

26 stycznia 2008 roku w Grzegorzewicach
zmarł

Rafał Sztencel

matematyk i wydawca
wieloletni Współpracownik i Autor *Delty*

SPIS TREŚCI NUMERU 3 (406)

Największa liczba na świecie
Tomasz Bartnicki


Domniemania i hipotezy
o turbulencji
Grzegorz Łukaszewicz


Zbiory kresowe dla wielomianów
o współczynnikach całkowitych
Tomasz Kobos


Spacerkiem po kwadracie
Adam Kolany

Aktualności

O pewnej sztuczce
Michał Skrzypczak

 Słowna kwota
Andrzej P. Urbański

 Badamy zjawisko rezonansu
Stanisław Bednarek

 O empirii i teorii na
przykładzie uogólnienia gry Penneya
Andrzej Walat

„Historia astronomii”


 Zadania

Informatyczny kącik olimpijski (6) –
od przybytku głowa (nie) boli
Michał Adamaszek

Klub 44

Patrz w niebo

Marzec

 Uczuciowy tenisista
Rafał Sztencel

str. 1

str. 4

str. 6

str. 8

str.11

str.12

str.14

str.16

str.18

str.20

str.20

str.21

str.22

str.24

str.24

str.25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Adamaszek, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Andrzej Walat, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i rysunki: Emilia Bojańczyk. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 5450,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)
internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2008 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2008 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 0-804-200-600

Cena prenumeraty w 2008 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5 każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

W następnym numerze:
Laboratorium tatrzańskie

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Największa liczba na świecie

Ludzie od niepamiętnych czasów prześcigali się w bicie rekordów w najprzeróżniejszych dziedzinach, od czysto sportowych (szybciej, wyżej, mocniej), poprzez cywilizacyjne (wyższe budowle, większe samoloty, szybsze komputery), aż po całkiem absurdalne, żeby nie powiedzieć głupie. Taka już jest bowiem nasza natura, że jeśli tylko mamy szansę zrobienia czegoś w najlepszy z możliwych sposobów, to na pewno podejmiemy próbę zrobienia tego. Mania bicia rekordów nie ominęła również matematyków, którzy prześcigają się w znajdowaniu coraz większych liczb pierwszych czy też coraz dłuższych rozwinięć dziesiętnych liczby π . W artykule tym zaprezentujemy jeden z takich matematycznych rekordów. Przedstawimy największą liczbę, jaka kiedykolwiek została użyta w pracy matematycznej.

Aby dobrze zrozumieć, co wyraża największa liczba na świecie, konieczne będzie krótkie wprowadzenie, które zaczniemy od prostej obserwacji matematyczno-socjologicznej.

Sześć osób na przyjęciu

Wyobraźmy sobie, że w jakimś miejscu (np. na przyjęciu) spotyka się pewna grupa ludzi i, jak to w życiu zwykle bywa, niektórzy z nich znają się, inni zaś są sobie obcy. Możemy założyć, że relacja bycia znajomym jest określona dla każdej pary osób (albo się znają, albo nie znają) i jest symetryczna (jak ja znam ciebie, to i ty znasz mnie). Jeśli spojrzymy teraz na dowolną grupę złożoną z sześciu osób i przeanalizujemy układ znajomości między nimi, to łatwo dojdziemy do następującego spostrzeżenia:

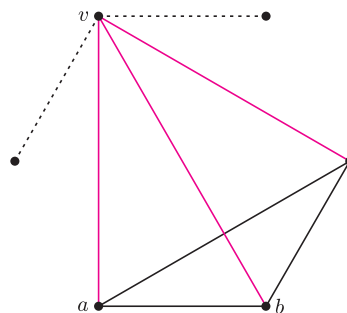
Twierdzenie 1. *Wśród dowolnych sześciu osób zawsze znajdziemy:*

- albo trzy osoby, które znają się wzajemnie (każda z każdą),*
- albo trzy osoby, które nie znają się wcale (żadna z żadną).*

Dowód. Aby udowodnić ten fakt, przeformułujemy go na język teorii grafów następująco: każdą z sześciu osób utożsamiamy z innym wierzchołkiem grafu, a następnie każdą parę wierzchołków (osób) łączymy krawędzią. Powstanie w ten sposób graf, który nazywamy *grafem pełnym* (lub *kliką*) na sześciu wierzchołkach i oznaczamy przez K_6 . Układ znajomości przedstawiamy w ten sposób, że każdej krawędzi nadajemy jeden z dwóch kolorów: zielony – jeśli osoby umieszczone w wierzchołkach, które ona łączy, znają się, lub czarny – jeśli osoby te nie znają się. Wystarczy teraz pokazać, że przy dowolnym takim zielono-czarnym kolorowaniu krawędzi zawsze znajdziemy trzy wierzchołki połączone krawędziami w jednym kolorze (tworzące zieloną lub czarną klikę K_3).

Ustalmy w pokolorowanym już grafie dowolny wierzchołek v i zauważmy, że skoro wychodzi z niego pięć krawędzi, to co najmniej trzy z nich muszą być w tym samym kolorze, powiedzmy zielonym.

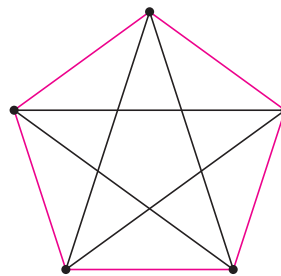
Tomasz BARTNICKI*



Rys. 1. Jednokolorowa klika K_3 w grafie K_6 .

Oznaczmy wierzchołki na drugich końcach tych krawędzi przez a, b, c i przeanalizujemy kolorowanie powyższego układu (rysunek 1). Ponieważ krawędzie va, vb oraz vc są zielone, to nadanie koloru zielonego którejkolwiek z krawędzi ab, bc lub ac spowoduje pojawienie się trójkąta w tym kolorze (odpowiednio vab, vbc lub vac). Z kolei, jeśli wszystkie mają kolor czarny, otrzymujemy czarny trójkąt abc , co kończy dowód.

Warto jeszcze zauważyć, że w powyższym twierdzeniu liczby sześć nie możemy zmniejszyć, gdyż w grupie pięcioosobowej możemy tak dobrać układ znajomości, aby uniknąć monochromatycznego trójkąta (tak jak na rysunku 2).



Rys. 2. Kolorowanie grafu K_5 bez jednokolorowej kliki K_3 .

Twierdzenie Ramseya

Nasuwa się pytanie, czy twierdzenie o sześciu osobach można uogólnić. Czy, jeżeli zamiast żądać pojawienia się jednokolorowej kliki trzyosobowej, zażądamy, aby taka klika składała się z czterech osób, to czy w odpowiednio dużej grupie musi się ona pojawić? Co wreszcie z ogólnym przypadkiem dowolnej kliki K_k ? W 1930 ukazała się praca Franka Ramseya, w której udowodnił on bardzo daleko idące uogólnienie naszych rozważań, a szczególnym przypadkiem była odpowiedź na postawione wcześniej pytanie.

Twierdzenie 2 (Ramsey (1930)). *Dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba naturalna n , że wśród dowolnych n osób zawsze znajdziemy:*

- albo k osób, które znają się wzajemnie (każda z każdą),*
- albo k osób, które nie znają się wcale (żadna z żadną).*

Najmniejsze takie n , którego istnienie gwarantuje powyższe twierdzenie, oznaczamy przez $R(k)$ i nazywamy *k -tą liczbą Ramseya*.

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Zielonogórski

Można powiedzieć trochę filozoficznie, że twierdzenie Ramseya mówi o nieuchronności pojawiania się pewnych regularności w dużych strukturach. Dla każdego małego obiektu matematycznego możemy zawsze znaleźć odpowiednio dużą strukturę, w której obiekt ten musi się pojawić.

Liczby Ramseya i kosmici

Pojawia się następny naturalny problem: czy istnieje jakiś jawny wzór na kolejne liczby Ramseya, a jeśli nie, to czy można je chociaż efektywnie wyznaczać. Wiadomo, że $R(2) = 2$ (dwie osoby znają się bądź nie znają), pokazaliśmy też, że $R(3) = 6$, ale już wykazanie, że $R(4) = 18$, nie jest sprawą łatwą. Po pierwsze, musimy pokazać, że istnieje dwukolorowanie krawędzi grafu K_{17} , w którym unikniemy jednokolorowej klikki K_4 . Okazuje się, że kolorowanie takie jest wyznaczone jednoznacznie (z dokładnością do permutacji wierzchołków), a otrzymujemy je w ten sposób, że wierzchołkom grafu przypisujemy liczby $\{0, 1, \dots, 16\}$ z ciała \mathbb{Z}_{17} , krawędź zaś malujemy na czarno wtedy i tylko wtedy, gdy różnica liczb na jej końcach jest kwadratem w tym ciele. Wykazanie, że w grafie K_{18} takie kolorowanie jest niemożliwe, jest sprawą znacznie trudniejszą.

A ile wynosi $R(5)$? Otóż, zaskakujące jest, że dokładna wartość piątej liczby Ramseya nie jest dotąd znana, co na pierwszy rzut oka wydaje się nieprawdopodobne. Wiadomo tylko, że $43 \leq R(5) \leq 49$. Któż z nas teraz nie zakrzyknie: od czego mamy nowoczesne komputery?! Czy przebadanie kolorowań grafu pełnego na zaledwie 43 wierzchołkach może w dzisiejszych czasach stanowić jakąkolwiek trudność? Gdy jednak przyjrzymy się problemowi bliżej i dokonamy kilku obliczeń, sprawa staje się jasna. Zauważmy, że graf K_{43} ma $\binom{43}{2} = 903$ krawędzi, więc chcąc przeanalizować ich wszystkie możliwe dwukolorowania, musielibyśmy rozpatrzyć 2^{903} (czyli około 10^{271}) przypadków, a to już znacznie przekracza możliwości nawet najszybszych superkomputerów. Z kolejnymi liczbami Ramseya sprawa wygląda jeszcze gorzej: $102 \leq R(6) \leq 165$, $205 \leq R(7) \leq 540$, $282 \leq R(8) \leq 1870$. Naiwnością byłoby również sądzić, że mogą one się wyrażać jakimkolwiek jawnym wzorem.

Aby oddać skalę trudności problemu znajdowania liczb Ramseya, warto przypomnieć opowiastkę, którą często zwykł przytaczać Paul Erdős, a trudno chyba o większy autorytet w tej dziedzinie (opublikował on przeszło 100 prac dotyczących teorii Ramseya).

Wyobraźmy sobie, że wrogo nastawiona i znacznie potężniejsza militarnie obca cywilizacja napada na Ziemię i żąda od ludzi wyznaczenia dokładnej wartości liczby $R(5)$, gdyż w przeciwnym razie zniszczy planetę. Co powinniśmy zrobić, aby nie dopuścić do zagłady? Powinniśmy zmobilizować wszystkich matematyków, informatyków

i programistów, zaprogramować wszystkie komputery na świecie i spróbować znaleźć żadaną wartość. A co, jeśli kosmici zażądają wyznaczenia liczby $R(6)$? Wówczas powinniśmy spróbować... zniszczyć najeźdźców.

Musimy pogodzić się z tym, że, prawdopodobnie, nigdy nie dowiemy się, ile wynosi szóstka, siódma i następne liczby Ramseya, co wcale nie znaczy, że ludzie zaprzestaną swych wysiłków w próbach ich wyznaczenia.

Grafy Ramseya w przestrzeni

W dotychczasowych rozważaniach grafy traktowaliśmy w sposób abstrakcyjny, czyli jako parę złożoną z pewnego skończonego zbioru V (wierzchołki) i z kolekcji jego dwuelementowych podzbiorów E (krawędzie), natomiast tradycyjny rysunek grafu na płaszczyźnie (punkty połączone liniami) służył nam jedynie do lepszej wizualizacji prezentowanych problemów, ale w żaden sposób nie wykorzystywaliśmy jego geometrycznych własności.

Ostatnim krokiem do poznania największej liczby na świecie będzie spojrzenie na twierdzenie Ramseya w sposób geometryczny. Będziemy rozważać grafy pełne, których wierzchołki będą umieszczone we wszystkich wierzchołkach wielowymiarowej kostki jednostkowej w przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru (na prostej będą to końce odcinka, na płaszczyźnie wierzchołki kwadratu, w przestrzeni trójwymiarowej wierzchołki sześcienu itd.). Ogólnie w przestrzeni \mathbb{R}^n będzie 2^n wierzchołków (a więc powstanie graf K_{2^n}) i będą nimi wszystkie punkty, których współrzędne tworzą ciąg zerojedynekowy.

Była już mowa, że $R(4) = 18$, a więc, jeśli krawędzie grafu pełnego, który ma co najmniej 18 wierzchołków, pomalujemy dwoma kolorami, to musi się pojawić jednokolorowa klikka K_4 . Jeżeli rozważać będziemy tylko kolorowania grafów pełnych związanych z kostkami jednostkowymi, to zauważymy, że w przestrzeni \mathbb{R}^4 graf taki ma tylko 16 wierzchołków, a więc możemy jego krawędzie tak pokolorować, by uniknąć jednokolorowej klikki K_4 , natomiast już w przestrzeni \mathbb{R}^5 w grafie na 32 wierzchołkach klikka taka pojawi się w każdym dwukolorowaniu.

Zażądajmy dodatkowej własności: aby klikka K_4 była nie tylko jednokolorowa, ale na dodatek, aby wszystkie jej wierzchołki leżały w jednej płaszczyźnie (nazywamy ją płaską). Możemy teraz postawić pytanie: jakiego wymiaru musi być kostka jednostkowa, aby w dowolnym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego z nią powiązanego zawsze pojawiła się **płaska i monochromatyczna** kopia klikki K_4 ? Zauważmy, że klasyczne twierdzenie Ramseya nie mówi nam nic o jakichkolwiek geometrycznych własnościach, a więc nie mamy żadnej pewności, iż powyższe pytanie ma w ogóle odpowiedź wyrażającą się skończoną liczbą.

W 1971 roku Ronald Graham i Bruce Rothschild opublikowali pracę, w której udowodnili twierdzenie bardzo głęboko uogólniające wiele dotychczasowych rezultatów typu ramsejowskiego. Twierdzenie Ramseya było tylko drobnym wnioskiem płynącym z ich ogólnych rozważań. Twierdzenie Grahama–Rothschilda dawało również pozytywną odpowiedź na postawione wcześniej pytanie. Mianowicie, istnieje taka liczba naturalna n , że w dowolnym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego powiązanego z n -wymiarową kostką jednostkową zawsze pojawi się płaska i jednokolorowa klika K_4 . Oznaczmy najmniejsze n o tej własności przez $RG(1, 2, 2)$. Nadmiar parametrów w RG ma na celu pokazanie, że jest to w istocie szczególny (najmniejszy nietrywialny) przypadek ogólnego twierdzenia. Oznaczają one kolejno: 1 – kolorujemy obiekty jednowymiarowe (krawędzie), 2 – obiekt, który musi się pojawić, jest dwuwymiarowy (płaska klika K_4), 2 – używamy dwóch kolorów.

Nasuwa się naturalne pytanie, czy znana jest dokładna wartość $RG(1, 2, 2)$, a jeśli nie, to czy można ją jakoś sensownie oszacować. Ronald Graham pokusił się o wyliczenie konkretnej wartości jej górnego oszacowania, które wynikało bezpośrednio z dowodu ich głównego twierdzenia i zamieścił ten wynik w opublikowanej wspólnie z Rothschildem pracy. Jednak szerzej stał się on znany dopiero w 1977 roku, kiedy został opisany przez Martina Gardnera na łamach jego popularnej rubryki w *Scientific American*. Wiadomo więc, że $RG(1, 2, 2) \leq LG$, gdzie LG nazywana jest liczbą Grahama, lecz zanim poznamy jej wartość, konieczne będzie zapoznanie się ze specjalną notacją.

Notacja strzałkowa Knutha

Gdy na początku swojej edukacji poznajemy nowe działanie arytmetyczne, staramy się je zdefiniować za pomocą działań poznanych wcześniej. Mnożenie dwóch liczb naturalnych $m \cdot n$ definiuje się jako n -krotne dodawanie składnika m , z kolei potęgowanie m^n , jako n -krotne mnożenie czynnika m . Donald Knuth wpadł na pomysł, aby procedurę tę uogólnić, definiując kolejne działania jako wielokrotne złożenia poprzednich. Punktem wyjścia niech będzie zwykłe potęgowanie:

$$m \uparrow n = m^n = \underbrace{m \cdots m}_n,$$

które zapisujemy za pomocą pojedynczej strzałki (tak jak tradycyjny zapis używany w informatyce). Kolejne działania notować będziemy podobnie (zwiększając tylko liczbę strzałek) i definiować rekurencyjnie:

$$m \uparrow\uparrow n = \underbrace{m \uparrow m \uparrow \cdots \uparrow m}_n = m^{\overbrace{m \cdots m}^m},$$

$$m \uparrow\uparrow\uparrow n = \underbrace{m \uparrow\uparrow m \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow m}_n,$$

a w ogólności

$$m \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow n = \underbrace{\overbrace{m \uparrow\uparrow \cdots \uparrow m}^{k-1} \uparrow \cdots \uparrow \overbrace{m \uparrow\uparrow \cdots \uparrow m}^{k-1} \cdots m \uparrow \cdots \uparrow m}_n.$$

Ponieważ działania strzałkowe nie są łączne, to ustaliśmy dodatkowo, że w przypadku braku nawiasów wykonujemy je w kolejności od prawej do lewej (analogicznie jak przy wielokrotnym potęgowaniu). Aby nieco oswoić się z taką notacją, wykonajmy kilka prostych obliczeń. Łatwo zauważyć, że

$$2 \uparrow\uparrow \cdots \uparrow 2$$

jest zawsze równe 4, niezależnie od liczby strzałek, nietrudno też obliczyć, że

$$3 \uparrow 3 = 3^3 = 27.$$

Nieco dłuższe rachunki musimy wykonać, aby obliczyć

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow 3 \uparrow 3 = 3 \uparrow 27 = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987.$$

Jeśli liczba rzędu siedmiu bilionów nas nie przeraża, to spróbujmy obliczyć

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 7\,625\,597\,484\,987$$

i tu, niestety, nasza moc obliczeniowa staje się niewystarczająca, gdyż w kolejnym kroku musielibyśmy napisać przeszło siedem i pół biliona trójek przedzielonych pojedynczymi strzałkami, co w tradycyjnym zapisie oznacza wieżę potęgowa o wysokości 7 625 597 484 987 zbudowaną z trójek. Oczywiście, trudna jest jakkolwiek próba wyobrażenia sobie wielkości tej liczby. Możemy chyba tylko czuć ją intuicyjnie, widząc jej zapis w postaci wieży potęgowej.

