka w porównaniu z samą prędkością v i powinniśmy brać pod uwagę bardzo dużą liczbę odbić. W ciągu czasu dt liczba odbić jest równa cdt/l , z czego na każdy ze statków przypada połowa. Zatem zmianę pędu statku w ciągu tego czasu otrzymamy, mnożąc podaną wyżej wielkość $-2E/c$ przez $cdt/2l$:

$$mdv = -Edt/l = Edl/2lv,$$

gdzie wykorzystany został także związek $dl = -2vdt$. Pozostaje jeszcze skorzystać z zasady zachowania energii w celu wyznaczenia zmiany energii impulsu dE

$$mv^2 + E = \text{const}, \quad \text{czyli} \quad dE = -2mv dv.$$

Eliminując dv z powyższych równań, otrzymujemy

$$\frac{dE}{E} + \frac{dl}{l} = 0.$$

Całkowanie prowadzi do wzoru $El = \text{const} = E_0 l_0$. Ponieważ w chwili zatrzymania $E = mv_0^2$, więc szukana odległość zbliżenia wynosi

$$l_{min} = l_0 \frac{E_0}{mv_0^2}.$$

Liczba kwantów promieniowania nie ulegnie zwiększeniu, a jedynie wzrośnie energia każdego z nich, w stosunku odwrotnym do spadku odległości statków. Z kolei długość fali jest odwrotnie proporcjonalna do energii kwantu, więc zmienia się wprost proporcjonalnie do l . W chwili minimalnego zbliżenia

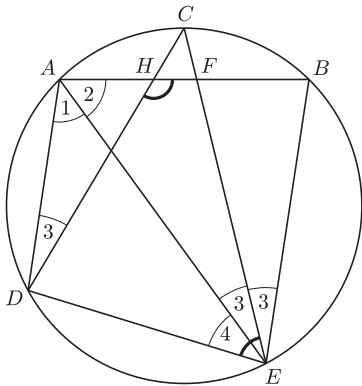
$$\lambda_{min} = \lambda_0 \frac{E_0}{mv_0^2}.$$

Rozwiązania zadań mmm.

1. $57,5^\circ$; 13° ; 53° ; 130° ; 18° ; 38° ; 89° ; 41° ; 140° ; 80° ; 68° ; 20° ; 33° ; 100° ; 50° .

2. 4; 6; 16; 18; 4; 3,5; 6; 2,5; 7; 9; 6; 18; 4; 26; 39.

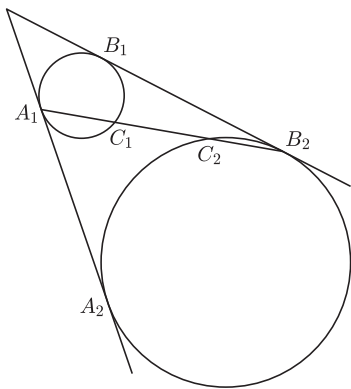
3. Na czworokącie można opisać okrąg, gdy suma jego przeciwległych kątów jest równa 180° . Przyjmując oznaczenia z rysunku ($\sphericalangle AEC = \sphericalangle BEC$, bo łuki AC i BC są równe), obliczamy



$$\begin{aligned} \sphericalangle DHF + \sphericalangle DEF &= \\ &= (\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3) + (\sphericalangle 3 + \sphericalangle 4) = \\ &= (\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2) + (\sphericalangle 4 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 3) = \\ &= \sphericalangle DAB + \sphericalangle DEB = 180^\circ, \end{aligned}$$

bo czworokąt DABE jest wpisany w okrąg.

4. Ponieważ A_1A_2 i B_1B_2 są symetryczne względem dwusiecznej kąta, więc



$$\begin{aligned} A_1B_2 \cdot (A_1C_1 + C_1C_2) &= \\ &= A_1B_2 \cdot A_1C_2 = \\ &= A_1A_2^2 = B_1B_2^2 = \\ &= B_2A_1 \cdot B_2C_1 = \\ &= A_1B_2 \cdot (B_2C_2 + C_1C_2) \end{aligned}$$

i po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy tezę.