Liczba Grahama

Jeśli chcesz, Czytelniku, poznać wielkość liczby Grahama, musisz pójść krok dalej i spróbować ogarnąć (choć jest to prawdopodobnie niewykonalne) wielkość liczby $G_0 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3$, a następnie wykonać krok drugi (który jest już chyba krokiem w otchłań nieskończoności) i poznać liczbę zdefiniowaną następująco:

$$G_1 = 3 \underbrace{\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow}_{G_0 \text{ strzałek}} 3.$$

Jeśli wykonaliśmy 2 kroki, to kolejne nie powinny już sprawić trudności. Niech

$$G_2 = 3 \underbrace{\uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow\uparrow}_{G_1 \text{ strzałek}} 3,$$

$$G_3 = 3 \underbrace{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}_{G_2 \text{ strzałek}} 3,$$

i tak dalej, aż po 64 krokach zatrzymamy się wreszcie, bo oto poznamy największą liczbę na świecie, czyli Liczbę Grahama:

$$RG(1, 2, 2) \leq LG = G_{63} = 3 \underbrace{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}_{G_{62} \text{ strzałek}} 3.$$

Na zakończenie warto odnotować pewną ciekawostkę. Liczba Grahama została zauważona również przez ludzi, którzy zawodowo zajmują się wszelkimi rekordowymi osiągnięciami, trafiła bowiem w 1997 roku do *Księgi Rekordów Guinnessa* i, prawdopodobnie, pozostanie tam jeszcze przez długie lata. Należy jeszcze dodać, że najlepszym znanym dziś dolnym oszacowaniem liczby $RG(1, 2, 2)$ jest 10, więc pierwszą możliwą jej dokładną wartością jest liczba 11.

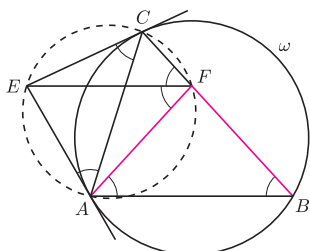


Rozwiązanie zadania M 1200.

Zauważmy, że

$$\sphericalangle EAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle EFC,$$

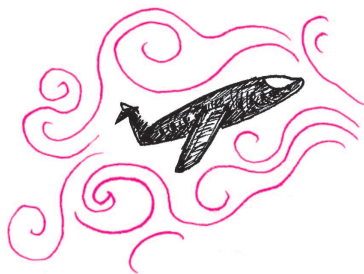
skąd wynika, że punkty E, A, F, C leżą na jednym okręgu.



Wobec tego otrzymujemy

$$\sphericalangle FBA = \sphericalangle ECA = \sphericalangle EFA = \sphericalangle FAB,$$

skąd bezpośrednio uzyskujemy tezę.



Domniemania i hipotezy o turbulencji

Grzegorz LUKASZEWICZ*

Pełne zrozumienie, a następnie opisanie zjawiska turbulencji w ramach spójnej teorii matematycznej stanowi wciąż duże wyzwanie dla fizyków i matematyków.

Turbulencja jest wszechobecna w przyrodzie, występuje w ogromnym zakresie skal wielkości, dotyczy zarówno ruchu płynów wewnętrznych w organizmach żywych, jak i ruchu gazu międzygwiazdowego. Hipotez i domniemań związanych z turbulencją jest mnóstwo, poczynając od problemu właściwego zdefiniowania zjawiska, doboru właściwego języka opisu, pytań o zakres zastosowań równań hydromechaniki klasycznej i dalszych pytań dotyczących interpretacji ich rozwiązań. Zanim przejdziemy do krótkiego przedstawienia kilku hipotez i domniemań, parę słów o samym zjawisku.

1. Co to jest turbulencja? Przykłady przepływów turbulentnych.

Będziemy mówić o przepływach cieczy i gazów (np. wody czy powietrza). Rozróżniamy przepływy laminarne (spokojne i uporządkowane) i przepływy turbulentne, o złożonej strukturze, charakteryzujące się dużymi i nieregularnymi wahaniami (zarówno w przestrzeni, jak i w czasie) prędkości, ciśnienia i innych zmiennych hydrodynamicznych. Do tych drugich należy większość przepływów spotykanych w przyrodzie czy generowanych przez człowieka. Przykłady zjawiska turbulencji to np. ruch powietrza w atmosferze ziemskiej, magmy we wnętrzu Ziemi, wody w rzekach i oceanach, gazu międzygwiazdowego, czy w mniejszej skali: ruch powietrza w pokoju, powietrza wydychanego z płuc, dymu w kominie czy spalin samochodowych.

Przepływy turbulentne dzięki swej złożonej strukturze mają inne własności niż „porządne” przepływy laminarne, np. wywierają większe siły na napotkane ciała stałe (zapinamy pasy bezpieczeństwa, wlatując w obszar turbulentny podczas lotu samolotem), mają większą zdolność przenoszenia ciepła, propagowania reakcji chemicznych, jak również mogą rozpraszać fale dźwiękowe czy elektromagnetyczne.

Hydrodynamika jako nauka o ruchu płynów zajmowała się przez długi czas głównie przepływami laminarnymi, jako że przepływy turbulentne wymykały się zarówno zrozumieniu, jak i obliczeniom. Dopiero zastosowanie metod probabilistycznych, nowoczesnego aparatu nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych i nieskończenie wymiarowych układów dynamicznych pozwoliło zauważyć, że „w tym chaosie jest metoda”. Mechanika turbulencji to statystyczna mechanika płynów. Jej prawa dotyczą uśrednionych wielkości hydrodynamicznych, a nie indywidualnych pól wektorowych, których zachowanie jest chaotyczne.

2. Domniemania i hipotezy.

Poniżej przedstawione są wybrane problemy dotyczące nauki o turbulencji, skupiające się wokół kilku podstawowych i kilku matematycznych pytań.

(H1) Istnieje uniwersalna teoria turbulencji.

Poszukiwanie praw ogólnych ma podstawowe znaczenie dla zrozumienia rzeczywistości. Najważniejsze teorie mają charakter unifikujący, to znaczy łączący zjawiska rozważane wcześniej oddzielnie. Przykłady takich teorii to teoria grawitacji Newtona unifikująca świat podksiężycowy i świat nadksiężycowy, teoria ewolucji Darwina unifikująca cały świat organizmów żywych, teoria elektromagnetyzmu Maxwella unifikująca elektryczność i magnetyzm, czy teoria względności Einsteina unifikująca przestrzeń i czas.

W teorii turbulencji brak dotychczas jednolitego opisu matematycznego. Mamy różne opisy dla różnych zakresów wielkości, różnych typów przepływu, opierające się na różnych założeniach fenomenologicznych dobieranych czasami ad hoc. Analogią z zakresu mechaniki klasycznej może być np. opis ruchu pocisku armatniego i ruchu Księżyca wokół Ziemi w czasach sprzed pojawienia się teorii grawitacji. Domniemanie dotyczy istnienia pojęć i praw ogólnych. Jedną

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



z wielkości uniwersalnych w teorii turbulencji jest liczba Reynoldsa charakteryzująca stosunek typowych sił inercjalnych do sił lepkościowych w danym przepływie. Za jej pomocą można określić np. natężenie nieuporządkowania w przepływie (liczbę stopni swobody przepływu).

(H2) Równania Naviera–Stokesa opisują przepływy turbulentne.

Jest to bardzo istotne domniemanie, wyrażające przekonanie, że całość zjawisk dotyczących przepływów turbulentnych mieści się w teorii hydrodynamiki klasycznej opartej na równaniach Naviera–Stokesa,

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0.$$

Jest to hipoteza o uniwersalności równań Naviera–Stokesa. W fizyce mamy do czynienia z równaniami o zakresie lokalnym i z takimi, którym przysługuje zakres globalny. Do tych ostatnich należą np. równania Maxwella. A jaki jest status równań Naviera–Stokesa? Jest zadziwiające, jak wiele cech charakterystycznych przepływów turbulentnych można z nich wydedukować. Podobnie jak to ma miejsce z najważniejszymi równaniami w fizyce, wydaje się, że są one mądrzejsze od nas, że można z nich wydobyć dużo więcej niż się ktokolwiek spodziewał. W przypadku równań Naviera–Stokesa jest to szczególnie zastanawiające, gdy weźmiemy pod uwagę fakt, że wyrażają one podstawowe prawa zachowania i są oparte na kilku zaledwie naturalnych założeniach fenomenologicznych.

(H3) Turbulencję można opisać w ramach teorii chaosu deterministycznego.

Mamy tu dwie hipotezy. Pierwsza stanowi tzw. problem milenijny, postawiony pod koniec ubiegłego wieku jako jedno z najważniejszych zagadnień w matematyce stanowiące wyzwanie dla nowego stulecia, a dotyczące pytania, czy globalne względem czasu, tzn. określone na całej półprostej $(0, +\infty)$, rozwiązania równań Naviera–Stokesa, o których wiemy, że istnieją, są dostatecznie regularne. Jeśli takie są, to są także jednoznacznie określone przez dane zadania. Możemy je zatem badać w ramach dobrze już rozwiniętej teorii układów dynamicznych. Za silnie nieuporządkowane zachowanie się rozwiązań (ruch turbulentny) byłoby wtedy odpowiedzialne dobrze znane zjawisko chaosu deterministycznego. Jest to właśnie drugie domniemanie. Stosunkowo nowa teoria nieskończenie wymiarowych układów dynamicznych, zainspirowana w dużej mierze potrzebami hydrodynamiki, zaczyna dawać bardzo obiecujące wyniki w zastosowaniu do teorii równań Naviera–Stokesa i do badania długookresowego zachowania się ich rozwiązań. Dotyczy to np. teorii atraktorów i rozwiązań statystycznych.

(H4) Osobliwości rozwiązań równań Naviera–Stokesa tłumaczą turbulencję.

Regularność rozwiązań równań Naviera–Stokesa, o której mowa w poprzednim punkcie, jest sprawą otwartą, zatem jest miejsce dla hipotezy konkurencyjnej, mówiącej o tym, że być może rozwiązania te nie są wcale regularne i jednoznacznie określone przez dane zadania (np. dane początkowe). Bardzo piękne twierdzenie J. Leraya dotyczące rozwiązań w całej przestrzeni, stanowiące pewien argument, że taka sytuacja może mieć miejsce, mówi, iż rozwiązania są bardzo regularne poza, *być może*, pewną liczbą chwil, zawartą w skończonym przedziale czasu. Zbiór takich potencjalnych osobliwości jest domknięty i nie zawiera

odcinka, a jego wymiar Hausdorffa jest nie większy od $\frac{1}{2}$. Jeśli ten zbiór jest niepusty, to może być odpowiedzialny za fenomen turbulencji (w każdej takiej chwili pole wektorowe wirowości przepływu nie jest całkowalne z kwadratem).

(H5) Przepływy turbulentne można opisać za pomocą skończonej liczby parametrów.

Domniemanie to, wywodzące się z rozważań fenomenologicznych, ma mocne wsparcie w teorii matematycznej. Gdyby było prawdziwe, to być może przepływy turbulentne można by było np. opisać za pomocą skończonego układu równań różniczkowych zwyczajnych, i dalej, stosując obliczenia numeryczne, obliczać rozmaite interesujące nas wielkości. Badania dotyczące tego domniemania są jeszcze dalekie do zakończenia, idą w różne strony i polegają na oszacowaniach wymiaru atraktora, liczby węzłów determinujących czy liczby harmonik determinujących danego przepływu, na razie dla przepływów dwuwymiarowych. Pytanie o harmoniki determinujące np. dotyczy problemu istnienia skończonej liczby harmonik pola wektorowego prędkości wyrażonego przez szereg Fouriera, takich, że ich ewolucja w czasie determinuje (w pewnym sensie) zachowanie się pozostałych harmonik. Wiąże się to z nierozwiązanym dotąd problemem zamknięcia w teorii turbulencji, wynikającym z podstawowego faktu, że operatory uśrednień nie komutują z operatorami nieliniowymi, np. $\langle u^2 \rangle \neq \langle u \rangle^2$.

Literatura.

1. P.A. Davidson, *Turbulence. An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press, 2004.
2. C. Foias, O. Manley, R. Rosa, R. Temam, *Navier–Stokes Equations and Turbulence*, Cambridge University Press, 2003.
3. A.S. Monin, A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics. Mechanics of Turbulence*, Dover Publications, 2007.

Zbiory kresowe dla wielomianów o współczynnikach całkowitych

Tomasz KOBOS

Niech f będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Zajmować się będziemy dzielnikami pierwszymi liczb $f(x)$ dla x całkowitego oraz potęgami, w których te dzielniki występują. Na przykład, powszechnie wiadomo, że jeżeli tylko wielomian f nie jest stały, to zbiór takich liczb pierwszych p , iż $p|f(x)$ dla pewnego x całkowitego, jest nieskończony. Można postawić ogólniejsze pytanie: czy dla każdej liczby naturalnej m zbiór takich liczb pierwszych p , że $p^m|f(x)$ dla pewnego całkowitego x , jest nieskończony? Warto też zastanowić się nad zbiorem tych liczb pierwszych, które nie dzielą wartości wielomianu f dla żadnego argumentu całkowitego. Na początek jednak wprowadzimy kilka pojęć, które przydadzą się w dalszych rozważaniach.

Dla liczby pierwszej p , która nie dzieli współczynnika przy najwyższej potędze w wielomianie f , definiujemy jej *kres* względem wielomianu f jako największą liczbę całkowitą nieujemną m , dla której istnieje $x \in \mathbb{Z}$, takie, że $p^m|f(x)$. Jeśli takie największe m nie istnieje, przyjmujemy, że kres jest nieskończony i oznaczamy symbolem ∞ . Kres liczby pierwszej p względem wielomianu f będziemy oznaczać jako $\kappa_f(p)$.

Dla przykładu rozważmy wielomian $f(x) = x^2 + 3$. Jeśli $3|f(x)$, to oczywiście $3|x$, ale wtedy $9|x^2$, a zatem $9 \nmid f(x)$ dla $x \in \mathbb{Z}$. Czyli $\kappa_f(3) = 1$. Mamy też $f(1) = 4$, czyli kres liczby 2 wynosi co najmniej 2. Jednakże, bezpośrednio sprawdzenie wszystkich reszt modulo 8 pokazuje, że $8 \nmid f(x)$ dla $x \in \mathbb{Z}$, a więc $\kappa_f(2) = 2$. Analogicznie sprawdzamy, że $5 \nmid f(x)$ dla $x \in \mathbb{Z}$, czyli $\kappa_f(5) = 0$. Używając nieco bardziej wyrafinowanych metod, możemy udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej m istnieje $x \in \mathbb{Z}$, dla którego $7^m|f(x)$. Zatem, zgodnie z przyjętą umową, piszemy $\kappa_f(7) = \infty$.

Wprowadźmy jeszcze jedno pojęcie. Dla danego wielomianu f i danego $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definiujemy zbiór \mathbb{P}_f^m jako zbiór wszystkich liczb pierwszych, których kres względem wielomianu f wynosi m . Zbiór ten będziemy nazywać *zbiorem kresowym o kresie m* .

Zacznijmy od własności pewnej szczególnej rodziny zbiorów kresowych – zbiorów kresowych o kresie 0. Dla danego wielomianu f jego zbiór kresowy o kresie 0 jest więc zbiorem tych liczb pierwszych, przez które wartości wielomianu **nie są** podzielne dla żadnego argumentu całkowitego (pomijamy liczby pierwsze dzielące współczynnik przy najwyższej potędze). Taki zbiór oczywiście nie musi być nieskończony, za przykład wystarczy wziąć dowolny wielomian stopnia 1. Jednak już wśród wielomianów kwadratowych możemy znaleźć takie, których zbiór kresowy o kresie 0 jest nieskończony, za przykład służy bowiem wielomian $f(x) = x^2 + 1$, którego wartości w punktach całkowitych nie mają dzielników pierwszych postaci $4k + 3$. Okazuje się, że dla dowolnego $n > 1$ istnieje wielomian f stopnia n , dla którego zbiór \mathbb{P}_f^0 jest nieskończony. Konstrukcja takiego wielomianu w przypadku $n > 2$ nie jest już zupełnie prostym zadaniem, ale stosunkowo łatwo można wykazać, że jeśli p jest daną liczbą pierwszą, a n ustaloną liczbą naturalną, to istnieje wielomian f stopnia n , taki, że $\kappa_f(p) = 0$.

Przejdźmy teraz do własności zbiorów kresowych o kresie będącym liczbą całkowitą dodatnią. Podobnie jak poprzednio, jesteśmy w stanie udowodnić, że dla danej liczby pierwszej p i ustalonych $n > 1$, $m \in \mathbb{Z}_+$ można znaleźć wielomian f stopnia n , dla którego $\kappa_f(p) = m$. Do skonstruowania takiego wielomianu przydaje się istnienie wielomianu F stopnia n , dla którego $\kappa_F(p) = 0$. Idźmy dalej: jeśli dla danych liczb pierwszych p_1, p_2, \dots, p_s mamy s wielomianów f_1, f_2, \dots, f_s stopnia n , takich, że $\kappa_{f_i}(p_i) = m$, to, używając Chińskiego Twierdzenia o Resztach, bez trudu możemy dowiedzieć, że istnieje wielomian f (oczywiście również stopnia n), dla którego $\{p_1, p_2, \dots, p_s\} \subseteq \mathbb{P}_f^m$. W szczególności oznacza to, że mocy zbiorów kresowych nie da się ograniczyć przez żadną liczbę naturalną – tzn. dla każdego C zawsze

W rzeczywistości wskazanie wielomianu f stopnia n , dla którego zbiór \mathbb{P}_f^0 jest nieskończony, nie jest kłopotliwe. Trudniejszym zadaniem jest pokazanie, że dany wielomian faktycznie spełnia żądany warunek. Zupełnie elementarnie można jednak dowiedzieć, że jeśli p jest dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby n , to takim wielomianem jest $f(x) = x^n - p$.

znajdziemy wielomian f , dla którego $|\mathbb{P}_f^m| > C$ (wystarczy dobrać odpowiednio duże s). Nasuwa się pytanie: czy moc zbioru \mathbb{P}_f^m może być nieskończona dla $m > 0$? (dla $m = 0$ wiemy, że jest to możliwe). Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Jesteśmy w stanie udowodnić nawet więcej, gdyż prawdziwe jest następujące

Twierdzenie. Dla danego wielomianu f o współczynnikach całkowitych niech $\delta_f = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{P}_f^i$. Wówczas $|\delta_f|$, moc zbioru δ_f , jest skończona.

Kluczem do dowodu powyższego twierdzenia okazuje się być poniższy

Lemat. Niech f będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, m liczbą całkowitą dodatnią, p taką liczbą pierwszą, że $p \in \mathbb{P}_f^m$, natomiast k niech będzie taką liczbą całkowitą, że $p^m | f(k)$. Wówczas $p | f'(k)$.

Dowód opiera się na prostej do udowodnienia za pomocą rozwinięcia dwumianowego Newtona kongruencji: $f(tp^m + k) \equiv p^m t f'(k) + f(k) \pmod{p^{m+1}}$. Jeżeli p nie dzieliłoby $f'(k)$, to moglibyśmy tak dobrać t , by $p^{m+1} | f(tp^m + k)$. To jest jednak sprzeczne z warunkiem $p \in \mathbb{P}_f^m$.

Żeby zobaczyć, w jaki sposób powyższy lemat można wykorzystać do oszacowania mocy zbiorów kresowych od góry, zatrzymajmy się na chwilę przy wielomianie kwadratowym: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Załóżmy, że wyróżnik tego wielomianu $\Delta = b^2 - 4ac$ jest niezerowy. W przeciwnym przypadku nietrudno sprawdzić, że $\mathbb{P}_f^m = \emptyset$ dla każdego m . Niech $p \in \mathbb{P}_f^m$ dla pewnego $m \in \mathbb{Z}_+$, a k niech spełnia warunek $p^m | f(k)$. Wówczas mamy też $p | f(k) = ak^2 + bk + c$ oraz, z powyższego lematu, $p | f'(k) = 2ak + b$. Zauważmy teraz, iż:

$$\begin{aligned} p | 2a(2f(k) - kf'(k)) - bf'(k) &= \\ &= 2a(2ak^2 + 2bk + 2c - 2ak^2 - bk) - 2abk - b^2 = \\ &= 2a(bk + 2c) - 2abk - b^2 = 4ac - b^2 = -\Delta. \end{aligned}$$

Oznacza to, że wszystkie elementy zbioru δ_f są dzielnikami niezerowej liczby całkowitej, wyróżnika wielomianu f . Czyli rzeczywiście $|\delta_f|$ jest skończona.

Co ciekawe, do przypadku wielomianu kwadratowego można podejść w zupełnie inny sposób, wykorzystując postać kanoniczną wielomianu oraz fakt, że jeśli liczba całkowita a , niepodzielna przez daną liczbę pierwszą p , jest resztą kwadratową modulo p , to wtedy jest też resztą kwadratową modulo p^m dla każdego $m \in \mathbb{Z}_+$.

Naturalna jest próba uogólnienia powyższej metody na wyższy stopień wielomianu. Wykorzystując relacje $p | f(k)$ i $p | f'(k)$, chcielibyśmy uzyskać podzielność $p | c$, gdzie c jest stałą zależną tylko od wielomianu f . Jednakże ręczne wykonanie obliczeń już w przypadku wielomianu sześciennego jest dosyć kłopotliwe. Okazuje się jednak, że jest sposób obejścia tego problemu.

Niech f będzie dowolnym wielomianem o współczynnikach całkowitych, $p \in \mathbb{P}_f^m$ dla pewnego $m > 0$, a k niech będzie takie, że $p^m | f(k)$. Możemy też założyć, że wielomian f jest nierozkładalny – rzeczywiście, jeśli $f(x) = p(x)q(x)$ i $|\delta_f|$ jest nieskończona, to wtedy $|\delta_p|$ jest nieskończona lub $|\delta_q|$ jest nieskończona. Wówczas jest on względnie pierwszy ze swoją pochodną, gdyż jest ona wielomianem o stopniu mniejszym. Istnieją więc wielomiany $A(x)$,

$B(x)$ o współczynnikach całkowitych, oraz niezerowa liczba całkowita c , dla których:

$$A(x)f(x) + B(x)f'(x) = c.$$

Mówimy, że wielomian f jest *nierozkładalny*, jeżeli nie da się go przedstawić w postaci iloczynu dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych, z wyjątkiem iloczynu $f(x) = 1 \cdot f(x)$ oraz $f(x) = -1 \cdot (-f(x))$.

Wielomiany $p(x), q(x)$ o współczynnikach całkowitych są względnie pierwsze, jeśli nie istnieje wielomian $r(x)$ o współczynnikach całkowitych i o stopniu dodatnim, taki, że $r(x) | p(x)$ oraz $r(x) | q(x)$.

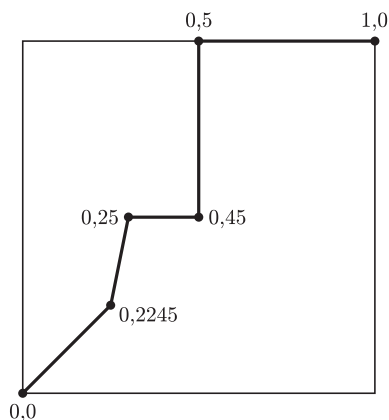
Fakt, który tutaj wykorzystujemy, jest wielomianowym odpowiednikiem podobnego twierdzenia dla liczb całkowitych. Wstawiając do powyższej równości $x = k$ i korzystając z podzielności $p | f(k)$ oraz $p | f'(k)$, dostajemy natychmiast $p | c$. Czyli, tak jak poprzednio, stwierdzamy, że wszystkie elementy zbioru δ_f są dzielnikami niezerowej liczby całkowitej c . A to oznacza, że zbiór δ_f jest skończony.

Na koniec przyjrzymy się zbiorom kresowym o kresie nieskończonym. Okazuje się, że jeśli wielomian f nie jest stały, to zbiór \mathbb{P}_f^∞ jest nieskończony. W szczególności dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p , że $p^m | f(x)$ dla pewnego $x \in \mathbb{Z}$. Jest to więc uogólnienie wspomnianego na początku artykułu rezultatu teorii liczb. Dowód opiera się na zastosowaniu twierdzenia udowodnionego powyżej. Jeśli wiemy, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p , że $p | f(x)$ dla pewnego x , to po odrzuceniu z nich liczb należących do δ_f dostaniemy właśnie zbiór \mathbb{P}_f^∞ .

Jest z pewnością jeszcze wiele pytań, które można postawić w związku z zagadnieniem zbiorów kresowych. Można się, na przykład, zastanowić nad rozszerzeniem jednego z uzyskanych rezultatów: czy dla danej liczby pierwszej p i ustalonych $m, n \in \mathbb{Z}_+$ istnieje wielomian f stopnia n , dla którego $\kappa_f(p) = m$ oraz przynajmniej jeden ze współczynników wielomianu f (nie licząc współczynnika wiodącego) jest niepodzielny przez p (przykład skonstruowany przeze mnie nie spełnia tego warunku)? Mimo że obliczenia przeprowadzone na komputerze dla małych liczb pierwszych mogą sugerować, że jest to prawda, to problemu tego nie udało mi się rozwiązać. A może Czytelnik podejmie to wyzwanie?

Spacerkiem po kwadracie

Adam KOLANY*



Rys. 1

Czy można zaprojektować spacer po kwadracie (pełnym) tak, żeby zwiedzić każdy jego punkt dokładnie raz? Innymi słowy, czy istnieje różnowartościowa funkcja z odcinka $\Delta = [0, 1]$ na kwadrat $K = [0, 1] \times [0, 1]$?

Jak dobrze wiemy, z każdą liczbą r z przedziału Δ można skojarzyć nieskończony ciąg liczb całkowitych ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ – mianowicie jej rozwinięcie dziesiętne. Sugeruje to pewien pomysł na przyporządkowanie punktom przedziału Δ punktów kwadratu. Zdefiniujemy odwzorowanie $\tau : \Delta \rightarrow K$ następująco: niech r będzie dowolnym punktem odcinka i niech $\delta(r) = \langle d_n \rangle_{n=1,2,3,\dots}$ będzie ciągiem cyfr jego nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego zaczynającego się od zera – tak więc $\delta(1) = \langle 9, 9, 9, 9, \dots \rangle$. Podobnie w przypadku niejednoznaczności (liczby postaci $M/10^k$ mają dwa rozwinięcia dziesiętne) wybieramy rozwinięcie nieskończone – czyli gdy w pewnym momencie trafiamy na k i dalej same zera, piszemy zamiast tego $k-1$ i dalej same dziewiątki. Wówczas jako $\tau(r)$ przyjmujemy punkt, którego współrzędne mają rozwinięcia $\langle d_1, d_3, d_5, \dots \rangle$ i $\langle d_2, d_4, d_6, \dots \rangle$, odpowiednio. Tak na przykład:

$$\begin{aligned} \tau(0) &= \tau(0,00000\dots) = \langle 0,000\dots; 0,000\dots \rangle = \langle 0; 0 \rangle, \\ \tau(1) &= \tau(0,99999\dots) = \langle 0,999\dots; 0,999\dots \rangle = \langle 1; 1 \rangle, \\ \tau(0,5) &= \tau(0,49999\dots) = \langle 0,499\dots; 0,999\dots \rangle = \langle 0,5; 1 \rangle, \\ \text{albo } \tau(0,25) &= \tau(0,24999\dots) = \langle 0,299\dots; 0,499\dots \rangle = \langle 0,3; 0,5 \rangle. \end{aligned}$$

A kiedy będziemy w środku kwadratu?

Mamy

$$\langle 0,5; 0,5 \rangle = \langle 0,499\dots; 0,499\dots \rangle = \tau(0,449999\dots) = \tau(0,45).$$

A kiedy w środku lewej dolnej ćwiartki?

$$\langle 0,25; 0,25 \rangle = \langle 0,2499\dots; 0,2499\dots \rangle = \tau(0,22449999\dots) = \tau(0,2245).$$

Prawie dobrze. Łatwo zauważyć, że odwiedzimy każdy punkt kwadratu. Czy aby tylko jeden raz? Niestety nie. Zobaczmy:

$$\tau(0,459090\dots) = \langle 0,499\dots; 0,500\dots \rangle = \langle 0,5; 0,5 \rangle,$$

$$\tau(0,540909\dots) = \langle 0,500\dots; 0,499\dots \rangle = \langle 0,5; 0,5 \rangle,$$

$$\tau(0,45) = \tau(0,449999\dots) = \langle 0,499\dots; 0,499\dots \rangle = \langle 0,5; 0,5 \rangle.$$

Funkcja τ **nie jest** różnowartościowa!!

Zastanówmy się jednak, co my tu mamy?

Co prawda, τ nie jest bijekcją, ale w pewien sposób daje się ją odwrócić. Niech bowiem dla punktu kwadratu $\langle x; y \rangle \in K$, liczba $\varphi(x, y)$ będzie liczbą o rozwinięciu $\langle c_1, d_1, c_2, d_2, \dots \rangle$, gdzie $\langle c_n \rangle_n = \delta(x)$ i $\langle d_n \rangle_n = \delta(y)$. Wówczas, jak łatwo sprawdzić, φ jest różnowartościowe, choć nie jest surjekcją. Ponadto $\tau \circ \varphi = \text{id}_K$, choć niekoniecznie $\varphi \circ \tau = \text{id}_\Delta$ (przykład?).

Skoro jednak φ jest różnowartościowe, to znaczy, że w Δ jest co najmniej tyle punktów, co w K – no bo φ produkuje w Δ dokładną kopię zbioru K , a jeszcze trochę zostaje (może innym odwzorowaniem i tę resztę da się „łyknąć” – w końcu liczb naturalnych jest tyle samo, co liczb całkowitych). Z drugiej strony punktów zbioru Δ jest co najmniej tyle, ile w K , bo K składa się ze swojej podstawy, która wygląda dokładnie jak Δ , i jeszcze tego, co powyżej. (Odpowiada to iniekcji $\pi(r) = \langle r; 0 \rangle$, dla $r \in \Delta$.)

Skoro w Δ jest co najmniej tyle punktów, co w K , a w K jest co najmniej tyle punktów, co w Δ , to na „chłopski rozum” w Δ i w K jest ich tyle samo! Czyli istnieje bijekcja h między Δ i K , a tego przecież nam trzeba.

Dla przekształcenia φ zbioru X w zbiór Y przyjmujemy oznaczenie $\varphi^* X$ dla zbioru wartości $\varphi(x)$ dla wszystkich elementów $x \in X$.

Będziemy też używali powszechnie przyjętych terminów:

$\varphi : X \rightarrow Y$ jest *surjekcją* (odwzorowaniem „na”), gdy dla każdego $y \in Y$ istnieje taki $x \in X$, że $\varphi(x) = y$;

$\varphi : X \rightarrow Y$ jest *iniekcją* (odwzorowaniem różnowartościowym), gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ z równości $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ wynika $x_1 = x_2$;

$\varphi : X \rightarrow Y$ jest *bijekcją* (odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym), gdy jest surjekcją i iniekcją.

Ponadto przypominamy, że przekształcenie id_X to identyczność na zbiorze X , oraz że

$$\bigcup_{j \in J} X_j := \{x : \text{istnieje } j \in J, \text{ takie że } x \in X_j\}.$$

*Pałac Młodzieży w Katowicach

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (3.03.1845, Sankt Petersburg, Rosja – 6.01.1918, Halle, Niemcy) – niemiecki matematyk, twórca teorii zbiorów. Zdefiniował pojęcia równoliczności zbiorów, zbiorów dobrze uporządkowanych. Wprowadził pojęcie liczby porządkowej i kardynalnej. Przez długi czas starał się udowodnić hipotezę continuum (jak się okazało w latach 60. XX wieku – jego wysiłki nie mogły przynieść zadowalającego go rezultatu). W ostatnich latach swojej pracy naukowej odkrył pewne paradoksy w teorii mnogości. Długie lata cierpiał na ciężkie depresje (parokrotnie był z tego powodu hospitalizowany). Pod koniec życia zajmował się mistycyzmem – rozwijał koncepcję Absolutnej Nieskończoności, którą utożsamiał z Bogiem. Z powodu choroby i niemożności uniknięcia paradoksów zaprzestął publikowania prac naukowych.

Felix Bernstein (24.02.1878, Halle, Niemcy – 3.12.1956, Zurich, Szwajcaria) – niemiecki matematyk, uczeń Georga Cantora. Poza przytoczonym twierdzeniem znany z młodzieńczej pracy o liczbach kardynalnych oraz z licznych późniejszych prac ze statystyki, matematyki aktuarialnej oraz biologii matematycznej, w szczególności genetyki.

Ernst Schröder (25.11.1841, Mannheim, Niemcy – 16.06.1902, Karlsruhe, Niemcy) – matematyk niemiecki. Znany głównie ze swoich prac w dziedzinie logiki algebraicznej, w szczególności autor monumentalnego, 3-tomowego dzieła *Wykłady z Algebry Logiki*, która otworzyła drogę logice matematycznej jako samodzielnej dyscyplinie matematycznej.

Formalnie znaczy to, co następuje:

Twierdzenie (Cantor, Bernstein, Schröder). Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Wówczas jeśli istnieją iniekcje $f : A \rightarrow B$ oraz $g : B \rightarrow A$, to istnieje bijekcja $h : A \rightarrow B$.

No tak, ale skąd ją wziąć?

Udowodnimy następujący lemat:

Lemat. Niech A, B oraz f, g będą takie, jak wyżej. Wówczas istnieją takie rozłączne zbiory $A_1, A_2 \subseteq A$ i takie rozłączne zbiory $B_1, B_2 \subseteq B$, że $A_1 \cup A_2 = A$, $B_1 \cup B_2 = B$ oraz $f^*A_1 = B_1$ i $g^*B_2 = A_2$.

Dowód. Zauważmy, że każdy ze zbiorów A_1, A_2, B_1, B_2 wyznacza już pozostałe. No, bo na przykład $A_1 = A \setminus A_2$, $B_1 = f^*A_1 = f^*(A \setminus A_2)$, a $B_2 = B \setminus B_1 = B \setminus f^*(A \setminus A_2)$. Stąd w szczególności dostajemy też

$$A_2 = g^*B_2 = g^*(B \setminus B_1) = g^*(B \setminus f^*A_1) = g^*(B \setminus f^*(A \setminus A_2)).$$

Oznaczając teraz $\Omega(X) = g^*(B \setminus f^*(A \setminus X))$, dla $X \subseteq A$, dostajemy równość $A_2 = \Omega(A_2)$! Innymi słowy szukamy tzw. punktu stałego odwzorowania Ω .

Nietrudno wykazać, że Ω ma następującą własność.

$$\Omega\left(\bigcup_{j \in J} X_j\right) = \bigcup_{j \in J} \Omega(X_j), \text{ dla dowolnych } X_j \subseteq A, J \neq \emptyset.$$

Niech teraz $X_0 = \emptyset$, $X_1 = \Omega(X_0)$, $X_2 = \Omega(X_1)$, ..., $X_{n+1} = \Omega(X_n)$, Wykażemy, że punktem stałym odwzorowania Ω jest np. $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$.

W rzeczy samej, mamy

$$\Omega(Y) = \Omega\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega(X_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_{n+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = Y,$$

no bo przecież $X_0 = \emptyset$. Przyjmując teraz $A_2 = Y$, dostajemy tezę lematu.

Jak zatem zdefiniować h ? To proste:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1 \\ g^{-1}(x), & x \in A_2 \end{cases}.$$

Odwzorowanie h jest dobrze określone na całym A , bo g jest różnowartościowe (a więc można je odwracać). Obrazem A jest całe B , bo punkty z B_1 są wartościami punktów z A_1 , a punkty z B_2 są wartościami funkcji g . Skoro f i g są bijekcjami, odpowiednio na A_1 i B_2 , oraz B_1 i B_2 są rozłączne, to h jest różnowartościowe.

Wróćmy teraz do naszych baranów, czyli do kwadratu z odcinkiem. W roli A , B , f i g mamy tutaj Δ , K , π oraz φ . Z Lematu wynika, że istnieje $\Delta_2 \subseteq \Delta$, dla którego $h : \Delta \rightarrow K$ dane wzorem

$$h(x) = \begin{cases} \pi(x), & x \notin \Delta_2 \\ \varphi^{-1}(x), & x \in \Delta_2 \end{cases},$$

jest bijekcją. Biorąc pod uwagę, że $\varphi^{-1} = \tau$, możemy napisać, że

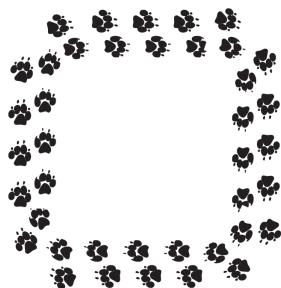
$$h(x) = \begin{cases} \tau(x), & x \in \Delta_2 \\ \pi(x), & x \notin \Delta_2 \end{cases}.$$

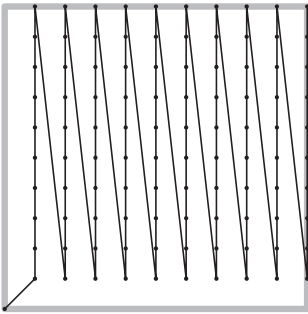
Teoretycznie odpowiedzieliśmy na pytanie zadane na początku – tak, można zwiedzić cały kwadrat, nie odwiedzając żadnego punktu dwukrotnie (w szczególności znaczy to, że w kwadracie i na odcinku jest tyle samo punktów, ale nie to nas teraz interesuje). Nawet przepis wiążący chwilę czasu z punktem, w którym podróżnik ma się znaleźć, angażuje stosunkowo proste operacje: π i τ . Kłopot polega na tym, że nie wiadomo za bardzo, którą kiedy stosować! Nie wiemy przecież, które punkty odcinka należą do Δ_2 !