Patrz w niebo

Nasza Galaktyka, jeżeli rozumieć pod tą nazwą gwiazdowy dysk z ramionami spiralnymi, w którym znajduje się nasze Słońce, otoczona jest przez kilkadziesiąt gromad kulistych gwiazd. Zauważamy prawidłowość: obiekty o symetrii sferycznej tworzą na peryferiach Galaktyki również system o symetrii sferycznej. Okazuje się, że do tych obiektów należy też zaliczyć centralne zgęszczenie (ang. *bulge*) Galaktyki. Zauważa się wtedy jeszcze głębszą prawidłowość: gwiazdy tworzące te niemal kuliste obiekty to gwiazdy bardzo stare, co poznaje się po niskiej zawartości w nich pierwiastków ciężkich. Widocznie gwiazdy te skondensowały się z pierwotnej materii Wszechświata zawierającej wodór, hel i mało co cięższych pierwiastków, które zostały w większych ilościach wyprodukowane później w następnych pokoleniach gwiazd.

Tu jednak należy przywołać świętą zasadę: to wszystko nie jest takie proste! Największą (kątowo na niebie i w rzeczywistości) gromadą kulistą jest Omega Centauri, w Polsce – niestety – niewidoczna. Jest to gromada wyjątkowa również z innych przyczyn. Otóż jest ona jedyną w Galaktyce gromadą kulistą, która zawiera gwiazdy zarówno ubogie, jak i zasobne w pierwiastki ciężkie, a więc stare i młode. W dodatku stwierdzono, że gwiazdy młode (których liczba w gromadzie wynosi około 5%) poruszają się inaczej niż cała reszta. Nasuwa się naturalne pytanie, jak do tego doszło. Badacze skłaniają się ku uznaniu, że te młode gwiazdy są resztkami innej gromady, którą Omega Centauri kiedyś wchłonęła. Ten mechanizm, zwany brutalnie kanibalizmem, jest dość często spotykany wśród układów gwiazdowych. Większy zjada tam mniejszego. Jeszcze inni uważają nawet, że sama Omega Centauri jest pozostałością po karłowatej galaktyce, której zewnętrzne warstwy już pochłonęła nasza Galaktyka. Podobnie musi się dziać z samymi gwiazdami. Mianowicie, w gęstym jądrze gromady gwiazdy powinny często tworzyć i niszczyć układy wielokrotne, a jeszcze innym skutkiem zbliżeń gwiazd powinno być wzajemne zdzieranie sobie zewnętrznych warstw i tworzenie w ten sposób błękitnych maruderów – o których czytamy w tym numerze na str. 8–10.

Tomasz KWAST

Kwiecień

Wysoko na południu widzimy wieczorem okazały gwiazdozbiór Lwa. Jego najjaśniejsza gwiazda, Regulus, leży dość dokładnie na ekliptyce. Niewątpliwie więc co rok Regulusa przesłania Słońce, czego oczywiście nie widać, bo w blasku Słońca (w dzień) żadnych gwiazd nie widać. Ale orbita Księżyca tworzy z ekliptyką kąt w przybliżeniu 5° , więc Księżyc ma szansę zakryć Regulusa, o ile w pobliżu tej gwiazdy znajduje się akurat któryś z węzłów orbity Księżyca (tj. punkt przecięcia się ekliptyki z rzutem orbity na niebo). Można wtedy obserwować wielomiesięczną serię comiesięcznych zakryć. Przejrzenie dawniejszych *Delt* wskazuje, że tak np. było przez cały rok 2007 (z wyjątkiem sierpnia) i tak jeszcze będzie w tym miesiącu, ale w maju będzie już ostatnie zakrycie Regulusa w bieżącej serii. Bowiem orbita pomału zmienia usytuowanie w przestrzeni, w szczególności jej węzły powoli przesuwa się po ekliptyce (przy niemal niezmiennym jej nachyleniu do ekliptyki).