Przyjrzyjmy mu się zatem trochę bliżej. Wiemy przecież, że

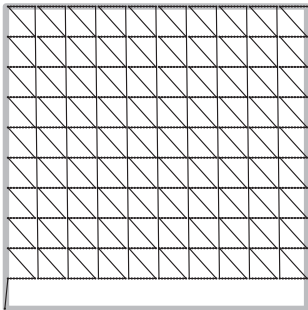
$$\Delta_2 = \Omega(\emptyset) \cup \Omega^2(\emptyset) \cup \dots \cup \Omega^n(\emptyset) \cup \dots, \text{ gdzie } \Omega(X) = \varphi^*(K \setminus \pi^*(\Delta \setminus X)).$$

Dla uproszczenia przyjmijmy, że Δ nie jest odcinkiem $[0, 1]$, tylko dolną podstawą kwadratu K (powrót do sytuacji początkowej nie będzie trudny).

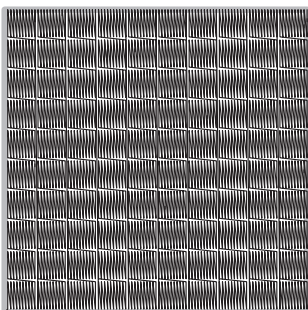




$$\left\{ h \left(\frac{j}{100} : j = 0, \dots, 100 \right) \right\}$$



$$\left\{ h \left(\frac{j}{1000} : j = 0, \dots, 1000 \right) \right\}$$



$$\left\{ h \left(\frac{j}{10000} : j = 0, \dots, 10000 \right) \right\}$$

Rys. 2

Giuseppe Peano (27.08.1858, Spinetta, Włochy, – 20.04.1932, Turyn, Włochy) – włoski matematyk i logik. Od 1890 profesor matematyki na Uniwersytecie w Turynie, a w latach 1887–1901 w akademii wojskowej w Turynie. Opracował stosowaną powszechnie aksjomatykę arytmetyki liczb naturalnych (tzw. aksjomaty Peano). Skonstruował też przykład funkcji ciągłej przekształcającej odcinek domknięty na kwadrat domknięty, co jest sprzeczne z powszechną intuicją. Odwzorowanie to jest zwane krzywą Peano. Działalność Peano wchodzi w skład tzw. włoskiej szkoły matematycznej, która zajmowała się badaniami nad logiką matematyczną i analizą podstaw matematyki. Znanie jest także jego twierdzenie o istnieniu rozwiązań pewnych równań różniczkowych, zwane jego nazwiskiem.

Wówczas π jest po prostu identycznością, a φ z punktu kwadratu robi punkt z jego podstawy, przeplatając jego współrzędne. Z praw działań na obrazach mamy

$$\begin{aligned} \Omega(X) &= \varphi^*(K \setminus (\Delta \setminus X)) = \varphi^*((K \setminus \Delta) \cup (K \cap X)) = \varphi^*((K \setminus \Delta) \cup X) = \\ &= \varphi^*(K \setminus \Delta) \cup \varphi^*X \end{aligned}$$

i tym sposobem

$$\begin{aligned} \Omega(\emptyset) &= \varphi^*(K \setminus \Delta), \\ \Omega^2(\emptyset) &= \varphi^*(K \setminus \Delta) \cup \varphi^*\Omega(\emptyset) = \varphi^*(K \setminus \Delta) \cup \varphi^{2*}K \setminus \Delta, \\ &\vdots \\ \Omega^n(\emptyset) &= \varphi^*(K \setminus \Delta) \cup \varphi^{2*}K \setminus \Delta \cup \dots \cup \varphi^{n*}K \setminus \Delta, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{oraz } \Delta_2 = \varphi^*(K \setminus \Delta) \cup \varphi^{2*}K \setminus \Delta \cup \dots \cup \varphi^{n*}K \setminus \Delta \cup \dots$$

W szczególności $0,5 = \varphi(0,5; 1,0) \in \varphi^*(K \setminus \Delta) \subseteq \Delta_2$.

Mimo iż h spełnia warunki, jakie wyspecyfikowaliśmy na początku, brak mu jednak pewnej cechy, której oczekuje się od „prawdziwych” marszrut. Mianowicie, jeśli ktoś spaceruje po jakimś terenie i np. o 15⁰⁰ wstąpi do restauracji na obiad, to spodziewamy się, że istnieje przedział czasowy wokół tej godziny o tej własności, że w każdej chwili tego przedziału nasz piechur znajduje się w miejscowości, w której ta restauracja się znajduje.

Innymi słowy, od naszego h oczekujemy, że dla dowolnego punktu $x_0 \in \Delta$ (godzina posiłku) oraz otoczenia O (miejscowość) punktu $h(x_0)$ (restauracja) istnieje przedział Λ zawierający x_0 taki, że $h(x) \in O$, dla $x \in \Lambda$. Własność tę nazywamy *ciągłością*.

Okazuje się, że odwzorowanie h ciągle nie jest. Popatrzmy na punkty kwadratu postaci $P_n = \langle 0,5 + \frac{1}{10^n}; \frac{1}{10^n} \rangle$, dla $n = 3, 4, 5, \dots$. Rozwinięcia ich współrzędnych są postaci

$$0,5 \overbrace{0 \dots 0}^{n-2} 1000 \dots = 0,5 \overbrace{0 \dots 0}^{n-1} 999 \dots \quad \text{oraz} \quad 0,0 \overbrace{0 \dots 0}^{n-2} 1000 \dots = 0,0 \overbrace{0 \dots 0}^{n-1} 999 \dots,$$

$$\text{zatem} \quad \varphi(P_n) = 0,5 \overbrace{0 \dots 0}^{2n-1} 999 = 0,5 \overbrace{0 \dots 0}^{2n-2} 1000 \dots$$

Znaczy to w szczególności, że punkty $x_n = 0,5 + 10^{-2n}$ są w Δ_2 , oraz że $h(x_n) = P_n$, gdzie $n \geq 3$. Odległość między $h(0,5) = \langle 0,5; 1,0 \rangle$ a P_n wynosi

$$\sqrt{10^{-2n} + (1 - 10^{-n})^2} > 1 - 10^{-n} \geq 1 - 10^{-3} = 0,999000 \dots$$

W szczególności nie ma takiego przedziału wokół „chwili” $x_0 = 0,5$, żeby w całym tym przedziale wartości h były w odległości od $h(0,5)$ mniejszej niż np. $3/4$.

Rysunek 2 przedstawia kilka migawek z podróży naszego piechura.

Nietrudno jest wykazać, że nie istnieje ciągle i różnowartościowe odwzorowanie odcinka na kwadrat. Wynika to mniej więcej z tego, że jak się w kwadracie zrobi dziurkę (czytaj: usunie punkt), to i tak będzie można dojść z jednego miejsca w drugie. Na odcinku już tak dobrze nie jest. Okazuje się jednak, że istnieje ciągle odwzorowanie odcinka na kwadrat (tzw. *krzywa Peano*), ale to jest już temat na osobny artykuł.



Rozwiązanie zadania M 1199.

Niech $n = a^2 + b^2 + c^2$ oraz przyjmijmy bez straty ogólności, że $a \geq b \geq c$. Wówczas

$$\begin{aligned} n^2 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 = \\ &= (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2) + 4b^2c^2 + 4c^2a^2 = \\ &= (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2bc)^2 + (2ca)^2. \end{aligned}$$

Ponieważ $a^2 + b^2 - c^2 > 0$, więc liczba n^2 została przedstawiona w postaci sumy kwadratów trzech liczb całkowitych dodatnich.

Co, kto, gdzie tak pięknie gra?

Ale skąd wiemy, że pięknie, a skąd, że w ogóle gra? No jak to skąd, przecież mamy uszy.

A który ze zmysłów jest dla nas „ważniejszy”, wzrok czy słuch? Wzrok? Na pewno?

Odpowiedź nie jest taka prosta, jak mogłoby się wydawać. Nie zostaliśmy przez naturę obdarzeni wybitnym słuchem (wzrokiem zresztą też nie, ale przynajmniej z psem wygrywamy na tym polu). W dodatku słuch jest „jednowymiarowy”, a widzimy „trójwymiarowo”. A jednak myślimy za pomocą słów. Słowa mogą być napisane i możemy je czytać bez artykulacji i to dużo szybciej, ale jednak gdy o czymś myślimy, zaczynamy siebie słyszeć. Podobnie, gdy chcemy coś napisać. Zapisujemy to, co mówimy, choć zazwyczaj nie wypowiadamy niczego na głos.

Jednoznacznej odpowiedzi nie ma, ale przynajmniej można zrozumieć, dlaczego jest ona tak trudna do udzielenia. Zmysł słuchu to nie tylko dwoje uszu, to przede wszystkim nasz umysł. Przy czym, o ile dla wzroku można dość jednoznacznie wskazać obszar mózgu odpowiedzialny za przetwarzanie obrazów, o tyle dla słuchu przypisanie to nie jest już tak jednoznaczne. Bodźce słuchowe docierają do nas nie tylko przez uszy. Niskie dźwięki słyszymy całym ciałem, wysokie również poprzez kości czaszki. Całkowicie głusi potrafią tańczyć w rytm muzyki, gdyż drgania podłoża rejestrują poprzez stopy. Każdy, kto choć przez chwilę znalazł się kiedyś na koncercie rockowym albo dyskotekce, wie, że odpowiednio głośny rytm rejestrujemy za pomocą płuc. Ten sam efekt, tylko w bardziej znośnej formie, występuje podczas chóralnego śpiewu. Szczególnie wyraźnie można to odczuć, słuchając dobrego chóru cerkiewnego.

Nie tylko człowiek słyszy czymś więcej niż wyłącznie uszami. Jeżeli ograniczymy się do ssaków, to rządami obdarzonymi niezwykłym słuchem są nietoperze i walenie, zwłaszcza z rodziny delfinowatych. Zwierzęta te mają zdolność echolokacji. Okazuje się ona być podobna do wzroku, tylko wymaga aktywnego udziału w procesie postrzegania, czyli sonoryzacji badanej przestrzeni. O ile jednak przyrzenie się nietoperzowi natychmiast uzasadnia jego zdolności, o tyle delfin w ogóle na obdarzonego znakomitym słuchem nie wygląda. Czy on słyszy? Odpowiednikami małżowin usznych są u delfina dolna żuchwa, dokładniej rozbudowane kanały tłuszczowe w niej się znajdujące oraz asymetryczna czaszka.

Echolokacja, zarówno u delfinów, jak i u nietoperzy, przebiega podobnie. Gatunki te wysyłają serie bardzo krótkich impulsów ultradźwiękowych o różnej wysokości dźwięku. Dźwięki te są skolimowane tym lepiej, im wyższy jest ton impulsu. Im wyższy dźwięk, tym mniejsze objekty mogą być za jego pomocą zlokalizowane. Niższej wysokości impulsy służą do rozpoznawania tła i obiektów znajdujących się po bokach. Zadziwiające zdolności delfinów w tej dziedzinie były badane w ten sposób, że najpierw pozwalano zwierzęciu rozpoznać pewien kształt za pomocą sonaru, a następnie proponowano mu wybranie takiego samego spośród wielu podobnych. Badana osobniczka radziła sobie z tym znakomicie, rozpoznając szczegóły o rozdzielczości

kątowej do jednego stopnia, dowodząc, że delfiny za pomocą sonaru „widzą” prawie tak dobrze jak za pomocą wzroku.

Sposób sondowania przestrzeni przez nietoperze ma dodatkową cechę. Nietoperz nie tylko sam się zazwyczaj porusza ze zmienną prędkością, ale również porusza głową i uszami. W rezultacie powstający obraz przestrzeni musi uwzględniać zmianę położenia receptorów. Okazuje się, że orientowanie się za pomocą takiej sonomotorycznej mapy nie jest tak trudne do wyuczenia jak mogłoby się wydawać. W każdym razie udało się skonstruować sztuczne nietoperze, a raczej sztuczne odpowiedniki sonaru nietoperzy, które dość prostymi metodami uzyskują dokładność odwzorowania taką, jaką można przypisać nietoperzom na podstawie analizy ich zachowania.

Człowiek z tak słuchowo uzdolnionymi zwierzętami rywalizować nie może, ale bierne lokalizowanie źródeł dźwięku idzie nam zupełnie nieźle. Przy czym mechanizm lokalizacji jest zupełnie różny dla dźwięków wysokich i niskich. Wysokie lokalizujemy, głównie rejestrując przesunięcie fazowe sygnałów odbieranych przez lewe i prawe ucho, a niskie za pomocą różnic amplitud. Przejście od jednego sposobu do drugiego następuje dla długości fali porównywalnej do odległości między uszami. Każdą cechę można poprawić treningiem. Okazuje się jednak, że o ile ciągła stopniowa poprawa rozdzielczości jest możliwa przy rozpoznawaniu kierunku za pomocą amplitudy, o tyle trening rozpoznawania za pomocą różnicy fazowej, po początkowej poprawie, pozwala jedynie na polepszanie nieomyślności, a nie rozdzielczości. Dla mnie wygląda to tak, jakbyśmy mieli ograniczoną częstość próbkowania sygnału, co można by było zbadać za pomocą zmiany wysokości sygnału dźwiękowego.

Niezależnie od tego, na ile rozumiemy działanie zmysłu słuchu, pewne sekwencje dźwięków powodują szczególnie silne wrażenia prawie u wszystkich słuchaczy. Tym, którzy nie znają (choć nie jestem pewien czy tacy w ogóle istnieją), proponuję posłuchać np. *The Ecstasy Of Gold* Ennio Morricone (bez trudu można znaleźć w sieci nagrania wideo tej melodii). A jednak ciągle znajdujemy sobie melodie, które w danym momencie podobają się nam bardziej niż inne.

W tej dziedzinie również nie jesteśmy odosobnieni. Podobnie zachowują się humbaki. Przez długi czas sądzono, że po prostu samce nadają modne przeboje, ale ostatnio zdano sobie sprawę, że znajomość melodii pozwala lepiej zrozumieć jej zniekształcenia. Jeżeli znajdujące się niedaleko siebie osobniki śpiewają tak samo, to mają pełniejszą informację o sobie.

Jak zwykle, okazuje się, że warto wzorować się na naturze, a ponieważ czasem trudno ubrać myśl w słowa, proponuję częściej wsłuchiwać się tak w siebie, jak w innych. Przecież my też jesteśmy częścią natury.

Piotr ZALEWSKI

Na podstawie popularnonaukowych wersji referatów przygotowanych na 154. konferencję *Acoustical Society of America*, Nowy Orlean, 27/11–1/12/2007.

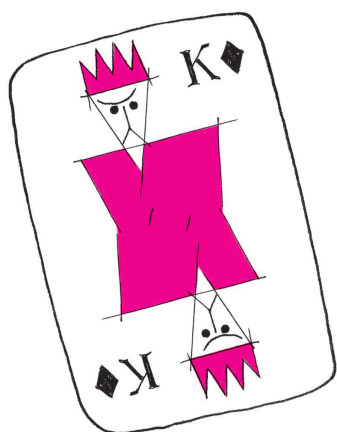


Rozwiązanie zadania F 711.

Z treści zadania wynika, że moc P grzałki jest równa ilości ciepła wypromieniowanego przez wodę w garnku w jednostce czasu. Zatem

$$P\Delta t = cm\Delta T,$$

gdzie c jest ciepłem właściwym wody. Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy $\Delta t \approx 42$ s.



O pewnej sztuczce *Michał SKRZYPCZAK**

Jakiś czas temu pokazano mi pewną sztuczkę karcianą. Pokazywały ją dwie osoby, Karol i Marcin. Najpierw Karol dostał pięć kart wylosowanych z talii. Nie pokazując ich nikomu, wybrał jedną z nich i ukrył przed wszystkimi. Pozostałe cztery ułożył w wybranej przez siebie kolejności i pokazał Marcinowi. Wtedy ten bezbłędnie odgadł, jaka jest piąta, ukryta karta.

Obliczmy. Marcinowi została zaprezentowana pewna permutacja czteroelementowego zbioru kart. Takich permutacji jest $4! = 24$. Następnie odgadł pozostałą, ukrytą kartę. W talii są 52 karty, on widzi 4 z nich, więc pozostaje 48 możliwości. Czyli Marcin dostał $\log_2 48$ bitów informacji, a do podjęcia decyzji potrzebuje $\log_2 48$ bitów. Proste odejmowanie, $\log_2 48 - \log_2 24 = \log_2 2 = 1$, dowodzi, że Marcin ma dokładnie o bit informacji za mało!

W czasie gdy liczyliśmy, oni pokazali sztuczkę następnym kilka razy i zawsze się udawała. W naszych obliczeniach pominęliśmy fakt, że Karol własnoręcznie wybierał tę jedną kartę spośród pięciu. Ale jak wybór Karola może przekazać bit informacji Marcinowi?

Poniżej zaprezentowane jest przykładowe rozwiązanie, jednak przed jego przeczytaniem polecam poszukać własnego.

Rozwiązanie okazuje się (jak zwykle) proste, chociaż (jak zwykle) trudno na nie wpaść. Najpierw opiszę działanie od strony Karola. Dostałem pięć kart. Wśród nich któryś kolor musi występować przynajmniej dwa razy. Powiedzmy, że ten kolor to pik i mamy do czynienia z dwiema kartami w tym kolorze (jeżeli jest ich więcej, to bierzemy pod uwagę tylko dwie). Mówiąc nieścisłe, wybieram tę z nich, od której jest bliżej do drugiej, idąc cyklicznie w górę (2, 3, ... król, as, 2, 3, ...). Ścisłej, kartom od dwójki do asa przypiszmy liczby od 0 do 12 i liczby odpowiadające naszym dwóm pikom oznaczmy a i b . Oznaczmy $(a - b) \bmod 13$ przez A i $(b - a) \bmod 13$ przez B . Oczywiście, $A + B = 13$, obie są dodatnie, więc któraś z nich jest mniejsza niż 7. Z symetrii mogę założyć, że B . W takim przypadku wybieram kartę odpowiadającą liczbie a i mam gwarancję, że druga z nich nie jest dalej niż 6 kart „do przodu” (bo $B < 7$). Teraz pora na permutację, którą przekażę Marcinowi. Pozostały z dwóch pików kładę jako pierwszy, pozostałe trzy karty permutuję według ustalonego algorytmu, tak by zakodować liczbę B . To się uda, ponieważ permutacji jest $3! = 6$, a B jest jedną z liczb $1, \dots, 6$.

Przykładowa metoda kodowania liczb za pomocą permutacji może wyglądać następująco. Mamy do użycia j kart i chcemy za ich pomocą zakodować jedną spośród liczb $\{1, 2, \dots, j!\}$, oznaczmy ją h . Przyjmijmy, że karty te są posegregowane według ich rangi $K_0, K_1, \dots, K_{(j-1)}$. Weźmy kartę $\lfloor \frac{h-1}{(j-1)!} \rfloor$ i połóżmy ją jako pierwszą w permutacji. Następnie za pomocą pozostałych kart zakodujemy indukcyjnie liczbę $((h-1) \bmod ((j-1)!)) + 1$ jako permutację pozostałych $j-1$ kart. Oczywiście, indukcja ta się kończy, gdy mamy zakodować pojedynczą kartą liczbę 1, co wykonujemy, po prostu kładąc kartę na stole.

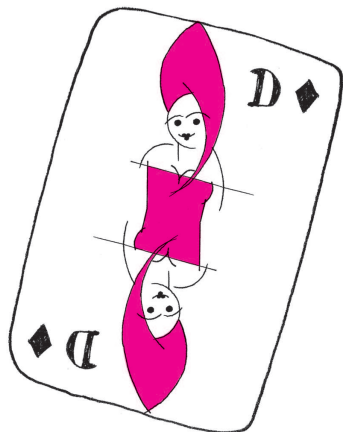
Zadanie Marcina, czyli odkrycie schowanej karty, jest prostsze. Wie, że piąta karta jest takiego koloru jak pierwsza w kolejności. Wystarczy więc, że odkoduje zakodowaną liczbę B na podstawie permutacji ostatnich trzech kart. Wtedy pójdzie o B kart „w górę”, począwszy od pierwszej w kolejności i już wie, jaka karta została ukryta.

Przedstawię teraz, jak działa opisana sztuczka w konkretnym przypadku. Załóżmy, że Karol dostał następujące karty: $3\heartsuit, 5\heartsuit, 9\spadesuit, D\clubsuit, A\diamondsuit$. Jak widać, mamy dwie karty w kolorze karo (\heartsuit), dlatego – zgodnie z przyjętym algorytmem – którąś z nich będziemy kodować. Pomiędzy trójką a asem jest 10 kart ($4, 5, \dots, K$), natomiast pomiędzy asem a trójką tylko jedna (2). Dlatego to $3\heartsuit$ chowamy. Oczywiście, najpierw kładziemy na stole asa karo, jako pierwszą kartę, następnie pozostałe trzy sortujemy według rangi: $D\clubsuit, 5\heartsuit, 9\spadesuit$. Chcemy zakodować liczbę 2, ponieważ idąc od asa do trójki, trzeba zrobić dwa kroki

*student, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

($A \rightarrow 2 \rightarrow 3$). Dlatego najpierw kładziemy $\lfloor \frac{2-1}{(3-1)!} \rfloor = 0$ kartę, czyli $D\clubsuit$, następnie za pomocą kart $5\heartsuit, 9\spadesuit$, kodujemy liczbę $((2-1) \bmod ((3-1)!)) + 1 = 2$, czyli kładziemy następną kartę $9\spadesuit$, no i na koniec pozostałą $5\heartsuit$. Ostateczna kolejność to $A\heartsuit, D\clubsuit, 9\spadesuit, 5\heartsuit$.

Otrzymałszy takie informacje, Marcin przystępuje do dzieła. Od razu wie, że kolor poszukiwanej karty to \heartsuit . Teraz pozostaje zdekodować liczbę B . Ponieważ jako pierwsza wśród kart kodujących permutację jest najmniejsza z nich, więc poszukiwana liczba to 1 lub 2. Następnie występuje starsza spośród pozostałych dwóch kart, więc szukana liczba to 2. Poczynając od pierwszej karty, czyli $A\heartsuit$, odliczamy 2 w górę i uzyskujemy wynik: $3\heartsuit$.



Znamy rozwiązanie, ale czy jest ono optymalne? Widzimy, że gdy więcej niż dwie karty będą tego samego koloru, to w sposób dowolny wybieramy, którymi dwiema z nich się zająć. Może dałoby się jeszcze więcej informacji przekazać tym wyborem? Karol najpierw wybiera jedną kartę z pięciu, potem wybiera jedną permutację z dwudziestu czterech, w sumie ma aż 120 różnych sposobów ułożenia kart. Gdyby udało się w pełni z tego bogactwa skorzystać, Marcin byłby w stanie odgadnąć jedną z 120 kart, więc cała talia mogłaby się składać ze 124 kart!

Przejdźmy do przypadku ogólnego. Przez k oznaczmy liczbę kart losowanych z talii. Karol wybiera jedną z k kart, potem jedną z $(k-1)!$ permutacji, w sumie ma $k!$ różnych możliwości, więc niech nasza talia ma $k! + k - 1$ kart oznaczonych $0, 1, \dots, k! + k - 2$. Oznaczmy wylosowane karty t_0, t_1, \dots, t_{k-1} , tak by $t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1}$. Niech $L \equiv t_0 + t_1 + \dots + t_{k-1} \pmod{k}$. Do odłożenia na bok wybieramy kartę t_L . Od teraz wszystkim kartom w talii, z pominięciem tych $k-1$ kart, jakie mamy na ręku, nadajemy w myślach nowe numery od 0 do $k! - 1$, tak by zachować kolejność. Nowy numer karty t_L oznaczamy przez X . Zauważmy, że dokładnie L kart w naszym ręku ma numery mniejsze od t_L , więc podczas przenieśowania karta t_L spadnie dokładnie o L pozycji, wobec czego $X = t_L - L$. Za pomocą ustalonego algorytmu permutowania tak ustawiamy pozostałe na ręku karty, by kodowały $\lfloor \frac{X}{k} \rfloor$ i pokazujemy je Marciniowi.

Marcin widzi wszystkie $k-1$ kart z naszej ręki, więc jest w stanie tak samo jak my przenieśować wszystkie karty, których nie widzi. Ponadto zna sumę $S \equiv t_0 + \dots + t_{L-1} + t_{L+1} + \dots + t_{k-1} \pmod{k}$. Zauważmy, że $X = t_L - L = t_L - (t_0 + t_1 + \dots + t_{k-1}) \equiv -S \pmod{k}$. Odkodowując liczbę z permutacji, Marcin zna $\lfloor \frac{X}{k} \rfloor$. Skoro $X \equiv k - S \pmod{k}$, to $X = \lfloor \frac{X}{k} \rfloor \cdot k + k - S$. Teraz już prosto, znając X i karty na naszym ręku, Marcin odwraca proces przenieśowywania i poznaje t_L .

A dlaczego nie da się lepiej? Może ograniczenie $k! + k - 1$ na liczebność talii jest zbyt rygorystyczne? Postaramy się to ściśle udowodnić. Ustalmy, że talia składa się z n kart. Wtedy Karol jest postawiony wobec jednej z $\binom{n}{k}$ sytuacji, podejmuje swoje decyzje i przekazuje dane Marciniowi. Ten może dostać od niego dokładnie $\binom{n}{k-1} \cdot (k-1)!$ różnych układów ($k-1$ elementowe, uporządkowane podzbiory zbioru n elementowego). Przypuśćmy, że $\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1} \cdot (k-1)!$. Wtedy, z zasady szufladkowej Dirichleta, niezależnie od sposobu przyporządkowywania, będzie istniał jakiś układ czterech kart, jakie Karol pokazał Marciniowi, któremu to układowi odpowiada więcej niż jeden układ pięciu kart, jakie dostał na początku Karol. Czyli nie każdy układ, jaki dostał na początku Karol, Marcin będzie mógł jednoznacznie odtworzyć. Wobec czego, by sztuczka się udała, musi być $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k-1} \cdot (k-1)!$. Czyli $\frac{n!}{k!(n-k)!} \leq \frac{n!}{(n-k+1)!}$, zatem $k!(n-k)! \geq (n-k+1)!$, co daje $k! \geq n-k+1$, więc $n \leq k! + k - 1$. Udowodniliśmy, że opisany powyżej schemat jest optymalny.

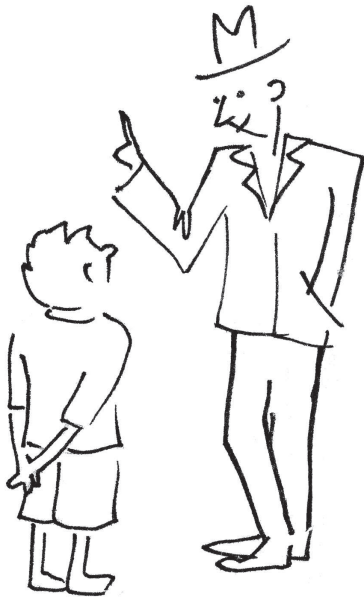
Sztuczkę tę wymyślił w latach dwudziestych XX wieku matematyk amerykański Wiliam Fitch Chaney, Jr. (ur. 1894, zm. 1974). Już w dzieciństwie interesował się sztuczkami magicznymi i ćwiczył swe zdolności manualne, by zabawiać znajomych i rodzinę różnymi trickami. Później, gdy został nauczycielem w Tufts College na początku lat dwudziestych, wykorzystywał swe umiejętności, by zadziwić i zainteresować uczniów lekcją. Po raz pierwszy jego sztuczka została opublikowana w książce Wallaca Lee „Wallace Lee’s Magic Studio”. Od tego czasu pierwotna „five card trick”, wykorzystująca zwykłą 52-kartową talię, doczekała się wielu odmian, począwszy od omówionego rozszerzenia na talię 124-kartową, przez ogólny przypadek k kart, wersję, gdy część kart może leżeć odwrócona, lub możliwość chowania więcej niż jednej karty. Aby poznać więcej wersji, polecam zapoznanie się z artykułem „Fitch Cheney’s Five Card Trick” w *Mathematical Association of America Math Horizons* z lutego 2003 r.



mała delta

Słowna kwota

- Wujku! Przyjmiesz mnie na lato do pracy w twoim biurze?
- A co ty potrafisz robić z prac biurowych, Tomku?
- Bezbłędnie liczę: w głowie, na kalkulatorze i w arkuszu kalkulacyjnym.
- A potrafisz programować komputery w Pascalu?
- Przecież tego się uczyłem na informatyce.
- Mamy tu taki program, który wystawia rachunki, napisany właśnie w Pascalu, ale on nie jest skończony. Brakuje mu części drukującej słownie kwotę rachunku. Potrafiłbyś to zaprogramować?
- Spróbuję. Jeśli na przykład wystawiacie rachunki od jednego złotego do tysiąca złotych, to musiałbym wpisać całe tysiąc możliwych kwot – głośno myśli Tomek.
- Nie bój się. Nie jest tak źle. Nasze rachunki nie przekraczają dwudziestu złotych. Ale za to na końcu trzeba dodawać w odpowiednim przypadku: *złoty*, *złote* lub *złotych*.
- Zaraz nad tym pomyślę – powiedział Tomek, pisząc swój program:



```
procedure SłownaKwota1(zlotych: integer);
begin
  case zlotych of
    0: write('zero ');
    1: write('jeden ');
    {... i tak dalej ... }
    20: write('dwadzieścia ');
  end;

  if zlotych = 1 then write('złoty ') {ost. cyfra 1}
  else if (zlotych >= 2) AND (zlotych <= 4) then write('złote ') {2,3,4}
  else if (zlotych = 0) OR (zlotych >= 5) then write('złotych ') {0,5,6,7,8,9}
end;
```

- Teraz będzie dobrze. Możesz połączyć swój kod z naszym programem do wystawiania rachunków.

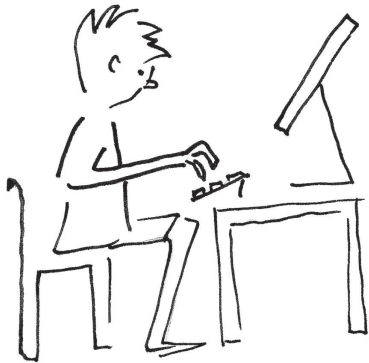
Jakiś czas potem wujek znowu zwraca się do Tomka:

- Wiesz, nasz program obsługuje teraz również inne rodzaje zleceń, więc czy mógłbyś rozszerzyć możliwości programu, by mógł drukować rachunki o wartości do tysiąca złotych?
- Oj, to będzie dla mnie nudna robota. Chociaż? – Tomek zastanawia się chwilę. – Przecież suma do tysiąca złotych składa się z trzech niezależnych części: setki, dziesiątki i jedności. I mój program też tak muszę skonstruować.

Jak powiedział, tak zrobił.

Drzwi mieszkania otworzyły się szeroko i pojawił się w nich Tomek:

- Wiesz mammo! Wujek mnie bardzo pochwalił, że tak mu udoskonaliłem jego program wystawiający rachunki.
- No to brawo! Twoja pierwsza praca i od razu sukces. To może teraz zjesz obiad?
- Nie, jeszcze szybko rozwinę ten program, by liczył dla nawet bardzo dużych kwot. Zacznę od zrobienia z programu dla wujka procedury, która zależnie od parametrów będzie po każdym trzech cyfrach odmieniać: złote, tysiące, miliony, a nawet miliardy.



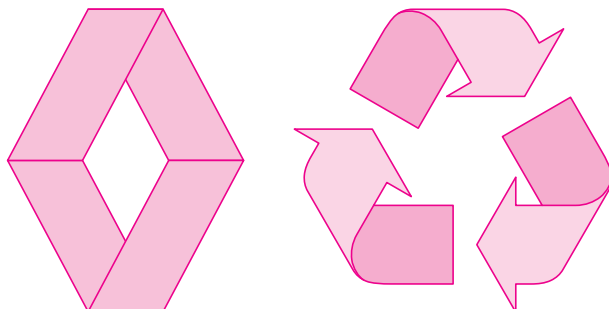
```
procedure NaSlova(Liczba: integer; Pojedyncza,Od2do4,Od5do9: string);
var setki, dziesiątki, jednosci: integer;
begin
  setki := Liczba div 100;
  case setki of
    0:;
    1: write('sto ');
    2: write('dwieście ');
    {... i tak dalej ... }
    9: write('dziewięćset ');
  end;
  dziesiątki := (Liczba - 100*setki) div 10;
  case dziesiątki of
    0:;
    1: write('dziesięć');
    2: write('dwadzieścia ');
    {... i tak dalej ... }
    9: write('dziewięćdziesiąt ');
  end;
  jednosci:= Liczba - 100*setki - 10*dziesiątki;
  case jednosci of
    0:;
    1: write('jeden ');
    {... i tak dalej ... }
    9: write('dziewięć ');
  end
  if (Liczba <> 0) then
    if (Liczba = 1) then write(Pojedyncza);
    else if (jednosci >= 2) AND (jednosci <= 4) then
      write(Od2do4)           {ost. cyfra 2,3,4}
    else write(Od5do9);      {0,1,5,6,7,8,9}
    end
  end;
end;
```

– Teraz moja główna procedura będzie wyglądała następująco:

```
procedure SłownaKwota2(zlotych: integer);
begin
  NaSlova(zlotych div 1000000000, 'miliard ', 'miliardy ', 'miliardów ');
  NaSlova((zlotych div 1000000) mod 1000, 'milion ', 'miliony ', 'milionów ');
  NaSlova((zlotych div 1000) mod 1000, 'tysiąc ', 'tysiące ', 'tysiący ');
  NaSlova(zlotych mod 1000, 'złoty ', 'złote ', 'złoty ');
end.
```

Po jakimś czasie okazało się, że program Tomka ma jeszcze pewne mankamenty: na przykład kwotę 215 zł wypisuje jako „dwieście dziesięć pięć złotych”. Czy pomożesz Tomkowi w odszukaniu i naprawieniu wszystkich niedociągnięć? Upewnij się, że poprawiając nowo odkryte błędy, nie zepsujesz tego, co dotychczas działało!

Małą Deltę przygotował Andrzej P. URBAŃSKI



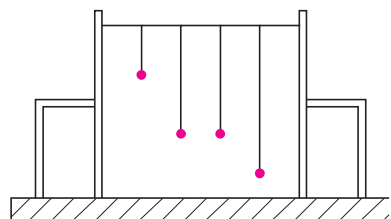
Wbrew rozpowszechnionym opiniom ani logo firmy Renault, ani symbol recyklingu nie przedstawiają wstęgi Möbiusa z klasycznym jednym skręceniem. Ilukrotnie skręcone są stylizowane w tych znakach wstęgi?

mmm

Odpowiedź w numerze.

Badamy zjawisko rezonansu

Stanisław BEDNAREK



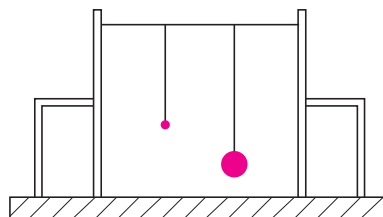
Rys. 1. Układ czterech wahadeł do badania zjawiska rezonansu.

Do przeprowadzenia proponowanych w tym artykule doświadczeń wystarczą nitka, plastelina, nożyczki, linijka, klej do papieru, kawałek kartonu i listewka. Na początek zbadamy zjawisko rezonansu w układzie wahadeł. Będą to w przybliżeniu wahadła matematyczne, to jest takie wahadła, których masa skupiona jest w jednym punkcie i zawieszona na końcu nieważkiej i nierozciągliwej nici. Z plasteliny formujemy cztery niewielkie kulki o średnicy około 1–2 cm. Z nici odcinamy pięć kawałków. Dwa kawałki powinny mieć taką samą długość, np. 50 cm. Trzeci kawałek powinien być dłuższy, np. 70 cm, a czwarty krótszy, powiedzmy, że 30 cm. Piąty kawałek nici o długości w przybliżeniu 100 cm rozwieszamy poziomo, przywiązując jego końce do oparć dwóch krzeseł ustawionych naprzeciw siebie (rys. 1). Do rozwieszonego i lekko naprężonego kawałka nici przywiązujemy w równych odstępach górne końce pozostałych czterech kawałków nici. Dolne końce tych nici wgniatamy w plastelinowe kulki. Odczekujemy przez pewien czas, aż ustaną przypadkowe wahania kulek.