Wenus jest w Rybach razem ze Słońcem, a więc jej nie widać. Mars jest w Bliźniętach, więc widać go w pierwszej połowie nocy. Jowisz jest w Strzelcu i widać go w drugiej połowie nocy, a Saturn we Lwie, więc widać go praktycznie przez całą noc. Nów Księżyca wypada 6 IV, a pełnia 20 IV. Oprócz zakrycia Regulusa (15 IV, widoczne na Madagaskarze i w części Antarktydy), nastąpi w kwietniu zakrycie Marsa (12 IV, widoczne w Kanadzie, na Grenlandii i Islandii) i Antaresa (23 IV, widoczne w Australii i Polinezji). Około 21 IV można spodziewać się skromnego roju Lirydów.



T. K.

Prawo arcusa sinusa

Rafał SZTENCEL

Do n komórek wrzucono n kul. Jaka jest szansa, że dokładnie jedna komórka pozostanie pusta?

Liczbę sprzyjających konfiguracji można obliczyć w czterech krokach: 1) wybieramy dwie kule na $\binom{n}{2}$ sposobów; 2) wrzucamy je do wybranej na n sposobów komórki; 3) z pozostałych komórek wybieramy pustą na $n-1$ sposobów; 4) pozostałe $n-2$ kul umieszczamy w $n-2$ komórkach na $(n-2)!$ sposobów.

Daje to $\binom{n}{2} \cdot n(n-1)(n-2)! = n! \binom{n}{2}$ sposobów, zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{n! \binom{n}{2}}{n^n}.$$

Licznik jest iloczynem tylko dwóch czynników, możliwe więc, że da się go otrzymać w dwóch krokach. Da się:

1) wkładamy po jednej kuli do każdej komórki na $n!$ sposobów; 2) wybieramy dwie kule na $\binom{n}{2}$ sposobów i kulę o mniejszym numerze przekładamy do komórki, gdzie jest kula o numerze większym.

Kolejne zadanie: wykonano dwie serie po n rzutów symetryczną monetą. Jaka jest szansa, że w obu seriach otrzymano tę samą liczbę orłów?

Szansa na k orłów w każdej serii jest równa

$$\frac{\binom{n}{k} \binom{n}{k}}{2^{2n}},$$

więc po zsumowaniu prawdopodobieństw wykluczających się zdarzeń dla $k = 0, 1, 2, \dots, n$ otrzymujemy (mocno niezadowolająca!) odpowiedź:

$$\frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}}{2^{2n}},$$

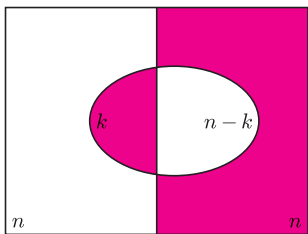
ponieważ licznik nie jest w zwartej postaci. Zauważmy jednak, że

$$\frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}}{2^{2n}} = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}}{2^{2n}} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

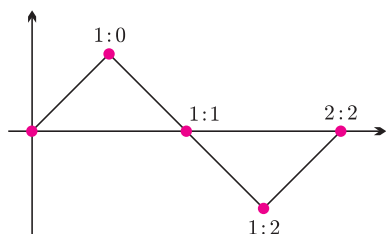
Istotnie, liczba podzbiorów n -elementowych zbioru $2n$ -elementowego, $\binom{2n}{n}$, jest równa $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$, jeśli bowiem podzielimy wyjściowy zbiór na dwa n -elementowe podzbiory, to z pierwszego bierzemy k elementów, z drugiego zaś $n-k$, gdzie $0 \leq k \leq n$ (rys.1).

Stąd wniosek, że zadanie można było zrobić prościej: wybrać n rzutów spośród $2n$. Jeśli wybrany rzut należy do pierwszej serii, wynikiem jest orzeł, jeśli do drugiej – reszka.