Żeby zaobserwować zjawisko rezonansu, odchylamy od pionu jedno z wahadeł o jednakowych długościach i puszczamy swobodnie. Obserwujemy zachowanie się wszystkich wahadeł. Czy dłuższe i krótsze wahadło odchylają się od pionu? Czy odchyła się drugie wahadło o takiej samej długości? Jakie są maksymalne odchylenia od pionu, czyli amplitudy drgań wahadeł? Co po pewnym czasie dzieje się z wahadłem, które odchyliliśmy od pionu? Już po kilkunastu sekundach widzimy, że drugie wahadło o jednakowej długości zaczyna wykonywać drgania. Amplituda tych drgań powoli wzrasta. Jednocześnie maleje amplituda drgań wahadła, które na początku doświadczenia odchyliliśmy od pionu. Po pewnym czasie wahadło to zatrzymuje się zupełnie, a drugie wahadło o takiej samej długości wykonuje drgania o maksymalnej amplitudzie.

Energia drgań odchylonego na początku wahadła została przekazana drugiemu wahadłu o takiej samej długości. Właśnie to zjawisko przekazywania energii drgań między ciałami o takiej samej częstotliwości drgań własnych nazywamy rezonansem. Drgania własne są to drgania ciała wyprowadzonego z położenia równowagi i puszczanego swobodnie. Częstotliwość drgań własnych wahadła matematycznego f jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka z jego długości i wyraża się następującym wzorem: $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$, litera g w tym wzorze oznacza przyspieszenie ziemskie, które na naszej szerokości geograficznej wynosi $9,81 \text{ m/s}^2$. A co dzieje się z pozostałymi wahadłami? Otóż wykonują one, co prawda, drgania, ale ich amplituda jest bardzo niewielka. Po pewnym czasie okazuje się, że amplituda drgań drugiego wahadła o jednakowej długości maleje do zera, a amplituda drgań pierwszego wahadła jest prawie taka sama, jak na początku. W dalszej kolejności wahadła o jednakowych długościach na przemian przekazują sobie energię drgań. Wskutek oporu powietrza i tarcia wewnątrz nici amplituda drgań tych wahadeł maleje i po pewnym czasie oba wahadła się zatrzymują.

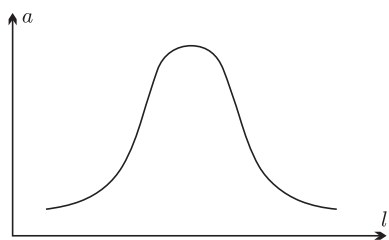
W następnym doświadczeniu wyznaczmy krzywą rezonansu, obrazującą zależność amplitudy drgań od długości wahadła wymuszającego drgania. W tym celu posłużymy się układem dwóch wahadeł, przedstawionym na rysunku 2. Do nici rozpiętej między dwoma krzesłami przywiązujemy pierwsze wahadło złożone z małej kulki plastelinowej, zawieszony na nici o stałej długości. Drugie wahadło będzie składało się z dużej kuli plastelinowej, o średnicy około 4–5 cm, zawieszony na nici, której długość będziemy zmieniać.



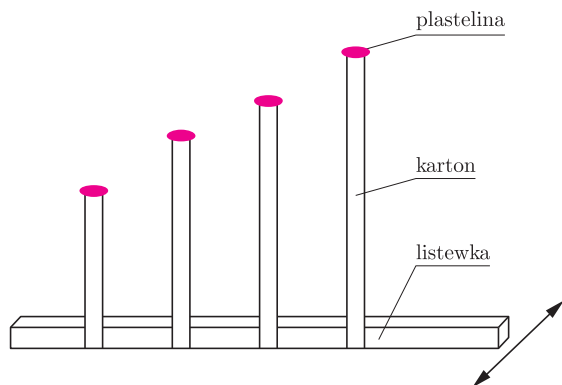
Rys. 2. Dwa wahadła do badania zjawiska rezonansu.

Niech w chwili początkowej oba wahadła będą nieruchome, a drugie wahadło będzie znacznie dłuższe od pierwszego, np. o 30 cm. Drugie wahadło odchylamy od pionu o kilka centymetrów i puszczamy swobodnie. Za pomocą linijki mierzymy największą amplitudę drgań pierwszego wahadła. Zapisujemy tę amplitudę i długość drugiego wahadła. Następnie skracamy drugie wahadło o 3–4 cm i odchylamy od pionu o tyle samo centymetrów, co za pierwszym razem. Ponownie mierzymy maksymalną amplitudę drgań pierwszego wahadła. Powtarzamy te czynności kilka razy, aż do uzyskania długości drugiego wahadła znacznie mniejszej od pierwszego. Zapisane wyniki pomiarów nanosimy na wykres, który będzie miał kształt podobny jak na rysunku 3. Maksimum na tym wykresie odpowiada jednakowej długości obu wahadeł.

Oczywiście, zjawisko rezonansu zachodzi nie tylko w układzie wahadeł matematycznych. Z kilku pasków papieru, plastelinowych kulek i listewki możemy wykonać rezonator przedstawiony na rysunku 4.

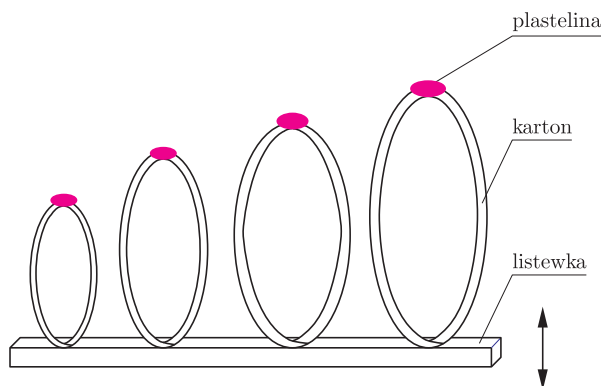


Rys. 3. Krzywa rezonansowa, a – maksymalna amplituda drgań wahadła pobudzanego, l – długość wahadła wymuszającego drgania.



Rys. 4. Rezonator z wahadłami wykonanymi z pasków papieru.

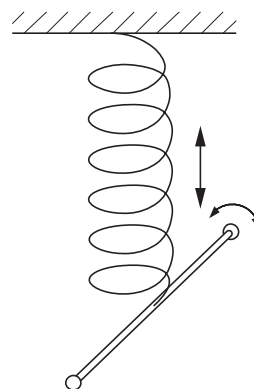
Trzymając dwiema rękami za końce listewki i poruszając ją ze zwiększającą się częstotliwością w kierunku poziomym, obserwujemy, jak kolejno coraz krótsze wahadła osiągną rezonans. Zamiast prostych pasków papieru możemy zastosować paski zwinięte w kształcie okręgów i plastelinowe kulki. Widok takiego rezonatora przedstawia rysunek 5. Rezonator ten wprawiamy w drgania, poruszając listewką ze zwiększającą się częstotliwością w kierunku pionowym.



Rys. 5. Rezonator z papierowymi pierścieniami.

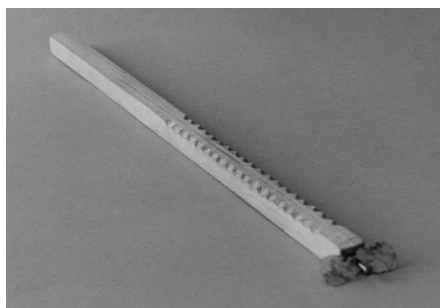
Interesujący i elegancki przypadek zjawiska rezonansu występuje w wahadle Wilberforce'a (rys. 6). Mamy tutaj spiralną sprężynę zawieszoną za górny koniec. Wahadło Wilberforce'a wykorzystuje fakt, że każda sprężyna wprawiona w drgania w kierunku podłużnym wykonuje również drgania skrętne. Do dolnego końca sprężyny przymocowana jest poprzeczka z dwoma ciężarkami, których odległość od osi sprężyny można zmieniać. Wzrost odległości ciężarków powoduje zmniejszenie częstotliwości drgań skrętnych układu. Dla pewnej odległości częstotliwość tych drgań będzie równa częstotliwości drgań podłużnych. Wystąpi wówczas rezonans, podczas którego sprężyna wprawiona

w drgania podłużne wykazuje zanik tych drgań i wzbudzenie drgań skrętnych. Po pewnym czasie drgania skrętne zanikają, a ich energia zmienia się znowu w energię drgań podłużnych.



Rys. 6. Wahadło Wilberforce'a.

Inny, interesujący przypadek zjawiska rezonansu wykazuje tzw. kij indiański przedstawiony na fotografii 1. Mamy tutaj listewkę o przekroju kwadratowym z ponacinanymi korbami. W koniec listewki wbity jest gwóźdź stanowiący oś śmigielka wyciętego z kartonu. Kij indiański trzymamy ręką za wolny koniec. W drugiej ręce mamy pręcik lub ołówek i przesuwamy nim ze zmienną szybkością po korbach listewki. Dla pewnej szybkości przesuwu śmigielko zaczyna się obracać. Zachodzi wtedy rezonans między drganiami podłużnymi listewki, wzbudzonymi przesuwaniem patyka, a jej drganiami skrętnymi.



Fot. 1. Indiański kij.

Zjawisko rezonansu znalazło szerokie i ważne zastosowania praktyczne. Wiele z nich wykorzystujemy na co dzień, często nie zdając sobie z tego sprawy. Dzięki zjawisku rezonansu możliwy jest m.in. odbiór programów radiowych i telewizyjnych. Nasz odbiornik radiowy czy telewizyjny odbiera tylko jedną stację spośród wielu aktualnie pracujących. Częstotliwość fal elektromagnetycznych wysyłanych przez tę stację jest równa częstotliwości drgań własnych obwodów rezonansowych wybranej przez nas pokrętłem strojenia odbiornika.

Zjawisko rezonansu może powodować również negatywne skutki. Zdarzało się, że mosty ulegały załamaniu pod wpływem rytmicznych podmuchów wiatru, czy miarowych kroków maszerującego oddziału żołnierzy. Dlatego też zaleca się, żeby oddziały wojskowe przechodziły przez mosty krokiem dowolnym.

O empirii i teorii na przykładzie uogólnienia gry Penneya

Andrzej WALAT

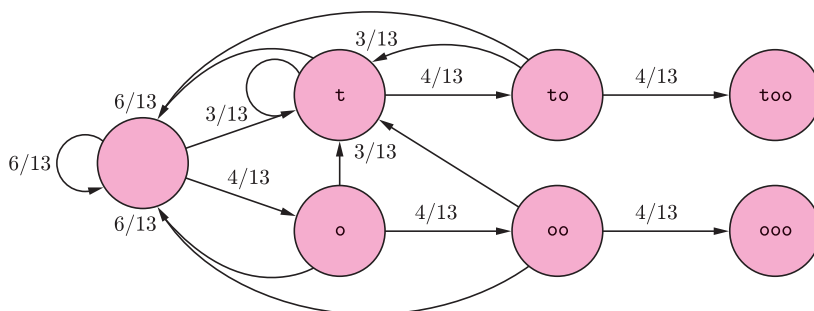
W tym artykule przedstawię rozwiązanie problemu znacznie bardziej ogólnego niż zadanie o grze Penneya opisane w lutowym numerze *Delty* i w książce [1]. Przy okazji pozwolę sobie na komentarz o teorii i empirii w matematyce i informatyce.

Zadanie

Dane jest hasło – jakieś dowolne słowo – na przykład *tobeornottobe*. Alicja i Bob wybierają jakieś słowa utworzone z liter występujących w haśle, na przykład Alicja wybiera *too*, a Bob *ooo*. Następnie uruchamiamy maszynkę losującą, która losuje litery z hasła tak długo, aż wypadnie słowo wybrane przez Alicję lub Boba. Jeśli będzie to słowo wybrane przez Alicję (w naszym przykładzie *too*), to wygrywa Alicja, a w przeciwnym przypadku wygrywa Bob. Jak obliczyć szanse graczy w tej grze?

W szczególnym przypadku, gdy hasło jest dwuliterowym słowem *or* (albo *ro*), otrzymujemy klasyczną grę Penneya. Ale jeśli hasłem jest *oro*, to już jest inna gra. Maszynka losująca wybiera litery *o* oraz *r* z prawdopodobieństwem odpowiednio $2/3$ oraz $1/3$. Do tego przypadku nie stosuje się znane rozwiązanie klasycznego problemu gry Penneya pochodzące od Johna Conwaya. Ale w numerze lutowym opisałem inne algorytmiczne rozwiązanie problemu, które spróbuję teraz uogólnić. Ideę rozwiązania przedstawię na przykładzie.

Zaczynamy od narysowania grafu gry.



Rys. 1

Pola (wierzchołki) grafu odpowiadają siedmiu stanom gry. Stan początkowy jest reprezentowany przez słowo puste. Dwa stany końcowe *too* oraz *ooo* to odpowiednio wygrana Alicji oraz wygrana Boba. Od każdego pola, prócz dwóch końcowych, prowadzą trzy strzałki do innych pól. Przypisujemy im wagi oznaczające prawdopodobieństwa przejścia od danego pola (stanu gry) do odpowiedniego następnego pola (stanu gry).

W polach grafu zamiast słów będę wpisywał liczby.

Wpisujemy wartości liczbowe w polu początkowym oraz polach *t* oraz *o* – pierwszych polach na ścieżkach prowadzących do wygranej Alicji i Boba.

W polu początkowym wpisujemy liczbę 0.

W pierwszym polu na ścieżce Alicji wpisuję liczbę 1.

Te dwie liczby wybrałem dowolnie. Mógłbym wybrać inne liczby. Dalej jednak wpisując nowe liczby do

kolejnych pól, będę przestrzegał **zasady średniej ważonej**:

Jeśli z pola p wychodzą 3 strzałki z wagami w_1, w_2, w_3 odpowiednio do pól p_1, p_2 oraz p_3 , to wartości liczbowe w tych polach l, l_1, l_2 oraz l_3 muszą spełniać następującą równość: $w_1 \cdot l_1 + w_2 \cdot l_2 + w_3 \cdot l_3 = l$.

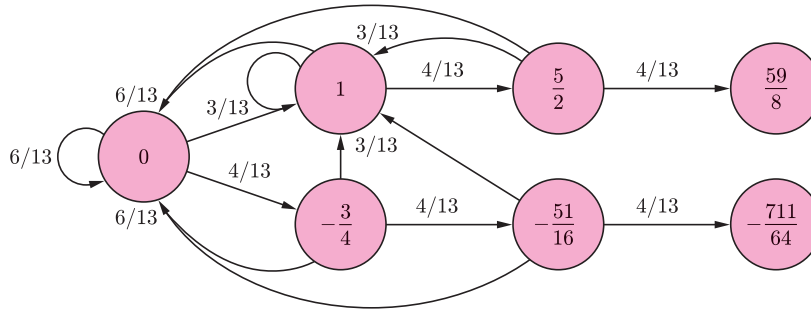
Inaczej mówiąc, wartość liczbową w polu p musi być średnią ważoną liczb w polach p_1, p_2 oraz p_3 .

Z pola początkowego grafu wychodzą trzy strzałki: z powrotem do tego pola oraz do pól *t* i *o*. Liczba w polu *o* musi spełniać następujące równanie z jedną niewiadomą x :

$$\frac{6}{13} \cdot 0 + \frac{3}{13} \cdot 1 + \frac{4}{13} \cdot x = 0.$$

Rozwiązujemy równanie i wynik $x = -3/4$ wpisujemy do pola *o*.

Postępując dalej w ten sposób, otrzymujemy:



Rys. 2

Prawdopodobieństwo sukcesu Alicji obliczamy ze wzoru: $p = \frac{|B|}{A+B}$, gdzie A oraz B to liczby w polach końcowych grafu odpowiadających wygranej Alicji oraz Boba. W naszym przykładzie $p = \frac{711}{1183} \approx 0,601$.

Pełny zapis zarysowanego algorytmu w postaci procedur w Logo znajduje się w aneksie do tego artykułu na stronie WWW *Delty*, ale pozostaje jeszcze otwarta kwestia poprawności. Jak możemy się przekonać, że algorytm daje poprawne wyniki?

W matematyce przekonanie nieoparte dowodem nazywamy hipotezą. Standardową metodą weryfikacji hipotez jest dowód. W naukach przyrodniczych ceni się weryfikacje empiryczne. Informatyka zawdzięcza wiele matematyce, ale przejęła również pewne elementy nauk przyrodniczych. Liczą się nie tylko formalne matematyczne dowody, ale również empiryczne weryfikacje.

Budujemy komputerowy model gry

Dla danego hasła oraz słów Alicji i Boba wynik gry jest taki, jaki daje kontynuacja gry od jej stanu początkowego – słowa pustego.

```
oto gra :hasło :alicja :bob
wynik kontynuacjaGry "
już
```

Wynik kontynuacji gry od dowolnego (aktualnego) stanu ustalamy w następujący sposób. Jeśli aktualny stan jest słowem końcowym Alicji lub Boba, to wynikiem jest ten stan. W przeciwnym przypadku wynik daje kontynuacja gry od następnego stanu.

```
oto kontynuacjaGry :stan
jeśli lub (:stan=:alicja) (:stan=:bob)
    [wynik :stan]
wynik kontynuacjaGry następny :stan
już
```

Następny stan to najdłuższy sufiks słowa utworzonego z danego stanu i litery wybranej losowo z hasła, będący prefiksem jednego ze słów końcowych Alicji lub Boba.

```
oto następny :stan
wynik suprefiks słowo :stan los :hasło :alicja
    :bob
już
```

```
oto suprefiks :s1 :s2 :s3
jeśli puste? :s1 [wy :s1]
jeśli lub numel :s1 :s2 = 1 numel :s1 :s3 = 1
    [wy :s1]
```

```
wynik suprefiks bp :s1 :s2 :s3
już
```

Zdefiniuję jeszcze pomocniczą funkcję *czsa*, która dla danego hasła i słów Alicji i Boba oblicza częstość sukcesów Alicji w serii n gier.

```
oto czsa :hasło :alicja :bob :n
niech "l 0
powtórz :n [jeśli gra :hasło :alicja :bob
    = :alicja [zwiększ "l]]
wynik :l / :n
już
```

Teraz możemy już skonfrontować nasz wynik teoretyczny z eksperymentem. Po napisaniu polecenia: `powtórz 10 [pisz czsa "tobeornottobe "too "ooo 10000]` na ekranie mojego laptopa pojawiło się dziesięć empirycznych częstości: 0.6039, 0.6045, 0.6008, 0.6001, 0.6008, 0.6103, 0.5984, 0.6017, 0.6004, 0.5976.

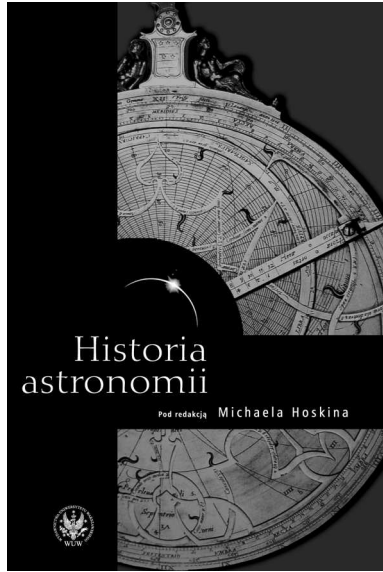
Ciekawostka

Jakie byłyby szanse Alicji w pojedynku z Bobem, gdyby wybrała ona dwuliterowe słowo *to*, a Bob – słowo *oo*? W artykule [2] obliczyłem, że aby losując litery z hasła *tobeornottobe* otrzymać *to*, potrzeba średnio $\frac{13}{4} \cdot \frac{13}{3} = \frac{169}{12} \approx 14,08$ losowań. Na wygenerowanie słowa *oo* trzeba średnio czekać trochę krócej (patrz [3]) $\frac{13}{4} + (\frac{13}{4})^2 = \frac{221}{16} \approx 13,81$.

Mogłoby się wydawać, że w takim przypadku Alicja ma trochę mniejsze szanse wygrania pojedynku niż Bob, ale to nieprawda. Słowo *to* wygrywa z *oo* w stosunku 51:40, czyli prawdopodobieństwo, że *to* Alicja zwycięży, jest równe $\frac{51}{91} \approx 0,56$.

Literatura

[1] Graham L. R. L., Knuth D. E., Patshnik O. (1996). *Matematyka konkretna*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
 [2] Walat A. *Grać albo nie grać*. Delta 10/2007.
 [3] Walat A. *Empiryczne badanie uogólnionej wersji gry Hamleta*. Delta 11/2007.



pod redakcją Michaela Hoskina (przełożył Jarosław Włodarczyk), Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego 2007.

Już po spisie treści widać, że tzw. astronomia nowoczesna zajmuje połowę (drugą) książki. Potencjalny Czytelnik może więc oczekiwać, że jej pierwsza połowa będzie poświęcona dochodzeniu ludzkości do kulistości Ziemi, do jej ruchów itd., a więc do prawd obecnie niewątpliwych, wszystkim znanych i wprawdzie ważnych, ale w gruncie rzeczy nieciekawych. I właściwie tak jest, z tą tylko poprawką, że w ujęciu Autorów sprawa jest ciekawa. Złośliwie można by stwierdzić, że to obecnie produkowanie odkryć odbywa się dość rutynowo. No bo jeżeli wziąć silniejszy mikroskop, większy teleskop lub potężniejszy akcelerator, to jakichś odkryć musi się dokonać. Oczywiście nie jest dokładnie tak, bo np. teleskopu nie kieruje się w niebo na ślepo, ale dawni badacze w ogóle nie mieli teleskopów i dlatego dojście do tych banalnych obecnie prawd trwało tak długo i mozolnie i historia tych odkryć jest tak ciekawa. Bowiem właśnie dzięki wysiłkowi tych dawnych obserwatorów nieba jesteśmy obecnie na właściwej drodze do poznawania świata – w każdym razie żyjemy w takim przekonaniu. Dzisiejsi astronomowie mają niemal komfortowe warunki pracy, bo przecież już wiedzą, co obiega i co jest obiegane, jakie odległości dzielą nas od kosmicznych obiektów, z czego te obiekty są zbudowane, itd. I nie grozi im żadne prześladowanie, najwyżej nieprzyjęcie pracy do druku. Krótko mówiąc wydaje się, że ciężka praca, dzięki której znamy zasadnicze zręby budowy Wszechświata, została już wykonana. Nic więc dziwnego, że Autorzy poświęcili jej historii połowę książki. Oczywiście nowe, nieraz zaskakujące obserwacje, dowodzące zachodzenia niezwykłych zjawisk, wymagają do zrozumienia solidnej współczesnej wiedzy, a ich interpretacja bywa bardzo trudna. I w tym jest zadanie dla współczesnych ludzi nauki i o tym również można przeczytać w omawianej książce.

Jej polskie wydanie zostało uzupełnione rozdziałem poświęconym historii astronomii w Polsce, napisanym przez tłumacza. Można się założyć, że przeciętny Polak poza Kopernikiem nikogo z polskich astronomów nie byłby w stanie wymienić. Kto np. wie, że jeszcze przed

powstaniem Uniwersytetu Jagiellońskiego działał w Paryżu Franko z Polski, albo co wiemy o Witelonie? Dlatego warto tę książkę przeczytać nie tylko w celu zdobycia informacji o faktach, ale również o tym, jak te fakty ustalono i co z tego wynikało. Polecamy.

T. K.



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 711. Do garnka nalano litr wody i bezskutecznie próbowano zagotować za pomocą grzałki o mocy 100 watów. Grzałkę odłączono. Oszacować czas, po jakim woda ostygnie o jeden stopień Celsjusza.

Rozwiązanie na str. 12

F 712. Do niewielkiego czajnika o objętości jednego litra nalano niemal do pełna wody o temperaturze $t_1 = 30^\circ$. Czajnik ten stygnie o jeden stopień w czasie $\tau = 5$ minut. Aby czajnik dalej nie stygł, nalewa się do niego małymi kroplami (o masie $m_k = 0,2$ g każda) gorącą wodę o temperaturze $t_2 = 45^\circ$. Ile kropli na minutę należy dolewać, aby czajnik miał stałą temperaturę 30° ? Rozszerzalność cieplną wody pomijamy.

Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Waldemar POMPE

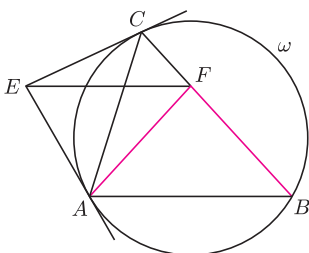
M 1198. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n kończącą się cyframi 34, podzielną przez 34 oraz o sumie cyfr równej 34.

Rozwiązanie na str. 24

M 1199. Liczbę n można przedstawić w postaci sumy kwadratów trzech liczb całkowitych dodatnich. Dowieść, że liczbę n^2 można także przedstawić w postaci sumy kwadratów trzech liczb całkowitych dodatnich.

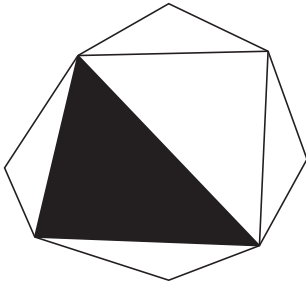
Rozwiązanie na str. 10

M 1200. Okrąg ω jest opisany na trójkącie ABC (rysunek). Styczne do okręgu ω w punktach A i C przecinają się w punkcie E . Prosta przechodząca przez punkt E i równoległa do prostej AB przecina odcinek BC w punkcie F . Wykazać, że $AF = BF$.
Rozwiązanie na str. 4



Informatyczny kącik olimpijski (6) – od przybytku głowa (nie) boli

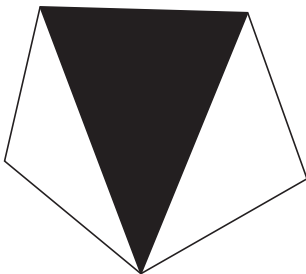
Tym razem dwa zadania „z haczykiem”.



Rys. 1

Pierwsze zadanie (VI OI): mamy triangulację n -kąta wypukłego za pomocą nieprzecinających się przekątnych. Jeden z trójkątów tej triangulacji jest pomalowany na czarno (rysunek 1). Dwaj gracze na przemian odcinają od wielokąta po jednym trójkącie. Gracz, który odetnie czarny trójkąt, wygrywa. Na wejściu mamy liczbę n oraz opis triangulacji w postaci listy $n - 2$ trójek (a, b, c) definiujących kolejne trójkąty (wierzchołki wielokąta są ponumerowane kolejno od 1 do n). Czarny trójkąt jest wymieniony jako pierwszy. Musimy odpowiedzieć na pytanie: który gracz ma strategię wygrywającą?

I drugie zadanie (BOI 2001): wiejski listonosz roznosi pocztę po okolicy. Każda wieś leży przy drodze albo na przecięciu dwóch lub czterech dróg, zatem można z niej wyjść w 2, 4 lub 8 kierunkach (niektóre drogi mogą prowadzić ze wsi do niej samej, a pomiędzy dwiema wsiami może być więcej niż jedna bezpośrednia droga). Budynek poczty jest w jednej ze wsi. Listonosz musi odwiedzić wszystkie wsie, a ponadto musi przejść wzdłuż wszystkich dróg (przy nich też stoją domy) i wrócić na pocztę. Za przejście każdej mili poczta płaci listonoszowi 1EUR. Ponadto mieszkańcy każdej wsi chcą, aby listonosz odwiedził ich jak najwcześniej, dlatego poczta zawarła z każdą ze wsi (wsie numerujemy liczbami $i = 1, \dots, n$) umowę, w której określona jest pewna liczba $w(i)$: mianowicie, jeśli listonosz odwiedzi wieś numer i jako k -tą w kolejności (tzn. odwiedził wcześniej dokładnie $k - 1$ różnych innych wsi) oraz $k \leq w(i)$, to wieś dopłaca pocztę $w(i) - k$ EUR, a jeśli $k > w(i)$, to poczta karnie płaci wsi $k - w(i)$ EUR. Jak wyznaczyć trasę listonosza, aby zmaksymalizować zysk (ew. zminimalizować stratę) poczty? Na wejściu mamy daną liczbę wsi n , opis grafu dróg i umówione wartości $w(i)$, $i = 1, \dots, n$.



Rys. 2

Teraz chwila dla Czytelnika na samodzielne rozwiązanie tych (nietrudnych) zadań...

Gotowe? Rozwiążmy pierwsze zadanie. Jeśli czarny trójkąt znajduje się na brzegu wielokąta, to pierwszy gracz odcina go w jednym kroku i wygrywa. Jeśli nie, to każdy z graczy będzie starał się uniknąć doprowadzenia do takiej sytuacji. Dwa ruchy przed końcem otrzymamy zatem pięciokąt z rysunku 2, po czym gracz, którego ruch przypada, będzie zmuszony doprowadzić do pozycji wygrywającej dla swego przeciwnika. Wcześniejszy przebieg gry nie ma większego znaczenia – gracze odcinają zawsze po jednym trójkącie. Widzimy, że wynik zależy tylko od parzystości n (jeśli n jest parzyste wygrywa gracz, który rozpoczyna grę), a i sama strategia jest prosta i brzmi: odcinaj cokolwiek, byle nie odsłonić czarnego trójkąta z dwóch stron. Całe zadanie można więc rozwiązać w czasie stałym, sprawdzając jedynie czy czarny trójkąt leży na brzegu (jego współrzędne to wówczas trzy kolejne liczby modulo n), a jeśli nie, to czy $2|n$. Nie trzeba, a wręcz nie warto, wczytywać nadmiarowego opisu triangulacji!

Co z zadaniem drugim, które, jak wszystkie problemy optymalizacyjne, wydaje się trudniejsze? Najpierw zmaksymalizujmy zysk poczty względem wiosek, a wyzyskiwaniem samego listonosza zajmiemy się później. Każda wioska wypłaca pocztę kwotę (być może ujemną):

$$w(i) - k(i),$$

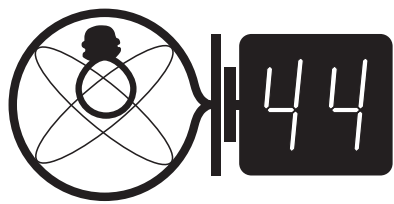
gdzie $k(i)$ jest pozycją tej wioski na liście kolejno odwiedzonych wsi przy danej trasie listonosza. Ciąg $k(1), k(2), \dots, k(n)$ jest permutacją liczb $1, 2, \dots, n$ – każda wioska została odwiedzona jako *któraś* z kolei. Zatem suma wszystkich wpłat wynosi:

$$\begin{aligned} \sum_i (w(i) - k(i)) &= \sum_i w(i) - \sum_i k(i) = \\ &= \sum_i w(i) - n(n+1)/2, \end{aligned}$$

co nie zależy w ogóle od kolejności odwiedzin, a zatem pod tym względem każda trasa listonosza jest jednakowo dobra! Pozostaje zauważyć, że graf dróg ma cykl Eulera (bo stopień każdego wierzchołka jest parzysty), a zatem istnieje trasa, która z każdej drogi korzysta dokładnie raz i niewątpliwie minimalizuje ona pensję listonosza, bo i tak wymagamy od niego przejścia wszystkich dróg. Wynika stąd, że wystarczy po prostu znaleźć w grafie jakikolwiek cykl Eulera (można to robić np. zachłannie). Zatem i w tym zadaniu mieliśmy nadmiarowe dane: wartości $w(i)$ i cała otoczka związana z optymalizacją służyły tylko mydleniu oczu rozwiązującego!

Michał ADAMASZEK

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2008

Zadania z fizyki nr 454, 455

Redaguje Jerzy B. BROJAN

454. Zaproponowano następujący sposób wystrzeliwania statków kosmicznych: należy wydrążyć szyb na wylot przez Ziemię, upuścić do niego rakietę i włączyć silnik rakiety w chwili jej przelotu przez środek Ziemi. O jaką część zmniejszyłoby się zużycie paliwa przy wystrzeleniu tą metodą statku z II prędkością kosmiczną? Przyjąć założenia upraszczające: a) brak oporu powietrza, b) stała gęstość Ziemi, c) krótki czas działania silnika, d) bardzo wielka prędkość wylotu gazów z dyszy silnika (równoważne założenie: zużycie paliwa nie wpływa na zmianę masy statku).

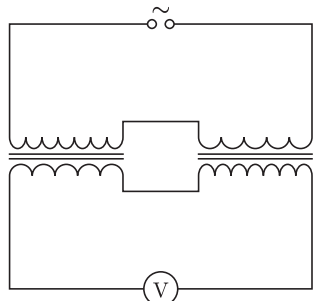
455. Połączono szeregowo uzwojenie pierwotne transformatora z uzwojeniem wtórnym drugiego identycznego transformatora i zestaw podłączono do napięcia przemiennego o wartości skutecznej $U_1 = 100 \text{ V}$. Drugie uzwojenia również połączono szeregowo (rys. 1) i zmierzono łączne napięcie, które okazało się równe $U_2 = 50 \text{ V}$. Ile wynosi przekładnia transformatorów?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2007

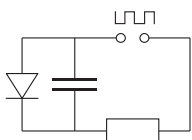
Przypominamy treść zadań:

446. Do źródła napięcia o przebiegu prostokątnym (tzn. $U = +U_0$ w ciągu czasu T , następnie $U = -U_0$ w takim samym przedziale czasu) przyłączono obwód składający się z opornika o oporze R , kondensatora o pojemności C oraz diody doskonale przewodzącej w kierunku przewodzenia i całkowicie nieprzewodzącej w kierunku zaporowym (schemat obwodu – rys. 2). Jak długo płynie prąd przez diodę w ciągu jednego okresu zmian napięcia?

447. Jednorodny wałek o promieniu r wisi na dwóch pętlach lekkiej i nierozciągliwej nitki, a odległość osi wałka od poziomu zawieszenia jest równa l . Odległość końców każdej z nitki jest równa $2r$. Obliczyć częstotliwość małych drgań takiego wahadła – oś wałka pozostaje równoległa do jej kierunku w położeniu równowagi.



Rys. 1



Rys. 2

446. Prawoskrętny przepływ prądu w obwodzie zaczyna się w chwili, gdy napięcie przyjmuje odpowiedni znak (plus z prawej). Jak wykażemy dalej, kondensator jest wtedy w stanie rozładowanym. Rozwiązując odpowiednie równanie różniczkowe, znajdujemy zależność ładunku kondensatora od czasu:

$$Q(t) = U_0 C (1 - e^{-t/RC}),$$

przy czym dolna okładka będzie naładowana dodatnio. Po przełączeniu znaku napięcia dioda pozostaje jeszcze zablokowana, a prąd zaczyna płynąć lewoskrętnie. Jego natężenie jest większe niż w poprzedniej połowie cyklu, gdyż do napięcia źródła dodaje się napięcie na kondensatorze, początkowo równe

$$U_0 (1 - e^{-T/RC}).$$

Ponownie rozwiązując to samo równanie różniczkowe, znajdujemy

$$Q(t) = U_0 C (-1 + (2 - e^{-T/RC}) e^{-t/RC}).$$

W chwili, gdy Q spada do zera, prąd zaczyna płynąć przez diodę, a kondensator pozostaje dalej rozładowany. Przystawiając do zera wyrażenie

$$-1 + (2 - e^{-T/RC}) e^{-T_1/RC},$$

obliczamy

$$T_1 = RC \ln(2 - e^{-T/RC}).$$

Szukany czas działania diody wynosi $T - T_1$; łatwo wykazać, że jest to wielkość dodatnia.

447. Oznaczmy współrzędne przesunięcia osi wałka przez x i y . Długość lewego prostoliniowego odcinka nitki a i prawego b (zob. rys. 3) można wyznaczyć z równań $(r+x)^2 + (l-y)^2 = r^2 + a^2$ $(r-x)^2 + (l-y)^2 = r^2 + b^2$, natomiast kąty α i β – z równań

$$a \sin \alpha = x + r(1 - \cos \alpha) \quad b \sin \beta = x - r(1 - \cos \beta).$$

Zgodnie z zasadą przybliżenia małych drgań należy ograniczyć się do wyrazów kwadratowych w x , a liniowych w y . Rozwijając wszystkie wyrażenia według tej zasady, dochodzimy do wzorów:

$$a = l + \frac{rx}{l} - y + \frac{x^2}{2l} - \frac{r^2 x^2}{2l^3}, \quad b = l - \frac{rx}{l} - y + \frac{x^2}{2l} - \frac{r^2 x^2}{2l^3},$$

$$\alpha = \frac{x}{l} - \frac{rx^2}{2l^3}, \quad \beta = \frac{x}{l} + \frac{rx^2}{2l^3}.$$

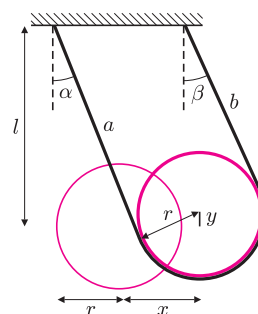
Warunek niezmięnionej długości nici

$$a + b + r(\beta - \alpha) = 2l$$

wyznacza zależność między x a y , czyli tor ruchu wałka. Otrzymujemy $y = \frac{x^2}{2l}$, tzn. oś wałka porusza się w przybliżeniu po okręgu o promieniu l . Aby uwzględnić energię kinetyczną ruchu obrotowego, wystarczy znaleźć kąt obrotu wałka względem układu inercjalnego z dokładnością do wyrazu liniowego w x – wynikiem jest zero. Zatem częstotliwość małych drgań wałka jest równa częstotliwości wahadła matematycznego o długości l

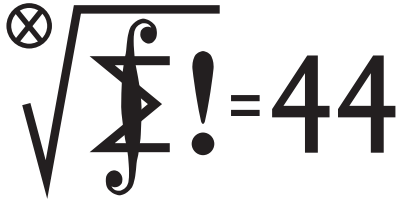
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Czy można ten prosty wynik przekonująco uzasadnić mniej pracochłonnym sposobem, niż przedstawiono wyżej? Zobaczmy, co na ten temat napisali nasi Czytelnicy.