W tym świetle wyjątkowo frustrujące wydaje się zadanie trzecie: Agnieszka i Bolek grają w tenisa. Są to doświadczeni gracze o równych umiejętnościach, więc zakładamy równe szanse wygrania każdej piłki i niezależność poszczególnych wyników. Rozegrano $2n$ piłek. Jaka jest szansa, że Agnieszka



Rys. 1



Rys. 2

prowadziła przez $2k$ jednostek czasu? Przyjmujemy, że gdy historia rozgrywki wyglądała np. tak: 1:0, 1:1, 1:2, 2:2 (rys. 2), to A i B prowadzili przez 2 jednostki czasu.

Odpowiedź wyraża się prostym wzorem (por. [1], tw. 5.1, roz. III):

$$(1) \quad p_{2k,2n} = \frac{\binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}},$$

jednak – o ile nam wiadomo – nie ma on prostego wyprowadzenia. W [1] potrzebna jest cała strona rachunków i co najmniej jeden nietrywialny pomysł.

Wzór (1) ma nieoczekiwane konsekwencje. Jeśli $n = 10$, to w ponad 35% przypadków jeden z graczy będzie prowadził przez cały czas, natomiast na podział prowadzeń 10:10 przypada tylko 6%, tyle samo, co na każdy z wyników: 8:12, 12:8.

Wzór Stirlinga ($n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$) daje dla dużych n przybliżenie

$$p_{2k,2n} \sim \frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}};$$

dokładniej, gdy $k \rightarrow \infty$ i $n-k \rightarrow \infty$, iloraz obu stron zmierza do jedności. Wobec tego szansa, że ułamek k/n czasu prowadzenia leży między $\frac{1}{2}$ i t , dana jest wzorem

$$\sum_{n/2 < k < tn} p_{2k,2n} \sim \frac{1}{\pi n} \sum_{n/2 < k < tn} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}, \quad t > \frac{1}{2},$$

ale jest to suma Riemanna odpowiadająca całce

$$\int_{1/2}^t \frac{dx}{\pi \sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} - \frac{1}{2}.$$

Stąd wynika prawo arcusa sinusa dla procesu Wienera na przedziale $[0, 1]$. Proces Wienera jest w pewnym sensie granicą procesów takich, jak gra Agnieszki z Bolkem. Jeśli przez T oznaczymy czas, jaki trajektoria procesu spędza po stronie dodatniej, to

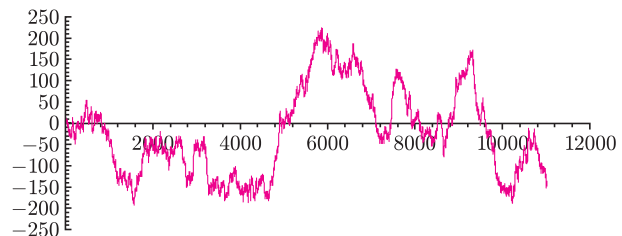
$$(2) \quad P(T \leq t) = \int_0^t \frac{dx}{\pi \sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}, \quad t \in [0, 1].$$

Stąd nazwa „prawo arcusa sinusa”. Gęstość zmiennej losowej T jest funkcją podcałkową w (2). Zmierza ona do nieskończoności na końcach przedziału $[0, 1]$.

Na rysunku 3 możemy zobaczyć typową – mamy nadzieję – trajektorię procesu Wienera. Tak naprawdę powstała ona w wyniku zapisania ponad 100 tysięcy wyników rzutów monetą, wykonywanych na Festiwalu Nauki w Warszawie przez kilka kolejnych lat. Na współrzędnej y odłożono przewagę orłów nad reszkami. Doświadczenie *Sprawdzamy prawo wielkich liczb* przeprowadzali Wiktor Bartol, Joanna Dębska i Konrad Pióro.

Bibliografia

[1] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. I, wyd. II, PWN, Warszawa 1966



Rys. 3