Rys. 3

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2008

Errata

W rozwiązaniu firmowym zadania 546 (*Delta* 1/2008) został w dwóch miejscach błędnie wydrukowany wynik – w ostatnim wierszu środkowego akapitu oraz w ostatnim wierszu całego rozwiązania: oba razy zamiast $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ powinno być $\lceil (n+1)/2 \rceil$ (podane rozumowanie daje właśnie ten ostatni wynik).

Przepraszamy Czytelników za chochlika, który „sufit” zastąpił „podłogą”.

Zadania z matematyki nr 557, 558

Redaguje Marcin E. KUCZMA

557. Okrąg przechodzący przez wierzchołki A, B kwadratu $ABCD$ przecina odcinki BC i BD odpowiednio w punktach P i Q (różnych od B, C i D). Okrąg przechodzący przez punkty C, P, Q przecina odcinek BD w punktach Q i R . Wykazać, że punkty P, R i A są współliniowe.

558. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) dodatnich liczb całkowitych względnie pierwszych, dla których istnieje dodatnia liczba całkowita x , spełniająca warunki:

$$1 + x + \dots + x^{m-1} \text{ dzieli się przez } n,$$

$$1 + x + \dots + x^{n-1} \text{ dzieli się przez } m.$$

Zadanie 558 zaproponował pan Krzysztof Dorobisz z Krakowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/2007

Przypominamy treść zadań:

549. Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $|AB| > |BC| > |CA|$. Odcinek CK jest jego wysokością; punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i AC . Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach P i Q . Udowodnić, że środek okręgu wpisanego w trójkąt KMN leży na prostej PQ .

550. Dla każdej liczby rzeczywistej a wyznaczyć kres dolny zbioru tych liczb rzeczywistych x , które spełniają nierówność $\lfloor x \rfloor \cdot \{x\} \geq a$. (Symbol $\{x\}$ oznacza tu liczbę $x - \lfloor x \rfloor$).

549. Z określenia punktów P i Q wynika, że

$$|AP| = |AQ| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2},$$

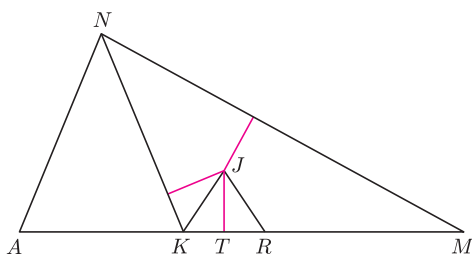
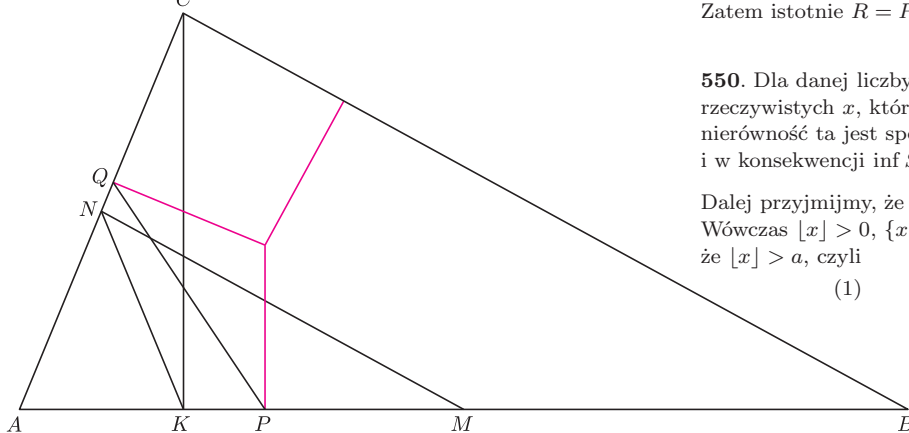
$$\sphericalangle APQ = 90^\circ - \frac{\sphericalangle BAC}{2}.$$

Oznaczmy środek okręgu wpisanego w trójkąt KMN przez J , a jego punkt styczności z bokiem KM przez T ; zatem

$$|KT| = \frac{|KM| + |KN| - |MN|}{2}.$$

Punkt N jest środkiem przeciwprostokątnej AC trójkąta prostokątnego AKC , więc trójkąt AKN jest równoramienny: $|AN| = |KN|$, $\sphericalangle AKN = \sphericalangle KAN = \sphericalangle BAC$. Dwusieczna jednego kąta zewnętrznego MKN przechodzi przez punkt J ; stąd

$$\sphericalangle MKJ = 90^\circ - \frac{\sphericalangle AKN}{2} = 90^\circ - \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \sphericalangle APQ.$$



Niech R będzie punktem symetrycznym do K względem T .

Trójkąt KRJ jest równoramienny, więc

$$\sphericalangle ARJ = \sphericalangle MKJ = \sphericalangle APQ.$$

Ta równość pokazuje, że $RJ \parallel PQ$.

Aby dowieść, że prosta PQ przechodzi przez J , wystarczy teraz wykazać, że punkt R pokrywa się z P . Wykorzystując wcześniejsze zależności, obliczamy:

$$\begin{aligned} |AR| &= |AK| + |KR| = |AK| + 2 \cdot |KT| = \\ &= |AK| + |KM| + |KN| - |MN| = \\ &= |AM| + |KN| - |MN| = \\ &= |AM| + |AN| - |MN| = \\ &= \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2} = |AP|. \end{aligned}$$

Zatem istotnie $R = P$.

550. Dla danej liczby a niech S_a będzie zbiorem tych liczb rzeczywistych x , które spełniają podaną nierówność. Gdy $a \leq 0$, nierówność ta jest spełniona przez każdą liczbę całkowitą x , i w konsekwencji $\inf S_a = -\infty$.

Dalej przyjmijmy, że $a > 0$. Weźmy dowolną liczbę $x \in S_a$. Wówczas $\lfloor x \rfloor > 0$, $\{x\} > 0$, i z nierówności $\lfloor x \rfloor \cdot \{x\} \geq a$ wynika, że $\lfloor x \rfloor > a$, czyli

$$(1) \quad \lfloor x \rfloor \geq [a] + 1.$$

Jeżeli zachodzi tu równość $\lfloor x \rfloor = [a] + 1$, to

$$(2) \quad x = \lfloor x \rfloor + \{x\} \geq \lfloor x \rfloor + \frac{a}{\lfloor x \rfloor} = [a] + 1 + \frac{a}{[a] + 1}.$$

Otrzymana po prawej stronie liczba – nazwijmy ją x_a – spełnia warunek

$$\lfloor x_a \rfloor \cdot \{x_a\} = ([a] + 1) \cdot \frac{a}{[a] + 1} = a,$$

więc należy do zbioru S_a .

Każda liczba $x \in S_a$, dla której nierówność (1) jest ostra, jest większa od x_a . Stąd wniosek, że dla $a > 0$ kresem dolnym zbioru S_a jest liczba x_a , napisana po prawej stronie wzoru (2).



Rozwiązanie zadania M 1198.

Każda liczba naturalna mniejsza od 99934 i kończąca się cyframi 34 ma sumę cyfr mniejszą od 34. Z drugiej strony liczba 99934 nie jest podzielna przez 34. Zatem liczba n musi być co najmniej 6-cyfrowa.

Istnieją tylko trzy liczby 6-cyfrowe, rozpoczynające się cyfrą 1, kończące cyframi 34 i o sumie cyfr równej 34. Są nimi: 189934, 198934 oraz 199834. Tylko jedna z tych liczb jest podzielna przez 34, a mianowicie liczba 198934. Zatem liczba $n = 198934$ jest najmniejszą liczbą naturalną o postulowanej własności.



Rozwiązanie zadania F 712.

W ciągu jednej minuty czajnik stygnie o $\Delta t = 0,2^\circ$, ilość ciepła przez niego wtedy wypromieniowanego wynosi $\Delta Q_1 = cm\Delta t$, gdzie c jest ciepłem właściwym wody. Jeśli do czajnika doda się w tym czasie n kropeł gorącej wody, to przekażą one ciepło $\Delta Q_2 = cnm_k(t_2 - t_1)$.

Aby czajnik nie stygł, powinno zachodzić $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$. Stąd otrzymujemy $n \approx 67$ kropeł na minutę.

Patrz w niebo

Zdalne wyznaczanie składu chemicznego gwiazd nikogo dziś nie dziwi. Służy do tego analiza widmowa ich światła. Wydaje się wobec tego, że nie ma szans na wyznaczenie składu chemicznego czegoś, co nie świeci. Chyba że to coś zostanie sztucznie pobudzone do świecenia. W najprostszym przypadku może to być po prostu odbicie światła od badanej powierzchni. Na przykład z pomiaru, jak światło planetoidy różni się od światła słonecznego, można wnosić o charakterze powierzchni planetoidy. Równie dobrze można wykorzystać do takich badań „świecenie” niewidoczne dla oka. Czujniki orbitera Mars Odyssey „widzą” nawet to, co jest pod powierzchnią Marsa. Mianowicie, cząstki promieniowania kosmicznego, bombardujące powierzchnię planety, uwalniają szybkie neutrony z atomów powierzchniowych minerałów, a część tych neutronów dociera do orbitera. Jednak większość tych neutronów traci energię w wyniku zderzeń z atomami skał, oraz produkowane są przy tym inne niskoenergetyczne neutrony, które też trafiają do czujników orbitera. W gruncie Marsa szczególnie obfitym spowalniaczem (moderatorem) neutronów może być wodór zawarty w wodzie, stwierdzenie więc dużej ilości powolnych neutronów w stosunku do szybkich niewątpliwie dowodzi tego, że orbiter przelatuje akurat nad terenem, gdzie woda (lód) znajduje się dość płytko pod powierzchnią gruntu Marsa.

Pomiary i ich interpretacja istotnie wykazały, że suchy grunt Marsa ma grubość od jednej stopy w wysokich szerokościach areograficznych do metra lub dwóch przy równiku – głębiej jest warstwa bogata w lód. Pogląd więc, że marsyjska woda zawarta jest teraz w wielkich pęknięciach skorupy, nieco osłabił, gdyż wody w samym nawodnionym gruncie (nawet z pominięciem czap polarnych) może być tam 10 000 km³. W dodatku nie wiadomo, do jakiej głębokości sięga jego nawodniona warstwa. Zauważmy też, że oceny zawartości wody na podstawie zawartości wodoru mogą być fałszowane przez wodór zawarty w uwodnionych minerałach znajdujących się nawet w strefie równikowej planety. Zatem takie zdalne pomiary to wspaniałe osiągnięcie, ale chyba nie powstrzymają ludzi przed osobistą wizytą na Marsie.

Tomasz KWAST



Marzec

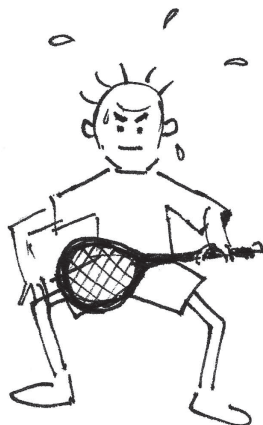
Wieczorami wysoko na niebie, lekko już ku zachodowi, widać dwie wspomniane miesiąc temu bardzo jasne gwiazdy: Procjona (alfę Małego Psa) i Syriusza (alfę Wielkiego Psa). Obie te gwiazdy są gorętsze od Słońca, obie znajdują się stosunkowo blisko (odpowiednio w odległości 3,5 i 2,7 pc) i obie mają białego karła za towarzysza. Oba te białe karły mają zbliżoną gęstość – odpowiednio 200 i 125 kg/cm³. Ponadto akurat Syriusz jest – jak wiadomo – najjaśniejszą gwiazdą całego nieba (któraś gwiazda musi być najjaśniejsza), co zawdzięcza nie tyle własnej mocy promieniowania, co owej małej odległości od nas. Między tymi gwiazdami przebiega Droga Mleczna, dzięki czemu można ją znaleźć w sytuacji, gdy niebo jest lekko zamglone lub powietrze lekko zanieczyszczone.

Merkury znajdzie się 3 III najdalej na zachód od Słońca (obserwować nad ranem), a 5 III zostanie zakryty przez Księżyc – będzie to jednak widać z Południowej Ameryki i Afryki. Również 5 III nastąpi zakrycie Wenus przez Księżyc; ponieważ Wenus jest w Wodniku, to teoretycznie jest widoczna przed wschodem Słońca, ale Słońce jest bardzo blisko niej, a samo zakrycie będzie (raczej również teoretycznie) widać na Pacyfiku i w Ameryce Północnej. Mars jest w Bliźniętach, widać go więc wieczorem już wysoko na niebie. Jowisz jest w Strzelcu i widać go krótko nad ranem, a Saturn we Lwie i widać go przez całą noc. Nów Księżyca wypada 7 III, a pełnia 21 III. Oprócz Merkurego i Wenus Księżyc w marcu zakryje Regulusa 19 III i Antaresa 27 III (a oba te zjawiska będzie widać na południowym Pacyfiku). Dzień wcześniej niż zwykle (bo mamy rok przestępny), czyli 20 III, nastąpi równonoc wiosenna. Żadnych przewidywalnych rojów meteorów nie będzie.

T. K.

Uzuciowy tenisista

Rafał SZTENCEL



Tenisista ma rozegrać trzy mecze. Gdy wygra dwa kolejne, to awansuje. Ma przy tym wybór, może bowiem grać kolejno z mistrzem, kolegą i mistrzem albo też z kolegą, mistrzem i kolegą. Którą możliwość powinien wybrać?

Zadanie to jest od zawsze obecne w elementarnym rachunku prawdopodobieństwa. Niewykluczone, że w jakiejś wersji rozwiązywali je kandydaci na kapłanów w starożytnym Egipcie, i to już za panowania I dynastii (ok. 3000 p.n.e.). Oczywiście stosowne papirusy musiały zaginać.

We współczesnych zbiorach zadań pojawia się ono w rozdziale o niezależności zdarzeń, co już sugeruje, jaki model należy przyjąć: wyniki kolejnych meczów mają być niezależne. Naturalnie szansa pokonania mistrza (p) powinna być mniejsza niż szansa pokonania kolegi (r). Proste rachunki pokazują, że wariant MKM daje awans z prawdopodobieństwem

$$prp + pr(1-p) + (1-p)rp = pr(2-p),$$

i tu drobna niespodzianka – choć dwukrotnie gramy z mistrzem, ten wariant jest korzystniejszy, bo gdy $r > p$, to $pr(2-p) > pr(2-r)$.

Czy taki model dobrze opisuje zachowanie się zawodników? Być może podstawą dla lepszego modelu może być następujące zadanie egzaminacyjne¹:

Uzuciowy tenisista po wygranej piłce wpada w euforię i wygrywa następną piłkę z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$, po przegranej – w depresję, i wtedy wygrywa następną piłkę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Mecz rozpoczyna w stanie euforii. Jaka jest w przybliżeniu szansa, że wygra 99. piłkę?

To zadanie można rozwiązać za pomocą łańcuchów Markowa (można i bez). Model jest nieco lepszy, bo uwzględnia fakt, że stan psychiczny zawodnika, rzutuający na jego skuteczność, zależy od stanu meczu.

Żeby wygrać gema, należy wygrać 4 piłki, zanim zrobi to przeciwnik, a ponadto mieć przewagę 2 lub więcej piłek. Gem nie trwa zbyt długo, choć – zwłaszcza w tenisie amatorskim – zdarza się, że trzeba grać ponad pół godziny.

Przypuśćmy, że zawodnicy grają „na przewagę” i po 30 piłkach żadnemu nie udaje się wygrać. W takiej sytuacji można podejrzewać, że grają oni równie skutecznie i każdy z nich po osiągnięciu przewagi traci czujność, co pozwala wygrać kolejną piłkę przeciwnikowi.

Przeprowadzimy weryfikację statystyczną modelu, o którym była mowa na początku. Prowadzi on do schematu Bernoulliego (niezależnych prób) z prawdopodobieństwem sukcesu równym $\frac{1}{2}$. Wszystkich możliwych ciągów 30 sukcesów (S) i porażek (P) jest 2^{30} , podczas gdy ciągów sprzyjających opisanemu zdarzeniu jest tylko 2^{15} , bowiem muszą one być postaci

$$A_1A_2 \dots A_{15}, \quad \text{gdzie } A_i = SP \text{ lub } A_i = PS.$$

Tak więc przy założeniach modelu szansa, że gra „na przewagę” będzie wymagała co najmniej 30 piłek, jest równa $2^{-15} < 3,1 \cdot 10^{-6}$. Model należy zatem odrzucić.

Można zapytać, jaka jest (przy założeniach modelu) średnia długość gry „na przewagę”. Rozumowanie przeprowadzone powyżej może zasugerować następujący sposób: niech X oznacza długość gry. Wtedy

$$EX = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3) + \dots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots = 4.$$

Skąd wynika pierwsza równość? Ograniczmy się do wskazówki:

$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k + 1).$$

Istnieje obszerna literatura dotycząca prognozowania wyników rozgrywek tenisowych. Na ogół dostęp do artykułów w sieci jest płatny, czemu nie należy się dziwić. Autorzy (bezpłatnego) artykułu [1] twierdzą, że prosty model oparty na łańcuchach Markowa umożliwił prognozowanie wyników turnieju Australian Open na 2003 z pewnością przekraczającą 75%. Model daje prawdopodobieństwo wygranej danego zawodnika w meczu. Jeśli różni się ono od przewidywań bukmacherów, można systematycznie zarabiać na zakładach. Jest to przykład sytuacji, zwanej w finansach arbitrażem: jeśli na rynku pojawia się błędnie wyceniony papier wartościowy, to arbitrażysta dysponujący prawidłową wyceną może na tym zarobić.

¹ Ułożone wspólnie z dr. hab. Krzysztofem Oleszkiewiczem, któremu też zawdzięczam tytuł tego artykułu.

Bibliografia

- [1] Barnett T., Brown A., Clarke S., *Developing a Model that Reflects Outcomes of Tennis Matches*, www.strategicgames.com.au/8mcs.pdf

